Кафедра механічної та біомедичної інженерії

Національний технічний університет
ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
1899

Долгов О.М, Колосов Д.Л., Онищенко С.В.

Теоретична механіка

МОДУЛЬ ІІ. СТАТИКА
ПРЕЗЕНТАЦІЯ ЛЕКЦІЙ

для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство

Дніпро - 2023

Рекомендовано до видання навчально-методичним відділом
(протокол № 2 від 07.02.2023) за поданням методичної комісії
спеціальності 132 Матеріалознавство (протокол № 2 від 08.12.2022).

Долгов О.М. Теоретична механіка. Модуль ІІ. СТАТИКА [Електронний ресурс] : презентація лекцій для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство / О.М. Долгов, Д.Л. Колосов, С.В. Онищенко ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 21с.

ЗМІСТ

- **Тема 1.** **Система збіжних сил.** Основні визначення і поняття. Аксіоми статики. Види в'язей і їхні реакції. Методичні вказівки з визначення основних понять та аксіом статики. Зовнішні та внутрішні сили. Многокутник сил. Система збіжних сил і умови її рівноваги. Методика розв'язання задач на рівновагу. Приклади розрахунків.

- **Тема 2.** **Довільна плоска система сил.** Головний вектор та головний момент. Умови рівноваги довільної просторової системи сил. Теорема Варіньйона. Рівновага за наявності сил тертя. Методика розв'язання задач на рівновагу. Прості механізми: важіль , блок, поліспаст, клин, гвинт. Приклади розрахунків.

- **Тема 3.** **Довільна просторова система сил.** Умови рівноваги довільної просторової системи сил. Рівновага системи тіл. Методика розв'язання задач на рівновагу. Приклади розрахунків з використанням пакету Mathcad.

Вступ

Під назвою “механіка” об'єднується ряд наук, які **вивчають механічний рух та механічну взаємодію** твердих та деформованих тіл, а також рідких та газоподібних середовищ.

Механіка

Прикладна механіка	Гідромеханіка	Аеромеханіка	Небесна механіка
Динаміка споруд	Механіка корабля	Гідродинаміка	Механіка ґрунтів

Будівельна механіка	Будівельні конструкції	Мости та тунелі
Опір матеріалів	Деталі машин	Теорія механізмів та машин

Теоретична механіка

Механічний рух – один із видів руху матерії, що полягає у **зміні в часі взаємних положень тіл** або частин тіл.

Механічна взаємодія – одна із видів взаємодії матерії, який викликає зміну механічного руху тіл чи його частин, і навіть ***перешкоджає зміні їхніх*** взаємних положень.

Теоретична механіка **вивчає закони механічного руху та механічної взаємодії**, які є загальними для будь-яких тіл.

Спільність законів, придатність для будь-яких тіл і систем, досягається абстрагуванням від несуттєвих особливостей розглянутого тіла та виділенням найважливіших особливостей. Саме тому теоретична механіка є базовою наукою, на основі якої вивчаються інші прикладні технічні дисципліни.

Основні абстрактні образи (моделі) матеріальних тіл та систем:

Матеріальна точка (МТ) – **об’єкт, який не має розмірів**, але на відміну від геометричної точки **має масу**, рівну масі того тіла, яке зображується даною матеріальною точкою.

Абсолютно тверде тіло (АТТ) – **система МТ**, у якій **відстань між ними не змінюються** за жодних впливів.

Механічна система (МС) – сукупність МТ чи АТТ, пов'язаних між собою загальними законами руху чи взаємодії.

Залежно від умови задання та вибору об'єкта вивчення одне й те саме фізичне тіло може бути прийняте за МТ, АТТ або МС.

Наприклад, Земля у випадку її руху навколо Сонця приймається за МТ, а під час її обертання навколо власної осі – за АТТ. При вивченні явищ, що відбуваються на Землі (припливи та відливи, переміщення кори тощо), Земля сприймається як МС.

Теоретична механіка складається з трьох розділів:

❖**Статика** вивчає **умови відносної рівноваги** механічних систем. Для рівноваги необхідне певне співвідношення сил, тому у статиці вивчаються загальні властивості сил, правила заміни сил іншими силами, еквівалентними з погляду рівноваги.
❖**Кінематика вивчає механічний рух без урахування сил,** що викликають цей рух або впливають на нього. Таким чином, встановлюються деякі кількісні заходи з чисто геометричної точки зору**.**
❖**Динаміка вивчає механічний рух у зв'язку з діючими силами на об'єкт руху.** Таким чином, вивчається зв'язок між рухом та діючими силами.

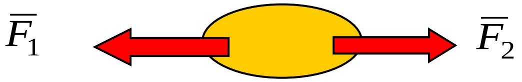
❖ **Основні поняття теоретичної механіки**

Сила – міра механічної взаємодії. Сила моделюється **вектором**, що характеризується **напрямом та величиною** (модулем).
Кінематичний стан тіла – стан спокою чи руху із постійними параметрами.
Система сил – сукупність сил, прикладених до об'єкта, який розглядається.
Рівнодіюча – сила, яка своєю дією замінює систему сил, тобто є еквівалентною системі сил.
Еквівалентна система сил – сила, яка замінює існуючу систему сил без зміни кінематичного стану об'єкта.
Взаємно врівноважена система сил – система сил, під дією якої об'єкт перебуває у рівновазі.

❖ **Аксіоми статики**

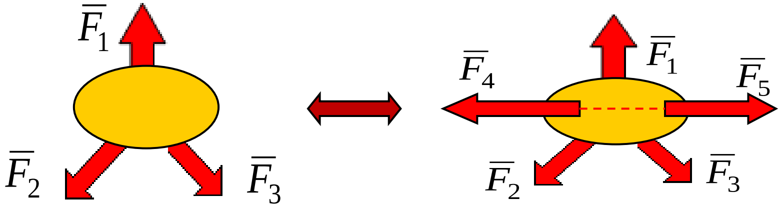
1. **Аксіома інерції** – Під дією взаємно врівноваженої системи сил тіло перебуває у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху.

2. **Аксіома двох сил** – Якщо тіло під дією двох сил знаходиться в рівновазі, то ці сили рівні за модулем і спрямовані вздовж однієї прямої у протилежні сторони. Такі дві сили є найпростішою взаємно врівноваженою системою сил.



$$\boxed{\bar{\boldsymbol{F}}_1 = -\bar{\boldsymbol{F}}_2}$$

3. **Аксіома приєднання** – Якщо до заданої системи сил приєднати (або видалити) взаємно врівноважену систему сил, то кінематичний стан тіла не зміниться.



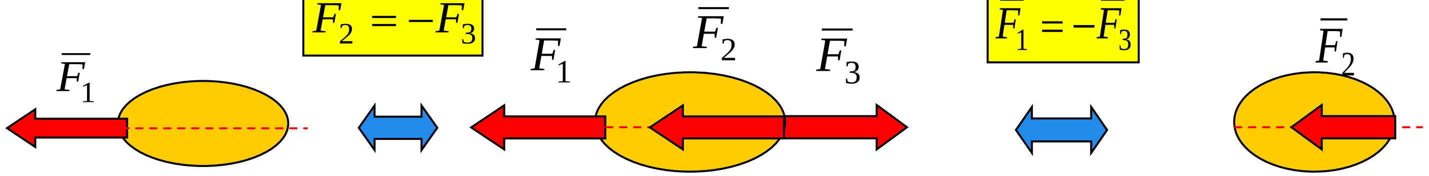
$$\boxed{\bar{\boldsymbol{F}}_4 = -\bar{\boldsymbol{F}}_5}$$

$$\boxed{(\bar{\boldsymbol{F}}_1, \bar{\boldsymbol{F}}_2, \bar{\boldsymbol{F}}_3) \equiv (\bar{\boldsymbol{F}}_1, \bar{\boldsymbol{F}}_2, \bar{\boldsymbol{F}}_3, \bar{\boldsymbol{F}}_4, \bar{\boldsymbol{F}}_5)}$$

Аксіоми статики (продовження)

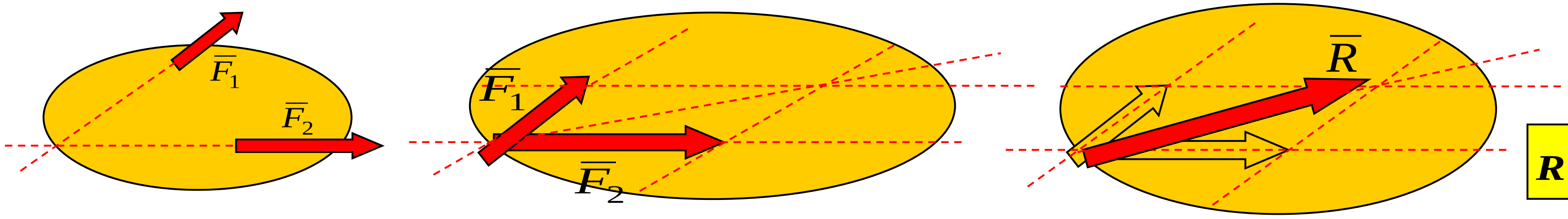
Наслідок із аксіоми приєднання – Кінематичний стан тіла не зміниться, якщо силу перенести вздовж лінії її дії.

$$\overline{F}_2 = -\overline{F}_3 \qquad \overline{F}_1 = -\overline{F}_3$$



$$(\overline{F}_1) \equiv (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) \equiv (\overline{F}_2)$$

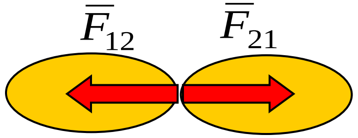
4 . **Аксіома про паралелограм сил** – рівнодіюча двох сил, що перетинаються, дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.



$$\overline{\boldsymbol{R}} = \overline{\boldsymbol{F}}_1 + \overline{\boldsymbol{F}}_2$$

$$\boldsymbol{R} = \sqrt{\boldsymbol{F}_1^2 + \boldsymbol{F}_1^2 + 2\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_2\cos(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)}$$

5. **Аксіома дії та протидії** – Будь-якій дії відповідає рівна за величиною та протилежна за напрямком протидія (III закон Ньютона).



$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}$$

6. **Аксіома затвердіння** - Рівновага деформованого тіла зберігається у разі його затвердіння (обернене твердження справедливе не завжди).

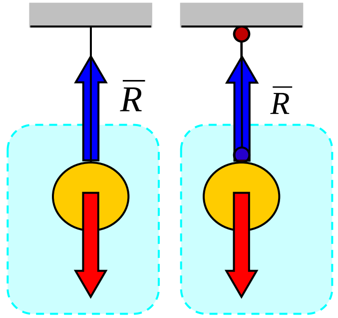
В'язі та реакції в'язей

- Вільне тіло – це тіло, свобода переміщень якого не обмежується жодними іншими тілами.
- Невільне тіло – це тіло, рух якого обмежений іншими тілами.
- В'язь – тіло, що обмежує свободу переміщень об'єкта.
- Реакція в'язі – сила, що діє на об'єкт із боку в'язі.
- Принцип звільнення від в'язей – невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі і замінити їхню дію відповідними реакціями.

В’язі та реакції в’язей (продовження)

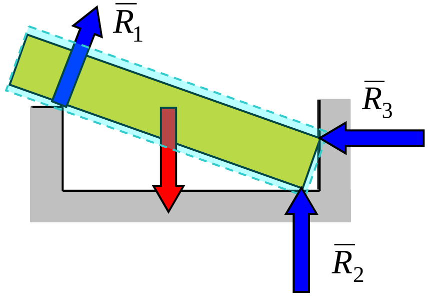
❖*Види в’язей та їхніх реакцій:*

1. **Нитка, шарнірний стрижень**:



Реакція нитки (стрижня) спрямована вздовж нитки (стрижня).

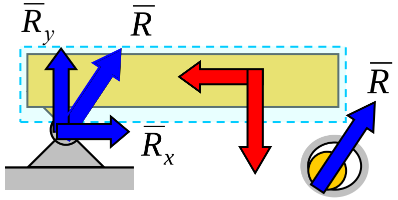
2. **Абсолютно гладенька поверхня**:



Реакція гладенької поверхні спрямована перпендикулярно загальній дотичної площині, проведеній до дотичних поверхонь тіла і в’язі.

Загальне правило для в’язей будь-якого виду: Якщо в’язь перешкоджає одному або декільком переміщенням (максимальна кількість переміщень – шість – три поступальні і три обертальні), то за напрямом цих і тільки цих переміщень виникають відповідні реакції (сили і моменти).

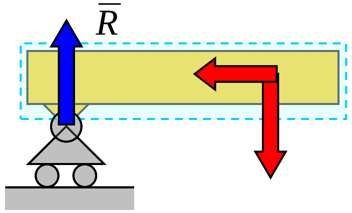
3. **Нерухомий циліндричний шарнір:**



Реакція нерухомого шарніра проходить через центр шарніра перпендикулярно до осі шарніра і має довільний напрямок.

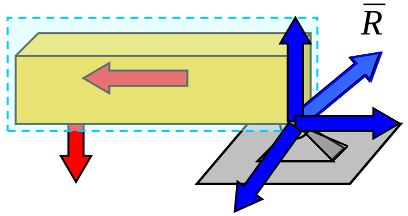
Реакцію нерухомого шарніра можна розкласти на дві складові, наприклад, R_x і R_y, які паралельні координатним осям.

4. **Рухомий циліндричний шарнір:**



Реакція рухомого шарніра проходить через центр шарніра перпендикулярно осі шарніра та площині опори.

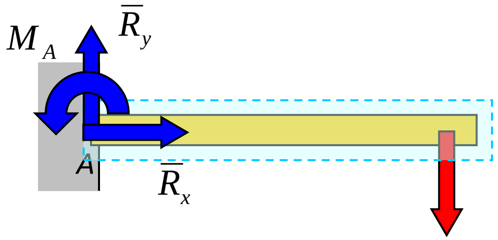
5. **Нерухомий сферичний шарнір:**



Реакція нерухомого сферичного шарніра проходить через центр шарніра і має довільний напрямок у просторі.

Реакцію нерухомого сферичного шарніра можна розкласти на три складові, наприклад R_x, R_y , R_z, які паралельні координатним осям.

6. **Жорстке плоске затиснення:**

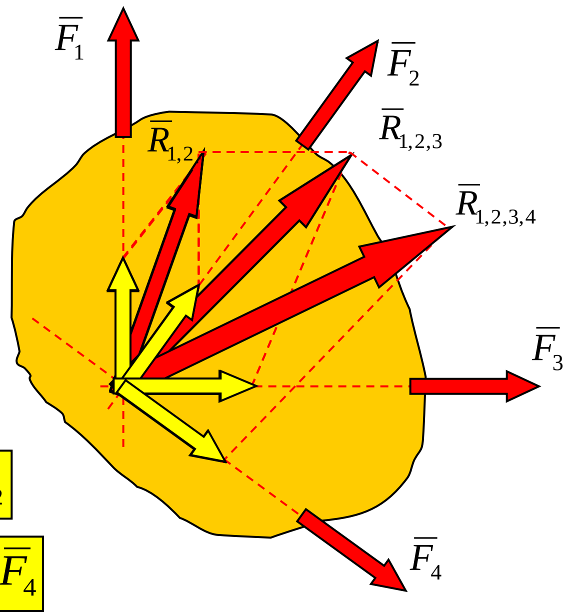


У жорсткому плоскому затисненні виникає три реактивні зусилля: дві складові реактивні сили R_x і R_y, а також реактивний момент (пара сил) M_A .

Система збіжних сил – система, у якій лінії дії сил перетинаються в одній точці.

План дослідження будь-якої системи сил відповідає послідовному розв'язанні трьох питань:

1. **Як спростити систему?**
2. **Який найпростіший вигляд системи?**
3. **Які умови рівноваги системи?**



1. **Перенесемо всі сили** вздовж лінії їхньої дії в точку перетину (кінематичний стан тіла за цього не зміниться - слідство з аксіоми приєднання).

   Складемо перші дві сили F_1 і F_2 (аксіома про паралелограм сил). Кількість сил зменшилась на одиницю.

   $$\overline{R}_{1,2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

   Складемо отриману рівнодіючу R_{12} з наступною силою F_3. Кількість сил знову зменшилась на одиницю.

   $$\overline{R}_{1,2,3} = \overline{R}_{1,2} + \overline{F}_2$$

   Повторимо цю операцію з наступною силою F_4. Залишилась лише одна сила, еквівалентна вихідній системі сил.

   $$\overline{R}_{1,2,3,4} = \overline{R}_{1,2,3} + \overline{F}_4$$

Складання сил побудовою паралелограмів можна замінити побудовою **силового трикутника (багатокутника)** – обирається одна з сил або зображується паралельно самій собі з початком у будь-якій довільній точці, **всі інші сили зображуються паралельними самим собі з початком, що збігається з кінцем попередньої сили**.

Результатом такого складання є вектор, спрямований з початку першої сили до кінця останньої.

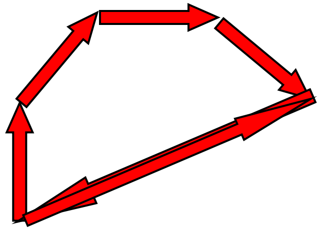
2. **Найпростіший вигляд системи** – сила, прикладена у точці перетину вихідних сил. Таким чином, схожа система сил приводиться до однієї сили – **рівнодіючої** (сили, еквівалентної вихідній системі сил), **що дорівнює геометричній сумі сил системи**.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 + \ldots = \sum \overline{F}_i$$

3. **Якщо рівнодіюча система виявляється не рівною нулю**, то під дією такої системи сил тіло буде рухатися в напрямку рівнодіючої (система сил не врівноважена). Для того, щоб урівноважити систему, достатньо прикласти силу, рівну отриманій рівнодіючій і спрямованій у протилежний бік (аксіома про дві сили). Таким чином, **умовою рівноваги збіжної системи сил є рівність рівнодіючої нулю**.

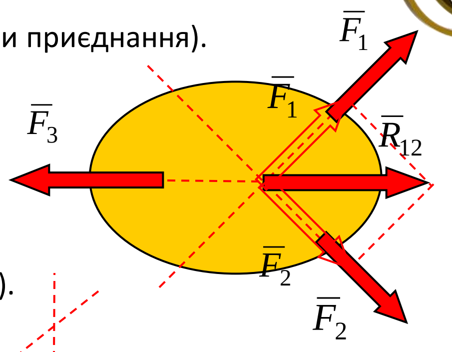
$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i = 0$$

Ця умова є еквівалентною замкнутості силового багатокутника певним чином, а саме, **напрямок всіх сил при обході за контуром не змінюється за напрямком**:

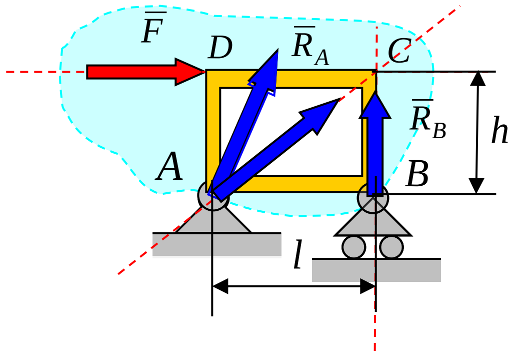


- **Теорема про три сили –** Якщо під дією трьох непаралельних сил тіло знаходиться в рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

1. Перенесемо дві сили вздовж лінії їхньої дії в точку їх перетину (кінематичний стан тіла при цьому не зміниться - слідство з аксіоми приєднання).
2. Складемо ці сили (аксіома про паралелограм сил). Тепер система складається з двох сил. А така система перебуває у рівновазі, якщо ці сили рівні між собою і спрямовані вздовж однієї лінії у протилежні сторони. Таким чином, усі три сили перетинаються в одній точці.



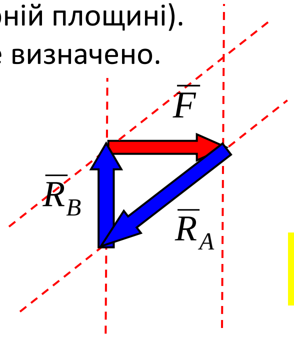
Теорема про три сили може ефективно застосовуватися для визначення напрямку однієї з двох реакцій тіл:



Реакція рухомого шарніра R_B спрямована вертикально (перпендикулярно опорній площині). Напрямок (кут нахилу до горизонту) реакції нерухомого шарніра R_A поки що не визначено.

Якщо тіло під дією трьох сил *F*, R_A и R_B знаходиться в рівновазі, то всі три сили повинні перетинатися в одній точці (у точці *C*) :

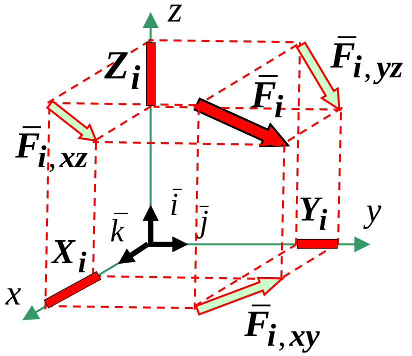
Дійсні напрямки та величини реакцій легко визначаються побудовою силового трикутника та використанням подібності трикутників :



$$\frac{R_B}{F} = \frac{h}{l}$$

$$R_A = \sqrt{F^2 + R_B^2}$$

- **Аналітичне визначення рівнодіючої –** Кожна із сил, геометрична сума яких дає рівнодіючу, може бути представлена через її проекції на координатні вісі та одиничні вектори (орти): $\bar{F}_i = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}$



Тоді рівнодіюча виражається через проекції сил наступним чином:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k} + X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k} + ...$$

Групування за ортами дає вирази для проекцій рівнодіючої :

$$\bar{R} = (X_1 + X_2 + ...)\bar{i} + (Y_1 + Y_2 + ...)\bar{j} + (Z_1 + Z_2 + ...)\bar{k} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}$$

Звідси проекції рівнодіючої :

$$R_x = \sum X_i; \quad R_y = \sum Y_i; \quad R_z = \sum Z_i;$$

Напрямні косинуси рівнодіючої :

$$\cos(\bar{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\bar{R}, y) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\bar{R}, z) = \frac{R_z}{R}.$$

Модуль рівнодіючої :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Звідси рівняння рівноваги:

$$\bar{R} = 0$$

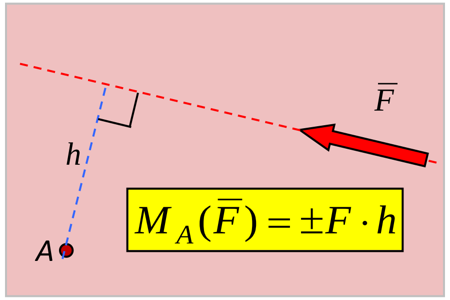
$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0.$$

❖ **Плоска довільна система сил** – система, в якій сили лежать в одній площині та їхні лінії дії не перетинаються в одній точці.

Для розгляду такої системи сил необхідно ввести нові поняття:

1. Момент сили відносно точки на площині.
2. Пара сил. Момент пари сил.

❖ **Момент сили відносно точки на площині –** алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на плече, взята зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією сили відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «–» (мінус) в протилежному випадку.

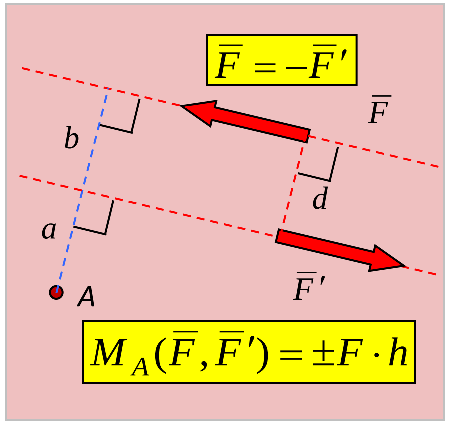


❖ **Плече сили –** довжина перпендикуляра, проведеного з точки на лінію дії сили.

❖ **Пара сил –** сукупність двох паралельних одна одній сил, рівних за величиною та спрямованих у протилежні сторони. Пара сил не може бути спрощена (не може бути замінена однією силою) і є новою силовою характеристикою механічної взаємодії.

❖ **Момент пари сил на площині** (теорема про момент пари сил) не залежить від вибору центру приведення (полюса) і дорівнює добутку модуля будь-якої з сил пари на плече пари, взятим зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією пари сил відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «–» (мінус) в протилежному випадку.

❖ **Плече пари сил** – довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки на лінії дії однієї із сил пари на лінію дії іншої сили цієї пари.



У незалежності моменту пари та від вибору полюса можна переконатися обчисленням суми моментів від кожної з сил відносно будь-якого центру.

$$M_A(\overline{F}, \overline{F}') = F \cdot (a+b) - F'a = Fb = Fd$$

Теореми про пари :

❖**Про перенесення пари сил у площині її дії** – Пару сил можна перенести у будь-яке місце у площині її дії. Кінематичний стан тіла не зміниться.

$$M(\overline{F}_1, \overline{F}_1') = F_1 d_1, \quad M(\overline{F}_2, \overline{F}_2') = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\overline{F}_1, \overline{F}_1') \equiv (\overline{F}_2, \overline{F}_2')$$

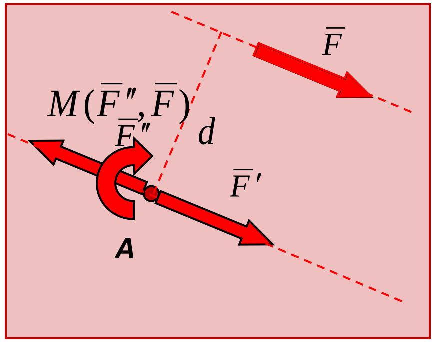
❖**Про еквівалентність пар сил** – Пару сил можна замінити іншою парою сил, якщо їхні моменти алгебраїчно рівні. Кінематичний стан тіла не зміниться.

❖**Про складання пар сил на площині** – Систему пар сил на площині можна замінити однією парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів вихідних пар. Кінематичний стан тіла не зміниться.

❖**Умова рівноваги системи пар сил**

$$M = \sum M_i = 0$$

- **Приведення сили до заданого центру (метод Пуансо)** – силу можна перенести паралельно самій собі в будь-яку точку площини, якщо додати відповідну пару сил, момент якої дорівнює моменту цієї сили відносно точки, що розглядається.



Додамо до системи в **точці *A*** дві сили, рівні за величиною між собою та з величиною заданої сили, спрямовані вздовж однієї прямої у протилежні сторони та паралельні заданій силі: $\boxed{\bar F'' = -\bar F' = -\bar F}$

Кінематичний стан не змінився (аксіома про приєднання).

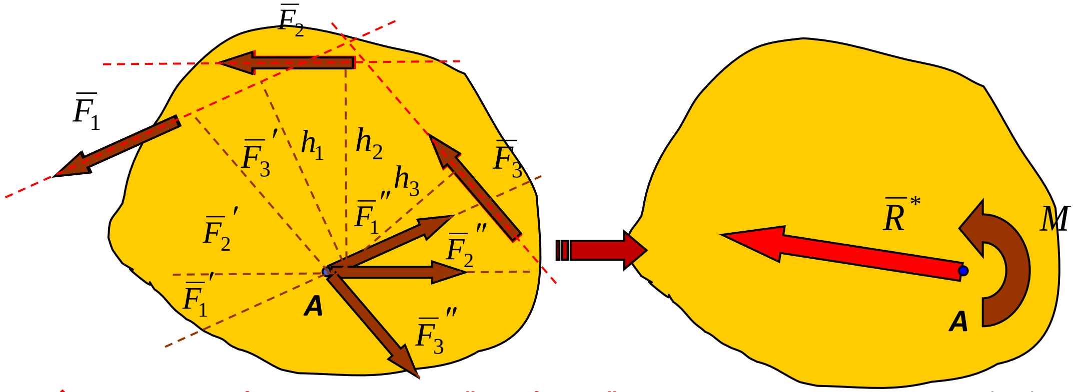
Вихідна сила та одна з доданих сил утворюють пару сил.

Момент цієї пари чисельно дорівнює моменту вихідної сили відносно центру приведення.

$$\boxed{M(\bar F'', \bar F) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\bar F)}$$

У багатьох випадках пару сил зручно зображати дуговою стрілкою.

- **Приведення плоскої довільної системи сил до заданого центру.** Вибираємо довільну точку на площині і кожну з сил переносимо методом Пуансо в цю точку. Замість вихідної довільної системи отримаємо схожу систему сил і систему пар.



Збіжна система сил приводиться до однієї сили, прикладеної в центрі приведення, яка раніше називалася рівнодіючою, але тепер ця сила не замінює вихідну систему сил, оскільки після приведення виникла система пар. Система пар приводиться до однієї пари (теорема про складання пар), момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів вихідних сил відносно центру приведення.

У загальному випадку плоска довільна система сил приводиться до однієї сили, яка називається головним вектором і до пари з моментом, рівним головному моменту всіх сил системи відносно центру приведення:

$\boxed{\bar R^* = \sum \bar F_i}$ **- головний вектор,**

$\boxed{M = M_A = \sum M_{iA}}$ **- головний момент.**

- **Умовою рівноваги плоскої довільної системи сил** є одночасна рівність головного вектора та головного момента системи нулю**:**

$$\boxed{\bar R^* = \sum \bar F_i = 0} \qquad \boxed{M = M_A = \sum M_{iA} = 0}$$

Існують ще дві форми рівнянь рівноваги (II та III форми) :

- **Рівняння рівноваги (I форма)** маємо у вигляді системи трьох рівнянь із умов рівноваги з використанням виразів для проекцій головного вектора:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum X_i = 0;\\ &\sum Y_i = 0;\\ &\sum M_{iA} = 0\end{aligned}}$$

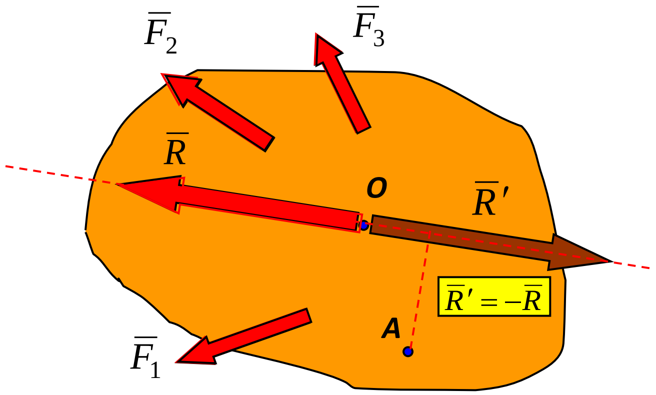
$$\boxed{\begin{aligned}&\sum X_i = 0;\\ &\sum M_{iB} = 0;\\ &\sum M_{iA} = 0\end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned}&X\\ &\not\perp\\ &AB\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}&\sum M_{iC} = 0;\\ &\sum M_{iB} = 0;\\ &\sum M_{iA} = 0\end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned}&C\\ &\notin\\ &AB\end{aligned}}$$

Слід звернути увагу на те, що II та III форми рівнянь рівноваги мають обмеження, пов'язані з вибором однієї з осей, наприклад, осі ***x*** і точки ***C*** відносно положення точок ***A*** і ***B***.
Обмеження, що накладаються на вибір осі ***x*** (**не перпендикулярно *AB***) та точки *C* (**не лежить на *AB***), гарантують, що жодне з рівнянь не є тотожністю при виконанні двох інших рівнянь.

$$\sum X_i = 0;\quad \sum M_{iB} = 0;\quad \sum M_{iA} = 0 \qquad x \not\perp AB$$

$$\sum M_{iC} = 0;\quad \sum M_{iB} = 0;\quad \sum M_{iA} = 0 \qquad C \notin AB$$

❖ **Теорема Варіньйона про момент рівнодіючої.** Якщо система сил має рівнодіючу, то момент цієї рівнодіючої відносно будь-якого центру дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно того ж центру.



Доказ: Нехай система сил F_1, F_2, F_3 … приводиться до рівнодіючої, прикладеної у точці ***O***.

Така система не перебуває у рівновазі (***R* ≠ 0**). Урівноважимо цю систему силою ***R'***, рівною рівнодіючій ***R***, спрямованій вздовж лінії її дії у протилежний бік (аксіома про дві сили).

Таким чином, система вихідних сил F_1, F_2, F_3 … та врівноважуюча сила ***R'*** знаходиться в рівновазі і повинна задовольняти рівнянням рівноваги, наприклад:

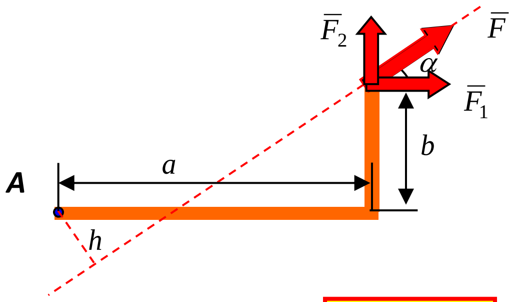
$$\sum M_{iA} + M_A(R') = 0$$

Оскільки сила ***R'***, дорівнює рівнодіючій ***R*** та спрямована вздовж лінії її дії у протилежний бік, то $M_A(R') = -M_A(R)$. Підстановка цієї рівності до рівняння рівноваги дає :

$$\sum M_{iA} - M_A(R) = 0 \qquad M_A(R) = \sum M_{iA}$$

Приклади використання теореми про момент рівнодіючої:

1. Визначення моменту сили відносно точки, коли складно обчислювати плече сили. Наприклад:

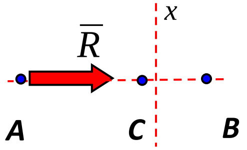


Силу ***F*** розкладемо на складові F_1 и F_2. Тоді момент сили ***F*** відносно точки ***A*** можна обчислити як суму моментів кожної із сил відносно цієї точки:
$$M_A(F) = -F_1 b + F_2 a = -(F\cos\alpha)b + (F\sin\alpha)a$$

2. Доказ необхідності обмежень для II та III форм рівнянь рівноваги:
Якщо $\sum M_{iA} = 0$, то система приводиться до рівнодіючої, при цьому вона проходить через точку ***A***, через те, що її момент відносно цієї точки має дорівнювати нулю (теорема Варіньйона).

Якщо при цьому $\sum M_{iB} = 0$, то рівнодіюча повинна також проходити через точку ***B***.

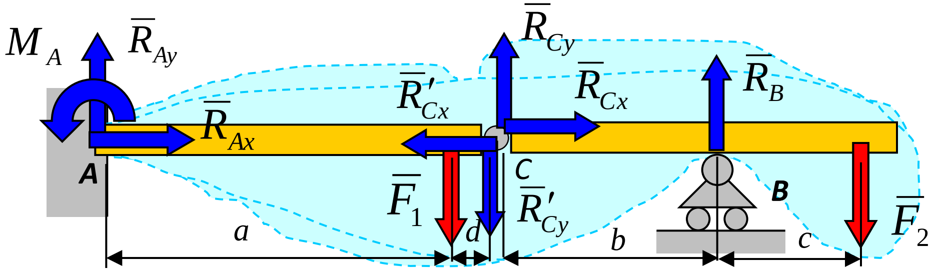
Тоді проекція рівнодіючої на вісь, перпендикулярну ***AB***, і момент рівнодіючої відносно точки, що лежить на ***AB***, будуть тотожно рівні нулю за будь-якого значення рівнодіючої.



Рівновага зчленованих тіл. Залізничні та будівельні конструкції можуть складатися із зчленованих між собою тіл (балок, ферм). Кількість накладених в'язей може перевищувати кількість незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для розглянутої конструкції. Такі задачі є **статично невизначуваними**. Ступінь статичної невизначуваності для плоских систем дорівнює: $n = 3Ж + 2Ш + С - 3Д$

де **Д** – кількість жорстких дисків, **Ж** – кількість жорстких затиснень, **Ш** – число нерухомих шарнірів (опорних та тих, що сполучають диски між собою), **С** – число шарнірних стрижнів (опорних та тих, що сполучають диски між собою) або рухомих шарнірів $n = 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = 0$

У теоретичній механіці можливе розв'язання лише статично визначуваних задач, у яких кількість в'язей дорівнює числу незалежних рівнянь рівноваги (*n* = 0).



1. Виберемо як об'єкт всю конструкцію.
2. Відкинемо в'язі та замінимо їхню дію реакціями.
3. Число невідомих реакцій – 4, а кількість незалежних рівнянь – 3. Це означає, що необхідно розчленувати конструкцію – відкинути шарнір **С** та замінити його дію на кожну з частин реакціями.

$$(CB):\quad \sum X_i = 0;\quad R_{Cx} = 0;$$
$$\sum M_{Ci} = 0;\quad R_B b - F_2(b+c) = 0;$$
$$\sum M_{Bi} = 0;\quad -R_{Cy} b - F_2 b = 0.$$

$$\overline{R}'_{Cx} = -\overline{R}_{Cx},\ але\ R'_{Cx} = R_{Cx};$$
$$\overline{R}'_{Cy} = -\overline{R}_{Cy},\ але\ R'_{Cy} = R_{Cy}.$$

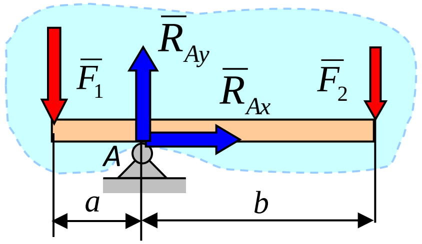
$$(AC):\quad \sum X_i = 0;\quad R_{Ax} - R'_{Cx} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;\quad R_{Ay} - R'_{Cy} - F_1 = 0;$$
$$\sum M_{Ai} = 0;\quad M_A - R'_{Cy}(a+d) - F_1 a = 0.$$

4. Розв’язання отриманої системи рівнянь не представляє особливих труднощів у зазначеному порядку: спочатку ***допоміжна*** балка **СВ** (не може залишатися у рівновазі без балки **АС**), потім ***основна*** балка **АС** (може бути у рівновазі без балки **СВ**).

Рівновага важеля. Важіль – тверде тіло, що має одну нерухому точку. Важіль має один ступінь кінематичної рухливості ($w = -n = 3Д - 3Ж - 2Ш - С = 3\cdot 1 - 3\cdot 0 - 2\cdot 1 - 0 = 1$) і в рівновазі може бути лише за певного співвідношення активних сил, що діють на важіль.

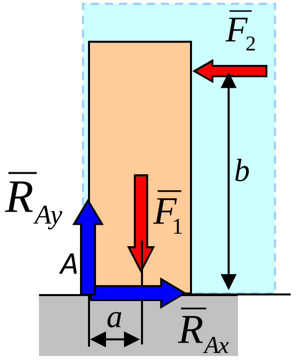
$$M_A^{утрим} > M_A^{перекид}$$

Рівняння рівноваги важеля. Застосовуючи загальний підхід до складання рівнянь рівноваги для важеля отримаємо:



$$\sum X_i = 0;\quad R_{Ax} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;\quad R_{Ay} - F_1 - F_2 = 0;$$
$$\sum M_{Ai} = 0;\quad F_1 a - F_2 b = 0.$$

У багатьох випадках значення опорних реакцій не є важливими і шукане співвідношення сил визначають з останнього моментного рівняння, яке і приймається за **рівняння рівноваги важеля**.



Рівняння рівноваги важеля використовується **за розрахунку підпірної стінки або вантажу на перекидання**:

Умова стійкості на перекидання: Утримуючий момент відносно нерухомої точки (від F_1) повинен бути більше перекидального моменту (від F_2) відносно цієї точки.

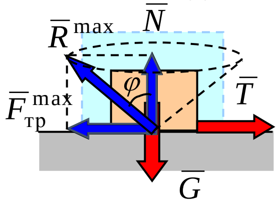
❖ **Тертя ковзання.** Під дією зсувної сили, прикладеної до тіла, що лежить на шорсткій поверхні, виникає сила, яка протидіє можливому зсуву тіла (**сила тертя зчеплення**) з положення рівноваги або його дійсному переміщенню (**сила тертя ковзання**) у випадку, коли рух справді відбувається.

Основні закони тертя (Амонтона – Кулона) :

1. Сила тертя лежить у дотичній площині до контактуючих поверхонь і спрямована в бік, протилежний до напрямку, в якому прикладені до тіла сили, які прагнуть його зрушити або дійсно зрушують (реактивний характер).
2. Сила тертя змінюється від нуля до максимального значення $0 \le F_{тр} \le F_{тр}^{max}$. Максимальна сила тертя пропорційна коефіцієнту тертя та силі нормального тиску.
3. Коефіцієнт тертя є величиною постійною для даного виду та стану контактуючих поверхонь (***f* = const**).
4. Сила тертя в широких межах не залежить від площі контактуючих поверхонь. $F_{тр}^{max} = fN.$

❖ **Кут тертя**

З урахуванням сили тертя, що виникає при контакті з шорсткою поверхнею повна реакція такої поверхні може розглядатися як геометрична сума нормальної реакції абсолютно гладенької поверхні та сили тертя: $\bar{R}^{max} = \bar{N} + \bar{F}_{тр}^{max}$



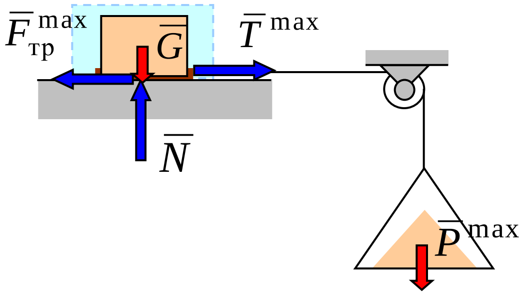
Кут відхилення повної реакції шорсткої поверхні – це **кут тертя**, що дорівнює:

$$\varphi = arctg\left(\frac{F_{тр}^{max}}{N}\right) = arctg(f)$$

При зміні напрямку зсувної сили ***T*** на опорній поверхні поворотом відносно нормалі до площини повна максимальна реакція шорсткої поверхні описує **конус тертя**.

❖ **Способи визначення коефіцієнта тертя.**

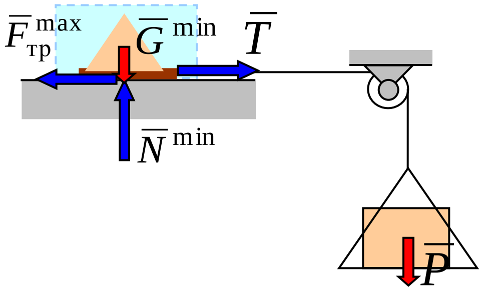
1. Зсувна сила змінюється від нуля до максимального значення – **0 ≤ *T* ≤ *T*^max^**, (**0 ≤ *P* ≤ *P*^max^**).



$$\sum X_i = 0;$$
$$T^{max} - F_{тр}^{max} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;$$
$$N - G = 0.$$

$$T^{max} = fN;\quad N = G;\quad f = \frac{T^{max}}{N} = \frac{P^{max}}{G}.$$

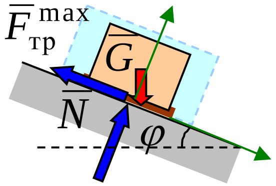
2. Сила нормального тиску змінюється від початкового значення до мінімального значення – ***N***$_0$ ≥ ***N*** ≥ ***N***^{min} (***G***$_0$ ≥ ***G*** ≥ ***G***^{min}).



$$\sum X_i = 0;$$
$$T - F_{тр}^{max} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;$$
$$N^{min} - G^{min} = 0.$$

$$T = fN^{min};\quad N^{min} = G^{min};\quad f = \frac{T}{N^{min}} = \frac{P}{G^{min}}.$$

3. Зсувна сила і сила нормального тиску змінюються при зміні кута нахилу площини ковзання від нуля до максимального значення – **0 ≥ *φ* ≥ *φ*^max^** .



$$\sum X_i = 0;$$
$$G\sin\varphi^{max} - F_{тр}^{max} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;$$
$$N - G\cos\varphi^{max} = 0.$$

$$G\sin\varphi^{max} = fN;\quad N = G\cos\varphi^{max};\quad f = \frac{G\sin\varphi^{max}}{N} = \frac{G\sin\varphi^{max}}{G\cos\varphi^{max}} = tg\varphi^{max}.$$

Активні сили (***G***, ***T*** та ін.) можна замінити рівнодіючою силою ***P***, яка має кут відхилення від вертикалі *α*. Можна показати, що **рівновага можлива лише у тому випадку, коли ця сила залишається всередині простору конуса тертя:**

Умова рівноваги вздовж осі ***x***: ***P**sinα ≤ *F*$_{тр}^{max}$**.

З рівняння рівноваги вздовж осі ***y***: ***N* = *P**cosα**.

Максимальна сила тертя

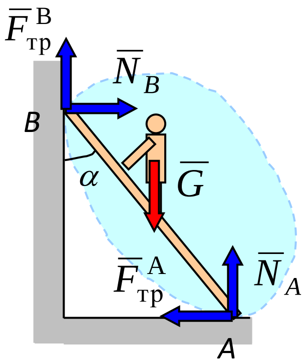
***F*$_{тр}^{max}$ = *f**N* = tg*φ**N* =**
= tg*φP**cosα**.

Тоді ***P**sinα ≤ tg*φ**P**cosα**, звідки **tg*α* ≤ tg*φ*** и ***α* ≤ *φ***.

❖ **Урахування сил тертя під час розв'язання задач на рівновагу.** За наявності сил тертя:

1. До діючих на об'єкт активних сил і реакцій абсолютно гладеньких поверхонь **додаються відповідні сили тертя,** спрямовані вздовж загальної дотичної до контактуючих поверхонь у бік, протилежний можливому зміщенню точки торкання об'єкта відносно опорної шорсткої площини.
2. До рівнянь рівноваги, складених для об'єкта, **додаються вирази для максимальних сил тертя** в кількості, що дорівнює кількості сил тертя.

❖ **Приклад розв'язання задачі на рівновагу з урахуванням сил тертя.** Людина вагою ***G*** збирається встановити легку драбину під кутом **α** до вертикалі (стіни) і піднятися на половину довжини драбини для виконання роботи. Коефіцієнти тертя в точках контакту драбини із підлогою (***A***) та зі стіною (***B***) рівні f_A і f_B відповідно. Визначити граничне значення кута нахилу, у якому драбина з людиною можуть зберігати рівновагу. Вагою драбини знехтувати.



1. Вибираємо об'єкт (людина та драбина), відкидаємо в'язі та замінюємо їхню дію реакціями гладенької поверхні.

2. Додаємо активні сили (силу тяжіння ***G***). Драбина легка, її вагою нехтуємо.

3. Додаємо сили тертя, спрямовані у бік, протилежний до можливого переміщення контактних точок ***A*** і ***B*** драбини під дією доданої активної сили.

4. Складаємо рівняння рівноваги :

$$\sum X_i = 0; \qquad N_B - F_{тр}^{A} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad F_{тр}^{B} - G + N_A = 0;$$
$$\sum M_{iA} = 0; \quad G\frac{AB}{2}\sin\alpha - F_{тр}^{B} AB\sin\alpha - N_B AB\cos\alpha = 0.$$

5. Додаємо вирази для сил тертя:

$$F_{тр}^{A} = f_A N_A; \qquad F_{тр}^{B} = f_B N_B;$$

6. Підстановка виразів з пункту 5 в рівняння рівноваги з простими перетвореннями третього рівняння дає:

$$\sum X_i = 0; \qquad N_B - f_A N_A = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad f_B N_B - G + N_A = 0;$$
$$\sum M_{iA} = 0; \quad G\frac{1}{2}tg\alpha - f_B N_B tg\alpha - N_B = 0.$$

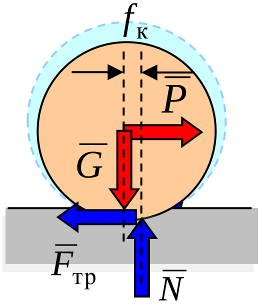
7. Розв`язання перших двох рівнянь дає вирази для нормальних реакцій:

$$N_A = \frac{G}{1 + f_A f_B}; \qquad N_B = \frac{f_A G}{1 + f_A f_B}.$$

8. Підстановка виразів для нормальних реакцій у третє рівняння рівноваги призводить до можливості визначення граничного кута нахилу **α**:

$$tg\alpha = \frac{2 f_A}{1 - f_A f_B}$$

❖ **Опір під час кочення.** Під дією сили зсуву, прикладеної до котка, що лежить на шорсткій поверхні, виникає сила, яка протидіє можливому зміщенню тіла (**сила тертя зчеплення**) з рівноважного положення або його дійсному переміщенню (**сила тертя ковзання**) за його руху і пара сил, момент якої перешкоджає повороту катка (**момент опору коченню**). Виникнення пари сил, яка перешкоджає коченню, пов'язано з деформацією опорної площини, внаслідок якої рівнодіюча нормальних реактивних сил вздовж площадки контакту зміщена від лінії дії сили тяжіння у бік можливого або дійсного руху.



Основні закони тертя кочення:

1. Момент опору коченню завжди спрямований у протилежний бік до того напрямку, в якому прикладені до тіла сили, що прагнуть його повернути, або дійсному повороту під дією цих сил (реактивний характер).

2. Момент опору коченню змінюється від нуля до максимального значення. Максимальний момент опору коченню пропорційний коефіцієнту тертя кочення та силі нормального тиску.

$$\boxed{0 \le M_к \le M_к^{max}}$$

$$\boxed{M_к^{max} = f_к N}$$

3. Коефіцієнт тертя кочення – це постійна величина для даного виду та стану контактуючих поверхонь (***fк = const***).

4. Момент опору коченню у широких межах не залежить від радіуса котка.

Якщо коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірною величиною, то коефіцієнт тертя кочення вимірюється одиницями довжини та дорівнює за величиною зазначеному зміщенню рівнодіючої нормального тиску. Внаслідок деформації коефіцієнт тертя кочення має дуже малу величину і становить, наприклад, для сталевого колеса на сталевій рейці 0,0005 м.

❖ **Просторова довільна система сил** – система, в якій сили не лежать у одній площині та його лінії дії не перетинаються відносно однієї точки.

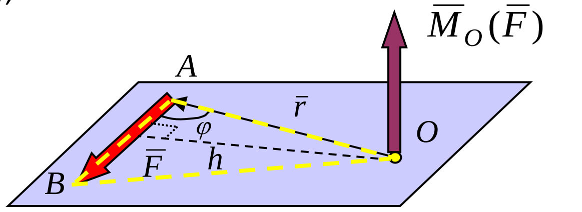
Для розгляду такої системи сил необхідно ввести нові поняття:

1. Момент сили відносно центру у просторі.
2. Момент сили відносно вісі.
3. Момент пари сил у просторі.

❖ **Момент сили відносно центру у просторі** – це векторна величина, яка дорівнює **векторному добутку радіус-вектора, проведеного з центру до точки прикладання сили, та вектора сили.**

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$

За визначенням векторного добутку вектор моменту сили спрямований перпендикулярно до площини, проведеної через центр і силу, у той бік, звідки поворот радіус-вектора до вектора сили на найменший кут видно таким, що відбувається за годинниковою стрілкою.



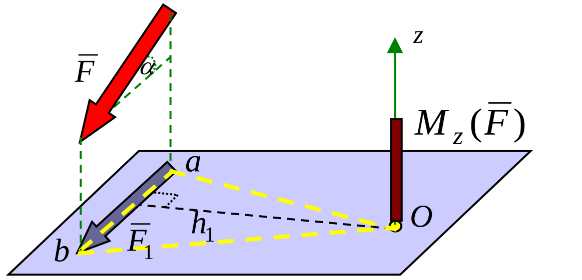
Модуль вектора моменту сили відносно центру дорівнює :

$$M_O(\overline{F}) = rF\sin(\overline{r}, \overline{F}) = Fh$$

Модуль вектора моменту сили відносно центру чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника *ΔOAB*.

❖ **Момент сили відносно вісі** – алгебраїчна величина, яка дорівнює добутку проекції вектора сили на площину, перпендикулярну до осі, на плече цієї проекції відносно точки перетину вісі з площиною, взята зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією сили видно при погляді назустріч осі таким, що відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «–» (мінус) в протилежному випадку.

$$M_z(\overline{F}) = \pm F_1 h_1$$



Момент сили відносно вісі чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника *ΔOab*.

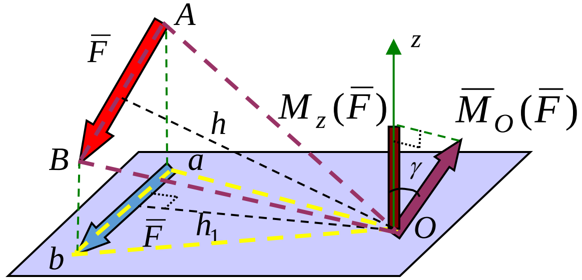
❖ **Зв'язок моменту сили відносно центру та відносно вісі.**

Модуль вектора моменту сили відносно центру, що лежить на вісі ***z***, дорівнює подвоєній площі трикутника ***OAB***:

$$M_O(\overline{F}) = Fh = 2S_{OAB}$$

Момент сили відносно вісі ***z***, дорівнює подвоєній площі трикутника ***Oab***:

$$M_z(\overline{F}) = F_1 h_1 = 2S_{Oab}$$



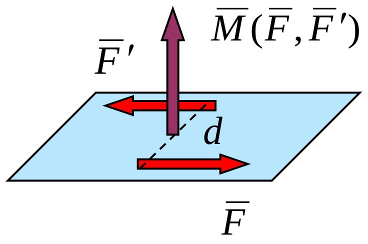
Трикутник ***Oab*** отримано проекцією трикутника ***OAB*** на площину, перпендикулярну вісі ***z***, та його площа пов'язана з площею трикутника ***OAB*** співвідношенням:

$$S_{Oab} = S_{OAB}\cos\gamma$$

де γ - двогранний кут між площинами трикутників.

Оскільки вектор моменту сили відносно точки перпендикулярний площині трикутника ***OAB***, то кут між вектором і віссю дорівнює куту γ. Таким чином, **момент сили відносно вісі є проекція вектора моменту сили відносно центру на цю вісь** :

$$M_z(\overline{F}) = M_0(\overline{F})\cos\gamma$$



- **Момент пари сил у просторі** – вектор, перпендикулярний площині дії пари, спрямований у той бік, звідки обертання площини під дією пари видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.
- Модуль вектора моменту пари дорівнює добутку однієї з сил пари на плече пари : $\boxed{M = Fd = F'd}$

- **Теореми про пари:** (Теореми наводяться без доказів)
- **Про перенесення пари сил у площину, паралельну площині її дії** – Пару сил можна перенести у будь-яку площину, паралельну площині її дії. Кінематичний стан тіла не зміниться.
- **Про еквівалентність пар сил** – Пару сил можна замінити іншою парою сил, якщо їхні моменти геометрично (векторно) рівні. Кінематичний стан тіла не зміниться.
- **Про складання пар сил на площині** – Систему пар сил на площині можна замінити однією парою, момент якої дорівнює геометричній (векторній) сумі моментів вихідних пар. Кінематичний стан тіла не зміниться.
- **Умова рівноваги системи пар сил**

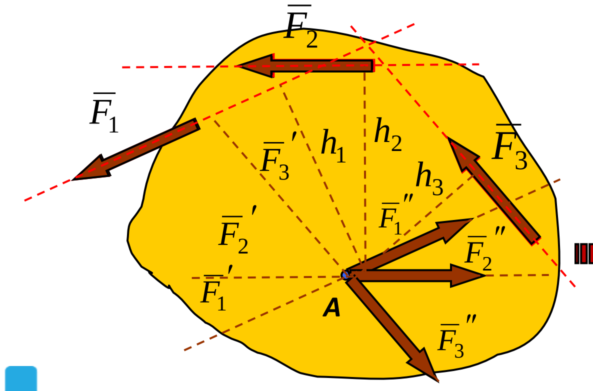
$$\boxed{\overline{M} = \sum \overline{M}_i = 0}$$

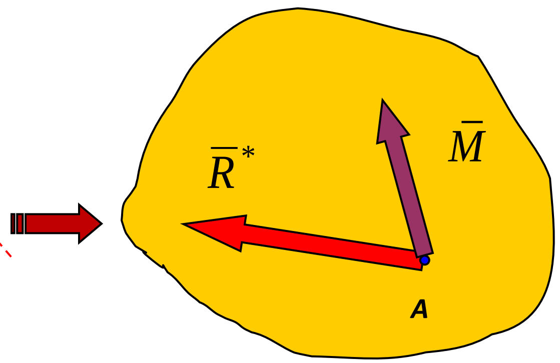
Далі будемо дотримуватися загального плану дослідження системи сил, послідовно вирішуючи три питання :

1. Як спростити систему?
2. Який найпростіший вигляд системи?
3. Які умови рівноваги системи?

- **Приведення плоскої довільної системи сил до заданого центру** – вибираємо довільну точку на площині і кожну з сил переносимо методом Пуансо в цю точку. Замість вихідної довільної системи отримаємо схожу систему сил і систему пар.

На відміну від раніше розглянутої плоскої довільної системи сил, тепер при використанні методу Пуансо приєднані пари сил характеризуються векторами.





Збіжна система сил приводиться до однієї сили, прикладеної в центрі приведення.
Система пар приводиться до одної пари (теорема про складання пар), момент якої дорівнює векторній сумі моментів вихідних сил відносно центру приведення.

У загальному випадку плоска довільна система сил приводиться до однієї сили, яка називається головним вектором і до пари з моментом, рівним головному моменту всіх сил системи відносно центру приведення. :

$\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i}$ **- головний вектор,**

$\boxed{\overline{M} = \overline{M}_A = \sum \overline{M}_{iA}}$ **- головний момент.**

❖ **Аналітичне визначення головного вектора системи –** обчислюється так само, як і раніше визначалась рівнодіюча, через проекції на координатні вісі та одиничні вектори (орти):

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k} + X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k} + ...$$

$$\bar{R}^* = (X_1 + X_2 + ...)\bar{i} + (Y_1 + Y_2 + ...)\bar{j} + (Z_1 + Z_2 + ...)\bar{k} = R_x^*\bar{i} + R_y^*\bar{j} + R_z^*\bar{k}$$

Звідси проекції головного вектора:

$$R_x^* = \sum X_i; \quad R_y^* = \sum Y_i; \quad R_z^* = \sum Z_i;$$

Напрямні косинуси головного вектора :

$$\cos(\bar{R}^*, x) = \frac{R_x^*}{R^*}; \quad \cos(\bar{R}^*, y) = \frac{R_y^*}{R^*}; \quad \cos(\bar{R}^*, z) = \frac{R_z^*}{R^*}.$$

Модуль головного вектора :

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}}$$

❖ **Аналітичне визначення головного моменту системи –** обчислюється аналогічно через проекції на координатні вісі та одиничні вектори (орти):

$$\bar{M}_A = \sum \bar{M}_i = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + ... = M_{1x}\bar{i} + M_{1y}\bar{j} + M_{1z}\bar{k} + M_{2x}\bar{i} + M_{2y}\bar{j} + M_{2z}\bar{k} + ...$$

$$\bar{M}_A = (M_{1x} + M_{2x} + ...)\bar{i} + (M_{1y} + M_{2y} + ...)\bar{j} + (M_{1z} + M_{2z} + ...)\bar{k} = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k}$$

Звідси проекції головного моменту :

$$M_x = \sum M_{ix}; \quad M_y = \sum M_{iy}; \quad M_z = \sum M_{iz};$$

Напрямні косинуси головного моменту :

$$\cos(\bar{M}_A, x) = \frac{M_x}{M_A}; \quad \cos(\bar{M}_A, y) = \frac{M_y}{M_A}; \quad \cos(\bar{M}_A, z) = \frac{M_z}{M_A}.$$

Модуль головного моменту :

$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

❖ **Умовою рівноваги просторової довільної системи сил** є одночасна рівність нулю головного вектора и головного момента системи :

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = 0$$

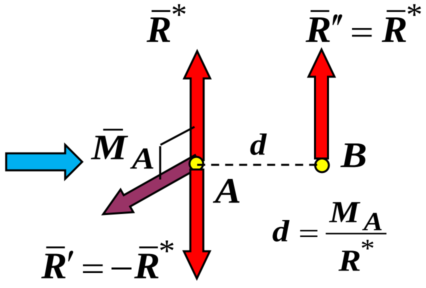
$$\bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA} = 0$$

❖ **Рівняння рівноваги** отримуємо у вигляді системи шести рівнянь із умов рівноваги з використанням виразів для проекцій головного вектора та головного моменту системи сил:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum M_{xi} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; \quad \sum M_{yi} = 0;$$
$$\sum Z_i = 0; \quad \sum M_{zi} = 0.$$

❖ **Можливі випадки приведення просторової довільної системи сил:**

	$\bar{R}^*$	$\bar{M}_A$	Додаткова умова	Найпростіший вигляд системи
1	$\bar{R}^* = 0$	$\bar{M}_A = 0$		Умови рівноваги
2	$\bar{R}^* \neq 0$	$\bar{M}_A = 0$		Рівнодіюча
3	$\bar{R}^* = 0$	$\bar{M}_A \neq 0$		Пара сил
4	$\bar{R}^* \neq 0$	$\bar{M}_A \neq 0$	$\bar{R}^* \perp \bar{M}_A$	Рівнодіюча
			$\bar{R}^* \not\perp \bar{M}_A$	Силовий гвинт (сила та пара сил)



Умова приведення системи до рівнодіючої :

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = R^* M_A \cos(\bar{R}^*, \bar{M}_A) = 0$$

$$\bar{M}_A = 0; \quad => \quad \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = 0$$

$$\bar{R}^* \perp \bar{M}_A; \quad => \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = 0; \ (\cos(\bar{R}^*, \bar{M}_A) = 0)$$

В аналітичній (координатній) формі :

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = R_x^* M_x + R_y^* M_y + R_z^* M_z = 0$$

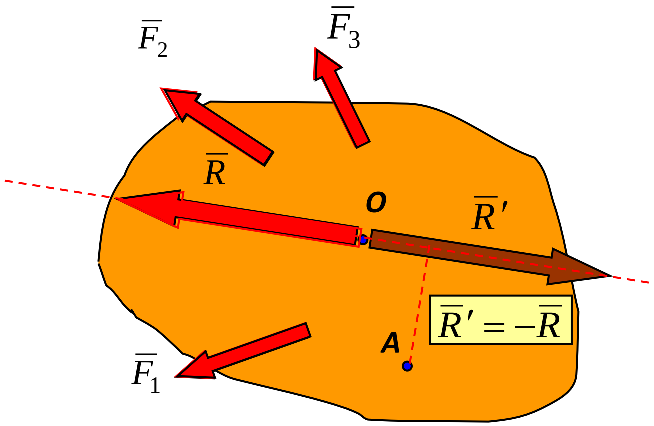
❖ Теореми Варіньйона про моменти рівнодіючої для просторової системи сил :

Якщо система сил має рівнодіючу, то

- **момент рівнодіючої** відносно будь-якого центру дорівнює **геометричній сумі моментів сил системи** відносно того ж центру;
- **момент рівнодіючої** відносно будь-якої вісі дорівнює **алгебраїчній сумі моментів сил системи** відносно тієї ж вісі.

Доказ: Нехай система сил $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$ … приводиться до рівнодіючої, прикладеної в точці ***O***. Така система не перебуває у рівновазі (***R* ≠ 0**).

Урівноважимо цю систему силою ***R'***, рівною рівнодіючій ***R***, направленій вздовж лінії її дії у протилежний бік (аксіома про дві сили).



Система вихідних сил $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$ … та врівноважуючої сили ***R'*** знаходиться в рівновазі і має задовольняти умови рівноваги, наприклад :

$$\boxed{\sum \bar{M}_{iA} + \bar{M}_A(\bar{R}') = 0}$$

Оскільки сила ***R'*** дорівнює рівнодіючій ***R*** та спрямована вздовж лінії її дії у протилежний бік, то $\boldsymbol{M_A(R') = -M_A(R)}$. Підстановка цієї рівності до рівняння рівноваги дає:

$$\boxed{\sum \bar{M}_{iA} - \bar{M}_A(\bar{R}) = 0} \text{ або } \boxed{\bar{M}_A(\bar{R}) = \sum \bar{M}_{iA}}$$

Спроектуємо цю векторну рівність на будь-яку вісь, наприклад, ***x***:

$$\boxed{M_x(\bar{R}) = \sum M_{ix}}$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Теоретична механіка [Текст] : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2002. - 512 с. - ISBN 966-575-184-0
2. Теоретична механіка [Текст] : збірник задач : навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / О. С. Апостолюк [та ін.] ; ред. М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2007. - 400 с. - ISBN 966-575-059-3
3. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. В. Божидарнік, Л. Д. Величко ; Луцький держ. технічний ун-т, Львівський держ. ун-т безпеки життєдіяльності. - Вид. 2-е, допов., переробл. - Луцьк : Надстир'я, 2007. - 504 с. - Бібліогр.: с. 500-501. - ISBN 978-966-517-585-8