УДК 534.2 https://doi.org/10.33271/crpnmu/72.186

© О.О. Азюковський[1], Д.В. Гаркавенко[1], В.З. Грищак[1], К.А. Зіборов[1], С.О. Федоряченко[1], М.В. Однорал[2]
[1] Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна
[2] ДП НВО «Павлоградський хімічний завод»

АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ІЗ ЗМІННИМИ ЗА ЧАСОМ ПАРАМЕТРАМИ ЗА УМОВИ РЕАКЦІЇ ЗОВНІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

© O. Aziukovskyi[1], D. Harkavenko[1], V. Gristchak [1], K. Ziborov[1], S. Fedoriachenko[1], M. Odnoral[2]
[1] Dnipro University of Technology, Dnipro, Ukraine
[2] SE RIC "Pavlograd chemical plant"

ANALYTICAL APPROACH TO SOLVING THE PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS OF SYSTEMS WITH TIME-VARYING PARAMETERS UNDER THE CONDITIONS OF THE EXTERNAL ENVIRONMENT REACTION

Мета. Розвиток і застосування аналітичних (у тому числі наближених) методів аналізу нелінійних математичних моделей динаміки систем, які мають складну поведінку у зв'язку із наявністю характеристик, залежних від часу, є актуальним для вирішення різного класу інженерних задач. Тому, метою даної роботи встановлено математичне моделювання задач нелінійної динаміки таких систем, яке дозволяє визначити траєкторію руху системи за часом та інші динамічні характеристики у відповідності до їх постановки.

Методика. Спираючись на сучасні досягнення аналітичних, зокрема асимптотичних і чисельних методів дослідження на базі існуючих програмних комплексів, розглянуто можливість нелокального дослідження і формування достатньо повного представлення про особливості поведінки нелінійних систем. Для досягнення мети розглядається математична модель нелінійної динаміки системи із змінними за часом властивостями за умови, що реакція середовища залежить від функції швидкості руху системи степені n.

Результати. Розв'язок деяких інженерних задач нелінійної динаміки систем із змінними характеристиками у часі залежності для $n = 2$ і систем, реакція зовнішнього середовища яких може бути функцією як цілої, так і дрібної степені, дозволяють визначити траєкторію руху системи за часом та інші динамічні характеристики у відповідності до їх постановки.

Наукова новизна. Отримано аналітичну залежність функції швидкості динамічного процесу системи із змінними параметрами за часом для найбільш застосованому у практиці параметру нелінійності досліджуваної системи $n = 2$ для функції реакції зовнішнього середовища.

Практична значимість. Здобуті аналітичні залежності можуть бути застосовані у достатньо широкому колі досліджень. Застосовані наближені аналітичні методи на основі асимптотичних підходів на базі гібридних методів (збурення, фазних інтегралів у поєднанні із принципом Гальоркіна). Застосування асимптотичних і чисельних методів дослідження на базі існуючих програмних комплексів, відкриває можливість нелокального дослідження і формування достатньо повного представлення про особливості поведінки нелінійних систем із змінними характеристиками матеріалів, зокрема, композитних та функціонально градієнтних.

Ключові слова: *нелінійна динаміка систем, змінні параметри, аналітичний розв'язок.*

Вступ. Не зважаючи на бурхливий розвиток і застосування чисельних методів розрахунку, зокрема методів скінченних і граничних елементів та їх модифікацій [1–5], значна увага науковців та інженерів-дослідників приділяється розвитку і застосуванню аналітичних (у тому числі наближених) методів аналізу нелінійних математичних моделей динаміки систем, які мають складну поведінку у зв'язку із наявністю характеристик, залежних від часу [2, 3]. Необхідність дослідження таких моделей стимулюється як загально науковими потребами, зокрема внутрішнім розвитком теорії моделювання з пізнанням закономірностей нелінійних процесів і застосуванням їх у інформаційних технологіях, так і багато чисельними прикладними задачами проектування складних інженерних систем [4].

Необхідно зазначити, що достатньо широке розповсюдження для вирішення практичних проблем застосовується спеціалізоване програмне забезпечення ведучих фірм-розробників, зокрема системи: ANSYS, ABAQUS, MPP LS-DYNA, HyperWorks, ProEngineer та інші, які регулярно обговорюються, зокрема, на Міжнародних конференціях «Паралельні Комп'ютерні Технології» (PaCT).

Спираючись на сучасні досягнення аналітичних, зокрема асимптотичних і чисельних методів дослідження на базі існуючих програмних комплексів, відкривається можливість нелокального дослідження і формування достатньо повного представлення про особливості поведінки нелінійних систем.

До такого класу систем можна віднести вироби із змінними характеристиками матеріалів, зокрема, композитних та функціонально градієнтних. Останнім часом особлива увага приділяється проблемі локальної взаємодії жорсткісних та пружно-пластичних тіл із зовнішнім середовищем, що дозволяє досліджувати процеси, які відбуваються у шаруватих конструкціях з метою виявлення закономірностей та подальшої розробки методики розрахунку їх параметрів [6].

У даній роботі розглядається математична модель нелінійної динаміки системи із змінними за часом властивостями за умови, що реакція середовища залежить від функції швидкості руху системи степені n.

Основна частина. Аналітичний розв'язок задачі нелінійної динаміки системи із змінними параметрами.

Основне диференціальне рівняння задачі динаміки досліджуваної системи береться у формі:

$$m(t)\frac{d^2S}{dt^2}+a(t)\frac{ds}{dt}=-k_0\varphi(t)V(t)^n=F(t) \tag{1}$$

де $m(t)$ – маса досліджуваної системи; $s=s(t)$ – відстань, що пройдена системою за час t; $V(t)$ – швидкість руху системи; $F(t)$ – сила опору середовища, яка протидіє на систему; $a(t)$ – функція внутрішнього затухання динамічного процесу.

За умови задачі сила опору середовища дорівнює:

$$-k_0\varphi(t)V(t)^n = F(t)$$

де $-k_0f(t)$ – коефіцієнт пропорційності, залежний від часу; n – ступінь швидкості руху системи, а знак мінус указує на те, що сила спрямована проти руху на зменшення швидкості системи $V(t)$.

Поділивши обидві частини рівняння (1) на $m(t)$, отримується основне рівняння досліджуваної задачі у формі:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + a(t)\frac{ds}{dt} = -\frac{k_0}{m_0\psi(t)}\varphi(t)V(t)^n, \tag{2}$$

де:

$$V(t) = \frac{ds}{dt}, \quad \bar{a}(t) = \frac{a(t)}{m(t)}. \tag{3}$$

З урахуванням (3) основне рівняння задачі набуває вигляду у формі рівняння Бернуллі [7]:

$$\frac{dV(t)}{dt} + \bar{a}(t)V(t) = -Af(t)V^n(t), \tag{4}$$

де:

$$A = \frac{k_0}{m_0}, \quad f(t) = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}. \tag{5}$$

У відповідності до процедури інтегрування диференціального рівняння Бернуллі, розділивши обидві частини рівняння на $V^n(t)$, отримуємо рівняння у формі:

$$V(t)^{-n}\frac{dV(t)}{dt} + \bar{a}(t)V^{1-n}(t) = -Q(t), \tag{6}$$

де:

$$Q(t) = Af(t). \tag{7}$$

Застосовуючи заміну шуканої функції $V(t)$ у формі:

$$z(t) = V(t)^{1-n}. \tag{8}$$

Відповідно перша похідна функції $z(t)$ за часом t буде мати вигляд:

$$\frac{dz(t)}{dt} = (1-n)V(t)^{-n}\frac{dV(t)}{dt}. \tag{9}$$

Звідки отримуємо співвідношення:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{(1-n)\frac{dz(t)}{dt}V(t)^n}. \tag{10}$$

Підставляючи здобуті вирази (9, 10) у рівняння (4), основне диференціальне рівняння задачі відносно нової функції $z(t)$ буде мати вигляд:

$$\frac{1}{(1-n)}V(t)^{-n}\frac{dz(t)}{dt}V(t)^n + \bar{a}(t)z(t) = -Q(t) \tag{11}$$

за формою:

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz(t)}{dt} + \bar{a}(t)z(t) = -Q(t), \tag{11*}$$

що остаточно приводить до неоднорідного диференціального рівняння першого порядку із змінними коефіцієнтами:

$$\frac{dz(t)}{dt} + (1-n)\bar{a}(t)z(t) = -(1-n)Q(t). \tag{12}$$

Аналітичний розв'язок рівняння (12) виконується за стандартною процедурою:

$$z(t) = z_0(t) + z_1^*(t), \tag{13}$$

де $z_0(t)$ – розв'язок однорідного рівняння (12); $z_1^*(t)$ – частинний розв'язок рівняння (12) у відповідності до виду правої частини.

Розв'язок однорідного рівняння (12) у формі:

$$\frac{dz_0(t)}{dt} + (1-n)\vec{a}z_0(t) = 0 \tag{14}$$

отримуємо у виді:

$$\frac{dz_0(t)}{z_0(t)} = (n-1)\vec{a}(t)dt. \tag{15}$$

Інтегруючи обидві частини рівності (15), здобуваємо співвідношення:

$$\int\frac{dz_0(t)}{z_0(t)} = (n-1)\int\bar{a}(t)dt + C_1 \tag{16}$$

звідки:

$$\ln\left|z_0(t)\right| = \int(n-1)\bar{a}(t)dt + C_1. \tag{17}$$

А відповідний розв'язок однорідного рівняння (14) отримується у вигляді:

$$z_0(t)=e^{\left[\int(n-1)\bar{a}(t)dt+C_1\right]}=e^{\int(n-1)\int\bar{a}(t)dt}\cdot e^{C_1}=C_1^*\cdot e^{(n-1)\int\bar{a}(t)dt}.$$

Що приводить до залежності:

$$z_0(t)=C_1^*\cdot e^{(n-1)\int\bar{a}(t)dt}. \tag{18}$$

Відповідно до методу варіації довільних сталих у теорії диференціальних рівнянь [3], частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12) представляється у формі:

$$z_1^*(t)=C_1^*(t)\cdot e^{(n-1)\int\bar{a}(t)dt}. \tag{19}$$

Перша похідна функції $z_1^*(t)$ має вигляд:

$$z_1^*(t)'=C_1^*(t)'\cdot e^{(n-1)\int\bar{a}(t)dt}+C_1^*(t)(n-1)\bar{a}(t)e^{(n-1)\int\bar{a}(t)dt}. \tag{20}$$

Підставляючи (19) і (20) у (12),отримуємо:

$$\begin{aligned}&C_1^*(t)'\cdot e^{(n-1)\int\bar{a}(t)dt}+C_1^*(t)(n-1)\bar{a}(t)e^{\int\bar{a}(t)dt}-C_1^*(t)(n-1)\bar{a}(t)e^{\int\bar{a}(t)dt}=\\&=(n-1)Q(t).\end{aligned} \tag{21}$$

З рівності (21) випливає співвідношення:

$$\frac{dC_1^*(t)}{dt}\cdot e^{(n-1)\int\bar{a}(t)dt}=(n-1)Q(t), \tag{22}$$

або

$$\frac{dC_1^*(t)}{dt}=(n-1)Q(t)e^{(1-n)\int\bar{a}(t)dt}. \tag{23}$$

Інтегруючи обидві частини рівності (23), здобуваємо вираз для сталої величини:

$$C_1^*(t)=(n-1)\int e^{(1-n)\int\bar{a}(t)dt}dt+C_2. \tag{24}$$

Враховуючи (24), отримуємо вираз для частинного розв'язку основного рівняння (12) задачі:

$$z_1^*(t)=\left[\int Q(t)e^{-\int\bar{a}(t)dt}+C_2\right]e^{\int\bar{a}(t)dt}, \tag{25}$$

$$z_1^*(t)=\left[(n-1)\int Q(t)e^{(1-n)\int\bar{a}(t)dt}+C_2\right]e^{(n-1)\int\bar{a}(t)dt}.$$

З урахуванням (18) і (24) для проміжної функції шуканого розв'язку $z(t) = z_0(t)+z_1^*(t)$, отримуємо вираз:

$$z(t) = C_1^* e^{(n-1)\int \bar{a}(t)dt} + C_2 e^{(n-1)\int \bar{a}(t)dt} +$$
$$+e^{(n-1)\int \bar{a}(t)dt} \cdot (n-1)\int Q(t) e^{(1-n)\int \bar{a}(t)dt} dt =$$
$$= e^{(n-1)\int \bar{a}(t)dt} \left[C_1^* + C_2 + (n-1)\int Q(t) e^{(1-n)\int \bar{a}(t)dt} dt \right].$$

Для степені нелінійності $n = 2$ відповідна залежність має вид:

$$z(t) = e^{\int \bar{a}(t)dt} \left[C_2^* + \int Q(t) e^{-\int \bar{a}(t)dt} dt \right] \quad (26)$$

де:

$$C_2^* = C_1^* + C_2 \quad (27)$$

Остаточно проміжна функція від шуканої функції задачі має вид:

$$z(t) = e^{(n-1)\int \bar{a}(t)dt} \left[C_2^* + (n-1)\int Q(t) e^{(1-n)\int \bar{a}(t)dt} dt \right] \quad (28)$$

Повертаючись до шуканої функції швидкості досліджуваної системи у формі $z(t) = V(t)^{1-n}$ для степені нелінійності n, отримуємо залежність у формі:

$$V(t) = \{ e^{(n-1)\int \bar{a}(t)dt} [c_2{}^* (n-1)\int Q(t) e^{(1-n\int \bar{a}(t)dt)} dt] \}^{\frac{1}{n-1}} \quad (29)$$

Для найбільш застосованому у практиці параметру нелінійності досліджуваної системи $n = 2$ для функції реакції зовнішнього середовища для шуканої функції швидкості динамічного процесу системи із змінними параметрами за часом має вид:

$$V(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{e^{-\int \bar{a}(t)dt} dt}{C_2^* + \int Q(t) e^{-\int \bar{a}(t)dt} dt} \quad (30)$$

Для розв'язку деяких інженерних задач нелінійної динаміки систем із змінними характеристиками у часі залежності (29, 30) для $n = 2$ і систем, реакція зовнішнього середовища яких може бути функцією як цілої, так і дрібної степені, дозволяють визначити траєкторію руху системи за часом та інші динамічні характеристики у відповідності до їх постановки.

Висновок. Здобуті аналітичні залежності можуть бути застосовані у достатньо широкому колі досліджень. Необхідно зауважити, що в задачах нелінійної динаміки систем із змінними за часом параметрами і зовнішнім навантаженням на досліджувану систему за наявності додаткової функції $\Phi(t)$ у правій частині рівняння (1) (наприклад проблема про вимушені коливання будівельних і аерокосмічних конструкцій, перехідні процеси у електричних ланцюгах [8], інші нелінійні процеси і фізичні явища) основне диференціальне рівняння зводиться до рівняння типу Рікатті [7], аналітичний розв'язок якого потребує наявність часткового розв'язку для подальшого зведення до рівняння Бернуллі, здобути який у багатьох випадках є достатньо складною проблемою. Тому у цих випадках, як правило, застосовуються наближені аналітичні методи на основі асимптотичних підходів на базі гібридних методів (збурення, фазних інтегралів у поєднанні із принципом Гальоркіна) [2] для отримання наближених аналітичних розв'язків, придатних як для «малих», так і «великих» параметрів розвинення, або прямі чисельні методи розрахунку.

Перелік посилань

1. Дегтярьова, О.В., Грищак, В.З., & Сіренко, В.М. (2020). *Математичні моделі та прогнозування руйнівних навантажень в ракетно-космічних системах, колективна монографія*. вид. дім «Гельветика».
2. Грищак, В.З. (2009). *Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування*. ЗНУ.
3. Грищак, Д.В. (2020). *Комп'ютерна алгебра у розв'язанні прикладних задач механіки конструкцій із змінними параметрами*. вид. дім «Гельветика».
4. Steele, C. R. (1989). Asymptotic Analysis and Computation for Shells. Analytical and Computational Models of Shells. *CED, 3*, 3-31.
5. Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A. F., & Golinval, J.-C. (2006). Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *20*(3), 505–592. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2005.04.008
6. Федоряченко, С.О., & Гаркавенко, Д.В. (2023). Кінематика руху кулі та сердечника під час проникнення у перешкоду. *XX міжнародна науково-технічна конференція «Потураївські читання»*, 66-67.
7. Камке, Е. (1971). *Довідник по звичайним диференціальним рівнянням*. Наука.
8. Дяченко, Г. Г., & Азюковський, О. О. (2019). Мінімізація потужності втрат та споживаної енергії асинхронними двигунами з нестаціонарним навантаженням. *Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського, 5/2019* (118), 142-147.

ABSTRACT

Purpose. The development and application of analytical (including approximate) methods of analyzing nonlinear mathematical models of system dynamics, which have complex behavior due to the presence of time-dependent characteristics, is relevant for solving various classes of engineering problems. Therefore, the purpose of this work is mathematical modeling of problems of nonlinear dynamics of such systems, which allows determining the trajectory of the system's movement over time and other dynamic characteristics in accordance with their setting.

Method. Based on the modern achievements of analytical, in particular asymptotic and numerical research methods based on existing software complexes, the possibility of non-local research and the formation of a sufficiently complete representation of the peculiarities of the behavior of nonlinear systems is considered. To achieve the goal, a mathematical model of the nonlinear dynamics of a system with time-varying properties is considered, provided that the reaction of the environment depends on the function of the speed of movement of the system to the *n* degree.

The results. The solution of some engineering problems of the nonlinear dynamics of systems with time-varying characteristics of dependence for $n = 2$ and systems whose response to the external environment can be a function of both whole and fractional degrees allow to determine the

trajectory of the system's movement over time and other dynamic characteristics in accordance with before their production.

Scientific novelty. The analytical dependence of the speed function of the dynamic process of the system with time-varying parameters was obtained for the nonlinearity parameter of the studied system most used in practice, $n = 2$, for the reaction function of the external environment.

Practical significance. The obtained analytical dependencies can be applied in a sufficiently wide range of research. Approximate analytical methods based on asymptotic approaches based on hybrid methods (perturbation, phase integrals in combination with Galerkin's principle) are applied. The use of asymptotic and numerical methods of research based on existing software complexes opens up the possibility of non-local research and the formation of a sufficiently complete representation of the peculiarities of the behavior of nonlinear systems with variable characteristics of materials, in particular, composite and functionally gradient ones.

Keywords. *nonlinear dynamics of systems, variable parameters, analytical solution.*