

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СФЕРИЧНОГО ШАРНІРА З ВКЛАДИШАМИ

На модельній установці для випробувань сферичних опор перевірені теоретичні викладки для математичної моделі сферичного шарніра та для оптимальних форм антифрикційних вкладишів.

На модельной установке для испытаний сферических опор проверены теоретические выкладки для математической модели сферического шарнира и для оптимальных форм антифрикционных вкладышей.

On model plant for tests of spherical supports are well-tried theoretical solution for mathematical model spherical to hinge and for optimum forms of anti frictional inserts.

Для експериментальної перевірки отриманих в [1–3] висновків, було використано пристрій для випробування сферичних шарнірів (рис. 1), в якому навантаження здійснюється вздовж осі шарніра, коливальний рух виконується тільки в одній площині, що проходить через вісь шарніра.

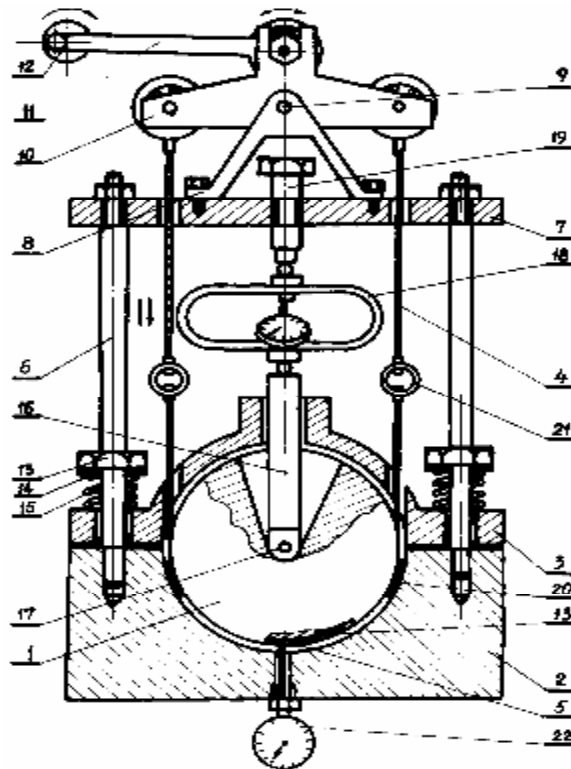


Рис 1. Кінематична схема фізичної моделі сферичної опори: 1–сферична п'ята; 2– сферична основа; 3– верхня частина основи; 4 – тяги приводу коливання; 5 – точка закріплення тяг; 10 – коромисло коливального механізму; 11 – шатун коливального механізму; 13, 14, 15 – пружинний механізм навантаження верхньої кришки; 16 – шток для передавання експлуатаційного зусилля; 18 – динамометр; 19 – навантажуючий болт; 20 – антифрикційні вкладиші; 21 – тензокільця для вимірювання моменту тертя; 22 – мікрометр для виміру усадки п'яти.



Рис. 2. Зовнішній вигляд модельної установки

Випробування проводилися на тканому полімерному матеріалі типу «нафтлен» (що складається на 90% з фторопласту-4), який викроєно у вигляді прямокутників і наклеєно на стінки сферичної п'яти клеєм 88 в площині, що проходить упоперек осі шарніра, між кутами θ_B і θ_H . Для розширення діапазону випробувань і моделювання зміни напрямку вектора \vec{N} , площина наклейки матеріалів змінювалася по відношенню до напрямку площини коливання шарніра (рис. 3).

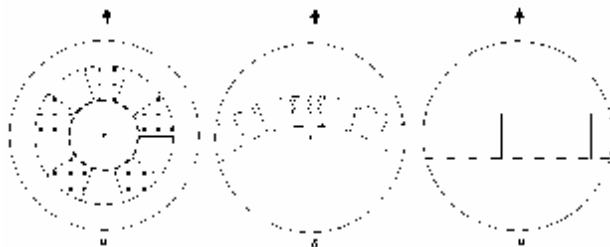


Рис. 3. Схеми наклейки вкладишів на сферичну основу для моделювання: а – вертикального навантаження, б – під кутом 45° ; в – під кутом 90° до площини розташування вкладишів

Реологічні властивості нафтлена досліджувалися на площині згідно з методикою, викладеною в [4], причому ці дослідження проводилися з наклеєним матеріалом, тобто реологічні властивості клейового шару були враховані інтегрально.

Дослідження залежності коефіцієнта тертя від режимів роботи матеріалу проводилися на експериментальній установці для випробування матеріалів по торцевій схемі тертя циліндричних зразків по ГОСТ 23.210-80. Нафтлен наклеювався на плоский торець одного зразка, в торці іншого зразка були виконані пази так, що коефіцієнт взаємного перекриття при терті становив $K_{B3} = 0,2$, що відповідало K_{B3} в експериментах на моделі шарніра.

Експериментальні дані оброблялися за методикою [5] з отриманням залежності шуканого параметра від режимів випробувань у вигляді поліномів.

Цю залежність підставляли у вираження (17) – (18) і (21) – (24) з [1] для розрахунку $\vec{y}(t)$ і $\vec{M}(t)$ при коливальному русі, відповідному руху в модельному шарнірі. При цьому у вираженнях проводилася наступна заміна

$$\int_s f(j, q) ds = \sum_{k=1}^K \int_{q_H}^{q_B} \int_{g_k(q)}^{t_k(q)} l_1 dj dq, \quad (1)$$

де

$$\theta_B = \theta_H + l_2/R_1, \quad (2)$$

$$g_k(\theta) = 2\pi(k-1)/k - l_1/(2R_1 \sin \theta), \quad (3)$$

$$t_k(\theta) = 2\pi(k-1)/k + l_1/(2R_1 \sin \theta), \quad (4)$$

Перша серія експериментів на модельній установці полягала у визначенні величини взаємного зближення сферичної п'яти і основи в умовах, коли результуючий вектор сил (тобто сума $\vec{N} + \vec{T}$) проходить перпендикулярно площині розміщення полімерних фрагментів ($\theta = 0^\circ$) і коли він проходить майже вздовж цієї осі площини ($\theta = 75^\circ$). Результати приведено в таблиці 1, де вони порівнюються з розрахунковими характеристиками. Як видно з таблиці, найбільша похибка спостерігається в умовах, коли має місце прослизання п'яти якби вздовж полімерного зразка при малому номінальному тиску. У інших випадках похибка прогнозування зближення не виходить за межі 10%.

У другій серії досліджувався ефект "заклинення" в шарнірі, тобто явище збільшення моменту тертя в шарнірі при рівних навантаженнях, площі контакту, типі полімеру, але із зростанням кутів θ_B і θ_H (табл. 2). Причому, тут враховувався також час роботи шарніра. Порівняння модельних і розрахункових даних говорить про високу міру сходження результатів, а також про можливість прогнозувати зміну моменту тертя у часі. Потрібно зазначити, що в таблиці наведено усереднені значення моменту тертя, оскільки при коливальному русі він є змінним.

Перевірка точності розрахунків при орієнтуванні вектора результуючих сил під кутом, відмінним від 90° , по відношенню до площини розташування зразків (табл. 3), проводилася в третій серії експериментів. Тут підтвердилася задовільна якість прогнозування, але неточний збіг експериментальних і розра-

Таблиця 1

Залежність взаємного зближення п'яти і основи від вектора результуючих сил

$$q_H = 52^\circ, q_B = 73^\circ$$

Номінальний тиск p, МПа	Зближення вздовж осі вектора результуючих сил							
	q = 0				q = 76°			
	При первинному навантаженні		При повторному навантаженні		При первинному навантаженні		При повторному навантаженні	
	на моделі	з розрахунку	на моделі	з розрахунку	на моделі	з розрахунку	на моделі	з розрахунку
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,500	0,094	0,032	0,050	0,040	0,034	0,032	0,032	0,032
1,000	0,168	0,096	0,080	0,078	0,058	0,060	0,050	0,051
1,500	0,202	0,168	0,096	0,096	0,076	0,077	0,059	0,060
2,000	0,206	0,212	0,108	0,110	0,094	0,097	0,069	0,070
2,500	0,301	0,276	0,120	0,118	0,104	0,110	0,076	0,077
3,000	0,340	0,338	0,134	0,141	0,118	0,120	0,080	0,081
3,500	0,368	0,392	0,146	0,147	0,135	0,140	0,088	0,090

Таблиця 2

Результати дослідження ефекту “заклинювання” в сферичному шарнірі

Кут розташування полімерних фрагментів, град		Номинальний тиск, P, МПа	Момент тертя, приведений до радіусу сферичної п'яти [кН]/[м] в момент часу t, [с]							
			0		140		280		420	
q_H	q_B		на моделі	з розрахунку	на моделі	з розрахунку	на моделі	з розрахунку	на моделі	з розрахунку
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
46	51	0,6	2,23	2,20	2,64	2,50	2,74	2,80	2,78	2,91
		13,0	2,48	2,37	2,57	2,61	2,60	2,69	2,82	2,96
		26,0	3,71	3,65	3,73	3,76	4,22	4,12	4,82	4,74
65	71	0,6	2,32	2,22	2,84	2,68	2,84	2,84	2,88	2,91
		13,0	2,43	2,40	3,95	3,88	4,44	4,51	4,51	4,62
		26,0	3,60	3,50	5,27	5,30	5,41	5,47	5,77	5,86
81	87	0,6	3,06	3,10	4,70	4,72	4,89	4,95	5,18	5,30
		13,0	3,58	3,44	4,83	4,65	4,98	4,79	5,40	5,42
		26,0	4,02	3,95	6,47	6,32	6,83	6,77	7,12	7,14

хункових характеристик, незважаючи на те, що в розрахунку використовувалися моделі $K(\varphi, \theta, t)$ і $\mu(P, v, t)$, отримані на основі експериментальних даних.

Однією з причин, мабуть, є використання слабосингулярного ядра у вигляді [4]

$$K(t) = \frac{t^{-bt}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(a)^n] t^{an}}{\Gamma(an)}, \quad (5)$$

яке не зовсім точно описує реологічні властивості тканого антифрикційного матеріалу.

Друга причина неточності була визначена при розрахунку миттєвих значень моменту тертя і зближення протягом декількох коливань з подальшим їх порівнянням з осцилограмами цих характеристик (рис. 4). З рисунка видно, що при зміні напрямку руху сферичної п'яти виникає значний стрибок, в той час як на розрахунковій кривій його немає. Це означає, що в розрахунку не бралися до уваги інерційні сили, виникаючі при зміні величини і знаку швидкості. Очевидно, що застосування методики, яка дозволяє обчислити інерційні похибки при вимірюванні сили тертя, викладеної в [6], дозволить підвищити точність розрахунків.

Таблиця 3

Дослідження точності розрахунків при довільній орієнтації вектора результуючих сил

Орієнтація вектора результуючих сил відносно площини розташування фрагментів		Момент тертя, приведений до радіусу сферичної п'яти [кН]							
		При номінальному тиску P, МПа							
		0,06		0,4		0,86		1,43	
		Орієнтація вектора результуючих сил відносно площини розташування фрагментів, град							
q	j	5		35		55		75	
		на моделі	з розрахунку	на моделі	з розрахунку	на моделі	з розрахунку	на моделі	з розрахунку
90	90	0,31	0,29	0,38	0,37	0,52	0,60	1,56	1,60
90	76	0,35	0,35	0,41	0,40	0,55	0,57	1,62	1,68
45	90	0,40	0,37	0,46	0,42	0,63	0,60	1,65	1,69

45	76	0,41	0,42	0,52	0,48	0,76	0,78	1,81	1,79
0	90	0,57	0,55	0,63	0,66	0,77	0,78	1,90	1,87
0	76	0,58	0,60	0,65	0,67	0,92	0,94	2,30	2,08

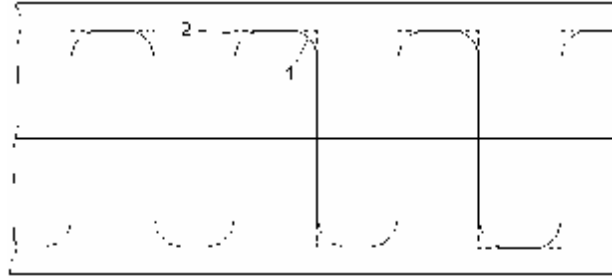


Рис. 4. Осцилограма моменту тертя :
1 – розрахункові криві; 2 – експериментальні

Як практичне застосування розробленої методики розрахунку розглянемо розрахунок моменту тертя для сферичної опори, що має форму антифрикційних вкладишів згідно (рис. 3) з [2]

$$l(\theta) = \frac{s \sin 2q}{kR \sin^2 q_2} \quad (6)$$

Для розрахунку моменту тертя необхідно виконати наступну підстановку в (17) - (18) з [1]

$$\iint_s f(j, q) ds = \sum_{k=1}^K \int_0^{q_B} \int_{g_k(q)}^{t_k(q)} l(q) dj dq, \quad (7)$$

де

$$g_k(\theta) = 2\pi(k-1)/k - s \cos \theta / (k R^2 \sin \theta_B), \quad (8)$$

$$t_k(\theta) = 2\pi(k-1)/k + s \cos \theta / (k R^2 \sin \theta_B). \quad (9)$$

Був проведений порівняльний розрахунок для схеми повного заповнення антифрикційним вкладишем сферичної основи в районі "полюса" сфери з рівною площею контакту і при інших рівних умовах. Середня величина моменту тертя для оптимальної схеми розміщення була на 27% менше, що говорить про рівнонавантаженість кожної ділянки полімерного вкладиша (тобто про більш довговічну роботу такого вкладиша).

Розрахунок для оптимальної схеми розташування полімерних вкладишів, розробленої для шарнірів зі зрізаним "полюсом" [3], ширина вкладиша розраховується як

$$l(q) = \frac{s(q_B - q_H) \cos q \cos \sqrt{\frac{q_B^2 + q_H^2}{2}}}{KR \ln \left(\frac{\sin q_B}{\sin q_H} \right) \cdot (\sin^2 q_B - \sin^2 q_H)}, \quad (10)$$

розділені на куті $\theta_{1/2}$ зі зсувом на кут $\varphi_{1/2} = 180/k$ (рис. 3) з [3]. У цьому випадку заміна подвійного інтеграла має вигляд

$$\iint_s f(j, q) ds = \sum_{k=1}^K \left\{ \int_{q_1}^{q_{1/2}} \int_{g_k(q)}^{t_k(q)} l(q) dj dq + \int_{q_{1/2}}^{q_2} \int_{g_k(q)}^{t_k(q)} l(q) dj dq \right\}, \quad (11)$$

де

$$g_k(\theta) = 2\pi(k-1)/k - z_1(\theta), \quad (12)$$

$$t_k(\theta) = 2\pi(k-1)/k + z_1(\theta), \quad (13)$$

$$z_1(\theta) = \left[\frac{l(q_1) + l(q_2)}{2} - \frac{(q - q_{1/2})}{l_2} \cdot (l(q_1) - l(q_2)) \right] / (2R \sin q), \quad (14)$$

$$g_k^*(\theta) = 2\pi(k-1)/k + \pi/k - z_2(\theta), \quad (15)$$

$$t_k^*(\theta) = 2\pi(k-1)/k + \pi/k + z_2(\theta), \quad (16)$$

$$z_2(\theta) = \left[\frac{l(q_1) + l(q_2)}{2} + \frac{(q_{1/2} - q)R}{l_2} \cdot (l(q_1) - l(q_2)) \right] / (2R \sin q) \cdot (17)$$

Розрахунки моменту тертя для цієї схеми розташування фрагментів полімерного вкладиша в порівнянні зі схемою їх розташування вздовж лінії перетину «полюса» (при рівній площі) також показало переваги нашої схеми, оскільки момент тертя був нижче на 20%.

Узагальнюючи вищевикладене, можна сказати, що розроблена методика розрахунку параметрів сферичного шарніра дозволяє шляхом чисельних експериментів визначити необхідну схему розташування полімерних вкладишів в залежності від режимів роботи і матеріалів, що застосовуються, згідно з заданими критеріями оптимізації (наприклад, мінімуму моменту тертя або мінімуму коливань взаємного зближення).

Умовні позначення

R_1 і R_2 – відповідно радіуси поверхонь сферичної п'яти і основи; $h(\varphi, \theta)$ – товщина антифрикційного вкладиша зі сферичними координатами φ і θ ; $p(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення контактної тиску в точці на сфері; t – поточний час; $W(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення поперечного стиснення полімерного вкладиша в точці (φ, θ) ; $K(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення модуля вінклеровського шару; $\Gamma(\varphi, \theta, t)$ – функція швидкості релаксації; $E(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення модуля Юнга; $\vec{g}(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення вектора сили тертя; $\mu(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення коефіцієнта тертя; $\vec{V}(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення результуючого вектора відносної швидкості ковзання; $\vec{a}(t)$ – радіус-вектор положення центра сферичної частини п'яти; $\delta(\varphi, \theta, t)$ – зазор між п'ятою і основою; \vec{h} – одиничний вектор внутрішньої нормалі до поверхні основи; \vec{N} – головний вектор зовнішніх навантажень; \vec{T} – вектор сил, що обертають п'яту; s – площа контакту сферичної п'яти з полімерним вкладишем; M_g – число частин розбиття тимчасового відрізка, на якому виконується рішення системи (17) – (18); m – порядковий номер кроку дискретизації; $\vec{W}(t)$ – узагальнений вектор відносної кутової швидкості п'яти і основи; \vec{K} – радіус-вектор точки сферичної поверхні відносно миттєвого центра швидкостей; K_{B3} – коефіцієнт взаємного перекриття; l_1 – ширина полімерного фрагмента вкладиша; l_2 – його висота; K – загальна кількість прямокутних фрагментів, розміщених на сферичній основі; k – поточний номер прямокутного фрагмента; A, a, b – коефіцієнти функції, що апроксимує залежність модуля вінклеровського шару; θ_1 і θ_2 – кутовий діапазон розміщення полімерних вкладишів; $\theta_{1/2}$ – кут розділення фрагмента вкладиша; $\varphi_{1/2}$ – кут зміщення розділених фрагментів вкладишів; θ_B і θ_H – кути розміщення прямокутних фрагментів вкладишів відносно "полюса" (верхній і нижній); $l(\theta)$ – розрахункова ширина фрагмента вкладиша; φ_p – кут відносного зміщення прямокутних фрагментів.

Список літератури

1. Пістунов І.М. Динамічна модель сферичного шарніра з полімерними вкладишами. // Науковий вісник НГАУ– 2001.–№1.–С._____.
2. Пістунов І.М. Методика розрахунку оптимальної форми антифрикційних вкладишів у сферичному шарнірі // Науковий вісник НГАУ– 2001.–№2.–С._____.
3. Пістунов І.М. Оптиміальне розташування антифрикційних вкладишів у сферичному шарнірі зі зрізаним полюсом // Проблеми геомеханіки: Зб. наук. праць ІГТМ: Вып. 24. – 2001.– С.58-63.
4. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. – М.: Машиностроение, 1983.-239 с.
5. Пістунов І.Н. Разработка методики определения триботехнических характеристик специальных узлов трения, работающих в нестационарных кратковременных режимах: Автореф. дис... канд. техн. наук : 05.02.04 – Калинин, 1988.
6. Пістунов І.Н. Инерционные и кинематические погрешности при измерении сил (моментов) трения // Трение и износ, т. 11, N4, 1990. —С. 723-730.

*Рекомендовано до публікації д.т.н. С.В.Кочурою
16.11.2000 р.*

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ СФЕРИЧНОГО ШАРНІРА З ПОЛІМЕРНИМИ ВКЛАДИШАМИ

Представлена математична модель втрат на тертя в сферичному шарнірі з антифрикційними вкладишами.

Представлена математическая модель потерь на трение в сферическом шарнире с антифрикционными вкладышами.

Represented mathematical model on friction losses in spherical hinge with antifrictional insert.

Антифрикційні вкладиші з полімерних матеріалів, вміщені між сферичною п'ятою та сферичною основою і закріплені на одному з них, дозволяють знизити момент тертя і підвищити довговічність сферичного шарніра. Однак форма вкладишів і кути їх розташування відносно "полюса" шарніра впливають істотним чином на величину моменту сили тертя, яка може в декілька разів перевищувати силу тертя тієї ж пари тертя на площині. Крім того, деформація полімерних вкладишів за рахунок зусилля, що впливає на шарнір, носить виражений релаксаційний характер. Тому необхідна методика розрахунку моменту тертя та зближення п'яти і основи в умовах постійних змін швидкостей і навантажень, вважаючи, що залежність коефіцієнта тертя від режимів роботи плоскої пари тертя нам відома.

Для цього введемо дві системи координат: прямокутну декартову O_{xyz} і сферичну $O_{r\varphi\theta}$ із загальним центром в т.О (рис. 1), яка є центром поверхні сферичної основи..

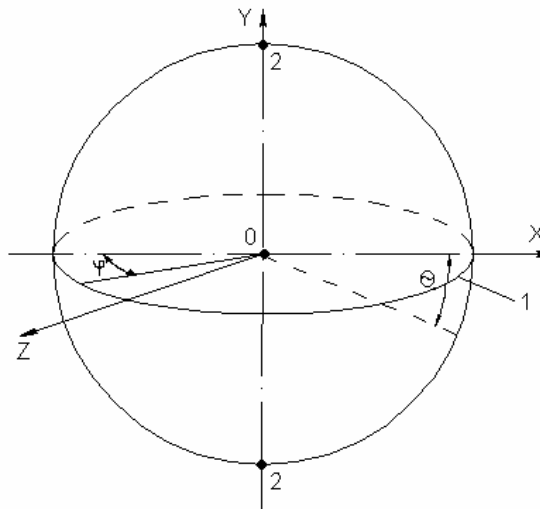


Рис. 1. Система координат:
1- вісь коливання шарніру, 2- полюси

Положення будь-якої точки на поверхні сферичної основи визначається її сферичними координатами (рис. 2)

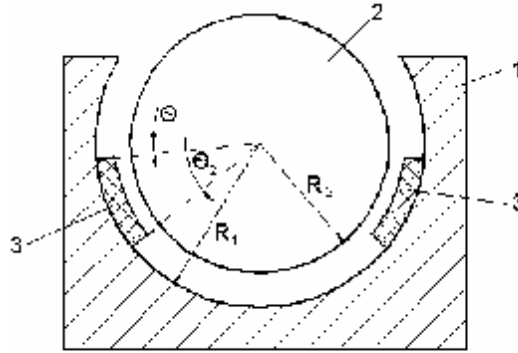


Рис. 2. Розрахункова схема сферичного шарніра:
1-сферична основа, 2-сферична п'ята,
3-атифрикційний полімерний вкладиш

Введемо обмеження:

1)

$$\Delta R_2 = R_1 - R_2 \ll R_2 \text{ и } R_1; \quad (1)$$

$$h(\varphi, \theta) \approx \Delta R, \quad (2)$$

і змінюється не ступінчасто;

2) полімер являє собою спадковий в'язко-пружний шар вінклеровського типу [1], в якому $p(\varphi, \theta, t)$ залежить від історії зміни $W(\varphi, \theta, t)$

$$p(\varphi, \theta, t) = K(\varphi, \theta, t) [W(\varphi, \theta, t) - \int_0^t \Gamma(t, \tau) W(\varphi, \theta, \tau) d\tau] \quad (3)$$

$$K(\varphi, \theta, t) = E(\varphi, \theta, t) / h(\varphi, \theta). \quad (4)$$

Якщо полімер є нестаріючим, то (3) інваріантне по відношенню до перетворення зсуву за часом, тобто

$$\Gamma(t, \tau) = \Gamma(t - \tau); \quad (5)$$

3) сферична основа і п'ята шарніра вважаються абсолютно жорсткими в порівнянні з полімерним вкладишем;

4) при терті дотримується закон Амонтона

$$\vec{q}(\varphi, \theta, t) = -\mu(\varphi, \theta, t) - p(\varphi, \theta, t) \frac{\vec{V}(\varphi, \theta, t)}{|\vec{V}(\varphi, \theta, t)|}; \quad (6)$$

5)

$$|\vec{q}(\varphi, \theta, t)| \ll p(\varphi, \theta, t); \quad (7)$$

тому ними нехтуємо при складанні рівнянь рівноваги для розрахунку контактної тиску;

6) розміри і форма поверхні реального контакту полімерного вкладиша зі сферичною п'ятою задаються заздалегідь і в процесі роботи залишаються незмінними, причому завжди

$$p(\varphi, \theta, t) \gg 0; \quad (8)$$

7) центр сферичної частини п'яти знаходиться в точці з радіус-вектором

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)). \quad (9)$$

тоді

$$\delta(\varphi, \theta, t) = \Delta R - \vec{a}(t) \cdot \vec{h}(\varphi, \theta), \quad (10)$$

$$\vec{h} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta). \quad (11)$$

Виразимо (10) в координатній формі

$$\delta(\varphi, \theta, t) = \Delta R - a_x(t) \cos \varphi \sin \theta - a_y(t) \sin \varphi \sin \theta - a_z(t) \cos \theta. \quad (12)$$

По визначенню

$$W(\varphi, \theta, t) = h(\varphi, \theta) - \delta(\varphi, \theta, t). \quad (13)$$

З (10) і (14) випливає, що для визначення контактної тиску необхідно знайти радіус-вектор відносно взаємного зміщення п'яти і основи.

Складемо рівняння рівноваги у векторній формі

$$\iint_s p \cdot \vec{h} ds + \vec{N} = 0, \quad (15)$$

$$\vec{N} = (N_x(t), N_y(t), N_z(t)). \quad (16)$$

Підставивши в рівняння рівновагу співвідношення (10) і (14) і виконавши необхідні перетворення, отримаємо систему трьох інтегральних рівнянь Вольтерра II роду відносно невідомих компонент вектора $\vec{a}(t)$, позначивши цю систему рівнянь як (17)

$$\begin{aligned} & b_{11}(t) a_x(t) + b_{12}(t) a_y(t) + b_{13}(t) a_z(t) - \\ & \int_0^t \Gamma_{11}(t, \tau) a_x(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t \Gamma_{12}(t, \tau) a_y(\tau) d\tau - \int_0^t \Gamma_{13}(t, \tau) a_z(\tau) d\tau = C_1(t); \\ & b_{21}(t) a_x(t) + b_{22}(t) a_y(t) + b_{23}(t) a_z(t) - \\ & - \int_0^t \Gamma_{21}(t, \tau) a_x(\tau) d\tau - \int_0^t \Gamma_{22}(t, \tau) a_y(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t \Gamma_{23}(t, \tau) a_z(\tau) d\tau = C_2(t); \\ & b_{31}(t) a_x(t) + b_{32}(t) a_y(t) + b_{33}(t) a_z(t) - \\ & \int_0^t \Gamma_{31}(t, \tau) a_x(\tau) d\tau - \int_0^t \Gamma_{32}(t, \tau) a_y(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t \Gamma_{33}(t, \tau) a_z(\tau) d\tau = C_3(t). \end{aligned}$$

де (18)

$$\begin{aligned} b_{11}(t) &= \iint_s K(j, q, t) \cos^2 j \sin^2 q ds; \\ b_{12}(t) &= \iint_s K(j, q, t) \sin j \cos j \sin^2 q ds \\ b_{13}(t) &= \iint_s K(j, q, t) \cos j \sin q \cos q ds; \\ b_{21}(t) &= \iint_s K(j, q, t) \sin j \cos j \sin^2 q ds \\ b_{22}(t) &= \iint_s K(j, q, t) \sin^2 j \sin^2 q ds; \\ b_{23}(t) &= \iint_s K(j, q, t) \sin j \sin q \cos q ds; \\ b_{31}(t) &= \iint_s K(j, q, t) \cos j \sin q \cos q ds; \\ b_{32}(t) &= \iint_s K(j, q, t) \sin j \sin q \cos q ds; \\ b_{33}(t) &= \iint_s K(j, q, t) \cos^2 q ds; \\ \Gamma_{11}(t, \tau) &= \iint_s K(j, q, t) \Gamma(t, \tau) \cos^2 j \sin^2 q ds; \\ \Gamma_{12}(t, \tau) &= \iint_s K(j, q, t) \Gamma(t, \tau) \sin j \cos j \sin^2 q ds; \\ \Gamma_{13}(t, \tau) &= \iint_s K(j, q, t) \Gamma(t, \tau) \cos j \sin q \cos q ds; \\ \Gamma_{21}(t, \tau) &= \iint_s K(j, q, t) \Gamma(t, \tau) \sin j \cos j \sin^2 q ds; \\ \Gamma_{22}(t, \tau) &= \iint_s K(j, q, t) \Gamma(t, \tau) \sin^2 j \sin^2 q ds; \\ \Gamma_{23}(t, \tau) &= \iint_s K(j, q, t) \Gamma(t, \tau) \sin j \sin q \cos q ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{31}(t, \tau) &= \iint_s K(j, q, t) \Gamma(t, \tau) \cos j \sin q \cos q \, ds; \\
\Gamma_{32}(t, \tau) &= \iint_s K(j, q, t) \Gamma(t, \tau) \sin j \sin q \cos q \, ds; \\
\Gamma_{33}(t, \tau) &= \iint_s K(j, q, t) \Gamma(t, \tau) \cos^2 q \, ds; \\
C_1(t) &= N_x(t) - \iint_s K(j, q, t) \cdot (h(j, q) - \Delta R) \cos j \sin q \, ds + \\
&\quad + \int_0^t \Gamma(t, \tau) \cdot \iint_s K(j, q, \tau) \cdot (h(j, q) - \Delta R) \cos j \sin q \, ds \, d\tau; \\
C_2(t) &= N_y(t) - \iint_s K(j, q, t) \cdot (h(j, q) - \Delta R) \sin j \sin q \, ds + \\
&\quad + \int_0^t \Gamma(t, \tau) \cdot \iint_s K(j, q, \tau) \cdot (h(j, q) - \Delta R) \sin j \sin q \, ds \, d\tau; \\
C_3(t) &= N_z(t) - \iint_s K(j, q, t) \cdot (h(j, q) - \Delta R) \cos q \, ds + \\
&\quad + \int_0^t \Gamma(t, \tau) \cdot \iint_s K(j, q, \tau) \cdot (h(j, q) - \Delta R) \cos q \, ds \, d\tau.
\end{aligned}$$

Аналітичне рішення системи цих інтегральних рівнянь отримати досить складно. Використаємо дискретизацію системи рівнянь (17) - (18) за часом [2]: якщо необхідно отримати рішення системи інтегральних рівнянь в момент часу $t = T$, то тимчасовий відрізок $T - T_0$ розбивається на M_g частин і, замінивши вхідні в системи (17) - (18) інтеграли відповідними кінцевими сумами, отримуємо рішення системи в послідовні моменти часу $t = T_0 + mDT$, $m = 1, 2, \dots, M_g$; $DT = (T - T_0) / M_g$. Початковий стан в момент часу $t = T_0$ вважається відомим.

Зазначимо, що в окремому випадку, коли антифрикційний вкладиш розглядається як пружний шар вінклеровського типу, система інтегральних рівнянь вироджується в систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$b_{11}(t) a_x(t) + b_{12}(t) a_y(t) + b_{13}(t) a_z(t) = C_1^*(t);$$

$$b_{21}(t) a_x(t) + b_{22}(t) a_y(t) + b_{23}(t) a_z(t) = C_2^*(t); \quad (19)$$

$$b_{31}(t) a_x(t) + b_{32}(t) a_y(t) + b_{33}(t) a_z(t) = C_3^*(t),$$

де

$$C_1^*(t) = N_x(t) - \iint_s K(j, q, t) \cdot (h(j, q) - \Delta R) \cos j \sin q \, ds;$$

$$C_2^*(t) = N_y(t) - \iint_s K(j, q, t) \cdot (h(j, q) - \Delta R) \sin j \sin q \, ds; \quad (20)$$

$$C_3^*(t) = N_z(t) - \iint_s K(j, q, t) \cdot (h(j, q) - \Delta R) \cos q \, ds.$$

Рішення системи алгебраїчних рівнянь для будь-якого моменту часу $t = T$ можна отримати безпосередньо, не розглядаючи, як в попередньому випадку, послідовність проміжних станів, оскільки залежність від початкового стану і історії навантаження для пружного шару відсутня.

Визначивши вектор $\overset{\mu}{u}(t)$ взаємного зміщення п'яти і основи сферичного шарніра, а отже, у відповідності з (14), і знаючи розподіл контактної тиску та використовуючи закон Амонтона (6), знайдемо розподіл дотичних зусиль. Для цього вектор $\overset{\mu}{V}(\varphi, \theta, t)$ відносної швидкості взаємного ковзання визначимо з аналізу кінематики відносного руху основи і п'яти сферичного шарніра. Якщо відомий вектор $\overset{\mu}{W}(t) = (w_x(t), w_y(t), w_z(t))$, то вектор відносної швидкості в точці, радіус вектор якої рівний $\overset{\mu}{R} = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$, визначається як

$$\overset{\mu}{V}(\varphi, \theta, t) = \overset{\mu}{W}(t) \overset{\mu}{R}(\varphi, \theta), \quad (21)$$

або в координатній формі

$$V_x(t) = w_y R \cos \theta - w_z R \sin \theta;$$

$$V_y(t) = w_z R \cos \varphi \sin \theta - w_x R \cos \theta; \quad (22)$$

$$V_z(t) = w_x R \sin \varphi \sin \theta - w_y R \cos \varphi \sin \theta.$$

Знаючи розподіл дотичних зусиль $\overset{\mu}{q}(\varphi, \theta, t)$, можна визначити момент сил тертя

$$\overset{P}{M}(t) = \iint_s \overset{P}{R}(j, q) \cdot q(j, q, t) ds; \quad (23)$$

або в координатній формі

$$M_x(t) = \iint_s (R \sin j \sin qq_z - R \cos qq_y) ds;$$

$$M_y(t) = \iint_s (R \cos qq_x - R \cos j \sin qq_z) ds; \quad (24)$$

$$M_z(t) = \iint_s (R \cos j \sin qq_y - R \sin j \sin qq_x) ds.$$

Якщо антифрикційний вкладиш кріпиться на поверхні п'яти, то у вираженнях (21) – (24) потрібно вважати $R = R_2$, а якщо вкладиш кріпиться на поверхні основи, то $R = R_1$.

Підставимо співвідношення (6) і (21) у вираження (23) і отримаємо

$$\overset{P}{M}(t) = \iint_s \frac{m(j, q, t) \cdot p(j, q, t)}{|\overset{P}{w}(t) \cdot \overset{P}{R}(j, q)|} \cdot \overset{P}{R}(j, q) \cdot \overset{P}{w}(t) \cdot \overset{P}{R}(j, q) ds =$$

$$= \iint_s \frac{m(j, q, t) \cdot p(j, q, t)}{|\overset{P}{w}(t) \cdot \overset{P}{R}(j, q)|} \cdot (\overset{P}{w}(t) R^2 - \overset{P}{R}(\overset{P}{R} \cdot \overset{P}{w}) ds. \quad (25)$$

Запишемо його в координатній формі, виконавши заздалегідь деякі перетворення

$$M_x(t) = \iint_s \frac{m(j, q, t) \cdot P(j, q, t)}{B(d, q)} \cdot (w_x - A(j, q) \cdot \cos j \sin q) ds;$$

$$M_y(t) = \iint_s \frac{m(j, q, t) \cdot P(j, q, t)}{B(d, q)} \cdot (w_y - A(j, q) \cdot \sin j \sin q) ds; \quad (26)$$

$$M_z(t) = \iint_s \frac{m(j, q, t) \cdot P(j, q, t)}{B(d, q)} \cdot (w_z - A(j, q) \cdot \cos q) ds,$$

де

$$A(\varphi, \theta) = w_x \cos \varphi \sin \theta + w_y \sin \varphi \sin \theta + w_z \cos \theta;$$

$$B^2(\varphi, \theta) = (w_y \cos \theta - w_z \sin \varphi \sin \theta)^2 + (w_z \cos \varphi \sin \theta -$$

$$- w_x \cos \theta)^2 + (w_x \sin \varphi \sin \theta - w_y \cos \varphi \sin \theta)^2. \quad (27)$$

Отримана формула є рішенням в загальному вигляді поставленої задачі.

Умовні позначення

R_1 і R_2 – відповідно радіуси поверхонь сферичної п'яти і основи; $h(\varphi, \theta)$ – товщина антифрикційного вкладиша зі сферичними координатами φ і θ ; $p(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення контактного тиску в точці на сфері; t – поточний час; $W(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення поперечного обтиснення полімерного вкладиша в точці (φ, θ) ; $K(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення модуля вінклеровського шару; $\Gamma(\varphi, \theta, t)$ – функція швидкості релаксації; $E(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення модуля Юнга; $\overset{P}{g}(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення вектора сили тертя; $\mu(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення коефіцієнта тертя; $\overset{P}{V}(\varphi, \theta, t)$ – миттєве значення результуючого вектора відносної швидкості ковзання; $\overset{P}{a}(t)$ – радіус-вектор положення центра сферичної частини п'яти; $\delta(\varphi, \theta, t)$ – зазор між п'ятою і основою; $\overset{P}{h}$ – одиничний вектор внутрішньої нормалі до поверхні основи; $\overset{P}{N}$ – головний вектор зовнішніх навантажень; s – площа контакту сферичної п'яти з полімерним вкладишем; M_g – число частин розбивки тимчасового відрізка, на якому виконується рішення системи (17) - (18); m – порядковий номер кроку дискретизації; $\overset{P}{W}(t)$ – узагальнений вектор відносної кутової швидкості п'яти і основи; $\overset{P}{R}$ – радіус-вектор точки сферичної поверхні відносно миттєвого центра швидкостей.

Список літератури

1. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983.–239 с.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.

Рекомендовано до публікації д.т.н. С.В.Кочурою

14.11.2000 p.