

**Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»**

**Інститут електроенергетики
Факультет інформаційних технологій
Кафедра безпеки інформації та телекомунікацій**

**ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА
кваліфікаційної роботи ступеню магістра**

студент Хечоян Артур Ашотович

академічної групи 172М–19–1

спеціальності 172 «Телекомунікації і радіотехніка»

за освітньо-професійною програмою Телекомунікації і радіотехніка

на тему: "Прогнозування телекомунікаційного трафіку за моделлю зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є"

Керівники	Прізвище, ініціали	Оцінка за шкалою		Підпис
		рейтинговою	інституційною	
кваліфікаційної роботи				
розділів:				
спеціальний				
економічний				
Рецензент				
Норм. Контролер				

**Дніпро
2020**

ЗАТВЕРДЖЕНО:
завідувач кафедри
безпеки інформації та телекомунікацій

_____ В. І. Корнієнко
(підпис)

«1» вересня 2020 року

ЗАВДАННЯ на кваліфікаційну роботу ступеня магістра

студенту Хечояну А.А. академічної групи 172М-19-1

спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка»

за освітньо-професійною програмою Телекомунікації і радіотехніка

на тему "Прогнозування телекомунікаційного трафіку за моделлю зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є"

1 ПІДСТАВИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ РОБОТИ

Наказ ректора НТУ «Дніпровська політехніка» від _____ № _____

2 МЕТА ТА ВИХІДНІ ДАНІ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ РОБІТ

Об'єкт досліджень: фільтр Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку

Предмет досліджень: вагова функція даного фільтра

Мета: отримати невідому вагову функцію фільтра як наближений розв'язок інтегрального рівняння Вінера–Хопфа на основі тригонометричного ряду Фур'є та порівняти результати з результатами поліноміальних наближень

Вихідні дані для проведення роботи

1. В. Х. Багманов, А. М. Комиссаров, А. Х. Султанов, «Прогнозирование телетрафика на основе фрактальных фильтров», Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета, т. 9, №6 (24), с. 217–222 (2007).

2. V. N. Gorev, A. Yu. Gusev and V. I. Korniienko, "Polynomial solutions for the Kolmogorov–Wiener filter weight function for fractal processes", Radio Electronics, Computer Science, Control, No.2, p. 44–52 (2019).

3. O. Yu. Gusev, V. M. Gorev and V. I. Korniienko, "Theory of adaptive filtration", National Technical University "Dnipro Polytechnic", Dnipro, 156p. (2019).

3 ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Новизна. Наукова новизна результатів полягає у тому, що вагова функція фільтра Колмогорова–Вінера шукається як наближений розв'язок інтегрального рівняння Вінера–Хопфа у вигляді обірваного розвинення у тригонометричний ряд Фур'є. Дослідження проводяться в рамках моделі, де телекомунікаційний трафік вважається випадковим процесом зі степеневою структурною функцією. Показано, що в рамках даної моделі тригонометричні розв'язки є кращими за поліноміальні.

Практична цінність. Результати роботи можуть бути використані для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

4 ВИМОГИ ДО РЕЗУЛЬТАТІВ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

У роботі мають бути знайдені результати для невідомої вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера у наближеннях до наближення 15 гармонік включно. Мають бути наведені відповідні графіки співпадіння лівої та правої частини інтегрального рівняння Вінера–Хопфа для отриманих розв'язки. Результати мають бути порівняні з відповідними результатами поліноміальних наближень. Має бути зроблено висновок про те чи покращує результати використання тригонометричних функцій замість поліномів.

5 ЕТАПИ ВИКОНАННЯ РОБІТ

Найменування етапів робіт	Строки виконання робіт (початок-кінець)
Огляд літератури з теми роботи	01.09.2019 – 30.09.2020
Розрахунок невідомої вагової функції на основі тригонометричного ряду Фур'є. Порівняння тригонометричних та поліноміальних наближень.	01.10.2019 – 31.10.2020
Написання економічного розділу	01.11.2019–05.12.2020

6 РЕАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ЕФЕКТИВНІСТЬ

Економічний ефект. Результати роботи можуть бути використані для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

Соціальний ефект. Результати роботи можуть бути використані для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

7 ДОДАТКОВІ ВИМОГИ

відсутні

завдання видано

_____ В. М. Горєв
(підпис керівника)

Дата видачі 01.09.2020

Дата подання до екзаменаційної комісії _____

Прийнято до виконання _____ А. А. Хечоян
(підпис студента)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 104с., 18 рис., 1 табл., 5 додатків, 12 джерел.

Об'єкт дослідження: фільтр Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку.

Предмет дослідження: вагова функція відповідного фільтра.

Мета роботи: отримати невідому вагову функцію фільтра як наближений розв'язок інтегрального рівняння Вінера–Хопфа на основі тригонометричного ряду Фур'є та порівняти результати з результатами поліноміальних наближень.

У першому розділі наведено огляд літератури з теми та обґрунтовано актуальність задачі, що ставиться перед даною кваліфікаційною роботою.

В спеціальній частині отримано наближений розв'язок для невідомої вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у моделі, де трафік вважається випадковим процесом зі степеневою структурною функцією. Розв'язок отримано у вигляді обірваних розвинень у тригонометричний ряд Фур'є. Досліджено наближення до 15 гармонік включно. Результати порівняно з поліноміальними результатами, раніше отриманими в літературі. Показано, що тригонометричні розв'язки є кращими за поліноміальні в рамках досліджуваної моделі.

В економічному розділі розрахована трудомісткість та витрати на дослідження модель зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є.

Результати роботи можуть бути використані для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку у системах з пакетною передачею даних.

ФІЛЬТР КОЛМОГОРОВА–ВІНЕРА, ВАГОВА ФУНКЦІЯ, ТРИГОНОМЕТРИЧНИЙ РЯД ФУР'Є, СТЕПЕНЕВА СТРУКТУРНА ФУНКЦІЯ.

РЕФЕРАТ

Пояснительная записка: 104с., 18 рис., 1 табл., 5 приложений, 12 источников.

Объект исследования: фильтр Колмогорова-Винера для прогнозирования стационарного телекоммуникационного трафика.

Предмет исследования: весовая функция соответствующего фильтра.

Цель работы: получить неизвестную весовую функцию фильтра как приближенное решение интегрального уравнения Винера-Хопфа на основе тригонометрических ряда Фурье и сравнить результаты с результатами полиномиальных приближений.

В первой главе приведен обзор литературы по теме и обоснована актуальность задачи, которая ставится перед данной квалификационной работой.

В специальной части получено приближенное решение для неизвестной весовой функции фильтра Колмогорова-Винера для прогнозирования стационарного телекоммуникационного трафика в модели, где трафик считается случайным процессом со степенной структурной функцией. Решение получено в виде оборванных разложений в тригонометрический ряд Фурье. Исследована приближения к 15 гармоник включительно. Результаты по сравнению с полиномиальными результатами, ранее полученными в литературе. Показано, что тригонометрические решения является лучше полиномиальные в рамках исследуемой модели.

В экономическом разделе рассчитана трудоемкость и затраты на исследования модель со степенной структурной функцией с тригонометрическим рядом Фурье.

Результаты работы могут быть использованы для прогнозирования стационарного телекоммуникационного трафика в системах с пакетной передачей данных.

ФИЛЬТР КОЛМОГОРОВА-ВИНЕРА, ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ, СТЕПЕННАЯ СТРУКТУРНАЯ ФУНКЦИЯ.

ABSTRACT

Explanatory note: 104 pages, 18 figures, 1 tables, 5 appendices, 12 sources.

Object of research: Kolmogorov-Wiener filter for predicting stationary telecommunication traffic.

Subject of research: Weighting function of the corresponding filter.

The aim of the work is to obtain an unknown filter weight function as an approximate solution of the Wiener-Hopf integral equation based on trigonometric Fourier series and to compare the results with the results of polynomial approximations.

The first chapter provides a review of the literature on the topic and justifies the relevance of the task that is set for this qualifying work.

In the special chapter we obtained an approximate solution for the unknown weight function of the Kolmogorov-Wiener filter for predicting stationary telecommunication traffic in a model, where traffic is considered a random process with a power structure function. The solution is obtained in the form of dangling expansions in the trigonometric Fourier series. Approximations to 15 harmonics inclusive are investigated. The results are compared with polynomial results previously obtained in the literature. It is shown that trigonometric solutions are better than polynomial ones in the framework of the investigated model.

In the economic chapter, the labor intensity and research costs are calculated for a model with a power structure function with a trigonometric Fourier series.

The results of the work can be used to predict stationary telecommunication traffic in systems with packet data transmission.

KOLMOGOROV-WIENER FILTER, WEIGHT FUNCTION, TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES, POWER-LAW STRUCTURE FUNCTION.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	9
1. СТАН ПИТАННЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	10
1.1 Стан питання.....	10
1.1.1. Моделі фрактального трафіку в системах пакетної передачі даних.....	10
1.1.2. Фільтр Колмогорова-Вінера, рівняння Фредгольма.....	13
1.1.3. Ортогональні системи синусів і косинусів. Тригонометричний ряд Фур'є.....	18
1.2 Постановка задачі.....	26
1.3 Висновки.....	26
2. СПЕЦІАЛЬНА ЧАСТИНА.....	27
2.1 Обчислення вагової функції фільтра.....	27
2.2 Порівняння результатів гармонік з результатами для інших систем поліномів.....	48
2.3 Висновки.....	49
3 ЕКОНОМІЧНИЙ РОЗДІЛ.....	51
3.1 Розрахунок трудомісткості дослідження модель зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є.....	51
3.2 Визначення трудомісткості розробки.....	51
3.3 Визначення середньої заробітної плати спеціаліста в галузі телекомунікацій.....	55
3.4 Розрахунок витрат на заробітну плату.....	56
3.5 Розрахунок витрат на необхідне програмне та апаратне забезпечення.....	57
3.6 Розрахунок капітальних витрат.....	59
3.7 Висновки.....	60
ВИСНОВКИ.....	61
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	63
ДОДАТОК А. Відомість матеріалів кваліфікаційної роботи.....	65
ДОДАТОК Б. Перелік документів на оптичному носії.....	66

ДОДАТОК В. Код у Wolfram Mathematica.....	67
В.1 Розрахунок матриці інтегральних дужок та стовпчику з коефіцієнтів.....	67
В.2 Розрахунок коефіцієнтів при гармоніках та побудова відповідних графіків для наближень від одного до п'ятнадцяти гармонік.....	87
ДОДАТОК Г. Відгук керівника економічного розділу.....	103
ДОДАТОК Д. Відгук керівника кваліфікаційної роботи.....	104

ВСТУП

Задача прогнозування телекомунікаційного трафіку є актуальною на наш час. Зокрема, вона є важливою для оптимізації ресурсів телекомунікаційної мережі та для кібербезпеки, бо дозволяє визначати наявність атак шляхом порівняння реального трафіку з прогнозованим [1]. Існує дуже багато моделей трафіку [2] та підходів до його прогнозування [1]. В рамках найпростіших моделей телекомунікаційний трафік вважається стаціонарним випадковим процесом [2], у випадку великої кількості даних трафік доцільно розглядати як неперервний випадковий процес [3]. Так як фільтр Колмогорова–Вінера може бути застосовним до прогнозування стаціонарних процесів, та цей фільтр є відносно простим (лінійним та стаціонарним) [4], то доцільно використовувати цей фільтр для прогнозування трафіку.

У роботі розглянуто стаціонарний трафік у моделі, де він вважається випадковим процесом зі степеневою структурною функцією. Вагова функція фільтра Колмогорова–Вінера є розв'язком відповідного інтегрального рівняння Вінера–Хопфа [5], точний аналітичний розв'язок якого знайти навряд чи можливо. У роботах [5–7] досліджено наближений розв'язок такого рівняння у вигляді обірваних поліноміальних розвинень для різних ортогональних систем поліномів. Показано, що деякі поліноміальні наближення дають хороші результати, але деякі приводять до повного неспівпадіння лівої та правої частин досліджуваного інтегрального рівняння. Тому залишається відкритим питання – чи не знайдеться інша (не поліноміальна) система функцій, що дає кращі результати за поліноміальну в рамках досліджуваної моделі трафіку? В даній роботі невідома вагова функція фільтра Колмогорова–Вінера шукається як наближений розв'язок відповідного інтегрального рівняння у вигляді обірваного розвинення у тригонометричний ряд Фур'є, та показано, що тригонометричні розв'язки є кращими за поліноміальні в рамках досліджуваної моделі трафіку.

1. СТАН ПИТАННЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1.1 Стан питання

1.1.1. Моделі фрактального трафіку в системах пакетної передачі даних

Зростання цифровізації суспільства збільшує вимоги і продуктивність передачі даних в інформаційні телекомунікаційні мережі. Відповідно, зі збільшенням кількості користувачів обсяг переданої інформації зростає. Це веде до загострення проблеми пікових навантажень. Тому потрібен аналіз існуючих моделей і способів моделювання мережевого трафіку з метою забезпечення якісної передачі інформації в інформаційній телекомунікаційній мережі актуальні. Існують різні типи мережевого трафіку які доводять, що мережа трафіку само подібна або фрактальна за своєю природою. Отже, цей трафік містить так звані спалахи або набори пакети, які присутні в різні проміжки часу. Методи моделювання мережевого трафіку, концептуально можна розділити на два класи – аналітичним та імітаційні.

Аналітична модель - це сукупність математичних виразів, яке формально описує модельований об'єкт або процес. Такі моделі зручні для проведення теоретичних досліджень, однак, для більшості джерел побудова адекватної аналітичної моделі вкрай важко. [1]

Імітаційна модель - це набір алгоритмів який генерує якусь послідовність, яка за своїми характеристиками близька до реальної (експериментально знятої з діючого об'єкта) послідовності. В якості такої послідовності, наприклад, може бути мережевий трафік. Використання імітаційних моделей є часто більш переважним і зручним. У той же час, як правило, імітаційні моделі мають вузьку специфіку і застосування таких моделей вимагає значної роботи для адаптації моделі під нові умови застосування. Можливі також комбіновані моделі, поєднуючи в собі аналітичну і алгоритмічну частини. [1]

На сьогоднішній день розроблено безліч моделей, призначених для імітації фрактального трафіку. Аналіз доступних публікацій по моделюванню самоподібного трафіку дозволяє виділити такі моделі.

Фрактальний броунівський рух (Fractional Brown Motion - FBM). В основі моделі FBM лежить випадковий процес, що починається на початку координат з незалежними нескінченно малими гауссовським приростами. FBM описується аналітично. Також для генерації FBM широко використовуються алгоритми випадкового переміщення середньої точки (RMD-алгоритм) і алгоритми послідовного випадкового складання (SLA-алгоритм). [2]

Фрактальний гауссовський шум (FractionalGaussianNoise - FGN). FGN - стаціонарний в широкому сенсі стохастичний процес з певним параметром (середнім значенням, дисперсією, Херста) і автокореляційною функцією заданого виду. За порівняно зі звичайним гауссовим шумом, FGN має додатковий параметр Херста, який кількісно визначає ступінь фрактального масштабування. Основні труднощі використання FBM і FGN - підбір найкращих значень параметрів для отримання трафіку, що генерується, близького по властивостям до експериментально знятим реалізацій трафіку. [2]

Фрактальні точкові процеси (Fractal Point Process - FPP) є дуже наочними для моделювання самоподібного трафіку. найпростіший точковий процес представляється на тимчасовій осі не спадаючої ступінчастою функцією, моменти зростання якої є випадковими. Існує багато модифікацій FPP, які досить економічні і обчислювально ефективні. [2]

Фрактальное рух Леві рух (FractionalLeviMotion - FLM) відноситься до так званих стійких процесах. В основі його моделювання лежать симетричні α -стійкі розподілу, які характеризуються крім показника Херста, ще й показником Леві. FLM можна розглядати як певне узагальнення FBM (Fractional Brown Motion) і ефективно використовувати для моделювання інтенсивності трафіку або швидкості передачі, маючи теоретично нескінченну дисперсію. [2]

Мультифрактальні моделі (Multifractal - MF) вдало відтворюють трафік, агрегований від декількох істотно різних джерел. Мультифрактальний трафік проявляється в вимірюванні статистичних властивостей реалізації трафіку при зміні масштабу агрегування. Для опису таких властивостей вводяться додаткова масштабна функція і моментний коефіцієнт. В основі MF моделей лежать консервативні бінарні мультиплікативні каскади. [2]

Як відомо, в мережах з комутацією пакетів (Ethernet, ATM і ін.) Пильну увагу приділяється механізмам управління навантаженням і боротьбі з перевантаженнями. Є безліч методів управління потоками (TCP, в ICMP команда `-sourcequench` (Гасіння джерела)). З впровадженням таких додатків як VoIP, передача мультимедійних даних, виникають вищі і специфічні вимоги до якості обслуговування QoS, розробляються нові протоколи управління потоками RED, RSVP. Відповідно до рекомендацій MCE-T головним завданням механізмів управління трафіком є забезпечення максимального коефіцієнта використання мережевих ресурсів при мінімальному ризику виникнення перевантажень. При цьому основним показником якості обслуговування можна вважати ймовірність втрати кадру і час його затримки при передачі. [3]

Перевантаження визначається як стан мережевих елементів (концентраторів, комутаторів, маршрутизаторів), при якому мережа не може гарантувати запитану якість обслуговування. Як правило, перевантаження може бути викликана флуктуаціями потоків трафіку або виходом з ладу будь-якого мережевого елемента. [3]

Існуючі методи управління потоками (TCP) які реагують на перевантаження, і перш ніж потрібні команди почнуть виконуватися, ситуація встигає істотно погіршитися, при цьому йде втрата інформації. Існують методи управління потоками з прогнозуванням перевантажень і сплесків інтенсивності трафіку в мережах з комутацією пакетів. За допомогою цих методів управління потоками, заснованих на прогнозуванні

інтенсивності трафіку можна підвищити коефіцієнт використання мережевих ресурсів.

Методи розрахунку сучасних комп'ютерних мереж (пропускної спроможності каналів, ємності буферів та ін.), Засновані на пуассонівських моделях і формулах Ерланга, які з успіхом використовуються при проектуванні телефонних мереж, в мережах з комутацією пакетів дають невиправдано оптимістичні рішення і призводять до недооцінки реального навантаження. Такі процеси частіше за все не в стані описати характер реального трафіку мереж з комутацією пакетів. При дослідженні систем обслуговування необхідно враховувати довготривалі залежності кореляцій, обумовлені масштабним самоподібності. [3]

Фрактальним гаусів шум (fGn) і (fBm) були спочатку введені Мандельброт і ванНессом, для моделювання стохастичних фрактальних процесів. В визначення (fGn) і (fBm), дане Галлавотті і Йоной-Лазінію, проте, є більш загальним і проникливим з точки зору статистичної фізики. У найзагальнішому вигляді (fGn) - це випадкове поле з E -мірними випадковими векторами, визначеними в d -вимірному просторі. Він відповідає оберненій розмірності E і розмірності простору d в теорії критичного явища в статистичній фізиці. Показано, що (fGn) інваріантний щодо напівгрупи (Каданов блок) з критичним показником H , відомим як коефіцієнт Херста в галузях техніки та стохастичних фрактальних процесів. Крім того, це показує, що інші стаціонарні процеси підходять асимптотично до (fGn) відбувається перетворення Кадановаренормалізації з відповідними критичними показниками. [4]

1.1.4. Фільтр Колмогорова-Вінера, рівняння Фредгольма

Фільтр Колмогорова-Вінера є лінійним стаціонарним фільтром, що може розв'язувати дві задачі – задачу виділення корисного сигналу з суми корисного сигналу та шуму, та задачу прогнозування. Так як фільтр

Колмогорова–Вінера є лінійним та стаціонарним, то вихід фільтру $x(t)$ та вхід $x(t)$ пов'язані співвідношенням

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad (1.1)$$

де $h(\tau)$ є ваговою функцією фільтра, що через принцип причинності має властивість [7]

$$h(\tau < 0) = 0, \quad (1.2)$$

що дає змогу переписати (1.1) як

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (1.3)$$

Вхідний сигнал $x(t)$ даного фільтру є стаціонарним випадковим процесом, який є сумою корисного сигналу $s(t)$ та шуму $n(t)$:

$$x(t) = n(t) + s(t). \quad (1.4)$$

Задача фільтру є наступною – мінімізувати середньоквадратичне відхилення виходу фільтру $y(t)$ та корисного сигналу у момент часу $t+k$, де k – часовий інтервал, на який робиться прогноз:

$$\langle (y(t) - s(t+k))^2 \rangle \rightarrow \min. \quad (1.5)$$

При цьому відомими вважаються автокореляційна функція вхідного сигналу $R_x(t)$ та взаємна кореляційна функція вхідного сигналу та шуму $R_{sx}(t)$. Як відомо [7], для того, щоб виконалось (1.5), вагова функція має задовольняти наступному інтегральному рівнянню:

$$R_{sx}(t+k) = \int_0^{+\infty} d\tau h(\tau) R_x(t-\tau), \quad (1.6)$$

яке має назву інтегрального рівняння Вінера–Хопфа.

Все, що написано до сих пір, стосується неперервних нескінченних у часі процесів. Якщо процеси є дискретними, та вхід фільтра задано лише для моментів часу $t = 0, 1, 2, \dots, T$, то рівняння для вагової функції фільтра буде наступним:

$$R_{sx}(t+k) = \sum_{\tau=0}^T h(\tau) R_x(t-\tau), \quad (1.7)$$

А вихід фільтра обчислюється за формулою

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^T h(\tau) x(t-\tau). \quad (1.8)$$

У дискретному випадку маємо не неперервну вагову функцію, а набір вагових коефіцієнтів. Фактично, (1.7) є системою лінійних рівнянь на вагові коефіцієнти фільтра.

У випадку неперервних, проте обмежених у часі процесів, маємо наступне. Якщо вхід фільтра – неперервний процес, визначеним при $t \in [0, T]$, то маємо наступне рівняння на вагову функцію фільтра:

$$R_{sx}(t+k) = \int_0^T d\tau h(\tau) R_x(t-\tau), \quad (1.9)$$

та вихід фільтра обчислюється за формулою

$$y(t) = \int_0^T h(\tau) x(t-\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Тож для реалізації фільтра Колмогорова–Вінера для неперервних скінчених у часі процесів ми маємо вміти розв'язувати рівняння (1.9).

Методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма

Лінійні інтегральні рівняння першого роду з постійними межами інтегрування мають вигляд:

$$\int_a^b K(x,t) y(t) dt = f(x) \quad (1.11)$$

де $y(x)$ - невідома функція ($a \leq x \leq b$), $K(x, t)$ - ядро інтегрального рівняння, $f(x)$ - задана функція, яка називається правою частиною рівняння. (1.11). Функції $y(x)$ та $f(x)$ зазвичай вважаються неперервними або квадратно інтегруючими на $[a, b]$. Якщо ядро інтеграла рівняння (1.11) неперервне на квадраті $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ або принаймні квадрат, інтегрований на цей квадрат, тобто

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt = B^2 < \infty \quad (1.12)$$

де B - константа, тоді це ядро називається ядром Фредгольма. Рівняння виду (1.11) з постійні межі інтегрування та ядро Фредгольма називаються рівняннями Фредгольма першого роду. Ядро $K(x, t)$ інтегрального рівняння називається виродженням, якщо його можна представити в форма $K(x, t) = g_1(x) h_1(t) + \dots + g_n(x) h_n(t)$.

Ядро $K(x, t)$ інтегрального рівняння називається різницеvim ядром, якщо воно залежить лише від різниці аргументів: $K(x, t) = K(x - t)$.

Ядро $K(x, t)$ інтегрального рівняння називають симетричним, якщо воно задовольняє умові $K(x, t) = K(t, x)$.

Інтегральне рівняння, отримане з (1.11), замінивши ядро $K(x, t)$ на $K(t, x)$, називається перенесено до (1.11).

Примітка 1. Змінні t і x в рівнянні (1.11) може змінюватися в різні інтервали (наприклад, $a \leq t \leq b$ і $c \leq x \leq d$). [11]

Важливо зауважити, що інтегральні рівняння першого роду (1.11), навіть з дуже гладкими ядра та праві частини, можуть взагалі не мати рішень або мати кілька (нескінченно багато) рішень. [11]

Приклад 1. Рівняння

$$\int_0^1 y(t) dt = 1 + t$$

Приклад 2. Рівняння

$$\int_0^1 y(t) dt = 1$$

має розв'язки $y(x) = 1$ і $y(x) = 1 + C(2x - 1)$, де C - довільна константа. Більше того, це рівняння має рішення

$$y(x) \begin{cases} \varphi(x)/A & \text{if } A \neq 0, \\ 1 + C\varphi(x) & \text{if } A = 0, \end{cases} \quad A = \int_0^1 \varphi(x) dx$$

де $\varphi(x)$ - довільна функція. Слід також згадати, що інтегральні рівняння Фредгольма першого роду належать до класу неправильно поставлених проблем. [11]

Розглянемо інтегральне рівняння:

$$\int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x) \tag{1.13}$$

з довільним (симетричним або несиметричним) ядром. Будемо шукати його рішення у вигляді суми

$$y(t) = \sum_{n=1}^N A_n \varphi_n(x) \quad (1.14)$$

де $\varphi_n(x)$ - (повна) система функцій на інтервалі (a, b) , верхня межа суми, N , може бути як скінченним, так і нескінченним. Важливо зазначити, що в деяких випадках це можна отримати точне рішення інтегрального рівняння (1.13) у вигляді ряду (1.14) для $N = \infty$

Підставивши (2) в (1), отримаємо

$$f(x) = \sum_{n=1}^N A_n g_n(x) \quad (1.15)$$

де $g_n(x)$ - відомі функції,

$$g_n(x) = \int_a^b K(x,t) \varphi_n(t) dt \quad (1.16)$$

Для того, щоб знайти коефіцієнти A_n у правій частині (1.15), можна використовувати різні методи, залежно від структури функцій $g_n(x)$.

1.1.3. Ортогональні системи синусів і косинусів. Тригонометричний ряд Фур'є.

В якості системи можна обрати ортогональну систему синусів і косинусів, по якій проводять розкладання в тригонометричний ряд Фур'є.

Ортогональна система функцій:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (1.17)$$

Називається повним, якщо для будь якої функції $f(x)$ з інтегруючим квадратом тобто такий, що

$$\int_a^b f^2(x) dx < +\infty \quad (1.18)$$

Виконується рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x) \right]^2 dx = 0 \quad (1.19)$$

Рівняння (2.3.3) в силу визначення можна втлумачити як серед квадратичне відхилення суми $\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$ від функції $f(x)$ що наближається до 0 $n \rightarrow \infty$.

Якщо виконується рівність (1.19), тоді говорять що ряд Фур'є $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ збігається до функції $f(x)$.

Очевидно, що зі збіжності у середньому не слідує збіжність у кожній точці відрізка $[a, b]$. Відмітимо без доказу, що тригонометричні системи, що вказані у прикладах, повні на відповідних відрізках. Дуже широко використовується у додатках система функцій Пестеля

$$J_n(\lambda_1 x), J_n(\lambda_2 x), \dots, J_n(\lambda_i x), \dots, \quad (1.20)$$

Тут $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots$ - корні функції Пестеля, тобто числа, що задовольняють співвідношенню

$$J_n(\lambda_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Без доказу зазначимо, що система функцій

$$\sqrt{x} J_n(\lambda_1 x), \sqrt{x} J_n(\lambda_2 x), \dots, \sqrt{x} J_n(\lambda_i x), \dots \quad (1.21)$$

ортогональна на відрізку $[0, 1]$:

$$\int_0^1 x J_n(\lambda_k x) J_n(\lambda_j x) dx = 0^* \quad (k \neq j) \quad (1.22)$$

Також в додатках використовуються системи ортогональних багаточленів Лежана, котрі визначаються як

$$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \left[(x^2 - 1)^n \right]}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.23)$$

Вони задовольняють рівнянням

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \quad (1.24)$$

Використовуються також і інші системи ортогональних багаточленів.

Огляд робіт попередників

Ми розглядаємо фільтр Колмогорова – Вінера для прогнозування даних для безперервного фракталу процесів. У наш час фрактальні процеси відбуваються у величезній різноманітності різних систем, див., наприклад, та різні посилання. Проблема пошуку вагової функції Колмогорова – Вінера для неперервного фрактальні процеси з функцією степенно-структурної структури викладені в [4]. У цій роботі така модель може бути придатною для опису телетрафіку в IEEE802.11b і для маршрутизаторів між внутрішніми мережами та Інтернетом. Насправді інтегральне рівняння Вінера-Хопфа є інтегральним рівнянням Фредгольма першого виду. У [4] замість Фредгольма використовується спрощене інтегральне рівняння Вольтери і описана ідея рішення інтегрального рівняння Вольтери. Нарешті, точне аналітичне рішення для відповідного рівняння було отримано в [7].

Можливо, в деяких спрощених випадках інтегральне рівняння Вольтери дійсно може бути застосовано до дослідження прогнозу даних у реальних системах. Але в загальному випадку це так не застосовується і інтегральне рівняння Фредгольма слід вирішувати замість Вольтера одна. На відміну від інтегрального рівняння Вольтери, точне аналітичне рішення для інтегрального рівняння Фредгольма виникають труднощі. Таким чином, приблизне рішення для зшукається відповідне рівняння.[7]

Метод усіченого ортогонального многочлена розширення досить популярне в літературі, щоб отримати приблизний рішення інтегрального рівняння Фредгольма першого виду, див., наприклад, відповідне дослідження в рамках статистичної фізики [7]. У роботі [8.] такий метод був застосований до розглянутої проблеми.

Набір поліномів, які є ортогональними без ваги, використано в [7]. Показано, що хоча метод може дати надійні результати в досить широкому діапазоні параметрів, він має деякі недоліки у випадку функції степенно-правової структури. Найзначніші недоліком є той факт, що точність методу не обов'язково збільшується з кількістю багаточленів. Для деяких чисел поліномів метод дає надійні результати, але для інших цифр може не вдатися. Швидше за все, причина в тому відповідна кореляційна функція, яка є ядром інтегралу Вінера – Хопфа рівняння, не є позитивно визначеною функцією, тому збіжність методу є не гарантовано, див. подібне обговорення в рамках статистичної фізики у [7].

Але, як би там не було, виникає питання: нехай результати будуть кращими, якщо ми використаємо інший поліном встановити? Чи однакова поведінка поліноміальних розв'язків для різних наборів поліноми? Це цікаве питання слід дослідити, оскільки воно досить важке запропонувати інший аналітичний метод рішення відповідного Вінера - Рівняння Хопфа. У цій роботі ми використовуємо набір багаточленів Чебишева другого вид. Отже, метою цієї роботи є отримання функції ваги фільтра Колмогорова – Вінера на

основі усіченого розкладання в поліномах Чебишева другого виду та порівняти результати з результатами роботи [7].

Ми розглядаємо стаціонарні неперервні фрактальні процеси з функцією степенно-законної структури. Кореляційна функція таких процесів має вигляд:

$$R(t) = \sigma^2 - \frac{\alpha}{2}|t|^{2H} \quad (1.25)$$

де σ - дисперсія процесу, H - показник Херста, α - константа. Нехай вхідний сигнал фільтра визначається для $t \in [0, T]$. в такому випадку функція ваги фільтра Колмогорова – Вінера $h(t)$ є рішенням наступного Інтегральне рівняння Вінера – Хопфа

$$\int_0^T d\tau h(\tau)R(t-\tau) = R(t+k) \quad (1.26)$$

де $k \in T$ - інтервал часу, на який складається прогноз. Таке рівняння навряд чи можна точно вирішити, тому слід знайти приблизне рішення роботі [4] використовується метод усіченого поліноміального розкладання та наступне поліноми беруться:

$$S_n(\tau) = \frac{S'_n(\tau)}{\sqrt{\int_0^T dt (S'_n(\tau))^2}} \quad (1.27)$$

Де

$$S'_n(\tau) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & \tau & \tau^2 & \cdots & \tau^n \end{vmatrix}, \quad \mu_n = \int_0^T x^n dx = \frac{T^{n+1}}{n+1} \quad (1.28)$$

Такі поліноми є ортогональними без зважування на $t \in [0, T]$:

$$\int_0^T dt S_n(t) S_m(t) = \delta_{mn} \quad (1.29)$$

де δ_{mn} - дельта Кронекера. У цій роботі ми беремо інший поліноміальний набір. Ми використовуємо поліноми Чебишева другого виду. Їх явні вирази [4]

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n+1}^{2k+1} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k \quad (1.30)$$

де $[n/2]$ - ціла частина $n/2$. Вони ортогональні на $x \in [-1, 1]$ зумова ортогональності:

$$\int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn} = \begin{cases} \pi/2, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (1.31)$$

Але нам потрібна поліноміальна множина, яка є ортогональною на $t \in [0, T]$. На підставі (4) після вносячи наступну зміну змінних:

$$z = x + 1, y = zT / 2 \quad (1.32)$$

ви можете відобразити такий вираз:

$$\int_0^T U_n\left(\frac{2y}{T} - 1\right) U_m\left(\frac{2y}{T} - 1\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{T} - 1\right)^2} dy = \frac{T\pi}{4} \delta_{mn} \quad (1.33)$$

Отже, поліноми

$$U_n \left(\frac{2y}{T} - 1 \right)$$

є ортогональними на $y \in [0, T]$ з вагою

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2y}{T} - 1 \right)^2}$$

Отже, наближене рішення інтегрального рівняння (1.26) шукаємо в формі

$$h(\tau) = \sum_{s \geq 0} g_s U_s \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) \quad (1.34)$$

Після заміни (1.34) можна отримати

$$\sum_{s \geq 0} g_s \int_0^T d\tau U_n \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) R(t - \tau) = R(t + k) \quad (1.35)$$

який після множення на $U_n \left(\frac{2y}{T} - 1 \right)$ та інтегрування над t веде до

$$\sum_{s \geq 0} g_s \int_0^T \int_0^T d\tau U_n \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) U_s \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) R(t - \tau) = \int_0^T dt U_n \left(\frac{2t}{T} - 1 \right) R(t + k) \quad (1.36)$$

Позначаючи

$$G_{ns} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau U_n \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) U_s \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) R(t - \tau), \quad b_n = \int_0^T d\tau U_n \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) R(t + k) \quad (1.37)$$

можна переписати (1.36) як

$$\sum_{s \geq 0} g_s G_{ns} = b_n, \quad n \geq 0 \quad (1.38)$$

Як видно, (1.38) - це нескінченний набір лінійних рівнянь у невідомих коефіцієнтах g_s . Цей набір навряд чи піддається лікуванню, тому його слід штучно скоротити до скінченного кількості рівнянь:

$$\sum_{s=0}^{l-1} g_s G_{ns} = b_n, \quad n = \overline{0, l-1} \quad (1.39)$$

Функція ваги фільтра Колмогорова – Вінера

$$h(\tau) = \sum_{s=0}^{l-1} g_s U_s \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) \quad (1.40)$$

де коефіцієнти g_s є розв'язками (1.40) - вагова функція в l -поліноміальне наближення. Тут і надалі величини G_{ns} називаються інтегральними дужками. На основі (1.37) після внесення наступної зміни змінних:

$$x = \frac{2\tau}{T} - 1, \quad y = \frac{2t}{T} - 1 \quad (1.41)$$

можна отримати такий вираз для інтегральних дужок:

$$G_{ns} = \frac{T^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy U_n(x) U_s(y) R \left(\frac{T}{2} y - \frac{T}{2} x \right) \quad (1.42)$$

Слід підкреслити, що такий вибір многочленів досить зручний. Як може бути як видно з (1.40), поліноми $U_n(x)$ підпорядковуються властивості

$$U_n(x) = \begin{cases} U_n(-x), & n:2 \\ -U_n(-x), & n:2 \end{cases} \quad (1.43)$$

Змінюючи x на $-x$ та y на $-y$ в (1.42), на основі (1.43) можна побачити, що $G_{ns} = 0$ якщо n і s мають різну парність. Ця властивість має місце, оскільки кореляційна функція (1.25) є парною функцією. Крім того, рівність кореляційної функції призводить до того, що $G_{ns} = G_{sn}$. Ці дві властивості дозволяють обчислити G_{ns} шляхом прямого розрахунку лише для $n \geq s$ і n, s мають однаковий парність. Такий факт значно скорочує час обчислень. У наступному розділі чисельна поведінка l - поліноміального наближення розчинів досліджується.

1.2 Постановка задачі

Постановка задачі до даної кваліфікаційної роботи є наступною: отримати вагову функцію фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування телекомунікаційного трафіку як стаціонарного процесу зі степеневою структурною функцією на основі обірваних розвинень у тригонометричний ряд Фур'є та порівняти результати з результатами поліноміальних розвинень.

1.3 Висновки

Висновком до першого розділу є те, що задача, поставлена перед даною кваліфікаційною роботою, є актуальною.

2 СПЕЦІАЛЬНА ЧАСТИНА

2.1 Обчислення вагової функції фільтра

У цьому підрозділі необхідно вирішити інтегральне рівняння:

$$\int_0^T d\tau h(\tau)R(t-\tau) = R(t+z), t \in [0, T] \quad (2.1)$$

Де: $t \in [0, T]$ - часовий інтервал, протягом якого задані вхідні дані трафіку, z - часовий інтервал, на який зроблений прогноз, $h(\tau)$ - вагова функція фільтра, яку, власне кажучи, і треба знайти.

$R(t)$ - кореляційна функція трафіку, в даній роботі досліджується модель, де трафік - стаціонарний процес зі статичної структурної функцією:

$$R(t) = \sigma^2 - \frac{\alpha}{2}|t|^{2H} \quad (2.2)$$

α - якась константа, $H \in (0,5; 1)$ - коефіцієнт Херста, σ^2 - дисперсія процесу.

Рішення шукаємо у вигляді обірваного розкладання в тригонометричний ряд Фур'є:

$$h(\tau) = a_0 + \sum_{s=1}^n (a_s \cos(s\omega\tau) + b_s \sin(s\omega\tau)) \quad (2.3)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, a_0, a_s, b_s - невідомі коефіцієнти, які треба знайти. Рішення в даному

виді назвемо рішенням в наближенні n гармонік.

Підставляємо $h(\tau)$ в інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned}
& a_0 \int_0^T d\tau R(t-\tau) + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T d\tau \cos(s\omega\tau) R(t-\tau) + \\
& + \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T d\tau \sin(s\omega\tau) R(t-\tau) = R(t+z)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

і множимо по черзі на 1, $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k=1,2,3,\dots,n$, потім беремо інтеграли по параметру t від отриманих виразів:

$$\begin{aligned}
& a_0 \int_0^T dt \int_0^T d\tau R(t-\tau) + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T dt \int_0^T d\tau \cos(s\omega\tau) R(t-\tau) + \\
& + \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T dt \int_0^T d\tau \sin(s\omega\tau) R(t-\tau) = \int_0^T dt R(t+z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_0 \int_0^T dt \int_0^T d\tau \cos(k\omega t) R(t-\tau) + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T dt \int_0^T d\tau \cos(k\omega t) \cos(s\omega\tau) R(t-\tau) + \\
& + \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T dt \int_0^T d\tau \cos(k\omega t) \sin(s\omega\tau) R(t-\tau) = \int_0^T dt \cos(k\omega t) R(t+z); k=1,2,\dots,n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_0 \int_0^T dt \int_0^T d\tau \sin(k\omega t) R(t-\tau) + \sum_{s=1}^n a_s \int_0^T dt \int_0^T d\tau \sin(k\omega t) \cos(s\omega\tau) R(t-\tau) + \\
& + \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T dt \int_0^T d\tau \sin(k\omega t) \sin(s\omega\tau) R(t-\tau) = \int_0^T dt \sin(k\omega t) R(t+z); k=1,2,\dots,n
\end{aligned}$$

Це - система рівнянь на невідомі коефіцієнти a_0, a_s, b_s

Її можна уявити в матричному вигляді: $Gg = B$, де:

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1,n+1} & G_{1,n+2} & \cdots & G_{1,2n+1} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2,n+1} & G_{2,n+2} & \cdots & G_{2,2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n+1,1} & G_{n+1,2} & \cdots & G_{n+1,n+1} & G_{n+1,n+2} & \cdots & G_{n+1,2n+1} \\ G_{n+2,1} & G_{n+2,2} & \cdots & G_{n+2,n+1} & G_{n+2,n+2} & \cdots & G_{n+2,2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{2n+1,1} & G_{2n+1,2} & \cdots & G_{2n+1,n+1} & G_{2n+1,n+2} & \cdots & G_{2n+1,2n+1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n+1} \\ B_{n+2} \\ \vdots \\ B_{2n+1} \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Відповідно, рішення системи в матричному вигляді: $g = G^{-1} B$.

Компоненти матриці G (її називають матрицею інтегральних дужок):

$$G_{11} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau R(t - \tau), \quad G_{1,s+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(s\omega\tau) R(t - \tau), \quad G_{k+1,1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega t) R(t - \tau),$$

$$G_{1,s+n+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(s\omega\tau) R(t - \tau),$$

$$G_{k+n+1,1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) R(t - \tau), \quad G_{k+1,s+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega t) \cos(s\omega\tau) R(t - \tau),$$

$$G_{k+n+1,s+n+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) \sin(s\omega\tau) R(t - \tau),$$

$$G_{k+1,s+n+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \cos(k\omega t) \sin(s\omega\tau) R(t - \tau),$$

$$G_{k+n+1,s+1} = \int_0^T \int_0^T dt d\tau \sin(k\omega t) \cos(s\omega\tau) R(t - \tau); \quad k = 1, 2, 3, \dots, n;$$

Компоненти матриці B :

$$B_1 = \int_0^T dt R(t + z), \quad B_{k+1} = \int_0^T dt \cos(k\omega t) R(t + z), \quad B_{k+n+1} = \int_0^T dt \sin(k\omega t) R(t + z), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Властивості компонент матриці G :

$$1) \quad G_{ij} = G_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2n + 1$$

- 2) $G_{1,s+n+1} = 0, s = 1, 2, \dots, n$
 3) $G_{k+n+1,s+1} = 0, s, k = 1, 2, \dots, n$

За допомогою цих властивостей матриця приймає набагато простіший вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1,n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ G_{12} & G_{22} & \cdots & G_{2,n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{1,n+1} & G_{2,n+1} & \cdots & G_{n+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & G_{n+2,n+2} & \cdots & G_{n+2,2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & G_{n+2,2n+1} & \cdots & G_{2n+1,2n+1} \end{pmatrix}$$

які вимагають менше комп'ютерних обчислень.

Обчислення вагової функції фільтра проводилось у математичному пакеті Wolfram Mathematica 11.0. У роботі обчислення проводилось для наступних параметрів:

$$T=100, \quad z=3, \quad \alpha=3 \cdot 10^{-3}, \quad \sigma=1,2H=0,8. \quad (2.5)$$

По-перше, порахувати матриці G і B , знайти матрицю g і, відповідно, невідомі коефіцієнти a_0, a_s, b_s як компоненти матриці g .

По-друге, після знаходження коефіцієнтів побудувати з ними функцію:

$$h(\tau) = a_0 + \sum_{s=1}^n (a_s \cos(s\omega\tau) + b_s \sin(s\omega\tau)) \quad (2.6)$$

По-третє побудувати на одному графіку ліву та праву частини досліджуваного інтегрального рівняння:

$$\text{Left}(t) = \int_0^t d\tau h(\tau) R(t - \tau) \quad (2.7)$$

$$\text{Right}(t) = R(t + \tau) \quad (2.8)$$

Та зробити висновок про те, наскільки добре ліва частина збігається з правою. Дослідження провести для наближень гармонік $n = 1, 2, \dots, 15$. Порівняти результати з результатами поліноміальних наближень [7,8].

Розрахунки які виконувались для наближень гармонік $n = 1, 2, \dots, 15$. В пакеті Wolfram Mathematica 11.0. описані у [Додаток В]. але, так як для програми Wolfram Mathematica 11.0. важливо задати вірні дані для розрахунку, потрібно було ретельно розписати інтегральне рівняння лівої частини рівняння:

$$\begin{aligned} \text{Left}(t) &= \int_0^t \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega\tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega\tau) \right) \left(\sigma^2 - \frac{\alpha}{2}(t - \tau)^{2H} \right) d\tau \\ &+ \int_t^T \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega\tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega\tau) \right) \left(\sigma^2 - \frac{\alpha}{2}(\tau - t)^{2H} \right) d\tau = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тоді I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega\tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega\tau) \right) \left(\sigma^2 - \frac{\alpha}{2}(t - \tau)^{2H} \right) d\tau = \\ &= \sigma^2 \int_0^t \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega\tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega\tau) \right) d\tau - \\ &- \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega\tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega\tau) \right) (t - \tau)^{2H} d\tau = \\ &= \sigma^2 \left(a_0 \int_0^t d\tau + \sum_{s=1}^l a_s \underbrace{\int_0^t d\tau \cos(s\omega\tau)}_{\frac{\sin(s\omega t)}{s\omega}} + \sum_{s=1}^l b_s \underbrace{\int_0^t d\tau \sin(s\omega\tau)}_{\frac{1 - \cos(s\omega t)}{s\omega}} \right) - \\ &- \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega\tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega\tau) \right) (t - \tau)^{2H} d\tau = \\ &= \sigma^2 \left(a_0 t + \sum_{s=1}^l a_s \frac{\sin(s\omega t)}{s\omega} + \sum_{s=1}^l b_s \frac{1 - \cos(s\omega t)}{s\omega} \right) - J_1 \end{aligned}$$

де J_1 дорівнює

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega\tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega\tau) \right) (t-\tau)^{2H} d\tau = \left. \begin{aligned} &y = t - \tau, dy = -d\tau \\ &\tau = 0 \rightarrow y = t, \\ &\tau = t \rightarrow y = 0 \end{aligned} \right\} = \\
&= -\frac{\alpha}{2} \int_t^0 \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega(t-y)) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega(t-y)) \right) y^{2H} dy = \\
&= \frac{\alpha}{2} \int_0^t a_0 y^{2H} dy + \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l a_s \int_0^t \cos(s\omega t - s\omega y) y^{2H} dy + \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l b_s \int_0^t \sin(s\omega t - s\omega y) y^{2H} dy = \\
&= \frac{\alpha}{2} a_0 \frac{t^{2H+1}}{2H+1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega t) \int_0^t \cos(s\omega y) y^{2H} dy + \\
&+ \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l a_s \sin(s\omega t) \int_0^t \sin(s\omega y) y^{2H} dy + \\
&+ \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l b_s \int_0^t \sin(s\omega t) \cos(s\omega y) y^{2H} dy - \\
&- \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l b_s \cos(s\omega t) \int_0^t \sin(s\omega y) y^{2H} dy = \\
&= \frac{\alpha}{2} a_0 \frac{t^{2H+1}}{2H+1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l \left[(a_s \cos(s\omega t) + b_s \sin(s\omega t)) \int_0^t \cos(s\omega y) y^{2H} dy \right] + \\
&+ \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l \left[(a_s \sin(s\omega t) - b_s \cos(s\omega t)) \int_0^t \sin(s\omega y) y^{2H} dy \right] \\
&\int_0^t \cos(s\omega y) y^{2H} dy = \left. \begin{aligned} &\xi = \frac{y}{t}, y = 0 \rightarrow \xi = 0, \\ &y = t \rightarrow \xi = 1 \end{aligned} \right\} = \\
&= \int_0^1 \cos(s\omega \xi t) \xi^{2H} t^{2H} t d\xi = t^{2H+1} \int_0^1 \cos(s\omega t \xi) \xi^{2H} d\xi = \\
&= t^{2H+1} \int_0^1 \cos(s\omega t \xi) \xi^{2H+1-1} d\xi = \\
&= \frac{t^{2H+1}}{2(2H+1)} \left({}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega t) + {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \sin(s\omega y) y^{2H} dy = \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{y}{t}, y = 0 \rightarrow \xi = 0, \\ y = t \rightarrow \xi = 1 \end{array} \right\} = \\
& = \int_0^1 \sin(s\omega \xi t) \xi^{2H} t^{2H} t d\xi = t^{2H+1} \int_0^1 \sin(s\omega t \xi) \xi^{2H} d\xi = \\
& = t^{2H+1} \int_0^1 \sin(s\omega t \xi) \xi^{2H+1-1} d\xi = - \\
& - \frac{i \cdot t^{2H+1}}{2(2H+1)} \left({}_1F_1(2H+1, 2H+2, i s \omega t) - {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -i s \omega t) \right)
\end{aligned}$$

Після чого отримується вираз

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{\alpha}{2} a_0 \frac{t^{2H+1}}{2H+1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l \left[\frac{t^{2H+1} (a_s \cos(s\omega t) + b_s \sin(s\omega t))}{2(2H+1)} \right. \\
& \left. \{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, i s \omega t) + {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -i s \omega t) \} \right] \\
& - i \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l \left[\frac{t^{2H+1} (a_s \sin(s\omega t) - b_s \cos(s\omega t))}{2(2H+1)} \right. \\
& \left. \{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, i s \omega t) - {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -i s \omega t) \} \right]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Далі розписується I_1

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_t^T \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega \tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega \tau) \right) \left(\sigma^2 - \frac{\alpha}{2} (\tau - t)^{2H} \right) d\tau = \\
& = \sigma^2 \left(\int_t^T d\tau a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \underbrace{\int_t^T d\tau \cos(s\omega \tau)}_{= \frac{\sin(s\omega t)}{s\omega}} + \sum_{s=1}^l b_s \underbrace{\int_t^T d\tau \sin(s\omega \tau)}_{= \frac{\cos(s\omega t) - 1}{s\omega}} \right) - \\
& - \frac{\alpha}{2} \int_t^T \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega \tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega \tau) \right) (\tau - t)^{2H} d\tau = \{y = \tau - t\} = \tag{2.11} \\
& = \sigma^2 \left((T - t) a_0 - \sum_{s=1}^l a_s \frac{\sin(s\omega t)}{s\omega} + \sum_{s=1}^l b_s \frac{\cos(s\omega t) - 1}{s\omega} \right) - \\
& - \frac{\alpha}{2} \int_0^{T-t} \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega (y + t)) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega (y + t)) \right) y^{2H} dy =
\end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \left((T-t)a_0 - \sum_{s=1}^l a_s \frac{\sin(s\omega t)}{s\omega} + \sum_{s=1}^l b_s \frac{\cos(s\omega t) - 1}{s\omega} \right) - J_2$$

Де J_2 дорівнює

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{\alpha}{2} \int_0^{T-t} \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega(y+t)) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega(y+t)) \right) y^{2H} dy = \\ &= a_0 \frac{\alpha}{2} \frac{(T-t)^{2H+1}}{2H+1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l a_s \int_0^{T-t} \cos(s\omega y + s\omega t) y^{2H} dy + \\ &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l b_s \int_0^{T-t} \sin(s\omega y + s\omega t) y^{2H} dy = \\ &= a_0 \frac{\alpha}{2} \frac{(T-t)^{2H+1}}{2H+1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l \left[\{a_s \cos(s\omega t) + b_s \sin(s\omega t)\} \int_0^{T-t} \cos(s\omega y) y^{2H} dy \right] + \\ &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{s=1}^l \left[\{b_s \cos(s\omega t) - a_s \sin(s\omega t)\} \int_0^{T-t} \sin(s\omega y) y^{2H} dy \right] = \\ &= a_0 \frac{\alpha}{2} \frac{(T-t)^{2H+1}}{2H+1} + \alpha \frac{(T-t)^{2H+1}}{4(2H+1)} \sum_{s=1}^l \left[\{a_s \cos(s\omega t) + b_s \sin(s\omega t)\} \right. \\ &\left. \{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega(T-t)) + {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega(T-t)) \} \right] - \\ &- i\alpha \frac{(T-t)^{2H+1}}{4(2H+1)} \sum_{s=1}^l \left[\{b_s \cos(s\omega t) - a_s \sin(s\omega t)\} \right. \\ &\left. \{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega(T-t)) - {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega(T-t)) \} \right] \end{aligned}$$

Тоді ліва частина буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \text{Left}(t) &= \int_0^t \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega\tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega\tau) \right) \left(\sigma^2 - \frac{\alpha}{2} (t-\tau)^{2H} \right) d\tau + \\ &+ \int_t^T \left(a_0 + \sum_{s=1}^l a_s \cos(s\omega\tau) + \sum_{s=1}^l b_s \sin(s\omega\tau) \right) \left(\sigma^2 - \frac{\alpha}{2} (\tau-t)^{2H} \right) d\tau = \\ &= \sigma^2 \left(a_0 t + \sum_{s=1}^l a_s \frac{\sin(s\omega t)}{s\omega} + \sum_{s=1}^l b_s \frac{1 - \cos(s\omega t)}{s\omega} \right) - J_1 + \\ &+ \sigma^2 \left((T-t)a_0 - \sum_{s=1}^l a_s \frac{\sin(s\omega t)}{s\omega} + \sum_{s=1}^l b_s \frac{\cos(s\omega t) - 1}{s\omega} \right) - J_2 = \sigma^2 T a_0 - J_1 - J_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 T a_0 - \frac{\alpha}{2} a_0 \frac{t^{2H+1}}{2H+1} - \alpha \frac{t^{2H+1}}{4(2H+1)} \\
&\sum_{s=1}^l \left[\left\{ a_s \cos(s\omega t) + b_s \sin(s\omega t) \right\} \right. \\
&\left. \left\{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega t) + \right. \right. \\
&\left. \left. + {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega t) \right\} \right] + \\
&+ i\alpha \frac{t^{2H+1}}{4(2H+1)} \sum_{s=1}^l \left[\left\{ a_s \sin(s\omega t) - b_s \cos(s\omega t) \right\} \right. \\
&\left. \left\{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega t) - \right. \right. \\
&\left. \left. - {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega t) \right\} \right] - \\
&a_0 \frac{\alpha (T-t)^{2H+1}}{2(2H+1)} - \\
&- \alpha \frac{(T-t)^{2H+1}}{4(2H+1)} \sum_{s=1}^l \left[\left\{ a_s \cos(s\omega(T-t)) + b_s \sin(s\omega(T-t)) \right\} \right. \\
&\left. \left\{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega(T-t)) + \right. \right. \\
&\left. \left. + {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega(T-t)) \right\} \right] \\
&+ i\alpha \frac{(T-t)^{2H+1}}{4(2H+1)} \sum_{s=1}^l \left[\left\{ b_s \cos(s\omega(T-t)) - a_s \sin(s\omega(T-t)) \right\} \right. \\
&\left. \left\{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega(T-t)) - \right. \right. \\
&\left. \left. - {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega(T-t)) \right\} \right] = \\
&= \sigma^2 T a_0 - a_0 \frac{\alpha (T-t)^{2H+1} + t^{2H+1}}{2(2H+1)} - \\
&- \frac{\alpha}{4(2H+1)} \sum_{s=1}^l \left[\left\{ a_s \cos(s\omega t) + b_s \sin(s\omega t) \right\} \right. \\
&\left. \left(t^{2H+1} \left\{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega t) + {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega t) \right\} + \right. \right. \\
&\left. \left. + (T-t)^{2H+1} \left\{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega(T-t)) + {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega(T-t)) \right\} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha \frac{1}{4(2H+1)} \sum_{s=1}^l \left[\{a_s \sin(s\omega t) - b_s \cos(s\omega t)\} \right. \\
& \left. (t^{2H+1} i \{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega t) - {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega t) \}) - \right. \\
& \left. - (T-t)^{2H+1} i \{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega(T-t)) - {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega(T-t)) \} \right]
\end{aligned}$$

Тоді ми отримаємо:

$$F_+(s, t) = t^{2H+1} \{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega t) + {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega t) \} \quad (2.12)$$

$$F_-(s, t) = it^{2H+1} \{ {}_1F_1(2H+1, 2H+2, is\omega t) - {}_1F_1(2H+1, 2H+2, -is\omega t) \} \quad (2.13)$$

Тоді фінальний вигляд інтегрального рівняння лівої частини буде такий:

$$\begin{aligned}
\text{Left}(t) &= \sigma^2 T a_0 - a_0 \frac{\alpha (T-t)^{2H+1} + t^{2H+1}}{2(2H+1)} - \frac{\alpha}{4(2H+1)} \\
& \sum_{s=1}^l \left[\{a_s \cos(s\omega t) + b_s \sin(s\omega t)\} (F_+(s, t) + F_+(s, T-t)) \right] + \quad (2.14) \\
& +\alpha \frac{1}{4(2H+1)} \sum_{s=1}^l \left[\{a_s \sin(s\omega t) - b_s \cos(s\omega t)\} (F_-(s, t) - F_-(s, T-t)) \right]
\end{aligned}$$

обчислення інтеграла засноване на останньому підручнику [14]

Результат розрахунків які виконувались для наближень гармонік $n = 1, 2, \dots, 15$

Зображені в таблиці (2.1).

Таблиця 2.1 – Чисельні значення коефіцієнтів при гармоніках у наближеннях різної кількості гармонік

Кількість гармонік у наближенні	Чисельні значення коефіцієнтів при гармоніках, округлені до трьох значущих цифр
1	$x_0 = -2.52 \times 10^{-3}; x_1 = -5.05 \times 10^{-3}; x_2 = 2.81 \times 10^{-3}$
2	$x_0 = 3.00 \times 10^{-3}; x_1 = 1.45 \times 10^{-3}; x_2 = 1.95 \times 10^{-3}; x_3 = 1.23 \times 10^{-3};$ $x_4 = 3.62 \times 10^{-3}.$
3	$x_0 = 1.61 \times 10^{-3}; x_1 = 5.75 \times 10^{-3}; x_2 = 7.27 \times 10^{-3}; x_3 = 8.56 \times 10^{-3};$ $x_4 = 7.13 \times 10^{-4}; x_5 = 2.13 \times 10^{-3}; x_6 = 4.40 \times 10^{-2}.$
4	$x_0 = 1.38 \times 10^{-3}; x_1 = 4.34 \times 10^{-3}; x_2 = 5.30 \times 10^{-3}; x_3 = 6.13 \times 10^{-3};$ $x_4 = 6.88 \times 10^{-3}; x_5 = 4.59 \times 10^{-4}; x_6 = 1.43 \times 10^{-3}; x_7 = 2.74 \times 10^{-3};$ $x_8 = 4.34 \times 10^{-3}.$
5	$x_0 = 1.29 \times 10^{-3}; x_1 = 3.77 \times 10^{-3}; x_2 = 4.50 \times 10^{-3}; x_3 = 5.13 \times 10^{-3};$ $x_4 = 5.70 \times 10^{-3}; x_5 = 6.31 \times 10^{-3}; x_6 = 3.11 \times 10^{-5}; x_7 = 1.02 \times 10^{-3};$ $x_8 = 1.92 \times 10^{-3}; x_9 = 3.18 \times 10^{-3}; x_{10} = 4.56 \times 10^{-3}.$

6	$x_0 = 1.24 \times 10^{-3}; x_1 = 3.46 \times 10^{-3}; x_2 = 4.06 \times 10^{-3}; x_3 = 4.58 \times 10^{-3};$ $x_4 = 5.06 \times 10^{-3}; x_5 = 5.58 \times 10^{-3}; x_6 = 6.05 \times 10^{-3}; x_7 = 2.16 \times 10^{-4};$ $x_8 = 7.65 \times 10^{-4}; x_9 = 1.52 \times 10^{-3}; x_{10} = 2.45 \times 10^{-3}; x_{11} = 3.53 \times 10^{-3};$ $x_{12} = 4.75 \times 10^{-3}.$
7	$x_0 = 1.21 \times 10^{-3}; x_1 = 3.27 \times 10^{-3}; x_2 = 3.79 \times 10^{-3}; x_3 = 4.24 \times 10^{-3};$ $x_4 = 4.66 \times 10^{-3}; x_5 = 5.11 \times 10^{-3}; x_6 = 5.52 \times 10^{-3}; x_7 = 5.94 \times 10^{-3};$ $x_8 = 1.49 \times 10^{-5}; x_9 = 5.85 \times 10^{-4}; x_{10} = 1.19 \times 10^{-3}; x_{11} = 1.94 \times 10^{-3};$ $x_{12} = 2.82 \times 10^{-3}; x_{13} = 3.81 \times 10^{-3}; x_{14} = 4.91 \times 10^{-3}.$
8	$x_0 = 1.11 \times 10^{-3}; x_1 = 3.14 \times 10^{-3}; x_2 = 3.60 \times 10^{-3}; x_3 = 4.01 \times 10^{-3};$ $x_4 = 4.38 \times 10^{-3}; x_5 = 4.78 \times 10^{-3}; x_6 = 5.16 \times 10^{-3}; x_7 = 5.54 \times 10^{-3};$ $x_8 = 5.92 \times 10^{-3}; x_9 = 9.99 \times 10^{-5}; x_{10} = 4.53 \times 10^{-5}; x_{11} = 9.57 \times 10^{-5};$ $x_{12} = 1.58 \times 10^{-3}; x_{13} = 2.31 \times 10^{-3}; x_{14} = 3.14 \times 10^{-3}; x_{15} = 4.05 \times 10^{-3};$ $x_{16} = 5.05 \times 10^{-3}.$
9	$x_0 = 1.17 \times 10^{-3}; x_1 = 3.04 \times 10^{-3}; x_2 = 3.46 \times 10^{-3}; x_3 = 3.83 \times 10^{-3};$ $x_4 = 4.17 \times 10^{-3}; x_5 = 4.54 \times 10^{-3}; x_6 = 4.89 \times 10^{-3}; x_7 = 5.23 \times 10^{-3};$ $x_8 = 5.59 \times 10^{-3}; x_9 = 5.96 \times 10^{-3}; x_{10} = 6.2 \times 10^{-5}; x_{11} = 3.53 \times 10^{-4};$ $x_{12} = 7.77 \times 10^{-4}; x_{13} = 1.30 \times 10^{-3}; x_{14} = 1.92 \times 10^{-3}; x_{15} = 2.63 \times 10^{-3};$ $x_{16} = 3.41 \times 10^{-3}; x_{17} = 4.26 \times 10^{-3}; x_{18} = 5.18 \times 10^{-3}$
10	$x_0 = 1.14 \times 10^{-3}; x_1 = 2.89 \times 10^{-3}; x_2 = 3.26 \times 10^{-3}; x_3 = 3.60 \times 10^{-3};$ $x_4 = 3.91 \times 10^{-3}; x_5 = 4.28 \times 10^{-3}; x_6 = 4.63 \times 10^{-3}; x_7 = 5.01 \times 10^{-3};$ $x_8 = 5.41 \times 10^{-3}; x_9 = 5.85 \times 10^{-3}; x_{10} = 8.45 \times 10^{-3}; x_{11} = 3.26 \times 10^{-5};$ $x_{12} = 2.74 \times 10^{-4}; x_{13} = 6.36 \times 10^{-4}; x_{14} = 1.09 \times 10^{-3}; x_{15} = 1.62 \times 10^{-3};$ $x_{16} = 2.23 \times 10^{-3}; x_{17} = 2.91 \times 10^{-3}; x_{18} = 3.65 \times 10^{-3}; x_{19} = 4.44 \times 10^{-3};$ $x_{20} = 5.30 \times 10^{-3}.$
11	$x_0 = 1.01 \times 10^{-3}; x_1 = 2.71 \times 10^{-3}; x_2 = 3.07 \times 10^{-3}; x_3 = 3.36 \times 10^{-3};$ $x_4 = 3.67 \times 10^{-3}; x_5 = 4.03 \times 10^{-3}; x_6 = 4.40 \times 10^{-3}; x_7 = 4.81 \times 10^{-3};$ $x_8 = 5.28 \times 10^{-3}; x_9 = 5.81 \times 10^{-3}; x_{10} = 8.42 \times 10^{-3}; x_{11} = 9.61 \times 10^{-3};$ $x_{12} = 8.08 \times 10^{-5}; x_{13} = 2.11 \times 10^{-4}; x_{14} = 5.52 \times 10^{-5}; x_{15} = 9.92 \times 10^{-3};$ $x_{16} = 1.38 \times 10^{-3}; x_{17} = 1.92 \times 10^{-4}; x_{18} = 2.51 \times 10^{-3}; x_{19} = 3.16 \times 10^{-3};$ $x_{20} = 3.86 \times 10^{-3}; x_{21} = 4.61 \times 10^{-3}; x_{22} = 5.41 \times 10^{-3}.$
12	$x_0 = 1.09 \times 10^{-3}; x_1 = 2.59 \times 10^{-3}; x_2 = 2.86 \times 10^{-3}; x_3 = 3.12 \times 10^{-3};$ $x_4 = 3.40 \times 10^{-3}; x_5 = 3.77 \times 10^{-3}; x_6 = 4.17 \times 10^{-3}; x_7 = 4.63 \times 10^{-3};$ $x_8 = 5.18 \times 10^{-3}; x_9 = 5.83 \times 10^{-3}; x_{10} = 8.47 \times 10^{-3}; x_{11} = 9.81 \times 10^{-3};$ $x_{12} = 1.13 \times 10^{-2}; x_{13} = -1.10 \times 10^{-5}; x_{14} = 1.58 \times 10^{-4}; x_{15} = 4.30 \times 10^{-4};$ $x_{16} = 7.79 \times 10^{-4}; x_{17} = 1.22 \times 10^{-2}; x_{18} = 1.66 \times 10^{-3}; x_{19} = 2.19 \times 10^{-3};$ $x_{20} = 2.77 \times 10^{-3}; x_{21} = 3.39 \times 10^{-3}; x_{22} = 4.05 \times 10^{-3}; x_{23} = 4.76 \times 10^{-3};$ $x_{24} = 5.51 \times 10^{-3}.$
13	$x_0 = 1.06 \times 10^{-3}; x_1 = 2.41 \times 10^{-3}; x_2 = 2.61 \times 10^{-3}; x_3 = 2.83 \times 10^{-3};$

	$x_4 = 3.10 \times 10^{-3}; x_5 = 3.47 \times 10^{-3}; x_6 = 3.91 \times 10^{-3}; x_7 = 4.46 \times 10^{-3};$ $x_8 = 5.12 \times 10^{-3}; x_9 = 5.91 \times 10^{-3}; x_{10} = 8.62 \times 10^{-3}; x_{11} = 1.01 \times 10^{-3};$ $x_{12} = 1.19 \times 10^{-3}; x_{13} = 1.39 \times 10^{-2}; x_{14} = -2.07 \times 10^{-5}; x_{15} = 1.01 \times 10^{-5};$ $x_{16} = 3.35 \times 10^{-3}; x_{17} = 6.06 \times 10^{-3}; x_{18} = 1.03 \times 10^{-3}; x_{19} = 1.45 \times 10^{-3};$ $x_{20} = 1.92 \times 10^{-3}; x_{21} = 2.14 \times 10^{-3}; x_{22} = 2.93 \times 10^{-3}; x_{23} = 3.67 \times 10^{-3};$ $x_{24} = 4.71 \times 10^{-3}; x_{25} = 4.90 \times 10^{-3}; x_{26} = 5.62 \times 10^{-3}.$
14	$x_0 = 1.02 \times 10^{-3}; x_1 = 2.17 \times 10^{-3}; x_2 = 2.29 \times 10^{-4}; x_3 = 2.42 \times 10^{-3};$ $x_4 = 2.71 \times 10^{-3}; x_5 = 3.11 \times 10^{-3}; x_6 = 3.61 \times 10^{-3}; x_7 = 4.26 \times 10^{-3};$ $x_8 = 5.08 \times 10^{-3}; x_9 = 6.10 \times 10^{-3}; x_{10} = 0.89 \times 10^{-2}; x_{11} = 1.07 \times 10^{-3};$ $x_{12} = 1.28 \times 10^{-3}; x_{13} = 1.52 \times 10^{-3}; x_{14} = 1.79 \times 10^{-3}; x_{15} = -0.04 \times 10^{-3};$ $x_{16} = 0.07 \times 10^{-3}; x_{17} = 0.03 \times 10^{-3}; x_{18} = 0.05 \times 10^{-3}; x_{19} = 0.08 \times 10^{-3};$ $x_{20} = 0.01 \times 10^{-3}; x_{21} = 0.01 \times 10^{-3}; x_{22} = 0.02 \times 10^{-3}; x_{23} = 0.26 \times 10^{-3};$ $x_{24} = 0.32 \times 10^{-3}; x_{25} = 0.37 \times 10^{-3}; x_{26} = 0.43 \times 10^{-3}; x_{27} = 0.50 \times 10^{-3};$ $x_{28} = 0.57 \times 10^{-3}.$
15	$x_0 = 9.79 \times 10^{-4}; x_1 = 1.88 \times 10^{-3}; x_2 = 1.89 \times 10^{-3}; x_3 = 2.01 \times 10^{-3};$ $x_4 = 2.25 \times 10^{-3}; x_5 = 2.67 \times 10^{-3}; x_6 = 3.26 \times 10^{-3}; x_7 = 4.05 \times 10^{-3};$ $x_8 = 5.09 \times 10^{-3}; x_9 = 6.39 \times 10^{-3}; x_{10} = 9.40 \times 10^{-3}; x_{11} = 1.16 \times 10^{-2};$ $x_{12} = 1.4 \times 10^{-2}; x_{13} = 1.7 \times 10^{-2}; x_{14} = 2.03 \times 10^{-3}; x_{15} = 2.03 \times 10^{-2};$ $x_{16} = -5.03 \times 10^{-5}; x_{17} = 5.17 \times 10^{-3}; x_{18} = 2.53 \times 10^{-3}; x_{19} = 4.04 \times 10^{-3};$ $x_{20} = 7.07 \times 10^{-3}; x_{21} = 0.01 \times 10^{-3}; x_{22} = 0.05 \times 10^{-3}; x_{23} = 1.09 \times 10^{-3};$ $x_{24} = 0.02 \times 10^{-3}; x_{25} = 0.02 \times 10^{-3}; x_{26} = 0.03 \times 10^{-3}; x_{27} = 0.03 \times 10^{-3};$ $x_{28} = 0.04 \times 10^{-3}; x_{29} = 0.05 \times 10^{-3}; x_{30} = 0.05 \times 10^{-3}.$

Як бачимо, коефіцієнти мають деяку тенденцію до зростання з ростом числа гармонік, проте не зростають швидко зі зростом числа гармонік.

Аналітично перевірити якість отриманих розв'язків, безумовно, дуже важко, тому якість результатів для вагової функції була перевірена побудовою відповідних графіків порівняння лівої та правої частин інтегрального рівняння, розв'язкам якого має бути вагова функція фільтра.

На всіх наведених графіках пунктиром позначено ліву частину інтегрального рівняння (2.6) для кореляційної функції (2.2) та чисельних даних при наближенні заданої кількості гармонік, а суцільною лінією – праву частину відповідного інтегрального рівняння (2.7).

Для наближення однієї гармоніки маємо наступне порівняння:

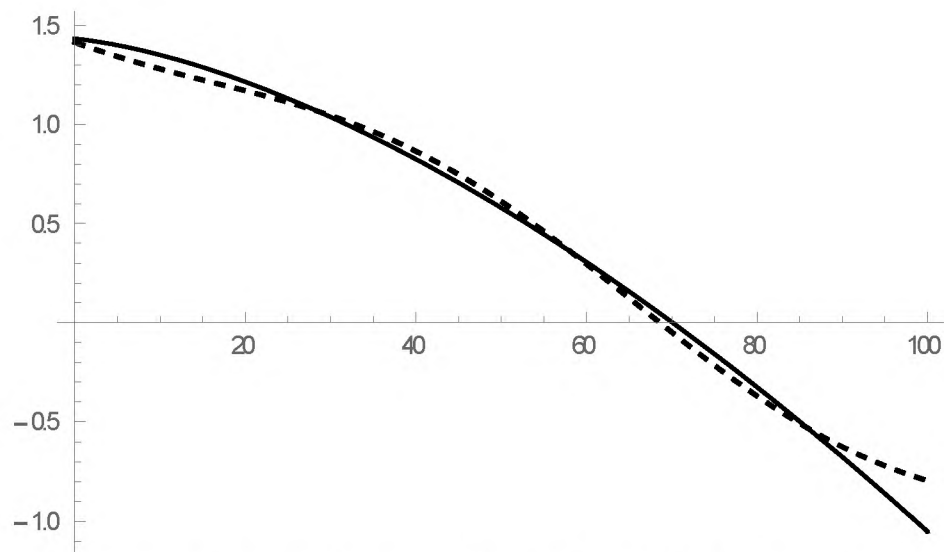


Рисунок 2.1 –чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення одної гармоніки

Як бачимо з рис. 2.1, наближення одного полінома не є точним.

У наближенні двох гармонік маємо наступне:

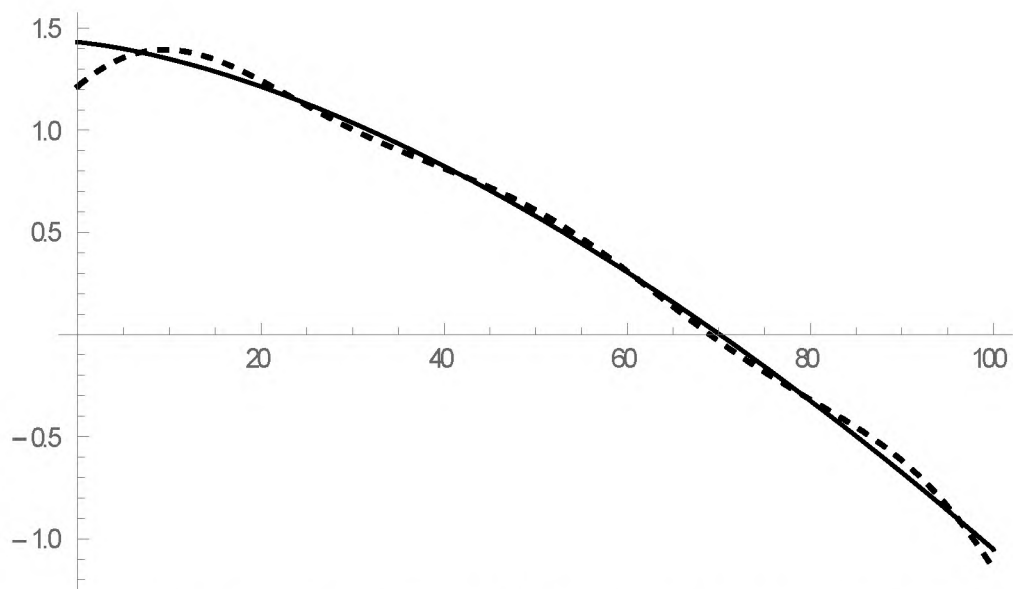


Рисунок 2.2 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення двох гармонік

Як бачимо з рисунку 2.2 результати лівої та правої частин не сильно відрізняються від результатів на рисунку 2.1.

Для наближення трьох гармонік маємо таку ситуацію:

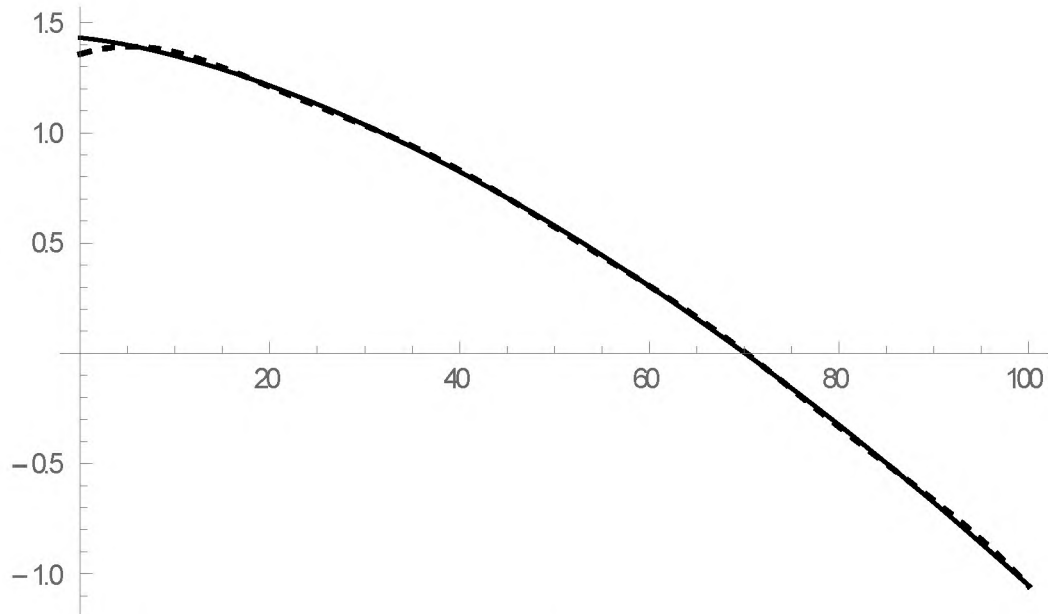


Рисунок 2.3 – чисельне порівняння ліві та правої частини інтегрального рівняння для наближення трьох гармонік

Як бачимо на рисунку 2.3, результати ліві та правої частини майже ідентичні один одній, проте ще не задовольняє заданій умові. Щодо наближення чотирьох гармонік, маємо

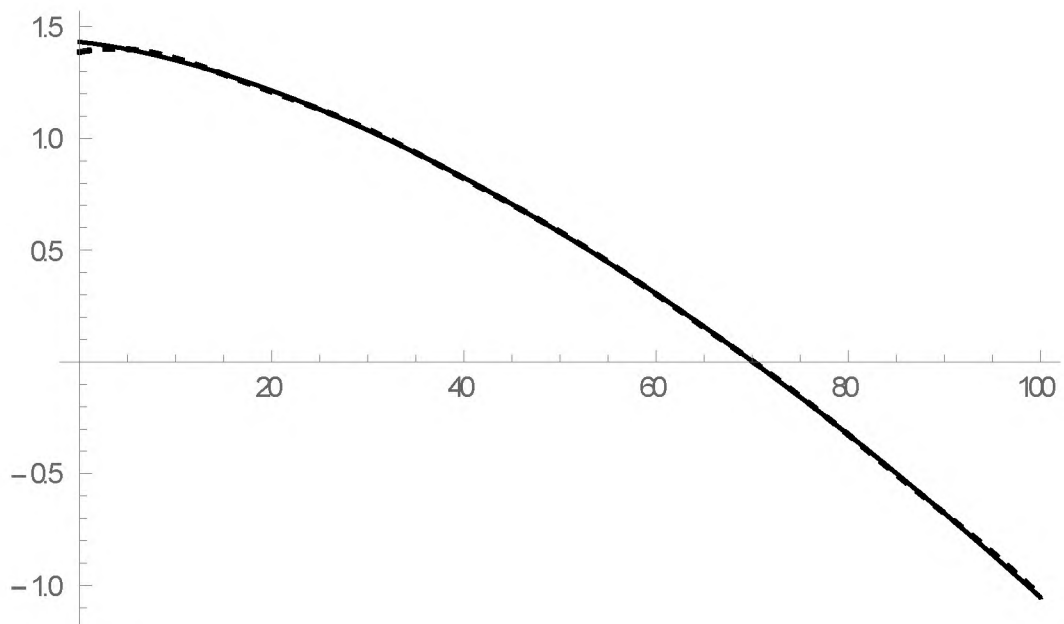


Рисунок 2.4 – чисельне порівняння ліві та правої частини інтегрального рівняння для наближення чотирьох гармонік

Як бачимо з рисунку 2.4, права та ліва частини майже зійшлись, лише на 1.5 – є невелика розбіжність, тепер подивимось на результат при 5 гармоніках

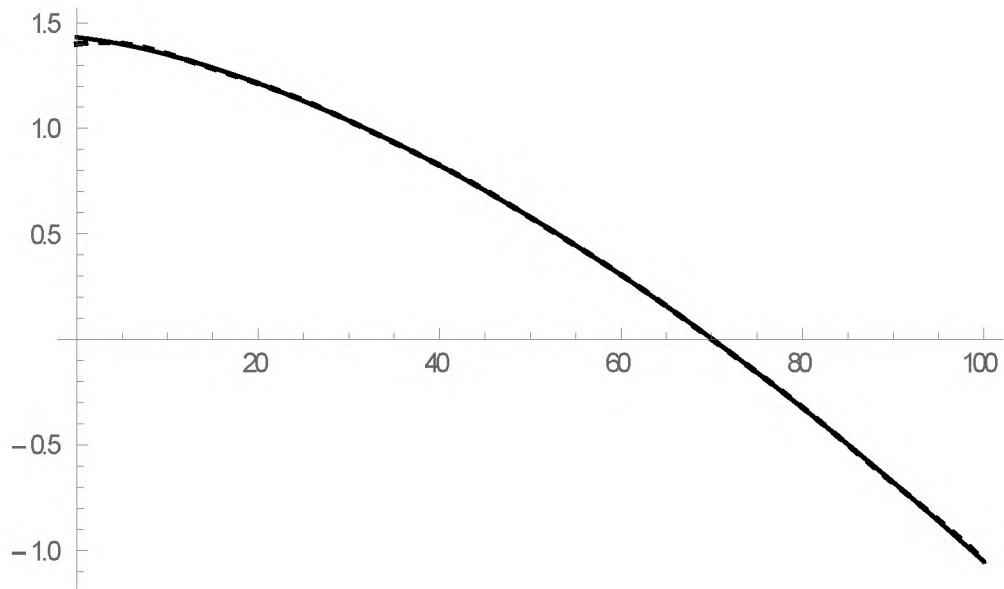


Рисунок 2.5 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення п'ятих гармонік

Як бачимо на рисунку 2.5 результати правої та лівої частини нарешті збіглись.

Далі побудуємо для шести гармонік і побачимо, чи залишиться така залежність.

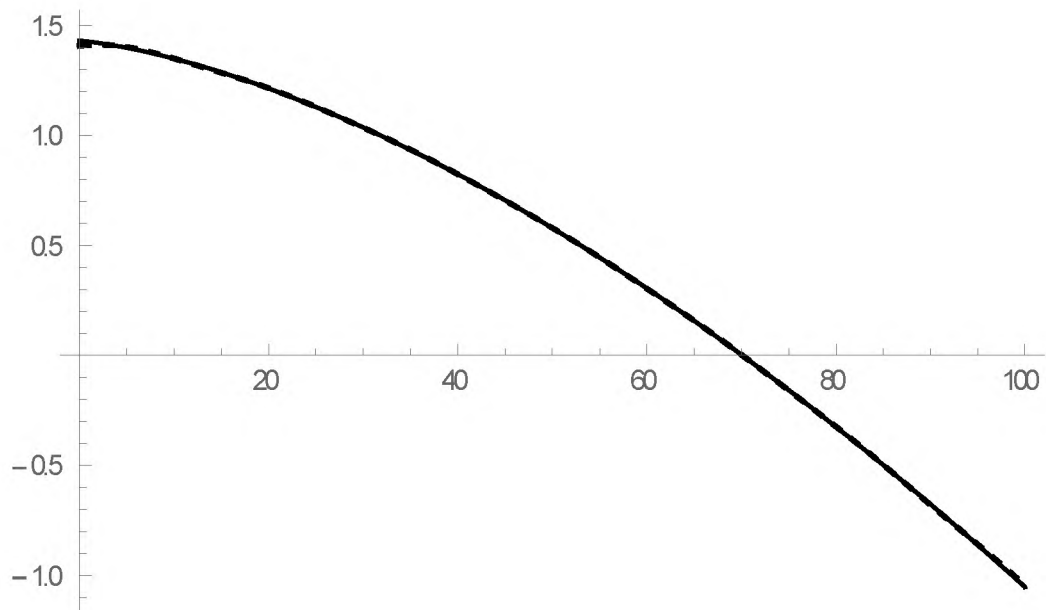


Рисунок 2.6 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення шістьох гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.6, результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові, тепер подивимось на результати при семи гармоніках.

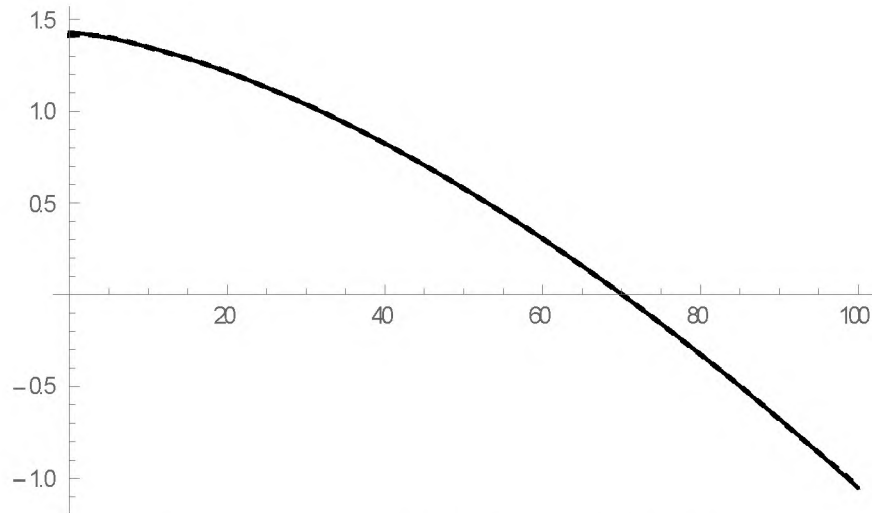


Рисунок 2.7 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення семи гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.7, результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові, тепер подивимось на результати при восьми гармоніках.

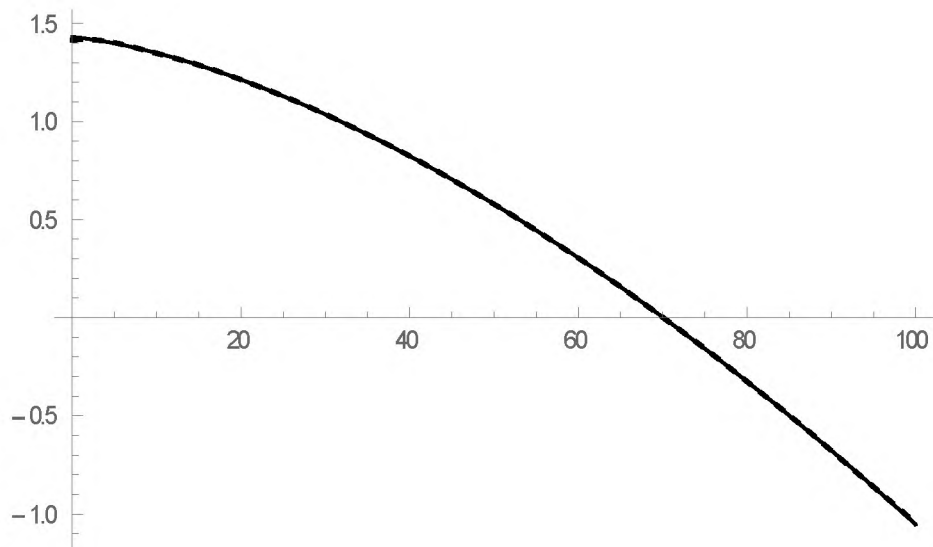


Рисунок 2.8 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення восьми гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.8, теж результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові, тепер подивимось на результати при дев'яти гармоніках.

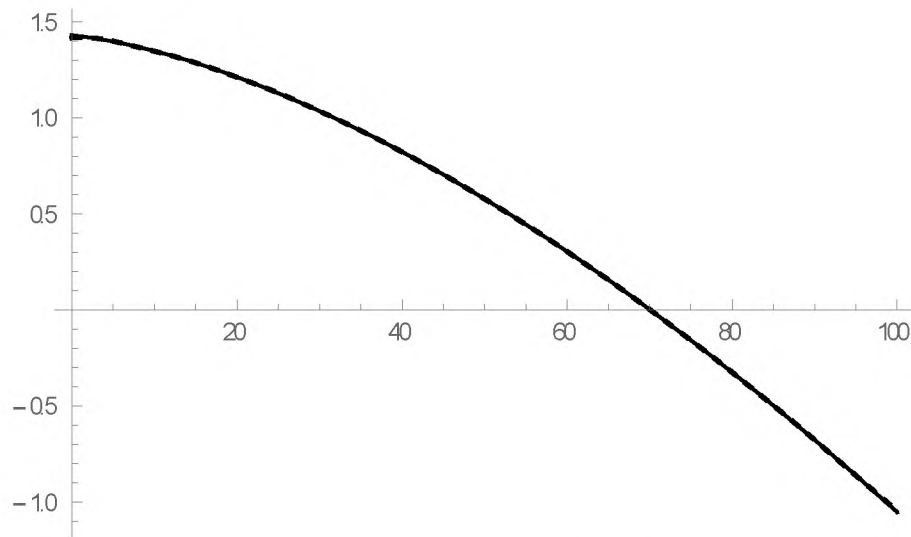


Рисунок 2.9 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення дев'яти гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.9, теж результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові, тепер подивимось на результати при десяти гармоніках.

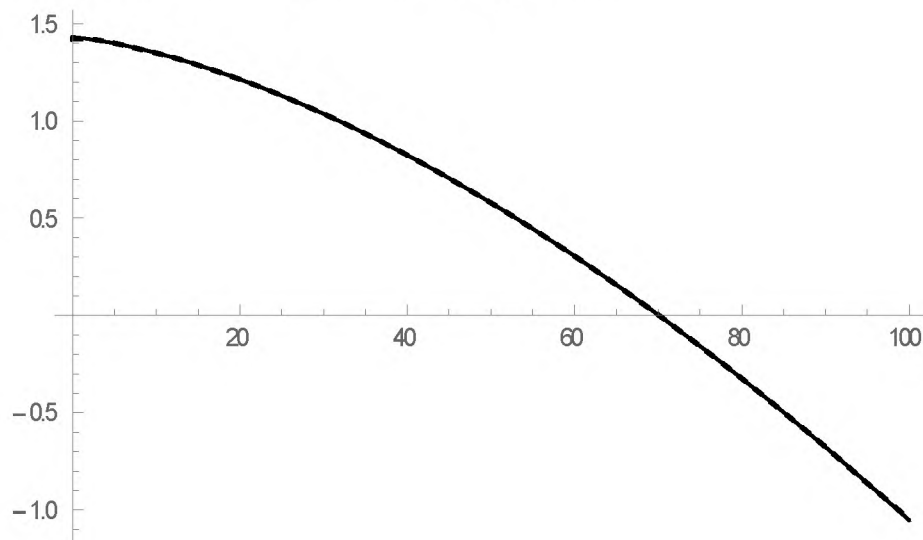


Рисунок 2.10 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення десяти гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.10, теж результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові, тепер подивимось на результати при одинадцяти гармоніках.

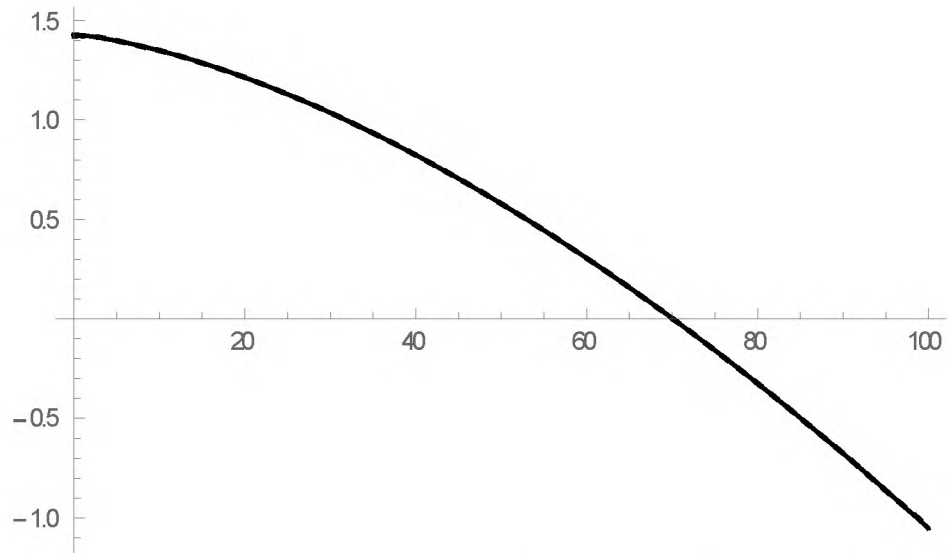


Рисунок 2.11 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення одинадцяти гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.11, теж результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові, тепер подивимось на результати при дванадцяти гармоніках.

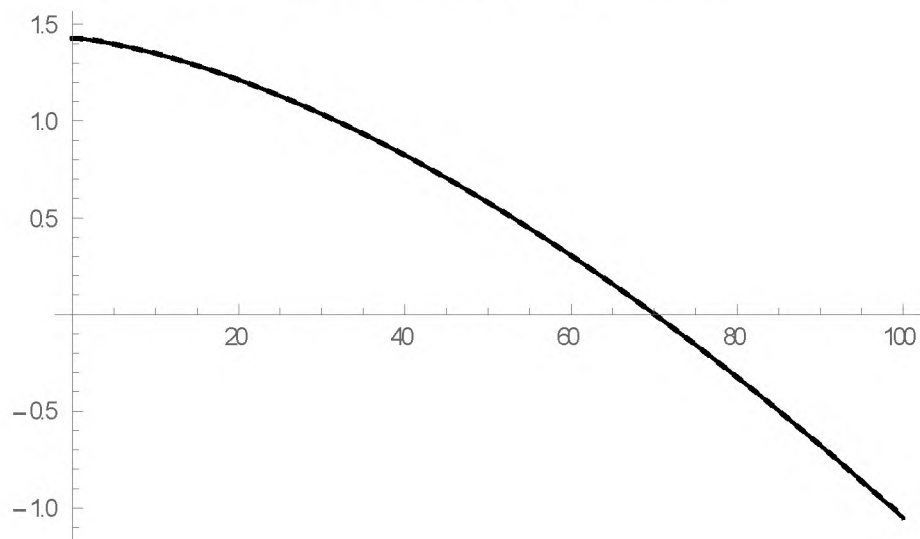


Рисунок 2.12 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення дванадцяти гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.12, теж результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові, тепер подивимось на результати при тринадцяти гармоніках

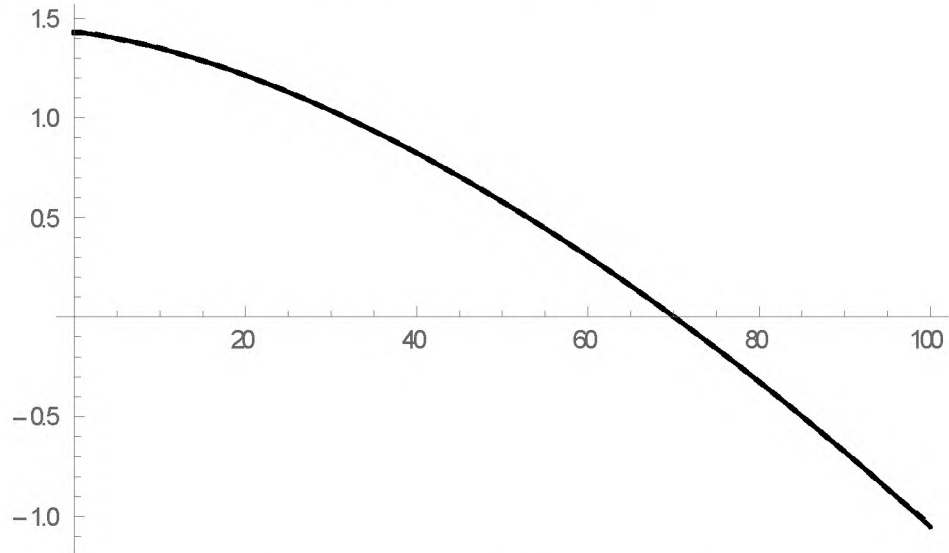


Рисунок 2.13 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення тринадцяти гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.13, теж результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові, тепер подивимось на результати при чотирнадцяти гармоніках

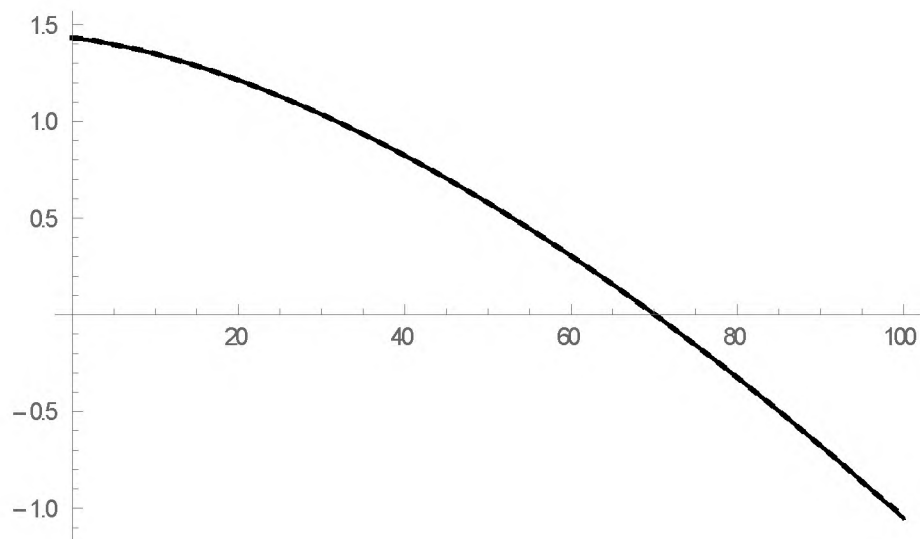


Рисунок 2.14 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення чотирнадцяти гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.14, теж результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові, тепер подивимось на результати при п'ятнадцяти гармоніках

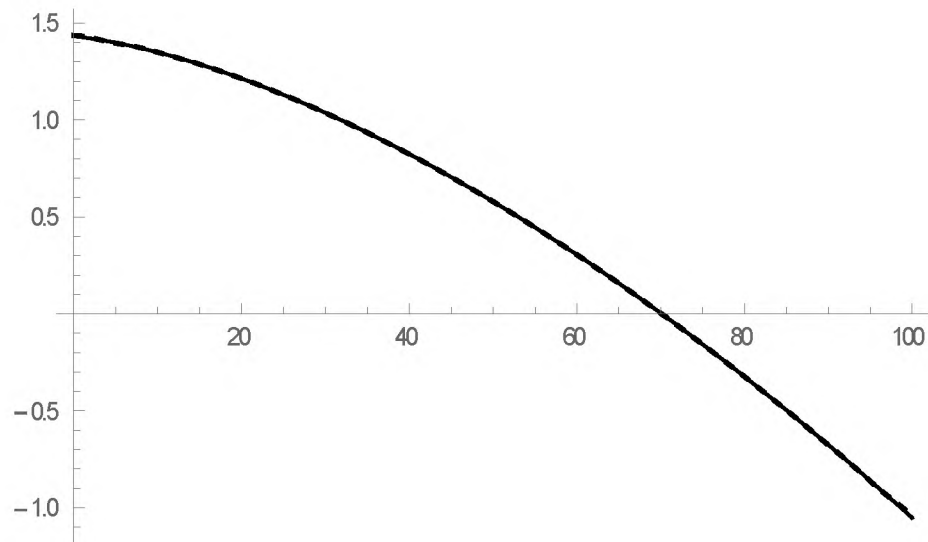


Рисунок 2.15 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення п'ятнадцяти гармонік

Як бачимо, на рисунку 2.15, теж результати лівої та правої частини ідентичні, тобто залишаються незмінними та задовольняють заданій умові.

Тепер розглянемо декілька прикладів з результатами від поліномів. Графіки були побудовані на основі даних з роботи [9]

Як бачимо з рис. 2.16., наближення восьми поліномів є точним, та фактично не відчувається різниця між наближеннями

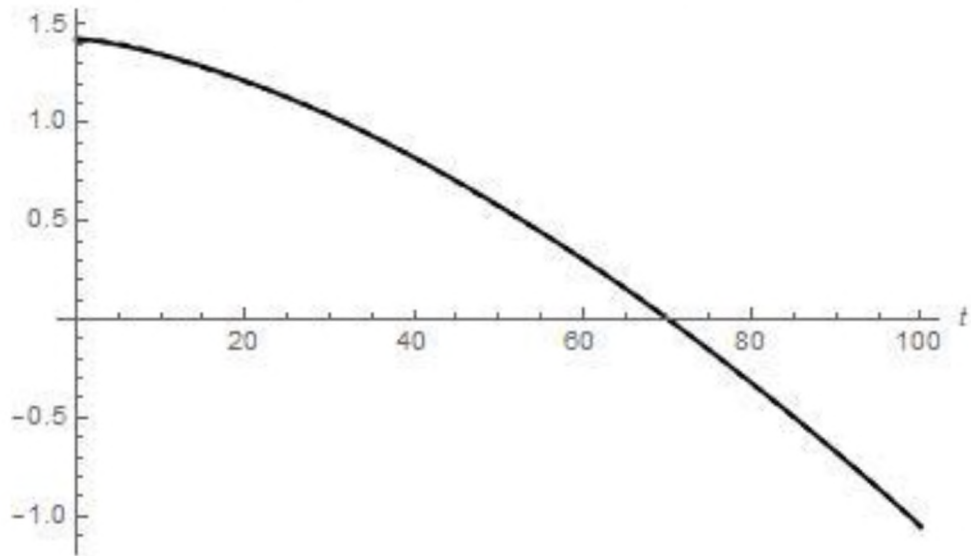


рис. 2.16 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення восьми поліномів

Для наближення дев'яти поліномів маємо

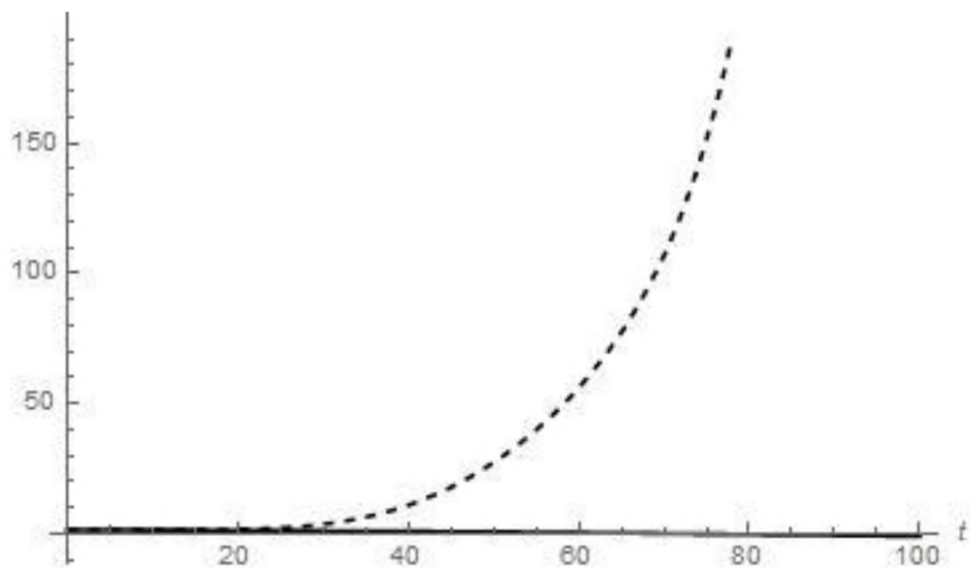
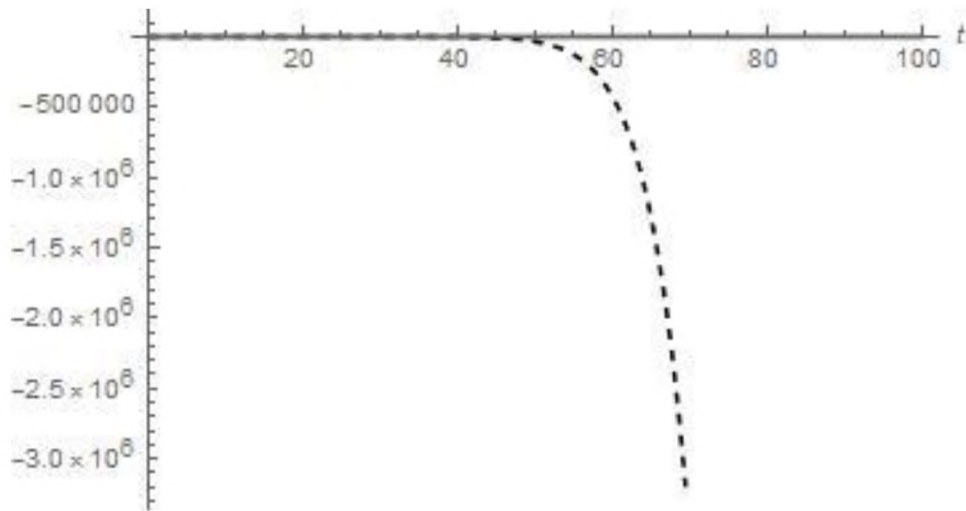


рис. 2.17 – Чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для наближення дев'яти поліномів

Як бачимо з рис. 2.17, для дев'яти поліномів метод працює погано та отримана вагова функція не є розв'язком відповідного інтегрального рівняння. Для п'ятнадцяти поліномів маємо



2.18 – чисельне порівняння лівої та правої частини інтегрального рівняння для п'ятнадцяти десяти поліномів

Як бачимо з рис. 2.18, для п'ятнадцяти поліномів метод теж працює погано.

2.2 Порівняння результатів гармонік з результатами для інших систем поліномів.

Основним порівнянням результатів гармонік з результатами поліномних систем є те, що наближення одного полінома не є точним.

Наближення двох поліномів є досить точним та набагато кращим за наближення одного полінома. Надалі для наближення трьох поліномів точність методу падає, та лише дещо незначно покращується для наближення чотирьох поліномів. Проте наближення п'яти поліномів є, фактично, точним – криві лівої та правої частин інтегрального рівняння є дуже близькими для наближення п'яти поліномів. Наближення п'яти поліномів є набагато кращим за наближення двох поліномів. Надалі для наближень шести – восьми поліномів точність методу слабко зростає зі збільшенням кількості поліномів.

Однак наближення дев'яти поліномів дає дуже погані результати – не можна взагалі сказати, що це наближення дає правильний розв'язок

інтегрального рівняння. Для цього наближення криві лівої та правої частин інтегрального рівняння відрізняються на порядки. Для наближень десяти – п'ятнадцяти поліномів ситуація навіть погіршується зі зростанням кількості поліномів. Тобто можна казати, що метод, досліджений у цій роботі, не працює для наближень 9–15 поліномів.

Тепер роздивимось результати при використанні наближень гармонік

Для гармонік результати набагато кращі, при наближенні 1 гармоніки є деяка синхронність лівої та правої частин, проте ще не до кінця задовольняють заданій умові, при 2 гармоніках ліва та права частини вже більш стають синхронними, проте, цього теж ще не достатньо. Вже на третій та четвертій наближенні гармонік результати лівої та правої частин майже збігаються одне одній. На 5-15 – наближеннях гармонік результати лівої та правої частин нарешті максимально збігаються, звідки, можна зробити висновки що наближення 5–15 гармонік дають дуже хороші співпадіння лівої і правої частини інтегрального рівняння.

2.3 Висновки

Досліджено наближені розв'язки для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування телекомунікаційного трафіку у моделі випадкового процесу зі степеневою структурною функцією. Відповідні розв'язки шукались у вигляді обірваних розвинень у тригонометричний ряд Фур'є. Відмінністю роботи від робіт попередників є те, що у роботах попередників[5–7] аналогічна задача розв'язувалась на основі обірваних розвинень за ортогональними поліномами.

Досліджено наближення до 15 гармонік включно. Показано, що знайдені вагові функції дають хороше співпадіння лівої та правої частини інтегрального рівняння Вінера–Хопфа, особливо для наближень від 5 до 15 гармонік. Показано, що тригонометричні розв'язки є кращими за поліноміальні в рамках досліджуваної моделі.

Поведінку розв'язків досліджено для заданих чисельних даних (2.5), тож які мають шанс реалізуватися у реальних системах. Так як задані параметри не є якимись особливими виділеними параметрами, то отримані результати, скоріш за все, означають, що поведінка відповідних розв'язків є аналогічною і для інших параметрів.

Результати роботи можуть бути застосовані для прогнозування трафіку у телекомунікаційних системах з пакетною передачею даних.

3 ЕКОНОМІЧНИЙ РОЗДІЛ

3.1 Розрахунок трудомісткості дослідження моделі зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є.

В даному розділі проводяться економічні розрахунки витрат на дослідження моделі зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є. Отримані результати застосовують для прогнозування трафіку у мережах IEEE 802.11b та для маршрутизаторів між внутрішніми мережами підприємств або університетів та мережею Інтернет.

3.2 Визначення трудомісткості розробки

Трудомісткість – це показник, що характеризує витрати робочого часу на виробництво певної споживної вартості або на виконання конкретної технологічної операції.

Трудомісткість при дослідженні і розробці моделі зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є. Визначається тривалістю кожної робочої операції (таблиця 3.1), починаючи зі збору та аналізу необхідної інформації і закінчуючи оформленням документації (за умови роботи одного чоловіка):

$$t = t_o + t_\mu + t_A + t_\Pi + t_{отл} + t_d, \text{ людино-годин} \quad (3.1)$$

Оцінка витрат праці на збір і аналіз інформації залежить від конкретних умов і визначається на основі експертних оцінок. Зважаючи на той факт, що дослідження, пов'язані з обробкою складних сигналів в телекомунікаційних системах, охоплюють великий пласт інформації, представимо результати трудомісткості кожної операції де

t_o - витрати праці на підготовку і опис поставленого завдання;

t_{μ} - витрати праці на дослідження алгоритму рішення задачі;

t_A - витрати праці на розробку блок-схеми алгоритму;

t_{II} - витрати праці на програмування за розробленою блок-схемою;

$t_{отл}$ - витрати праці на налагодження програми на ЕОМ;

t_D - витрати праці на підготовку документації по завданню.

Складові частини витрат праці визначаються на підставі умовної кількості операторів в програмі. Причому до цього числа входять ті оператори, які інженеру необхідно написати в процесі роботи над завданням з урахуванням можливих уточнень в постановці завдання і удосконалення алгоритму.

Умовна кількість операторів розраховується за формулою (3.2):

$$Q = q \cdot c \cdot (1 + p), \quad (3.2)$$

де q - передбачувана кількість операторів;

c - коефіцієнт складності програми;

p - коефіцієнт корекції програми в ході її розробки.

Коефіцієнт складності програми c визначає відносну складність програм завдання по відношенню до типового завдання, складність якого прийнята рівній одиниці. Діапазон його зміни 1,25...2,0.

Коефіцієнт корекції програми p визначає збільшення об'єму робіт за рахунок внесення змін до алгоритму або програми в результаті уточнення постановки завдання. Величина p знаходиться в межах 0,05...0,1, що відповідає внесенню 3...5 корекцій, що спричиняють за собою переробку 5-10 % готової програми.

Проведемо розрахунок умовної кількості операторів в програмному продукті, що розробляється:

$$Q = q \cdot c \cdot (1 + \rho) = 250 \cdot 1 \cdot (1 + 0,1) = 275 \text{ (опер.)} \quad (3.3)$$

Оцінку витрат праці на підготовку і опис завдання приймаємо як $t_o = 110$ *людино-часів*, тому що дослідження пов'язані з обробкою сигналів в телекомунікаційних системах.

Витрати праці на вивчення опису завдання визначаються з урахуванням уточнення опису і кваліфікації інженера за формулою (3.4):

$$t_\mu = \frac{Q \cdot B}{(75 \dots 85) \cdot k}, \text{ людино-годин,} \quad (3.4)$$

де B - коефіцієнт збільшення витрат праці унаслідок недостатнього опису завдання, $B=1,2 \dots 1,5$;

k - коефіцієнт кваліфікації інженера, визначуваний залежно від стажу роботи по даній спеціальності.

Він складає при стажі роботи, років:

до 2 - 0,8;

від 2 до 3 - 1,0;

від 3 до 5 - 1,1...1,2;

від 5 до 7 - 1,3...1,4;

Проводимо розрахунок:

$$t_\mu = \frac{275 \cdot 1,5}{80 \cdot 1,0} = 5,16 \text{ людино-годин}$$

Витрати праці на розробку алгоритму рішення поставленої задачі:

$$t_A = \frac{Q}{(20 \dots 25) \cdot k}, \text{ людино-годин,} \quad (3.5)$$

$$t_A = \frac{275}{25 \cdot 1,0} = 11 \text{ людино-годин}$$

Витрати праці на складання програми по готовій блок-схемі:

$$t_{\Pi} = \frac{Q}{(20...25) \cdot k}, \text{людино-годин}, \quad (3.6)$$

$$t_{\Pi} = \frac{275}{25 \cdot 1,0} = 11 \text{людино-годин}$$

Витрати на наладку програми на ЕОМ $t_{отл}$ розраховуються по наступних формулах:

за умови автономної наладку одного завдання:

$$t_{отл} = \frac{Q}{(4...5) \cdot k}, \text{людино-годин}, \quad (3.7)$$

$$t_{отл} = \frac{Q}{(4...5) \cdot k} = \frac{275}{5 \cdot 1,0} = 55 \text{людино-годин}$$

за умови комплексному відкладанню завдання:

$$t_{отл}^K = 1,5 \cdot t_{отл}, \text{людино-годин}, \quad (3.8)$$

$$t_{отл}^K = 1,5 \cdot t_{отл} = 1,5 \cdot 55 = 82,5 \text{людино-годин}$$

Витрати праці на підготовку документації по завданню $t_{д}$ визначаються за формулою:

$$t_{д} = t_{дп} + t_{до}, \text{людино-годин}, \quad (3.9)$$

де $t_{дп}$ - трудомісткість підготовки матеріалів до рукопису,

$$t_{дп} = \frac{Q}{(15...20) \cdot k} = \frac{275}{20 \cdot 1,0} = 13,75$$

$t_{до}$ - трудомісткість редагування, друку і оформлення документації

$$t_{до} = 0,75 \cdot t_{дп} = 0,75 \cdot 13,75 = 10,31$$

Отже, трудомісткість створення програмного продукту складає:

$$t_{д} = t_{дп} + t_{до} = 13,75 + 10,31 = 24,06 \text{людино-годин}$$

Таким чином, визначивши трудомісткість окремих показників, розрахуємо сумарну трудомісткість розробки програмного продукту за формулою (3.1):

$$t = 275 + 5,16 + 11 + 11 + 55 + 24,06 = 381,22 \text{ людино-годин}$$

3.3 Визначення середньої заробітної плати спеціаліста в галузі телекомунікацій

Інженер з телекомунікацій забезпечує:

1. Поточна експлуатація та техобслуговування обладнання комутаційної підсистеми і іншого супутнього мережевого і серверного устаткування і мережевих платформ з метою підтримки показників якості роботи комутаційної підсистеми в межах нормативних значень.
2. Моніторинг роботи обладнання, аналіз статистичних даних про роботу мережі, розробка пропозицій щодо оптимізації з метою забезпечення високої якості сервісу, що надається абонентам, оптимального використання ресурсів обладнання.
3. Реєстрація в мережі нових мережевих елементів і кодів.
4. Внесення змін до маршрутизацію сигнального і голосового трафіку на обладнанні комутаційних підсистем і мережевих платформ.
5. Актуалізація схем організації зв'язку.
6. Виявлення, аналіз і діагностика непрацездатності.
7. Збір і аналіз статистики аварійних повідомлень від всіх мережевих елементів, з'ясування причин їх виникнення, ведення звітності по аварійних ситуацій.
8. Контроль баз даних і адміністрування обладнання комутаційної підсистеми.

Підрахунок середньої заробітної плати:

- Розрахуємо середню заробітну плату за один місяць за формулою:

$$C_{\text{ПР}} = З_{\text{ПРік}} / 12 \quad (3.10)$$

$$C_{\text{ПР}} = 8000 \text{ грн/місяць}$$

- Розрахуємо середню заробітну плату за одну годину роботи, з урахуванням 8-ми годинного робочого графіку на добу і 5-ти денній робочій тиждень:

- Кількість робочих годин в місяць (підрахунок за місяць листопад (30 днів в місяці)): 168 год/місяць;

- Середня заробітну плату за одну годину роботи становить: 62,5 грн/годину.

3.4 Розрахунок витрат на заробітну плату

Заробітна плата (оплата праці працівника) – винагорода за працю залежно від кваліфікації, складності, обсягу, якості та умов виконуваної роботи, а також компенсаційні та стимулюючі виплати. Заробітна плата – грошова компенсація, яку працівник отримує в обмін на свою працю.

Заробітна плата виконавця враховує основну і додаткову заробітну плату, а також відрахування на соціальні потреби (пенсійне страхування, страхування на випадок безробіття, соціальне страхування тощо) і визначається за формулою: Витрати на створення програми включають витрати на заробітну плату виконавців і вартість машинного часу, необхідного для налагодження програми:

$$K_{\text{ІЗ}} = З_{\text{ЗП}} + З_{\text{МІ}}, \text{ грн} \quad (3.10)$$

Заробітна плата виконавців визначається за формулою:

$$З_{\text{ЗП}} = t \cdot C_{\text{ПР}}, \text{ грн}, \quad (3.11)$$

де t - загальна трудомісткість розробки програмного продукту, визначується по формулі (3.1), людино-годин;

$C_{\text{ІП}}$ - середня годинна заробітна плата інженера (основна і додаткова) з урахуванням відрахувань на соціальні потреби, грн/год.

Отже, заробітна плата інженера з урахуванням премій (20%) і можливих надбавок (10%) складає 10400 грн.

Таким чином, річний фонд заробітної плати – 124800 грн. Єдиний соціальний внесок складає 37%, тобто 46176 грн.

Разом, річний фонд заробітної плати з урахуванням відрахувань на соціальні потреби склав 170976 грн.

Таким чином, витрати на оплату праці розробника складають:

$$Z_{\text{ЗП}} = t \cdot C_{\text{ІП}} = 62,5 \cdot 381,22 = 23826,25 \text{ грн}$$

3.5 Розрахунок витрат на необхідне програмне та апаратне забезпечення

Розрахунок вартість машинного часу, необхідного для наладки програми на ЕОМ здійснюється за формулою:

$$Z_{\text{МЧ}} = (t_{\text{отл}} + t_{\text{д}}) \cdot C_{\text{МЧ}}, \text{ грн}, \quad (3.14)$$

де $t_{\text{отл}}$ - трудомісткість наладки програми на ЕОМ, яка визначається за формулами (3.7) і (3.8), людино-годин;

$t_{\text{д}}$ - витрати праці на підготовку документація відповідно завданню, яка визначається за формулою (3.9);

$C_{\text{МЧ}}$ - вартість машино-часу ЕОМ, грн/год.

Для розрахунку вартості машино-часу необхідно знати вартість ЕОМ на момент її придбання і введення в експлуатацію, і вартість споживаної електроенергії. Разом, загальна вартість ЕОМ і потрібного ПО на момент придбання складає 13969 грн. Сума річних амортизаційних відрахувань визначається за формулою (3.15):

$$C_{ам} = C_{пер} \cdot H_A, \text{ грн} , \quad (3.15)$$

де $C_{пер}$ - первинна вартість ЕОМ і необхідного програмного забезпечення;
 H_A - норма амортизації,

Для розрахунку амортизаційних відрахування доцільно застосувати метод подвійної амортизації ($H_A = 2/T$, де T – строк експлуатації фондів). $H_A = 2/5 = 0,5$ чи 50 %.

Таким чином, амортизаційні відрахування у 2020р. склали:

$$САМ_{2020} = 13969 \cdot 0,5 = 6984,5 \text{ грн} \quad (3.16)$$

Отже, залишкова вартість ЕОМ і необхідного програмного забезпечення на складі:

$$\Phi_{ост} = 13969 - 6984,5 = 6984,5 \text{ грн}$$

Розрахунок вартості машино-часу ЕОМ проведемо за формулою:

$$C_{м.ч} = \frac{\Phi_{ост}}{\Phi_{год.раб.ч.}} + W \cdot Ц_э, \text{ грн/год}, \quad (3.17)$$

де $\Phi_{год.раб.ч.}$ - річний фонд корисного часу роботи ЕОМ;

W - настановна потужність ЕОМ, $W = 0,4 \text{ кВт}$;

$Ц_э$ - вартість $1 \text{ кВт} \cdot \text{год}$ електроенергії.

Річний фонд корисного часу роботи ЕОМ дорівнює річному фонду робочого часу інженера і складає 1816 годин.

Таким чином, вартість машино-години ЕОМ складе:

$$C_{м.ч} = \frac{2787,6}{1816} + 0,4 \cdot 1,82 = 2,26 \text{ грн/год}$$

Проведемо розрахунок вартості машинного часу, необхідного для відладки програми на ЕОМ по формулі (3.14):

$$Z_{MI} = (t_{OTL} + t_D) \cdot C_{MЧ} = (82,5 + 24,06) \cdot 2,26 = 240,8 \text{ грн},$$

3.6 Розрахунок капітальних витрат

Під капітальними витратами розуміють усі витрати, які забезпечують підготовку й реалізацію проекту, включаючи формування або збільшення основних та оборотних коштів. Залежно від виду і форм капітальних витрат значення їх показників матиме різний економічний сенс. Це витрати на придбання довгострокових активів, які функціонують протягом тривалого періоду, з поступовою амортизацією. До капітальних витрат звичайно відносять початкову вартість будівель та споруд; вартість нових машин та механізмів; придбання обладнання та приладів; вартість придбаних нематеріальних активів (патентів ,ліцензій), що належать до поступового списання тощо.

Отже, витрати на створення програмного продукту складають, виходячи з формули (3.10):

$$K_{IЗ} = 23826,25 + 240,8 = 24067,05 \text{ грн}$$

Визначені таким чином витрати на створення програмного забезпечення є одноразовими капітальними витратами.

3.7 Висновки

В економічному розділі було розраховано трудомісткість розробки 381,22 *людино – годин*, яка складає заробітну плату 8000грн (62,5грн), витрати на необхідне програмне та апаратне забезпечення (6984,5грн). Встановлено, що сума капітальних витрат на розробку та дослідження моделі зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є.

складає 24067,05грн.

ВИСНОВКИ

Дану роботу присвячено теоретичним основам побудови фільтра Колмогорова–Вінера для прогнозування стаціонарного телекомунікаційного трафіку. Як відомо[2], трафік у телекомунікаційних системах з пакетною передачею даних є фрактальним випадковим процесом, і в найпростіших моделях трафік можна вважати стаціонарним випадковим процесом.

В рамках даної роботи трафік досліджується у моделі, де він вважається стаціонарним випадковим процесом зі степеневою кореляційною функцією [3]. Трафік вважається неперервним випадковим процесом, що є доцільним у випадку великої кількості даних [3]. Невідома вагова функція фільтра Колмогорова–Вінера є розв'язком інтегрального рівняння Вінера–Хопфа. Пошук його точного аналітичного розв'язку є надскладною задачею, тому інтерес представляє пошук наближеного розв'язку. У роботах попередників [5–7] відповідний наближений розв'язок шукався у вигляді обірваного розвинення за ортогональною поліноміальною системою функцій. Відповідний підхід має певні вади, бо деякі поліноміальні наближення призводять до повного неспівпадіння лівої та правої частини досліджуваного інтегрального рівняння.

В рамках даної роботи відповідний підхід покращено розгляданням обірваного розвинення за не поліноміальною системою функцій, в якості такої системи обрано тригонометричний ряд Фур'є. Відповідні розв'язки для вагової функції досліджено у наближеннях до 15 гармонік включно. Точність співпадіння лівої та правої частини досліджуваного інтегрального рівняння для отриманих розв'язків проілюстровано відповідними графіками. Показано, що тригонометричні розв'язки в рамках досліджуваної моделі трафіку дають набагато кращі результати за поліноміальні розв'язки.

В економічному розділі було розраховано трудомісткість розробки 381,22 *людино – годин*, яка складає заробітну плату 8000грн (62,5грн), витрати на необхідне програмне та апаратне забезпечення (6984,5грн).

Встановлено, що сума капітальних витрат на розробку та дослідження моделі зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є.

складає 24067,05 грн.

Результати роботи можуть бути використані при прогнозуванні стаціонарного телекомунікаційного трафіку в системах з пакетною передачею даних.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. C. Katris and S. Daskalaki, "Comparing forecasting approaches for Internet traffic", *Expert Systems with Applications*, Vol. 42, Issue 21, pp. 8172-8183 (2015).
2. J. S. Al-Azzeh, M. Al Hadidi, R. Odarchenko, S. Gnatyuk, Z. Shevchuk and Z. Hu, "Analysis of Self-Similar Traffic Models in Computer Networks", *International Review on Modelling and Simulations*, Vol. 10, No. 5, pp. 328–336 (2017).
3. В. Х. Багманов, А. М. Комиссаров, А. Х. Султанов, «Прогнозирование телетрафика на основе фрактальных фильтров», *Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета*, т. 9, №6 (24), с. 217–222 (2007).
4. О. Yu. Gusev, V. M. Gorev and V. I. Korniienko, "Theory of adaptive filtration", National Technical University "Dnipro Polytechnic", Dnipro, 156p. (2019).
5. V. N. Gorev, A. Yu. Gusev and V. I. Korniienko, "Polynomial solutions for the Kolmogorov–Wiener filter weight function for fractal processes", *Radio Electronics, Computer Science, Control*, No.2, p. 44–52 (2019).
6. V. Gorev, A. Gusev, and V. Korniienko, "Investigation of the Kolmogorov–Wiener filter for treatment of fractal processes on the basis of the Chebyshev polynomials of the second kind", *Scirp Workshop Proceedings*, Vol. 2353, p. 596–606 (2019).
7. V. Gorev, A. Gusev and V. Korniienko, "Investigation of the Kolmogorov–Wiener filter for continuous fractal processes on the basis of the Chebyshev polynomials of the first kind", *IAPGOS*, No. 1, p. 58-61 (2020).
8. «Подходы к моделированию самоподобного трафика». А.И. Костромицкий
Кандидат технических наук, доцент* В.С. Волотка. Аспирант** Кафедра
«Сети связи» Харьковский национальный университет радиоэлектроники
пр. Ленина 14, г. Харьков, Украина, 61166, p.12-17 (2010)

9. "Processes with Long-Range Correlations Theory and Applications" G. Rangarajan M. Ding (Eds.) volume 621, (2003)
10. "Handbooks of Integral Equations" Andrei D. Polyinin Alexander V. Manzhirov p. 15 (2008).
11. Н. С. Пискунов "Дифференциальное и интегральное исчисления" p.5, (1985)
12. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Yu. V. Geronimus, M. Yu. Tseytlin and J. Alan, "Table of Integrals, Series, and Products. Eighth edition", Edited by D. Zwillinger and V. Moll, Amsterdam, Elsevier/Academic Press p. 7-8 (2014).

ДОДАТОК А. Відомість матеріалів кваліфікаційної роботи

№	Формат	Найменування	Кількість листків	Примітки
<i>Документація</i>				
1	A4	Реферат	3	
2	A4	Зміст	2	
3	A4	Вступ	1	
4	A4	Стан питання. Постановка задачі.	15	
5	A4	Спеціальна частина	24	
6	A4	Економічний розділ	10	
7	A4	Висновки	2	
8	A4	Перелік посилань	2	
9	A4	Додаток А	1	
10	A4	Додаток Б	1	
11	A4	Додаток В	35	
12	A4	Додаток Г	1	
13	A4	Додаток Д	1	

ДОДАТОК Б. Перелік документів на оптичному носії

- 1 Електронна версія пояснювальної записки
(ПояснювальнаЗапискаХечоян.doc та ПояснювальнаЗапискаХечоян.pdf)
- 2 Електронна версія демонстраційного матеріалу
(ПрезентаціяХечоян.pdf)

ДОДАТОК В. Код у Wolfram Mathematica

В. 1 Розрахунок матриці інтегральних дужок та стовпчику з коефіцієнтів

```

T=100;
w=(2π)/T;
z=3;
H=0.8;
σ=1.2;
α=3*10-3;
R[x_]=σ2-α/2*(Abs[x])2*H;
eN=15;
G=IdentityMatrix[2*eN+1];
G[[1,1]]=Re[∫0T∫0TR[x-y] dx dy];
Print["G[1,1]=",G[[1,1]]];
For[s=1,s<=eN,s++,
  G[[1,s+1]]=N[Re[∫0T∫0TКОСИНУС Cos[s*w*y] R[x-y] dx dy]];
  G[[s+1,1]]=G[[1,s+1]];
  Print["G[1,",s+1,"]=",G[[1,s+1]]];
  G[[1,s+eN+1]]=0;
  G[[s+eN+1,1]]=0;
  Print["G[1,",s+eN+1,"]=",G[[1,s+eN+1]]];
]
G[1,1]= 9320.21
G[1, 2 ]= -1249.04
G[1, 17 ]= 0
G[1, 3 ]= -305.339
G[1, 18 ]= 0
G[1, 4 ]= -134.868
G[1, 19 ]= 0
G[1, 5 ]= -75.6596

```

```

G[1, 20 ]= 0
G[1, 6 ]= -48.3523
G[1, 21 ]= 0
G[1, 7 ]= -33.5485
G[1, 22 ]= 0
G[1, 8 ]= -24.6336
G[1, 23 ]= 0
G[1, 9 ]= -18.8525
G[1, 24 ]= 0
G[1, 10 ]= -14.8914
G[1, 25 ]= 0
G[1, 11 ]= -12.0593
G[1, 26 ]= 0
G[1, 12 ]= -9.96462
G[1, 27 ]= 0
G[1, 13 ]= -8.37189
G[1, 28 ]= 0
G[1, 14 ]= -7.13264
G[1, 29 ]= 0
G[1, 15 ]= -6.14951
G[1, 30 ]= 0
G[1, 16 ]= -5.35649
G[1, 31 ]= 0
For[k=1,k<=eN,k++,
  For[s=1,s<=k,s++,
    G[[k+1,s+1]]=N[Re[ $\int_0^T \int_0^T \frac{\text{Cos}[k*w*x]}{\text{косинус}} * \frac{\text{Cos}[s*w*y]}{\text{косинус}} * R[x-y] \, dx \, dy$ ]];
    G[[s+1,k+1]]=G[[k+1,s+1]];
    Print["G[" ,k+1," ,",s+1,"]=" ,G[[k+1,s+1]]];
    G[[k+1,s+eN+1]]=0;
  ]

```

```

G[[s+eN+1,k+1]]=0;
Print["G[" ,k+1," ,",s+eN+1,"]=" ,G[[k+1,s+eN+1]]];
G[[k+eN+1,s+eN+1]]=N[Re[ $\int_0^T \int_0^T \frac{\sin[k \cdot w \cdot x]}{\text{[синус]}} \cdot \frac{\sin[s \cdot w \cdot y]}{\text{[синус]}} \cdot R[x - y] \, dx \, dy$ 
]];
G[[s+eN+1,k+eN+1]]=G[[k+eN+1,s+eN+1]];
Print["G[" ,k+eN+1," ,",s+eN+1,"]=" ,G[[k+eN+1,s+eN+1]]];
];
]
Print[MatrixForm[G]];
G[ 2 , 2 ]= 198.243
G[ 2 , 17 ]= 0
G[ 17 , 17 ]= 1447.28
G[ 3 , 2 ]= 9.22833
G[ 3 , 17 ]= 0
G[ 18 , 17 ]= 629.134
G[ 3 , 3 ]= 30.744
G[ 3 , 18 ]= 0
G[ 18 , 18 ]= 336.083
G[ 4 , 2 ]= 4.4031
G[ 4 , 17 ]= 0
G[ 19 , 17 ]= 417.814
G[ 4 , 3 ]= 1.50796
G[ 4 , 18 ]= 0
G[ 19 , 18 ]= 204.564
G[ 4 , 4 ]= 10.4225
G[ 4 , 19 ]= 0
G[ 19 , 19 ]= 145.291
G[ 5 , 2 ]= 2.56572
G[ 5 , 17 ]= 0
G[ 20 , 17 ]= 312.901

```

$$G[5, 3] = 0.900071$$

$$G[5, 18] = 0$$

$$G[20, 18] = 153.119$$

$$G[5, 4] = 0.465867$$

$$G[5, 19] = 0$$

$$G[20, 19] = 101.501$$

$$G[5, 5] = 4.85614$$

$$G[5, 20] = 0$$

$$G[20, 20] = 80.5158$$

$$G[6, 2] = 1.67635$$

$$G[6, 17] = 0$$

$$G[21, 17] = 250.143$$

$$G[6, 3] = 0.597496$$

$$G[6, 18] = 0$$

$$G[21, 18] = 122.375$$

$$G[6, 4] = 0.312977$$

$$G[6, 19] = 0$$

$$G[21, 19] = 81.1088$$

$$G[6, 5] = 0.194062$$

$$G[6, 20] = 0$$

$$G[21, 20] = 60.683$$

$$G[6, 6] = 2.66334$$

$$G[6, 21] = 0$$

$$G[21, 21] = 51.0431$$

$$G[7, 2] = 1.17979$$

$$G[7, 17] = 0$$

$$G[22, 17] = 208.37$$

$$G[7, 3] = 0.425242$$

$$G[7, 18] = 0$$

$$G[22, 18] = 101.921$$

$$G[7, 4] = 0.224739$$

$$G[7, 19] = 0$$

$$G[22, 19] = 67.5466$$

$$G[7, 5] = 0.140344$$

$$G[7, 20] = 0$$

$$G[22, 20] = 50.5333$$

$$G[7, 6] = 0.0963922$$

$$G[7, 21] = 0$$

$$G[22, 21] = 40.3739$$

$$G[7, 7] = 1.6355$$

$$G[7, 22] = 0$$

$$G[22, 22] = 35.2115$$

$$G[8, 2] = 0.874834$$

$$G[8, 17] = 0$$

$$G[23, 17] = 178.559$$

$$G[8, 3] = 0.317934$$

$$G[8, 18] = 0$$

$$G[23, 18] = 87.3305$$

$$G[8, 4] = 0.169181$$

$$G[8, 19] = 0$$

$$G[23, 19] = 57.8732$$

$$G[8, 5] = 0.106248$$

$$G[8, 20] = 0$$

$$G[23, 20] = 43.2948$$

$$G[8, 6] = 0.0733177$$

$$G[8, 21] = 0$$

$$G[23, 21] = 34.5897$$

$$G[8, 7] = 0.0537931$$

$$G[8, 22] = 0$$

$$G[23, 22] = 28.802$$

$$G[8, 8] = 1.08044$$

$$G[8, 23] = 0$$

$$G[23, 23] = 25.7415$$

$$G[9, 2] = 0.674306$$

$$G[9, 17] = 0$$

$$G[24, 17] = 156.214$$

$$G[9, 3] = 0.246605$$

$$G[9, 18] = 0$$

$$G[24, 18] = 76.3963$$

$$G[9, 4] = 0.131936$$

$$G[9, 19] = 0$$

$$G[24, 19] = 50.6251$$

$$G[9, 5] = 0.0832383$$

$$G[9, 20] = 0$$

$$G[24, 20] = 37.8714$$

$$G[9, 6] = 0.0576635$$

$$G[9, 21] = 0$$

$$G[24, 21] = 30.2562$$

$$G[9, 7] = 0.0424486$$

$$G[9, 22] = 0$$

$$G[24, 22] = 25.1932$$

$$G[9, 8] = 0.0326167$$

$$G[9, 23] = 0$$

$$G[24, 23] = 21.583$$

$$G[9, 9] = 0.752254$$

$$G[9, 24] = 0$$

$$G[24, 24] = 19.6321$$

$$G[10, 2] = 0.535488$$

$$G[10, 17] = 0$$

$$G[25, 17] = 138.842$$

G[10 , 3]= 0.196806
G[10 , 18]= 0
G[25 , 18]= 67.8968
G[10 , 4]= 0.105754
G[10 , 19]= 0
G[25 , 19]= 44.9914
G[10 , 5]= 0.0669723
G[10 , 20]= 0
G[25 , 20]= 33.6563
G[10 , 6]= 0.0465471
G[10 , 21]= 0
G[25 , 21]= 26.8883
G[10 , 7]= 0.0343628
G[10 , 22]= 0
G[25 , 22]= 22.3886
G[10 , 8]= 0.0264692
G[10 , 23]= 0
G[25 , 23]= 19.1801
G[10 , 9]= 0.0210449
G[10 , 24]= 0
G[25 , 24]= 16.7765
G[10 , 10]= 0.544719
G[10 , 25]= 0
G[25 , 25]= 15.4634
G[11 , 2]= 0.408024
G[11 , 17]= 0
G[26 , 17]= 124.948
G[11 , 3]= 0.133249
G[11 , 18]= 0
G[26 , 18]= 61.1

G[11 , 4]= 0.059227
G[11 , 19]= 0
G[26 , 19]= 40.4865
G[11 , 5]= 0.0276331
G[11 , 20]= 0
G[26 , 20]= 30.2859
G[11 , 6]= 0.0109596
G[11 , 21]= 0
G[26 , 21]= 24.1953
G[11 , 7]= 0.0010001
G[11 , 22]= 0
G[26 , 22]= 20.1462
G[11 , 8]= -0.00546274
G[11 , 23]= 0
G[26 , 23]= 17.2589
G[11 , 9]= -0.0099058
G[11 , 24]= 0
G[26 , 24]= 15.096
G[11 , 10]= -0.0130964
G[11 , 25]= 0
G[26 , 25]= 13.4151
G[11 , 11]= 0.406487
G[11 , 26]= 0
G[26 , 26]= 12.4931
G[12 , 2]= 0.333582
G[12 , 17]= 0
G[27 , 17]= 113.582
G[12 , 3]= 0.106218
G[12 , 18]= 0
G[27 , 18]= 55.5396

G[12 , 4]= 0.0448687
G[12 , 19]= 0
G[27 , 19]= 36.802
G[12 , 5]= 0.0186369
G[12 , 20]= 0
G[27 , 20]= 27.5293
G[12 , 6]= 0.00477062
G[12 , 21]= 0
G[27 , 21]= 21.9929
G[12 , 7]= -0.00353078
G[12 , 22]= 0
G[27 , 22]= 18.3122
G[12 , 8]= -0.00892306
G[12 , 23]= 0
G[27 , 23]= 15.6877
G[12 , 9]= -0.0126352
G[12 , 24]= 0
G[27 , 24]= 13.7216
G[12 , 10]= -0.0153048
G[12 , 25]= 0
G[27 , 25]= 12.1937
G[12 , 11]= -0.0172895
G[12 , 26]= 0
G[27 , 26]= 10.9721
G[12 , 12]= 0.310534
G[12 , 27]= 0
G[27 , 27]= 10.3025
G[13 , 2]= 0.276698
G[13 , 17]= 0
G[28 , 17]= 104.111

$$G[13, 3] = 0.0854675$$

$$G[13, 18] = 0$$

$$G[28, 18] = 50.9132$$

$$G[13, 4] = 0.0338033$$

$$G[13, 19] = 0$$

$$G[28, 19] = 33.7324$$

$$G[13, 5] = 0.0116808$$

$$G[13, 20] = 0$$

$$G[28, 20] = 25.2329$$

$$G[13, 6] = -0.0000308901$$

$$G[13, 21] = 0$$

$$G[28, 21] = 20.1582$$

$$G[13, 7] = -0.00704941$$

$$G[13, 22] = 0$$

$$G[28, 22] = 16.7844$$

$$G[13, 8] = -0.0116172$$

$$G[13, 23] = 0$$

$$G[28, 23] = 14.3788$$

$$G[13, 9] = -0.0147653$$

$$G[13, 24] = 0$$

$$G[28, 24] = 12.5767$$

$$G[13, 10] = -0.0170292$$

$$G[13, 25] = 0$$

$$G[28, 25] = 11.1763$$

$$G[13, 11] = -0.0187157$$

$$G[13, 26] = 0$$

$$G[28, 26] = 10.0566$$

$$G[13, 12] = -0.0200034$$

$$G[13, 27] = 0$$

$$G[28, 27] = 9.14092$$

G[13 , 13]= 0.241652
G[13 , 28]= 0
G[28 , 28]= 8.64081
G[14 , 2]= 0.232261
G[14 , 17]= 0
G[29 , 17]= 96.1037
G[14 , 3]= 0.0691962
G[14 , 18]= 0
G[29 , 18]= 46.9734
G[14 , 4]= 0.0250991
G[14 , 19]= 0
G[29 , 19]= 31.1356
G[14 , 5]= 0.00619157
G[14 , 20]= 0
G[29 , 20]= 23.2902
G[14 , 6]= -0.00382827
G[14 , 21]= 0
G[29 , 21]= 18.6061
G[14 , 7]= -0.00984124
G[14 , 22]= 0
G[29 , 22]= 15.492
G[14 , 8]= -0.0137568
G[14 , 23]= 0
G[29 , 23]= 13.2716
G[14 , 9]= -0.016458
G[14 , 24]= 0
G[29 , 24]= 11.6082
G[14 , 10]= -0.0184042
G[14 , 25]= 0
G[29 , 25]= 10.3156

G[14 , 11]= -0.0198517
G[14 , 26]= 0
G[29 , 26]= 9.28212
G[14 , 12]= -0.0209589
G[14 , 27]= 0
G[29 , 27]= 8.43696
G[14 , 13]= -0.0218224
G[14 , 28]= 0
G[29 , 28]= 7.73292
G[14 , 14]= 0.190803
G[14 , 29]= 0
G[29 , 29]= 7.35068
G[15 , 2]= 0.196886
G[15 , 17]= 0
G[30 , 17]= 89.2199
G[15 , 3]= 0.0562058
G[15 , 18]= 0
G[30 , 18]= 43.6673
G[15 , 4]= 0.0181258
G[15 , 19]= 0
G[30 , 19]= 28.8637
G[15 , 5]= 0.00178622
G[15 , 20]= 0
G[30 , 20]= 21.6254
G[15 , 6]= -0.0068837
G[15 , 21]= 0
G[30 , 21]= 17.276
G[15 , 7]= -0.0120899
G[15 , 22]= 0
G[30 , 22]= 14.3845

G[15 , 8]= -0.0154839
G[15 , 23]= 0
G[30 , 23]= 12.3227
G[15 , 9]= -0.0178274
G[15 , 24]= 0
G[30 , 24]= 10.7783
G[15 , 10]= -0.0195151
G[15 , 25]= 0
G[30 , 25]= 9.57804
G[15 , 11]= -0.0207733
G[15 , 26]= 0
G[30 , 26]= 8.61845
G[15 , 12]= -0.0217328
G[15 , 27]= 0
G[30 , 27]= 7.8337
G[15 , 13]= -0.022483
G[15 , 28]= 0
G[30 , 28]= 7.17999
G[15 , 14]= -0.0230768
G[15 , 29]= 0
G[30 , 29]= 6.62702
G[15 , 15]= 0.152373
G[15 , 30]= 0
G[30 , 30]= 6.32908
G[16 , 2]= 0.168284
G[16 , 17]= 0
G[31 , 17]= 83.3095
G[16 , 3]= 0.0456649
G[16 , 18]= 0
G[31 , 18]= 40.6832

G[16 , 4]= 0.0124581
G[16 , 19]= 0
G[31 , 19]= 26.9901
G[16 , 5]= -0.00180391
G[16 , 20]= 0
G[31 , 20]= 20.209
G[16 , 6]= -0.00937868
G[16 , 21]= 0
G[31 , 21]= 16.1234
G[16 , 7]= -0.0139282
G[16 , 22]= 0
G[31 , 22]= 13.4248
G[16 , 8]= -0.0168968
G[16 , 23]= 0
G[31 , 23]= 11.5006
G[16 , 9]= -0.018948
G[16 , 24]= 0
G[31 , 24]= 10.0591
G[16 , 10]= -0.0204263
G[16 , 25]= 0
G[31 , 25]= 8.93895
G[16 , 11]= -0.0215273
G[16 , 26]= 0
G[31 , 26]= 8.04337
G[16 , 12]= -0.0223686
G[16 , 27]= 0
G[31 , 27]= 7.31098
G[16 , 13]= -0.0230248
G[16 , 28]= 0
G[31 , 28]= 6.70088

$$G[16, 14] = -0.0235453$$

$$G[16, 29] = 0$$

$$G[31, 29] = 6.1848$$

$$G[16, 15] = -0.0239612$$

$$G[16, 30] = 0$$

$$G[31, 30] = 5.74255$$

$$G[16, 16] = 0.149894$$

$$G[16, 31] = 0$$

$$G[31, 31] = 5.50639$$

{

{9320.21, -1249.04, -305.339, -134.868, -75.6596, -48.3523, -33.5485, -24.6336, -18.8525, -14.8914, -12.0593, -9.96462, -8.37189, -7.13264, -6.14951, -5.35649, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{-1249.04, 198.243, 9.22833, 4.4031, 2.56572, 1.67635, 1.17979, 0.874834, 0.674306, 0.535488, 0.408024, 0.333582, 0.276698, 0.232261, 0.196886, 0.168284, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{-305.339, 9.22833, 30.744, 1.50796, 0.900071, 0.597496, 0.425242, 0.317934, 0.246605, 0.196806, 0.133249, 0.106218, 0.0854675, 0.0691962, 0.0562058, 0.0456649, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{-134.868, 4.4031, 1.50796, 10.4225, 0.465867, 0.312977, 0.224739, 0.169181, 0.131936, 0.105754, 0.059227, 0.0448687, 0.0338033, 0.0250991, 0.0181258, 0.0124581, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{-75.6596, 2.56572, 0.900071, 0.465867, 4.85614, 0.194062, 0.140344, 0.106248, 0.0832383, 0.0669723, 0.0276331, 0.0186369, 0.0116808, 0.00619157, 0.00178622, -0.00180391, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{-48.3523, 1.67635, 0.597496, 0.312977, 0.194062, 2.66334, 0.0963922, 0.0733177, 0.0576635, 0.0465471, 0.0109596, 0.00477062, -0.0000308901, -0.00382827, -0.0068837, -0.00937868, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{-33.5485, 1.17979, 0.425242, 0.224739, 0.140344, 0.0963922, 1.6355,
 0.0537931, 0.0424486, 0.0343628, 0.0010001, -0.00353078, -0.00704941, -
 0.00984124, -0.0120899, -0.0139282, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-24.6336, 0.874834, 0.317934, 0.169181, 0.106248, 0.0733177, 0.0537931,
 1.08044, 0.0326167, 0.0264692, -0.00546274, -0.00892306, -0.0116172, -
 0.0137568, -0.0154839, -0.0168968, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-18.8525, 0.674306, 0.246605, 0.131936, 0.0832383, 0.0576635, 0.0424486,
 0.0326167, 0.752254, 0.0210449, -0.0099058, -0.0126352, -0.0147653, -0.016458,
 -0.0178274, -0.018948, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-14.8914, 0.535488, 0.196806, 0.105754, 0.0669723, 0.0465471, 0.0343628,
 0.0264692, 0.0210449, 0.544719, -0.0130964, -0.0153048, -0.0170292, -
 0.0184042, -0.0195151, -0.0204263, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-12.0593, 0.408024, 0.133249, 0.059227, 0.0276331, 0.0109596, 0.0010001, -
 0.00546274, -0.0099058, -0.0130964, 0.406487, -0.0172895, -0.0187157, -
 0.0198517, -0.0207733, -0.0215273, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-9.96462, 0.333582, 0.106218, 0.0448687, 0.0186369, 0.00477062, -
 0.00353078, -0.00892306, -0.0126352, -0.0153048, -0.0172895, 0.310534, -
 0.0200034, -0.0209589, -0.0217328, -0.0223686, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0},
 {-8.37189, 0.276698, 0.0854675, 0.0338033, 0.0116808, -0.0000308901, -
 0.00704941, -0.0116172, -0.0147653, -0.0170292, -0.0187157, -0.0200034,
 0.241652, -0.0218224, -0.022483, -0.0230248, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0},
 {-7.13264, 0.232261, 0.0691962, 0.0250991, 0.00619157, -0.00382827, -
 0.00984124, -0.0137568, -0.016458, -0.0184042, -0.0198517, -0.0209589, -
 0.0218224, 0.190803, -0.0230768, -0.0235453, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0},
 {-6.14951, 0.196886, 0.0562058, 0.0181258, 0.00178622, -0.0068837, -
 0.0120899, -0.0154839, -0.0178274, -0.0195151, -0.0207733, -0.0217328, -

0.022483, -0.0230768, 0.152373, -0.0239612, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{-5.35649, 0.168284, 0.0456649, 0.0124581, -0.00180391, -0.00937868, -0.0139282, -0.0168968, -0.018948, -0.0204263, -0.0215273, -0.0223686, -0.0230248, -0.0235453, -0.0239612, 0.149894, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1447.28, 629.134, 417.814, 312.901, 250.143, 208.37, 178.559, 156.214, 138.842, 124.948, 113.582, 104.111, 96.1037, 89.2199, 83.3095},

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 629.134, 336.083, 204.564, 153.119, 122.375, 101.921, 87.3305, 76.3963, 67.8968, 61.1, 55.5396, 50.9132, 46.9734, 43.6673, 40.6832},

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 417.814, 204.564, 145.291, 101.501, 81.1088, 67.5466, 57.8732, 50.6251, 44.9914, 40.4865, 36.802, 33.7324, 31.1356, 28.8637, 26.9901},

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 312.901, 153.119, 101.501, 80.5158, 60.683, 50.5333, 43.2948, 37.8714, 33.6563, 30.2859, 27.5293, 25.2329, 23.2902, 21.6254, 20.209},

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 250.143, 122.375, 81.1088, 60.683, 51.0431, 40.3739, 34.5897, 30.2562, 26.8883, 24.1953, 21.9929, 20.1582, 18.6061, 17.276, 16.1234},

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 208.37, 101.921, 67.5466, 50.5333, 40.3739, 35.2115, 28.802, 25.1932, 22.3886, 20.1462, 18.3122, 16.7844, 15.492, 14.3845, 13.4248},

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 178.559, 87.3305, 57.8732, 43.2948, 34.5897, 28.802, 25.7415, 21.583, 19.1801, 17.2589, 15.6877, 14.3788, 13.2716, 12.3227, 11.5006},

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 156.214, 76.3963, 50.6251, 37.8714, 30.2562, 25.1932, 21.583, 19.6321, 16.7765, 15.096, 13.7216, 12.5767, 11.6082, 10.7783, 10.0591},

```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 138.842, 67.8968, 44.9914, 33.6563,
26.8883, 22.3886, 19.1801, 16.7765, 15.4634, 13.4151, 12.1937, 11.1763,
10.3156, 9.57804, 8.93895},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 124.948, 61.1, 40.4865, 30.2859,
24.1953, 20.1462, 17.2589, 15.096, 13.4151, 12.4931, 10.9721, 10.0566, 9.28212,
8.61845, 8.04337},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 113.582, 55.5396, 36.802, 27.5293,
21.9929, 18.3122, 15.6877, 13.7216, 12.1937, 10.9721, 10.3025, 9.14092,
8.43696, 7.8337, 7.31098},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 104.111, 50.9132, 33.7324, 25.2329,
20.1582, 16.7844, 14.3788, 12.5767, 11.1763, 10.0566, 9.14092, 8.64081,
7.73292, 7.17999, 6.70088},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 96.1037, 46.9734, 31.1356, 23.2902,
18.6061, 15.492, 13.2716, 11.6082, 10.3156, 9.28212, 8.43696, 7.73292, 7.35068,
6.62702, 6.1848},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 89.2199, 43.6673, 28.8637, 21.6254,
17.276, 14.3845, 12.3227, 10.7783, 9.57804, 8.61845, 7.8337, 7.17999, 6.62702,
6.32908, 5.74255},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 83.3095, 40.6832, 26.9901, 20.209,
16.1234, 13.4248, 11.5006, 10.0591, 8.93895, 8.04337, 7.31098, 6.70088, 6.1848,
5.74255, 5.50639}

```

```

})

```

```

B=Range[2*eN+1];

```

```

B[[1]]=Re[ $\int_0^T R[x+z] dx$ ];

```

```

Print["B[1]=",B[[1]]];

```

```

For[k=1,k<=eN,k++,

```

```

B[[k+1]]=Re[ $\int_0^T \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}[k*w*x]} * R[x+z] dx$ ];

```

```

Print["B[" ,k+1, "]=",B[[k+1]]];

```

```

B[[k+eN+1]]=Re[ $\int_0^T \frac{\sin[k*w*x] * R[x+z] dx}{\text{синус}}$ ];
Print["B[" ,k+eN+1,"]=" ,B[[k+eN+1]]];
];
Print[MatrixForm[B]];
B[1]= 45.2697
B[ 2 ]= -7.76675
B[ 17 ]= 40.7261
B[ 3 ]= -2.04735
B[ 18 ]= 19.9727
B[ 4 ]= -0.927829
B[ 19 ]= 13.2483
B[ 5 ]= -0.527112
B[ 20 ]= 9.91556
B[ 6 ]= -0.33935
B[ 21 ]= 7.92399
B[ 7 ]= -0.23657
B[ 22 ]= 6.59921
B[ 8 ]= -0.174271
B[ 23 ]= 5.65423
B[ 9 ]= -0.133686
B[ 24 ]= 4.94612
B[ 10 ]= -0.105782
B[ 25 ]= 4.39572
B[ 11 ]= -0.0857799
B[ 26 ]= 3.9556
B[ 12 ]= -0.0709553
B[ 27 ]= 3.59562
B[ 13 ]= -0.0596646
B[ 28 ]= 3.29572

```

$$B[14] = -0.050868$$

$$B[29] = 3.04201$$

$$B[15] = -0.0438817$$

$$B[30] = 2.82457$$

$$B[16] = -0.0382411$$

$$B[31] = 2.63616$$

{

{45.2697},

{-7.76675},

{-2.04735},

{-0.927829},

{-0.527112},

{-0.33935},

{-0.23657},

{-0.174271},

{-0.133686},

{-0.105782},

{-0.0857799},

{-0.0709553},

{-0.0596646},

{-0.050868},

{-0.0438817},

{-0.0382411},

{40.7261},

{19.9727},

{13.2483},

{9.91556},

{7.92399},

{6.59921},

{5.65423},

```

{4.94612},
{4.39572},
{3.9556},
{3.59562},
{3.29572},
{3.04201},
{2.82457},
{2.63616}
})

```

В. 2 Розрахунок коефіцієнтів при гармоніках та побудова відповідних графіків для наближень від одного до п'ятнадцяти гармонік

```

For[eNN=eN,eNN>=1,eNN--,
Print[eNN];
Ge=IdentityMatrix[2*eNN+1];
Ge[[1,1]]=G[[1,1]];
For[i=2,i<=eNN+1,i++,
Ge[[1,i]]=G[[1,i]];
Ge[[i,1]]=G[[i,1]];
Ge[[i+eNN,1]]=G[[i+eN,1]];
Ge[[1,i+eNN]]=G[[1,i+eN]];
];
For[i=2,i<=eNN+1,i++,
For[j=2,j<=eNN+1,j++,
Ge[[i,j]]=G[[i,j]];
Ge[[i+eNN,j+eNN]]=G[[i+eN,j+eN]];
];
];
Be=Range[2*eNN+1];
Be[[1]]=B[[1]];

```

```

For[i=2,i<=eNN+1,i++,
Be[[i]]=B[[i]];
Be[[i+eNN]]=B[[i+eN]];
];
g=Range[2*eNN+1];
g=Dot[Inverse[Ge],Be];
Print[MatrixForm[g]];
Fplus[es_,t_]=t2*H+1*(Hypergeometric1F1[2*H+1,2H+2,I*w*es*t]+Hypergeometric1F1[2*H+1,2H+2,-I*w*es*t]);
Fminus[es_,t_]=t2*H+1*I*(Hypergeometric1F1[2*H+1,2H+2,I*w*es*t]-Hypergeometric1F1[2*H+1,2H+2,-I*w*es*t]);
TheLeft[t_]=σ2*g[[1]]*T-(α*g[[1]]*(t2*H+1+(T-t)2*H+1))/(2*(2*H+1))-
α/(4*(2*H+1))*

$$\sum_{s=1}^{eNN} ((g[[s+1]] * \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}[s*w*t]} + g[[s+eNN+1]] * \underset{\text{синус}}{\text{Sin}[s*w*t]}) * (Fplus[s,t] + Fplus[s,T-t]))$$

+α/(4*(2*H+1))*

$$\sum_{s=1}^{eNN} ((g[[s+1]] * \underset{\text{синус}}{\text{Sin}[s*w*t]} - g[[s+eNN+1]] * \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}[s*w*t]}) * (Fminus[s,t] - Fminus[s,T-t]))$$

;
TheRight[t_]=R[t+z];
Print[Plot[{TheLeft[x],TheRight[x]}, {x,0,T},PlotStyle->{Directive[Black,Dashed], Black},PlotLegends->"Expressions"]];
];
15
({
{0.00979788},
{0.0188281},
{0.018951},
{0.0201026},
{0.0225273},
{0.0267321},
{0.0326167},
{0.0405834},

```

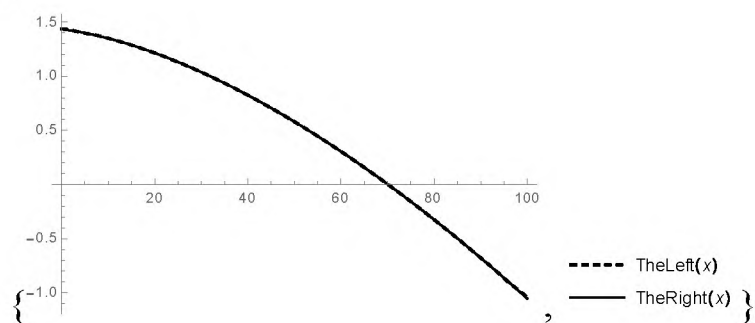


```

{0.0509212},
{0.0639584},
{0.0940547},
{0.116024},
{0.141475},
{0.170586},
{0.203538},
{0.203013},
{-0.000543129},
{0.000517497},
{0.00253222},
{0.00447546},
{0.00779587},
{0.0112426},
{0.0151003},
{0.0193367},
{0.0239267},
{0.02885},
{0.0340921},
{0.0396239},
{0.0455191},
{0.0521075},
{0.0572636}
})

```

```
{
```



}

14

({

{0.0102872},

{0.0217669},

{0.0229069},

{0.0246364},

{0.027198},

{0.0311047},

{0.0361297},

{0.0426395},

{0.0508512},

{0.0610102},

{0.0893058},

{0.107507},

{0.128469},

{0.152339},

{0.179264},

{-0.000415627},

{0.000739243},

{0.00314906},

{0.0056198},

{0.00892288},

{0.0127152},

{0.0169508},

{0.0215957},

{0.0266237},

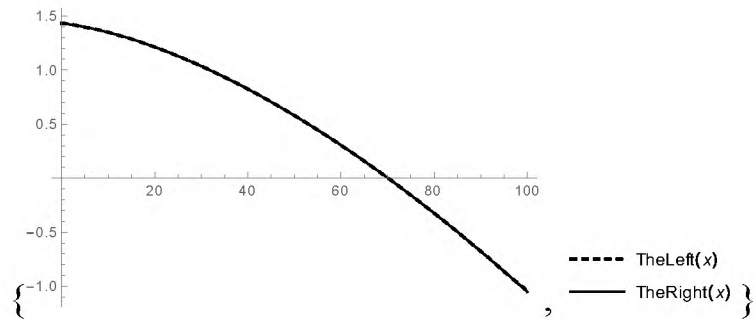
{0.0320133},

{0.0377496},

{0.0437975},

{0.0502573},
 {0.057529}
 })

{



}

13

({

{0.0106861},

{0.0241653},

{0.0261445},

{0.0283662},

{0.0310744},

{0.034791},

{0.0391874},

{0.0446046},

{0.0512047},

{0.0591692},

{0.0862443},

{0.101599},

{0.119161},

{0.139055},

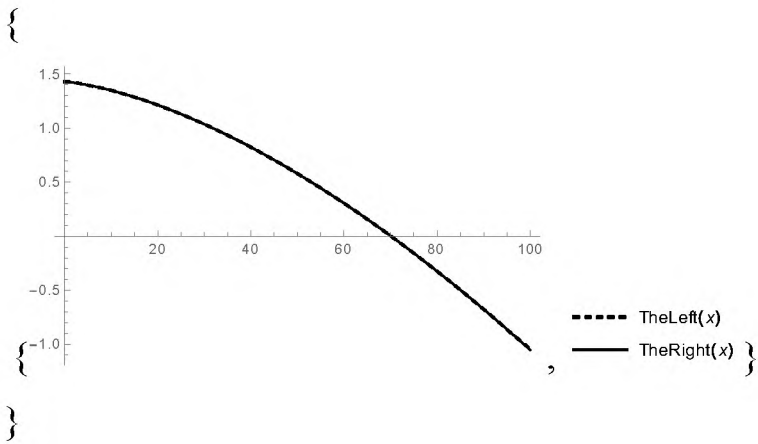
{-0.0002776},

{0.00118904},

{0.00353634},

{0.0066254},

{0.0103172},
 {0.0145419},
 {0.0192511},
 {0.0244086},
 {0.0299867},
 {0.0359624},
 {0.0423207},
 {0.0490144},
 {0.0562015}
 })

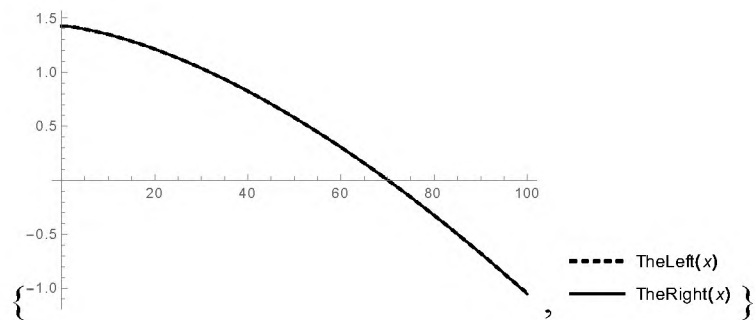


12

({
 {0.0109899},
 {0.0259935},
 {0.0286213},
 {0.0312379},
 {0.0340917},
 {0.0377149},
 {0.0417032},
 {0.0463819},
 {0.0518743},
 {0.0583166},
 {0.0847057},

{0.0981128},
 {0.113343},
 {-0.000110532},
 {0.00158894},
 {0.00430994},
 {0.00779888},
 {0.0119459},
 {0.0166774},
 {0.0219418},
 {0.027701},
 {0.0339248},
 {0.0405888},
 {0.0476775},
 {0.0551326}
 })

{



}

11

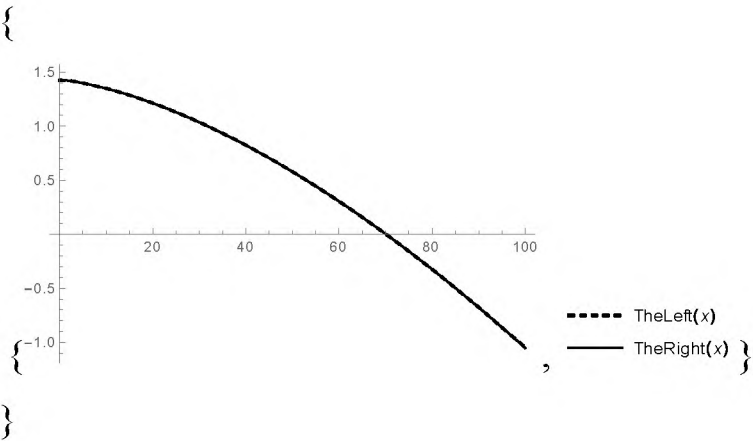
{

{0.0112464},
 {0.0275399},
 {0.0307248},
 {0.0336953},
 {0.0367059},
 {0.0403019},

```

{0.0440168},
{0.0481659},
{0.0528435},
{0.058152},
{0.0842069},
{0.096194},
{0.0000867448},
{0.0021166},
{0.00523401},
{0.00920241},
{0.013896},
{0.0192366},
{0.0251691},
{0.0316525},
{0.0386543},
{0.0461475},
{0.0541167}
})

```



10

```

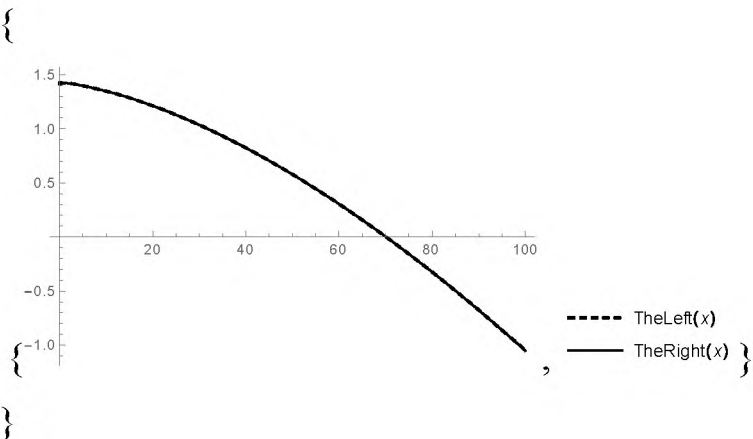
({
{0.0114842},
{0.028975},
{0.0326856},

```

```

{0.0360045},
{0.0391954},
{0.0428197},
{0.0463552},
{0.0501121},
{0.0541613},
{0.0585772},
{0.0845794},
{0.000326539},
{0.00274688},
{0.00636416},
{0.010923},
{0.016291},
{0.0223841},
{0.029143},
{0.0365228},
{0.0444879},
{0.0530086}
})

```



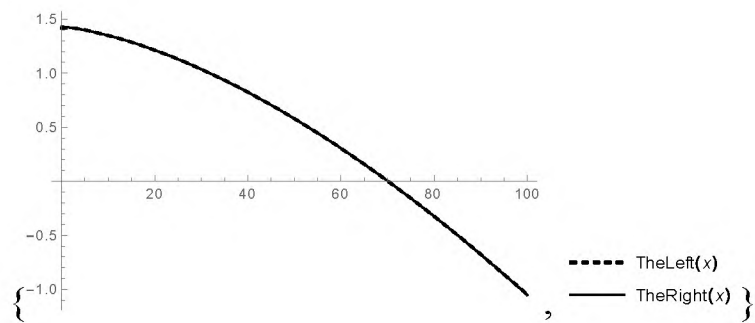
```

}
9
({
{0.0117251},
{0.0304303},

```

{0.0346827},
 {0.0383758},
 {0.0417859},
 {0.0454955},
 {0.0489285},
 {0.0523938},
 {0.0559424},
 {0.0596254},
 {0.00062327},
 {0.00353243},
 {0.00777327},
 {0.0130733},
 {0.0192897},
 {0.026331},
 {0.034132},
 {0.0426429},
 {0.0518244}
 })

{



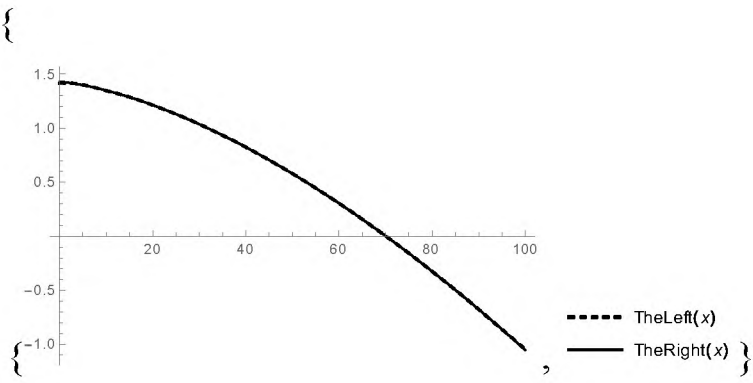
}

8

{{

{0.0118837},
 {0.0314007},
 {0.0360617},

{0.0401111},
 {0.0438488},
 {0.047891},
 {0.0516356},
 {0.0554086},
 {0.0592655},
 {0.000999591},
 {0.00453352},
 {0.00957593},
 {0.0158316},
 {0.0231441},
 {0.0314121},
 {0.0405625},
 {0.0505395}
))

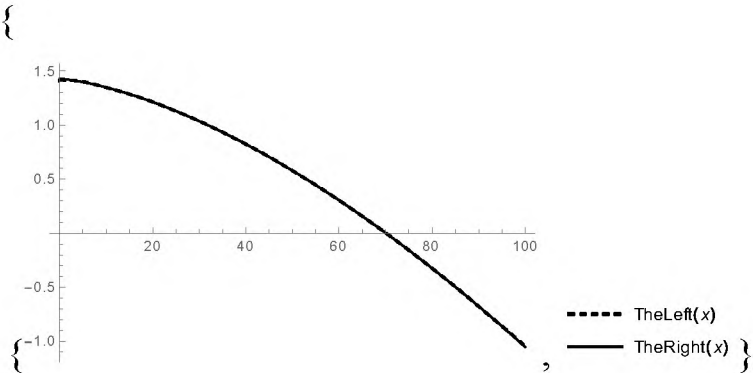


}

7

{{
 {0.012101},
 {0.032728},
 {0.0379434},
 {0.0424728},
 {0.0466494},
 {0.0511358},

{0.0552949},
 {0.0594763},
 {0.00149159},
 {0.00585017},
 {0.0119566},
 {0.0194852},
 {0.0282609},
 {0.0381686},
 {0.0491248}
))

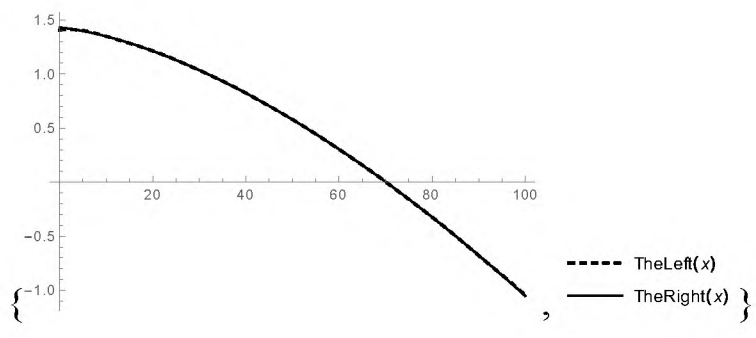


}
 6

{{
 {0.0124182},
 {0.034662},
 {0.0406775},
 {0.0458945},
 {0.0506957},
 {0.0558124},
 {0.0605571},
 {0.00216053},
 {0.0076531},
 {0.015232},
 {0.0245287},

{0.035341},
 {0.0475347}
 })

{



}

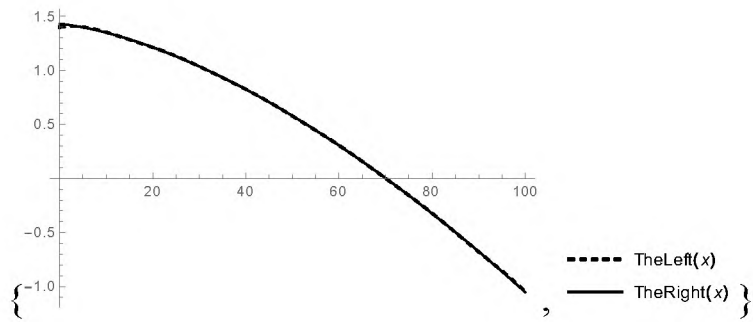
5

{{

{0.0129257},
 {0.0377515},
 {0.0450309},
 {0.0513247},
 {0.0570978},
 {0.0631919},
 {0.00311884},
 {0.0102582},
 {0.0199907},
 {0.0318832},
 {0.0456928}

}}

{



}

4

{{

{0.0138683},

{0.0434771},

{0.0530688},

{0.0613138},

{0.0688366},

{0.00459581},

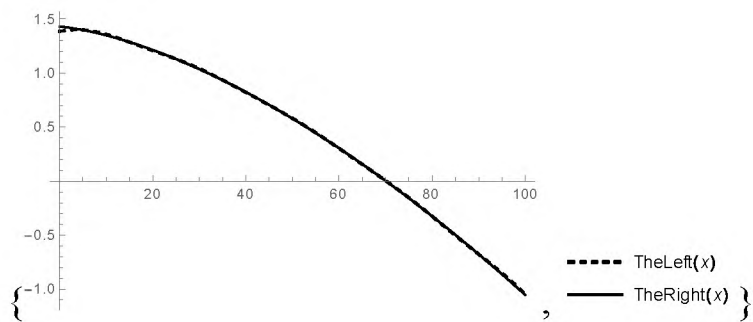
{0.014316},

{0.0274505},

{0.04346}

}}

{



}

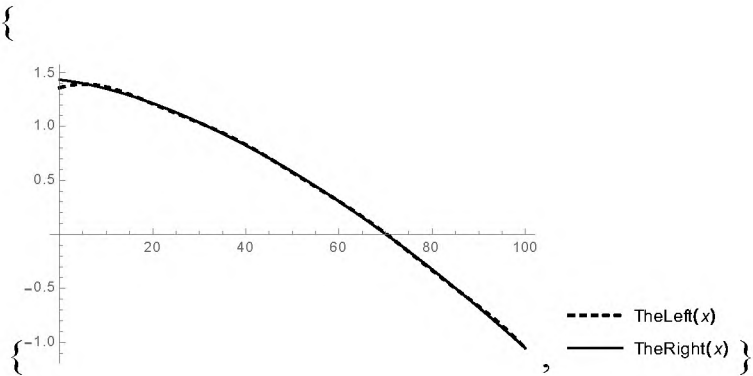
3

{{

{0.0161878},

{0.0575277},

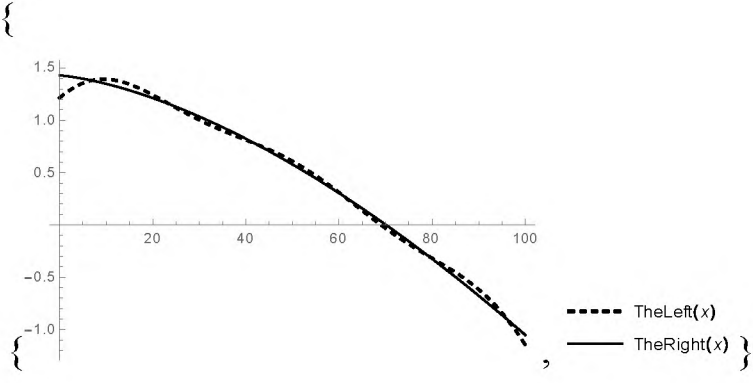
{0.0727104},
 {0.0856276},
 {0.00713594},
 {0.0213884},
 {0.0405495}
 })



}

2

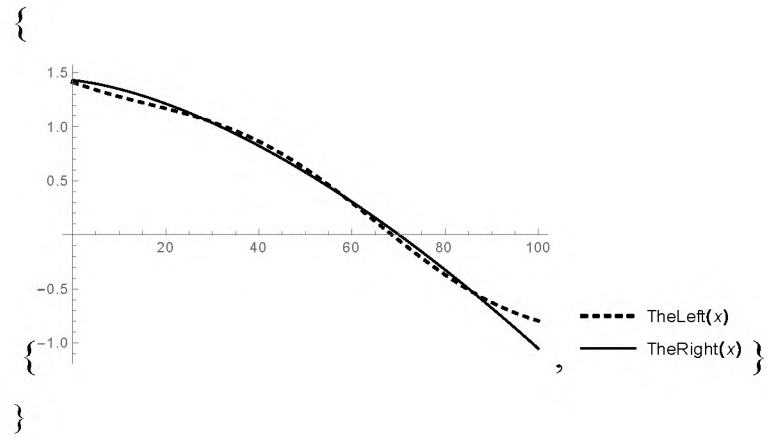
{
 {0.0308089},
 {0.145829},
 {0.195616},
 {0.0123824},
 {0.0362487}
 })



}

1

```
((  
  {-0.00252672},  
  {-0.0550977},  
  {0.0281397}  
))
```



**ДОДАТОК Г. Відгук керівника економічного розділу
ВІДГУК**

Керівник розділу

(підпис)

Н. М. Романюк

ДОДАТОК Д. Відгук керівника кваліфікаційної роботи**Відгук на кваліфікаційну роботу****студента групи 172-19м-1Хечояна А. А.**

на тему: «Прогнозування телекомунікаційного трафіку за моделлю зі степеневою структурною функцією із тригонометричним рядом Фур'є»

Пояснювальна записка розташована на 104 сторінках і містить, у тому числі, вступ, три розділи та висновки. Метою роботи є знаходження наближеного розв'язку для вагової функції фільтра Колмогорова–Вінера для трафіку як процесу зі степеневою структурною функцією у вигляді розвинення у тригонометричний ряд Фур'є та порівняння цих розв'язків з поліноміальними.

Рівень запозичень у кваліфікаційній роботі відповідає вимогам «Положення про систему виявлення та запобігання плагіату».

Серед позитивних сторін роботи слід відмітити, зокрема, те, що при виконанні роботи А. А. Хечоян продемонстрував добрий рівень знань на навичок. У роботі показано, що тригонометричні розв'язки є кращими за поліноміальні в рамках досліджуваної моделі, це може бути використано при дослідженні прогнозування телекомунікаційного трафіку в системах з пакетною передачею даних.

Серед недоліків роботи слід відмітити, зокрема, стилістичні недоліки. Також, можливо, слід було чисельно порахувати помилки неспівпадіння лівої та правої частини інтегрального рівняння Вінера–Хопфа для отриманих розв'язків.

Незважаючи на недоліки, в цілому робота задовольняє усім вимогам, що висуваються до кваліфікаційних робіт магістрів, заслуговує оцінки «відмінно», а її автор А. А. Хечоян – присвоєння кваліфікації магістр з телекомунікацій та радіотехніки.

Керівник роботи, к.ф-м.н., доц. каф. БІТ

В. М. Горєв