УДК 519.8

Ю.Н. Харламова
(Украина, Днепропетровск, ГВУЗ "Национальный горный университет")

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СИММЕТРИЧНОГО АЛГОРИТМА МЕТОДА ТЯЖЕЛОГО ШАРИКА ПРИ ПОИСКЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ТЕСТОВЫХ ФУНКЦИЙ

Анотація. *У роботі розглянуто алгоритм методу важкої кульки, заснований на принципі симетрії, для пошуку глобального екстремуму функції. Виконано комп'ютерне моделювання методу для трьох тестових функцій (Еккли, Грівонка та Швефеля). Наведено результати дослідження даного алгоритму на предмет працездатності. Результати математичного моделювання відображені на графіках, які описують процес зближення зображуючи точок до точки глобального оптимуму тестових функцій. Зроблено висновки відносно ефективності наведеного алгоритму стосовно завдань оптимізації.*
Ключові слова: *метод важкої кульки, принцип симетрії, екстремум функції.*

Аннотация. *В работе рассмотрен алгоритм метода тяжелого шарика, основанный на принципе симметрии, для поиска глобального экстремума функции. Выполнено компьютерное моделирование метода для трех тестовых функций (Эккли, Гривонка и Швефеля). Приведены результаты исследования данного алгоритма на предмет работоспособности. Результаты математического моделирования отображены на графиках, описывающих процесс схождения изображающих точек к точке глобального оптимума тестовых функций. Сделаны выводы, касающиеся эффективности описанного алгоритма применительно к задачам оптимизации.*
Ключевые слова: *метод тяжелого шарика, принцип симметрии, экстремум функции.*

Abstract. *The algorithm of the heavy ball method, based on the principle of symmetry, to find a global extremum is described. The computer simulation of the method for the three test functions (Eccles, Grivonk and Shvefel) is carried out. The results of the study of this algorithm for efficiency are given. The results of mathematical modeling in the graphs describing the process of convergence of representative points to the global optimum point of test functions are shown. Conclusions about the efficacy of the described algorithm applied to optimization problems are drawn.*
Keywords: *heavy ball method, the principle of symmetry, extremum of a function.*

Постановка проблемы. Одним из основных факторов, который необходимо учитывать при решении задач синтеза современных систем адаптивной идентификации и информационно-измерительных систем, является инерционность объектов управления и средств измерительной техники. Создатели этих систем с целью обеспечения высокой эффективности принимаемых решений используют различные методы оптимизации.

В большинстве случаев поиск глобальных экстремумов многоэкстремальных целевых функций осуществляется в динамическом режиме с использованием метода тяжелого шарика. Но движущийся тяжелый шарик может обладать как недостатком кинетической энергии, так и ее избытком. В первом случае он может остановиться в одном из локальных экстремумов, не дойдя до глобального экстремума, а во втором случае - его проскочить.

В сложившейся ситуации актуальной является организация подпитки движущегося к глобальному экстремуму шарика дополнительной кинетической энергией или съем ее избытка.

Анализ литературных источников. На сегодняшний день разработаны алгоритмы глобальной оптимизации, как для решения отдельного класса задач [1], так и более универсальные. При рассмотрении динамических задач оптимизации часто применяют метод установления [2,3], реализация которого осуществляется с помощью нестационарных процессов, которые описываются векторным дифференциальным уравнением вида

$$m \cdot x^{(2)}(t) + r \cdot x^{(1)}(t) + grad f\,(x) = 0, \quad m > 0, \quad r > 0. \tag{1}$$

Эти процессы со временем устанавливаются к решению поставленной задачи.

Уравнение (1) описывает *метод тяжелого шарика*, который (при соответствующем выборе параметров m и r) относят к методам поиска глобального экстремума.

Известно, что вытянутость поверхности целевой функции вдоль одного из направлений резко ухудшает эффективность данного метода. Метод тяжелого шарика при решении задач поиска глобального экстремума, с увеличением амплитуды колебаний не дает положительно результата, и процесс движения изображающей точки заканчивается в первом локальном экстремуме.

Цель статьи – построение алгоритмов поиска глобального экстремума тестовых функций, основанных на принципе симметрии взаимодействия двух тяжелых шариков.

Основная часть. Проблему поиска минимума многоэкстремальной функции можно решить, если использовать концепцию симметрии, которая хорошо себя зарекомендовала в таких методах одномерной оптимизации, как методы дихотомии, Фибоначчи и золотого сечения. В этих методах к экстремуму функции, симметрично существенно уменьшая интервал неопределенности (локализации), двигаются по две изображающие точки. Рассмотрим процесс усовершенствования многомерных методов поиска экстремума функции, применив концепцию симметрии [4,5].

Представим выражение выпуклой вниз функции *f(x)* (*x* – векторный аргумент), экстремум которой ищем, в виде

$$f(x) = 0.5\Big((x-x)^T Q(x-x) + f(x) + f(x)\Big), \tag{2}$$

где Q – положительно определенная симметричная матрица.

Затем, заменив в выражении (2) один из векторов x вектором y, а другой – z, получим вспомогательную функцию

$$F(y,z) = 0.5\Big[(y-z)^T Q(y-z) + f(y) + f(z)\Big], \tag{3}$$

экстремум которой будет иметь место при условии, что $y=z=x^*$, где x^* – значение векторного аргумента, при котором функция *f(x)* принимает экстремальное значение.

Движение к минимуму вспомогательной функции *F(y,z)* обеспечивается в результате одновременного слаженного изменения векторных аргументов y и z любым из известных алгоритмов поиска экстремума.

Алгоритм (1) метода тяжелого шарика [6,7] при работе со вспомогательной функцией *F(y,z)* будет таким

$$\begin{aligned} m\frac{d^2y}{dt^2} + r\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F(y,z)}{\partial y} = 0,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} + r\frac{dz}{dt} + \frac{\partial F(y,z)}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Следует отметить, что для поиска экстремума вспомогательной функции (4) могут быть задействованы как непрерывные, так и дискретные алгоритмы нескольких сближающихся точек. Это позволяет им преодолевать локальные экстремумы.

Рассмотрим сущность метода тяжелого шарика, основанного на принципе симметрии, на примере трех стандартных тестовых функций: Эккли, Гривонка и Швефеля.

Функция Эккли (рис. 1,а) имеет множество локальных экстремумов вблизи глобального оптимума. На интервале [–7; 3] функция принимает минимальное значение в точке 0, где x=0 и соответствует следующему описанию

$$f(x) = 20 + e - 20\cdot\exp(-0.2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}) - \exp(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(2\pi x_i)). \tag{5}$$

Тогда вспомогательная симметрическая функция *F(y,z)* согласно выражению (3), для функции Эккли (5) будет иметь следующий вид:

$$F(y,z) = 0.5(2(20+e) - 20\exp(-0.2y^2) - \exp(\cos(2\pi y)) - 20\exp(-0.2z^2) - \exp(\cos(2\pi z)) + 0.5q(y-z)^2 \tag{6}$$

а соответствующий алгоритм (4) для функции (6)

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2; \\ y_2'(t) = -\dfrac{r}{m} y_2 - \dfrac{1}{m}\left[q\left(y_1 - z_1\right) + 2y_1\sqrt{y_1^2}\exp\left(-0.2\sqrt{y_1^2}\right) + \pi\sin\left(2\pi y_1\right)\exp(\cos(2\pi y_1)) \right], \\ z_1'(t) = z_2; \\ z_2'(t) = -\dfrac{r}{m} z_2 - \dfrac{1}{m}\left[q\left(z_1 - y_1\right) + 2z_1\sqrt{z_1^2}\exp\left(-0.2\sqrt{z_1^2}\right) + \pi\sin\left(2\pi z_1\right)\exp(\cos(2\pi z_1)) \right], \end{cases} \qquad (7)$$

где $y_1 = y, \quad z_1 = z.$

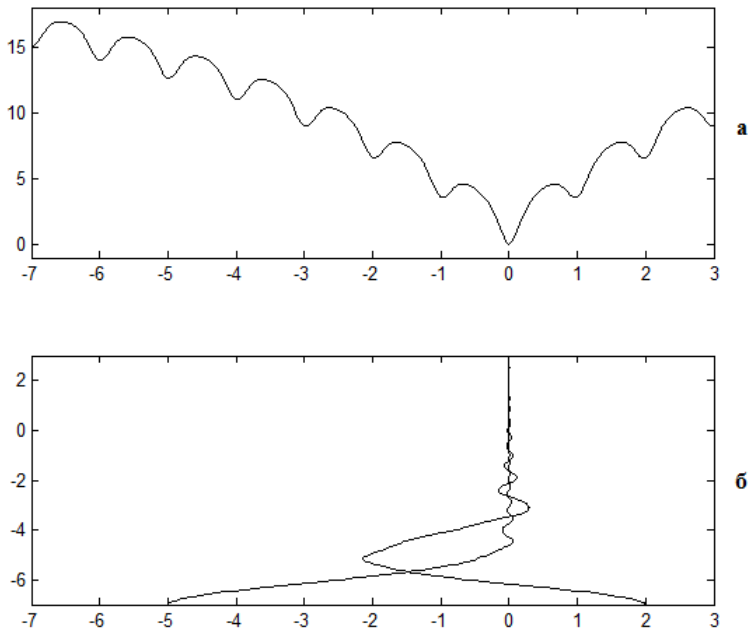

Рис.1. Графики, иллюстрирующие процесс поиска глобального экстремума функции с применением концепции симметрии: а – вид тестовой функции Эккли; б - решение системы (7)

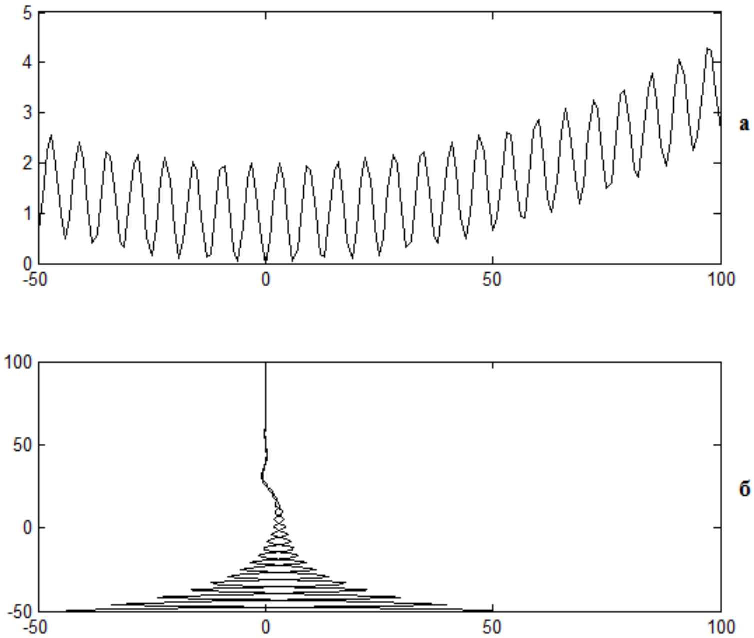

Рис. 2. Графики, иллюстрирующие процесс поиска глобального экстремума функции с применением концепции симметрии: а - вид тестовой функции Гривонка; б - решение системы (10)

Для решения системы (7) были заданы начальные условия: $y_1(0) = -5$, $z_1(0) = 2$ и выбраны следующие параметры: масса тяжелого шарика m=1.5, коэффициент демпфирования r=2 и q=2. На рис.1,б приведен результат решения системы (7), который описывает процесс схождения изображающих точек к точке глобального оптимума (x^*=0). Получены следующие значения: y_1=0.000002 и z_1= – 0.001472. Решение задачи (5) обычным методом тяжелого шарика согласно выражению (1), при неизменных значениях параметров *m* и *r* дало следующие результаты: *x*= – 4.9862 (из начальной точки *x*(0)= – 5) и *x*=1.9745 (из точки *x*(0)=2).

Функция Гривонка (рис. 2,а) имеет множество локальных минимумов. На интервале [–50; 100] функция принимает минимальное значение в точке 0, где *x*=0 и имеет такое описание

$$f(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right). \tag{8}$$

Тогда вспомогательная симметрическая функция *F(y,z)* для функции Гривонка (8) запишется так

$$F(y,z) = 0.5(2 + \frac{y^2}{4000} - \cos(y) + \frac{z^2}{4000} - \cos(z)) + 0.5q(y-z)^2, \tag{9}$$

а соответствующий алгоритм (4) для функции (9)

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2; \\ y_2'(t) = -\dfrac{r}{m} y_2 - \dfrac{1}{m}\left[q\left(y_1 - z_1\right) + \dfrac{y_1}{4000} + 0.5\sin(y_1) \right], \\ z_1'(t) = z_2; \\ z_2'(t) = -\dfrac{r}{m} z_2 - \dfrac{1}{m}\left[q\left(z_1 - y_1\right) + \dfrac{z_1}{4000} + 0.5\sin(z_1) \right]. \end{cases} \tag{10}$$

Для решения системы (10) были заданы начальные условия: $y_1(0)$= – 47, $z_1(0)$=53 и выбраны следующие параметры: масса тяжелого шарика *m*=7, коэффициент демпфирования *r*=1 и *q*=2. На рис. 2,б приведен результат решения системы (10), который описывает процесс схождения изображающих точек к точке глобального оптимума (x^*=0). Расчетные значения составили: y_1= – 0. 000254 и z_1= – 0. 000862. Решение задачи (8) обычным методом тяжелого шарика согласно выражению (1) дало следующие результаты: *x*= – 43.9603 (из начальной точки *x*(0)= – 47) и *x*=50.2403 (из точки *x*(0)=53).

Функция Швефеля (рис. 3,а) так же, как и две вышеприведенные функции, имеет локальные минимумы вблизи глобального оптимума. На интервале [– 500; 500] функция принимает минимальное значение в точке 0, где *x*=420 и соответствует следующему описанию

$$f(x) = 418.9829 \cdot n + \sum_{i=1}^{n} (-x_i \cdot \sin(\sqrt{|x_i|})). \tag{11}$$

Для функции Швефеля (11) вспомогательная симметрическая функция *F(y,z)* будет такой

$$F(y,z) = 0.5(2 \cdot 418.9829 - y\sin(\sqrt{|y|}) - z\sin(\sqrt{|z|})) + 0.5q(y-z)^2, \tag{12}$$

а соответствующий алгоритм (4) для функции (12)

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2; \\ y_2'(t) = -\dfrac{r}{m} y_2 - \dfrac{1}{m}\left[q\left(y_1 - z_1\right) - 0.5\sin(\sqrt{|y_1|}) - \dfrac{y_1\cos(\sqrt{|y_1|}) \cdot \mathrm{sign}(y_1)}{4\sqrt{|y_1|}} \right], \\ z_1'(t) = z_2; \\ z_2'(t) = -\dfrac{r}{m} z_2 - \dfrac{1}{m}\left[q\left(z_1 - y_1\right) - 0.5\sin(\sqrt{|z_1|}) - \dfrac{z_1\cos(\sqrt{|z_1|}) \cdot \mathrm{sign}(z_1)}{4\sqrt{|z_1|}} \right]. \end{cases} \tag{13}$$

Для решения системы (13) были заданы начальные условия: $y_1(0)= -200$, $z_1(0)=480$ и выбраны следующие параметры: масса тяжелого шарика m=57.8, коэффициент демпфирования r=0.67 и q=2. На рис.3,б приведен результат решения системы (13), который описывает процесс схождения изображающих точек к точке глобального оптимума x^*=420. Получены такие значения: y_1=420.0194 и z_1=420.0862. Решение данной задачи (11) методом тяжелого шарика согласно выражению (1) из начальной точки $x(0)= -4.5$ не дало положительного результата, изображающая точка закончила свое движение при $x= -124.8345$, из точки $x(0)$=3.75 точка глобального оптимума найдена с низкой точностью x=420.8741.

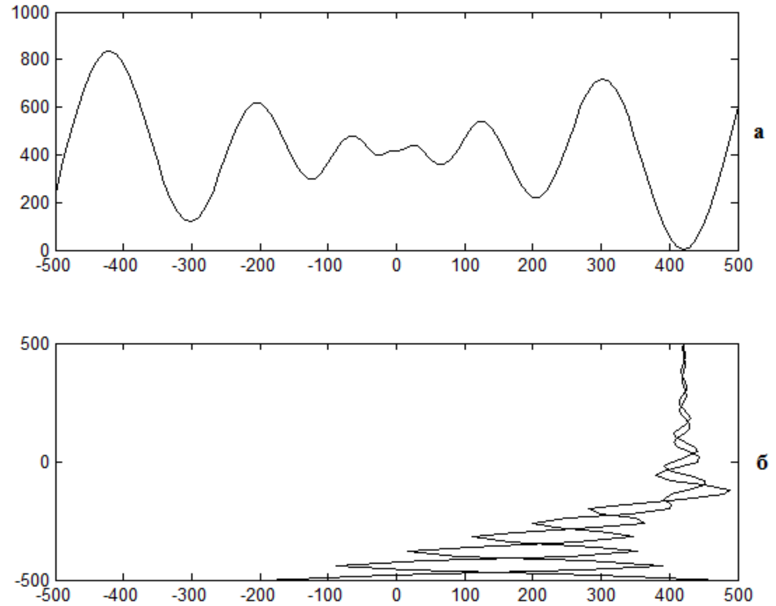

Рис. 3. Графики, иллюстрирующие процесс поиска глобального экстремума функции с применением концепции симметрии: а - вид тестовой функции Швефеля; б - решение системы (13)

Выводы и перспективы дальнейшего исследования. В статье исследована работа алгоритма модифицированного метода тяжелого шарика, основанного на принципе симметрии. Результаты исследования показали, что для тестовых функций Эккли, Гривонка и Швефеля поиск глобального экстремума функции с помощью обычного метода тяжелого шарика не дает положительного результата. Однако применение концепции симметрии к алгоритму метода тяжелого шарика дало нужный результат: с течением времени алгоритмы сходятся к глобальному минимуму многоэкстремальных функций. Кроме того, рассматриваемые алгоритмы обладают хорошей работоспособностью и достаточно высокой точностью. Таким образом, распараллеливание процесса поиска экстремума функции на основе использования концепции симметрии применительно к задачам оптимизации в дальнейшем позволит получить целый ряд позитивных результатов для оценки неизвестных параметров объектов при решении задач метрологии динамических измерений и синтезе адаптивных систем идентификации.

Список литературы

1. Стоян Б.Г. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей / Б.Г. Стоян, В.З. Соколовский. – К.: Наук. думка, 1980. – 208 с.

2. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н.С. Бахвалов. -М.: Наука, 1973. – 632 с.

3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

4. Корсун В.И. Использование симметрии для распараллеливания процесса поиска экстремума целевой функции в задачах оптимального проектирования и адаптивной идентификации / В.И. Корсун // Математические модели и современные информационные технологи: сб.науч.тр. НАН Украины, Ин-т математики. – К.: 1998. – С.66-68.

5. Корсун В.И. Методы и системы адаптивной идентификации и управления, использующие принципы симметрии / В.И. Корсун – Д. : ДВНП «Системные технологии», 1997. – 130 с.

6. Корсун В.И. Исследование алгоритма поиска экстремума целевой функции, основаного на применении концепции симметрии и параллельного пространства / В.И. Корсун, М.А. Демиденко // Науковий вісник НГА України. – 2000 – №2. – С.101-104.

7. Корсун В.И. Расширение возможностей методов установления при порске глобального экстремума функции на основе концепции симметрии / В.И. Корсун, Ю.В. Жихарев, В..Л Галюта // Матеріали міжнародної конференції «Математичні проблеми технічної механіки». – Д.: ДНВП «Системні технології», – 2005. – С.160.

Рекомендовано до друку: д-ром техн. наук, проф. Корсуном В.І.