УДК 517.925.51

© Л.Д. Замковая

ПРАКТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

На основе метода дискретных неравенств установлены новые достаточные условия практической устойчивости по части переменных нелинейных дискретных систем.

На основі метода дискретних нерівностей встановлено нові достатні умови практичної стійкості за частиною змінних нелінійних дискретних систем.

On the basis of the method of discrete inequalities the new sufficient conditions of practical stability with respect to a part of variables are established for nonlinear discrete systems.

Введение

Математической моделью динамики некоторых механических, экологических и других систем, состояния которых изменяются в дискретные моменты времени, являются системы конечноразностных уравнений. Важное место при качественном анализе поведения решений таких систем вместе с устойчивостью по Ляпунову занимает свойство практической устойчивости, а также свойство практической устойчивости по части переменных [1, 2]. Различные методы исследования устойчивости решений дискретных систем изложены в обзоре [1].

В большинстве работ основным методом исследования практической устойчивости решений дискретных систем является второй метод Ляпунова и, соответственно, результаты сформулированы в терминах функций Ляпунова. В то же время, в обзоре [3] отмечается необходимость разработки подходов к исследованию устойчивости нелинейных систем на основе первого метода Ляпунова.

Настоящая статья посвящена установлению достаточных условий практической устойчивости по части переменных решений квазилинейных дискретных систем, содержащих степенные и суммарные возмущения, при условии, что известны свойства решений системы линейного приближения. При этом используется дискретный аналог формулы Коши и теория дискретных неравенств.

Объект исследования и постановка задачи

Рассматривается система двух суммарно-разностных уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f_1\left(t, x(t), y(t)\right) + \sum_{s=t_0}^{t-1} H_1\left(t, s, x(s)\right), \tag{1}$$

$$y(t+1)=B(t)y(t)+f\left(t,x(t),y(t)\right)+F\left(t,x(t),y(t),\sum_{s=t_0}^{t-1}H\left(t,s,y(s)\right)\right). \qquad (2)$$

Здесь: t –дискретное время; $t\in I=\{t_0,\ t_0+1,\ ...\}$, $t_0\in N_0\subseteq\{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$, N_0 – множество начальных моментов; $x\in R^{k_1}$, $A(t)-(k_1xk_1)$ – матрица; $y\in R^{k_2}$, $B(t)-(k_2xk_2)$ – матрица; $f_1:I\times R^{k_1}\times R^{k_2}\to R^{k_1}$; $H_1:I\times I\times R^{k_1}\to R^{k_1}$; $f:I\times R^{k_1}\times R^{k_2}\to R^{k_2}$; $F_1:I\times R^{k_1}\times R^{k_2}\times R^{k_2}\to R^{k_2}$; $H:I\times I\times R^{k_2}\to R^{k_2}$.

Предполагается, что система (1), (2) имеет единственное решение $x(t)=x(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0)$, $y(t)=y(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0)$, удовлетворяющее условию $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ и существующее при всех $t\in I$. Кроме того, $f_1(t,0,0)=0$; $H_1(t,s,0)=0$; $F\left(t,0,0,\sum_{s=t_0}^{t-1}H(t,s,0)\right)=0$, $t\in I$.

Нелинейной системе (1), (2) поставим в соответствие систему линейного приближения (3), (4):

$$x(t+1)=A(t)x(t), \qquad (3)$$

$$y(t+1)=B(t)y(t). \qquad (4)$$

Относительно линейной системы (3), (4) и возмущений f_1, H, f, F делаются следующие предположения.

Предположение 1. Для матриц Коши $X(t,s)$ системы (3) и $Y(t,s)$ системы (4) выполняются оценки

$$\|X(t,s)\|\le a_1(t)b_1(s),\ t\ge s\ge t_0, \qquad (5)$$

$$\|Y(t,s)\|\le a(t)b(s),\ t\ge s\ge t_0, \qquad (6)$$

с некоторыми положительными функциями $a_1(t)$, $b_1(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $t\in I$.

Предположение 2. Вектор-функции $f_1(t,x,y)$, $H_1(t,s,x)$, $f(t,x,y)$, $F(t,x,y,u)$ в области $E=\{0\le t_0\le s\le t<\infty;|x|<\infty;|y|<\infty;|u|<\infty\}$ удовлетворяют неравенствам:

$$|f_1(t,x,y)|\le q_1(t)|x|,\ \forall y\in R^{k_2}; \qquad (7)$$

$$|H_1(t,s,x)|\le h_1(t,s)|x|; \qquad (8)$$

$$|f(t,x,y)|\le k(t)|y|,\ \forall x\in R^{k_1}; \qquad (9)$$

$$|F(t,x,y,u)|\le g(t)|x|^{\alpha}\cdot|y|^{m}\cdot(|y|+|u|); \qquad (10)$$

$$|H(t,s,y)|\le a(t)h(s)|y|, \qquad (11)$$

где $\alpha > 0$, $0 < m < 1$, $q_1(t)$, $k(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $h_1(t,s)$ – неотрицательные функции при $t \ge s \ge t_0$. Здесь и далее $|\cdot|$ – любая векторная норма в R^n.

Цель данной статьи: установить достаточные условия практической устойчивости по части переменных нулевого решения $x = 0$, $y = 0$ нелинейной системы (1), (2) при предположениях 1 и 2.

Сформулируем определение практической устойчивости по части переменных для дискретных систем на основе соответствующего определения для непрерывных систем.

Определение. Решение $x = 0$, $y = 0$ системы (1), (2) называется (λ, A) практически *y*-устойчивым, где $0 < \lambda < A$, если при любых значениях x_0, y_0, для которых $x(t_0) = x_0$ и $|x_0| < \lambda$; $y(t_0) = y_0$ и $|y_0| < \lambda$ для нормы решения $y(t) = y(t; t_0, x_0, y_0)$ выполняется оценка $|y(t)| < A$ при всех $t > t_0$.

Основные результаты. Введем обозначения.

$$D_1(t,t_0) = a_1(t)b_1(t_0)\prod_{s=t_0}^{t-1}\left[1 + a_1(s)b_1(s+1)q_1(s) + b_1(s+1)\sum_{\tau=t_0}^{s-1} a_1(\tau)h_1(s,\tau)\right]. \quad (12)$$

$$P(t,t_0) = \prod_{s=t_0}^{t-1}(1 + a(s)b(s+1)k(s)). \quad (13)$$

$$R(t,t_0) = P^{m-1}(t+1,t_0)\prod_{s=t_0}^{t-1}[1 + a(s)b(s+1)k(s) + a(s)h(s)]. \quad (14)$$

$$D(t,t_0) = \sum_{s=t_0}^{t-1} b(s+1)g(s)a^{m+1}(s)\cdot P^m(s+1,t_0). \quad (15)$$

Теорема. Пусть:

1) выполняются предположения 1 и 2, где показатель m, $0 < m < 1$;

2) существуют величины $d(t_0)$, $M(t_0)$, $Q(t_0)$, $C(t_0)$ такие, что при $t \in I$:

$$D_1(t,t_0) \le d(t_0), \quad (16)$$

$$a(t)b(t_0)P(t,t_0) \le M(t_0), \quad (17)$$

$$D(t,t_0) \le Q(t_0), \quad (18)$$

$$\sum_{s=t_0}^{t-1} R(s,t_0) \le C(t_0), \quad (19)$$

где D_1, P, D, R определены в (12)–(15);

3) $$\gamma(t_0,\lambda) < 1 \quad (20)$$

где

$$\gamma(t_0,\lambda) = mQ(t_0)b^m(t_0)d^\alpha(t_0)\lambda^{m+\alpha}; \tag{21}$$

4) величины λ, A, $M(t_0)$, $Q(t_0)$, $C(t_0)$, $d(t_0)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{\lambda}{A}M(t_0)\left[1+\frac{(1-m)C(t_0)(b(t_0)\cdot\lambda)^m}{(1-\gamma(t_0,\lambda))^{1/m}}\right]^{1/1-m} < 1. \tag{22}$$

Тогда нулевое решение $x=0$, $y=0$ системы (1), (2) (λ, A) практически y-устойчиво.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий (5), (7), (8) и (16) решение $x(t)$ первого из уравнений системы (1), (2) удовлетворяет оценке

$$|x(t)| \le d(t_0)|x_0|. \tag{23}$$

Исходя из формулы Коши для $x(t)$

$$x(t) = X(t,t_0)x_0 + \sum_{s=t_0}^{t-1} X(t,s+1)\left[f_1(s,x(s),y(s)) + \sum_{\tau=t_0}^{s-1} H_1(s,\tau,x(\tau))\right],$$

учитывая неравенства (5), (7) и (8), получим

$$|x(t)| \le a_1(t)b_1(t_0)|x_0| + \sum_{s=t_0}^{t-1} a_1(t)b_1(s+1)\left[q_1(s)|x(s)| + \sum_{\tau=t_0}^{s-1} h_1(s,\tau)|x(\tau)|\right]$$

Отсюда

$$\frac{|x(t)|}{a_1(t)} \le b(t_0)|x_0| + \sum_{s=t_0}^{t-1}\left(a_1(s)b_1(s+1)q_1(s)\frac{|x(s)|}{a_1(s)} + b_1(s+1)\sum_{\tau=t_0}^{s-1} h_1(s,\tau)a_1(\tau)\frac{|x(\tau)|}{a_1(\tau)}\right)$$

Решение этого неравенства оценим с помощью [4, с. 26, лемма 4]. Используя обозначение $D_1(t,t_0)$ (12) и условие (16), устанавливаем оценку (23).

$$|x(t)| \le D_1(t,t_0)|x_0| \le d(t_0)|x_0|.$$

Далее получим оценку решения $y(t)$ второго из уравнений системы (1), (2). Формула Коши для $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = Y(t,t_0)y_0 + \sum_{s=t_0}^{t-1} Y(t,s+1)\left[f(s,x(s),y(s)) + F\left(s,x(s),y(s),\sum_{\tau=t_0}^{s-1} H(s,\tau,y(\tau))\right)\right]$$

На основании условий (6), (9), (10), (11) и оценки $x(t)$ (23) получаем:

$$|y(t)| \le a(t)b(t_0)|y_0| + \sum_{s=t_0}^{t-1} a(t)b(s+1)[k(s)|y(s)| +$$
$$+g(s)(d(t_0)|x_0|)^{\alpha} \cdot |y(s)|^m \left(|y(s)| + \sum_{\tau=t_0}^{s-1} a(s)h(\tau)|y(\tau)| \right)\Bigg].$$

В этом неравенстве сделаем замену $z(t) = \dfrac{|y(t)|}{a(t)}$.

Получим

$$z(t) \le b(t_0)|y_0| + \sum_{s=t_0}^{t-1} b(s+1)k(s)a(s)z(s) +$$
$$+b(s+1)g(s)(d(t_0)|x_0|)^{\alpha} a^{m+1}(s) \cdot z^m(s) \left(z(s) + \sum_{\tau=t_0}^{s-1} h(\tau)a(\tau)z(\tau) \right). \qquad (24)$$

Оценим решение полученного дискретного неравенства для $z(t)$ при $0 < m < 1$ согласно [5, теорема 2]. В результате выводим следующую оценку для решения $y(t)$.

$$|y(t)| \le a(t)b(t_0)|y_0| \cdot P(t,t_0) \cdot \{1 + (1-m)(b(t_0)|y_0|)^m \times$$
$$\left.\times \sum_{s=t_0}^{t-1} \frac{R(s,t_0)}{\left[1 - m(b(t_0)|y_0|)^m \cdot (d(t_0)|x_0|)^{\alpha} \cdot D(s,t_0)\right]^{1/m}} \right\}^{1/1-m}$$

при условии, что выражение в квадратных скобках больше нуля. Здесь P, R, D определяем в (13), (14), (15).

Учитывая далее условия (17), (18), (19) теоремы 1, для решения $y(t)$ устанавливаем неравенство:

$$|y(t)| \le M(t_0)|y_0| \left\{ 1 + \frac{(1-m)(b(t_0)|y_0|)^m \cdot c(t_0)}{[1 - \psi(t_0,|x_0|,|y_0|)]^{1/m}} \right\}^{1/1-m}, \qquad (25)$$

если $\psi(t_0,|x_0|,|y_0|) < 1$.

Здесь $\psi(t_0,|x_0|,|y_0|) = mQ(t_0)(b(t_0)|y_0|)^m (d(t_0)|x_0|)^{\alpha}$.

Возьмем теперь начальные условия из области $|x_0| < \lambda$, $|y_0| < \lambda$. В силу монотонного возрастания функции ψ по $|x_0|$ и $|y_0|$, обозначения γ (21) и условия 3) теоремы 1 (неравенство (20)) имеем:

$$\psi(t_0,|x_0|,|y_0|) < \psi(t_0,\lambda,\lambda) = \gamma(t_0,\lambda) < 1, \tag{26}$$

т.е. при $|x_0| < \lambda$, $|y_0| < \lambda$ справедлива оценка (25).

Из (25), (26) и условия 4) теоремы (неравенство (22)) следует, что если $|x_0| < \lambda$ и $|y_0| < \lambda$, то $|y(t)| < A$ при $t > t_0$. Теорема доказана.

Заключение

При наличии оценок матриц Коши вида (5), (6) системы линейного приближения (3), (4) установлены условия практической y-устойчивости нелинейной системы (1), (2), содержащей степенные и суммарные возмущения вида (7)-(11). Результаты статьи можно использовать для нахождения областей практической устойчивости динамических систем, математическими моделями которых могут служить суммарно-разностные системы (1)-(11).

Дальнейший интерес представляет построение условий практической устойчивости по части переменных систем разностных уравнений с суммарными возмущениями других видов и комбинаций различных возмущений.

Список литературы

1. Мартынюк А.А. Анализ устойчивости дискретных систем // Прикладная механика. – 2000. – 36, №7. – С. 3–35.

2. Мартынюк А.А. О некоторых результатах развития теорий устойчивости движения: классических и современных // Прикладная механика. – 2001. – 37, №9. – с. 44–60.

3. Воротников В.И. Частичная устойчивость и управление // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №4. – с. 3–59.

4. Быков Я.В., Линенко В.Г. О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений. – Фрунзе: «Илим», 1968. – 139 с.

7. Pachpatte B.G. On some new discrete inequalities and their applications to a class of sum – difference equations // An. Sti. Univ. “Al. I. Cuza” Iasi. – 1978. – T. XXIV, f. 2, s.Ia. – P. 315–326.