УДК 539.3

© Т.С. Кагадий, А.Г. Шпорта

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В статье приведены точные решения, полученные в замкнутой форме для некоторых задач о напряженно-деформируемом состоянии ортотропной пластины с цилиндрической анизотропией.

У статті наведені точні розв’язки, що отримані у замкненій формі для деяких задач про напружено-деформований стан ортотропної пластини з циліндричною анізотропією.

The exact decisions received in the closed form for some tasks about an intense-deformable condition of an orthotropic plate with cylindrical anisotropy are resulted in the article.

Решения краевых задач с учетом анизотропии упругой среды сопряжено с дополнительными трудностями. В случае прямолинейной анизотропии приходится рассматривать пару связанных аналитических функций, зависящих от различных комплексных переменных [1]. Для среды с криволинейной анизотропией непосредственное применение методов теории аналитических функций вообще оказывается невозможным.

Эти трудности удается преодолеть в некоторых специальных случаях (малая анизотропия, специальный закон изменения упругих свойств и т. п.), причем соответствующая задача для изотропной среды считается обычно эталоном простоты. В задачах 3 и 4 решения получены с помощью методов возмущения [2].

Преимущество предложенного подхода состоит в том, что исходная задача сводится к последовательному решению задач теории потенциала, учитывается любая степень анизотропии материала.

1. Рассмотрим случай, когда контур отверстия в пластине подкреплен жестким кольцом (бесконечности подвергается осевому растяжению усилиями интенсивности p_1 и p_2). В сплошной пластине кроме соотношений (2) имеют место выражения:

$$U_1^0 = \frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2} + \frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta\right],$$

$$U_2^0 = \frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta + \frac{p_1-p_2}{2}\frac{1+q^{-1}+2\nu_1}{2}\sin 2\eta\right] \tag{5}$$

В (5) отброшены функции, появляющиеся при интегрировании.

В пластине с жестким кольцом на контуре отверстия $R(\xi=0)$ отсутствуют смещения U_1 и U_2, т.е. образование отверстия, подкрепленного жестким кольцом в пластине равносильно приложению к точкам воображаемого контура перемещений $U_1 = -U_1^0$ и $U_2 = -U_2^0$. Действие U_1 и U_2 приводит к появлению второго поля смещений. Полное решение задачи с отверстием состоит из сумы решения (5) и указанного второго поля смещений. Для определения второго поля смещений необходимо рассмотреть задачу, когда на контуре отверстия ($\xi = 0$) заданы перемещения U_1 и U_2, на бесконечности смещения равны нулю, т.е. граничные условия имеют вид:

$$\text{при } \xi = 0,\ U_1 = -\frac{R}{E_1}\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2} - \frac{R}{E_1}\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta,$$

$$U_2 = -\frac{R}{E_1}\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta + \frac{R}{E_1}\frac{(p_1-p_2)\left(1+q^{-1}+2\nu_1\right)}{4}\sin 2\eta, \tag{6}$$

$$\text{при } \xi \to \infty\ U_1 \to 0,\ U_2 \to 0.$$

Граничные условия (6) могут быть разбиты на две части:

$$U_1 = -\frac{R}{E_1}\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2},\ U_2 = -\frac{R}{E_1}\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta;$$

$$U_1 = -\frac{R}{E_1}\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta,\ U_2 = \frac{R}{E_1}\frac{(p_1-p_2)\left(1+q^{-1}+2\nu_1\right)}{4}\sin 2\eta$$

Полное решение поставленной задачи имеет вид:

$$U_1 = \frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2} + \frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta\right] +$$

$$+\frac{Rq^{-1}(m\varepsilon+\varepsilon+\nu_1 q)}{E_1}\frac{p_1+p_2}{2}e^{-\sqrt{q}\xi} -$$

$$-\frac{Rq^{-1}(m\varepsilon+\varepsilon+q)}{E_1}\frac{p_1+p_2}{2}e^{-\xi} + \frac{1}{E_1}\left[\frac{4-(1-t_1)\left(1-2\nu_1+\nu_1\sqrt{t_1}\right)}{\sqrt{t_1}}C_1 e^{-\sqrt{t_1}\xi} +\right.$$

$$\left. + \frac{4-\left(1-\sqrt{t_2}\right)\left(1-2\nu_1+\nu_1\sqrt{t_2}\right)}{\sqrt{t_2}}C_3 e^{-\sqrt{t_2}\xi}\right]\cos 2\eta;$$

$$U_2 = \frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta - \frac{p_1-p_2}{2}\frac{1+q^{-1}+2\nu_1}{2}\sin 2\eta\right] -$$

$$-\frac{R\left(q^{-1}-1\right)}{E_1}\frac{p_1+p_2}{2}e^{-\xi}\eta + \frac{1}{E_1}\left[\frac{4\left(\nu_1\sqrt{t_2}-1\right)-\left(1-\sqrt{t_2}\right)\left(q^{-1}t_2-1+2\nu_1\right)}{2\sqrt{t_2}}C_3 e^{-\sqrt{t_2}\xi} -\right.$$

$$\left. -\frac{4\left(1-\nu_1\sqrt{t_1}\right)+\left(1-\sqrt{t_1}\right)\left(q^{-1}t_1-1+2\nu_1\right)}{2\sqrt{t_1}}C_1 e^{-\sqrt{t_1}\xi}\right]\sin 2\eta;$$

$$\sigma_{11} = E_*\left(e_{11} + \nu_1 q e_{22}\right);\ \sigma_{22} = E_* q\left(e_{22} + \nu_1 e_{11}\right);\ \tau = G e_{12};$$

$$e_{11} = \frac{e^{-\xi}}{R}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi}\right);\ e_{22} = \frac{e^{-\xi}}{R}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \eta} + U_1\right);\ e_{12} = \frac{e^{-\xi}}{R}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} - U_2\right).$$

Проведены сравнения результатов с известными точными решениями, в частности, для изотропного материала.

2. Пластина ослаблена эллиптическим отверстием со свободной границей ина бесконечности подвергается осевому растяжению усилиями интенсивности p_1 и p_2.

Функция $\omega(\zeta) = R\left(\zeta + c\zeta^{-1}\right)$. Тогда $x = R\left(e^{\xi} + ce^{-\xi}\right)\cos\eta$, $y = R\left(e^{\xi} - ce^{-\xi}\right)\sin\eta$, $H = R\left(e^{2\xi} - 2c\cdot\cos 2\eta + c^2 e^{-2\xi}\right)^{\frac{1}{2}}$. Здесь $R = \frac{1}{2}a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, $c = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{-1}$, a, b – полуоси эллиптического отверстия.

В пластине без отверстия

$$\sigma_{11}^0 = \left(e^{4\xi} - 2ce^{2\xi}\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left[\frac{1}{2}(p_1 + p_2)\left(e^{4\xi} + c^2\right) - c(p_1 - p_2)e^{2\xi} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(e^{4\xi} + c^2\right) - c(p_1 + p_2)e^{2\xi}\right)\cos\eta\right],$$

$$\sigma_{22}^0 = \left(e^{4\xi} - 2ce^{2\xi}\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left[\frac{1}{2}(p_1 + p_2)\left(e^{4\xi} + c^2\right) + c(p_1 - p_2)e^{2\xi} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(e^{4\xi} + c^2\right) + c(p_1 + p_2)e^{2\xi}\right)\cos\eta\right],$$

$$\sigma_{12}^0 = -\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(e^{4\xi} - 2ce^{2\xi}\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\cdot\left(e^{4\xi} - c^2\right)\sin 2\eta .$$

Квазиосесимметричное решение

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = -\frac{1}{2}\left(e^{4\xi} - 2ce^{2\xi}\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left[p_1(1-c)^2 + p_2(1+c)^2\right]e^{2\xi},\ \sigma_{12} = 0 .$$

Решение задачи с граничными условиями

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{2}\left(1 - 2c\cdot\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left[p_1(1-c)^2 - p_2(1+c)^2\right]\cos 2\eta ,$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(1 - 2c\cdot\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\cdot(1-c)^2\sin 2\eta,\quad (\xi = 0),$$

$\sigma_{11} \to 0$, $\sigma_{12} \to 0$, $(\xi \to \infty)$ разыскивается методом возмущений [2]. При этом предполагается, что $\frac{b}{a} = 1 - \chi\varepsilon \quad (\chi \sim 1)$, $R = a\left(1 - \frac{1}{2}\chi\varepsilon\right)$, $c = x\varepsilon(2 - x\varepsilon)^{-1}$. Тогда ряды метода принимают вид:

$$H = ae^{\xi} - \frac{1}{2}a\chi e^{\xi}\left(1 + e^{-2\xi}\cos 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],$$

$$f_1 = 1 + \left(\chi e^{-2\xi}\cos 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],\ f_2 = \left(\chi e^{-2\xi}\sin 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],$$

$$f_3 = \left(-2\chi e^{-2\xi}\cos 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],\ f_4 = \left(-2\chi e^{-2\xi}\sin 2\eta\right)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right];$$

$$\psi_1(\eta) = -\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\cos 2\eta + \frac{1}{2}\chi\left[(p_1 + p_2)\cos 2\eta -\right.$$

$$\left.(p_1 - p_2)\cos^2 2\eta\right]\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],$$

$$\psi_2(\eta) = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(\sin 2\eta + (\chi\sin 2\eta\cos 2\eta)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right]\right),\ \eta_1 = \eta_2 = 2\eta.$$

Приведем окончательную формулу для определения напряжений σ_{22}, действующих на площадках, нормальных к контуру эллиптического отверстия $(\xi = 0)$, которые представляют наибольший интерес. Напряжения σ_{11}, σ_{12} на контуре равны нулю.

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}\left(1 - 2c\cdot\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left(2\left(1 + c^2\right)(p_1 + p_2) - \left[p_1(1 + c)^2 -\right.\right.$$

$$\left.\left.-p_2(1 - c)^2\right]\cos 2\eta\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1 - p_2)\cos 2\eta - \varepsilon\left\{\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cos 2\eta -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\chi\left[(p_1 + p_2)\cos 2\eta - \frac{1}{4}\left(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1 - p_2)(1 + 2\cos 4\eta)\right]\right\} + 0\left(\varepsilon^2\right), \qquad (1)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0.$$

Если $c = 0$ $(\chi = 0)$, то (1) переходит в решение соответствующей задачи для пластины с круговым отверстием.

Сравнение $(\sigma_{22})_{\max}$, вычисленного по формуле (1) для изотропной пластины с учетом первых двух приближений, с точным решением [3] показывает, что, например, при $\frac{b}{a} = 0,65$ погрешность для различных случаев нагружения не превышает 5-10%.

3. Рассмотрим анизотропную пластину, ослабленную гипотрохоидным отверстием, которая на бесконечности подвергается осевому растяжению усилиями интенсивности p_1 и p_2.

Здесь $\omega(\zeta) = R\left(\zeta + ck^{-1}\zeta^{-k}\right)(0 < c < 1), x = R\left(e^{\xi}\cos\eta + ck^{-1}e^{-k\xi}\cos k\eta\right),$

$$y = R\left(e^{\xi}\sin\eta - ck^{-1}e^{-k\xi}\sin k\eta\right), H = R\left(e^{2\xi} - 2ce^{-(k-1)\xi}\cos(k+1)\eta + c^2e^{-2k\xi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $k=1$ возвращаемся к случаю эллипса, при целых $k>1$ получаем кривые, представляющие собой правильные криволинейные многоугольники со скругленными углами: треугольник при $k=2$, квадрат при $k=3$ и т.д.

На контуре отверстия

$$\sigma_{22}=\frac{1}{2}\left(1-2c\cdot\cos(k+1)\eta+c^2\right)^{-1}\left(2\left(1+c^2\right)(p_1+p_2)-(p_1-p_2)\cos 2\eta+\right.$$

$$\left.+2c(p_1-p_2)\cos(k-1)\eta-2c(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta-c^2(p_1-p_2)\cos 2k\eta\right]- \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1-p_2)\cos 2\eta-\varepsilon\left\{\frac{1}{2}(p_1-p_2)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cos 2\eta+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\chi\left[\left(2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}-1\right)(p_1-p_2)\cos(k-1)\eta-2(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta+\right.$$

$$\left.\left.+\left(1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1-p_2)\cos(k+3)\eta\right]\right\}+0\left(\varepsilon^2\right),\quad (k=2,3,\ldots).$$

При решении задачи предложенным методом предполагалось, что $c=\chi\varepsilon$ $(\chi\sim 1)$.

Для изотропной пластинки имеется возможность провести сравнение полученного решения с точным. Погрешность при вычислении $(\sigma_{22})_{\max}$ (в частности, при $k=3$, $c=\frac{1}{3}$) по формуле (2) с учетом первых двух приближений даже в этом, неблагоприятном с точки зрения применяемого метода, случае не превышает 5-10% при различных видах нагружения.

Таким образом, предложенный метод может быть с успехом применен в исследовании краевых задач теории упругости для изотропных пластин.

Список литературы:

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела/ С.Г. Лехницкий.– М.: Наука, 1977.- 416 с.

2. Маневич Л.И. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела/ Л.И. Маневич, А.В. Павленко, С.Г. Коблик.-К.:Вища школа, 1991.-131с.

3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости/ Н.И. Мусхелишвили.-М.: Наука, 1966.-708с.