МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механічної та біомедичної інженерії

Т.О. Чечель

Методичні вказівки для проведення лабораторних робіт з дисципліни «ПРИКЛАДНІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ПРОГРАМИ І КОМПЛЕКСИ В МАТЕРІАЛОЗНАВСТВІ»

Частина 2

для бакалаврів спеціальності

132 Матеріалознавство

Дніпро

НТУ «ДП»

2022

Чечель Т.О.

Методичні вказівки для проведення лабораторних робіт з дисципліни «Прикладні обчислювальні програми і комплекси в матеріалознавстві» частина 2, для бакалаврів спеціальності 132 «Матеріалознавство» [Електронний ресурс] / Т.О. Чечель; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2022. – 82 с.

Автори
Т.О. Чечель, ас. каф. МБМІ

Розглянуто на засіданні кафедри механічної та біомедичної інженерії №9 від 30 листопада 2022 р.

Погоджено рішенням науково-методичної комісії спеціальності 132 Матеріалознавство, технічні науки (протокол №3 від 19.12.2022 р.).

Розглянуто основні теми лабораторних занять дисципліни «Прикладні обчислювальні програми і комплекси в матеріалознавстві» частина 1, за допомогою програми Maple з прикладами виконання завдань лабораторних робіт для бакалаврів спеціальності 132 «Матеріалознавство».

Відповідальний за випуск асистент кафедри механічної та біомедичної інженерії Т.О. Чечель

ЗМІСТ

ВСТУП

Метою дисципліни «Прикладні обчислювальні програми і комплекси в матеріалознавстві» є формування у майбутніх фахівців сучасного рівня володіння інформаційними технологіями розв'язання задач з різних розділів математики, побудови математичних моделей процесів та явищ, а також інтерактивної візуалізації результатів обчислень; володіння основними принципами роботи з універсальними комп'ютерними математичними системами, набуття практичних навичок розв'язання математичних та інженерних задач з використанням сучасних систем комп'ютерної математики, необхідних для опанування компетентностей бакалавра, що регламентовані освітньо-професійною програмою за спеціальністю 132 Матеріалознавство.

ОЧІКУВАНІ ДИСЦИПЛІНАРНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

1. Демонструвати володіння інформаційними технологіями розв'язання задач з різних розділів математики, побудови математичних моделей процесів та явищ, а також інтерактивної візуалізації результатів обчислень.
2. Демонструвати володіння основними принципами роботи з універсальними комп'ютерними математичними системами, набуття практичних навичок розв'язання математичних та інженерних задач з використанням сучасних систем комп'ютерної математики.

ТЕМА 1. ВИВЧЕННЯ УНІВЕРСАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТУ MAPLE POWER EDITION

При аналітичному розв'язанні деяких математичних задач нині є можливість використовувати програмні пакети, що дозволяють проводити символьні обчислення, які ще називають комп'ютерною алгеброю. Система *Maple* саме відноситься до таких програмних пакетів [2, 3]. Ця система була розроблена групою дослідників університету *Waterloo* (Канада). Всі інші розробники відомих математичних пакетів (*MathCad*, *MatLab*) використовують символьний процесор *Maple*, математичні редактори Scientific Word, MathOffice для виконання розрахунків також ним доповнені.

Система *Maple* дозволяє:

– виконувати складні алгебраїчні перетворення та спрощення над полем комплексно-спряжених чисел;

– знаходити скінченні та нескінченні суми, добутки тощо;

– розв'язувати аналітично та чисельно системи звичайних диференціальних рівнянь;

– розв'язувати аналітично та чисельно деякі класи рівнянь у частинних похідних;

– самостійно створювати команди і таким чином розширювати можливості *Maple* для розв'язання спеціальних задач.

Програмний пакет *Maple* має дуже гарну графіку, тому побудова графіків розв'язань диференціальних рівнянь, як звичайних так і в частинних похідних не є якоюсь проблемою.

Програмний пакет *Maple* має декілька версій. Найчастіше використовуються версії *Maple 11 – Maple 14.* Кожна наступна версія підтримує програми, створені, у попередніх версіях.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1
ВИВЧЕННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ *MAPLE*

1.1 Мета роботи

Ознайомлення з програмним пакетом *Maple*, його інтерфейсом, структурою об'єктів, синтаксисом, операторами.

1.2 Підготовка до виконання роботи

При підготовці до ЛР необхідно опрацювати матеріал за темою „Виконання математичних обчислень за допомогою програмного пакета *Maple*".

Як будь-який Windows–додаток Maple має віконний інтерфейс. У залежності від виконуваних дій цей інтерфейс може відрізнятися і мати вигляд: стандартний, довідкової системи, графічної двовимірної системи, тривимірної графічної системи. Стандартний інтерфейс підтримує концепцію робочих листків („worksheets"), які об'єднують текст, вхідні команди, отриманий розв'язок та графіку в одному документі. Інші віконні інтерфейси трохи відрізняються один від одного в залежності від виконуваних завдань (інтерфейс довідкової системи; інтерфейс графічної двовимірної системи; інтерфейс тривимірної графічної системи).

1.2.1 Стандартний інтерфейс робочого документа Maple буде показаний на екрані (рис. 1.1), якщо користувач працює в робочому документі, то там же знаходиться курсор вводу.

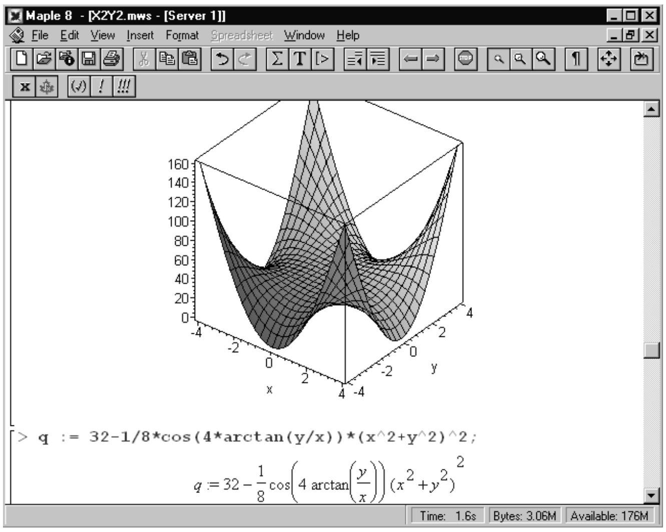


Рисунок 1.1 – Інтерфейс робочого документа

Найчастіше використовувані команди керування робочим документом винесені в піктографічне меню подібних до Windows, є й додаткові, опис яких наведено нижче:

Σ – вставка команди *Maple* безпосередньо в ту частину документа, де знаходиться курсор;

T – вставка і форматування тестового коментарю;

[> – вставка групи виконуваних команд;

– перетворення виділення в підсекцію;

– дія, зворотна попередній;

– крок назад під час роботи з гіперпосиланнями;

– крок вперед під час роботи з гіперпосиланнями;

– переривання обчислення;

– масштаб відображення робочого документа (100 %, 150 % і 200 % відповідно);

– збільшити розмір активного вікна;

– очистити внутрішню пам'ять (restart);

– переключення відображення рядка команд із математичного в *Maple-нотацію* і назад;

– виконувати/не виконувати вираз;

– автоматична корекція синтаксису виразу;

– виконати поточний вираз;

– виконати робочий документ.

1.2.2 Інтерфейс довідкової системи *Maple* має достатньо могутню діалогову систему контекстної допомоги. Інтерфейс довідкової системи може мати вигляд, показаний на рис. 1.2.

Довідкову інформацію можна шукати за темою або командою. Для одержання довідки за конкретною командою потрібно в робочому документі ввести "?" та ім'я команди, або установити курсор на цікавлячу команду і натиснути клавішу **F1**.

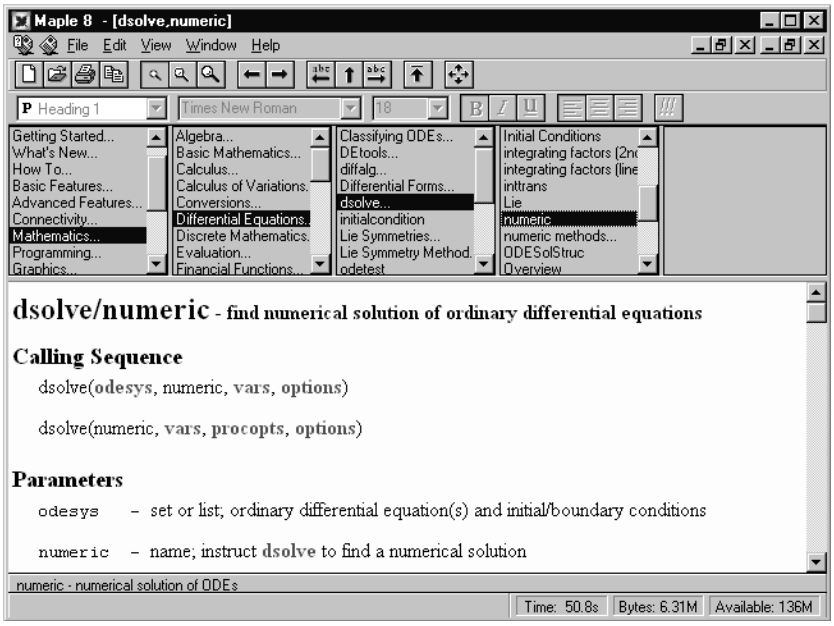


Рисунок 1.2 – Інтерфейс довідкової системи – **Axes** – команди управління стилем координатних осей

1.2.3 Інтерфейс двовимірної графічної системи використовується під час виконання графічних побудов на площині. Командний рядок цього інтерфейсу має такі додаткові пункти (рис. 1.3):

– **Format** – команди форматування;
– **Style** – команди стилю побудови;
– **Legend** – команди редагування і показу легенди;
– **Projection** – команди визначення масштабу зображення;
– **Animation** – команди анімації графіки;
– **Export** – команди збереження графіки у файли різних форматів.

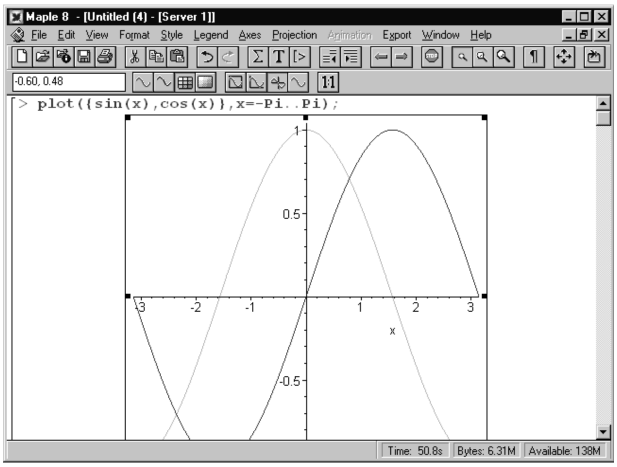
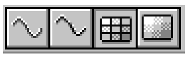
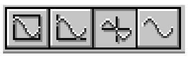


Рисунок 1.3 – Графічний інтерфейс 2-D з початком робочого листка програмного засобу *Maple* 8

Найчастіше використовувані команди керування двовимірною графічною системою винесено у піктографічне меню (рис. 1.4), опис яких наведено нижче.

– координати курсору;

 – стилі побудови;

 – стилі координатних осей;

 – масштабування зображення.

Рисунок 1.4 – Елементи піктографічного меню графічного інтерфейсу

Керувати двовимірною графічною системою можна, використовуючи контекстне меню (рис. 1.5). Воно викликається натисканням правої клавіші миші на полі зображення.

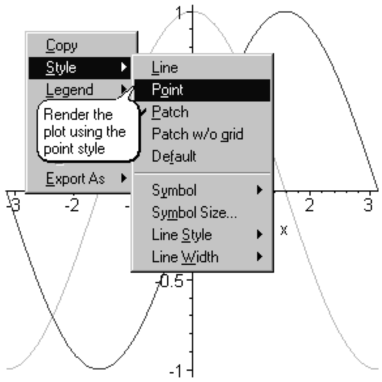


Рисунок 1.5 – Контекстне меню графічного інтерфейсу

1.2.4 Інтерфейс тривимірної графічної системи показано на рис. 1.6, у командному рядку є додатковий пункт для вибору кольору зображення „**Color**”, а також додаткове піктографічне меню (рис. 1.7).

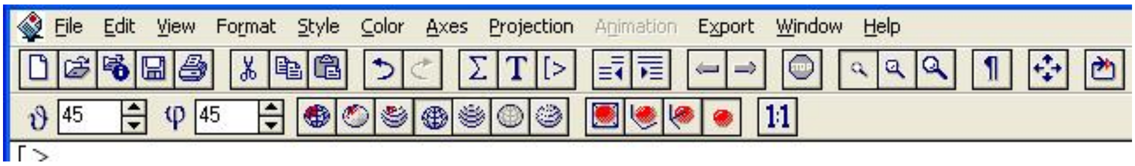
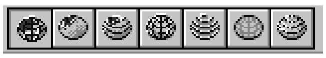


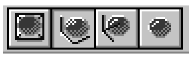
Рисунок 1.6 – Графічний інтерфейс 3-D з початком робочого листка програмного засобу Maple 11

1.2.5 Елементи мови Maple розбиті на чотири складові: символи (characters), вирази (tokens), синтаксис (syntax) та семантика (semantics) – тлумачення.

Символи – це 26 прописних та 26 великих літер латинського алфавіту, 10 цифр та 32 спеціальні символи. Вирази, які ще називають лексемами, – це слова, оператори програмування, строки, натуральні числа та знаки пунктуації.

 – напрямок погляду на об'єкт;

 – стилі побудови;

 – стилі координатних осей;

 – масштабування зображення.

Рисунок 1.7 – Додаткове піктографічне меню тривимірного графічного інтерфейсу

1.2.6 Найпростіші вирази можуть складатися з одного числа або змінної. У загальному випадку вирази Maple можуть складатися з тисяч чисел та імен, які з'єднані за допомогою арифметичних операторів. Арифметичні оператори Maple такі ж самі як і у звичайній математиці.

1.2.7 У Maple використовуються загальноприйняті назви основних математичних функцій (табл. 1.1).

1.2.8 Тригонометричні функції записуються так: **sin(*x*), cos(*x*), tan(*x*), sec(*x*), csc(*x*), cot(*x*), sinh(*x*), cosh(*x*), tanh(*x*), sech(*x*), csch(*x*), coth(*x*), arcsin(*x*), arccos(*x*), arctan(*x*), arcsec(*x*), arccsc(*x*), arccot(*x*), arcsinh(*x*), arccosh(*x*), arctanh(*x*), arcsech(*x*), arccsch(*x*), arccoth(*x*), arctan(*y*, *x*).**

1.2.9 Найважливіші математичні константи π і $i=\sqrt{-1}$ починаються з великих літер **Pi**, **I**.

Крім звичайних знаків математичних операцій використовують: **<, >, >=, <=, =** – логічні операції; ** або ^ – піднесення до степеня; ! – факторіал; **:=** – знак присвоєння; % –результат попередньої операції.

У мові Maple є зарезервовані слова та вирази, які мають спеціальне значення і їх не можна застосовувати як змінні, наприклад, **D**, **I** тощо.

Таблиця 1.1 – Загальноприйняті назви основних математичних функцій

	Опис
abs	модуль
sqrt	квадратний корінь
log	звичайний логарифм
log10	десятковий логарифм
ln	натуральний логарифм
exp	експонента
round	округлення
trunc	відсікання дробової частини
Re	дійсна частина
Im	комплексна частина
argument	аргумент комплексного числа

1.2.10 При роботі з математичними виразами є необхідність виконувати такі операції, як зведення подібних членів, розкриття дужок, розкладання на множники. У пакеті Maple це можна зробити за допомогою спеціальних функцій (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 — Оператори деяких перетворень

Функція	Опис
`simplify`	Спростити вираз
`factor`	Факторизувати (розкласти на множники)
`expand`	Виконати дії (розкрити всі дужки)
`normal`	Привести вираз до "нормального" вигляду
`convert`	Переписати в заданому вигляді
`coeff`	Коефіцієнти виразу
`collect`	Зібрати разом частини виразу

1.2.11 У Maple виконувані математичні вирази вводяться після символу >.

Робота має починатися з директиви – **restart (**почати знову**).**

Кожен вираз має закінчуватися роздільним знаком — крапка з комою або двокрапкою (якщо результат не потрібно виводити на екран).

У виразах не можна використовувати пропуски, якщо потрібно розділити якісь змінні, то використовується кома.

Для продовження запису на наступному рядку використовують комбінацію "**Shift + Enter**".

При натискання клавіші "**Enter**" запропонована дія виконується.

Знайшовши помилку, Maple виводить повідомлення про неї в наступному рядку.

1.3 Порядок виконання роботи

1.3.1 Відкрийте стандартний інтерфейс програмного засобу Maple.

1.3.2 У відкритому вікні інтерфейсу набирайте вирази, які наведено в таблицях у колонці „Оператор”, після символу >. Після набору виразу натискайте на клавішу „**Enter**” і програма виконуватиме запропоновані дії. Щоразу перевіряйте отриманий результат з наведеним результатом у методичці – у таблицях колонка „Отриманий результат”. Якщо отримано інший результат, то перевірте запис виконуваної дії, виправте помилки та виконайте цю дію спочатку. Іноді перед повторним виконання зазначеної дії слід додатково вставити оператор “**restart;**”.

1.3.2.1 Виконайте прості обчислення зазначені у таблицях 1.3 – 1.15.

Таблиця 1.3 – Прості обчислення

Оператор	Отриманий результат
> **restart;** > **1+2;**	3
> **12*4/3;**	16
> **1+3/2;**	5/2
> **1.125/2;**	0.5625000000
> **1/0;**	*Error, numeric exception: division by zero.*

Цілі числа в *Maple* мають найвищий пріоритет, тому 1+3/2=5/2, а не 2.5. Завжди можна отримати результат у вигляді десяткового дробу за допомогою функції перетворення **evalf** (*вираз*, [*точність*]) – табл. 1.4.

Таблиця 1.4 – Оператор обчислення

Оператор	Отриманий результат
> **evalf(1+3/2);**	2.500000000
> **evalf(113/112);**	1.008928571

Зазвичай *Maple* проводить обчислення з точністю до десятого знака після коми, однак, можна задати необов'язковий параметр *точність* у функції **evalf**, можна її як зменшити, так і збільшити – табл. 1.5.

Таблиця 1.5 – Оператор обчислення з вказаною точністю

Оператор	Отриманий результат
> **evalf(113/112,20);**	1.0089285714285714286

Якщо необхідно змінити точність обчислень для усіх виразів, то для цього необхідно присвоїти відповідне значення змінній **Digits** – табл. 1.6.

Таблиця 1.6 – Змінна для визначення кількості розрядів при розрахунку

Оператор	Отриманий результат
> **Digits:=25: evalf(13/7);**	1.857142857142857142857143

Запис деяких математичних констант показано в табл. 1.7. Основа натурального логарифма – ***e***, може бути отримана за допомогою функції **exp.**

Змінні можна записати як вирази, при цьому кожна змінна характеризується типом та ім'ям – набором символів, у яких рядкові і прописні букви розрізняються. Зазвичай, ім'я не має збігатися з існуючими вже іменами – табл. 1.8.

Таблиця 1.7 – Деякі математичні константи

Оператор	Отриманий результат
> **`Pi; evalf(%);`**	π 3.141592653589793238462643
> **`exp(1); evalf(%);`**	e 2.718281828459045235360287
> **`I;`**	*I*
> **`infinity;`**	∞

Таблиця 1.8 – Вид запису змінних

Оператор	Отриманий результат
> **`a:=5; A:=12; b:=15; B:=6;`** **`c:=a/b; C:=A/B;`**	*a*:=5 *A*:=12 *b*:= 5 *B*:= 6 *c*:=1/3 *C*:= 2

Під час запису виразів є дві форми – виконувана та інертна. Якщо потрібно розрахувати значення виразу, то використовується виконувана форма запису (оператор Maple пишеться з малої літери), якщо потрібно записати саме вираз, то це інертна форма запису (оператор Maple пишеться з великої літери) – табл. 1.9.

Якщо індексові (*k*) до моменту обчислення суми вже присвоєне будь-яка значення, то функція **sum** призведе до помилки – табл. 1.10.

Для того щоб уникнути помилок слід використовувати одинарні лапки, як показано у табл. 1.11

Таблиця 1.9 – Вид запису виконуваної та інертної форми виразів

Оператор	Результат	Коментар
> **`sum(k^2,k=1..10);`**	385	Отримання результату

Продовження табл. 1.9

Оператор	Результат	Коментар
> **`Sum(k^2,k=1..10);`**	$\sum_{k=1}^{10} k^2$	Інертна форма запису суми
> **`Sum(k^2,k=1..10)= sum(k^2,k=1..10);`**	$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 385$	Запис результатів розрахунку з використанням як інертної, так і виконуваної форм

Таблиця 1.10 – Приклад некоректного використання індексу

Оператор	Отриманий результат
> **`k:=125;`**	$k := 125$
> `sum(k^2,k=1..10);`	*Error, (in sum) summation variable previously assigned, second argument evaluates to 125 = 1 .. 10*

Таблиця 1.11 – Приклад коректного використання індексу

Оператор	Отриманий результат
> **`sum('m^2','m'=1..10);`**	385

Функція **value** служить для розрахунку інертних форм – табл. 1.12.

Таблиця 1.12 – Приклад обчислення інертної форми

Оператор	Отриманий результат
> **`S:=Sum('n^2','n'=1..10);`**	$S := \sum_{n=1}^{10} n^2$
> **`value(S);`**	385

Багато нескінченних сум сходяться до визначених значень і Maple здатний їх обчислити – табл. 1.13.

Для розрахунку добутків використовуються функції **product (**виконувана форма**)** та **Product (**інертна форма**) —** табл. 1.14.

Таблиця 1.13 – Приклади обчислення нескінченої суми

Оператор	Отриманий результат
`>restart; Sum(1/k!, k=0..infinity)= sum(1/k!, k=0..infinity);`	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$
`> Sum(1/k^2, k=1..infinity)= sum(1/k^2,k=1..infinity);`	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Таблиця 1.14 – Приклад обчислення добутків

Оператор	Отриманий результат
`>restart;Product(k^2,k = 1..5)= product(k^2, k = 1 .. 5);`	$\prod_{k=1}^{5}k^2=14400$

Для розрахунку меж використовуються функції **limit (**виконувана форма**)** та **Limit (**інертна форма**)** – табл. 1.15.

Таблиця 1.15 – Приклади обчислення меж

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> Limit(12*sin(x), x=Pi/4)=limit(12*sin(x), x=Pi/4);`	$lim_{x\to\pi/4}12sinx=6\sqrt{2}$	Межа функції $y=12sinx$ в точці $\pi/4$
`> Limit(1/x,x=0)= limit(1/x,x=0);`	$lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=undefined$	Межа функції $1/x$ у точці $x = 0$
`> Limit(1/x,x=0,right)= limit(1/x,x=0,right);`	$lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$	Межа функції праворуч від нуля
`> Limit(1/x,x=0,left)= limit(1/x,x=0,left);`	$lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$	Межа функції ліворуч від нуля
`> Limit(sin(x)/x,x=0)= limit(sin(x)/x,x=0);`	$lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$	Перша чудова межа

1.3.2.2 Основні типи даних, з якими зустрічаються під час виконання різних обчислень.

Виконайте дії, зазначені у таблицях 1.16 – 1.24.

Для перевірки приналежності виразів до певного типу використовуються дві функції (табл. 1.16): **whattype** (*вираз*) визначає тип виразу; **type** (*вираз*, *тип*) вказує *true* (*істина*), якщо *вираз* належить до зазначеного *типу*, і *false* (*невірно*) – якщо не належить до зазначеного типу.

Цілі числа. Вираз належить до цілого типу (тип ***integer***), якщо він складається з послідовності цифр, які не мають у своєму складі ніяких знаків. *Maple* може працювати з цілими числами практично нескінченної довжини. Числа типу ***integer*** можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Таблиця 1.16 – Типи чисел

Оператор	Отриманий результат
> `whattype(-125);`	*integer*
> `type(-125,integer);`	*true*

Дріб. Дріб (тип ***fraction***) подаються у вигляді: $\frac{a}{b}$, де a – ціле число зі знаком, b – ціле число без знака. У виразі типу ***fraction*** обов'язково присутні два поля: чисельник і знаменник, які можуть бути виділені функцією **op** – табл. 1.17.

Таблиця 1.17 – Виконання дій з дробом

Оператор	Отриманий результат
> `type(-3/7,integer);`	*false*
> `whattype(-3/7);`	*fraction*
> `op(-3/7);`	-3, 7

Числа з плаваючою точкою. Числа з точкою, що плаває, (тип ***float***) можна визначити так (табл. 1.18):

1) послідовність чисел, розділених крапкою:

   а) <*integer*>**.**<*integer*>

   б) <*integer*>**.**

   в) **.**<*integer*>

2) у вигляді: Float(M, E), тобто M*10E.

Таблиця 1.18 – Вид запису чисел з точкою, що плаває

Оператор	Отриманий результат
> `whattype(0.123);`	*float*
> `Float(2,3);`	2000

Строкові типи. Вирази строкового типу (тип ***string***) – це послідовність символів, взятих у подвійні лапки (табл. 1.19).

Таблиця 1.19 – Дії зі строковим типом даних

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **`str:= "Це рядок !";`**	*str*:= "Це рядок !"	Запис строкового типу даних
> **`whattype (str);`**	*string*	Визначення типу даних
> **`length(str);`**	10	Визначення довжини рядка
> **`substring (str,4..10);`**	"рядок"	З рядка можна витягти його частину

Булеві вирази. Булеві вирази (тип ***boolean***) можуть приймати одне з двох значень: *true* (*істина*) або *false* (*неправда*). У булевих виразах можна використовувати такі оператори: **and**, **or**, **xor**, **implies**, **not**, а також оператори відношення <, <=, >, >=, =, <>. Функція **evalb** обчислює складний логічний вираз – табл. 1.20.

Таблиця 1.20 – Дії з булевими виразами

Оператор	Отриманий результат
> **`5>3;`**	3< 5
> **`evalb(5>3);`**	*true*

Послідовності. Послідовність (тип **exprseq**) – набір елементів без дужок, які розділені комами (табл. 1.21). Порожня послідовність позначається **NULL.**

Множини. Множина (тип **set**) – набір елементів, розділених комами та розміщених у фігурних дужках. Для множин дійсні всі правила перетворення, які прийняті у класичній математиці – табл. 1.22.

Оператор **%** використовується для того щоб вказати на те, що дія стосується попереднього виразу; якщо цей оператор вказано двічі, то це означає, що дія стосується виразу, який використовувався перед попереднім.

Списки. Список (тип **list**) – набір елементів, які розділені комами та розміщені у квадратних дужках (табл. 1.23). Список на відміну від множини, може містити однакові елементи.

Таблиця 1.21 – Дії з послідовностями

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> `S:=1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10;`	*S*:= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	Запис послідовності
> `whattype(S);`	*exprseq*	Визначення типу даних
> `S:=seq(i,i=1..10);`	*S*:= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	Запис послідовності за допомогою оператора **seq**
> `$ 2..5;`	2, 3, 4, 5	Запис послідовності за допомогою оператора **$**
> `a[i] $ i = 1..3;`	*a*1, *a*2, *a*3	

Таблиця 1.22 – Дії з множинами

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> `{1, 2, 3, 4, 5, 1};`	{1, 2, 3, 4, 5}	Запис множини
> `whattype(%);`	*set*	Тип даних
> `nops(%%);`	5	Кількість елементів
`>P:={seq(a[i],i=1..5)}`		
> `P:={op(P),a[6]};`	*P*:= {*a*1, *a*2, *a*3, *a*4, *a*5, *a*6}	Додавання елемента до множини *P*
> `P:= subsop(3=NULL,P);`	*P*:= {*a*1, *a*2, *a*4, *a*5, *a*6}	Вилучення третього елемента з множини *P*

Таблиця 1.23 – Дії зі списками

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`>[a, b, c, d];`	[*a*, *b*, *c*, *d*]	Запис списку
> `whattype(%);`	*list*	Визначення типу даних
`>L:=[sin, cos, tan];`	*L*:= [*sin*, *cos*, *tan*]	Запис списку
> `D(L);`	[*cos*, −*sin* , 1+ tan^2]	Операція диференціювання списку

Масиви. Масив (тип **array**) – кінцевий список з цілочисельними індексами. Для створення масиву служить функція **array** – табл. 1.24.

Таблиця 1.24 – Дії з масивами

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> A:=array(1..5);`	A:= array (1.. 5, [ ])	Створення порожнього масиву з п'яти елементів
`> C:=array(1..2, 1..2, [[x^3, 3], [sin(x),2.33]]);`	$C := \begin{bmatrix} x^3 & 3 \\ \sin(x) & 2.33 \end{bmatrix}$	Масив може містити елементи різних типів
`> map(diff,C,x);`	$C := \begin{bmatrix} 3x^2 & 0 \\ \cos(x) & 0 \end{bmatrix}$	Функція виконує будь-яку операцію над всіма елементами масиву, наприклад, диференціювання всіх елементів масиву по x

1.3.2.3 Операції з формулами виконуються за допомогою спеціальних операторів (табл. 1.25 – 1.29). Виконайте дії, зазначені у таблицях 1.25 – 1.29.

Таблиця 1.25 – Приклади виконання дій з формулами

Оператор	Отриманий результат
`> sin(x)^2+cos(x)^2;`	$(\sin x)^2 + (\cos x)^2$
`> simplify(%);`	1
`> cos(x)^5+sin(x)^4+2*cos(x)^2-2*sin(x)^2-cos(2*x);`	$(\cos x)^5 + (\sin x)^4 + 2(\cos x)^2 - 2(\sin x)^2 - \cos(2x)$
`> simplify(%);`	$(\cos x)^4((\cos x + 1))$
`> sqrt(x^2);`	$\sqrt{x^2}$

Функція **normal** звичайно використовується для поліномів і раціональних функцій, хоча іноді може бути застосована і для більш загальних виразів.

Функція **convert** перетворює вираз у різні форми – табл. 1.27.

Виділення коефіцієнтів полінома здійснюється функцією **coeff** (*вираз, змінна, степінь*) – табл. 1.28.

Функція **collect** дозволяє збирати разом коефіцієнти з однаковими степенями. У наступних прикладах збираються коефіцієнти при ln(x) та x (табл. 1.29).

Таблиця 1.26 – Приклади виконання дій з виразами

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> 6*x^2+18*x-24;`	$6x^2+18x-24$	Запис виразу
`> factor(%);`	$6(x+4)(x-1)$	Факторизувати – розкласти вираз на множники
`> ifactor(132);`	$(2)^2(3)(11)$	Розкладання на множники **цілих** чисел
`> (x+1)*(x+2);`	$(x+1)(x+2)$	Запис виразу
`> expand(%);`	x^2+3x+2	Розкриття дужок
`> (x+1)/(x+2);`	$\frac{x+1}{x+2}$	Запис виразу
`> expand(%);`	$\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x+2}$	Виконання дій
`> 1/x+x/(x+1);`	$\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}$	Запис виразу
`> normal(%);`	$\frac{x+1+x^2}{x(x+1)}$	Зведення виразу до єдиного знаменника
`>normal( %%, expanded );`	$\frac{x+1+x^2}{x^2+x}$	Розкриття дужок

Таблиця 1.27 – Приклади виконання дій

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> convert ( 1.23456, fraction );`	$\frac{3858}{3125}$	Перетворення десяткового дробу в натуральний
`> (x^3+x)/ (x^2-1);`	$\frac{x^3+x}{x^2-1}$	Запис виразу у вигляді елементарного дробу
`> convert (%, parfrac, x);`	$x+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$	Розкладання виразу на прості складові

Функція **trigsubs** дозволяє отримати всі еквіваленти виразів у вигляді списку (табл. 1.29).

Вибрати елементи зі списку можна за допомогою функції **op**, вказавши першим параметром номер елемента, який вибирається (табл. 1.29).

Таблиця 1.28 – Виділення коефіцієнтів

Оператор	Отриманий результат
> **`p := 2*x^2 + 3*y^3 - 5;`**	$p \coloneqq 2x^2 + 3y^3 - 5$
> **`coeff(p,x,0);`**	$3y^3 - \quad 5$

Таблиця 1.29 – Вибір елементів з виразів

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **`a*ln(x)-ln(x)*x-x;`**	$a\ln(x) - \ln(x)\, x - x$	Запис виразу
> **`collect(%,ln(x));`**	$(a - x)\ln(x) - x$	Збирання коефіцієнтів з функцією $\ln(x)$
> **`y/x+2*z/x+x^(1/3)-y*x^(1/3);`**	$\frac{y}{x} + \frac{2z}{x} + x^{(1/3)} - yx^{(1/3)}$	Запис виразу
> **`collect(%,x);`**	$(1 - y)x^{(1/3)} + \frac{y + 2z}{x}$	Збирання коефіцієнтів при x

1.3.2.4 Обчислення похідних здійснюється за допомогою функцій **diff** та **Diff**. Першим параметром цих функцій є вираз, який диференціюється, далі – ім'я змінної або послідовність імен змінних.

Виконайте дії, зазначені у таблицях 1.30 – 1.35.

Таблиця 1.30 – Приклади диференціювання

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **`diff(sin(x),x);`**	$cos\,(x)$	Диференціювання функції $sin(x)$ по x
> **`diff(%,x);`**	$-\,sin(x)$	Подвійне диференціювання функції $sin(x)$ по x різними способами
> **`diff(sin(x),x,x);`**	$-\,sin(\,x)$	
> **`diff(sin(x),x$2);`**	$-\,sin\,(x)$	

В останньому прикладі табл. 1.30 для запису послідовності з двох змінних x використовується оператор генерації послідовності – **$**.

Один оператор **diff** може виконати диференціювання за декількома змінними – табл. 1.31.

Для обчислення інтегралів використовуються функції **int** та **Int**. Під час обчислення невизначених інтегралів перший параметр – вираз, який інтегрується, другий – змінна (табл. 1.32).

Таблиця 1.31 – Диференціювання за декількома змінними

Оператор	Отриманий результат
`> Diff(y*sin(x)/cos(y),x,y) = diff(y*sin(x)/cos(y),x,y);`	$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{ysin(x)}{cos(y)}\right)=\frac{cos(x)}{cos(y)}+\frac{ycos(x)\sin(y)}{cos(y)^2}$

Таблиця 1.32 – Приклади інтегрування

Оператор	Отриманий результат
`> Int(sin(x),x)=int(sin(x),x);`	$\int \sin(x)\,dx=-\cos(x)$
`> eq:=exp(-x^2)*ln(x);`	$eq:=e^{(-x^2)}\ln(x)$
`> int(eq,x);`	$\int e^{(-x^2)}\ln(x)dx$

Якщо інтеграл не береться, як в останньому прикладі, то підінтегральний вираз може бути розкладений в степеневий ряд функцією **series**. Розкладемо підінтегральний вираз в ряд до 8-го порядку (табл. 1.33).

Таблиця 1.33 – Розкладання в ряд підінтегрального виразу

Оператор	Отриманий результат
`> series (eq,x,8);`	$\ln(x)-\ln(x)\,x^2+\frac{1}{2}\ln(x)\,x^4-\frac{1}{6}\ln(x)\,x^6+O(x^8)$

Тепер цей ряд можна інтегрувати (табл. 1.34).

Обчислення визначених інтегралів показано в табл. 1.35.

1.3.2.5 Деякі функції Maple крім ядра можуть знаходитися в пакетах розширень, що входять у базове постачання системи. Перед використанням таких функцій ці пакети слід завантажити. Для завантаження усіх функцій будьякого пакета використовується функція **with** (*ім'я_пакета*). Для завантаження обраних функцій пакета – **with** (*ім'я_пакета, функція_1, функція_2, ...*). Деякі функції пакетів розширень можуть перевизначати однойменні функції ядра.

Виконайте дії, зазначені у таблицях 1.36 – 1.39.

Таблиця 1.34 – Інтегрування ряду

Оператор	Отриманий результат
> **int (%,x);**	$x\ln(x) - x - \frac{1}{3}\ln(x)\,x^3 + \frac{x^3}{9} + \frac{1}{10}\ln(x)\,x^5 - \frac{x^5}{50} - \frac{1}{42}\ln(x)\,x^7 + \frac{x^7}{294} + O(x^9)$

Таблиця 1.35 – Обчислення визначених інтегралів

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> Int(sin(x), x=0..Pi/4)= int(sin(x), x=0..Pi/4);`	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$	При обчисленні визначених інтегралів необхідно задавати межі інтегрування
`> evalf (Int(sin(x), x=0..Pi/4));`	0.2928932188	Чисельне обчислення визначеного інтеграла
`> Int(exp(-x), x=0..infinity)= int(exp(-x), x=0..infinity);`	$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(-x)}dx = 1$	Розрахунок інтеграла з нескінченною верхньою межею

Пакет **linalg** містить більш ніж сто функцій для розв'язання задач лінійної алгебри. Розглянемо деякі з них на прикладі двох матриць 3 × 3, створених за допомогою функції **matrix**, аналогічної функції **array** – табл. 1.36.

Деякі функції пакета **student** дозволяють проводити обчислення поетапно (табл. 1.37). Функція **intparts** – інтегрування по частинах. Інтегрування підстановкою – функція **changevar**. В останньому рядку табл. 1.37 межі інтегрування змінилися автоматично.

1.3.2.6 Основною функцією побудови графіків є оператор **plot**. Крім самої функції, графік якої потрібно побудувати, обов'язковим параметром є *область*. *Область* – це вікно у декартовій системи координат, у якому будується графік.

Якщо в *області* завдано тільки діапазон по *x* (як у першому прикладі табл. 1.38), то діапазон по *y* розраховується автоматично. Області можна задавати з використанням констант, у тому числі *infinity*.

Таблиця 1.36 – Приклади використання пакетів лінійної алгебри

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **restart; with(linalg):** > **A := matrix(3,3,[[1,2,3], [4,5,6],[7,8,9]]) ;**	$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$	Запис матриці **A**
> **B := matrix(3,3,[[7,4,3],[1,2,5], [8,9,6]]);**	$B := \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 8 & 9 & 6 \end{bmatrix}$	Запис матриці **B**
> **det(A);**	0	Обчислення визначників матриць **A, B**
> **det(B);**	-116	
> **matadd(A,B);**	$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & 11 \\ 15 & 17 & 15 \end{bmatrix}$	Обчислення суми матриць **A** та **B**

Таблиця 1.37 – Приклади використання пакета **student**

Оператор	Отриманий результат
> **with(student):** > **Int(x*cos(x),x);**	$\int xcos(x)dx$
> **intparts(Int(x*cos(x),x),x);**	$xsin(x) - \int sin(x)dx$
> **value(%);**	$xsin(x) + \cos(x)$
> **Int((cos(x)+1)^3*sin(x),x);**	$\int (\cos(x) + 1)^3 \, sin(x)dx$
> **changevar(cos(x)+1=u,** **Int((cos(x)+1)^3*sin(x),x),u);**	$\int -u^3 \, du$
> **Int(sqrt(1-x^2),x=a...b);**	$\int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx$

`> changevar(x=sin(u), Int(sqrt(1-x^2),x=a...b), u);`	$\int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\,du$

Функція **plot** може мати 27 додаткових параметрів; деякі з них описані нижче. Під час побудови графіків можна вибирати *стиль* інтерполяції. Стиль задається за допомогою ключового слова ***style***. Існують три стилі:

– POINT – графік будується по точках;

– LINE – точки з'єднуються прямими. Використовується звичайно;

– PATCH – застосовується для побудови пофарбованих багатокутників.

Тип лінії може бути заданий параметром ***linestyle***. Є такі стилі:

– SOLID – суцільна лінія;

– DOT – лінія з точок;

– DASH – штрихова лінія;

– DASHDOT – штрих-пунктирна лінія.

Колір лінії задається параметром ***color***, товщина лінії параметром ***thickness*** (див. табл. 1.38)

Під час побудови графіків Maple вибирає масштаби по осях автоматично так, щоб графік був найбільш інформативний, але, використовуючи параметр ***scaling*** (масштабування), можна заборонити використання різних масштабів по осях, як це зроблено в прикладі (див. табл. 1.38).

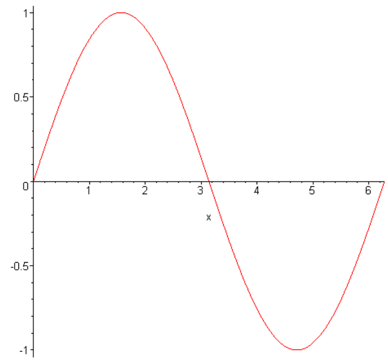
Зазвичай Maple будує графіки в декартовій системі координат. Параметр ***coords*** дозволяє вибрати систему координат. У другому прикладі (табл. 1.39) графік функції $y = x$ побудований у полярній системі координат.

Maple може побудувати декілька графіків на одній координатній площині. Для цього достатньо вказати у функції **plot** множину або список функцій, при цьому для різних графіків автоматично вибираються різні кольори. За необхідності для кожної функції можна вказати бажаний колір і стиль побудови (третій приклад у табл. 1.39).

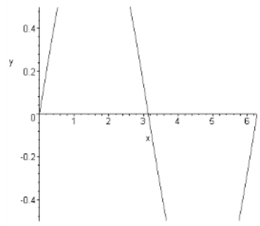
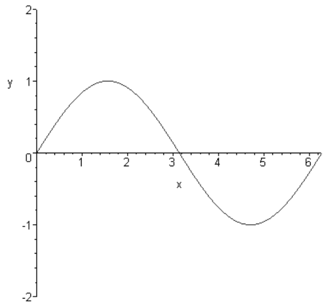
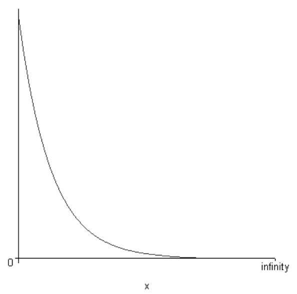
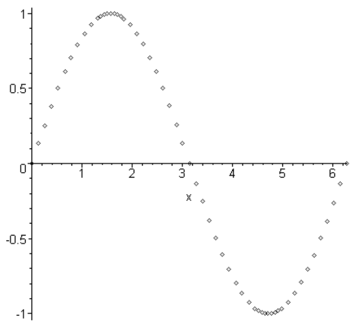
Виконайте дії, зазначені у табл. 1.38 – 1.39.

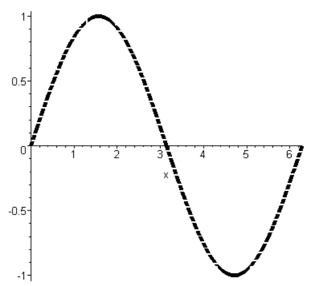
Таблиця 1.38 – Приклади побудови двовимірних графіків

Оператор	Отриманий результат

`> plot(sin(x),x=0..2*Pi);`	

Продовження табл. 1.38

Оператор	Отриманий результат
`>plot(sin(x),x=0..2*Pi, y=-0.5..0.5);`	
`>plot(sin(x),x=0..2*Pi, y=-2..2);`	
`> plot(exp(-x),x=0..infinity);`	
`>plot(sin(x),x=0..2*Pi, style=POINT);`	

> **plot(sin(x),x=0..2*Pi, style=patch, color=blue,thickness=3);**	

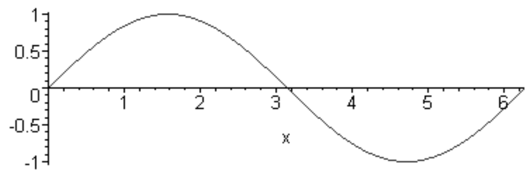
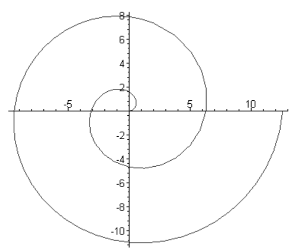
Анімація графіків. Функція **animate** дозволяє створювати анімовані зображення. Ця функція знаходиться в пакеті ***plots***, який попередньо слід підключити. Суть анімації полягає в побудові серії зображень, де кожне зображення (фрейм) пов'язане зі зміною в часі змінної ***t***.

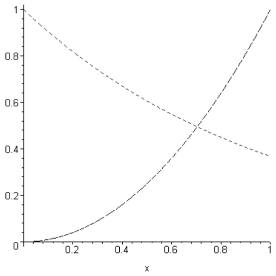
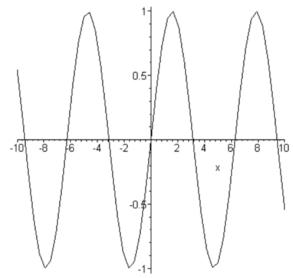
Слід встановити курсор на отримане зображення та виділити його, при цьому з'являється панель програвання анімаційних кліпів. Вона має кнопки керування з позначеннями, прийнятими для магнітофонів (рис. 1.8).

Рисунок 1.8 – Вигляд піктографічного меню під час анімації графіків

Натиснувши кнопку , можна спостерігати анімоване зображення.

Таблиця 1.39 – Різні види двовимірної графіки

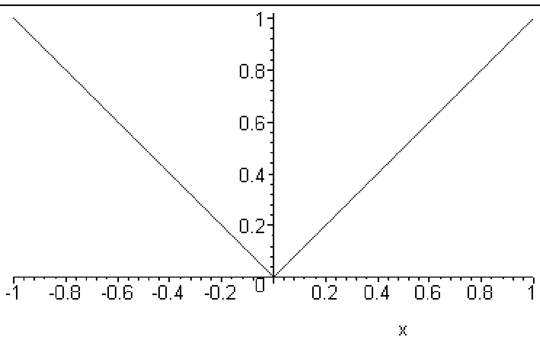
Оператор	Отриманий результат
> **plot(sin(x),x=0..2*Pi, scaling= CONSTRAINED);**	
> **plot(x,x=0..4*Pi, coords=polar, scaling=CONSTRAINED);**	

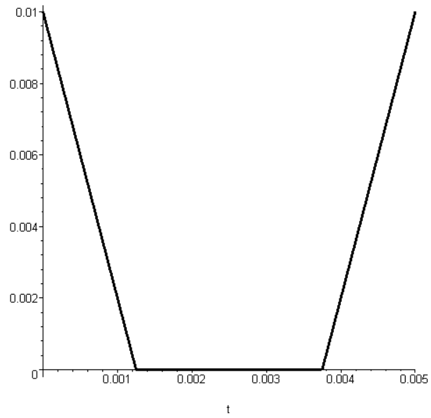
> **plot([x^2,exp(-x)],x=0..1,color=[blue,violet],linestyle=[DASH,DASHDOT]);**	
> **with(plots):animate(sin(x*t),x=-10..10,t=1..2);**	

1.3.2.7 Запис шматочно-безперервних функцій

Ця дія виконується за допомогою оператора **piecewise**. Виконайте дії, зазначені у табл. 1.40.

Таблиця 1.40 – Запис шматочно-безперервної функції

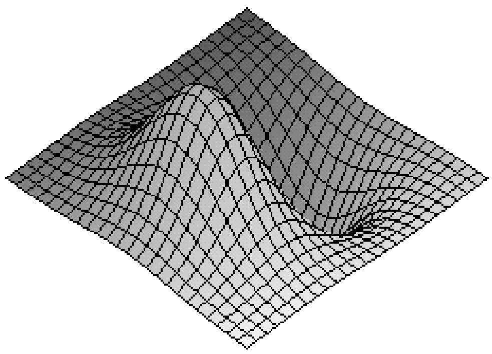
Оператор	Отриманий результат
> **p:=x-> piecewise(x<0,-x,x>0,x);**	$p := x \rightarrow piecewise(x < 0, -x, 0 < x, x)$
> **plot(p(x), x=-1..1,scaling=constrained);**	
> **with(plots):U:=0.01; T:=0.005; u5:=t->piecewise (t<0,0,t<= T/4,U*(1-4*t/T), t<=3*T/4,0, t<=T,U*(4*t/T-3), t>T,0);**	Warning, the changecoords has been redefined U:=0.01 T:=0.005

	$u5 := t \rightarrow piecewise\left(\begin{array}{c} t < 0, \quad 0 \\ t \le \frac{T}{4}, \ U\left(1 - \frac{4t}{T}\right), \\ t \le \frac{3T}{4}, \quad 0, \\ t \le T\,, \ U\left(\frac{4t}{T} - 3\right), \\ T < t, \ 0 \end{array}\right)$
`plot(u5(t),t=0..T, numpoints=400, color=black, thickness=3);`	

1.3.2.8 Maple має велику кількість функцій тривимірної графіки. Багато функцій тривимірної графіки аналогічна раніше розглянутим функція двовимірної графіки. Основна функція тривимірної графіки **plot3d** – табл. 1.41.

Виконайте дії, зазначені у табл.1.41.

Таблиця 1.41 – Приклад побудови тривимірного графіка

Оператор	Отриманий результат
`> plot3d(x*exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2, grid=[25,25]);`	

1.3.2.9 Для аналітичного розв'язання лінійних і нелінійних рівнянь та систем служить функція **solve** – табл. 1.42. При використанні цієї функції як перший параметр записується рівняння, а як другий – змінна, щодо якої рівняння потрібно розв'язати. Якщо права частина рівняння дорівнює нулеві, то знак рівності і нуль можуть бути опущені (другий приклад табл. 1.42). Якщо знайдено кілька розв'язків рівняння, то корені записуються у вигляді послідовності. Аналогічно може бути отриманий розв'язок для нерівності (Open – відкритий діапазон, тобто зазначене в дужках значення до нього не входить) – третій приклад табл. 1.42. Коли першим параметром функції **solve** є множина, яка складається з рівнянь, то Maple розглядатиме цю множину як систему – четвертий приклад у табл.1.42.

1.3.2.10 Розв'язок системи нелінійних рівнянь.

Виконайте дії, зазначені у табл. 1.43.

При розв'язку системи нелінійних рівнянь, попередньо проілюструємо її розв'язок графічно – перший приклад табл. 1.43. У другому прикладі табл. 1.43 присутній вираз RootOf, який означає, що розв'язок отримано в неявній формі. Для отримання розв'язку в явній формі необхідно скористатися функцією **allvalues** – третій приклад табл. 1.43.

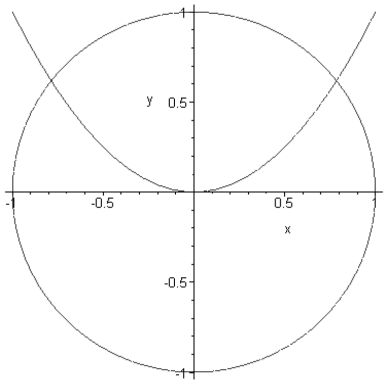
В останньому прикладі після перетворення отриманого розв'язку до виду десяткового дробу, виявилось, що система має два дійсних корені (їх видно на графіку) і два комплексних.

Таблиця 1.42 – Розв'язання рівнянь

Оператор	Отриманий результат
`> solve(a*x^2+b*x+c=0,x);` `> solve(a*x^2+b*x+c,x);`	$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
`> solve(x^2+x>5,x);`	$RealRange\left(-\infty,\ Open\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)\right)$ $RealRange\left(Open\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}\right),\ \infty\right)$
`> solve({x+5*y+z=1, 2*x-y+4*z=4, x+2*y+2*z=12}, {x,y,z});`	$x=-42, \quad y=4, \quad z=23$

Таблиця 1.43 – Розв'язання системи нелінійних рівнянь

Оператор	Отриманий результат

`> plots[implicitplot]({y=x^2,x^2+y^2=1}, x=-1..1, y=-1..1);`	
`> solve({y= x^2,x^2+y^2=1},{x,y});`	$y = RootOf\begin{pmatrix}\_Z + \_Z^2 - 1,\\ label = \_L1\end{pmatrix},$ $x =$ $= RootOf\left(\begin{matrix}-RootOf\begin{pmatrix}\_Z + \_Z^2 - 1,\\ label = \_L1\end{pmatrix} + \_Z^2,\\ label = \_L2\end{matrix}\right)$

Продовження табл. 1.43

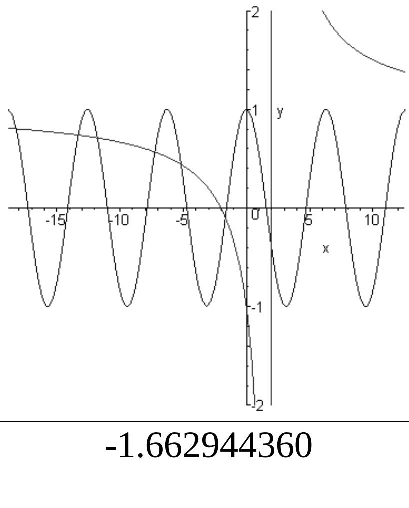
Оператор	Отриманий результат
`> allvalues(%);`	$y = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},\ x = \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}}{2}\right\}$ $y = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},\ x = -\frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}}{2}\right\}$ $y = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2},\ x = \frac{\sqrt{-2 - 2\sqrt{5}}}{2}\right\}$ $y = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2},\ x = -\frac{\sqrt{-2 - 2\sqrt{5}}}{2}\right\}$
`> evalf(%);`	$\{y = 0.6180339880,\quad x = 0.78615113775\},$ $\{y = 0.6180339880,\quad x = -0.78615113775\},$ $\{y = -1.618033988,\quad x = 1.272019650\, I\}$ $\{y = -1.618033988,\quad x = -1.272019650\, I\}$

В останньому прикладі після перетворення отриманого розв’язку до виду десяткового дробу, виявилось, що система має два дійсних корені (їх видно на графіку) і два комплексних.

1.3.2.11 Розвязок рівнянь чисельним методом. Якщо за якихось причин за допомогою функції **solve** не вдалося знайти розв’язок, то можна використати функцію **fsolve** для знаходження розв’язків чисельним методом. Виконайте дії, зазначені в табл. 1.44.

Дано рівняння $\cos(x) - \frac{x+2}{x-2} = 0$. Попередньо для з'ясування кількості коренів побудовано графіки функцій $y = \cos(x)$ та $y = \frac{x+2}{x-2}$ (табл. 1.44). На графіку гіпербола $y = \frac{x+2}{x-2}$ має вертикальну $x = 2$ та горизонтальну $y = 1$ асимптоти. Таким чином, запропоноване для розв’язку рівняння має нескінченну кількість коренів у діапазоні від нуля до –∞. Розв’яжемо рівняння за допомогою функції **fsolve.** Знайдено найближчий до нуля корінь. Для того, щоб знайти наступний корінь функції **fsolve** слід вказати інтервал для пошуку, при цьому вкрай бажано щоб на цьому інтервалі був тільки один корінь, таким чином, знайдемо інший корінь.

Таблиця 1.44 – Розв’язання рівняння чисельним методом

Оператор	Отриманий результат
> **plot({cos(x),(x+2)/(x-2)}, x=-6*Pi..4*Pi, y=-2..2,color=[red, blue]);**	
> **fsolve(cos(x)-(x+2)/(x-2),x);**	-1.662944360
> **fsolve(cos(x)-(x+2)/(x-2),x=-6..-4);**	-5.170382990

1.3.2.12 У тих випадках, коли наукову або технічну проблему можна сформулювати математично, найбільш імовірно, що задача зведеться до одного або декількох диференціальних рівнянь. Це завжди має місце для широкого класу проблем, пов'язаних із силами та рухом.

Виконайте дії, зазначені у табл. 1.45.

Таблиця 1.45 – Використання оператора **unapply** (заміна) у функціях

Оператор	Отриманий результат
`> p := x^2+sin(x)+1;`	$p := x^2 + \sin(x) + 1$
`> f := unapply(p,x);`	$f := x \to x^2 + \sin(x) + 1$
`> f(Pi/12);`	$\frac{\pi^2}{144} + sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1$

1.3.2.13 Розв’язок диференціальних рівнянь

У біології, гідро- і аеродинаміці, теплотехніці, радіотехніці і багатьох інших областях науки і техніки велика кількість задач зводиться до диференціальних рівнянь. Однак, незважаючи на великі зусилля, що більше двох сторіч долають багато математиків світу, кількість типів диференціальних рівнянь, що мають аналітичний розв’язок, залишається дуже обмеженою.

Сьогодні існує ряд проблем, які описуються диференціальними рівняннями, але розв’язок яких ще не знайдено. Усе це призвело до того, що поряд з аналітичними і наближеними методами почали широко застосовуватися чисельні методи розв’язку диференціальних рівнянь, роль яких особливо зросла з використанням ЕОМ.

Maple має засоби для аналітичного, наближеного і чисельного розв’язку як звичайних диференціальних рівнянь (*ordinary differential equations – ODEs*), так і диференціальних рівнянь у частинних похідних (*partial differential equations – PDEs*), а також їхніх систем.

Для розв’язку звичайних диференціальних рівнянь використовується функція: **dsolve**(*ODE*, *y*(*x*), [параметри]), де *ODE* – звичайне диференціальне рівняння; *y*(*x*) – шукана функція.

Функція **dsolve** дозволяє знайти розв’язок багатьох диференціальних рівнянь. Зазвичай **dsolve** намагається знайти точний (аналітичний) розв’язок. Однак, якщо точний розв’язок не може бути отримано, то можна спробувати знайти наближений розв’язок за допомогою розвинення в ряд (параметр *type = series*) або чисельним методом (параметр *type = numeric*).

У табл. 1.46 різними способами подано загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(y(x)) + 3x \cdot y(x) = \exp(-2x^3).$$

Виконайте операції, зазначені у табл. 1.46

Таблиця 1.46 – Розв’язання диференціального рівняння різними способами

Оператор	Отриманий результат і коментар
`>ode:=diff(y(x),x)/(2*x)+3*x*y(x)=exp(-2*x^3);`	$ODE := \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}y(x)}{x} + 3xy = e^{(-2x^3)}$ Коментар: Запис рівняння
`> dsolve(ode);`	$y(x) = (x^2 + \_C1)e^{(-2x^3)}$ Коментар: Загальний розв’язок диференціального рівняння. Диференціальне рівняння містило тільки одну функцію – y (x), щодо якої можливий розв’язок, тому у функції **dsolve** другий параметр може бути опущений.
`> R1:=dsolve({ode, y(0)=5});`	$R1 := y(x) = (x^2 + 5)e^{(-2x^3)}$ Коментар: Знайдено частковий розв’язок за умови, що y (0) = 5.

Продовження табл. 1.46

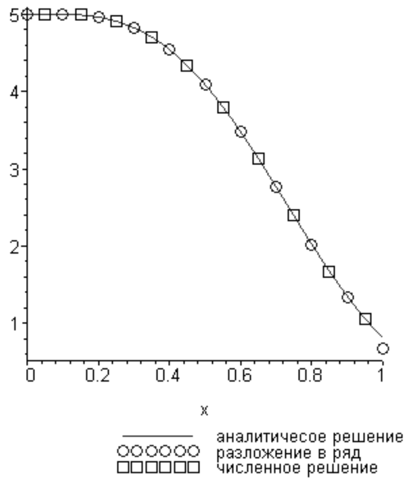
Оператор	Отриманий результат і коментар
`> Order:=16: R2:=dsolve({ode, y(0)=5},y(x), series);`	$R2 := y(x) =$ $= 5 + x^2 - 10x^3 - 2x^5 + 10x^6 + 2x^8 - \frac{20}{3}x^9 -$ $-\frac{4}{3}x^{11} + \frac{10}{3}x^{12} + \frac{2}{3}x^{14} - \frac{4}{3}x^{15} + O(x^{16})$ Коментар: Розв’язок отримано за допомогою рядів. Попередньо установлено максимальну степінь ряду – 16, (зазвичай це значення дорівнює 6).
`> R3:=dsolve({ode, y(0)=5},numeric);`	$R3 := proc(x\_rkf45)\ ...\ end\ proc$ Коментар: Розв’язок отримано чисельним методом. Зазвичай викорис-товується метод Рунге-Кутта четвертого-п'ятого порядку. При чисельному розв’язку функція **dsolve** створює процедуру. З викликом процедури, підставляючи як параметр значення аргументу, виводиться список, що

<table>
<tr><td></td><td>складається з аргументу і відповідного значення функції. Використовуючи отриманий у вигляді процедури розв'язок, організовано список із координат точок у діапазоні x від 0 до 1.</td></tr>
<tr><td>

```
> R3(0.12);
> R3p:=
[seq([i/25+0.02,o
p(2,
op(2,R3(i/25+0.02
)))], i=0..25)]:
```

</td><td>

$$x = 0.12,$$
$$y(x) = 4.99709897276009496$$



</td></tr>
</table>

Продовження табл. 1.46

<table>
<tr><td>Оператор</td><td>Отриманий результат і коментар</td></tr>
<tr><td>

```
> plot
([rhs(R1), R2, R3p],
x=0..1, style=
[line,point,point], color=
[red,blue,
black],symbol=
[box, circle],
symbolsize=
[17,17],legend=["аналітичний
розв'язок", "розвинення в
ряд", "чисельний
розв'язок "]);
> plots
[odeplot]
(R3,0..1);
```

</td><td>Коментар: На одній координатній площині поєднано аналітичне, чисельне рішення та розв'язок за допомогою рядів. У прикладі використано такі параметри функції plot:
– symbolsize – розмір точок (зазвичай – 10);
– legend – напис під рисунком (легенда).
– symbol – спосіб відображення точок.</td></tr>
</table>

1.3.2.14 Розв'язок систем диференціальних рівнянь

При розв'язку систем диференціальних рівнянь першим параметром функції **dsolve** має бути множина або список диференціальних рівнянь, які входять у систему, а у випадку знаходження часткового розв'язку туди також мають входити і додаткові умови. У табл. 1.47 різними способами подано розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t) - x(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = -x(t) - 3y(t),$$

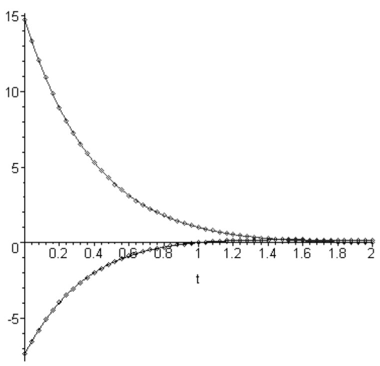
які задовольняють умову $x(1) = 0, y(1) = 1$.

Виконайте дії, зазначені у табл.1.47.

При розв'язку диференціальних рівнянь вище першого порядку буває необхідно задати не тільки значення функції в будь-якій точці, але й значення її похідних. Для цього використовується диференціальний оператор – **D**. Якщо, наприклад, значення похідної функції $y(t)$, у точці t = 0 дорівнює 5, то необхідно записати – **D**(y)(0) = 5. Те саме для другої похідної – **D**(**D**(y))(0) = 5 або (**D**@@2)(y)(0) = 5, для третьої – **D**(**D**(**D**(y)))(0) = 5 або (**D**@@3)(y)(0) = 5 і т.д. Таким чином, похідну *n-го* порядку можна записати як (**D**@@n)(y)(0).

Таблиця 1.47 – Розв'язання системи диференціальних рівнянь різними способами

Оператор	Отриманий результат
`> SYS:= {diff(x(t),t)=y(t)-x(t),diff(y(t),t)=-x(t)-3*y(t), x(1)=0,y(1)=1};`	$SYS := \left\{ y(1) = 1,\ x(1) = 0,\ \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) - 3y(t),\ \frac{d}{dt}x(t) = y(t) - x(t) \right\}$ Коментар: Запис системи
`> R1:= dsolve(SYS, {x(t),y(t)});`	$R1 := \left\{ y(t) = -e^{(-2t)}(-2e^2 + e^2 t),\ x(t) = e^{(-2t)}(-e^2 + e^2 t) \right\}$ Коментар: Аналітичний розв'язок
`> R2:= dsolve(SYS,{x(t), y(t)},numeric);`	$R2 := proc(x\_rkf45) \ldots end\ proc$ Коментар: Чисельний розв'язок

<table>
<tr><td><code>> A:=plot([rhs(R1[1]), rhs(R1[2])], t=0..2, color=[blue,red]):</code></td><td rowspan="3">
Коментар: Виведення графіків на екран. Суцільними лініями показано аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь, а крапками – чисельний.</td></tr>
<tr><td><code>> B:=plots[odeplot](R2,[[t,x(t),color=blue, style=point],[t,y(t),color=red,style=point]],0..2):</code></td></tr>
<tr><td><code>> plots[display](A,B);</code></td></tr>
</table>

Приклад розв'язку диференціального рівняння

$$y'''(t) + 2y'(t) + 12y(t) = 0$$

при додаткових умовах $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$ подано у табл. 1.48.

Виконайте дії, зазначені у табл. 1.48.

1.3.2.15 Розв'язок диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Для розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних використовується функція: **pdsolve**(*PDE*, *u*(*x*, *y*), [параметри]), де *PDE* – диференціальне рівняння у частинних похідних; *u*(*x*, *y*) – шукана функція декількох змінних.

Таблиця 1.48 – Розв'язання диференціального рівняння з додатковими умовами

Оператор	Отриманий результат
`> de:=diff(y(t),t$3)+2*diff(y(t),t)+12*y(t)=0;`	$de := \left(\frac{d^3}{dt^3}y(t)\right) + 2\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 12y(t) = 0$
`> init:=y(0)=4,D(y)(0)=0,(D@@2)(y)(0)=0;`	$init := y(0) = 4$ $D(y)(0) = 0$ $\left(D^{(2)}\right)(y)(0) = 0$

`> dsolve({de,init});`	$$y(t)=\frac{12}{7}e^{(-2t)}+\frac{8}{35}\sqrt{5}e^{t}\sin(\sqrt{5}\,t)+\frac{16}{7}e^{t}\cos(\sqrt{5}\,t)$$

Необов'язкові параметри виконують приблизно таку ж роль, що й у функції **dsolve.** Для розв'язку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, як перші два параметри слід використовувати множини або списки з рівняннями і шуканими функціями.

Типовою особливістю диференціальних рівнянь у частинних похідних і їхніх системах є те, що для однозначного визначення частинного розв'язку потрібно задавати не значення того або іншого скінченого числа параметрів, а деякі функції.

Приклади розвязку диференцільних рівнянь у частинних похідних буде подано у наступних лабораторних роботах.

1.4 Зміст звіту

Звіт має містити:

– назву роботи;

– мету роботи;

– лістинги виконаних завдань до 3 сторінок з найважлівішими (на думку автора) функціями, які використовує дисципліна «Методи математичної фізики в біології та медицині»;

– висновки.

1.5 Контрольні запитання

1. Як виконуються прості обчислення за допомогою програмного засобу Maple?
2. З якими типами даних працює система Maple?
3. Як у системі Maple записати формулу та розв'язати рівняння?
4. Як задаються інтеграли та диференціали?
5. У чому різниця між інертною та виконуваною формами запису?
6. Як працюють з графікою у системі Maple?
7. Як побудувати два графіки у одній площині?
8. Як розв'язують звичайні та диференціальні рівняння у системі Maple?

ТЕМА 2. КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Будь-яке квазілінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними, щодо шуканої функції $u(x,y)$, може бути зведене до однієї з канонічних форм, розв’язок яких достатньо повно вивчено, принаймні, у межах класичних методів математичної фізики [1]. Це наприклад, рівняння виду:

$$A_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+A_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+A_{21}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+A_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+$$
$$+B_1(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+B_2(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0. \qquad (2.1)$$

де $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – функції двох змінних (в окремому випадку постійні коефіцієнти), що мають безперервні похідні до другого порядку включно.

Рівнянню (2.1) відповідає алгебраїчна квадратична форма:

$$g = A_{11}X^2 + (A_{12}+A_{21})XY + A_{22}Y^2 =$$

$$= \frac{1}{A_{11}}[(A_{11}X + A_{12}Y)^2 + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})Y^2], A_{11} \neq 0, \qquad (2.2)$$

де X, Y – деякі змінні;
детермінант якої дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21},$$

зазвичай $A_{12} = A_{21}$, тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - {A_{12}}^2.$$

Квадратична форма (2.2) вважається визначеною, якщо вона зберігає знак при будь-яких змінах X, Y і невизначеною, якщо її знак змінюється.

Знак квадратичної форми залежить від знака **детермінанта.** У загальному випадку, якщо квадратична форма знак змінює, то початкове рівняння належить до гіперболічного типу ($\Delta < 0$), якщо квадратична форма визначена, то рівняння може належати або до параболічного ($\Delta = 0$) типу, або до еліптичного ($\Delta > 0$).

Одним із способів розв'язку диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних є зведення початкового рівняння до однієї з канонічних форм, розв'язок яких відомий. Зведення до однієї з канонічних форм досягається за допомогою спеціальної заміни змінних $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$, що взаємно однозначно відображує точки (x, y) в точки (ξ, η) у відповідних областях, причому якобіан цього перетворення:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тоді рівняння (2.1) у змінних (x, y) можна звести до нового лінійного диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних з невідомою функцією $U(\xi, \eta)$ і незалежними змінними ξ і η, тобто виконати лінійне перетворення $u(x, y) \to U(\xi, \eta)$:

$$\overline{A_{11}}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + 2\overline{A_{12}}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{A_{22}}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \bar{B}\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{2.3}$$

де $\overline{A_{11}} = A_{11}(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2A_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + A_{22}(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2$; (2.4)

$$\overline{A_{12}} = A_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + A_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{2.5}$$

$$\overline{A_{22}} = A_{11}(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + 2A_{12} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_{22}(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2, \tag{2.6}$$

а функція $\bar{B}$ лінійна відносно $U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}$.

Якщо визначити значення змінних, при яких вирази (2.4) – (2.6) обертаються в нуль, то рівняння (2.3), а відповідно і (2.1), стають істотно простішими. З цією метою розглянемо рівняння, аналогічне виразу (2.4) або (2.6), але зі змінною z:

$$A_{11}(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + 2A_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + A_{22}(\frac{\partial z}{\partial y})^2 = 0. \quad (2.7)$$

Для розв'язку рівняння (2.7) складаємо допоміжне характеристичне рівняння (нелінійне рівняння у повних диференціалах)

$$A_{11}(dy)^2 - 2A_{12}dxdy + A_{22}(dx)^2 \quad (2.8)$$

Рівняння (2.8) відносно $\frac{dy}{dx}$ може бути подано системою двох рівнянь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_{12}+\sqrt{A_{12}{}^2-A_{11}A_{22}}}{A_{11}}; \quad (2.9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_{12}-\sqrt{A_{12}{}^2-A_{11}A_{22}}}{A_{11}}. \quad (2.10)$$

Інтегруючи рівняння (2.9) і (2.10) отримуємо їхні загальні розв'язки відповідно: $\varphi(x,y) = const$, $\psi(x,y) = const$. Ці інтеграли є також розв'язками рівняння (2.7) і називаються характеристиками цього рівняння.

Тепер, якщо у рівнянні (2.7) замість довільної змінної z зробити заміну змінних $\xi = \varphi(x,y)$ і $\eta = \psi(x,y)$, то рівняння (2.7) прийме вид виразу (2.4) або (2.6), тобто щодо змінних ξ і η значення $\overline{A_{11}}$ і $\overline{A_{22}}$ обертаються в нуль. Тим самим рівняння (2.3) набуває вигляду:

$$2\overline{A_{12}}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{B}\left(\xi,\eta,U,\frac{\partial U}{\partial\xi},\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = \tilde{B}\left(\xi,\eta,U,\frac{\partial U}{\partial\xi},\frac{\partial U}{\partial\eta}\right). \quad (2.11)$$

Рівняння (2.11) є *першою канонічною формою рівняння гіперболічного типу.* Якщо виконати ще одну заміну змінних виду:

$$\xi = t + \tau,$$
$$\eta = t - \tau,$$

де t та τ – нові змінні;
то прийдемо до *другої канонічної форми рівняння гіперболічного типу*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \breve{B}, \tag{2.12}$$

де $\breve{B} = 4\tilde{B}$.

У випадку, коли детермінант квадратичної форми дорівнює нулю, вирази (2.9) і (2.10) – співпадають, тоді це – рівняння параболічного типу. У цьому випадку маємо одне сімейство характеристик $\varphi(x, y) = const$. Приймемо, що $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$. Хай $\psi(x, y)$ – будь-яка функція, незалежна від функції $\varphi(x, y)$, але така щоб її можна було диференціювати потрібну кількість раз. Зазвичай вибирають $\psi(x, y) = x$ або $\psi(x, y) = y$ за умови не рівності нулю якобіана перетворення $J \neq 0$. При обраній заміні змінних, коефіцієнти $\overline{A_{11}}$ і $\overline{A_{12}}$ обертаються в нуль. Тоді рівняння (2.3) перетворюється до виду:

$$\overline{A_{22}}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \bar{B}\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right),$$

або
$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} = \tilde{B}\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right), \tag{2.13}$$

який називається *канонічною формою рівняння параболічного типу.*

У випадку $\Delta > 0$ праві частини (2.9) і (2.10) – комплексно спряжені. Якщо $\varphi(x, y)$ – комплексний розв'язок (2.9), тоді $\varphi^*(x, y) = const$ – розв'язок рівняння (2.10), де $\varphi^*(x, y)$ – функція, комплексно спряжена з $\varphi(x, y)$ Якщо тепер перейти до комплексним змінних $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \varphi^*(x, y)$, то рівняння (2.1) зведеться до виду:

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right),$$

тобто його вигляд точно такий самий, як і в гіперболічного рівняння (2.11). Щоб залишитися в даній області, зробимо ще одну заміну змінних:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2I}, \tag{2.14}$$

де $I^2 = -1$.

З такою заміною змінних маємо $\overline{A_{11}} = \overline{A_{22}}$, $\overline{A_{12}} = 0$. Таким чином, початкове рівняння (2.1) зводиться до виду:

$$\frac{\partial^2 u(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2}=\Theta(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}), \tag{2.15}$$

який називається *канонічною формою рівняння еліптичного типу.*

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2
ЗВЕДЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ІЗ ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

2.1 Мета роботи

За допомогою універсального математичного пакета Maple звести задане диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку до канонічного вигляду.

2.2 Підготовка до виконання лабораторної роботи

При підготовці до виконання лабораторної роботи потрібно ознайомитися з методичними вказівками щодо виконання даної лабораторної роботи, повторити лекційний матеріал за даною темою, виконати задані завдання за практичними заняттями за даною темою, виконати і захистити попередню лабораторну роботу «Вивчення універсального математичного пакета Maple».

При виконанні лабораторної роботи слід використати систему аналітичних обчислень універсального математичного пакета Maple.

Зведення диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних до канонічного вигляду можна здійснити за допомогою математичного пакета Maple, створивши спеціальний програмний засіб, наприклад, за таким алгоритмом:

– за допомогою спеціалізованого пакета Maple – **with(LinearAlgebra)**: [пакет лінійної алгебри] – задати коефіцієнти досліджуваного рівняння у вигляді елементів матриці-рядка;

– сформувати саме диференціальне рівняння і виділити його ліву частину, використовуючи оператори **diff(*)** і **lhs(*)**;

– визначити матрицю старших коефіцієнтів, тобто коефіцієнтів при старших похідних, використовуючи оператори **linalg[matrix](2,2,[coeff(*)])**;

– обчислити детермінант матриці старших коефіцієнтів за допомогою оператора **simplify(linalg[det](*))**;

– за значенням детермінанта слід встановити тип диференціального рівняння, що очікується;

– сформувати характеристичне рівняння і розв'язати його за допомогою оператора **solve(*)**;

– віднайти характеристики диференціального рівняння;

– за знайденими характеристиками виконати заміну змінних у залежності від типу диференціального рівняння;

– за допомогою спеціалізованого пакета **PDEtools[dchange](*)=0;** звести задане диференціальне рівняння до канонічного вигляду;

– результати роботи зберегти на носії інформації за допомогою стандартних процедур **save, save as** тощо.

2.3 Порядок виконання роботи

Є різні диференціальні рівняння другого порядку в частинних похідних, наприклад (2.16) – (2.18):

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - 3\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0, \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\sin(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - (\cos(x))^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \cos(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0,$$
$$x > 0, y > 0, \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0,\ x > 0, y > 0. \qquad (2.18)$$

У табл. 2.1 – 2.3 подано приклади створення трьох програмних засобів для зведення рівнянь (2.16 – 2.18) до однієї з канонічних форм запису.

2.3.1 Виконайте операції, зазначені у таблицях 2.1 – 2.3. При виконанні дій після введення кожного операнда потрібно скористайтеся клавішею «Enter».

2.3.2 Проаналізуйте задане за варіантом рівняння, виберіть спосіб зведення його до канонічного вигляду, використовуючи приклади, подані в табл.2.1 – 2.3 та методику викладену у п. 2.2.

2.3.3 Зведіть задане рівняння до канонічного вигляду (встановіть тип до якого воно відноситься, підтвердіть це канонічною формою запису отриманого рівняння).

2.3.4 Продемонструйте отриманий вираз викладачеві.

2.3.5 Збережіть створений програмний засіб на носій інформації або занотуйте.

Таблиця 2.1 – Програма для зведення до канонічного виду рівняння (2.16)

Операнд	Отриманий результат	Коментар
`> restart;with (LinearAlgebra): a:=1,-6,10,1,-3;`	$a := 1,-6,10,1,-3$	Задаємо коефіцієнти рівняння
`>equ:=a[1]*diff (u(x,y),x,x)+ a[2]*diff (u(x,y),x,y)+ a[3]*diff (u(x,y),y,y)+ a[4]*diff (u(x,y),x)+ a[5]*diff (u(x,y),y)=0;`	$equ := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right) - -6\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x,y)\right) + +10\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) + +\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right) - 3\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right) = = 0$	Формуємо досліджуване рівняння
`> eq:=lhs(equ);`	$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right) - -6\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x,y)\right) + +10\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) + +\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right) - 3\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right)$	Виділяємо ліву частину рівняння

Продовження табл. 2.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`>A:=linalg [matrix](2,2, [coeff(eq,diff (u(x,y),x,x)), coeff(eq,diff (u(x,y),x,y))/2, coeff(eq,diff (u(x,y),x,y))/2, coeff(eq,diff (u(x,y),y,y))]);`	$A := \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$	Формуємо матрицю старших коефіцієнтів і її дискримінант
`> Delta:= simplify (linalg[det] (A));`	$\Delta = 1$	Розраховуємо значення детермінанта. Оскільки детермінант більше нуля, то тип рівняння – еліптичний.
`>A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2]=0;`	$z^2 + 6z + 10 = 0$	Для випадку $A[1,1] \neq 0$ формуємо характеристичне рівняння відповідно до рівняння (2.8)
`> res1:=simplify ({solve(A[1,1]* z^2-2*A[1,2]*z+ A[2,2],z)});`	$res1 := \{-3 + I, -3 - I\}$	Розв'язуємо сформоване рівняння
`> res2:={seq (dsolve(diff (y(x),x)=res1[i], y(x)),i=1..2)};`	$res2 := \\ = \begin{Bmatrix} y(x) = -(3 - I)x + \_C1, \\ y(x) = -(3 + I)x + \_C1 \end{Bmatrix}$	Створюємо рівняння характеристик
`> res2:=subs(y(x) =y,res2);`	$res2 := \\ = \begin{Bmatrix} y = -(3 - I)x + \_C1, \\ y = -(3 + I)x + \_C1 \end{Bmatrix}$	В отриманому результаті проведемо функціональну заміну $y(x) \equiv y$. Отримали дві комплексні характеристики у вигляді послідовності.

Продовження табл. 2.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> {seq(solve(res2[i],_C1), i=1..nops(res2))};`	$\{y+3x-xI, y+3x+xI\}$	Визначимо два значення константи _C1 з системи рівнянь.
`> itr:=simplify({xi=coeff(%[1], I),eta=%[1]-coeff(%[1],I)*I});`	$itr := \{\xi = -x, \eta = y+3x\}$	Здійснюємо заміну змінних відповідно до (2.14) та спрощуємо вираз.
`> tr:=solve(itr,{x,y});`	$it := \{x = \xi, y = \eta - 3\xi\}$	Встановлюємо зв'язок між новими і старими змінними (x, y)
`> if has(%,RootOf) then tr:=allvalues(%)[1]end if;` `> PDEtools[dchange](tr,eq, itr,[eta,xi], simplify)=0;`	$\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}u(\eta,\xi)\right)+ +\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}u(\eta,\xi)\right)+ +\left(\frac{\partial}{\partial\xi}u(\eta,\xi)\right)=0$	У загальному випадку попередній вираз може мати довільний вид. За допомогою операторів з пакета **PDEtools** зводимо початкове рівняння щодо змінної ξ і η до канонічної форми. Отримане рівняння є рівнянням еліптичного типу.

Таблиця 2.2 – Програма для зведення до канонічного вигляду рівняння (2.17)

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> restart;with(LinearAlgebra): assume(x>0,y>0); a:=1,-2*sin(x), -cos(x)^2,0, -cos(x);`	$a := = 1, -2\sin(x\sim), -cos(x\sim)^2, 0, -\cos(x\sim)$	Формуємо матрицю-рядок початкового рівняння

Продовження табл. 2.2

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`>equu:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+a[3]*diff(u(x,y),y,y)+a[4]*diff(u(x,y),x)+a[5]*diff(u(x,y),y)=0;`	$equ := \left(\frac{\partial^2}{\partial x\sim^2} u(x\sim, y\sim)\right) - -2\sin(x\sim)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\sim \partial y\sim} u(x\sim, y\sim)\right) -cos(x\sim)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y\sim^2} u(x\sim, y\sim)\right) - -\cos(x\sim)\left(\frac{\partial}{\partial y\sim} u(x\sim, y\sim)\right) = 0$	Задаємо саме рівняння
`> eq:=lhs(equ);`	$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x\sim^2} u(x\sim, y\sim)\right) - -2\sin(x\sim)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\sim \partial y\sim} u(x\sim, y\sim)\right) -cos(x\sim)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y\sim^2} u(x\sim, y\sim)\right) - -\cos(x\sim)\left(\frac{\partial}{\partial y\sim} u(x\sim, y\sim)\right)$	Виділяємо ліву частину заданого рівняння
`>A:=linalg[matrix](2,2,[coeff(eq,diff(u(x,y),x,x)),coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),y,y))]);`	$A := \begin{bmatrix} 1 & -sin(x\sim) \\ -sin(x\sim) & -cos(x\sim)^2 \end{bmatrix}$	Обчислюємо матрицю старших коефіцієнтів
`> Delta:=simplify(linalg[det](A));`	$\Delta := -1$	Детермінант менше нуля, тип рівняння – гіперболічний.
`> A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2]=0;`	$z^2 + 2\,sin(x\sim)\,z - -cos(x\sim)^2 = 0$	Характеристичне рівняння при $A[1,1] \neq 0$.

Продовження табл. 2.2

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> res1:=solve(A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2],z);`	$res1 := -\sin(x\sim)+1,$ $-\sin(x\sim)-1$	Отримали дві дійсні різні характеристики.
`> res2:={seq(dsolve (diff(y(x),x)= res1 [i],y(x)),i=1..2)};`	$res2 :=$ $= \begin{cases} y(x) = \cos(x\sim) - x\sim + \_C1 \\ y(x) = \cos(x\sim) + x\sim + \_C1 \end{cases}$	Формуємо і розв'язуємо систему рівнянь
`> res2:=subs(y(x)= y,res2);`	$res2 :=$ $= \begin{Bmatrix} y = \cos(x\sim) - x\sim + \_C1 \\ y = \cos(x\sim) + x\sim + \_C1 \end{Bmatrix}$	Проводимо функціональну заміну $y(x) \equiv y$.
`> {seq(solve (res2[i],_C1), i=1..nops(res2))};`	$\begin{Bmatrix} y - \cos(x\sim) - x\sim, \\ y - \cos(x\sim) + x\sim \end{Bmatrix}$	Визначаємо два значення константи _C1.
`>itr:={xi=(%[1]+%[2])/2, eta=(%[1]-%[2])/2};`	$itr := \begin{Bmatrix} \eta = x\sim \\ \xi = y - \cos(x\sim) \end{Bmatrix}$	Вводимо нову заміну змінних у виді напівсуми і напіврізниці вище знайдених характеристик
`>tr:=solve(itr, {x,y});` `> if has(%,RootOf) then tr:=allvalues(%)[1] end if;`	$tr := \begin{Bmatrix} x = \eta \\ y = \xi + \cos(\eta) \end{Bmatrix}$	Встановлюємо зв'язок між новими і старими змінними (x, y)
`> PDEtools[dchange] (tr,eq,itr,[eta, xi], simplify)=0;`	$-\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\eta,\xi)\right) +$ $+\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta,\xi)\right) = 0$	Зводимо задане рівняння до канонічного вигляду. Отримане рівняння має вигляд рівняння гіперболічного типу другої канонічної форми

Таблиця 2.3 – Програма для зведення до канонічного вигляду рівняння (2.18)

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> restart;with (LinearAlgebra): assume(x>0,y>0);` `> a:=1,-2*x,x^2,0,-2;`	$a := 1, -2x, x^2, 0, -2$	Формуємо матрицю-рядок коефіцієнтів заданого рівняння
`>equ:=a[1]*diff (u(x,y),x,x)+a[2] *diff(u(x,y),x,y) +a[3]*diff(u(x,y), y,y)+a[4]*diff (u(x,y),x)+a[5]* diff(u(x,y),y)=0;`	$equ := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y)\right) - -2x\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y)\right) + +x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)\right) - -2\left(\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)\right) = 0$	Задаємо саме рівняння
`> eq:=lhs(equ);`	$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y)\right) - -2x\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y)\right) + +x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)\right) - -2\left(\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)\right)$	Визначимо його ліву частину
`>A:=linalg[matrix] (2,2,[coeff(eq, diff (u(x,y),x,x)), coeff(eq,diff(u(x,y), x,y))/2,coeff (eq,diff(u(x,y), x,y))/2, coeff(eq, diff(u(x,y),y,y))]);`	$A := \begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & x^2 \end{bmatrix}$	Визначаємо детермінант матриці старших коефіцієнтів.

Продовження табл. 2.3

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> `Delta:=simplify (linalg[det](A));`	$\Delta := 0$	Розраховуємо детермінант матриці. Оскільки він дорівнює нулю, то рівняння відноситься до параболічного типу.
> `A[1,1]*z^2-2* A[1,2]*z+A[2,2]=0;`	$z^2 + 2xz + x^2 = 0$	Записуємо характеристичне рівняння.
> `res1:=solve (A[1,1]*z^2-2* A[1,2]*z+A[2,2], z);`	$res1 := -x, \quad -x$	Знаходимо його дві дійсні однакові характеристики
> `subs(y=y(x), res1[1]);`	$-x$	Вказуємо на цю характеристику
> `res2:=dsolve (diff(y(x),x)=%, y(x));`	$res2 := y(x) = -\frac{x^2}{2} + \_C1$	Розв'язуємо рівняння
> `res2:=subs(y(x)= y,res2);`	$res2 := y = -\frac{x^2}{2} + \_C1$	В отриманому розв'язку проводимо функціональну заміну $y(x) \equiv y$.
> `itr:={xi=solve (res2,_C1),eta=x};`	$itr := \left\{\eta = x,\ \xi = y + \frac{x^2}{2}\right\}$	Заміну змінних проводимо так, щоб якобіан перетворення не дорівнював би нулеві, наприклад, виберемо $\eta = x$. Перевіряємо, що $J \neq 0$.

Продовження табл. 2.3

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **`tr:=solve(itr, {x,y});`** > **`if has(%,RootOf) then tr:=allvalues (%)[1] end if;`**	$tr := \left\{x = \eta, y = \xi - \frac{\eta^2}{2}\right\}$	Встановлюємо зв'язок між новими і старими змінними (x, y)
> **`PDEtools [dchange](tr,eq, itr, [eta,xi], simplify)=0;`**	$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta,\xi)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta,\xi)\right) = 0$	Отримано рівняння параболічного типу

2.4 Зміст звіту

Звіт має містити:

– назву роботи;

– мету роботи;

– дані варіанта (рівняння) за вказівкою викладача;

– програму зведення заданого рівняння до канонічного вигляду та результат виконання програми (вид отриманого рівняння);

– висновки

Таблиця 2.4 – Варіанти завдань

Варі-ант	Рівняння другого порядку в частинних похідних. В області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду.
1	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\sin(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + sin^2(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - ctg(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0, x > 0$
2	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\sin(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + (2 - cos^2(x))\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, x > 0$
3	$3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 3\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
4	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
5	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - 5\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$

Продовження табл. 2.4

Варі-ант	Рівняння другого порядку в частинних похідних. В області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду.
6	$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\exp(x/2)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$
7	$$ctg^2(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2ctg(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} +$$ $$+cosec^2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0, x > 0$$
8	$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$
9	$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 5\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$
10	$$x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$
11	$$2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 4\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 4\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$
12	$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$
13	$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$
14	$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$
15	$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$
16	$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\cos(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \left(3 + sin^2(x)\right)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} -$$ $$-y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$
17	$$9\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - 3\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$

Продовження табл. 2.4

Варі-ант	Рівняння другого порядку в частинних похідних. В області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду.
18	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}+3\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$
19	$x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$
20	$2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}-\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$
21	$3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+3\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$
22	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0,\ \ x>0$
23	$4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}-2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$

2.5 Контрольні запитання та завдання

1. Які є канонічні форми рівнянь математичної фізики?
2. Як за значенням детермінанта класифікуються рівняння математичної фізики?
3. Яка методика зведення рівнянь до канонічного вигляду?
4. Записати канонічні форми рівняння гіперболічного типу.
5. Записати канонічну форму рівняння параболічного типу.
6. Записати канонічну форму рівняння еліптичного типу.
7. До якого типу належить рівняння, якщо його детермінант більше нуля?
8. До якого типу належить рівняння, якщо його детермінант менше нуля?

ТЕМА 3. РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ У НЕОБМЕЖЕНИХ І НАПІВОБМЕЖЕНИХ ОДНОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

Задачі механіки (поперечні коливальні рухи струн, подовжні коливання стрижнів, поперечні коливання мембран, коливання тривимірних структур), задачі фізики (електромагнітні коливання в антенах, рупорах, різних випромінювачах, поширення хвиль в електричних хвилеводах), задачі біофізики (поширення потенціалу дії, передача сигналів по нейронах тощо) описуються рівняннями виду:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \nabla * \left(p(x) * \nabla u(x,t)\right) - q(x) * u(x,t) + F(x,t), \qquad (3.1)$$

де $u(x,t)$ – невідома функція, що залежить від n просторових координат (зазвичай $n = 1,2,3$, тобто $x \equiv x_1, x_2, x_3$) і часу t;

$\rho(x), p(x), q(x)$ – коефіцієнти, які визначають властивості середовища, де відбувається коливальний процес;

$F(x,t)$ – вільний член, що виражає інтенсивність зовнішнього впливу;

$\nabla \equiv \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial x_3}$ – оператор Гамільтона (символічний вектор набла);

$\nabla * \left(p(x) * \nabla u(x,t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(x)\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial x_i}\right)$ – оператор дії.

Розв’язків рівняння (3.1) є безліч. Для того щоб повністю описати хвильовий процес, необхідно, крім самого рівняння (3.1), задати початковий стан коливального процесу (*початкові умови*) і умови на межі області, у якій відбувається коливальний процес (*граничні умови*). Їх ще називають *крайовими умовами – початкові і граничні умови.* Відповідні задачі називають *крайовими задачами*. Розрізнюють такі типи крайових задач для хвильового рівняння:

Задача Коші: задаються початкові умови, область дослідження процесу (область зміни аргументів задачі) звичайно є R^n (n – вимірний дійсний простір) із межею S; граничні умови відсутні.

Так для рівняння (3.1) в одновимірному просторі задача Коші ставиться у такий спосіб: знайти функцію $u(x,t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C^{(1)}(t \geq 0$, що задовольняє дане рівняння в напівпросторі $t > 0$ і початковим умовам при $t = +0$:

$$u(x,t\,)|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \qquad (3.2)$$

При цьому необхідно, щоб виконувалися умови – $F(x,t) \in C(t > 0)$, $\varphi(x) \in C^{(1)}(R^1)$, $\psi(x) \in C(R^1)$ – безперервності і диференціюванню зовнішніх дій і початкових умов.

Мішана задача – задаються як початкові, так і граничні умови. Так для однорідної напівобмеженої струни, у якої, наприклад, лівий кінець закріплений, а правий вільний, із заданою:

– **початковою функцією** відхилення точок струни

$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x)$;

– **початковою швидкостю**

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x)$;

слід знайти розв’язок рівняння (3.1) в області

$B = \{(x,t), t \in (0,T), x \in (0,+\infty), T = const\}$,

якщо на **межі** поведінка розглянутого явища задається деякою функцією часу

$u(x,t)|_{t=0} = \mu(t)$ – *перша крайова задача*,

або $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \upsilon(t)$ – *друга крайова задача*.

Розв’язок задачі Коші для рівняння поширення коливань у необмеженому одновимірному просторі записується формулою Даламбера. Цей розв’язок є єдиним і безперервно залежить від початкових умов:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi, \quad (3.3)$$

де $\varphi(x-at)$ – пряма хвиля (хвиля, яка біжить вправо);
$\varphi(x+at)$ – зворотна хвиля (хвиля, яка біжить вліво);

$\psi(x)$ – початкова функція швидкості зміни коливального процесу, лише в інтервалі $(x - at,\ x + at)$; значення $\psi(x)$ за межами цього інтервалу не має значення під час визначення розв'язку $u(x,t)$;

$F(x,t)$ – зовнішня дія, якщо $F(x,t) \equiv 0$, то такий хвильовий процес називають *вільними коливаннями*.

Одним з варіантів розв'язку першої крайової задачі в напівобмеженому просторі є метод аналітичних продовжень. У такому випадку розв'язок надається у вигляді модифікованих формул Даламбера:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{a+at} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi \\ \left(x > 0,\quad t < \frac{x}{a}\right) \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{a+at} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} dt \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi \\ \left(x > 0,\quad t > \frac{x}{a}\right) \end{cases} \quad , \quad (3.4)$$

де $\mu(t - \frac{x}{a})$ – задана гранична умова;

$\varphi(at - x)$ – відбита хвиля.

Таким чином, розв'язок надається у вигляді падаючої та відбитої від лівого кінця струни хвиль. Розв'язок може бути розривним.

Для другої крайової задачі розв'язок (3.1) надається у виді

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{a+at}\psi(\xi)d\xi+ \\ +\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi, \qquad \left(x>0, t<\frac{x}{a}\right) \\ -a\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}v(z)dz+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+ \\ +\frac{1}{2a}\left[\int\limits_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\right]+ \\ +\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int\limits_{0}^{a(t-\tau)-x}f(\xi,\tau)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int\limits_{0}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi+ \\ +\frac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi \\ \left(x>0, t>\frac{x}{a}\right) \end{cases}, \quad (3.5)$$

де $v(z)$ – задана гранична умова.

Цей розв'язок також може бути розривним. Тільки за умов погодженості початкових та граничних умов $\varphi(x)|_{x=0}=0$, $\psi(x)|_{x=0}=0$, $\mu(t)|_{t=0}$=0, $v(t)|_{t=0}=0$ можна очікувати безперервних розв'язків.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В ОДНОВИМІРНИХ НЕОБМЕЖЕНИХ І НАПІВОБМЕЖЕНИХ ПРОСТОРАХ

3.1 Мета роботи

Навчитися розв'язувати однорідні і неоднорідні хвильові рівняння в необмеженому та напівобмеженому одновимірному просторі за допомогою універсального математичного пакета Maple.

3.2 Підготовка до виконання лабораторної роботи

При підготовці до виконання лабораторної роботи слід ознайомитися з методичними вказівками щодо виконання даної лабораторної роботи, повторити лекційний матеріал за даною темою, виконати вказані завдання по практичних заняттях за даною темою, виконати і захистити попередні лабораторні роботи.

Розв’язок однорідного або неоднорідного хвильового рівняння в необмеженому просторі (задача Коші) або відповідної (першої або другої) крайової задачі в напівобмеженому просторі можна здійснити за допомогою математичного пакета Maple, створивши програмний засіб, наприклад, за таким алгоритмом:

1. Записати хвильове рівняння із заданими початковими умовами (задача Коші) або граничною умовою для напівобмеженої задачі.

2. За допомогою операторів Maple розв’язати поставлену задачу і, якщо задано, виконати анімацію отриманого розв’язку.

3. Результати роботи зберегти на носії інформації за допомогою стандартних процедур **save, save as** і ін.

3.3 Порядок виконання роботи

3.3.1 Виконайте дії, наведені в табл. 3.1 – 3.5.

3.3.2 Скористайтесь наведеними прикладами програм (табл. 3.1 – 3.5) для розв’язку хвильових рівнянь у вигляді формул Даламбера або їхніх модифікацій, створіть програмний засіб для розв’язання поставленої задачі (за варіантом сигналу, зазначеним викладачем – табл. 3.6).

3.3.3 Виконайте анімацію отриманого розв’язку. Продемонструйте результат роботи програми викладачеві.

3.3.4 Збережіть розроблену програму на носії інформації.

Таблиця 3.1 – Програма для розв'язку рівняння про поширення вільних коливань в одновимірному необмеженому просторі (задача Коші), що описується рівнянням вигляду: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0$ з початковими умовами $u(x,0) = \varphi(x,0)$ та $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x)$.

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> restart;` `> PDE:= diff(u(x,t), t,t)=a^2*diff (u(x,t),x,x);`	$PDE := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right)$	Формування однорідного хвильового рівняння
`> pdsolve(PDE);`	$u(x,t) = \_F1(at + x) + \_F2(at - x)$	Розв'язання заданого рівняння
`> u(x,t):= U1(x-a*t)+ U2(x+a*t);`	$u(x,t) = U1(x - at) + U2(at + x)$	Оскільки розв'язок надано у вигляді аналітичних функцій, то необхідно ввести нову функцію
`> u_0(x):= subs(t=0,u(x,t))- phi(x)=0;`	$u\_0(x) := U1(x) + U2(x) - -\varphi(x) = 0$	Для отримання однозначного розв'язку рівняння враховуємо задані початкові умови $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. З цією метою підставимо в останнє отримане рівняння $t = 0$, і запишемо початкові умови, як для шуканої функції, так і для її похідної за часом. Отримали систему рівнянь.
`> ut_0(x):=subs (t=0,diff (u(x,t),t))- psi(x)=0;`	$ut\_0(x) := -D(U1)(x)a + D(U2)(x)a - \psi(x) = 0$	

Продовження табл. 3.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> int(diff(-a*U1(xi),xi)+diff(a*U2(xi),xi)-psi(xi),xi=0..x);`	$\int_0^x \left(-a\left(\frac{d}{d\xi}U1(\xi)\right) + +a\left(\frac{d}{d\xi}U2(\xi)\right) - \psi(\xi)d\xi \right)$	Інтегрування виразу
`> -a*(U1(x)-U2(x))+a*(U1(0)-U2(0))=int(psi(xi), xi=0..x);`	$-a\big(U1(x)-U2(x)\big) + +a\big(U1(0)-U2(0)\big) = \int_0^x \psi(\xi)d\xi$	Оскільки тут подано інтегрування диференціала неявної функції, то можна записати розв'язок, використовуючи відому властивість інтегрування диференціала складної функції з точністю до деякої сталої.
`> -a*(U1(x)-U2(x))=int(psi(xi), xi=0..x)+a*C;`	$-a\big(U1(x)-U2(x)\big) = = \int_0^x \psi(\xi)d\xi + aC$	
`> solve({U1(x)+U2(x)-phi(x)=0, -a*(U1(x)-U2(x))=int(psi(xi),xi = 0 .. x)+a*C}, {U1(x),U2(x)});`	$\left\{ U1(x) = -\frac{1}{2}\frac{-a\varphi(x)+\int_0^x\psi(\xi)d\xi + aC}{a}, U2(x) = = \frac{1}{2}\frac{a\varphi(x)+\int_0^x\psi(\xi)d\xi + aC}{a} \right\}$	Тепер повернемося до системи рівнянь і розв'яжемо отриману систему звичайних рівнянь щодо функцій $U1(x)$ і $U2(x)$. Отримали два розв'язки системи рівнянь, що враховують початкові умови.

Продовження табл. 3.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар

> `u(x,t):=`
`simplify(subs`
`(x=x-a*t,U1(x))+`
`(subs(x=x+a*t,`
`U2(x))));`
	$u(x,t) \coloneqq U1(x-at) + U2(at+x)$	При розв’язку хвильового рівняння у загальному вигляді отримали розв’язок, поданий сумою $U1$ і $U2$, при цьому аргумент $U1$ дорівнює $(x-a*t)$, аргумент $U2$ дорівнює $(x+a*t)$. Тому запишемо суму $U1$ й $U2$ і зробимо заміну змінних для суми $U1$ і $U2$

> `u(x,t):=`
`collect(1/2*`
`(a*phi(x-a*t)-`
`int(psi(xi),xi =`
`0 .. x-a*t)+`
`a*phi(x+a*t)+`
`int(psi(xi),`
`xi = 0 .. x+`
`a*t))/a, a);`
	$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) + \frac{1}{2}\varphi(at+x) + \frac{\frac{1}{2}\int_0^{x-at}\psi(\xi)d\xi}{a} + \frac{\frac{1}{2}\int_0^{at+x}\psi(\xi)d\xi}{a}$	Зведемо подібні члени

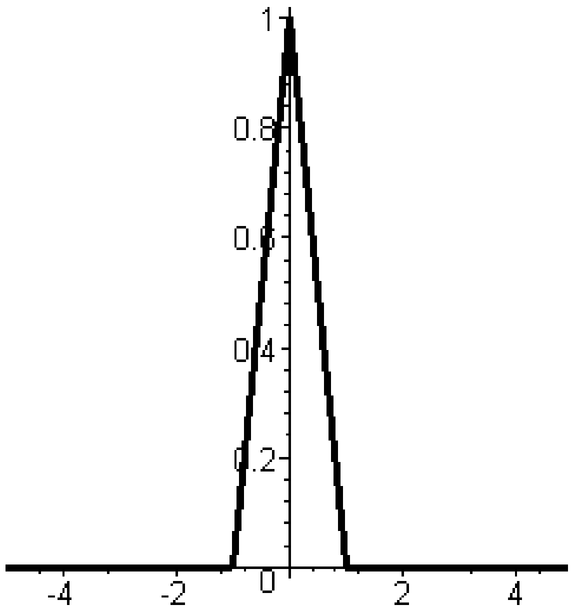
> `u(x,t):=1/2*`
`phi(x-a*t)+`
`1/2*phi(x+a*t)`
`+1/2*int(psi`
`(xi),xi = x-`
`a*t .. x+a*t)/a;`
	$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) + \frac{1}{2}\varphi(at+x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{at+x}\psi(\xi)d\xi\right)$	Запишемо отриманий розв’язок у стандартному виді (формула Даламбера)

Таблиця 3.2 – Запис форми сигналу шматково-безперервною функцією

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> `a:=1;` `L:=1;alpha:=1;`	$a \coloneqq 1$ $L \coloneqq 1$ $\alpha \coloneqq 1$	Запис функції $\varphi(x)$ з параметрами: a – швидкість поширення хвильового процесу, L – половина основи заданого трикутного сигналу, α – амплітуда заданого сигналу

> `phi(x):=`
`x->piecewise`
`(x<=-L,0, x<=0,`
`alpha*`
`(1+x/L),`
`x<=L,alpha*`
`(1-x/L),`
`x>L,0);`
	$\varphi(x) \coloneqq x$
	$\to piecewise\left(\begin{array}{c} x < -L, 0, \\ x < 0, \alpha\left(1+\frac{x}{L}\right), \\ x < L, \alpha\left(1-\frac{x}{L}\right), \\ L < x, 0 \end{array}\right)$
		Задання форми сигналу за допомогою шматково-безперервної функції

> `psi(x):=0;`	$\psi(x) \coloneqq 0$	Початкова швидкість поперечних коливань дорівнює нулеві

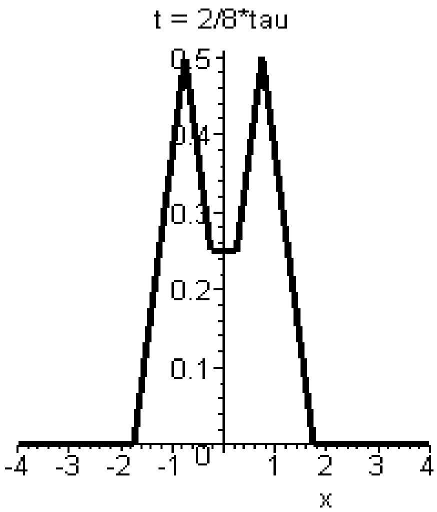
> `plot(phi(x),`
`-5..5,`
`numpoints=400,`
`color=black,`
`thickness=3);`
		Побудуємо початковий розподіл хвильового руху

Таблиця 3.3 – Програма анімації коливального руху

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> u(x,t):=subs (x=x-a*t,1/2* piecewise(x<=-L,0, x<=0,alpha*(1+x/L), x<=L,alpha*(1-x/L), x>L,0))+(subs (x=x+a*t,1/2* piecewise(x<=-L,0, x<=0,alpha*(1+x/L), x<=L,alpha*(1-x/L), x>L,0)));`	$u(x,t) :=$ $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & x-t \le -1 \\ 1+x-t & x-t \le 0 \\ 1-x+t & x-t \le 1 \\ 0 & 1 < x-t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & t+x \le -1 \\ 1+t-x & t+x \le 0 \\ 1-t+x & t+x \le 1 \\ 0 & 1 < t+x \end{pmatrix}$	Сформуємо розв’язок хвильового рівняння для заданої шматково-безперервної функції $\varphi(x)$
`> with(plots): animate(u(x,t), x=-15..15, t=0.01..60, frames=250, thickness=3);`	Після виділення мишею графіка з'являється панель керування зображенням, натиснемо клавішу і переглянемо процес поширення хвильового руху	Подамо отриманий розв’язок у вигляді двовимірних анімованих графіків

`> tau:=3:`
`u_1(x):=subs(t=tau*0,u(x,t)):`
`u_2(x):=subs(t=tau*(1/8),u(x,t)):`
`u_3(x):=subs(t=tau*(2/8),u(x,t)):`
`u_4(x):=subs(t=tau*(3/8),u(x,t)):`
`u_5(x):=subs(t=tau*(4/8),u(x,t)):`
`u_6(x):=subs(t=tau*(5/8),u(x,t)):`
`u_7(x):=subs(t=tau*(6/8),u(x,t)):`
`u_8(x):=subs(t=tau*(7/8),u(x,t)):`
		Далі задамо час $\tau = 3$. Подамо розв’язок для деяких моментів часу .

Продовження табл. 3.3

Оператор	Отриманий результат	Коментар
plot(u_1(x),x=-4..4, title="t = 0", color=black,thickness=3); plot(u_2(x),x=-4..4, title="t=1/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_3(x),x=-4..4, title="t=2/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_4(x),x=-4..4, title="t=3/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_5(x),x=-4..4, title="t=4/8*tau", color=black,thickness=3);		За допомогою двовимірної графіки побудуємо ці розв’язки.
plot(u_6(x),x=-4..4, title="t=5/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_7(x),x=-4..4, title="t=6/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_8(x),x=-4..4, title="t=7/8*tau", color=black,thickness=3);		Один з таких розв’язків подано.

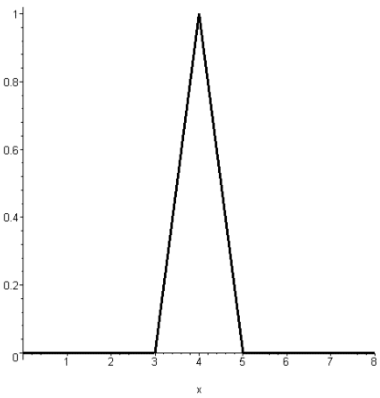
Таблиця 3.4 – Парне або непарне продовження безперервних або шматково-безперервних функцій, заданих на відрізку, за допомогою функції Хевісайда («одинична сходинка»)

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **restart:with (plots):**	`Warning, the name changecoords has been redefined`	
> **HS:=x->(1+signum(x))/2;**	$HS := x \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2}signum(x)$	Задамо функцію Хевісайда
> **HS(1); HS(0); HS(-1);HS(4);**	1 $\frac{1}{2}$ 0 1	Перевіримо її значення в різних точках на прямій
> **evnf:=(f,x) ->HS(x)*f(x)+ HS(-x)*f(-x);** > **oddf:=(f,x) ->HS(x)*f(x)- HS(-x)*f(-x);**	$evnf := (f,x) \to HS(x)f(x) +$ $+HS(-x)f(-x)$ $oddf := (f,x) \to HS(x) -$ $-HS(-x)f(-x)$	Побудуємо непарне і парне продовження будь-якої функції, заданої на відрізку прямої

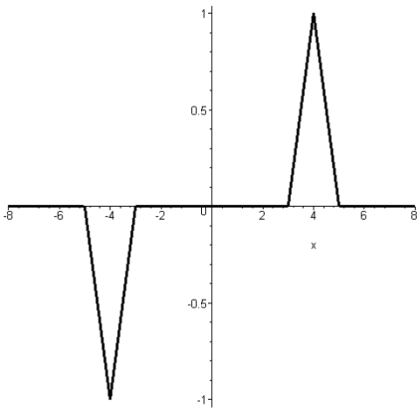
Таблиця 3.5 – Програма розв’язання задачі про поширення вільних коливань в одновимірному півпросторі, що описуються рівнянням вигляду: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $0 \le x < \infty$, $t > 0$ при заданих – початкових $u(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$ і однорідній граничній умові $u(0,t) = 0$.

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **u(x,t):= (phi,psi, x,t,a)- >(phi(x+a*t)+ phi(x-a*t))/2 +int(psi(xi), xi=x-a*t..x+ a*t)/(2*a);**	$u(x,t) := (\varphi,\psi,x,t,a) \to$ $\to \frac{1}{2}\varphi(x+at)$ $+\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ $+\frac{1}{2}\left(\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi\right)$	Розв’язок поставленої задачі можна здійснити методом аналітичних продовжень, відомих для необмеженої задачі. Задамо функцію $u(x,t)$ у вигляді формули Даламбера, де a – швидкість

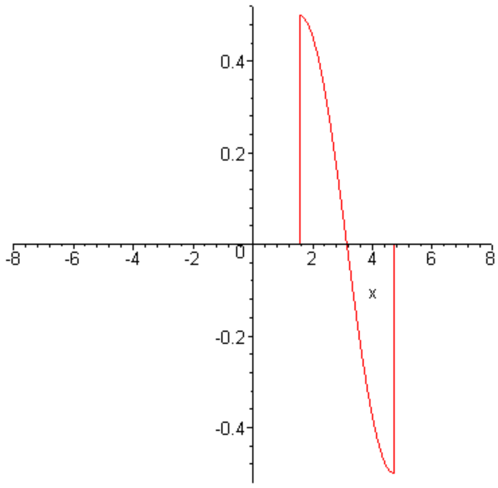
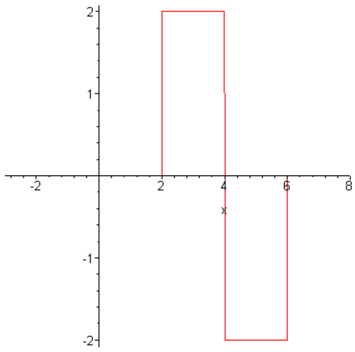
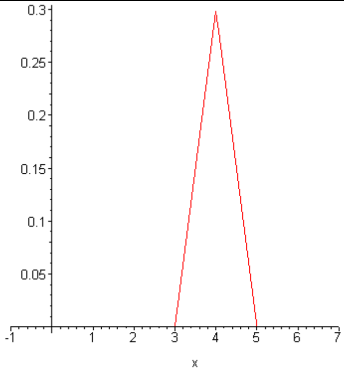
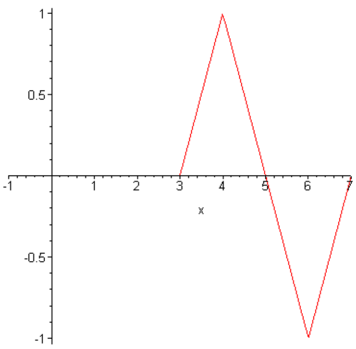
Продовження табл. 3.5

Оператор	Отриманий результат	Коментар
		поширення коливань вздовж ***необмеженої*** осі
> **`a:=-1;`**	$a := -1$	Значення і напрямок швидкості поширення коливань виберемо рівним $a = -1$ – коливальний рух спрямовано вліво (до межі $x = 0$)
> **`phi:= x->piecewise (x<=3,0,x<=4,x -3,x<=5,- x+5,x>5,0); psi(x):=0;`**	$\varphi := x \to piecewise\left(\begin{matrix} x \leq 3, 0, x \leq 4, x-3, \\ x \leq 5, -x+5, 5 < x, 0 \end{matrix}\right)$ $\psi(x) := 0$	Сформуємо форму початкового розподілу коливального руху за допомогою оператора створення шматково-безперервної функції **(piecewise(*))** і розглядатимемо випадок, коли початкова швидкість коливального руху дорівнює нулеві
> **`plot (phi(x), x=0..8, numpoints=400, color=black, thickness=3);`**		Побудуємо початковий розподіл коливального руху
> **`oddphi:= (phi,x)- >(HS(x)* phi(x)-HS(-x)* phi(-x));`**	$oddphi := (\varphi, x) \to$ $\to HS(x)\varphi(x) -$ $-HS(-x)\varphi(-x)$	Створимо **непарне** продовження початкового розподілу для заданої функції $\varphi(x)$ за допомогою функції Хевісайда для врахування заданої граничної умови – $u(0,t) = 0$.

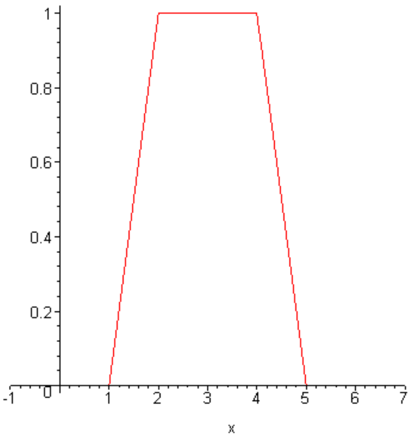
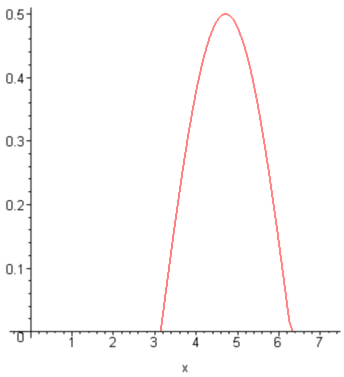
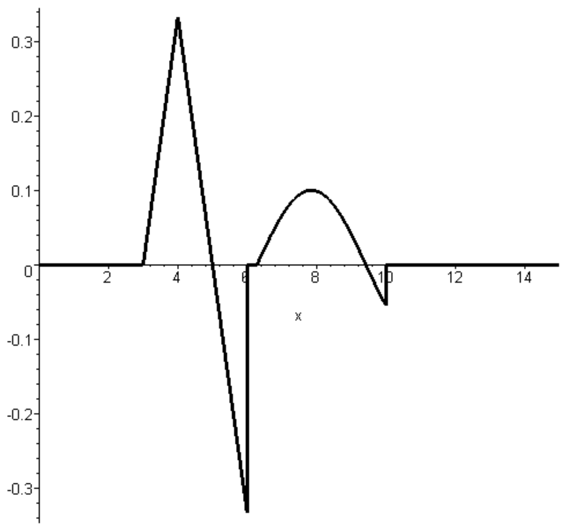
Продовження табл. 3.5

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> plot(oddphi (phi,x),x=-8..8, numpoints=400, color=black, thickness=3);`		Побудуємо його
`> u:=(x,t) ->(oddphi(phi, x+a*t)+ oddphi(phi,x- a*t))/2;`	$u := (x,t) \to$ $\to \frac{1}{2} oddphi(\varphi, x + at) +$ $+ \frac{1}{2} oddphi(\varphi, x - at)$	Повернемося до розв'язуваної задачі. Запишемо розв’язок початкової задачі з урахуванням непарного аналітичного продовження заданого хвильового процесу, що відбувається в напівобмеженому просторі
`> plot3d (u(x,t), x=0..8, t=0..10, orientation=[- 35,45], axes=normal, grid=[50,50]);`		Подамо отриманий розв’язок у вигляді тривимірного графіка
`>animate(u(x,t), x=0..10,t=0..15, numpoints=75, color=RED, frames=150);`		Створимо анімацію хвильового процесу, що відбувається в напів-обмеженому просторі, для якого на межі $u(0,t) = 0$

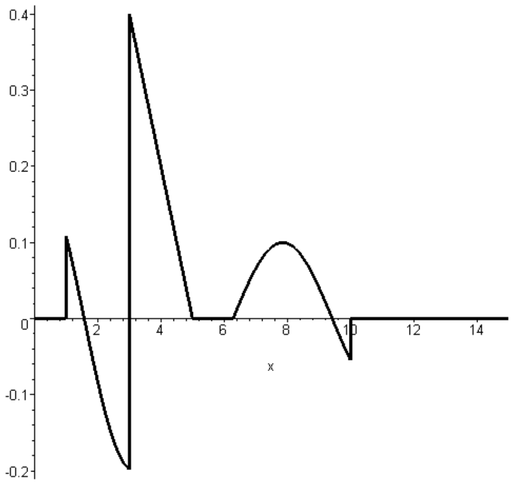
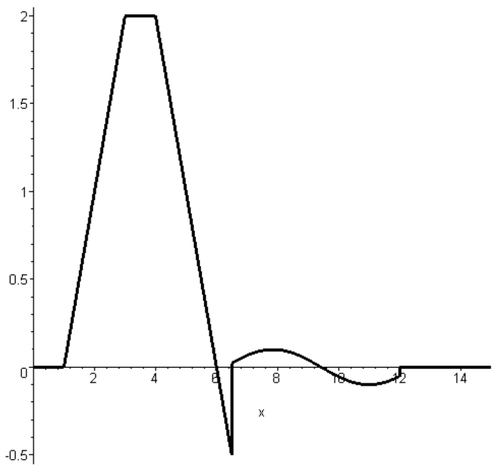
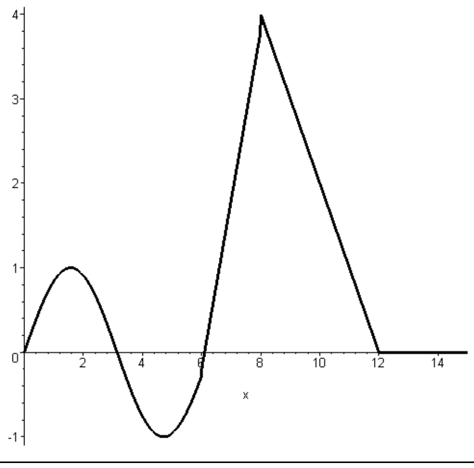
Таблиця 3.6 – Варіанти сигналів

Номер вар.	Форма сигналу	Функція, що описує сигнал на інтервалі, межі інтервалу та амплітуда сигналу
1		$y = a * \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$ $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3}{2}\pi$ $a = 1/2$
2		$y = \begin{Bmatrix} 0, & x < 2 \\ 4 * a, & 2 \le x \le 4 \\ -4 * a, & 4 < x \le 6 \\ 0, & x > 6 \end{Bmatrix}$ $a = 1/2$
3		$y = \begin{Bmatrix} 0, & x \le 3 \\ a * (x - 3), & 3 < x \le 4 \\ a * (-x + 5), & 4 < x \le 5 \\ 0, & x > 5 \end{Bmatrix}$ $a = 1/3$
4		$y = \begin{Bmatrix} 0, & x \le 3 \\ a * (x - 3), & 4 \le x \\ a * (-x + 5), & 6 \le x \\ a * (x - 7), & 7 \le x \\ 0, & 8 \le x \end{Bmatrix}$ $a = 1$

Продовження табл. 3.6

Номер вар.	Форма сигналу	Функція, що описує сигнал на інтервалі, межі інтервалу та амплітуда сигналу
5		$y = \left\{ \begin{matrix} 0, & x < 1 \\ a * (x-1), & x \le 2 \\ a, & x \le 4 \\ a * (-x+5), & x \le 5 \\ 0, & 6 \le x \end{matrix} \right\}$ $a = 1$
6		$y = \left\{ \begin{matrix} 0, & x < \pi \\ a * \sin(x+\pi), & x \le 3\pi \\ 0, & x > 3\pi \end{matrix} \right\}$ $a = 0.5$
7		$y = \left\{ \begin{matrix} 0, & x \le 3 \\ 1/3 * (x-3), & x \le 4 \\ 1/3 * (-x+5), & x \le 6 \\ 0, & x \le 6.3 \\ 0.1 * \sin(x) & x \le 10 \\ 0, & x > 10 \end{matrix} \right\}$ $a = 1$

Продовження табл. 3.6

Номер вар.	Форма сигналу	Функція, що описує сигнал на інтервалі, межі інтервалу та амплітуда сигналу
8		$$y = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 0.2 * \cos(x), & x \le 3 \\ 1/5 * (-x + 5), & x \le 5 \\ 0, & x \le 6.3 \\ 0.1 * \sin(x) & x \le 10 \\ 0, & x > 10 \end{cases}$$ $$a = 1$$
9		$$y = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ x - 1, & x \le 3 \\ a, & x \le 4.2 \\ -x + 6, & x \le 6.5 \\ 0.1 * \sin(x), & x \le 12 \\ 0, & x > 12 \end{cases}$$ $$a = 2$$
10		$$y = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin(x), & x \le 6 \\ a * x - 12.2, & x \le 8 \\ -x + 12, & x \le 12 \\ 0, & x > 12 \end{cases}$$ $$a = 2$$

3.4 Зміст звіту

Звіт має містити:

– назву роботи;

– мету роботи;

– дані варіанта (сигнал – табл. 3.6) за вказівкою викладача;

– програму задання форми сигналу;

– висновки.

3.5 Контрольні запитання та завдання

1. Які задачі біомеханіки та біофізики можуть бути описані хвильовим рівнянням?
2. Записати вид хвильового рівняння за наявності зовнішньої дії.
3. Якщо задано початкові умови для хвильового рівняння, то до якого типу відноситься така крайова задача?
4. Як записуються початкові умови для одновимірної задачі Коші?
5. Якою формулою описується розв'язок хвильового рівняння в необмеженому та напівобмеженому просторі?
6. Чи може розв'язок хвильового рівняння бути розривним?
7. Як за допомогою програми Maple усунути проблему розривності заданої функції?
8. Що описує формула Даламбера?

ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

Сертифікація досягнень студентів здійснюється за допомогою прозорих процедур, що ґрунтуються на об'єктивних критеріях відповідно до Положення університету «Про оцінювання результатів навчання здобувачів вищої освіти».

Досягнутий рівень компетентностей відносно очікуваних, що ідентифікований під час контрольних заходів, відображає реальний результат навчання студента за дисципліною.

Шкали

Оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП» здійснюється за рейтинговою (100-бальною) та інституційною шкалами. Остання необхідна (за офіційною відсутністю національної шкали) для конвертації (переведення) оцінок мобільних студентів.

Шкали оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП»

Рейтингова	Інституційна
90…100	відмінно / Excellent
74…89	добре / Good
60…73	задовільно / Satisfactory
0…59	незадовільно / Fail

Кредити навчальної дисципліни зараховуються, якщо студент отримав підсумкову оцінку не менше 60-ти балів. Нижча оцінка вважається академічною заборгованістю, що підлягає ліквідації відповідно до Положення про організацію освітнього процесу НТУ «ДП».

Засоби та процедури

Зміст засобів діагностики спрямовано на контроль рівня сформованості знань, умінь, комунікації, автономності та відповідальності студента за вимогами НРК до 6-го кваліфікаційного рівня під час демонстрації регламентованих робочою програмою результатів навчання.

Студент на контрольних заходах має виконувати завдання, орієнтовані виключно на демонстрацію дисциплінарних результатів навчання (розділ 2).

Засоби діагностики, що надаються студентам на контрольних заходах у вигляді завдань для поточного та підсумкового контролю, формуються шляхом конкретизації вихідних даних та способу демонстрації дисциплінарних результатів навчання.

Засоби діагностики (контрольні завдання) для поточного та підсумкового контролю дисципліни затверджуються кафедрою.

Види засобів діагностики та процедур оцінювання для поточного та підсумкового контролю дисципліни подано нижче.

Засоби діагностики та процедури оцінювання

<table>
<tr><th colspan="3">ПОТОЧНИЙ КОНТРОЛЬ</th><th colspan="2">ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ</th></tr>
<tr><th>навчальне заняття</th><th>засоби діагностики</th><th>процедури</th><th>засоби діагностики</th><th>процедури</th></tr>
<tr><td>лекції</td><td>контрольні завдання за кожною темою</td><td>виконання завдання під час лекцій</td><td rowspan="3">комплексна контрольна робота (ККР)</td><td rowspan="3">визначення середньозваженого результату поточних контролів;

виконання ККР під час екзамену за бажанням студента</td></tr>
<tr><td rowspan="2">практичні</td><td>контрольні завдання за кожною темою</td><td>виконання завдань під час практичних занять</td></tr>
<tr><td>або індивідуальне завдання</td><td>виконання завдань під час самостійної роботи</td></tr>
</table>

Під час поточного контролю лекційні заняття оцінюються шляхом визначення якості виконання контрольних конкретизованих завдань. Практичні заняття оцінюються якістю виконання контрольного або індивідуального завдання.

Якщо зміст певного виду занять підпорядковано декільком складовим, то інтегральне значення оцінки може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюються викладачем.

За наявності рівня результатів поточних контролів з усіх видів навчальних занять не менше 60 балів, підсумковий контроль здійснюється без участі студента шляхом визначення середньозваженого значення поточних оцінок.

Незалежно від результатів поточного контролю кожен студент під час екзамену має право виконувати ККР, яка містить завдання, що охоплюють ключові дисциплінарні результати навчання.

Кількість конкретизованих завдань ККР повинна відповідати відведеному часу на виконання. Кількість варіантів ККР має забезпечити індивідуалізацію завдання.

Значення оцінки за виконання ККР визначається середньою оцінкою складових (конкретизованих завдань) і є остаточним.

Інтегральне значення оцінки виконання ККР може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюється кафедрою для кожної складової опису кваліфікаційного рівня НРК.

Критерії

Реальні результати навчання студента ідентифікуються та вимірюються відносно очікуваних під час контрольних заходів за допомогою критеріїв, що описують дії студента для демонстрації досягнення результатів навчання.

Для оцінювання виконання контрольних завдань під час поточного контролю лекційних і практичних занять в якості критерію використовується коефіцієнт засвоєння, що автоматично адаптує показник оцінки до рейтингової шкали:

$$O_i = 100\ a/m,$$

де a – число правильних відповідей або виконаних суттєвих операцій відповідно до еталону рішення; m – загальна кількість запитань або суттєвих операцій еталону.

Індивідуальні завдання та комплексні контрольні роботи оцінюються експертно за допомогою критеріїв, що характеризують співвідношення вимог до рівня компетентностей і показників оцінки за рейтинговою шкалою.

Зміст критеріїв спирається на компетентністні характеристики, визначені НРК для бакалаврського рівня вищої освіти (подано нижче).

Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

Опис кваліфікаційного рівня	**Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії**	**Показник оцінки**
Знання		
⬩ концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100
	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
	Рівень знань незадовільний	<60
Уміння/навички		
⬩ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв’язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми; - обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв’язання завдання	95-100
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з негрубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73

<table>
<tr><th>Опис кваліфікаційного рівня</th><th>Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії</th><th>Показник оцінки</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком</td><td>65-69</td></tr>
<tr><td>Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями</td><td>60-64</td></tr>
<tr><td>рівень умінь/навичок незадовільний</td><td><60</td></tr>
<tr><td colspan="3">Комунікація</td></tr>
<tr><td rowspan="2">⬩ донесення до фахівців і нефахівців інформації, ідей, проблем, рішень, власного досвіду та аргументації;
⬩ збір, інтерпретація та застосування даних;
⬩ спілкування з професійних питань, у тому числі іноземною мовою, усно та письмово</td><td>Вільне володіння проблематикою галузі.
Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова:
- правильна;
- чиста;
- ясна;
- точна;
- логічна;
- виразна;
- лаконічна.
Комунікаційна стратегія:
- послідовний і несуперечливий розвиток думки;
- наявність логічних власних суджень;
- доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням;
- правильна структура відповіді (доповіді);
- правильність відповідей на запитання;
- доречна техніка відповідей на запитання;
- здатність робити висновки та формулювати пропозиції</td><td>95-100</td></tr>
<tr><td>Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами.
Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами.
Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами</td><td>90-94</td></tr>
</table>

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п'ять вимог)	74-79
	Задовільне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)	70-73
	Часткове володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев'ять вимог)	65-69
	Фрагментарне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано 10 вимог)	60-64
	Рівень комунікації незадовільний	<60
Відповідальність і автономія		
⬩ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами;	Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на: 1) управління комплексними проектами, що передбачає: - дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
⬩ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах; ⬩ формування суджень, що враховують соціальні, наукові та етичні аспекти; ⬩ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп; ⬩ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії	самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію; - здатність до роботи в команді; - контроль власних дій; 2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає: - обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів; - самостійність під час виконання поставлених завдань; - ініціативу в обговоренні проблем; - відповідальність за взаємовідносини; 3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає: - використання професійно-орієнтовних навичок; - використання доказів із самостійною і правильною аргументацією; - володіння всіма видами навчальної діяльності; 4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає: - ступінь володіння фундаментальними знаннями; - самостійність оцінних суджень; - високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок; - самостійний пошук та аналіз джерел інформації	
	Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)	90-94

Опис кваліфікаційного рівня	**Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії**	**Показник оцінки**
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Курс лекцій: Навч. посібник. – К.:Либідь, 1993.– 248 с.

2. Головенко В. М. Методи математичної фізики при моделюванні процесів у біології та медицині в задачах і прикладах: навч. посіб. / В. М. Головенко; МОН України, Харк. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2010. – 168 с.

3. Триус Ю.В. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін / Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама–Україна, 2005. – 400 с.

4. Манзон Б.М. Maple V.Power Edition.– М.:Филинъ, 1998. – 240 с.

Чечель Тарас Олегович

Методичні вказівки для проведення лабораторних робіт
з дисципліни
«ПРИКЛАДНІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ПРОГРАМИ І КОМПЛЕКСИ В МАТЕРІАЛОЗНАВСТВІ»
Частина 2
для бакалаврів спеціальності 132 «Матеріалознавство»

Видається в авторській редакції

Електронний ресурс Авт. арк. 3,3

Розроблено і видано в
Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.