Кафедра механічної та біомедичної інженерії

Національний технічний університет
ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
1899

Долгов О.М, Колосов Д.Л., Онищенко С.В.

Теоретична механіка

МОДУЛЬ IV. ДИНАМІКА. ПРЕЗЕНТАЦІЯ ЛЕКЦІЙ

для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство

Дніпро - 2023

Погоджено рішенням науково-методичної комісії
спеціальності 132 Матеріалознавство (протокол № 1 від 30.08.2023)

Долгов О.М. Теоретична механіка. Модуль IV. Динаміка [Електронний ресурс] : презентація лекцій для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство / О.М. Долгов, Д.Л. Колосов, С.В. Онищенко ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 31 с.

ЗМІСТ

- Тема 1. **Вступ до динаміки**. Закони та аксіоми динаміки матеріальної точки. Диференціальні рівняння динаміки матеріальної точки. Дві основні задачі динаміки. Методика розв'язання задач. Приклади розв'язання задач динаміки точки.

- Тема 2. **Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і механічної системи.** Робота сили, потужність . Кінетична енергія точки і системи. Теорема Кеніга. Теореми про зміну кінетичної енергії для матеріальної точки та системи. Приклад розв'язання задач на використання теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і системи.

- Тема 3. **Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки і системи.** Головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла.

- Тема 4. **Принцип можливих переміщень.** Дійсні і можливі переміщення. Ідеальні в'язі. Застосування принципу можливих переміщень для виведення умов рівноваги. Приклади використання принципу можливих переміщень.

- Тема 5. **Рівняння Лагранжа II роду.** Узагальнені координати, швидкості та прискорення. Узагальнені сили і способи їх обчислення. Методика застосування рівнянь Лагранжа II роду для розв'язання задач динаміки. Приклад розв'язання задач.

Динаміка

Динаміка матеріальної точки	Динаміка механічної системи	Аналітична механіка

Динаміка – розділ теоретичної механіки, який вивчає механічний рух із найзагальнішої точки зору. Рух розглядається у зв'язку із діючими на об'єкт силами. Розділ складається із трьох підрозділів :

❖ **Динаміка точки** – вивчає рух матеріальної точки з урахуванням сил, які викликають цей рух.

Основний об'єкт – матеріальна точка – матеріальне тіло, яке має масу, та розмірами якого можна знехтувати.

❖ **Динаміка механічної системи** – вивчає рух сукупності матеріальних точок та твердих тіл, які об'єднуються загальними законами взаємодії, з урахуванням сил, що викликають цей рух.

❖ **Аналітична механіка** – вивчає рух невільних механічних систем за допомогою загальних аналітичних методів.

Основні припущення

– існує **абсолютний простір** (має суто геометричні властивості, які не залежать від матерії та її руху);

– існує **абсолютний час** (не залежить від матерії та її руху).

Звідси випливає:

– існує абсолютно нерухома система відліку;

– час не залежить від руху системи відліку;

– маси точок, що рухаються, не залежать від руху системи відліку.

Ці припущення використовуються у класичній механіці, створеній Галілеєм та Ньютоном. Вона має і донині широку область застосування, оскільки механічні системи, що розглядаються в прикладних науках, не мають таких великих мас і швидкостей руху, для яких необхідно враховувати їхній вплив на геометрію простору та часу, як це робиться в релятивістській механіці (теорії відносності).

❖ **Основні закони динаміки –** вперше відкриті Галілеєм і сформульовані Ньютоном та становлять основу всіх методів опису та аналізу руху механічних систем та їхньої динамічної взаємодії під дією різних сил.

❖ **Закон інерції (закон Галілея-Ньютона) – Ізольована матеріальна точка тіла зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки прикладені сили не змусять її змінити цей стан.** Звідси випливає еквівалентність стану спокою та руху за інерцією (закон відносності Галілея). Система відліку, відносно якої виконується закон інерції, називається **інерційною**. Властивість матеріальної точки прагнути зберегти незмінною швидкість свого руху (свій кінематичний стан) називається **інертністю**.

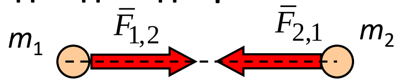
❖ **Закон пропорційності сили та прискорення (Основне рівняння динаміки - II закон Ньютона) – Прискорення, що надається матеріальній точці силою, є прямо пропорційним силі та обернено пропорційним масі цієї точки :** $\bar{a} = \frac{1}{m}\bar{F}$ або $m\bar{a} = \bar{F}.$

Тут ***m*** - маса точки (міра інертності), вимірюється в кг, та чисельно дорівнює вазі, поділеній на прискорення вільного падіння: $m = \frac{G}{g}.$

F – діюча сила, що вимірюється в ньютонах. (1 Н надає точці масою 1 кг прискорення 1 м/с^2, 1 Н = 1/9.81 кг-с).

❖ **Закон рівності дії та протидії (III закон Ньютона)** – **Будь-якій дії відповідає рівна за величиною та протилежно спрямована протидія:**

$$\boxed{\bar{F}_{1,2} = -\bar{F}_{2,1}}$$



Закон справедливий для будь-якого кінематичного стану тіл. Сили взаємодії, будучи прикладеними до різних точок (тіл), не врівноважуються.

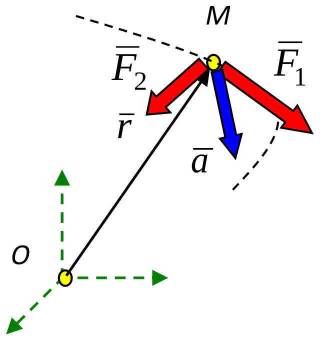
❖ **Закон незалежності дії сил** – **Прискорення матеріальної точки під дією кількох сил дорівнює геометричній сумі прискорень точки від дії кожної із сил окремо:**

$$\boxed{\bar{a}(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ...) = \bar{a}_1(\bar{F}_1) + \bar{a}_2(\bar{F}_2) + ...}$$ або $$\boxed{\bar{a}(\bar{R}) = \bar{a}_1(\bar{F}_1) + \bar{a}_2(\bar{F}_2) + ...}$$

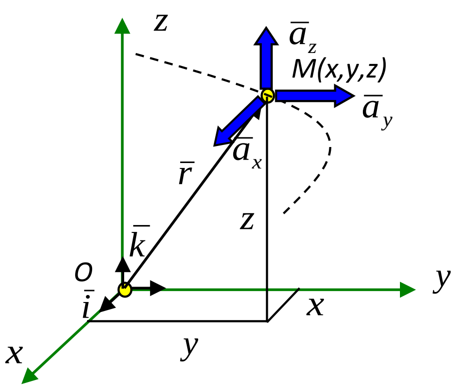
❖ **Основне рівняння динаміки** : $\boxed{m\bar{a} = \sum \bar{F}_i.}$ - відповідає векторному способу задання руху точки

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки:

Підставимо прискорення точки за векторного задання руху $\boxed{\bar{a} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}.}$ в основне рівняння динаміки: $\boxed{m\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_i \qquad (1).}$ - **диференціальне рівняння руху точки у векторному вигляді.**



За координатного способу задання руху: Використовуємо зв'язок радіус-вектора з координатами та вектора сили з проекціями:



$$\boxed{\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}} \qquad \boxed{\bar{F}_i = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}} \qquad m\frac{d^2}{dt^2}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \sum(X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}).$$

Після згрупування векторне співвідношення розпадається на три скалярні рівняння:

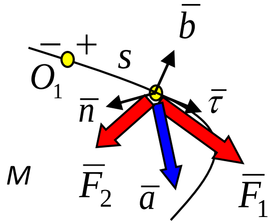
$$(x): m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X_i;$$
$$(y): m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y_i;$$
$$(z): m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z_i.$$

або: $$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i; \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i; \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned}}$$ **- диференціальні рівняння руху точки в координатному вигляді.**

Цей результат може бути отриманий формальним проектуванням диференціального векторного рівняння (1).

❖ **Природні рівняння руху матеріальної точки**

можна отримати проектуванням векторного диференціального рівняння руху на природні (рухливі) осі координат:



$$(\tau): ma_\tau = \sum F_{i\tau};$$
$$(n): ma_n = \sum F_{in};$$
$$(b): m \cdot 0 = \sum F_{ib}.$$

або $$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{s} &= \sum F_{i\tau}; \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum F_{in}. \end{aligned}}$$ **- природні рівняння руху точки**

❖ **Дві основні задачі динаміки:**

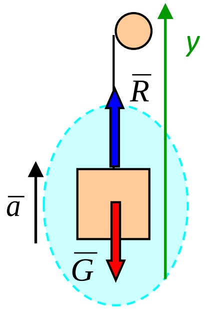
1. Пряма задача: Задано рух (рівняння руху, траєкторія). Потрібно визначити сили, під впливом яких відбувається заданий рух.

2. Обернена задача: Задано сили, під дією яких відбувається рух. Потрібно знайти параметри руху (рівняння руху, траєкторію руху).

Обидві задачі розв'язуються за допомогою **основного рівняння динаміки** та проекції його на координатні осі. Якщо розглядається рух невільної точки, то як і в статиці, використовується **принцип звільнення від в'язей**. Внаслідок реакції в'язей включаються до складу сил, які діють на матеріальну точку. Розв'язання першої задачі пов'язане з операціями диференціювання. Розв'язання оберненої задачі вимагає інтегрування відповідних диференціальних рівнянь і це значно складніше, ніж диференціювання. Обернена задача складніше за пряму задачу.

❖ **Розв'язання прямої задачі динаміки.** Розглянемо на прикладах:

Приклад 1. Кабіна ліфта вагою ***G*** піднімається тросом із прискоренням ***a*** . Визначити натяг троса.



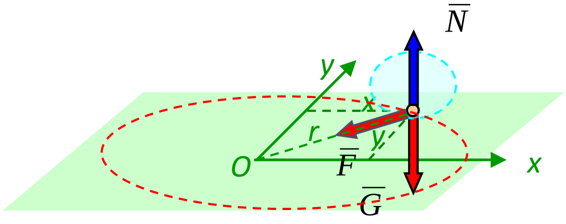
1. Вибираємо об'єкт (кабіна ліфта рухається поступально та її можна розглядати як матеріальну точку).
2. Відкидаємо зв'язок (трос) та замінюємо реакцією ***R***.
3. Складаємо основне рівняння динаміки: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}.$
4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь ***y***: $(y): \; ma_y = R - G.$

Визначаємо реакцію троса : $R = G + ma_y = G + \frac{G}{g} a_y = G(1 + \frac{a_y}{g}).$

Визначаємо натяг троса : $\bar{T} = -\bar{R}; \;\; T = R = G(1 + \frac{a_y}{g}).$

У випадку рівномірного руху кабіни $\boldsymbol{a_y = 0}$ натяг троса дорівнює вазі кабіни : ***T = G***.
У разі обрива троса ***T* = 0**, і прискорення кабіни дорівнює прискоренню вільного падіння: $\boldsymbol{a_y = -g}$.

Приклад 2. Точка масою ***m*** рухається горизонтальною поверхнею (площина ***Oxy***) відповідно до рівнянь : ***x = a·coskt***, ***y = b·sinkt***. Визначити силу, яка діє на точку.



1. Вибираємо об'єкт (матеріальну точку).
2. Відкидаємо зв'язок (площину) та замінюємо реакцією ***N***.
3. Додаємо до системи сил невідому силу ***F***.
4. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}.$
5. Проектуємо основне рівняння динаміки на осі ***x, y*** : $(x): \;\; m\ddot{x} = F_x;$ $(y): \;\; m\ddot{y} = F_y.$

Таким чином, величина сили пропорційна відстані точки до центру координат і спрямована до центру лінії, що з'єднує точку з центром. Траєкторія руху точки є еліпс з центром у початку координат:

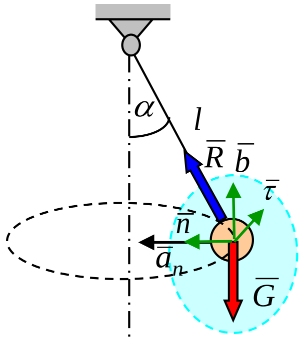
$$x^2 = a^2 \cos^2 kt; \quad y^2 = b^2 \sin^2 kt. \;\; \Rightarrow \;\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Визначаємо проекції сили :

$$F_x = m\ddot{x} = -mak^2 \cos kt = -mk^2 x;$$
$$F_y = m\ddot{y} = -mak^2 \sin kt = -mk^2 y.$$

Модуль сили: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r.$

Напрямні косинуси : $\cos(\bar{F}, x.) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos(\bar{F}, y.) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$



Приклад 3: Вантаж вагою ***G*** підвішений на тросі довжиною ***l*** і рухається за круговою траєкторії в горизонтальній площині з певною швидкістю. Кут відхилення троса від вертикалі дорівнює α. Визначити натяг троса та швидкість вантажу.

1. Вибираємо об'єкт (вантаж).
2. Відкидаємо в'язь (трос) та замінюємо її реакцією ***R***.
3. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}.$
4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь τ, ***n***, ***b***: $(\tau): \quad ma_\tau = 0;$

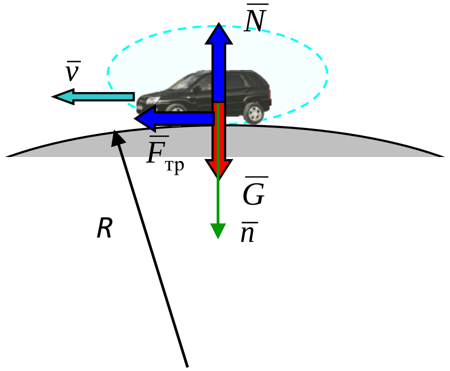
$(n): \quad ma_n = R\sin\alpha;$

$(b): \quad 0 = R\cos\alpha - G.$

З третього рівняння визначаємо реакцію троса : $R = \dfrac{G}{\cos\alpha}.$

Визначаємо натяг троса : $\bar{T} = -\bar{R}; \quad T = R = \dfrac{G}{\cos\alpha}.$ Підставляємо значення реакції троса, нормального прискорення у друге рівняння та визначаємо швидкість вантажу : $\dfrac{G}{g}\dfrac{v^2}{l\sin\alpha} = \dfrac{G}{\cos\alpha}\sin\alpha.$ $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.}$

Приклад 4: Автомобіль вагою ***G*** рухається опуклим мостом (радіус кривизни дорівнює ***R***) зі швидкістю ***v***. Визначити тиск автомобіля на міст.



1. Вибираємо об'єкт (автомашина, розмірами нехтуємо та розглядаємо як точку).
2. Відкидаємо зв'язок (шорстку поверхню) і замінюємо реакціями ***N*** та силою тертя ***F*****тр**.
3. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}.$
4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь *n*: $(n): \quad ma_n = G - N.$

Звідси визначаємо нормальну реакцію : $N = G - ma_n = G - m\dfrac{v^2}{R} = G(1 - \dfrac{v^2}{gR}).$

Визначаємо тиск автомобіля на міст : $\bar{Q} = -\bar{N}; \quad Q = G(1 - \dfrac{v^2}{gR}).$

Звідси можна визначити швидкість, що відповідає нульовому тиску на міст (***Q* = 0**): $v = \sqrt{gR}.$

❖ **Розв'язання оберненої задачі динаміки.** У загальному випадку рухи точки сили, що діють на точку, є змінними, що залежать від часу, координат та швидкості. Рух точки описується системою трьох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$m\ddot{x} = \sum X_i; \quad m\ddot{y} = \sum Y_i; \quad m\ddot{z} = \sum Z_i.$$

Після інтегрування кожного з них буде **шість постійних** $C_1, C_2, \ldots, C_6$:

$$\dot{x} = f_1(t, C_1, C_2, C_3); \quad \dot{y} = f_2(t, C_1, C_2, C_3); \quad \dot{z} = f_3(t, C_1, C_2, C_3).$$

$$x = f_4(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \quad y = f_5(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \quad z = f_6(t, C_1, C_2, \ldots, C_6).$$

Значення постійних $C_1, C_2, \ldots, C_6$ знаходяться з шести початкових умов при $t = 0$:

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0; \quad \dot{x} = \dot{x}_0; \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Після підстановки знайдених значень постійних отримуємо :

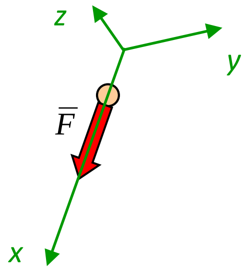
$$\dot{x} = f_1(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \quad \dot{y} = f_2(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \quad \dot{z} = f_3(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

$$x = f_4(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \quad y = f_5(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \quad z = f_6(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0).$$

Таким чином, **під дією однієї і тієї ж системи сил матеріальна точка може здійснювати цілий клас рухів, що визначаються початковими умовами**.

Початкові координати враховують вихідне положення точки. Початкова швидкість, що задається проекціями, враховує вплив на її рух вздовж ділянки траєкторії тих сил, що діяли на точку до приходу на цю ділянку, тобто початковий кінематичний стан.

Приклад 1 розв'язання оберненої задачі : Вільна матеріальна точка масою ***m*** рухається під дією **сили *F*, постійною за модулем та напрямком.** У початковий момент швидкість точки становила v_0 і збігалася у напрямку із силою. Визначити рівняння руху точки.



1. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} = \overline{const}.$

2 . Виберемо декартову систему відліку, спрямовуючи вісь ***x*** уздовж напрямку сили і спроектуємо основне рівняння динаміки на цю вісь:

$(x):\ ma_x = F_x = F.$ або $m\ddot{x} = F.$

3. Знижуємо порядок похідної : $m\dfrac{dv_x}{dt} = F.$

4. Розділяємо змінні : $dv_x = \dfrac{F}{m}dt.$

5. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння : $\int dv_x = \int \dfrac{F}{m}dt.$ ⟹ $\boxed{v_x = \dfrac{F}{m}t + C_1.}$

6. Представимо проекцію швидкості як похідну координати за часом : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F}{m}t + C_1.$

7. Розділяємо змінні: $dx = \left(\dfrac{F}{m}t + C_1\right)dt.$

8. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння : $\int dx = \int\left(\dfrac{F}{m}t + C_1\right)dt.$ ⟹ $\boxed{x = \dfrac{F}{m}\dfrac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.}$

9. Для визначення значень постійних C_1 та C_2 використовуємо початкові умови $t = 0,\ v_x = v_0,\ x = x_0$:

$$v_x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\cdot 0 + C_1 = v_0. \qquad x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\frac{0^2}{2} + C_1\cdot 0 + C_2 = x_0. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C_1 = v_0; \quad C_2 = x_0.}$$

У результаті отримуємо рівняння рівнозмінного руху (вздовж вісі *x*):

$$x = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

❖ **Загальні вказівки до розв'язання прямої та оберненої задачі. Порядок розв'язання:**

1. Складання диференціального рівняння руху:

1.1. **Вибрати систему координат -** прямокутну (нерухому) за невідомої траєкторії руху, природну (рухливу) за відомої траєкторії, наприклад, коло або пряма лінія. У останньому випадку можна використовувати одну прямолінійну координату. Початок відліку поєднати з початковим положенням точки (при $t = 0$) або з рівноважним положенням точки, якщо воно існує, наприклад, коливання точки.

1.2**. Зобразити точку** в положенні, яке відповідає довільному моменту часу (при $t > 0$) так, щоб координати були позитивними ($s > 0$, $x > 0$). При цьому вважаємо також, що проекція швидкості у цьому положенні також позитивна. У разі коливань проекція швидкості змінює знак, наприклад, у випадку повернення до положення рівноваги. Тут слід прийняти, що в даний момент часу точка віддаляється від положення рівноваги. Виконання цієї рекомендації важливо в подальшому під час роботи з силами опору, що залежать від швидкості.

1.3. **Звільнити матеріальну точку від в'язей, замінити** їхню дію реакціями, **додати** активні сили.

1.4. **Записати основний закон динаміки** у векторному вигляді**, спроектувати** на вибрані вісі, **виразити** сили або реактивні сили, що задаються через змінні: час, координати чи швидкості, якщо вони від них залежать.

2. Розв'язання диференціальних рівнянь:

2.1. **Зменшити похідну,** якщо рівняння не приводиться до канонічного (стандартного) вигляду. Наприклад : $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$, або $\ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}$.

2.2 Розділити змінні, наприклад: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}kv_x, \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{m}kdt$ або $\frac{dv_\tau}{dt} = g - \frac{k}{m}v_\tau^2, \Rightarrow \frac{dv_\tau}{g - \frac{k}{m}v_\tau^2} = dt.$

2.3. Якщо в рівнянні три змінні, то зробити заміну змінних, наприклад : $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}cx, \Rightarrow \frac{dv_x dx}{dt dx} = \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{1}{m}cx$ і потім розділити змінні.

2.4. **Обчислити невизначені інтеграли** в лівій та правій частинах рівняння, наприклад : $\int \frac{dv_x}{v_x} = -\int \frac{1}{m}kdt \Rightarrow \ln v_x = -\frac{1}{m}kt + C_1$

Використовуючи початкові умови, наприклад, $t = 0$, $v_x = v_{x0}$, **визначити постійні інтегрування** : $\ln v_x\big|_{v_{x0}} = -\frac{1}{m}k\,t\big|_0 + C_1;\quad C_1 = \ln v_{x0}.$

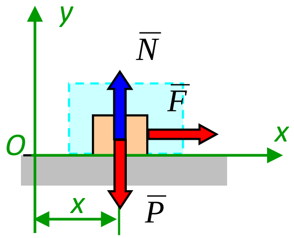
Зауваження. Замість обчислення невизначених інтегралів можна **обчислити певні інтеграли зі змінною верхньою** межею. Нижні межі є початковими значеннями змінних (початкові умови). Тоді не потрібно окремого визначення постійної, яка автоматично включається до рішення, наприклад:

$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} \frac{dv_\tau}{v_\tau} = -\int_0^t \frac{1}{m}kdt. \Rightarrow \ln v_\tau\Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = -\frac{1}{m}k\,t\Big|_0^t; \Rightarrow \ln v_\tau - \ln v_{\tau 0} = -\frac{1}{m}kt - 0;\quad \ln v_\tau = -\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}.$$

2.5. **Виразити швидкість** через похідну координати за часом, наприклад, $v_\tau = \frac{ds}{dt} = e^{-\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}}$ та повторити пункти 2.2 - 2.4

Зауваження. Якщо рівняння приводиться до канонічного вигляду, який має стандартне рішення, тоді використовується це готове рішення. Постійні інтегрування визначаються як і раніше з початкових умов.

Приклад 2 розв'язання оберненої задачі: Сила залежить від часу. Вантаж вагою ***P*** починає рухатися вздовж гладенької горизонтальної поверхні під дією сили ***F***, величина якої пропорційна часу **(*F = kt*).** Визначити відстань, пройдену вантажем за час ***t***.



1. Вибираємо систему відліку (декартові координати) так, щоб тіло мало позитивну координату.

2. Приймаємо об'єкт руху за матеріальну точку (тіло рухається поступально), звільняємо від в'язей (опорної площини) та замінюємо реакцією (нормальною реакцією гладенької поверхні):

3. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}.$

4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь ***x*** : $(x): \quad ma_x = F = kt$ або $\boxed{\ddot{x} = \frac{k}{m}t.}$

5. Знижуємо порядок похідної : $m\frac{dv_x}{dt} = kt.$

6. Розділяємо змінні: $dv_x = \frac{k}{m}tdt.$

7. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння : $\int dv_x = \int \frac{k}{m}tdt.$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_x = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2} + C_1.}$

8. Визначимо постійну C_1 з початкової умови ***t* = 0, *v*** $v_x = v_0 = 0$: $v_x\big|_{t=0} = \frac{k}{m}\cdot\frac{0^2}{2} + C_1 = v_0 = 0.$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_1 = 0.}$

9. Представимо проекцію швидкості як похідну координати за часом: $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2}.$

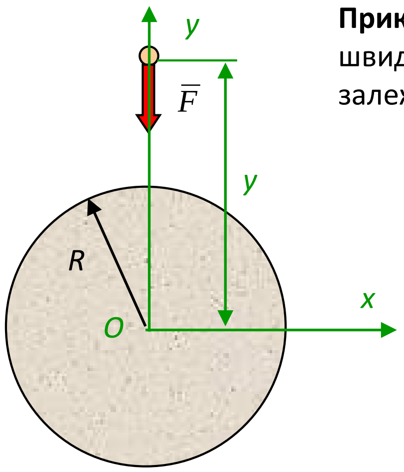
10. Розділяємо змінні : $dx = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2}dt.$

11. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння : $\int dx = \int \frac{k}{m}\frac{t^2}{2}dt.$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{k}{m}\frac{t^3}{6} + C_2.}$

12. Визначимо постійну C_2 з початкової умови $t = 0$, $x = x_0 = 0$: $x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\frac{0^3}{6} + C_2 = x_0 = 0.$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_2 = 0.}$

У результаті отримуємо рівняння руху (вздовж осі ***x***), що дає значення пройденого шляху за час ***t***:

$$\boxed{x = S = \frac{k}{m}\frac{t^3}{6} = \frac{kg}{P}\frac{t^3}{6}.}$$



Приклад 3 розв'язання оберненої задачі : Сила залежить від координати. Матеріальна точка масою ***m*** кинута вгору із Землі зі швидкістю v_0. Сила тяжіння Землі обернено пропорційна квадрату відстані від точки до центру тяжіння (центру Землі). Визначити залежність швидкості від відстані до центру Землі.

1. Вибираємо систему відліку (декартові координати) так, щоб тіло мало позитивну координату :

2. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}.$

3. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь ***y*** : $(y):\ ma_y = -F = -\dfrac{k}{y^2}$ або $m\ddot{y} = -\dfrac{k}{y^2}.$

Коефіцієнт пропорційності можна знайти, використовуючи вагу точки на поверхні Землі : $F = P$ коли $y = R.$

$$\frac{k}{R^2} = mg. \Rightarrow k = mgR^2.$$

Звідси диференціальне рівняння має вигляд : $m\ddot{y} = -\dfrac{mgR^2}{y^2}$ або $\boxed{\ddot{y} = -\dfrac{gR^2}{y^2}.}$

4. Знижуємо порядок похідної : $\dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{gR^2}{y^2}.$

5. Робимо заміну змінної: $\dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{dv_y dy}{dydt} = \dfrac{v_y dv_y}{dy}.$

6. Розділяємо змінні : $\dfrac{v_y dv_y}{dy} = -\dfrac{gR^2}{y^2}. \Rightarrow v_y dv_y = -\dfrac{gR^2}{y^2}dy.$

7. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння : $\displaystyle\int_{v_{y0}}^{v_y} v_y dv_y = -\int_R^y \frac{gR^2}{y^2}dy. \Rightarrow \left.\frac{v_y^2}{2}\right|_{v_{y0}}^{v_y} = -gR^2\left.\left(-\frac{1}{y}\right)\right|_R^y.$

8. Підставляємо границі: $\dfrac{v_y^2}{2} - \dfrac{v_{y0}^2}{2} = gR^2\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{R}\right).$

У результаті отримуємо вираз для швидкості функції від координати *y* :

$$\boxed{v_y = \sqrt{v_{y0}^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)}.}$$

Максимальну висоту польоту можна знайти прирівнюючи швидкість нулю :

$$\frac{v_{y0}^2}{2gR^2} = -\left(\frac{1}{H_{max}} - \frac{1}{R}\right) \Rightarrow \frac{1}{H_{max}} = \frac{1}{R} - \frac{v_{y0}^2}{2gR^2} \Rightarrow \boxed{H_{max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_{y0}^2}.}$$

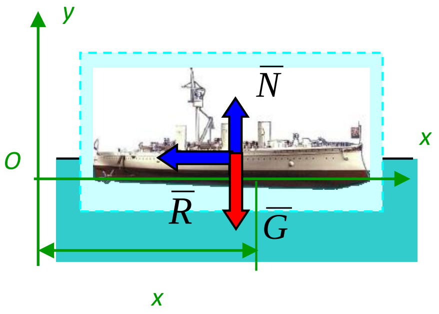
Максимальна висота польоту $\to \infty$ коли знаменник дорівнює нулю:

$$\boxed{2gR = v_{y0}^2}$$

Звідси при постановці радіусу Землі та прискорення вільного падіння виходить II космічна швидкість:

$$\boxed{v_{y0} = \sqrt{2gR} = 11.2\ \text{км/с}}$$

Приклад 4 розв'язання оберненої задачі : **Сила залежить від швидкості.** Судно масою ***m*** мало швидкість v_0. Опір води руху судна пропорційний швидкості. Визначити час, за який швидкість судна зменшиться вдвічі після вимкнення двигуна, а також відстань, пройдену судном до повної зупинки.



1. Вибираємо систему відліку (декартові координати) так, щоб тіло мало позитивну координату :

2. Приймаємо об'єкт руху за матеріальну точку (судно рухається поступально), звільняємо від в'язей (води) та замінюємо реакцією (силою Архімеда), а також силою опору руху.

3. Додаємо активну силу (силу тяжіння).

4. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N}.$

5. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь *x* : $(x):\ \ ma_x = -R = -\mu v_x$ або $\boxed{\ddot{x} = -\dfrac{\mu}{m} v_x.}$

6. Знижуємо порядок похідної : $\dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{\mu}{m} v_x.$

7. Розділяємо змінні: $\dfrac{dv_x}{v_x} = -\dfrac{\mu}{m} dt.$

8. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \frac{\mu}{m} dt. \Rightarrow \ln v_x \Big|_{v_{x0}}^{v_x} = -\frac{\mu}{m} t \Big|_0^t .$$

9. Підставляємо границі : $\ln v_x - \ln v_{x0} = -\dfrac{\mu}{m} t.$

Отримано вираз, що зв'язує швидкість та час ***t***, звідки можна визначити час руху: $\boxed{t = \dfrac{m}{\mu} \ln \dfrac{v_{x0}}{v_x}.}$

Час руху, за який швидкість впаде вдвічі: $\boxed{t = \dfrac{m}{\mu} \ln 2.}$

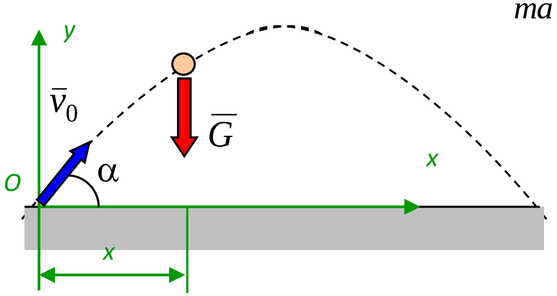
Цікаво зазначити, що за наближення швидкості до нуля час руху прагне нескінченності, тобто кінцева швидкість не може дорівнювати нулю. Чим не "вічний рух"? Однак при цьому пройдений шлях до зупинки є кінцевою величиною. Для визначення пройденого шляху звернемося до виразу, отриманого після зниження порядку похідної, та зробимо заміну змінної:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{m} v_x. \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x dx}{dxdt} = \frac{v_x dv_x}{dx}. \Rightarrow \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{\mu}{m} v_x. \Rightarrow dv_x = -\frac{\mu}{m} dx. \Rightarrow \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = -\int_0^x \frac{\mu}{m} dx.$$

Після інтегрування та підстановки границь отримаємо : $\boxed{x = \dfrac{m}{\mu}(v_{x0} - v_x).}$

Пройдений шлях до зупинки: $\boxed{x = \dfrac{m}{\mu} v_{x0}.}$

Рух точки, кинутої під кутом до горизонту, в однорідному полі сили тяжіння без урахування опору повітря



$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G}. \Rightarrow \begin{aligned} (x):&\ \ m\ddot{x} = 0; \\ (y):&\ \ m\ddot{y} = -G = -mg; \end{aligned} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = 0;\ \ \frac{dv_y}{dt} = -g; \Rightarrow dv_x = 0;\ \ dv_y = -gdt;$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = 0;\ \ \int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = -\int_0^t gdt; \Rightarrow \boxed{v_x = v_{x0} = v_0 \cos\alpha;}\ \ \boxed{v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin\alpha - gt;}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha;\ \ \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt; \Rightarrow \boxed{x = v_0 \cos\alpha \cdot t;}\ \ \boxed{y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2};}$$

Виключивши час з рівняння руху отримуємо рівняння траєкторії: $\boxed{y = x \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.}$

Час польоту визначаємо прирівнюванням координати до нуля : $y = v_0 \sin\alpha \cdot T - \dfrac{gT^2}{2} = 0;$ $\boxed{T = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}}$

Дальність польоту визначаємо підстановкою часу польоту: $\boxed{x = v_0 \cos\alpha \cdot T = v_0 \cos\alpha \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L;}$

Динаміка механічної системи

❖**Система матеріальних точок або механічна система** – Сукупність матеріальних точок або матеріальних тіл, які об'єднуються загальними законами взаємодії (положення або рух кожної з точок або тіла залежить від положення та руху всіх інших)

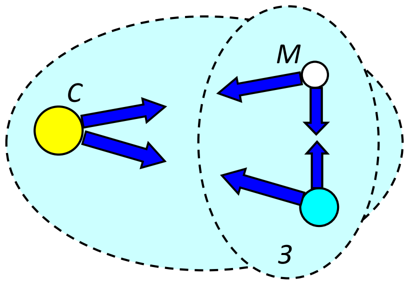
❖**Система вільних точок** – система точок, рух яких не обмежується жодними в’язями (наприклад, планетна система, у якій планети розглядаються як матеріальні точки).

❖**Система невільних точок або невільна механічна система** – система, рух матеріальних точок або тіл якої обмежується накладеними на систему в’язями (наприклад, механізм, машина тощо).

Сили, що діють на системy. На додаток до раніше існуючої класифікації сил (активні та реактивні сили) вводиться нова класифікація сил:

1. **Зовнішні сили (е)** – діють на точки та тіла системи з боку точок або тіл, що не входять до складу цієї системи.
2. **Внутрішні сили (і)** – сили взаємодії між матеріальними точками чи тілами, які входять у цю систему.

Одна і та сама сила може бути як зовнішньою, так і внутрішньою силою. Усе залежить від того, яка механічна система розглядається. Наприклад: У системі Сонце, Земля та Місяць всі сили тяжіння між ними є внутрішніми. При розгляді системи Земля та Місяць сили тяжіння, прикладені з боку Сонця – зовнішні:



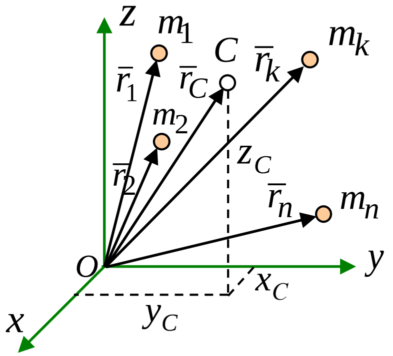
На основі закону дії та протидії кожній внутрішній силі ***Fk*** відповідає інша внутрішня сила ***Fk'***, рівна за модулем і протилежна за напрямом

З цього випливають **дві властивості внутрішніх сил:**

1. **Головний вектор усіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю:** $\boxed{\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0.}$
2. **Головний момент усіх внутрішніх сил системи відносно будь-якого центру дорівнює нулю:** $\boxed{\bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_{kO}^i = 0.}$

Або у проекціях на координатні вісі: $\boxed{\sum X_k^i = 0; \ \ \sum Y_k^i = 0; \ \ \sum Z_k^i = 0.}$ $\boxed{\sum M_{kx}^i = 0; \ \ \sum M_{ky}^i = 0; \ \ \sum M_{kz}^i = 0.}$

Зауваження. Хоча ці рівняння схожі на рівняння рівноваги, вони не є такими, оскільки внутрішні сили є прикладеними до різних точок або тіл системи і можуть викликати рух цих точок (тіл) відносно один одного. З цих рівнянь випливає, що внутрішні сили не впливають на рух системи, що розглядається як одне ціле.



❖ **Центр мас системи матеріальних точок.** Для опису руху системи в цілому вводиться геометрична точка, яка називається **центром мас**, радіус-вектор якої визначається виразом $\boxed{\bar{r}_C = \dfrac{\sum m_k \bar{r}_k}{M},}$ де M – маса всієї системи: $\boxed{M = \sum m_k.}$

Або у проекціях на координатні вісі :

$$\boxed{x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}.}$$

Формули для центру мас аналогічні формулам для центру тяжіння. Проте, поняття центру мас більш загальне, оскільки воно не пов'язане із силами тяжіння.

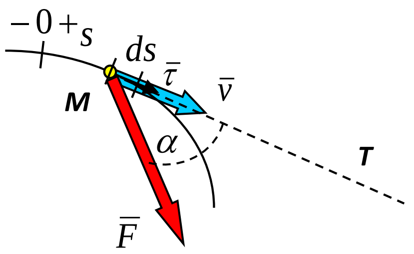
Робота, потужність сили. Кінетична та потенціальна енергія. Механічний рух може переноситися з однієї механічної системи на іншу внаслідок взаємодії механічних систем:
- без перетворень на іншу форму руху, тобто перехід у той самий механічний рух,
- з перетворенням на іншу форму руху матерії (потенціальну енергію, теплоту, електричну енергію та ін.)

Кожен з цих випадків має свої міри механічного руху та механічної взаємодії, які свого часу відстоювали Декарт та Лейбніц (див. таблицю):

	Міра механічного руху	Міра механічної взаємодії
Декарт	Кількість руху $\bar{Q} = m\bar{v}$	Імпульс сили $\bar{S} = \int \bar{F} dt$
Лейбніц	Кінетична енергія $T = \frac{mv^2}{2}$	Робота сили $A = \int F_\tau ds$

Імпульс сили є мірою дії сили при зміні механічного руху. Робота є кількісною мірою перетворення механічного руху в будь-яку іншу форму руху матерії.

❖ **Робота сили, що прикладається до матеріальної точки.** Нехай точка прикладання сили, змінної за величиною та напрямом, переміщується за деякою довільною траєкторією. На малому (елементарному) переміщенні силу можна вважати постійною і **елементарна робота сили дорівнює проекції сили на напрямок переміщення (відносно траєкторії руху), помноженої на елементарне переміщення:**



$$dA = F_\tau ds = F\cos\alpha \cdot ds$$

Знак елементарної роботи визначається величиною кута **α** та знаком **cosα** :

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \qquad dA > 0;$$
$$\alpha > \frac{\pi}{2} \qquad dA < 0.$$

Оскільки зазвичай зручніше працювати з гострими кутами, то в цьому випадку використовують гострий кут і знак надають за наступним простим правилом: **якщо сила та переміщення збігаються у напрямку, то надається знак «+», якщо протилежні за напрямком, то знак «–»** .

Елементарна робота може бути записана у вигляді **скалярного добутку**: $dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ **та в проекціях** $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$

Роботу на скінченому переміщенні MM_1 можна отримати за допомогою підсумовування або інтегрування.

$$A = \sum dA \qquad \boxed{A = \int_M^{M_1} F_\tau ds} \qquad \boxed{A = \int_M^{M_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}} \qquad \boxed{A = \int_M^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz.}$$

Окремі випадки: 1. Сила постійна за величиною (**F = const**) і напрямком (**α = const**):

$$A = \int_M^{M_1} F\cos\alpha \cdot ds = F\cos\alpha \int_M^{M_1} ds = Fs\cos\alpha.$$

2. Сила постійна за величиною (**F = const**) і паралельна переміщенню (**α = 0**):

$$\boxed{A = \pm Fs.}$$

3. Сила перпендикулярна до переміщення:

$$\boxed{A = 0}$$

Можна довести такі теореми та твердження : $A=\int\limits_M^{M_1}\bar{R}\cdot d\bar{r}=\int\limits_M^{M_1}(\bar{F}_1+\bar{F}_2+\ldots)\cdot d\bar{r}=\int\limits_M^{M_1}\bar{F}_1\cdot d\bar{r}+\int\limits_M^{M_1}\bar{F}_2\cdot d\bar{r}+\ldots=A_1+A_1+\ldots=\sum A_i$

- **Робота рівнодіючої на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому ж переміщенні:** $\boxed{A=\sum A_i}$

- **Робота постійної сили за величиною та напрямом на складеному переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт цієї сили на кожному із складових переміщень** :

$$\boxed{A=\sum A_{si}} \qquad A=\bar{F}\cdot\bar{s}=\bar{F}\cdot(\bar{s}_1+\bar{s}_2+\ldots)=\bar{F}\cdot\bar{s}_1+\bar{F}\cdot\bar{s}_2+\ldots=A_{s1}+A_{s2}+\ldots=\sum A_{si}$$

- **Робота внутрішніх сил незмінюваної системи дорівнює нулю :** $\boxed{A^i=0}$

$$A^i=\int\limits_M^{M_1}(\bar{R}+\bar{R}')\cdot d\bar{r}=\int\limits_M^{M_1}(\bar{R}-\bar{R})\cdot d\bar{r}=0; \qquad (\bar{R}'=-\bar{R}).$$

- **Робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії та дорівнює добутку сили тяжіння на різницю висот :**

$$\boxed{A=-G(z_1-z)} \quad A=\int\limits_M^{M_1}G_x dx+G_y dy+G_z dz=\int\limits_M^{M_1}(-G)dz=-Gz\Big|_z^{z_1}=-G(z_1-z); \quad (G_x=G_y=0,\, G_z=-G)$$

- **Робота лінійної сили пружності (реакції пружини) за переміщення зі стану рівноваги:** $\boxed{A=-c\dfrac{\Delta x^2}{2}.}$

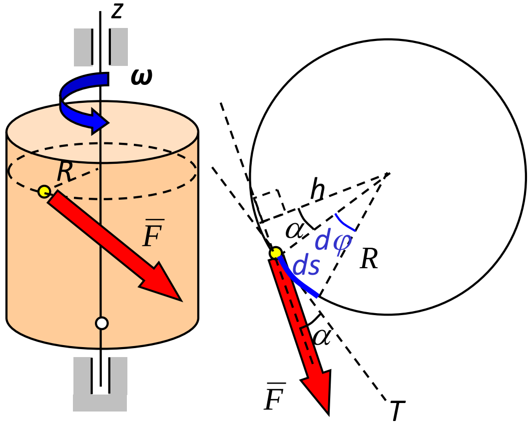
$$A=\int\limits_M^{M_1}R_x dx=\int\limits_M^{M_1}(-cx)dx=-c\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x_1}=-c\frac{x_1^2}{2}; \quad (R_x=-cx)$$

- **Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.**

Запишемо вираз для елементарної роботи сили, яка прикладена до точки, і виразимо елементарне переміщення через кут повороту тіла:

$$dA=F_\tau ds=F\cos\alpha\cdot ds=F\underbrace{\boxed{\cos\alpha\cdot R}}_{h}\cdot d\varphi; \qquad dA=Fh\cdot d\varphi=M_z(\bar{F})d\varphi.$$

- робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається, виражається через момент сили відносно осі.



Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається, для скінченого кута повороту: $\boxed{A=\int\limits_\varphi^{\varphi_1}M_z(\bar{F})d\varphi.}$

В окремому випадку постійного значення моменту сили відносно осі робота дорівнює добутку моменту сили на кут повороту: $\boxed{A=M_z(\bar{F})(\varphi_1-\varphi).}$

Потужність – величина, яка характеризується кількістю роботи, виконаної в одиницю часу: $\boxed{N=\dfrac{\delta A}{dt}.}$

Потужність сили, прикладеної до точки: $\boxed{N=\dfrac{\delta A}{dt}=\dfrac{F_\tau ds}{dt}=F_\tau v_\tau=\bar{F}\cdot\bar{v}.}$

Потужність сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається: $\boxed{N=\dfrac{\delta A}{dt}=\dfrac{M_z d\varphi}{dt}=M_z\omega_z=\bar{M}\cdot\bar{\omega}.}$

❖ **Кінетична енергія** – величина, яка характеризує здатність механічного руху перетворюватися на еквівалентну кількість іншого руху

Кінетична енергія матеріальної точки: $\boxed{T=\frac{mv^2}{2}}$

Кінетична енергія системи матеріальних точок: $\boxed{T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}}$

Кінетична енергія твердого тіла за поступального руху: $\boxed{T=\frac{Mv_C^2}{2}}$

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\frac{v^2}{2}\sum m_k=\frac{v^2}{2}M=\frac{Mv_C^2}{2};\qquad (v_1=v_2=...=v=v_C)$$

Кінетична енергія твердого тіла за обертального руху: $\boxed{T=\frac{I_z\omega_z^2}{2}}$

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\sum\frac{m_k(\omega_z h_k)^2}{2}=\frac{\omega_z^2}{2}\sum m_k h_k^2=\frac{I_z\omega_z^2}{2};\qquad (I_z=\sum m_k h_k^2)$$

Кінетична енергія твердого тіла за плоского руху: $\boxed{T=\frac{Mv_C^2}{2}+\frac{I_{zC}\omega_z^2}{2}}$

$$T=\sum\frac{m_k\bar v_k\cdot\bar v_k}{2}=\sum\frac{m_k(\bar v_C+\bar v_{kC})\cdot(\bar v_C+\bar v_{kC})}{2}=\frac{Mv_C^2}{2}+\boxed{\bar v_C\cdot\sum m_k\bar v_{kC}}+\boxed{\sum\frac{m_k v_{kC}^2}{2}.}$$

$$\bar v_C\cdot\sum m_k\frac{d\bar r_{kC}}{dt}=\bar v_C\cdot\frac{d}{dt}(\sum m_k\bar r_{kC})=0;\qquad (\sum m_k\bar r_{kC}=0)\qquad \frac{I_{zC}\omega_z^2}{2}$$

❖ **Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки. Зміна кінетичної енергії точки дорівнює роботі сил, які діють на точку на тому ж переміщенні:**

Запишемо основний закон динаміки точки: $m\bar a=\sum\bar F_i=\bar R$

Виразимо прискорення через швидкість і помножимо ліву та праву частини співвідношення скалярно на диференціал радіус-вектора :

$$m\frac{d\bar v}{dt}\cdot d\bar r=\bar R\cdot d\bar r\quad \text{або}\quad \boxed{m\bar v\cdot d\bar v}=\boxed{\bar R\cdot d\bar r.}$$

$$md\left(\frac{\bar v\cdot\bar v}{2}\right)=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)\qquad dA$$

Проінтегруємо отримане співвідношення: $\int d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\int_{M_0}^{M}dA;\quad \left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_0}^{v}=A$

Після підстановки границь отримаємо: $\boxed{\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A}$

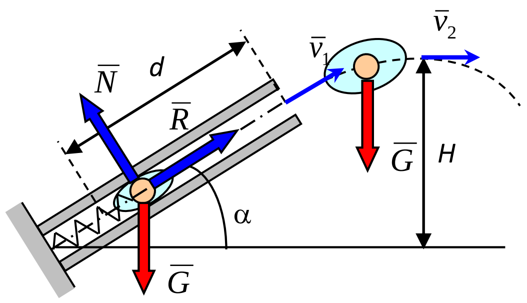
❖ **Теорема про зміну кінетичної енергії систем. Зміна кінетичної енергії системи дорівнює роботі сил, які діють на систему на відповідних переміщеннях точок системи:**

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії для довільної точки системи, при цьому виділимо роботу зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до цієї точки:

$\boxed{\frac{m_k v_k^2}{2}-\frac{m v_{k0}^2}{2}=A_k^i+A_k^e.}$ Підсумовуємо ліві та праві частини співвідношень: $\sum\frac{m_k v_k^2}{2}-\sum\frac{m v_{k0}^2}{2}=\sum A_k^i+\sum A_k^e.$

У лівій частині отримали різницю кінетичних енергій системи: $\boxed{T-T_0=\sum A_k^i+\sum A_k^e.}$ Для незмінюваної системи: $\boxed{T-T_0=\sum A_k^e;\quad \sum A_k^i=0}$

❖ **Приклад розв'язання задачі із застосуванням теореми про зміну кінетичної енергії для матеріальної точки** – Снаряд маси m викидається пружинним пристроєм із каналу під кутом α до горизонту. Довжина нерозтягнутої пружини з жорсткістю c дорівнює довжині канала l_0. Перед пострілом пружина стискається на величину d. Визначити швидкість снаряда при вильоті з каналу, а також максимальну висоту польоту.



Дано: α, c, d, m, l_0
Знайти: v_1, H

1. Вибираємо об'єкт – снаряд
2. Відкидаємо в'язі – канал ствола, пружину
3. Замінюємо в'язі реакціями – N, R
4. Додаємо активні сили – G
5. Записуємо теорему про зміну кінетичної енергії для точки: $\boxed{\dfrac{mv_1^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2} = A}$

Початкова швидкість снаряда дорівнює нулю: $v_0 = 0.$

Робота сил, прикладених до об'єкту, дорівнює: $A = A_N + A_G + A_R.$

Робота нормальної реакції дорівнює нулю (напрямок реакції перпендикулярний до переміщення): $A_N = 0$

Робота сили тяжіння: $A_G = -G\Delta h = -mgd\sin\alpha.$

Робота пружної реакції пружини (напрямок реакції збігається з переміщенням): $A_R = c\dfrac{d^2}{2}.$

Підставляємо визначені величини до теореми: $\dfrac{mv_1^2}{2} - 0 = -mgd\sin\alpha + c\dfrac{d^2}{2}.$

Визначаємо максимальну висоту польоту (повторюємо кроки 1-5): $\boxed{\dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} = A}$

Звідси величина швидкості вильоту снаряда: $\boxed{v_1 = \sqrt{\dfrac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha}.}$

Вертикальна швидкість снаряда в найвищій точці траєкторії дорівнює нулю : $v_{2y} = 0.$

Горизонтальна швидкість снаряда постійна (із закону збереження проекції на вісь x кількості руху точки) і дорівнює: $v_{2x} = v_{1x} = \sqrt{\dfrac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha}\cos\alpha.$

Робота сили тяжіння : $A_G = -G\Delta h = -mg(H - l_0\sin\alpha).$

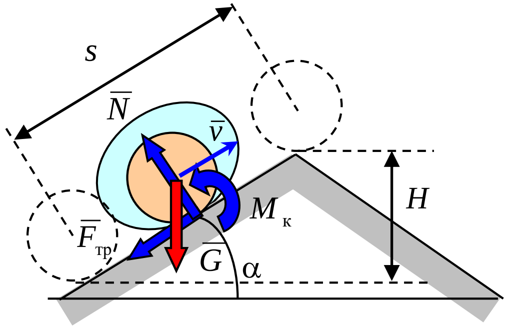
Підставляємо визначені величини до теореми:
$$\frac{m\left(\dfrac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha\right)\cos^2\alpha}{2} - \frac{m\left(\dfrac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha\right)}{2} = -mg(H - l_0\sin\alpha).$$

Після скорочень та перетворень $\left(\dfrac{cd^2}{2m} - gd\sin\alpha\right)\sin^2\alpha = g(H - l_0\sin\alpha).$

Звідси максимальна висота польоту $\boxed{H = \left(\dfrac{cd^2}{2mg} - d\sin\alpha\right)\sin^2\alpha + l_0\sin\alpha.}$

Зауважимо, що попередній вираз можна швидше отримати, записуючи теорему про зміну кінетичної енергії тільки для вертикальної швидкості руху точки, оскільки горизонтальні сили відсутні і горизонтальна швидкість не змінюється.

❖ **Приклад розв'язання задачі на застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи.** Масивний паперовий рулон радіуса R, який почав рух від поштовху, котиться вгору без прослизання за інерцією вздовж похилої шорсткої площини під кутом α до горизонту із деякою початковою швидкістю. Коефіцієнт тертя кочення f_k. Визначити початкову швидкість рулона, необхідну для того, щоб він міг перекотитись через вершину на висоті H від початкового положення.



Дано: α, f_k, H, R
Знайти: v_0

1. Обираємо об'єкт – рулон
2. Відкидаємо в'язь – опорну площину
3. Замінюємо в'язі реакціями – N, $F_{тр}$, $M_к$
4. Додаємо активні сили – G
5. Записуємо теорему про зміну кінетичної енергії для твердого тіла:

$$\boxed{T - T_0 = A^e}$$

Кінетична енергия на вершині дорівнює нулю: $T = 0.$

Кінетична енергія в початковий момент часу дорівнює
$$\boxed{T_0 = \frac{Mv_{C0}^2}{2} + \frac{I_{zC}\omega_{z0}^2}{2}}$$

Момент інерції маси суцільного циліндра дорівнює: $I_{zC} = \dfrac{MR^2}{2}$

Кутова швидкість дорівнює: $\omega_{z0} = \dfrac{v_{C0}}{R}$

Тоді кінетична енергія у початковий момент часу: $T_0 = \dfrac{Mv_{C0}^2}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{MR^2}{2}\left(\dfrac{v_{C0}}{R}\right)^2 = \dfrac{3Mv_{C0}^2}{4}.$

Робота сил, прикладених до об'єкта, дорівнює: $A^e = A_N + A_{Fmp} + A_G + A_{Mк}.$

Робота нормальної реакції дорівнює нулю : $A_N = 0.$

Робота сили тертя ковзання дорівнює нулю (прикладена у МЦШ) : $A_{Fmp} = 0.$

Робота сили тяжіння: $A_G = -G\Delta h = -MgH.$

Робота моменту опору коченню: $A_{Mк} = -M_к \cdot (\varphi - \varphi_0).$

Момент опору коченню та різність кутів обертання рулона $M_к = f_к N = f_к G\cos\alpha = f_к Mg\cos\alpha.$ $\quad \varphi - \varphi_0 = \dfrac{s}{R} = \dfrac{H}{R\sin\alpha}.$

Підставляємо визначені величини в теорему:

$$-\frac{3Mv_{C0}^2}{4} = -MgH - f_к Mg\cos\alpha\frac{H}{R\sin\alpha},$$

Після скорочень та перетворень отримуємо:

$$\boxed{v_{C0} = \sqrt{\frac{4}{3}gH(1 + f_к\frac{ctg\alpha}{R})}.}$$

Зауважимо, що вираз для початкової швидкості не залежить від маси рулону. Маса рулону, як міра інертності, буде впливати на величину зусилля, яке має бути прикладене до тіла, щоб надати йому вказану початкову швидкість

❖ **Потенціальне силове поле**

Силове поле – простір, в кожній точці якого на матеріальну точку діють сили, залежні від координат точки.
Стаціонарне силове поле – поле, діючі сили якого не залежать від часу, $F = F(x, y, z)$ (поле сили тяжіння, поле сили пружності).
Нестаціонарне силове поле – поле, діючі сили якого залежать від часу, $F = F(x, y, z, t)$ (електромагнітне поле).

❖ **Принцип Д'аламбера** (Германа, Ейлера) - загальний метод, за допомогою якого рівнянням динаміки за формою надається вигляд рівнянь статики. Завдяки своїй простоті цей метод набув широкого застосування у багатьох прикладних дисциплінах.

❖ **Принцип Д'аламбера для матеріальної точки.** Основне рівняння динаміки точки: $\boxed{m\bar{a} = \sum \bar{P}_i.}$

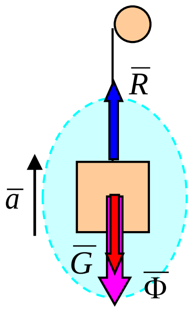
Перенесемо добуток маси на прискорення у праву частину : $0 = \sum \bar{P}_i - \boxed{m\bar{a}.}$

Цей додатковий доданок має розмірність сили та приймається за силу інерції, спрямовану у бік, протилежний прискоренню:

$$\boxed{\bar{\Phi} = -m\bar{a}.}$$

З введенням сили інерції рівняння динаміки точки набуває вигляду рівняння рівноваги: $\boxed{\sum \bar{P}_i + \bar{\Phi} = 0.}$

Таким чином, **геометрична сума прикладених до точки сил і сили інерції цієї точки дорівнює нулю.** Сила інерції умовно додається до сил, що діють на точку, утворюючи взаємно врівноважену систему сил.



Приклад 1: **Кабіна ліфта вагою *G* піднімається тросом із прискоренням *a*. Визначити натяг троса.**

1. Вибираємо об'єкт (кабіна ліфта)

2. Відкидаємо в'язь (трос) та замінюємо її реакцією ***R***.

3. Додаємо до діючих сил силу інерції : $\bar{\Phi} = -\boldsymbol{m\bar{a}}.$

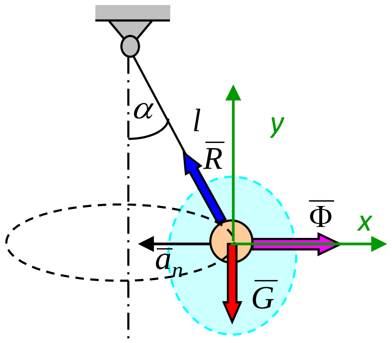
4. Складаємо рівняння рівноваги :

$$\sum \boldsymbol{Y_i} = 0; \quad \boldsymbol{R} - \boldsymbol{G} - \Phi = 0.$$

Визначаємо реакцію троса: $R = G + \Phi = G + \frac{G}{g} a_y = G(1 + \frac{a_y}{g}).$

Визначаємо натяг троса:

$$\bar{T} = -\bar{R}; \quad T = R = G(1 + \frac{a_y}{g}).$$



Приклад 2: Вантаж вагою ***G*** підвішений на тросі довжиною ***l*** рухається за круговою траєкторією в горизонтальній площині з певною швидкістю. Кут відхилення троса від вертикалі дорівнює **α**. Визначити натяг троса та швидкість вантажу.

1. Вибираємо об'єкт (вантаж).
2. Відкидаємо в'язь (трос) та замінюємо її реакцією ***R***.
3. Додаємо до діючих сил силу інерції: $\bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n; \quad \Phi_n = m\frac{v^2}{\rho} = m\frac{v^2}{l\sin\alpha}.$
4. Складаємо рівняння рівноваги: $\sum X_i = 0; \quad -R\sin\alpha + \Phi = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad R\cos\alpha - G = 0.$

З першого рівняння визначаємо реакцію троса: $R = \frac{G}{\cos\alpha}.$ Визначаємо натяг троса: $\bar{T} = -\bar{R}; \quad T = R = \frac{G}{\cos\alpha}.$

Підставляємо значення реакції троса і сили інерції у друге рівняння та визначаємо швидкість вантажу: $-\frac{G}{\cos\alpha}\sin\alpha + \frac{G}{g}\frac{v^2}{l\sin\alpha} = 0.$ $\boxed{v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.}$

Можна порівняти хід розв'язання та результат з прикладом 3 у лекції 1.4.

❖ **Принцип Д'аламбера для невільної механічної системи.**

Принцип Д'аламбера для *k*-тої точки: $\boxed{\bar{P}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0.}$

Тут $\boldsymbol{P_k}$ – рівнодіюча заданих сил, прикладених до точки,
$\boldsymbol{R_k}$ – рівнодіюча реакцій в'язей, прикладених до точки,
$\boldsymbol{\Phi_k} = -m\boldsymbol{a_k}$ – сила інерції точки.

Складемо усі ***n*** рівнянь: $\sum\bar{P}_k + \sum\bar{R}_k + \sum\bar{\Phi}_k = 0.$

Таким чином, **геометрична сума головних векторів заданих сил, реакцій в'язей та сил інерції матеріальних точок дорівнює нулю.** $\boxed{\bar{P}^* + \bar{R}^* + \bar{\Phi}^* = 0.}$

Тут $\boldsymbol{P^*}$ – головний вектор заданих сил, прикладених до точки,
$\boldsymbol{R^*}$ – головний вектор реакцій в'язей, прикладених до точки,
$\boldsymbol{\Phi^*}$ – головний вектор сил інерції точок системи.

Помножимо рівняння, що виражає принцип Д'аламбера на радіус-вектор, проведений з центру ***O*** до точки $\boxed{\bar{r}_k \times \bar{P}_k + \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0.}$

Складемо усі ***n*** рівнянь: $\sum\bar{r}_k \times \bar{P}_k + \sum\bar{r}_k \times \bar{R}_k + \sum\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0.$

Таким чином, **геометрична сума головних моментів заданих сил, реакцій в'язей та сил інерції матеріальних точок відносно будь-якого центру дорівнює нулю.** $\boxed{\bar{M}_O^P + \bar{M}_O^R + \bar{M}_O^\Phi = 0.}$

Тут $\boldsymbol{M_O^P}$ – головний момент заданих сил відносно центру *O*,
$\boldsymbol{M_O^R}$ – головний момент реакцій в'язей відносно центру *O*,
$\boldsymbol{M_O^\Phi}$ – головний момент сил інерції точок системи відносно центру *O*.

❖ **Приведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого вигляду.** У динаміці за центр приведення зазвичай приймається центр мас системи. В результаті приведення сил інерції у загальному випадку отримують **головний вектор сил інерції та головний момент сил інерції відносно центру мас**:

$$\boxed{\begin{aligned}&\bar{\Phi}^* = \sum\bar{\Phi}_k = -\sum m_k\bar{a}_k;\\ &\bar{M}_C^\Phi = \sum\bar{M}_{iC}^\Phi = -\sum\bar{r}_k \times m_k\bar{a}_k.\end{aligned}}$$

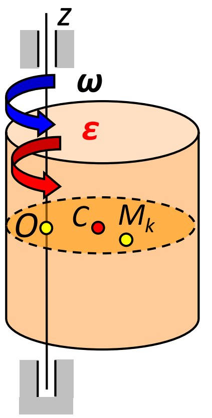
- **Головний вектор сил інерції твердого тіла** не залежить від вибору центру приведення і **для всіх типів руху дорівнює**: $\boxed{\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C.}$

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}; \quad \text{або} \quad M\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k; \Rightarrow M\frac{d^2\bar{r}_C}{dt^2} = \sum m \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} \quad \text{або} \quad M\bar{a}_C = \sum m_k \bar{a}_k; \Rightarrow \bar{\Phi}^* = \sum \bar{\Phi}_k = -\sum m_k \bar{a}_k = -M\bar{a}_C;$$

- **Приведення сил інерції точок твердого тіла при поступальному русі**. У разі поступального руху прискорення всіх точок однакові і головний момент сил інерції відносно центру мас дорівнює нулю $\bar{M}_C^\Phi = \sum \bar{M}_{iC}^\Phi = -\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{a}_C = -\sum m_k \bar{r}_k \times \bar{a}_C = -M\bar{r}_C \times \bar{a}_C = 0;$ через те, що радіус-вектор центру мас дорівнює нулю, якщо центр приведення збігається з центром мас.

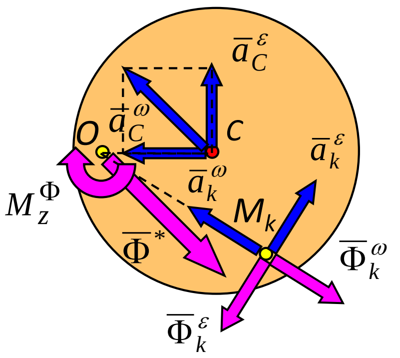
Таким чином, сили інерції приводяться до рівнодіючої сили, прикладеної в центрі мас, яка дорівнює за модулем добутку маси тіла на модуль прискорення його центру мас і спрямованої у протилежному напрямку до цього прискорення.

Приведення сил інерції точок твердого тіла під час обертального руху навколо нерухомої осі. Розглянемо тіло, що має площину матеріальної симетрії, яка перпендикулярна осі обертання. В цьому випадку вісь обертання є головною віссю інерції тіла в точці ***O***. Прискорення всіх точок, що лежать на одній прямій, паралельній осі обертання, геометрично рівні. Тому сили інерції точок, симетричних відносно площини матеріальної симетрії, також рівні, та їхня рівнодіюча лежатиме в цій площині (у точці M_k)



Головний вектор сил інерції дорівнює: $\boxed{\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C.}$ Прискорення центру мас: $\bar{a}_C = \bar{a}_C^\varepsilon + \bar{a}_C^\omega; \quad a_C = OC\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

У разі вибору центру приведення в точці ***O*** головний вектор сил інерції повинен бути прикладений у цій точці паралельно вектору прискорення центру мас у протилежний бік:



У довільній точці M_k прискорення дорівнює: $\bar{a}_k = \bar{a}_k^\varepsilon + \bar{a}_k^\omega; \quad a_k^\varepsilon = \varepsilon OM_k; \quad a_k^\omega = \omega^2 OM_k$

Оскільки лінії дії відцентрових сил інерції проходять через центр обертання, то головний момент сил інерції обчислюється як сума моментів обертальних сил інерції

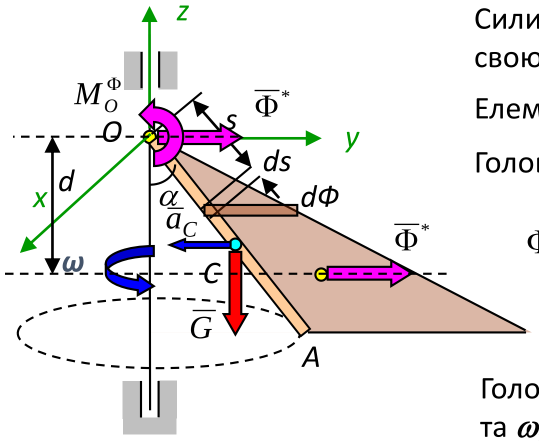
$$M_O^\Phi = -\sum \Phi_k^\varepsilon OM_k = -\sum m_k \varepsilon OM_k^2 = -\varepsilon \sum m_k OM_k^2 = -I_z \varepsilon.$$

Головний момент сил інерції дорівнює добутку кутового прискорення на момент інерції тіла відносно осі обертання та спрямований у бік, протилежний кутовому прискоренню:

$\boxed{M_z^\Phi = -I_z \varepsilon.}$ **Таким чином, сили інерції приводяться до головного вектору та головного моменту сил інерції.**

Як і в статиці, силу і пару сил можна замінити однією силою - рівнодіючою, прикладеною в новому центрі приведення. Можна показати, що рівнодіюча сил інерції буде прикладена у центрі коливань. В окремому випадку, якщо центр мас лежить на осі обертання, головний вектор сил інерції дорівнює нулю і сили інерції приводяться до пари $\boxed{\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C = 0.}$ $\boxed{M_z^\Phi = -I_{zC}\varepsilon.}$

Приклад: Однорідний стрижень ***OA*** масою ***M*** довжиною ***l***, шарнірно підвішений у точці ***O*** до осі, що обертається з кутовою швидкістю **ω**, знаходиться у відносній рівновазі під кутом **α** до осі обертання. Визначити сили інерції та кут **α**.



Сили інерції у кожній точці стрижня є пропорційними прискоренню, яке спрямоване до осі, та величина якого у свою чергу пропорційна відстані від точки до осі обертання (трикутна епюра розподілу).

Елементарна сила інерції, прикладена до елементарної маси довжиною ***ds***, розташованої на відстані ***s*** від точки ***O***, дорівнює:

$$d\Phi = a^\omega dm = \omega^2 s\cdot\sin\alpha\cdot\rho A ds$$

Головний вектор сил інерції визначається інтегруванням ***dΦ*** за довжиною стрижня :

$$\Phi^* = \int d\Phi = \int_0^l \omega^2 s\cdot\sin\alpha\cdot\rho A ds = \omega^2\sin\alpha\cdot\rho A\int_0^l s ds = \omega^2\sin\alpha\cdot\rho A\frac{s^2}{2}\Big|_0^l = \frac{1}{2}\omega^2\sin\alpha\cdot\rho A l^2 = \frac{1}{2}M\omega^2 l\sin\alpha.$$

Той самий результат можна набагато простіше отримати використовуючи прискорення центру мас

$$\boxed{\Phi^* = Ma_C = M\omega^2\frac{l}{2}\sin\alpha.}$$

Головний момент сил інерції не можна визначити за формулою $\boldsymbol{M^\Phi_0 = I_x\varepsilon_x}$, через те, що стрижень ***OA*** знаходиться у відносній рівновазі та $\boldsymbol{\omega_x = \varepsilon_x = 0}$. Проте сили інерції від обертання стрижня відносно осі ***z*** створюють момент сил інерції:

$$M_O^\Phi = \int z d\Phi = \int_0^l s\cos\alpha\cdot\omega^2 s\cdot\sin\alpha\cdot\rho A ds = \omega^2\cos\alpha\sin\alpha\cdot\rho A\int_0^l s^2 ds = \omega^2\cos\alpha\sin\alpha\cdot\rho A\frac{s^3}{3}\Big|_0^l = \frac{1}{3}\omega^2\cos\alpha\sin\alpha\cdot Ml^2 = \Phi^*\frac{2}{3}l\cos\alpha.$$

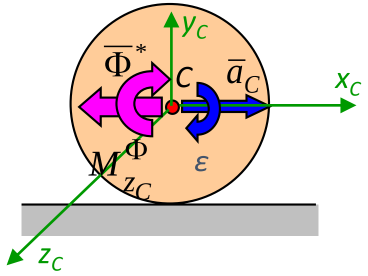
Таким чином, сили інерції приводяться до головного вектора, прикладеного в центрі приведення ***O***, та головного моменту відносно цього центру.

Отриману систему із сили та пари можна замінити однією силою - рівнодіючою сил інерції, прикладеною в точці, віддаленій від центру приведення вздовж перпендикуляру до напрямку сили на відстані:

$$d = \frac{M_O^\Phi}{\Phi^*} = \frac{2}{3}l\cos\alpha.$$

Кут α можна визначити з рівняння відносної рівноваги:

$$\sum M_{iO} = 0;\quad \Phi\cdot\frac{2}{3}l\cos\alpha - Mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; M\omega^2\frac{l}{2}\sin\alpha\cdot\frac{2}{3}l\cos\alpha - Mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\cos\alpha = \frac{3g}{2\omega^2 l}.}$$

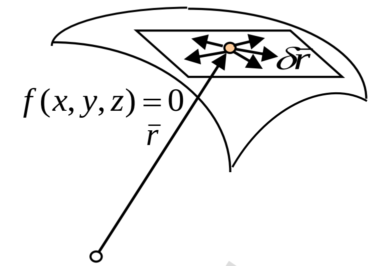


Приведення сил інерції точок твердого тіла при плоскому русі. Розглянемо тіло, що здійснює плоский рух і має площину матеріальної симетрії паралельну площині руху. Цей рух може бути розкладено на поступальний рух з центром мас тіла ***C*** і обертальний рух навколо рухомої осі z_C, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до площини руху.

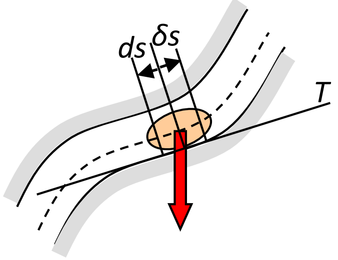
Відповідно до цього сили інерції поступального руху приводяться до головного вектора сил інерції, прикладеного в центрі мас, та головного моменту сил інерції (пари сил, що лежить у площині руху):

$$\boxed{\overline{\Phi}^* = -M\overline{a}_C.}\qquad \boxed{M^\Phi_{z_C} = -I_{z_C}\varepsilon.}$$

Можливі переміщення – нескінченно малі переміщення, які допускаються накладеними на систему в'язями.



Можливі переміщення лежать у дотичній площині до поверхні в'язі і є **збільшеннями радіус-вектора** з точністю до нескінченно малих. У разі нестаціонарної голономної в'язі ***f*** **(*x, y, z, t*) = 0 можливі переміщення** розглядаються для положення та форми поверхні в'язі, що відповідають даному моменту часу. **Можливі переміщення не залежать від прикладених до системи сил.**



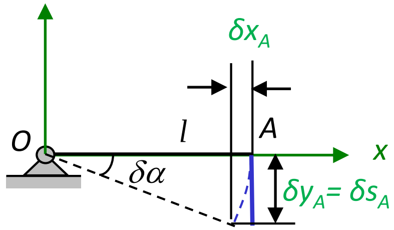
Дійсні переміщення – це нескінченно малі (елементарні) переміщення, які дійсно (фактично) відбуваються за час *dt*, що допускаються накладеними на систему в'язями. Дійсні переміщення залежать від сил, прикладених до системи, від виду в'язей (стаціонарних, нестаціонарних, голономних, неголономних) та початкових умов. Таким чином, можливі переміщення є більш загальним поняттям, ніж дійсні переміщення.

Оскільки вектор положення точки системи можна виразити через узагальнені координати, $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_n)$
то можливі переміщення виражаються через збільшення узагальнених координат як повний диференціал:

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n$$

або

$$\boxed{\delta\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i.}$$



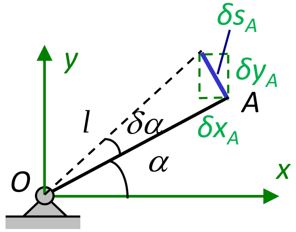
$$\delta x_A = l - l\cos\delta\alpha;$$

$$\delta y_A = l\sin\delta\alpha.$$

Для малих кутів **cosα ≈ 1**, **sinα ≈ α**, тоді

$$\boxed{\begin{aligned}\delta x_A &\approx 0;\\ \delta y_A &\approx \delta s_A = l\delta\alpha.\end{aligned}}$$

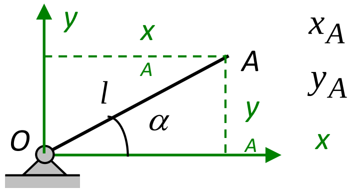
Наприклад, для похилого стрижня:



$$\boxed{\delta s_A = l\delta\alpha.}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\delta x_A &= \delta s_A\sin\alpha = l\sin\alpha\delta\alpha;\\ \delta y_A &\approx \delta s_A\cos\alpha = l\cos\alpha\delta\alpha.\end{aligned}}$$

Аналітичний спосіб - обчислюється варіація від координат:



$$x_A = l\cos\alpha;$$

$$y_A = l\sin\alpha$$

$$\delta x_A = \frac{\partial}{\partial\alpha}(l\cos\alpha)\delta\alpha = -l\sin\alpha\delta\alpha;$$

$$\delta y_A = \frac{\partial}{\partial\alpha}(l\sin\alpha)\delta\alpha = l\cos\alpha\delta\alpha.$$

На відміну від геометричного способу, знаки можливого збільшення координат отримуються автоматично. У разі використання геометричного способу в подальших обчисленнях, наприклад, роботи, необхідно враховувати напрямок отриманого збільшення (переміщення).

Можлива робота сили – елементарна робота сили на тому чи іншому можливому переміщенні: $\boxed{\delta A = \bar{F}\delta\bar{r}.}$

У координатному вигляді: $\boxed{\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.}$ У природному вигляді: $\boxed{\delta A = F\delta s\cos(\bar{F}, \delta\bar{r}).}$

Ідеальні в'язі – в'язі, за яких сума елементарних робіт сил реакцій в'язей на будь-якому можливому переміщенні дорівнює **нулю:**

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Приклади ідеальних в'язей - абсолютно гладенька поверхня (під час ковзання), абсолютно тверда поверхня (під час кочення без ковзання). Будь-яку неідеальну в'язь можна розглядати як ідеальну, якщо відповідні реакції в'язей (що здійснюють роботу на можливих переміщеннях) зарахувати до заданих (активних) сил.

Принцип можливих переміщень. Для рівноваги **матеріальної системи**, підпорядкованої **голономним**, **стаціонарним**, **двостороннім** та **ідеальним в'язям**, необхідно й достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні з передбачуваного положення рівноваги дорівнювала нулю:

$$\delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Доказ необхідності: Система знаходиться у рівновазі та для кожної точки задовольняється рівняння рівноваги:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0.$$

$$\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \underbrace{\boxed{\sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k}}_{=0} = 0. \Rightarrow \boxed{\delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.}$$

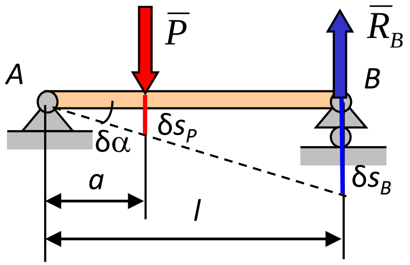
Доказ достатності: Дано: $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$

Припустимо, що рівноваги немає.

$$(\bar{F}_k + \bar{R}_k) d\bar{r}_k = (\bar{F}_k + \bar{R}_k)\delta \bar{r}_k > 0. \Rightarrow \sum (\bar{F}_k + \bar{R}_k)\delta \bar{r}_k = \sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \underbrace{\boxed{\sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k}}_{=0} > 0.$$

Приклади використання принципу можливих переміщень для визначення реакцій в'язей :

Приклад 1. Визначити реакцію балки у правій опорі:



Балка нерухома і немає ні можливих, ні дійсних переміщень. Відкинемо в'язь, реакцію якої необхідно визначити, і замінимо її реакцією:

Без правої опори балка може повертатися під дією активних сил, реакцію R_B зараховуємо до активних сил.

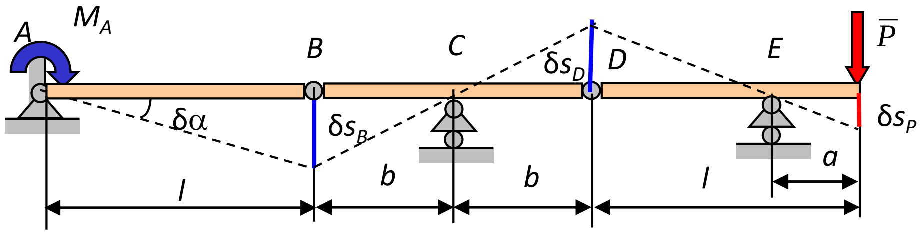
Задаємо мале можливе переміщення:

Обчислимо можливі переміщення: $\delta s_P = a\delta\alpha; \delta s_B = l\delta\alpha.$

Запишемо суму робіт: $\delta A^{P+R} = P\delta s_P - R_B \delta s_B = 0. \Rightarrow Pa\delta\alpha - R_B l\delta\alpha = 0. \Rightarrow \boxed{R_B = \dfrac{Pa\delta\alpha}{l\delta\alpha} = \dfrac{Pa}{l}.}$

Приклад 2. Визначити опорний момент багатопрогонової складеної балки у лівій опорі:

Відкинемо в'язь у жорсткому затисненні, що перешкоджає повороту балки, і замінимо її парою сил M_A:



Обчислимо можливі переміщення:

$$\delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_D = \delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_F = \frac{a}{l-a}\delta s_D = \frac{a}{l-a} l\delta\alpha.$$

Запишемо суму робіт:

$$\delta A = M_A \delta\alpha + F\delta s_F = 0.$$

$$M_A \delta\alpha + F\frac{a}{l-a} l\delta\alpha = 0.$$

$$\boxed{M_A = -F\frac{a}{l-a} l.}$$

Аналітична механіка встановлює загальні, єдині методи вивчення руху та рівноваги будь-яких найскладніших матеріальних систем засобами математичного аналізу. Для цього вводяться нові поняття та узагальнюються старі, вже відомі.

В'язі тепер розглядаються як деякі умови, що накладаються на систему, які повинні задовольнятися в процесі руху системи. Вони містять співвідношення (рівняння чи нерівності) між координатами, компонентами швидкостей та прискорень та, можливо, часу.

Класифікація в'язей за інтегрованістю :

Голономні (**геометричні**) – виражаються кінцевими рівняннями відносно координат або інтегрованими диференціальними рівняннями відносно координат:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, t) = 0$$

Неголономні (**кінематичні**) – виражаються неінтегрованими диференціальними рівняннями відносно координат, тобто рівняннями, які містять не тільки координати точок системи, але й їхні похідні за часом:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$$

Класифікація в'язей у залежності від часу :

Стаціонарні (**склерономні**) – незалежні від часу: $\varphi(x_k, y_k, z_k) = 0$

Наприклад, рівняння траєкторії, отримане для деякої точки шатуна кривошипно-шатунного механізму розглядається как рівняння склерономної голономної в'язі:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Нестаціонарні (**реономні**) – залежні від часу. Наприклад, кінематичне збурення коливань

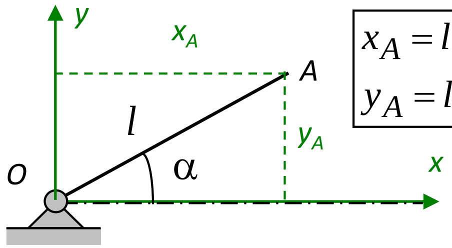
Класифікація в'язей у залежності від обмеження руху :

Утримуючі (**двобічні**) – описуються рівнянням, що виключає можливість покидання точкою траєкторії або поверхні, що описується рівнянням. Цьому відповідає, наприклад, жорсткий зв'язок у вигляді шарнірного стрижня.

Неутримуючі (**однобічні**) – виражаються нерівністю, що регламентує в'язь лише в одному напрямку, наприклад, гнучка нитка або гладенька поверхня.

Узагальнені координати – незалежні параметри, які однозначно визначають положення механічної системи при її русі. Узагальненість полягає у тому, що вони можуть мати різну природу (лінійні чи кутові переміщення відносно деякого початкового положення чи будь-які інші величини). Загальне позначення - q_i (**i = 1, ..., n**).

Число ступенів свободи – число незалежних узагальнених координат, якими можна виразити декартові координати всіх точок системи. Наприклад:



$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= l\cos\alpha; \\ y_A &= l\sin\alpha \end{aligned}}$$

Тут положення будь-якої точки стрижня (наприклад, точки ***A***) однозначно задається значенням лише однієї величини – кута **α**, який є узагальненою координатою (***q*** **= α**). Число ступенів свободи дорівнює ***n*** **= 1**. Рівняння в'язі для цієї точки ***A***:

$$\boxed{x^2 + y^2 = l^2}$$

Узагальнені сили є наступним кроком до узагальнення, а саме, механічної дії заданих сил на систему після введення узагальнених координат (узагальнення завдання руху системи).

Нехай механічна система має ***s*** ступенів свободи, її положення визначається ***s*** узагальненими координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Надаємо деякій узагальненій координаті q_j нескінченно мале збільшення, залишаючи інші узагальнені координати незмінними, тобто $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{j-1} = 0$; $\delta q_j \neq 0$, $\delta q_{j+1} = \ldots = \delta q_s = 0$. В результаті всі ***N*** точок системи отримають деякі нескінченно малі переміщення:

$\delta \bar{s}_{1,j}, \delta \bar{s}_{2,j}, \ldots, \delta \bar{s}_{N,j}$ - сукупність цих переміщень є одним із можливих переміщень системи.

Елементарна робота всіх заданих сил системи на цих переміщеннях дорівнює: $\delta A_{qj} = \sum_{k=1}^{N} F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj})$.

Поставимо у відповідність до всіх заданих сил системи деяку одну уявну силу, яка здійснює таку ж роботу на даному можливому (узагальненому) переміщенні δq_j, що і всі сили системи:

$$Q_j \delta q_j = \sum_{k=1}^{N} F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj}).$$

Звідси визначається величина цієї сили :

$$\boxed{Q_j = \frac{\sum_{k=1}^{N} F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj})}{\delta q_j} = \frac{\delta A_{qj}}{\delta q_j}.}$$

узагальнена сила Q_j, що відповідає узагальненій координаті q_j – це скалярна величина, що дорівнює відношенню елементарної роботи заданих сил на всіх переміщеннях системи, викликаних елементарним приростом $\delta q_j \neq 0$ координати q_j, до величини цього приросту.

1. Розмірність цієї сили визначається розмірністю узагальненої координати. Наприклад, якщо q_j є лінійною узагальненою координатою, то розмірність узагальненої сили Q_j відповідає силі (Н). Якщо q_j є кутовою узагальненою координатою, то розмірність узагальненої сили Q_j відповідає парі сил чи моменту (Н·м).

2. Число узагальнених сил дорівнює числу узагальнених координат. Розмірність кожної з узагальнених сил визначається відповідною розмірністю узагальненої координати.

Інші формули для обчислення узагальненої сили:

У векторній формі

$$\delta A_{qj} = \sum_{k=1}^{N} F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj}) = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_{kj}.$$

Радіус-вектор *k*-тої точки є функцією всіх узагальнених координат: $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s)$

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j.$$

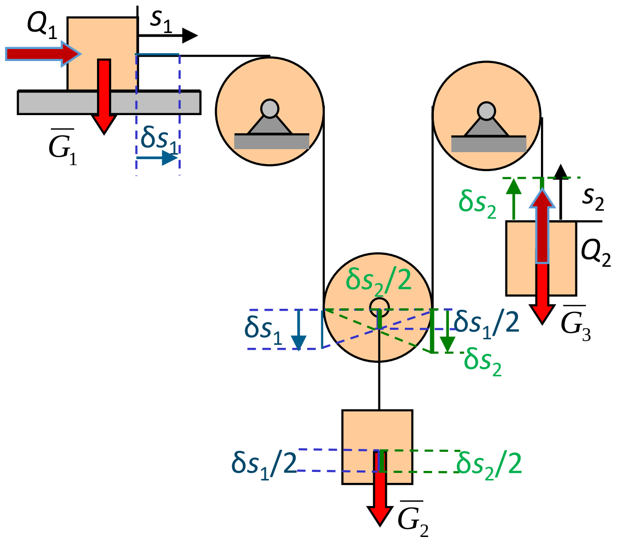
Варіація радіус-вектора за узагальненими координатами при $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{j-1} = 0$; $\delta q_j \neq 0$, $\delta q_{j+1} = \ldots = \delta q_s = 0$:

Звідси: $\delta A_{qj} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_{kj} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j. \Rightarrow \boxed{Q_j = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}.}$

У координатній формі: $\boxed{Q_j = \sum_{k=1}^{N} \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).}$

У випадку потенціальних сил: $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s)$. $\boxed{T + \Pi = \text{const.}} \Rightarrow \delta T + \delta \Pi = 0. \Rightarrow$ $\boxed{\delta T = \delta A.} \Rightarrow$ $\delta A = \delta T = -\delta \Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\delta q_j. \Rightarrow \boxed{Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.}$

Приклад обчислення узагальнених сил. Для механічної системи трьох вантажів із двома нерухомими та одним рухомим блоками визначити узагальнені сили Q_j.



1. Число узагальнених сил дорівнює числу узагальнених координат. Число узагальнених координат дорівнює кількості ступенів свободи, яку можна визначити послідовним накладенням в'язей. Обмежимо горизонтальне переміщення вантажу 1, вантажі 2 та 3 можуть переміщуватися вертикально.

Обмежимо додатково вертикальне переміщення, наприклад, вантажу 3.

Вантаж 2 переміщуватися не може (в'язі вважаємо двосторонніми).

Отже n **= 2**. Обираємо узагальнені координати $q_1 = s_1$ та $q_2 = s_2$:

2. Для визначення Q_1 задаємо довільне мале переміщення $\delta q_1 = \delta s_1$ ($\delta q_2 = \delta s_2 = 0$).

Обчислюємо можливу роботу заданих сил: $\delta A_{q1} = G_2 \dfrac{\delta s_1}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{Q_1 = \dfrac{\delta A_{q1}}{\delta q_1} = \dfrac{G_2}{2}.}$

3. Для визначення Q_2 задаємо довільне мале переміщення $\delta q_2 = \delta s_2$ ($\delta q_1 = \delta s_1 = 0$).

Обчислюємо можливу роботу заданих сил: $\delta A_{q2} = G_2 \dfrac{\delta s_2}{2} - G_3 \delta s_2.$ $\Rightarrow$ $\boxed{Q_2 = \dfrac{\delta A_{q2}}{\delta q_2} = \dfrac{G_2}{2} - G_3.}$

Рівняння рівноваги в узагальнених силах. Відповідно до принципу можливих переміщень за рівноваги системи: $\boxed{\delta A = 0.}$

Задаємо можливі переміщення точок системи, спричинені нескінченно малими приростами всіх узагальнених координат: $\delta \overline{r}_k = \dfrac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 \ldots + \dfrac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s = \sum_{j=1}^{s} \dfrac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j.$

Обчислимо можливу роботу заданих сил: $\delta A = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \sum_{j=1}^{s} \dfrac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j.$ Перегрупуємо суми добутків

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \boxed{\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}.} \Rightarrow \boxed{\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \cdot Q_j = 0.}$$

$\Downarrow$

Q_j

Збільшення узагальнених координат довільні та незалежні один від одного. Тому в отриманому рівнянні всі коефіцієнти поруч із ними **(узагальнені сили) повинні дорівнювати нулю:**

$\boxed{Q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots s).}$ **- умови рівноваги силу узагальнених силах.**

У розглянутому вище прикладі для рівноваги системи необхідно, щоб Q_1 і Q_2 дорівнювали нулю. Видно, що $Q_1 \neq 0$ та рівноваги немає.

Рівновага цієї системи можлива лише за наявності сили тертя певної величини між вантажем 1 і опорною площиною. Тоді ця сила увійде у вираз для Q_1:

$$Q_1 = \frac{\delta A_{q1}}{\delta q_1} = \frac{G_2}{2} - F_{\text{тр}} = \frac{G_2}{2} - fN = \frac{G_2}{2} - fG_1.$$

Тепер рівняння рівноваги для даної системи визначають співвідношення між силами та мають вигляд: $\dfrac{G_2}{2} - fG_1 = 0;$ $\dfrac{G_2}{2} - G_3 = 0.$

Рівняння Лагранжа II роду. Рівняння є диференціальними рівняннями руху системи відносно узагальнених координат системи. Скористаємося загальним рівнянням динаміки: $\boxed{\delta A = 0,}$ де **δA** – можлива робота всіх заданих сил та сил інерції на будь-якому можливому переміщенні.

1. Задаємо можливі переміщення точок системи, спричинені нескінченно малими збільшеннями всіх узагальнених координат:

Обчислимо можливу роботу заданих сил та сил інерції: $\delta A = \sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j.$ $\quad \delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j.$

Перегрупуємо суми добутків $\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \cdot \sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$ або $\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \cdot (\underbrace{\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}}_{Q_j} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}}_{Q_j^{\Phi}}).$ $\Rightarrow$ $\boxed{\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \cdot (Q_j + Q_j^{\Phi}) = 0.}$

Збільшення узагальнених координат довільні та незалежні один від одного, тому в отриманому рівнянні всі коефіцієнти поруч із ними **(узагальнені сили) повинні дорівнювати нулю:** $\boxed{Q_j + Q_j^{\Phi} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots s).}$ **- рівняння руху системи, еквівалентні загальному рівнянню динаміки.**

2. До узагальнених сил інерції Q_j^{Φ} входять маси та прискорення точок системи. Спробуємо виразити ці сили через швидкості точок і в результаті через кінетичну енергію:

$$Q_j^{\Phi} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}.$$

Додаємо до цього виразу два однакових доданки різного знаку та наступного вигляду: $\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}.$

$$Q_j^{\Phi} = -\boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}}}_{\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_k}}} + \boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \underbrace{\boxed{\frac{d\bar{r}_k}{dt}}}_{\bar{v}_k} \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}} - \boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \boxed{\frac{d\bar{r}_k}{dt}} \cdot \boxed{\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}}}.$$

$$\bar{v}_k \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\right) \Rightarrow \bar{v}_k \cdot \frac{d}{dt}\boxed{\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right)} \Rightarrow \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_j} \qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

Обчислимо часткову похідну кінетичної енергії системи за узагальненою координатою:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j} \cdot \bar{v}_k + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}\right) = \boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}}.$$

Похідна за узагальненою швидкістю має аналогічний вираз: $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j}.$

Обчислимо похідну за часом від часткової похідної кінетичної енергії системи за узагальненою швидкістю:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j}\right) = \boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j}} + \boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j}\right)}.$$

Рівняння Лагранжа II роду - продовження.

Таким чином: $\boxed{Q_j^{\Phi} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}.}$ Підставимо в рівняння руху: $Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0.$ Звідси:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, ..., s).}$$

рівняння Лагранжа II роду.

Для консервативних (потенціальних) сил: $\boxed{Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., s).}$

Кінетичний потенціал – функція, що визначається виразом: ***L = T – П* - функція Лагранжа**, де $T = T(q_1, q_2, ..., q_s, \dot q_1, \dot q_2, ..., \dot q_s, t)$ та $\Pi = \Pi(q_1, q_2, ..., q_s, t).$

Кінетичний потенціал ***L*** буде також функцією узагальнених координат, узагальнених швидкостей та часу: $L = L(q_1, q_2, ..., q_s, \dot q_1, \dot q_2, ..., \dot q_s, t).$

Визначимо кінетичну енергію через кінетичний потенціал як ***T = L + П*** та обчислимо необхідні часткові похідні, що присутні у рівнянні Лагранжа II роду:

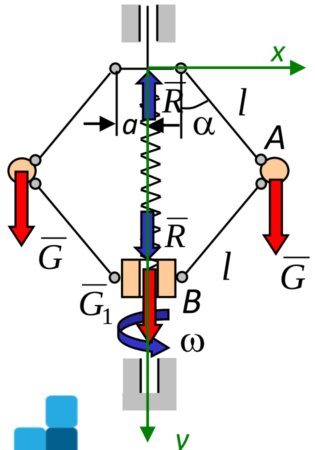
$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}}\right) - \boxed{\frac{\partial T}{\partial q_j}} = Q_j \quad (j = 1, 2, ..., s). \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}} = \boxed{-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}} \quad (j = 1, 2, ..., s).$$

= 0, тому що не залежить від $\dot q_j$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} + \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial \dot q_j}} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}; \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j};$$

або

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s).}$$



Приклад 1. Відцентровий регулятор обертається навколо вертикальної осі з постійною швидкістю **ω**. За **α = 0** пружина не деформована. Жорсткість пружини ***c***. Довжина кожного із стрижнів ***l***. Плечі підвіски ***a***. Вага кожної з куль ***G***, вага муфти ***G*₁**. Визначити кутову швидкість обертання для даного кута **α**.

1. Система має 2 ступені свободи (поворот навколо осі та зміна кута нахилу стрижнів підвіски). При встановленому обертанні розглядаємо тільки зміну кута нахилу **α** вибираємо його як узагальнену координату ***q* = α**.

2. Покажемо задані сили:

3. Пружну в'язь (пружину) замінюємо реакцією і додаємо її до заданих сил: $R = c\Delta l = c(2l - 2l\cos\alpha) = 2cl(1 - \cos\alpha).$

4. Визначимо проекції можливих переміщень (варіації координат) точок докладання сил:

$$x_A = a + l\sin\alpha; \qquad \delta x_A = l\cos\alpha\delta\alpha;$$
$$y_A = l\cos\alpha; \quad \Rightarrow \quad \delta y_A = -l\sin\alpha\delta\alpha;$$
$$y_B = 2l\cos\alpha. \qquad \delta y_B = -2l\sin\alpha\delta\alpha.$$

5. Визначимо узагальнену силу ***Q***:

$$\delta A = 2G\delta y_A + (G_1 + R)\delta y_B = -2Gl\sin\alpha\delta\alpha - (G_1 + R)2l\sin\alpha\delta\alpha = -2(G + G_1 + R)l\sin\alpha\delta\alpha$$

$$\boxed{Q = \frac{\delta A}{\delta\alpha} = -2(G + G_1 + R)l\sin\alpha.}$$

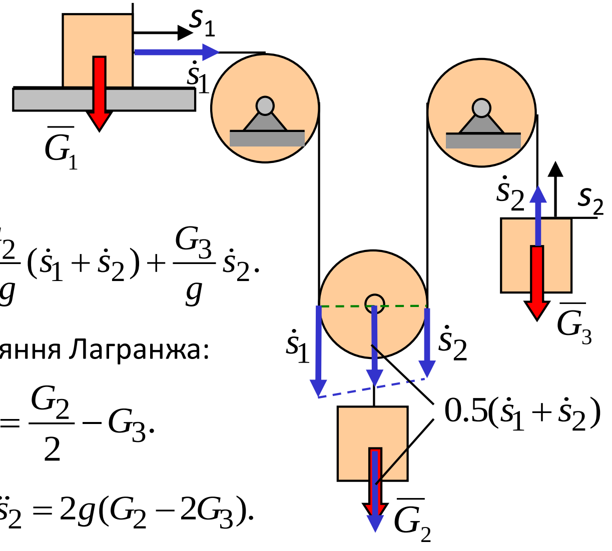
Приклад 1 – продовження

6. Обчислимо кінетичну енергію: $T=2\frac{G}{g}\frac{v^2}{2}=\frac{G}{g}[\omega(a+l\sin\alpha)]^2.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial T}{\partial\alpha}=\frac{G}{g}\omega^2 2(a+l\sin\alpha)l\cos\alpha.}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha}=0;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha}\right)=0.}$

Складаємо рівняння Лагранжа II роду: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial\alpha}=Q.}$ $\Rightarrow$ $0-\frac{G}{g}2\omega^2(a+l\sin\alpha)l\cos\alpha=-2(G+G_1+R)l\sin\alpha.$

Після підстановки ***R*** знаходимо **ω**: $\boxed{\omega=\sqrt{\frac{(G+G_1+2cl(1-\cos\alpha))g\cdot tg\alpha}{G(a+l\sin\alpha)}}}$

Приклад 2. Для механічної системи трьох вантажів з двома нерухомими та одним рухомим блоками визначити прискорення вантажів.



1. Система має два ступені свободи (див. приклад обчислення узагальнених сил - Лекція 11.3).
Рівняння Лагранжа мають такий вигляд при виборі узагальнених координат $q_1 = s_1$ і $q_2 = s_2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot s_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial s_1}=Q_1;\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot s_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial s_2}=Q_2.$$

2. Узагальнені сили Q_1, Q_2 були обчислені :

$$Q_1=\frac{\delta A_{s1}}{\delta s_1}=\frac{G_2}{2}.\qquad Q_2=\frac{\delta A_{s2}}{\delta s_2}=\frac{G_2}{2}-G_3.$$

3. Обчислимо кінетичну енергію: $T=T_1+T_2+T_3=\frac{G_1\dot s_1^2}{2g}+\frac{G_2[0.5(\dot s_1+\dot s_2)]^2}{2g}+\frac{G_3\dot s_2^2}{2g}.$

4. Обчислимо часткові похідні кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial s_1}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial s_2}=0.\quad \frac{\partial T}{\partial\dot s_1}=\frac{G_1}{g}\dot s_1+\frac{G_2}{4g}(\dot s_1+\dot s_2).\quad \frac{\partial T}{\partial\dot s_2}=\frac{G_2}{4g}(\dot s_1+\dot s_2)+\frac{G_3}{g}\dot s_2.$$

5. Обчислимо похідні за часом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot s_1}\right)=\frac{G_1}{g}\ddot s_1+\frac{G_2}{4g}(\ddot s_1+\ddot s_2).\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot s_2}\right)=\frac{G_2}{4g}(\ddot s_1+\ddot s_2)+\frac{G_3}{g}\ddot s_2.$$

6. Підставимо отримані вирази та узагальнені сили у рівняння Лагранжа:

$$\frac{G_1}{g}\ddot s_1+\frac{G_2}{4g}(\ddot s_1+\ddot s_2)=\frac{G_2}{2}.\qquad \frac{G_2}{4g}(\ddot s_1+\ddot s_2)+\frac{G_3}{g}\ddot s_2=\frac{G_2}{2}-G_3.$$

Або: $(4G_1+G_2)\ddot s_1+G_2\ddot s_2=2gG_2.\quad G_2\ddot s_1+(G_2+4G_3)\ddot s_2=2g(G_2-2G_3).$

Невідомі (незалежні) прискорення:

$$\ddot s_1=\frac{D_1}{D};\quad \ddot s_2=\frac{D_2}{D}.\qquad D=\begin{vmatrix}4G_1+G_2 & G_2\\ G_2 & G_2+4G_3\end{vmatrix}=(4G_1+G_2)(G_2+4G_3)-G_2^2.$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2gG_2 & G_2\\ 2g(G_2-2G_3) & G_2+4G_3\end{vmatrix}=2gG_2(G_2+4G_3)-2g(G_2-2G_3)G_2=12G_2G_3g.$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4G_1+G_2 & 2gG_2\\ G_2 & 2g(G_2-2G_3)\end{vmatrix}=(4G_1+G_2)(2g(G_2-2G_3))-2gG_2^2=2(4G_1G_2-8G_1G_3-2G_2G_3)g.$$

У випадку рівності мас $M_1 = M_3 = M$:

$$D=8G(2G+G_2).$$
$$D_1=12G_2Gg.$$
$$D_2=4G(G_2-4G)g.$$

$$\ddot s_1=a_1=\frac{3G_2g}{2(2G+G_2)}.\qquad \ddot s_2=a_2=\frac{(G_2-4G)g}{2(2G+G_2)}.\qquad \frac{\ddot s_1+\ddot s_2}{2}=a_3=\frac{(G_2-G)g}{2G+G_2}.$$

Рівняння рівноваги в узагальнених координатах (в узагальнених силах): $\boxed{Q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots s).}$

За визначенням узагальненої сили для консервативної системи: $\boxed{Q_j = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}.} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0.}$

Звідси випливає, що **положення рівноваги (спокою) консервативної системи відповідають екстремальним значенням потенціальної енергії системи.** При цьому за рівністю нулю часткової похідної потенціальної енергії не можна судити про стійкість стану спокою (рівноваги) у цих положеннях системи. Умова стійкості стану спокою встановлюється критерієм Лагранжа-Діріхле:

Ті положення спокою консервативної системи, в яких потенціальна енергія досягає мінімуму, є її стійкими станами спокою: $\boxed{\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2} > 0.}$ - умова мінімуму потенціальної енергії.

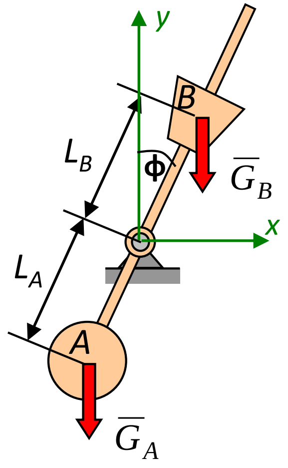
Якщо **друга похідна потенціальної енергії менше нуля**, це відповідає випадку **нестійкого положення рівноваги.**

Якщо друга похідна потенціальної енергії дорівнює нулю, то вона не може бути критерієм мінімуму потенціальної енергії та для розв'язання питання про стійкість положення рівноваги необхідно послідовно досліджувати знаки похідних вищого порядку.

Якщо **перша за порядком, ненульова похідна потенціальної енергії має парний порядок і більше нуля**, то це відповідає мінімуму потенціальної енергії (**стан рівноваги стійкий**).

Якщо **перша за порядком, ненульова похідна потенціальної енергії має непарний порядок**, то потенціальна енергія не має екстремуму (немає ні мінімуму, ні максимуму), відповідає **байдужому стану рівноваги.**

Приклад. Метроном є маятником з двома вантажами: *A* – нерухомий, вагою $\boldsymbol{G_A}$, *B* – здатний до переміщення, вагою $\boldsymbol{G_B}$. Визначити умови стійкого та нестійкого положення рівноваги.



Виберемо як узагальнену координату кут відхилення стрижня метронома від вертикалі **φ**:

Потенціальна енергія вантажів системи $\Pi = G_A y_A + G_B y_B = G_A(-L_A \cos\varphi) + G_B L_B \cos\varphi = (G_B L_B - G_A L_A)\cos\varphi.$

Умова рівноваги системи вантажів: $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (G_B L_B - G_A L_A)\sin\varphi = 0.$ $\Rightarrow$ $G_B L_B - G_A L_A = 0. \quad (a)$ $\Rightarrow$ $\sin\varphi = 0. \quad (b)$

Досліджуємо стійкість рівноваги системи вантажів при виконанні умов (a) та (b): $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -(G_B L_B - G_A L_A)\cos\varphi.$

При виконанні умови (a) ($\boldsymbol{G_A L_A = G_B L_B}$) друга похідна, як і всі наступні, дорівнює нулю. Це відповідає **байдужому стану рівноваги.**

Якщо $\boldsymbol{G_A L_A > G_B L_B}$ та $\boldsymbol{\varphi = 0}$, друга похідна виявляється більшою за нуль - це відповідає **стійкому стану рівноваги**

Якщо $\boldsymbol{G_A L_A > G_B L_B}$ та $\boldsymbol{\varphi = 180^o}$, друга похідна виявляється меншою за нуль - це відповідає **нестійкому стану рівноваги.**