

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»**



І.В. Новицький

С.А. Ус

Випадкові процеси

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2011

УДК 519.216/217(075.8)

ББК 22.171я73

H73

Рекомендовано редакційною радою НГУ як навчальний посібник з дисципліни «Випадкові процеси» для студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз (протокол № 9 від 2.09.2010).

Рецензенти:

Д.Г. Зеленцов, д-р техн. наук, професор (Український державний хіміко-технологічний університет, завідувач кафедри інформаційних технологій і вищої математики);

В.Д. Ламзюк, канд. фіз.-мат. наук, доцент (Дніпропетровський національний університет, завідувач кафедри математичного моделювання).

Новицький І.В.

H73 Випадкові процеси. [Текст], навчальний посібник / І.В. Новицький, С.А. Ус. – Д.: Національний гірничий університет, 2011. – 125 с.

Навчальний посібник охоплює матеріал, передбачений програмою дисципліни “Випадкові процеси” для студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз.

Розглянуто основні поняття теорії випадкових процесів та її застосування до задач масового обслуговування.

Книгу розраховано на осіб, які знають математику в межах вузівського курсу, й рекомендовано для студентів технічних спеціальностей і тих, хто використовує ймовірнісні методи при розв’язуванні практичних задач.

УДК 519.216/217(075.8)

ББК 22.171я73

© І.В. Новицький, С.А. Ус, 2011

© Національний гірничий університет, 2011

Зміст

Вступ.....	4
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	6
§ 1.1. Поняття про випадкову функцію	6
§ 1.2. Характеристики випадкових функцій.....	9
§ 1.3. Визначення характеристик випадкової функції	16
§ 1.4. Проходження випадкових функцій через динамічну систему.....	18
§ 1.5. Лінійні оператори й перетворення ВФ лінійною динамічною системою	20
§ 1.6. Додавання випадкових функцій.....	24
§ 1.7. Канонічні розкладання ВФ.....	26
§ 1.8. Проходження ВФ, заданої канонічним розкладанням, через лінійну динамічну систему.....	30
Висновки	33
Питання для самоконтролю	34
Задачі до розділу 1.....	35
Задачі для самостійного розв'язування	36
РОЗДІЛ 2. СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ (СВП)	41
§ 2.1. Поняття про СВП.....	41
§ 2.2. Ергодична властивість СВП.....	43
§ 2.3. Визначення характеристик ергодичного СВП на основі однієї реалізації....	46
§ 2.4. Спектральне розкладання СВП на скінченному проміжку часу.	48
§ 2.5. Спектральне розкладання СВП на нескінченному часовому інтервалі.	51
Спектральна щільність	51
§ 2.6. Моделі функції спектральної щільності. Білий шум.....	57
§ 2.7. Спектральне розкладання ВФ у комплексній формі.....	60
§ 2.8. Перетворення СВП стаціонарною лінійною системою	64
§ 2.9. Поняття про задачі аналізу й синтезу динамічних систем.....	70
Висновки	76
Питання для самоконтролю	77
Задачі до розділу 2.....	78
Задачі для самостійного розв'язування	82
РОЗДІЛ 3. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ, ХАРАКТЕРНІ ЛІЧИЛЬНОЮ МНОЖИНОЮ СТАНІВ	86
§ 3.1. ВП як зміна стану системи	86
§ 3.2. Ланцюги Маркова	87
§ 3.3. Потоки подій. Найпростіший потік	94
§ 3.4. Марковські дискретні процеси, характерні неперервним часом.	100
§ 3.5. Марковські процеси типу «загибель – розмноження».	106
Висновки	112
Питання для самоконтролю	112
Задачі до розділу 3.....	113
Задачі для самостійного розв'язування	119
Список скорочень.....	121
Список літератури.....	121
Предметний покажчик.....	122

Вступ

При вивченні явищ навколишнього світу ми часто маємо справу із процесами, розвиток яких заздалегідь передбачити неможливо. Така непередбачуваність пояснюється впливом на хід процесів випадкових факторів. Строго кажучи, у природі немає невідповідних явищ, але є процеси, на які випадковість впливає несуттєво, і при їх вивченні цей вплив можна не брати до уваги, але є і такі, де випадковість відіграє основну роль (наприклад, броунівський рух частинок). Між цими двома полюсами перебуває багато процесів, на перебіг яких випадковість впливає більшою або меншою мірою.

Наведемо приклади таких процесів.

1. Населення міста змінюється з часом випадково (непередбачено) під впливом таких факторів як народжуваність, смертність, міграція.

2. Рівень води у річці змінюється випадково залежно від погоди, кількості опадів, танення снігу, інтенсивності зрошувальних заходів.

3. ЕОМ у процесі роботи може випадковим чином переходити від одного стану до іншого, наприклад:

S_1 – працює справно,

S_2 – є несправність, але вона не виявлена,

S_3 – несправність виявлена, ведеться пошук її причини,

S_4 – ремонтується.

Ці переходи відбуваються під впливом таких факторів як коливання напруги в електромережі, відмова деяких елементів, момент виявлення несправності, час ремонту.

4. Температура повітря T у даній місцевості змінюється залежно від висоти над рівнем моря, тобто $T(h)$.

5. Напруга мережі змінюється в часі, тобто $U = U(t)$, та коливається близько номіналу під впливом таких випадкових факторів як кількість і вид приладів, що вмикаються в мережу, моменти їхнього вимкнення й вимкнення й т. ін.

У курсі теорії ймовірностей основним об'єктом дослідження є випадкові величини. У результаті випробувань випадкова величина набуває єдиного значення, причому воно заздалегідь невідоме. Застосування такого елементарного підходу до вивчення випадкових явищ не може задовольнити практичні потреби. Зрозуміло, що $T(h)$ і $U(t)$ є випадковими величинами, на які діють випадкові фактори. Однак вони змінюються протягом випробування, зі зміною аргументів h і t (висота й час). Випадкові величини, які змінюються протягом випробування, називаються *випадковими функціями*.

Вивченням подібних випадкових об'єктів, які є узагальненням поняття випадкових величин, займається новітній розділ теорії ймовірності – теорія випадкових функцій.

Теорія випадкових (стохастичних) процесів – це математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їх розвитку (розбіжності між поняттями «випадкова функція» і «випадковий процес» будуть пояснені нижче).

Теорія випадкових функцій продовжує активно розвиватися, оскільки в багатьох практичних задачах системного аналізу й теорії керування потрібно враховувати випадкові фактори саме в динаміці, тобто зважати на їхню мінливість у процесі випробування.

Мета даного навчального посібника ознайомити студента з основами теорії випадкових процесів, виробити в нього навички застосування ймовірнісних методів при розв'язуванні практичних задач і моделюванні реальних процесів.

Структурно посібник являє собою три розділи. У першому розглянуто основні поняття теорії випадкових процесів. Другий розділ присвячено стаціонарним випадковим процесам, третій – випадковим процесам, характерним лічильною множиною станів. Кожний розділ супроводжується задачами для самостійного розв'язування і питаннями для перевірки засвоєння теоретичного матеріалу.

Книгу розраховано на осіб, що засвоїли курс математики в межах вузівської програми, вона стане у пригоді студентам технічних спеціальностей і тим, хто використовує ймовірнісні методи при розв'язуванні практичних задач.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Мета розділу: вивчення основних понять теорії випадкових процесів, характеристик випадкових функцій і методів їх обчислення, правил перетворення випадкової функції лінійною динамічною системою.

§ 1.1. Поняття про випадкову функцію

Випадковою функцією (ВФ) називається функція, яка внаслідок випробування може набути того чи іншого конкретного вигляду, заздалегідь невідомо, якого саме. Випадкові функції аргументу t позначають $X(t)$, $Y(t)$.

Наприклад, якщо U – випадкова величина, то $X(t) = \sin(tU)$ – випадкова функція.

Конкретний вигляд, набутий ВФ внаслідок випробування, називається *реалізацією ВФ*.

Наприклад, якщо маємо випадкову величину U , яка набула в першому випробуванні значення: $u_1 = 1$, а в другому: $u_2 = 2,5$, то реалізаціями випадкової функції: $X(t) = \sin(tU)$, у першому й другому випробуванні будуть відповідно: $x_1(t) = \sin t$ та $x_2(t) = \sin 2,5t$. Вочевидь, реалізації ВФ є функціями не випадковими.

Якщо над ВФ провести кілька випробувань, то ми одержимо групу, або *сім'ю*, реалізацій цієї функції: $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Це основний експериментальний матеріал, на базі якого обчислюються характеристики випадкової функції.

Таким чином, випадкову функцію можна розглядати як сукупність її реалізацій (рис.1.1).

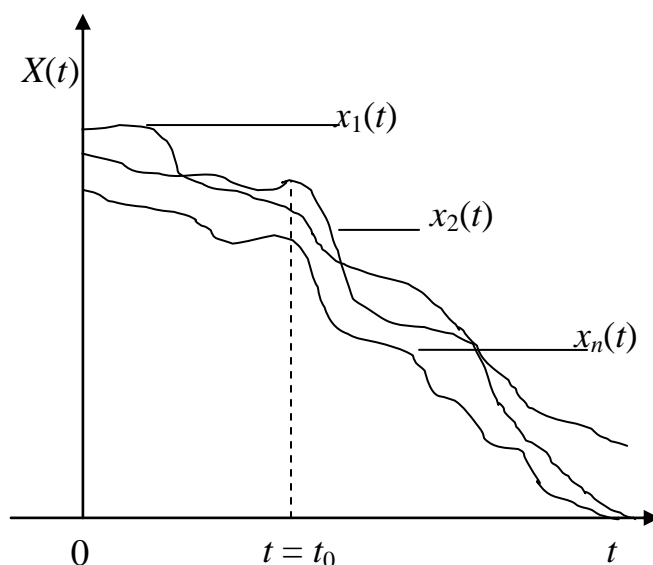


Рис. 1.1. Криві реалізацій випадкової функції $X(t)$: $x_1(t)$, $x_2(t)$... $x_n(t)$

У практиці нерідко спостерігаються ВФ, аргументом яких є час. Такі ВФ називаються *випадковими процесами*.

Крім того, ВФ можуть залежати від кількох аргументів. Наприклад, температура повітря в даній місцевості є ВФ чотирьох аргументів – трьох просторових і часу. Далі ми будемо вивчати тільки ВФ одного аргументу.

Розглянемо ВФ $X(t)$. Нехай унаслідок n випробувань отримано її реалізації $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Конкретне випробування перетворює ВФ $X(t)$ на не випадкову функцію, тобто на одну зі своїх реалізацій.

Зафіксуємо деяке значення аргументу: $t = t_0$. Тоді ВФ перетворюється на випадкову величину $X(t_0)$, яка називається *розрізом* ВФ для аргумента: $t = t_0$. Тобто ВФ $X(t)$ об'єднує в собі властивості випадкової величини й функції.

Зобразимо умовно ВФ на деякому відрізку зміни аргументу t і розглянемо відліки для дискретних значень t_0, t_1, \dots, t_m . Для кожного значення аргументу t_j ($j = 0, m$) будемо мати відповідний розріз ВФ: $X(t_1), X(t_2) \dots X(t_m) \dots$ (рис. 1.2).

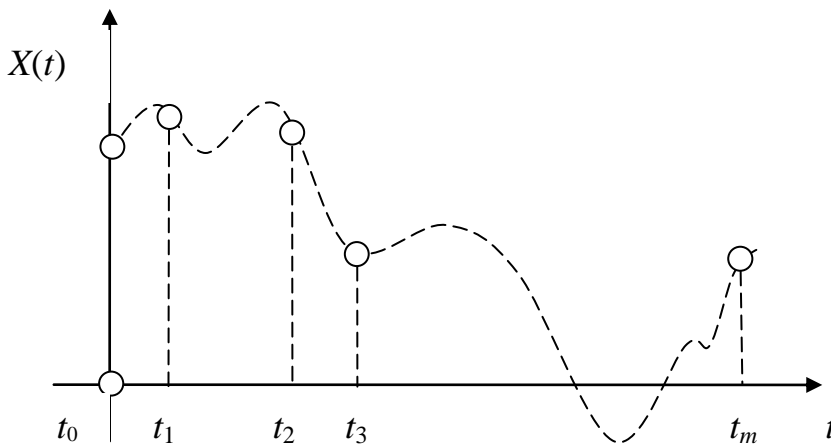


Рис. 1.2. Умовне зображення випадкової функції $X(t)$

Таким чином, ВФ можна приблизно замінити системою m випадкових величин (її розрізів). Зі збільшенням m така заміна стає все більш точною.

Серед випадкових процесів окремо виділяють процеси характерні дискретним та неперервним часом.

Випадковий процес називається процесом із *дискретним часом*, коли система, в якій він відбувається, змінює свій стан тільки у моменти t_1, t_2, \dots, t_j , число яких скінченне або лічильне.

Прикладом такого процесу може бути робота ЕОМ, яка змінює свій стан у моменти t_1, t_2, \dots, t_j , що визначаються тактом машини.

Якщо розглядати одновимірний випадковий процес $X(t)$ із дискретним часом, то його розрізи в моменти t_1, t_2, \dots, t_j утворюють послідовність випадкових величин $X(t_1), X(t_2) \dots X(t_j) \dots$. За аргументи послідовності може бути вибраний номер значення моменту переходу: $X(1), X(2), \dots, X(j)$.

Випадковий процес $X(t)$ називається процесом, що характеризується *неперервним часом*, якщо переходи системи від одного стану до іншого можуть відбуватися в будь-який момент часу t протягом спостережуваного періоду τ .

Приклади таких випадкових процесів: число відмов технічного пристрою від початку роботи до моменту t ; броунівський рух частинки в полі зору мікроскопа; кількість $N(t)$ хворих у місті в період епідемії на момент часу t .

Випадковий процес називається процесом, який характеризується *неперервними станами*, коли його розрізом у будь-який момент часу t є неперервна випадкова величина.

Приклади таких випадкових процесів: напруга $U(t)$ в електромережі у момент часу t ; тиск газу $P(t)$ у даному резервуарі в момент t ; параметри, які характеризують у момент t стан космічної ракети, що виводиться на орбіту (багатовимірний випадковий процес із неперервними станами).

Таким чином, усі випадкові процеси ми можемо поділити на такі чотири класи:

1. Процеси, характерні дискретними станами і дискретним часом.
2. Процеси, характерні дискретними станами і неперервним часом.
3. Процеси, характерні неперервними станами і дискретним часом.
4. Процеси, характерні неперервними станами і неперервним часом.

Що ж являє собою закон розподілу ВФ?

Очевидно, що набір m розрізів буде являти собою систему m випадкових величин і ця система повинна описуватися m -вимірним законом розподілу ймовірностей.

Розглянемо деякий розріз ВФ $X(t)$ для аргументу t . Ця випадкова величина в загальному випадку залежить від значення t і має закон розподілу $f(x, t)$. Функція $f(x, t)$ називається *одновимірним законом розподілу ВФ*. Вона повністю описує кожний окремий розріз, але не дає повного опису випадкової функції. Наприклад, неможливо виконувати над випадковою функцією операції, для яких потрібен сумісний розгляд сукупності розрізів, знаючи тільки вигляд одновимірної щільності розподілу, оскільки вона не дає інформації про зв'язок між розрізами ВФ. Із цього погляду більш повною характеристикою ВФ є двовимірний закон розподілу $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$, який виступає результатом сумісного розгляду двох розрізів ВФ $X(t)$: $X_1 = X(t_1)$ та $X_2 = X(t_2)$, тобто вивчення системи двох випадкових величин (X_1, X_2) . Але цей закон розподілу також не дає повного опису будь-якого випадкового процесу (він достатній для опису нормально розподіленої випадкової функції або марковського випадкового процесу). Тоді виникає необхідність розглядати тривимірні $f(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$, чотиривимірні й т. д. функції розподілу. Взагалі, щоб повністю описати випадкову функцію (або випадковий процес) необхідно розглядати нескінченновимірний закон розподілу або хоч би n -вимірний. Оскільки такий спосіб вивчення випадкових функцій дуже громіздкий, то на практиці він застосовується лише в окремих випадках (наприклад, $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – для опису процесів без післядії). Звичайно ж опис ВФ виконується за допомогою найпростіших її характеристик (моментів), аналогічних характеристикам випадкової величини.

Кореляційною теорією ВФ називають теорію, що базується на вивченні моментів першого та другого порядку. Ця теорія дає змогу розв'язувати багато практичних задач.

§ 1.2. Характеристики випадкових функцій

Відомі характеристики випадкових величин (математичне сподівання (МС), дисперсія, середнє квадратичне відхилення) являють собою числа. Характеристиками ВФ у загальному випадку є не числа, а функції.

Математичним сподіванням ВФ $X(t)$ називається не випадкова функція $m_x(t)$, яка для кожного значення аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного розрізу випадкової функції: $m_x(t) = M[X(t)]$.

Геометрично математичне сподівання випадкової функції можна розуміти як “середню криву”, навколо якої розташовані інші криві, що відображають реалізації ВФ. На рис. 1.3 тонкими лініями показані реалізації випадкової функції, широкою лінією – її математичне сподівання. Для фіксованого значення аргументу математичне сподівання є середнім значенням розрізу, навколо якого розташовані його можливі значення.

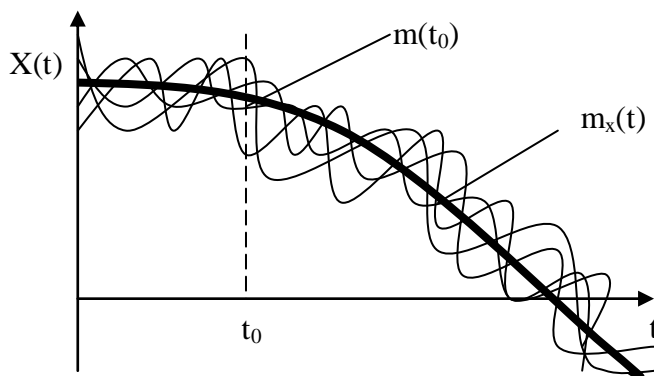


Рис. 1.3. Графіки математичного сподівання випадкової функції $X(t)$ та її реалізацій

Математичне сподівання ВФ має такі властивості (вони впливають із властивостей математичного сподівання випадкової величини):

1. Математичне сподівання не випадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює самій функції:

$$M[\varphi(t)] = \varphi(t).$$

2. Невипадковий множник $\varphi(t)$ можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)M[X(t)] = \varphi(t)m_x(t).$$

3. Математичне сподівання суми двох випадкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань доданків:

$$M [Y(t)+X(t)] = m_X(t) + m_Y(t).$$

П р и к л а д 1.1. Елементарна випадкова функція має такий вигляд: $\varphi(t) = X e^{-t}$, де X – випадкова величина, розподілена за нормальним законом із параметрами a та σ . Визначити математичне сподівання випадкової функції $\varphi(t)$.

Розв’язування

Визначимо математичне сподівання, враховуючи, що не випадковий множник можна виносити за знак математичного сподівання, а саме:

$$m_\varphi(t) = M (X e^{-t}) = e^{-t} M (X) = e^{-t} a.$$

Відповідь: $m_\varphi(t) = e^{-t} a$.

Визначити математичне сподівання випадкової функції $X(t)$ також можна, обчислюючи математичні сподівання розрізів при фіксованому параметрі t й переходячи від розрізу до розрізу.

Розглянемо випадок, коли розріз випадкової функції $X(t)$ при фіксованому значенні аргумента t є дискретною випадковою величиною, і має розподіл, заданий таблицею, а саме:

$X(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$...	$x_n(t)$
p	$p_1(t)$	$p_2(t)$...	$p_n(t)$

Тоді математичне сподівання випадкової функції $X(t)$ може бути обчислене за такою формулою:

$$m_x(t) = M[X(t)] = \sum_{i=1}^n x_i(t) p_i(t).$$

Якщо ж розріз випадкового процесу $X(t)$ при даному значенні t є неперервною випадковою величиною із щільністю розподілу $f_1(x, t)$, то його математичне сподівання можна обчислити в такий спосіб:

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x, t) dx.$$

Але на практиці частіше математичне сподівання $m_x(t)$ не обчислюється за одновимірним законом розподілу, а замінюється його наближеною оцінкою, яку визначають за експериментальними даними.

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $D_x(t)$, значення якої для кожного t дорівнює дисперсії відповідного розрізу ВФ, тобто

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

Дисперсія для кожного значення аргументу t характеризує розсіювання реалізацій ВФ відносно математичного сподівання $m_x(t)$.

Аналогічно, середнє квадратичне відхилення ВФ визначимо за такою формулою: $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$.

Знаючи закон розподілу будь-якого розрізу випадкової функції $X(t)$ (тобто її одновимірний закон розподілу), можна визначити дисперсію випадкової функції $X(t)$.

Якщо розріз $X(t)$ є дискретною випадковою величиною із заданим рядом розподілу, то дисперсія випадкового процесу обчислюється за такою формулою:

$$D_x(t) = D[X(t)] = \sum_{i=1}^n [x_i(t) - m_x(t)]^2 p_i(t),$$

де i – номер можливого значення випадкової величини $X(t)$ при даному t , $p_i(t)$ – імовірність цього значення.

Для визначення дисперсії можна також скористатися іншим виразом:

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^n x_i^2(t) p_i(t) - m_x^2(t).$$

Якщо розріз $X(t)$ є неперервною випадковою величиною із щільністю $f_1(x,t)$, то дисперсія випадкового процесу може бути обчислена таким чином:

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_x(t)]^2 f_1(x,t) dx$$

або

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x,t) dx - m_x^2(t).$$

Тобто, так само як і математичне сподівання, дисперсія випадкового процесу $X(t)$ визначається його одновимірним законом розподілу.

Розглянемо властивості дисперсії ВФ.

1. Дисперсія не випадкової функції дорівнює 0:

$$D[\varphi(t)] = 0$$

2. Дисперсія суми випадкової функції $X(t)$ і не випадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює дисперсії випадкової функції, тобто

$$D[X(t) + \varphi(t)] = D_x(t).$$

3. Дисперсія добутку випадкової функції $X(t)$ і невідповідної функції $\varphi(t)$ дорівнює добутку квадрату невідповідного множника і дисперсії випадкової функції, а саме:

$$D[X(t)\varphi(t)] = \varphi^2(t)D_x(t).$$

П р и к л а д 1.2. Визначити дисперсію випадкової функції: $X(t) = U \cos t$, де U – випадкова величина і $D(U) = 4$.

Розв'язування

Використаємо властивості дисперсії, враховуючи, що $\cos t$ – невідповідний множник. Тоді

$$D[X(t)] = D[U \cos t] = \cos^2 t \cdot D[U] = 4 \cos^2 t.$$

Відповідь: $D[X(t)] = 4 \cos^2 t$.

Розглянемо дві випадкові функції, зображені у вигляді сім'ї реалізацій на рис. 1.4. Випадкові функції $X_1(t)$ і $X_2(t)$ мають однакові математичні сподівання й дисперсії, проте характер цих ВФ, внутрішня структура цих процесів сильно відрізняються.

Для функції $X_1(t)$ характерні поступові, плавні зміни. Якщо в момент часу t вона набула значення набагато більшого за математичне сподівання, то ймовірно, що і в момент t' вона набуде значення, більше середнього, тобто для ВФ X_1 характерна сильна залежність між розрізами при різних значеннях аргумента t (t й t'). На відміну від неї, функція $X_2(t)$ має яскраво виражену коливальну структуру з неправильними коливаннями. Для такої функції характерне швидке зникнення залежності між її значеннями в міру зростання відстані між ними.

Очевидно, що різниця між випадковими функціями $X_1(t)$ та $X_2(t)$ не може бути виявлена, якщо ми будемо вивчати лише їх математичні сподівання та дисперсії, тобто для коректного опису ВФ недостатньо цих характеристик.

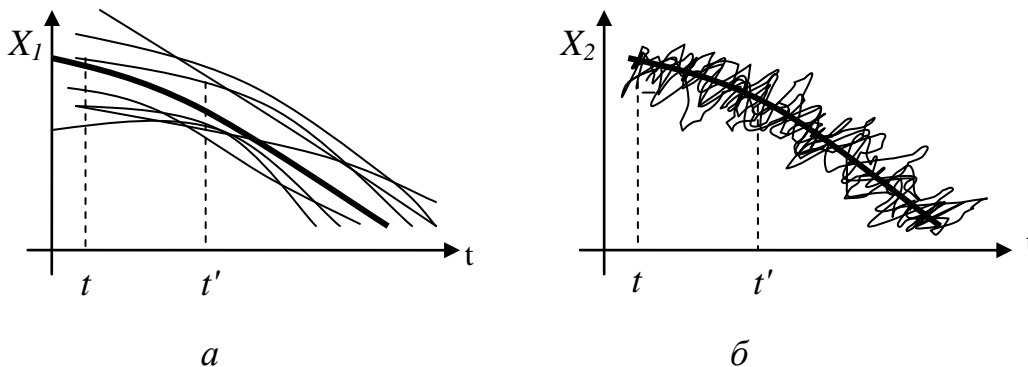


Рис. 1.4. Зображення випадкових функцій, для яких характерна: *а* – сильна залежність між розрізами при різних значеннях аргумента t ; *б* – слабша залежність між розрізами при різних значеннях аргумента t

Для опису розглянутих властивостей випадкового процесу вводиться спеціальна характеристика – *кореляційна (автокореляційна) функція*. Вона характеризує ступінь залежності між розрізами випадкової функції, які відповідають різним моментам часу t .

Нагадаємо, що ступінь залежності двох випадкових величин характеризується їх кореляційним моментом. Відповідно ступінь залежності двох розрізів $X(t)$ і $X(t')$ буде описуватися їх кореляційним моментом і являти собою функцію двох аргументів: t й t' .

Кореляційною функцією ВФ $X(t)$ називається не випадкова функція двох аргументів $K_x(t, t')$, яка для кожної пари значень t й t' дорівнює кореляційному моменту відповідних розрізів ВФ, тобто

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')], \text{ де } \overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m(t), \overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m(t').$$

Очевидно, що із зростанням модуля різниці $|t - t'|$ кореляційна функція спадає і коли $t = t'$, то $K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}^2(t)] = D_x(t)$. Крім того, кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів, тобто $K_x(t, t') = K_x(t', t)$.

Якщо зобразити кореляційну функцію $K_x(t, t')$ у вигляді поверхні, то ця поверхня буде симетричною відносно вертикальної площини Q , яка проходить через бісектрису кута $t0t'$. Схематично її графік має вигляд, зображений на рис. 1.5.

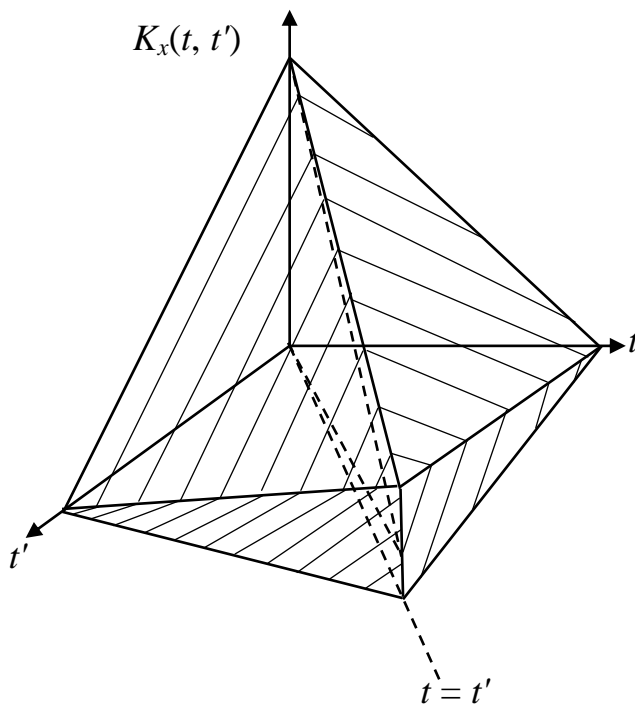


Рис. 1.5. Схематичний графік кореляційної функції ВФ

Властивості кореляційної функції визначаються властивостями кореляційної матриці системи випадкових величин.

Допустимо, є система випадкових величин: $X(t_1), X(t_2) \dots X(t_m)$. Кореляційна матриця характеризує зв'язок між усіма ВВ цієї системи, тобто це матриця $\|k_{ij}\|_{m \times m}$, кожен елемент якої дорівнює кореляційному моменту випадкових величин $\overset{\circ}{X}(t_i)$ і $\overset{\circ}{X}(t_j)$: $k_{ij} = M \left[\overset{\circ}{X}(t_i) \cdot \overset{\circ}{X}(t_j) \right]$. Вочевидь, матриця $\|k_{ij}\|_{m \times m}$ – симетрична.

Нагадаємо, що ВФ $X(t)$ приблизно можна замінити системою випадкових величин $X(t_1), X(t_2) \dots X(t_m)$ і точність її наближення збільшується при збільшенні кількості розрізів m .

Тому на практиці при побудові кореляційної функції $K(t, t')$ випадкової функції $X(t)$ застосовують такий спосіб: задаються рядом рівновіддалених значень аргументу й будують кореляційну матрицю отриманої системи випадкових величин $X(t_1) \dots X(t_m)$.

Тепер з'ясуємо, як змінюються характеристики ВФ при додаванні до неї не випадкового доданка та при її множенні на не випадкову величину.

Додамо до ВФ $X(t)$ не випадковий доданок $\varphi(t)$. Тоді ми одержимо нову ВФ $Y(t)$, а саме: $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$. Згідно з властивостями математичного сподівання маємо, що

$$M[Y(t)] = M[X(t) + \varphi(t)] = M[X(t)] + \varphi(t);$$

таким чином, $m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t)$.

Отже, при додаванні до ВФ не випадкового доданка до її математичного сподівання додається той самий не випадковий доданок.

Далі обчислимо кореляційну функцію $Y(t)$:

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M [\overset{\circ}{Y}(t) \cdot \overset{\circ}{Y}(t')] = M [(Y(t) - m_x(t))(Y(t') - m_x(t'))] = \\ &= M [(X(t) + \varphi(t) - m_x(t) - \varphi(t))(X(t') + \varphi(t') - m_x(t') - \varphi(t'))] = \\ &= M [(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))] = K_x(t, t'). \end{aligned}$$

Тобто, від додавання не випадкового доданка кореляційна функція ВФ не змінюється.

Помножимо ВФ $X(t)$ на не випадковий множник: $Y(t) = \varphi(t) X(t)$.

Тоді

$$m_y(t) = M[\varphi(t) X(t)] = \varphi(t) M[X(t)] = \varphi(t) m_x(t).$$

Таким чином, при множенні ВФ на не випадковий множник її МС множиться на той самий множник.

Обчислимо кореляційну функцію:

$$K_y(t, t') = M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] = M[\varphi(t) \varphi(t')(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))] = \\ = \varphi(t) \varphi(t') K_x(t, t').$$

Тобто, при множенні ВФ на не випадковий множник $\varphi(t)$ її кореляційна функція множиться на $\varphi(t)$ й $\varphi(t')$.

Підсумовуючи все, що було сказано вище, можна визначити такі основні властивості кореляційної функції:

1. Якщо аргументи кореляційної функції мають однакові значення (тобто $t_1 = t_2$), то вона перетворюється на дисперсію, а саме:

$$K_x(t, t) = D_x(t).$$

2. Кореляційна функція $K_x(t, t')$ симетрична відносно своїх аргументів, тобто

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

3. Додавання до випадкової функції $X(t)$ не випадкового доданка $\varphi(t)$ не змінює її кореляційної функції. Якщо $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2).$$

4. При множенні випадкової функції $X(t)$ на не випадковий множник $\varphi(t)$ її кореляційна функція помножується на добуток $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$. Тобто, якщо $Y(t) = X(t)\varphi(t)$, то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2).$$

5. Абсолютна величина кореляційної функції не перевищує середнього геометричного дисперсій відповідних розрізів:

$$|K_x(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}.$$

Окрім кореляційної функції, на практиці для оцінювання ступеня залежності між розрізами ВФ часто використовують ще одну характеристику, а саме, *нормовану кореляційну функцію* ВП, яка є коефіцієнтом кореляції відповідних розрізів випадкової функції і обчислюється за такою формулою:

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}.$$

Нормована кореляційна функція має ті самі властивості, що й кореляційна функція, причому властивість 5 замінюється таким чином:

абсолютна величина нормованої кореляційної функції не перевищує одиниці, тобто

$$|r_x(t, t')| \leq 1.$$

Крім того, очевидно, що коли $t = t'$, то $r_x = 1$.

Імовірнісний сенс нормованої кореляційної функції такий самий, що й коефіцієнта кореляції для ВВ, а саме: чим ближче значення нормованої кореляційної функції до одиниці, тим сильніша лінійна залежність між розрізами випадкової функції.

§ 1.3. Визначення характеристик випадкової функції

Припустимо, що досліджуючи випадкову функцію $X(t)$, провели n незалежних випробувань, у результаті яких отримано n її реалізацій (рис. 1.6.)

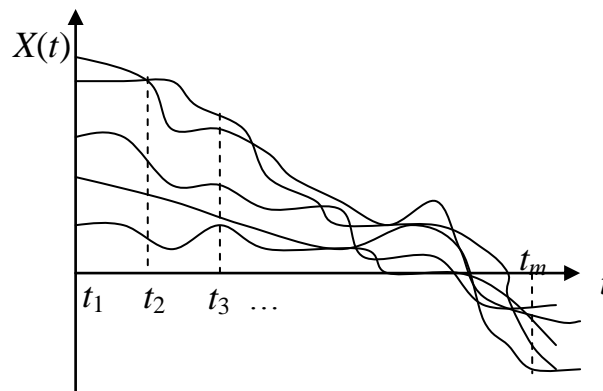


Рис. 1.6. Криві реалізацій випадкової функції $X(t)$

Потрібно знайти оцінки для характеристик випадкової функції $X(t)$, а саме: математичного сподівання $m_x(t)$, дисперсії $D_x(t)$ і кореляційної функції $K_x(t, t')$.

Для розв'язування цієї задачі розглянемо ряд розрізів ВФ, які відповідають моментам часу $t_1, t_2 \dots t_m$, і зареєструємо значення функції $X(t)$ для кожного з цих моментів. Кожному з них буде відповідати n значень випадкової функції. Значення $t_1, t_2, t_3 \dots t_m$, як правило, задають на однаковій відстані одне від одного, при цьому величина інтервалу між сусідніми значеннями вибирається залежно від виду експериментальних кривих так, щоб за вибраними точками можливо було досить точно відновити їх загальний вигляд. Однак часто буває, що інтервал між розрізами задається незалежно від умов задачі дослідження, а визначається частотою роботи вимірювального приладу.

Значення, яких набуває функція $X(t)$, заносять у таблицю, кожний рядок якої відповідає окремій реалізації, а кількість колонок дорівнює числу опорних значень аргументу.

$T \backslash X(t)$	t_1	t_2	...	t_k	...	t_l	...	t_m
$x_1(t)$	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	...	x_{1l}	...	x_{1m}
$x_2(t)$	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	...	x_{2l}	...	x_{2m}
...
$x_i(t)$	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ik}	...	x_{il}	...	x_{im}
...
$x_n(t)$	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}	...	x_{nl}	...	x_{nm}

Тут x_{ij} – значення функції $x_i(t)$, яке відповідає i -й реалізації для j -го моменту часу, тобто результати дослідів подано у вигляді матриці (x_{ij}) , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

За цих умов оцінки характеристик ВФ можна обчислити за поданими нижче формулами.

1. Оцінка математичного сподівання

$$\bar{m}_x(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

2. Оцінка дисперсії

$$\bar{D}_x(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_{ij} - \bar{m}_x(t_j)]^2}{n-1}, \quad j = \overline{1, m}.$$

3. Оцінка кореляційної функції

$$\bar{K}_x(t_j, t_l) = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_{ij} - \bar{m}_x(t_j))(x_{il} - \bar{m}_x(t_l))]}{n-1}, \quad j, l = \overline{1, m}.$$

Розраховуючи оцінки дисперсії та кореляційної функції, іноді користуються початковими моментами. Тоді мають місце такі обчислювальні формули:

$$\bar{D}_x(t_j) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}^2}{n} - \bar{m}_x^2(t_j) \right] \frac{n}{n-1}, \quad j = \overline{1, m};$$

$$K_x(t_j, t_l) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_{ij} x_{il}}{n} - m_x(t_j) m_x(t_l) \right] \frac{n}{n-1}, \quad j, l = \overline{1, m}.$$

Застосовуючи для обчислення наведені формули, рекомендується умовно перенести початок координат на осі ординат ближче до математичного сподівання з тим, щоб уникнути різниці близьких чисел.

Після того, як ці характеристики обчислено, можна, використовуючи значення $m_x(t_1), m_x(t_2), \dots, m_x(t_m)$, побудувати залежність $m_x(t)$. Аналогічно відтворюють залежність $D_x(t)$. Функція $K_x(t, t')$ відтворюється за її значеннями у прямокутній системі точок. За необхідності всі ці функції можна апроксимувати аналітичними виразами.

§ 1.4. Проходження випадкових функцій через динамічну систему

При вивченні реальних систем будь-якого походження (технічних, механічних, електричних, економічних і т. д.) їхню роботу часто можна описати за такою схемою: у динамічну систему A подається випадковий процес $X(t)$ – *вхідний сигнал* або *вхідний вплив* (див. рис. 1.7). Система A виконує перетворення вхідного сигналу $X(t)$, унаслідок чого на її виході отримуємо випадковий процес $Y(t)$, який називається *реакцією системи A* (або *вихідним сигналом системи A*).

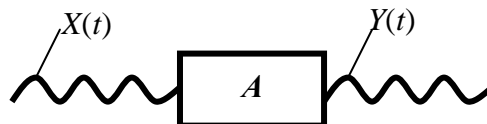


Рис. 1.7. Схема динамічної системи

Наведемо приклади систем, які здійснюють такі перетворення.

1. Розглянемо систему A , у якій проводиться експлуатація однорідних технічних пристроїв (ТП). За вхідний вплив $X(t)$ візьмемо число введених (на момент часу t) в експлуатацію ТП, реакція системи $Y(t)$ – число ТП, які

експлуатуються у момент часу t . При цьому $X(t) \geq Y(t)$, оскільки частина ТП може вийти з експлуатації.

2. При експлуатації ЕОМ за вхідний сигнал можна брати напругу силового живлення $X(t)$, яке подається на вхід стабілізатора напруги, а за вихідний сигнал $Y(t)$ – напругу на виході стабілізатора.

3. Нехай система A – нагрівальна піч; тоді вхідний вплив $X(t)$ – витрата палива; реакція системи $Y(t)$ – температура печі.

4. Система A – промислове підприємство; $X(t)$ – ціни на сировину; $Y(t)$ – розмір оборотних коштів.

5. Система A – сільськогосподарське підприємство; вхідний вплив $X(t)$ – кількість опадів; реакція системи $Y(t)$ – величина врожаю.

Зазначимо, що в загальному випадку система має кілька входів і виходів. Ми будемо вивчати найпростіший випадок, коли є тільки один вхід й один вихід. У такій постановці задачі система A перетворює вхід $X(t)$ у вихід $Y(t)$. Символічно це можна записати як $Y(t) = L[X(t)]$, де L – *правило перетворення*.

Цей запис означає, що кожній функції $X(t)$ за певним правилом (алгоритмом) ставиться у відповідність функція $Y(t)$.

Правило може бути простим, наприклад, множення на число; інтегрування, диференціювання та інші. Іноді перетворення L зводиться до розв'язування диференціального рівняння.

Оператором називається правило перетворення однієї функції в іншу.

Правило, за яким вхідний вплив $X(t)$ системи A перетворюється в реакцію $Y(t)$, називається *оператором динамічної системи*.

У теорії систем існує три види задач:

1. *Задача аналізу*.

Має на меті визначити реакцію системи з відомим оператором на відомий вхідний вплив.

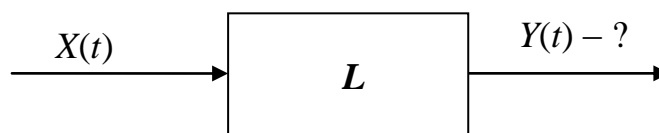


Рис. 1.8. Схема задачі аналізу : $X(t)$, L – відомі; $Y(t)$ – ?

2. *Задача виміру* (спостереження).

Виникає, коли необхідно визначити вхідний вплив на систему, якщо відомо її оператор і реакцію системи на виході.

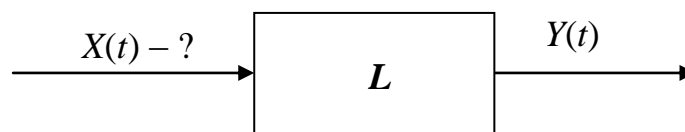


Рис. 1.9. Схема задачі виміру: $Y(t)$, L – відомі; $X(t)$ – ?

3. Задача ідентифікації.

Полягає у визначенні оператора системи, коли задано (виміряно) вхідний вплив на систему та її реакцію.

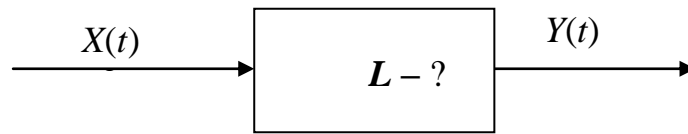


Рис. 1.10. Схема задачі ідентифікації: $X(t)$, $Y(t)$ – відомі; L – ?

У тому випадку, коли $X(t)$ і $Y(t)$ – це не випадкові (детерміновані) функції часу, існують широко відомі методи розв’язування сформульованих вище задач. Однак, у реальних умовах вхідний вплив $X(t)$ ніколи не прибуває на вхід системи в “чистому вигляді” – на нього діють випадкові фактори (перешкоди, збурення) і тому він являє собою ВФ $X(t)$. Це означає, що й реакція системи також буде випадковою функцією $Y(t)$.

Звідси випливають такі практичні задачі:

– оцінити випадкові спотворення реакції системи $Y(t)$ за наявності відомих випадкових збурень вхідного сигналу $X(t)$ (задача аналізу).

– вибрати параметри системи (тобто оператор L) таким чином, щоб ці споворення були мінімальними.

Більш простою є перша задача. Сформулюємо її таким чином: на вхід системи прибуває ВФ $X(t)$ з відомими характеристиками (математичне сподівання й кореляційна функція), система перетворює її відповідно до відомого оператора L . Потрібно визначити характеристики (математичне сподівання й кореляційну функцію) випадкового процесу: $Y(t) = L[X(t)]$, на виході системи.

Аналітично ця задача може бути розв’язана в одному окремому, але важливому для практики випадку: коли і оператор L , і система є *лінійними*.

§ 1.5. Лінійні оператори й перетворення ВФ лінійною динамічною системою

Оператор L називається *лінійним однорідним*, якщо він має такі властивості:

1. Лінійний однорідний оператор від суми дорівнює сумі лінійних однорідних операторів від доданків:

$$L[x_1(t) + x_2(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)].$$

2. Сталий множник можна виносити за знак лінійного оператора, тобто

$$L[cx(t)] = cL[x(t)].$$

Для лінійного однорідного оператора L характерно, що $L[0] = 0$.

Останній запис означає, що коли вхідний вплив відсутній, то й реакція системи дорівнює 0.

Прикладами лінійних однорідних є такі оператори:

- диференціювання: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$;
- інтегрування: $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$;
- множення на задану функцію: $y(t) = \gamma(t)x(t)$;
- інтегрування із заданою «вагою» $\gamma(t)$: $y(t) = \int_0^t \gamma(\tau)x(\tau) d\tau$.

З а в д а н н я. Перевірте самостійно лінійність та однорідність названих операторів

Оператор називається *лінійним неоднорідним*, якщо він складається із суми лінійного однорідного оператора та деякої заданої невідповідної функції, тобто

$$y(t) = L[x(t)] = L_0[x(t)] + \gamma(t),$$

тут L_0 – лінійний однорідний оператор.

Наприклад: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + \gamma(t)$.

У математиці та в техніці застосовується умовна форма запису оператора.

Наприклад, $p = \frac{d}{dt}$, це оператор диференціювання. Тобто $y(t) = px(t)$, це те саме,

що й $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

Використовуючи ці позначення, лінійне диференціальне рівняння:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x,$$

можна записати таким чином:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) x.$$

Лінійні системи відіграють важливу роль в інженерних розрахунках. Оператор системи найчастіше може бути або строго лінійним, або лінеаризованим.

У загальному випадку, крім лінійних, мають місце також *нелінійні* оператори, наприклад: $y(t) = x^2(t)$, $y(t) = \sin x(t)$ і т. ін.

Відповідні системи називаються нелінійними.

Розглянемо таку задачу: за характеристиками ВФ на вході лінійної системи $m_x(t)$, $K_x(t, t')$ потрібно знайти характеристики ВФ на її виході: $m_y(t)$, $K_y(t, t')$, коли відомо, що оператор системи $Y(t) = L[X(t)]$.

Обчислення характеристик ВФ на виході виконується за такими правилами:

1. $m_y(t) = L[m_x(t)]$ у разі використання лінійного однорідного оператора L .

$m_y(t) = L[m_x(t)] + \gamma(t)$ – коли лінійний оператор L неоднорідний,

тобто, *математичне сподівання ВФ виходу лінійної системи знаходять шляхом застосування оператора до математичного сподівання ВФ на вході (якщо оператор L неоднорідний, то до результату додається невинадкова функція $\gamma(t)$).*

2. $K_y(t, t') = L^{(t)}L^{(t')}[K_x(t, t')]$, це можна сформулювати таким чином:

кореляційну функцію ВФ на виході лінійної системи знаходять шляхом двократного застосування оператора (за кожним з аргументів) до кореляційної функції ВФ на вході.

Розглянемо приклади перетворень ВФ лінійною динамічною системою.

1. Візьмемо лінійну систему з оператором інтегрування: $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$.

Тоді математичне сподівання вихідної функції отримуємо за таким правилом:

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau,$$

а кореляційна функція

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\tau, \tau') d\tau d\tau'.$$

2. У лінійній системі з оператором диференціювання: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$,

математичне сподівання вихідної функції

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt},$$

а кореляційна функція

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}$$

Насамкінець зауважимо, що дисперсію ВФ $Y(t)$ на виході системи можна легко визначити за кореляційною функцією, прийнявши, що $t = t'$, тобто

$$D_y(t) = K_y(t, t)$$

П р и к л а д 1.3. На вхід диференціювального механізму (див. рис. 1.11), прибуває ВФ $X(t)$, математичне сподівання якої $m_x(t) = \sin t$, а кореляційна функція $K_x(t, t') = Ce^{-\alpha(t'-t)^2}$, де C – стала. Необхідно визначити такі характеристики реакції системи: $m_y(t)$, $K_y(t, t')$, $D_y(t)$.

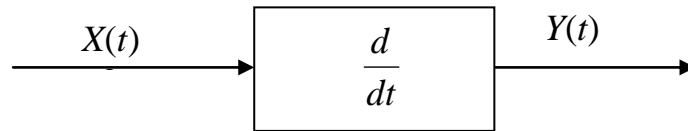


Рис. 1.11. Схема системи до прикладу 1.3

Розв'язування

Оскільки за умовами задачі L – оператор диференціювання, то $Y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. За сформульованими вище правилами визначаємо, що

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt} = \frac{d \sin t}{dt} = \cos t,$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} \left[-2\alpha(t'-t)Ce^{-\alpha(t'-t)^2} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [-2\alpha(t'-t)C] \left[e^{-\alpha(t'-t)^2} \right] \right\} = \\ &= -2\alpha(t'-t)C \cdot 2\alpha(t'-t)e^{-\alpha(t'-t)^2} + e^{-\alpha(t'-t)^2} \cdot 2\alpha C = 2\alpha C e^{-\alpha(t'-t)^2} \left[1 - 2\alpha(t'-t)^2 \right]. \end{aligned}$$

Вважаючи, що $t = t'$, знайдемо дисперсію вихідного процесу, а саме:

$$D_y(t) = K_y(t, t) = 2\alpha C.$$

Відповідь: $m_y(t) = \cos t$, $K_y(t, t') = 2\alpha C e^{-\alpha(t'-t)^2} \left[1 - 2\alpha(t'-t)^2 \right]$, $D_y(t) = 2\alpha C$.

П р и к л а д 1.4. ВФ $X(t)$ має такі характеристики: $m_x(t) = 1$, $K_x(t, t') = e^{\alpha(t'+t)}$. Визначити характеристики для ВФ: $Y(t) = t \frac{dx(t)}{dt} + 1$.

Розв'язування

Оператор перетворення є лінійним неоднорідним, тому згідно з правилами перетворення запишемо, що

$$m_y(t) = t \frac{dm_x(t)}{dt} + 1 = 1,$$

$$K_y(t, t') = tt' \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'} = tt' \frac{\partial}{\partial t} [\alpha e^{\alpha(t+t')}] = tt' \alpha^2 e^{\alpha(t+t')},$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = t^2 \alpha^2 e^{2\alpha t}.$$

Відповідь: $m_y(t) = 1$, $K_y(t, t') = tt' \alpha^2 e^{\alpha(t+t')}$, $D_y(t) = t^2 \alpha^2 e^{2\alpha t}$.

§ 1.6. Додавання випадкових функцій

У багатьох практичних випадках на вхід системи прибуває не одна, а дві випадкові функції. При цьому система виконує операцію їхнього підсумовування, тобто реакція системи являє собою випадкову функцію $Z(t)$, яка дорівнює сумі ВФ $X(t)$ і $Y(t)$ (рис. 1.12).

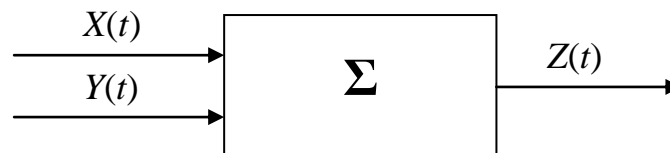


Рис. 1.12. Схема системи, яка реалізує суму двох випадкових функцій

Тоді виникає потреба у визначенні характеристик реакції вихідної функції $Z(t)$ за відомими характеристиками вхідних функцій $X(t)$ та $Y(t)$.

Якщо складові $X(t)$ та $Y(t)$ незалежні, то це зробити дуже просто. У загальному ж випадку потрібно знати ще одну характеристику, а саме – взаємну кореляційну функцію.

Взаємною кореляційною функцією двох ВФ $X(t)$ і $Y(t)$ називається не випадкова функція двох аргументів t й t' , яка для кожної пари аргументів (t, t') дорівнює кореляційному моменту відповідних розрізів $X(t)$ і $Y(t')$, тобто

$$R_{xy}(t, t') = M[(X(t) - m_x(t))(Y(t') - m_y(t'))].$$

Нормована взаємна кореляційна функція обчислюється за такою формулою:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{R_{xy}(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_y(t')}.$$

Якщо $R_{xy}(t, t') \equiv 0$, то ВФ $X(t)$ і $Y(t)$ незалежні.

Розглянемо таку задачу:

Нехай $X(t)$ і $Y(t)$ – випадкові функції із відомими математичним сподіваннями й кореляційними функціями. Потрібно визначити математичне сподівання $m_z(t)$ і кореляційну функцію $K_z(t, t')$ на виході системи, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Мають місце такі правила перетворення:

1. При додаванні двох ВФ їх математичні сподівання також додаються:

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t).$$

2. При додаванні двох ВФ кореляційна функція суми дорівнює сумі кореляційних функцій доданків плюс їх подвоєна взаємна кореляційна функція, тобто

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + 2R_{xy}(t, t').$$

Перевіримо цю властивість.

Для центрованих функцій має місце така рівність: $\dot{Z}(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t)$.

Враховуючи це, обчислимо кореляційну функцію на виході системи, таким чином:

$$\begin{aligned} K_z(t, t') &= M \left[\dot{Z}(t) \dot{Z}(t') \right] = M \left\{ \left[\dot{X}(t) + \dot{Y}(t) \right] \left[\dot{X}(t') + \dot{Y}(t') \right] \right\} = \\ &= M \left[\dot{X}(t) \dot{X}(t') \right] + M \left[\dot{Y}(t) \dot{Y}(t') \right] + M \left[\dot{X}(t) \dot{Y}(t') \right] + M \left[\dot{X}(t') \dot{Y}(t) \right] = \\ &= K_x(t, t') + K_y(t, t') + 2R_{xy}(t, t'). \end{aligned}$$

Окремо розглянемо додавання ВФ $X(t)$ з випадковою величиною γ . Тоді

$$Z(t) = X(t) + \gamma;$$

$$m_z(t) = m_x(t) + m_\gamma;$$

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + D_\gamma, \quad (1.1)$$

тут m_γ і D_γ – математичне сподівання й дисперсія ВВ γ .

Зауважимо, що рівність (1.1) справедлива лише у випадку, коли $X(t)$ і γ – незалежні.

П р и к л а д 1.5. Знайти математичне сподівання й кореляційну функцію суми двох незалежних ВФ $X(t)$ і $Y(t)$ з такими характеристиками: $M_x(t) = t$, $K_x(t, t') = tt'$, $M_y(t) = -t$, $K_y(t, t') = tt'e^{\alpha(t+t')}$.

Розв'язування

За умовами задачі $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Обчислимо математичне сподівання згідно з правилом перетворення:

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) = t - t = 0.$$

Кореляційна функція суми $K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + 2R_{xy}(t, t')$. Але $R_{xy}(t, t') = 0$, оскільки $X(t)$ і $Y(t)$ – незалежні, тому

$$K_z(t, t') = tt' + tt'e^{\alpha(t+t')} = tt'(1 + e^{\alpha(t+t')}).$$

Відповідь: $m_z(t) = 0$, $K_z(t, t') = tt'(1 + e^{\alpha(t+t')})$.

§ 1.7. Канонічні розкладання ВФ

Розглянуті вище правила лінійного перетворення ВФ динамічною системою викликають труднощі при їхній практичній реалізації. Особливо це стосується подвійного перетворення кореляційної функції. Навіть якщо оператор L має просту форму, обчислення кореляційної функції виявляються дуже громіздкими. Коли ж, як це звичайно буває, робота динамічної системи описується диференціальними рівняннями, тобто оператор заданий у неявному вигляді, то задача суттєво ускладнюється й у більшості випадків стає практично нерозв'язною.

Тому, розв'язуючи практичні задачі, частіше застосовують методи, що передбачають більш прості перетворення. Один з таких – метод канонічних розкладань, розроблений В.С. Пугачовим.

Ідея методу полягає в тому, що перетворювана оператором ВФ спочатку подається у вигляді суми так званих *елементарних* ВФ.

Елементарною називається ВФ, що має такий вигляд:

$$X(t) = V\varphi(t), \tag{1.2}$$

де V – випадкова величина, $\varphi(t)$ – звичайна (невипадкова) функція.

Елементарна ВФ являє собою більш простий тип випадкової функції, оскільки у виразі (1.2) випадковим є тільки множник V .

На рис.1.13 наведено приклади елементарних випадкових функцій, які подано у вигляді сімей реалізацій.

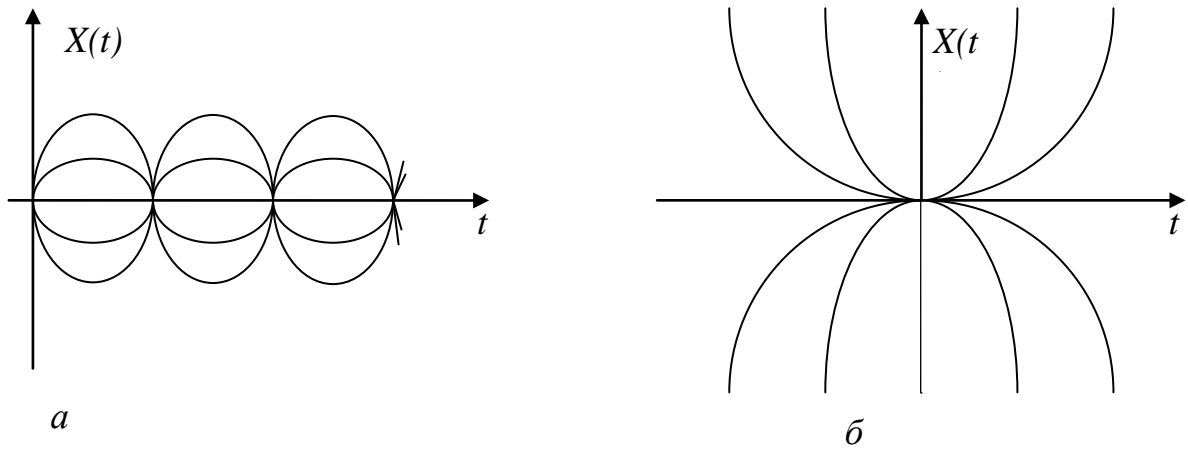


Рис. 1.13. Приклади елементарних випадкових функцій: а) $X(t) = V \sin t$, $\varphi(t) = \sin t$; б) $X(t) = Vt^2$, $\varphi(t) = t^2$.

В елементарній ВФ дві особливості випадкових функцій розмежовано, зокрема, випадковість зосереджена у випадковій величині V , а залежність від аргументу – у не випадковій функції $\varphi(t)$.

Визначимо характеристики елементарної ВФ (1.2).

Математичне сподівання

$$m_x(t) = M[V\varphi(t)] = m_v \varphi(t). \quad (1.3)$$

Вочевидь, коли $m_v = 0$, то $m_x(t) = 0$.

Нагадаємо, що будь-яку ВФ можна центрувати, тобто перетворити таким чином: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$. Легко побачити, що $M(\overset{\circ}{X}(t)) = 0$. Надалі ми будемо розглядати центровані елементарні ВФ, математичне сподівання яких дорівнює нулю, тобто

$$m_v = 0; \quad V = \overset{\circ}{V}; \quad m_x(t) \equiv 0.$$

Визначимо кореляційну функцію елементарної ВФ, а саме:

$$K_x(t, t') = M[X(t)X(t')] = \varphi(t)\varphi(t')M[V^2] = \varphi(t)\varphi(t')D_v, \quad (1.4)$$

де D_v – дисперсія випадкової величини V .

Очевидно, що над елементарною ВФ неважко виконувати лінійні перетворення. Наприклад:

$$\begin{aligned} X'(t) &= V\varphi'(t), \\ \int_0^t X(\tau)d\tau &= V \int_0^t \varphi(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

У загальному випадку

$$L[X(t)] = VL[\varphi(t)]. \quad (1.5)$$

Таким чином, коли елементарна ВФ, яка має вигляд (1.2), прибуває на вхід лінійної системи, то її перетворення оператором L зводиться до перетворення невинпадкової функції $\varphi(t)$.

Основна ідея методу канонічних розкладань полягає в тому, що ВФ $X(t)$, яка перебуває на вході системи, приблизно (або точно) подають у вигляді системи елементарних ВФ і тільки потім перетворюють за допомогою оператора L .

Нехай маємо ВФ: $X(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t)$.

Припустимо, що їй вдалося подати у вигляді такої суми:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t), \quad (1.6)$$

де V_i – випадкова величина із математичним сподіванням, що дорівнює нулю. Подання ВФ $X(t)$ у вигляді виразу (1.6) називається *розкладанням ВФ*.

У цьому разі випадкові величини V_1, V_2, \dots, V_m називаються *коефіцієнтами розкладання*, а невинпадкові функції $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ – *координатними функціями*.

Визначимо реакцію $Y(t)$ системи, яка описується лінійним оператором L , на вхідний вплив $X(t)$:

$$Y(t) = L[X(t)] = L[m_x(t)] + \sum_{i=1}^m V_i L[\varphi_i(t)]. \quad (1.7)$$

З огляду на те, що $L[m_x(t)] = m_y(t)$, і ввівши позначення $\psi_i(t) = L[\varphi_i(t)]$, отримуємо, що

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^m V_i \psi_i(t). \quad (1.8)$$

Вираз (1.8) є розкладанням реакції системи $Y(t)$ за елементарними функціями $\psi_i(t)$.

Зауважимо, що коефіцієнти розкладання V_1, V_2, \dots, V_m не змінюються, вони залишаються тими самими, що й для вхідного впливу $X(t)$. Лінійному ж перетворенню піддаються лише координатні функції.

Отже, можемо сформулювати загальне правило перетворення ВФ, заданої розкладанням на елементарні функції:

Якщо ВФ $X(t)$, задана розкладанням на елементарні функції, піддається лінійному перетворенню за допомогою лінійного оператора L , то коефіцієнти розкладання залишаються незмінними, а математичне сподівання й координатні функції піддаються перетворенню із застосуванням того самого оператора L .

У такий спосіб задача визначення реакції системи $Y(t)$ спрощується, тому що оператор L застосовується лише один раз до невинпадкових функцій $m_x(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$, на відміну від кореляційної функції $K_x(t, t')$, яка перетворюється двічі.

Розглянемо ВФ $X(t)$, задану таким розкладанням:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t),$$

де $V_1 \dots V_m$ – система ВВ із нульовим математичним сподіванням й кореляційною матрицею $\|K_{ij}\|$.

Знайдемо кореляційну функцію й дисперсію ВФ $X(t)$.

Обчислимо кореляційну функцію $K_x(t, t')$, враховуючи, що $K_x(t, t') = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right]$, $\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t)$, і $\overset{\circ}{X}(t') = \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t')$. Тоді отримуємо такий вираз:

$$K_x(t, t') = M \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m V_i V_j \varphi_i(t) \varphi_j(t') \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M[V_i V_j] \varphi_i(t) \varphi_j(t'). \quad (1.9)$$

Коли $i = j$, то математичне сподівання $M[V_i V_i] = M[V_i^2] = k_{ii} = D_i$, де D_i – дисперсії ВВ V_i , $i = \overline{1, m}$, а вираз (1.9) можна записати у такому вигляді:

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \varphi_i(t') D_i + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \varphi_i(t) \varphi_j(t') k_{ij}. \quad (1.10)$$

Вважаючи, що $t = t'$, отримуємо вираз для дисперсії, тобто

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^m \varphi_i^2(t) D_i + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \varphi_i(t) \varphi_j(t) k_{ij}, \quad (1.11)$$

Вирази (1.10) і (1.11) набувають простого вигляду, якщо всі коефіцієнти розкладання V_i , $i = \overline{1, m}$, некорельовані, тобто $k_{ij} = 0$ для всіх випадків, коли $i \neq j$. У цьому разі розкладання ВФ називається *канонічним*.

В и з н а ч е н н я. *Канонічним розкладанням* ВФ називається її подання у такому вигляді:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t), \quad (1.12)$$

тут $m_x(t)$ – математичне сподівання ВФ $X(t)$; $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, – координатні функції; V_i , $i = \overline{1, m}$, – некорельовані ВВ із нульовим математичним сподіванням.

Коли має місце канонічне розкладання ВФ (1.12), то її кореляційна функція виходить із виразу (1.10) шляхом прирівнювання до нуля всіх сум, для яких $i \neq j$, і набуває такого вигляду:

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \varphi_i(t') D_i. \quad (1.13)$$

Вираз (1.13) називається *канонічним розкладанням кореляційної функції*. Вважаючи, що $t = t'$, одержимо із формули (1.13) вираз для обчислення дисперсії ВФ:

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^m [\varphi_i(t)]^2 D_i \quad (1.14)$$

Таким чином, знаючи канонічне розкладання ВФ (1.12), можна відразу визначити канонічне розкладання її кореляційної функції (1.13). Справедливим є також обернене твердження.

Зауважимо, що

- канонічне розкладання можна отримати багатьма способами;
- число доданків у канонічному розкладанні може бути й нескінченним, а сума в такому випадку замінюється інтегралом;
- канонічне розкладання не дає інформації про те, який закон розподілу має випадковий процес;
- практичні способи побудови канонічного розкладання повинні базуватися на статистичних даних про випадкові процеси.

§ 1.8. Проходження ВФ, заданої канонічним розкладанням, через лінійну динамічну систему

Нехай лінійна динамічна система з оператором L перетворює ВФ $X(t)$, що прибуває на її вхід, у реакцію $Y(t)$, тобто $Y(t) = L[X(t)]$ (рис. 1.14).

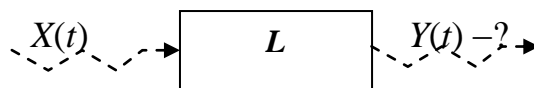


Рис. 1.14. Лінійна динамічна система

Припустимо, що $X(t)$ задана канонічним розкладанням:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \gamma_i(t).$$

Оскільки оператор L лінійний, то реакція системи має такий вигляд:

$$Y(t) = L[X(t)] = L[m_x(t)] + \sum_{i=1}^m V_i L[\gamma_i(t)]. \quad (1.15)$$

Останній вираз (1.15) є також канонічним розкладанням ВФ $Y(t)$, математичне сподівання якої

$$m_y(t) = L[m_x(t)], \quad (1.16)$$

а координатні функції

$$\Psi_i(t) = L[\gamma_i(t)], \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.17)$$

Отже, при лінійному перетворенні канонічного розкладання ВФ $X(t)$ отримуємо канонічне розкладання ВФ $Y(t)$, причому математичне сподівання й координатні функції піддаються тому самому лінійному перетворенню, тобто

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^m V_i \Psi_i(t), \quad (1.18)$$

а $m_x(t)$ і $\psi_i(t)$ визначаються за формулами (1.16) і (1.17).

Кореляційна функція й дисперсія реакції $Y(t)$ визначаються за допомогою таких рівнянь:

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^m \Psi_i(t) \Psi_i(t') D_i,$$

$$D_y(t) = \sum_{i=1}^m \Psi_i^2(t) D_i.$$

Враховуючи правила, які були сформульовані для лінійного однорідного оператора в §1.5, сформулюємо правила неоднорідного лінійного перетворення: $L[X(t)] = L_o[X(t)] + \varphi(t)$, випадкового процесу, що заданий своїм канонічним розкладанням.

1. Якщо випадковий процес, заданий своїм канонічним розкладанням:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \gamma_i(t),$$

піддати лінійному неоднорідному перетворенню L , то отримаємо випадковий процес також у вигляді канонічного розкладання:

$$Y(t) = L[X(t)] = m_y(t) + \sum_{i=1}^m V_i \psi_i(t),$$

тут $m_y(t)$ – математичне сподівання випадкового процесу $Y(t)$, отримане в результаті того самого лінійного неоднорідного перетворення математичного сподівання випадкового процесу $X(t)$:

$$m_y(t) = L[m_x(t)],$$

а координатні функції канонічного розкладання випадкового процесу $Y(t)$ одержують як наслідок відповідного лінійного однорідного перетворення L_o координатних функцій канонічного розкладання випадкового процесу $X(t)$, тобто

$$\psi_i(t) = L_o[\gamma_i(t)], \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

2. Коефіцієнти канонічного розкладання не змінюються.

3. Кореляційну функцію випадкового процесу: $Y(t) = L[X(t)]$, отриманого в результаті неоднорідного перетворення випадкового процесу $X(t)$, можна відшукати шляхом відповідного подвійного лінійного однорідного перетворення кореляційної функції випадкового процесу $X(t)$. Це перетворення проводиться спочатку за аргументом t , а потім за t' (або навпаки), тобто

$$K_y(t, t') = L_{ot} [L_{ot'} [K_x(t, t')]],$$

де $L[X(t)] = L_o[X(t)] + \varphi(t)$.

Якщо випадковий процес $X(t)$, задано своїм канонічним розкладанням:

$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \gamma_i(t)$, то кореляційну функцію випадкового процесу

$Y(t) = L[X(t)]$, отримують за такою формулою:

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^m \psi_i(t) \psi_i(t') D_i.$$

Розглянемо випадок, коли модель системи (її оператор) задана у вигляді лінійного диференціального рівняння, а саме:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(t) = (b_l p^l + b_{l-1} p^{l-1} + \dots + b_1 p + b_0) X(t)$$

або в скороченому записі

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i p^i \right) Y(t) = \left(\sum_{j=0}^l b_j p^j \right) X(t).$$

Оскільки система лінійна, аналогічному диференціальному рівнянню повинні відповідати математичні сподівання й кожна з координатних функцій входу та реакцій системи, тобто

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n a_i p^i \right) m_y(t) &= \left(\sum_{j=0}^l b_j p^j \right) m_x(t); \\ \left(\sum_{i=0}^n a_i p^i \right) \Psi_k(t) &= \left(\sum_{j=0}^l b_j p^j \right) \gamma_k(t), \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned} \right. \quad (1.19)$$

Кількість диференціальних рівнянь, що складають систему (1.19) становить $(m + 1)$, ці рівняння розв'язують відносно функцій $m_y(t)$, $\psi_1(t)$, ... $\psi_m(t)$ для заданих функцій $m_x(t)$, $\gamma_1(t)$, ... $\gamma_m(t)$... При цьому приймаються такі початкові умови:

$$\begin{aligned} m_y^{(i)}(0) &= y^{(i)}(0), \quad i = \overline{0, n-1}, \\ \Psi_j^{(i)}(0) &= 0, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Приклад 1.6. ВФ $X(t)$ задано своїм канонічним розкладанням:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n V_i e^{-\alpha_i t} + a, \quad \text{де } V_i \text{ – незалежні центровані ВВ із дисперсіями } D_i, a \text{ –}$$

невипадкова величина. Визначити характеристики випадкової функції $X(t)$.

Розв'язування

Обчислимо математичне сподівання випадкової функції $X(t)$, враховуючи, що випадкові величини V_i центровані, тобто $M(V_i) = 0$.

Тоді отримуємо, що

$$m_x(t) = M\left(\sum_{i=1}^n V_i e^{-\alpha_i t} + a\right) = M\sum_{i=1}^n (V_i e^{-\alpha_i t}) + a = a = \text{const}.$$

Кореляційна функція випадкової функції $X(t)$

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^n e^{-\alpha_i t} e^{-\alpha_i t'} D_i = \sum_{i=1}^n D_i e^{-\alpha_i (t+t')},$$

а її дисперсія $D_x(t) = K_x(t = t') = \sum_{i=1}^n D_i e^{-2\alpha_i t}$.

$$\text{Відповідь: } m_x(t) = a, \quad K_x(t, t') = \sum_{i=1}^n D_i e^{-\alpha_i (t+t')}, \quad D_x(t) = \sum_{i=1}^n D_i e^{-2\alpha_i t}.$$

Висновки

1. Випадкова функція об'єднує властивості функції та випадкової величини.

2. Основними характеристиками випадкової функції є математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція.

3. Характеристики випадкової функції являють собою функції невідповідності.

4. При перетворенні випадкової функції лінійною динамічною системою обчислення її характеристик на виході виконується за такими правилами:

Математичне сподівання ВФ на виході лінійної системи знаходять шляхом застосування оператора системи до математичного сподівання ВФ на вході. Якщо оператор системи неоднорідний: $L = L_o + \varphi(t)$, до результату додається невідповідна функція $\varphi(t)$.

Кореляційну функцію ВФ на виході лінійної системи визначають шляхом двократного застосування оператора (за кожним з аргументів) до кореляційної функції ВФ на вході.

5. Кожна випадкова функція може бути подана своїм канонічним розкладанням.

6. Під час проходження випадкової функції, яка подана своїм канонічним розкладанням, через лінійну динамічну систему на виході також отримуємо

процес, заданий своїм канонічним розкладанням. При цьому характеристики вихідного процесу одержують, застосовуючи до характеристик вхідного процесу те саме перетворення.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення випадкової функції та випадкового процесу.
2. Що називають перерізом випадкової функції?
3. Що називають реалізацією випадкової функції?
4. Подайте класифікацію випадкових процесів. Наведіть приклади.
5. Які характеристики випадкових функцій ви знаєте?
6. Дайте визначення математичного сподівання випадкової функції. Що воно характеризує?
7. Дайте визначення дисперсії випадкової функції. Що вона характеризує?
8. Які властивості має математичне сподівання випадкової функції?
9. Які властивості має дисперсія випадкової функції?
10. Чому математичне сподівання та дисперсія не є достатніми для визначення основних особливостей випадкової функції?
11. Дайте визначення кореляційної функції ВФ. Які властивості ВФ вона характеризує?
12. Назвіть властивості кореляційної функції ВФ.
13. Як можна визначити характеристики випадкової функції із результатів експерименту?
14. Що називають канонічним розкладанням випадкового процесу?
15. Скількома способами ми можемо отримати канонічне розкладання випадкового процесу?
16. Яким чином визначають математичне сподівання випадкового процесу, заданого своїм канонічним розкладанням?
17. Як можна визначити кореляційну функцію випадкового процесу, заданого своїм канонічним розкладанням?
18. Які оператори (перетворення) називаються лінійними? Лінійними однорідними? Нелінійними? Наведіть приклади.
19. Сформулюйте правило однорідного лінійного перетворення випадкового процесу, заданого своїм канонічним розкладанням.
20. Сформулюйте правило неоднорідного лінійного перетворення випадкового процесу, заданого своїм канонічним розкладанням.
21. Яким чином визначають характеристики випадкового процесу $Y(t)$, отриманого в результаті лінійного неоднорідного перетворення випадкового процесу $X(t)$?

Задачі до розділу 1

Приклади розв'язування задач

1. Випадкова функція $X(t)$ має такі характеристики: $m_x(t) = t^2 - 1$; $K_x(t, t') = 2e^{-\alpha(t'-t)^2}$. Визначити характеристики таких ВФ: $Y(t) = tX(t) + t^2 + 1$ та $Z(t) = 2t \frac{dX(t)}{dt} + (1-t)^2$.

Розв'язування

Оператори перетворення $X(t)$ в $Y(t)$ і $Z(t)$ є лінійними неоднорідними. Тому можемо застосовувати правила, які були сформульовані для неоднорідних лінійних операторів у § 1.5.

Отже,

$$m_y(t) = tm_x(t) + t^2 + 1 = t(t^2 - 1) + t^2 + 1 = t^3 + t^2 - t + 1,$$

$$K_y(t, t') = tt' \cdot 2e^{-\alpha(t'-t)^2}.$$

$$m_z(t) = 2t \frac{dm_x(t)}{dt} + (1-t)^2 = 4t^2 + 1 - 2t + t^2 = 5t^2 - 2t + 1,$$

$$\begin{aligned} K_z(t, t') &= 4tt' \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \cdot \partial t'} = 4tt' \cdot 2 \frac{\partial}{\partial t} \left[2\alpha(t-t')e^{-\alpha(t'-t)^2} \right] = \\ &= 16\alpha tt' \left[e^{-\alpha(t'-t)^2} + 2\alpha(t-t')(t'-t)e^{-\alpha(t'-t)^2} \right] = 16\alpha tt' e^{-\alpha(t'-t)^2} \left[1 - 2\alpha(t'-t)^2 \right]. \end{aligned}$$

2. Випадкову функцію задано у вигляді суми елементарних функцій: $X(t) = V_1 e^{-\alpha_1 t} + V_2 e^{-\alpha_2 t}$, де V_1 й V_2 – центровані випадкові величини, кореляційна

матриця яких $k = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$. Знайти характеристики ВФ $X(t)$.

Розв'язування

За виглядом кореляційної матриці визначаємо, що V_1 й V_2 – некорельовані випадкові величини, а їхні дисперсії $D_{v_1} = 2$ й $D_{v_2} = 5$. Це означає, що ВФ $X(t)$ подано канонічним розкладанням, тому

$$m_x(t) = 0;$$

$$K_x(t, t') = D_{v_1} e^{-\alpha_1(t+t')} + D_{v_2} e^{-\alpha_2(t+t')} = 2e^{-\alpha_1(t+t')} + 5e^{-\alpha_2(t+t')};$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) = 2e^{-\alpha_1 t} + 5e^{-\alpha_2 t}.$$

3. Розглянемо дві некорельовані ВФ $X(t)$ і $Y(t)$, що мають такі характеристики: $m_x(t) = t^2$; $K_x(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')}$, $m_y(t) = 1$; $K_y(t, t') = e^{\alpha_2(t+t')}$.

Визначити характеристики такої ВФ: $Z(t) = X(t) + tY(t) + t^2$.

Розв'язування

Обчислимо математичне сподівання ВФ $Z(t)$, враховуючи його властивості, сформульовані в § 1.2:

$$m_z(t) = M[X(t) + tY(t) + t^2] = M[X(t)] + tM[Y(t)] + M(t^2) = m_x(t) + t \cdot m_y(t) + t^2 = t^2 + t + t^2 = 2t^2 + t.$$

Тепер обчислимо кореляційну функцію та дисперсію ВФ $Z(t)$, беручи до уваги властивості кореляційної функції (див. § 1.2):

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + tt'K_y(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')} + tt'e^{\alpha_2(t+t')},$$

$$D_z(t) = K_z(t, t) = e^{2\alpha_1 t} + t^2 e^{2\alpha_2 t}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Випадкова функція $X(t) = (t^2 + 1)U$, де U – випадкова величина, можливі значення якої перебувають в інтервалі $(0; 10)$. Знайти реалізації функції $X(t)$ під час двох випробувань, у яких величина U набула таких значень: а) $u_1 = 2$; б) $u_2 = 3,5$.

Відповідь: $x_1(t) = 2(t^2 + 1)$, $x_2(t) = 3,5(t^2 + 1)$.

2. Випадкова функція $X(t) = U \sin t$, де U – випадкова величина. Знайти перерізи випадкової функції $X(t)$, які відповідають таким фіксованим значенням аргументу: а) $t_1 = \frac{\pi}{6}$; б) $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $X\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{U}{2}$, $X\left(\frac{\pi}{2}\right) = U$.

3. Знайти математичне сподівання випадкової функції $X(t) = Ue^t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 5$.

Відповідь: $m_x(t) = 5e^t$.

4. Знайти математичні сподівання випадкових функцій: $X(t) = Ut^2 + 2t + 1$ та $Y(t) = U \sin 4t + V \cos 4t$, де U та V випадкові величини, причому $M(U) = M(V) = 1$.

Відповідь: $m_x(t) = t^2 + 2t + 1$, $m_y(t) = \sin 4t + \cos 4t$.

5. Відомо кореляційну функцію K_x випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції: $Y(t) = X(t) + t^2$.

Відповідь: $K_y = K_x$.

6. Відомо кореляційну функцію K_x , випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційні функції таких випадкових функцій: а) $Y(t) = X(t)(t+1)$; б) $Z(t) = CX(t)$, де C – стала величина.

Відповідь: а) $K_y(t, t') = K_x(t, t')(t+1)(t'+1)$; б) $K_z(t, t') = C^2 K_x(t, t')$.

7. Відомо дисперсію $D_x(t)$ випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію випадкової функції: $Y(t) = X(t) + 2$.

Відповідь: $D_y(t) = D_x(t)$.

8. Дано: $X(t)$ – випадкова функція, $\varphi(t)$ – не випадкова функція. Довести: якщо $Y(t) = X(t)\varphi(t)$, то $D_y(t) = \varphi^2 D_x(t)$.

9. Відома дисперсія випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію випадкової функції: $Y(t) = X(t)(t+3)$.

Відповідь: $D_y(t) = D_x(t)(t+3)^2$.

10. На вхід підсилювальної ланки подається випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання і кореляційна функція якої відомі, а саме: $m_x(t) = t$, $K_x(t_1, t_2) = e^{-a(t_2-t_1)^2}$, ($a > 0$). Знайти: а) математичне сподівання, б) кореляційну функцію вихідної випадкової функції $Y(t)$, якщо коефіцієнт підсилення $k = 5$.

Вказівка. Врахувати, що вихідна функція $Y(t) = 5X(t)$

Відповідь: а) $m_y(t) = 5t$, б) $K_y(t_1, t_2) = 25e^{-a(t_2-t_1)^2}$

11. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції: $X(t) = U \cos 2t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 5$, $D(U) = 6$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 5 \cos 2t$; б) $K_x(t, t') = 6 \cos 2t \cos 2t'$; в) $D_x(t) = 6 \cos^2 2t$.

12. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції: $X(t) = U \sin 3t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 10$, $D(U) = 0,2$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 10 \sin 3t$; б) $K_x(t, t') = 0,2 \sin 3t \sin 3t'$;
в) $D_x(t) = 0,2 \sin^2 3t$.

13. Задано кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{-|t_2 - t_1|}$, випадкової функції $X(t)$. Знайти нормовану кореляційну функцію.

Відповідь: $r_x(t_1, t_2) = e^{-|t_2 - t_1|}$.

14. Знайти взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій: $X(t) = t^2 U$ і $Y(t) = tU$, де U – випадкова величина, причому $D(U) = 5$.

Відповідь: $R_{xy}(t_1, t_2) = 5t_1^2 t_2$

15. Задано взаємну кореляційну функцію: $R_{xy}(t_1, t_2) = \cos(at_1 + \beta t_2)$. Записати взаємну кореляційну функцію $R_{yx}(t_1, t_2)$.

Відповідь: $R_{yx}(t_1, t_2) = \cos(at_2 + \beta t_1)$.

16. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = t^2 + 2t + 1$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання її похідної.

Відповідь: $m_{x'}(t) = 2t + 2$

17. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = t^2 + 4$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання випадкової функції: $Y(t) = tX'(t) + t^2$.

Відповідь: $m_y(t) = 3t^2$.

18. Задано кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2 - t_1)^2}$, випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію її похідної.

Відповідь: $K_{x'}(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2 - t_1)^2} (1 - 2(t_2 - t_1))$.

19. На вхід диференціовальної системи прибуває випадкова функція $X(t)$, кореляційна функція якої $K_x(t_1, t_2) = [D_x \cos \omega(t_2 - t_1)] / (t_2 + t_1)$. Знайти кореляційну функцію вихідної функції.

Відповідь:

20. На вхід диференціовальної ланки прибуває випадкова функція, математичне сподівання якої $m_x(t) = 5 \sin t$, а кореляційна функція $K_x(t_1, t_2) = 3e^{-0,5(t_2 - t_1)^2}$. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію вихідної функції: $Y(t) = X'(t)$.

Відповідь: а) $m_y(t) = 5 \cos t$, б) $K_y(t_1, t_2) = 3e^{-0,5(t_2 - t_1)^2} (1 - (t_2 - t_1)^2)$

21. Знайти математичне сподівання випадкових функцій: а) $X(t) = Ut^2$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 5$; б) $X(t) = U \cos 2t + Vt$, де U та V – випадкові величини, причому $M(U) = 3$, $M(V) = 4$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 5t^2$; б) $m_x(t) = 3 \cos 2t + 4t$.

22. Задано кореляційну функцію $K_x(t_1, t_2)$ випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційні функції випадкових функцій: а) $Y(t) = X(t) + t$; б) $Y(t) = (t + 1)X(t)$; в) $Y(t) = 4X(t)$.

Відповідь: а) $K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$; б) $K_y(t_1, t_2) = (t_1 + 1)(t_2 + 1)K_x(t_1, t_2)$; в) $K_y(t_1, t_2) = 16K_x(t_1, t_2)$.

23. Задано дисперсію $D_x(t)$ випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію випадкових функцій: а) $Y(t) = X(t) + e^t$; б) $Y(t) = tX(t)$.

Відповідь: а) $D_y(t) = D_x(t)$; б) $D_y(t) = t^2 D_x(t)$.

24. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції $X(t) = U \sin 2t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 3$, $D(U) = 6$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 3 \sin 2t$; б) $K_x(t_1, t_2) = 6 \sin 2t_1 \sin 2t_2$; в) $D_x(t) = 6 \sin^2 2t$.

25. Знайти нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо відомо її кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = 3 \cos(t_2 - t_1)$.

Відповідь: $\rho_x(t_1, t_2) = \cos(t_2 - t_1)$.

26. Задано випадкові функції: $X(t) = (t - 1)U$ та $Y(t) = t^2U$, де U і V – некорельовані випадкові величини, причому $M(U) = 2$, $M(V) = 3$, $D(U) = 4$, $D(V) = 5$. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію суми: $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Вказівка: Переконатися в тому, що взаємна кореляційна функція заданих випадкових функцій дорівнює нулю, отже, $X(t)$ та $Y(t)$ некорельовані.

Відповідь: а) $m_x(t) = 2(t - 1) + 3t^2$; б) $K_y(t_1, t_2) = 4(t_1 - 1)(t_2 - 1) + 6t_1^2 t_2^2$; в) $D_x(t) = 4(t - 1)^2 + 6t^4$.

27. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = t^2 + 1$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання її похідної.

Відповідь: $m_x(t) = 2t$.

28. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = t^2 + 3$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання випадкової функції: $Y(t) = tX'(t) + t^3$.

Відповідь: $m_y(t) = t^2(t + 2)$.

29. Задано кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = e^{-(t_2 - t_1)^2}$, випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію її похідної.

Відповідь: $K_x(t_1, t_2) = 2e^{-(t_2 - t_1)^2} [1 - 2(t_2 - t_1)^2]$.

30. Задано математичне сподівання: $m_x(t) = 4t^3$, випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання інтеграла: $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

Відповідь: $m_y(t) = t^4$.

31. Задано випадкову функцію: $X(t) = U \cos^2 t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 2$. Знайти математичне сподівання випадкової функції: $Y(t) = (t^2 + 1) \int_0^t X(s) ds$.

Відповідь: $m_y(t) = (t^2 + 1)[t + (\sin 2t)/2]$.

32. Задано кореляційну функцію: $K_x(t_1, t_2) = \cos \omega t_1 \cos \omega t_2$, випадкової функції $X(t)$. Знайти: а) кореляційну функцію; б) дисперсію інтеграла: $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

Відповідь: а) $K_y(t_1, t_2) = \frac{\sin \omega t_1 \sin \omega t_2}{\omega^2}$; б) $D_y(t) = (\sin^2 \omega t) / \omega^2$.

33. Задано випадкову функцію: $X(t) = Ue^{3t} \cos 2t$, де U – випадкова величина, причому $M(U) = 5$, $D(U) = 1$. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію інтеграла: $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

Відповідь: а) $m_x(t) = 5e^{3t} \cos 2t$;

б) $K_y(t_1, t_2) = (1/169) [e^{3t_1} (2 \sin 2t_1 + 3 \cos 2t_1) - 3] [e^{3t_2} (2 \sin 2t_2 + 3 \cos 2t_2) - 3]$;

в) $D_y(t) = (1/169) [e^{3t} (2 \sin 2t + 3 \cos 2t) - 3]^2$.

РОЗДІЛ 2

СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ (СВП)

Мета розділу: вивчення властивостей стаціонарних випадкових процесів, методів обчислення характеристик СВП та правил їхнього перетворення лінійною динамічною системою.

§ 2.1. Поняття про СВП

На практиці часто спостерігаються випадкові процеси, перебіг яких у часі приблизно однаковий, тобто середнє значення процесу залишається сталим, а його характеристики не змінюються. Такі випадкові процеси називаються *стаціонарними* (рис. 2.1).

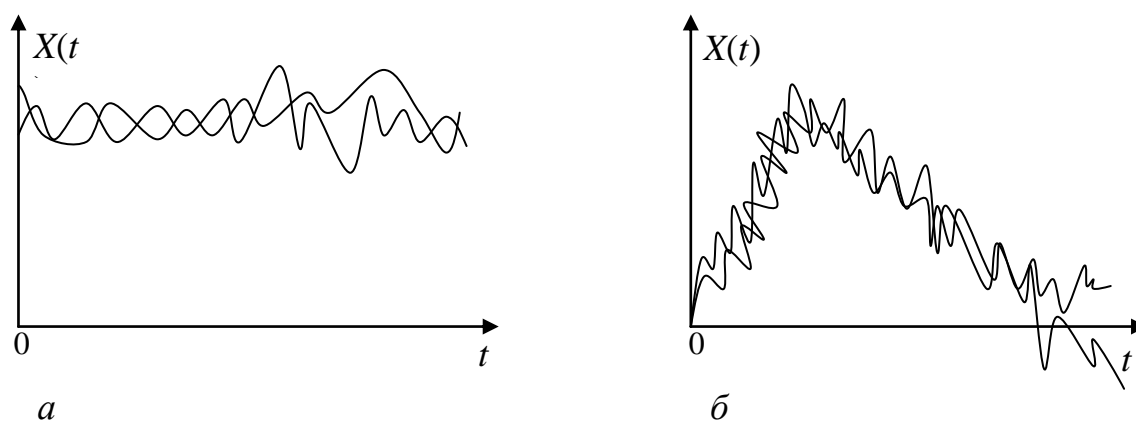


Рис. 2.1. Приклади випадкових процесів: *a* – криві стаціонарного процесу, *б* – криві нестаціонарного процесу

Прикладами стаціонарних випадкових процесів є коливання напруги в електромережі, випадкові шуми в радіоприймачі, процес хитавиці корабля.

Кожен СВП можна розглядати як такий, що триває як завгодно довго. При цьому за початок відліку ми можемо вибрати будь-який момент часу: характеристики СВП повинні залишитися незмінними.

Зауважимо, що крім СВП, існують і нестаціонарні процеси. Характеристики таких процесів змінюються в часі. Але потрібно розуміти, що саме поняття «стаціонарність» часто залежить від інтервалу часу, на якому розглядається випадковий процес (див. рис. 2.2). Тут один і той самий процес буде стаціонарним, якщо його розглядати на інтервалі $t_1 \div t_2$, і не стаціонарним на інших проміжках часу.

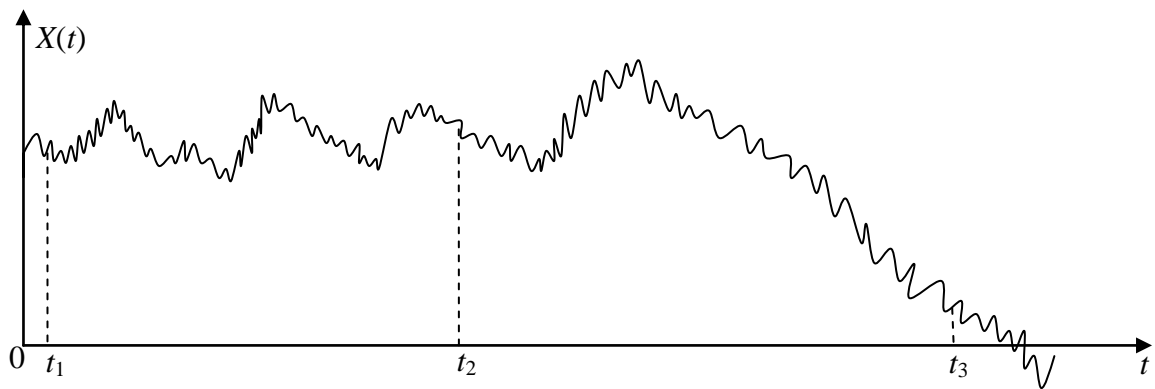


Рис. 2.2. Зображення залежності стаціонарності процесу від часу:
 $0 \div t_1$ – нестаціонарний; $t_1 \div t_2$ – стаціонарний; $t_2 \div t_3$ – нестаціонарний

Оскільки математичний опис СВП та їхнє перетворення значно спрощуються, порівняно з нестаціонарними процесами, широкого застосування на практиці набула теорія СВП (теорія стаціонарних ВФ).

Випадкова функція $X(t)$ називається *стаціонарною*, якщо всі її ймовірнісні характеристики не залежать від аргументу t . Під характеристиками будемо розуміти математичне сподівання, дисперсію й кореляційну функцію.

Сформулюємо визначення СВП через його характеристики.

Випадкова функція $X(t)$ називається *стаціонарною*, якщо вона має:

- 1) стале математичне сподівання, тобто $m_x(t) = m_x = const$;
- 2) сталу дисперсію: $D_x(t) = D_x = const$;
- 3) кореляційний момент двох перерізів $K_x(t, t')$, де $t' = t + \tau$, не залежить від того, де саме на осі t взято відрізок довжиною τ , а зумовлюється тільки довжиною відрізка, тобто $K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau)$ (рис. 2.3).

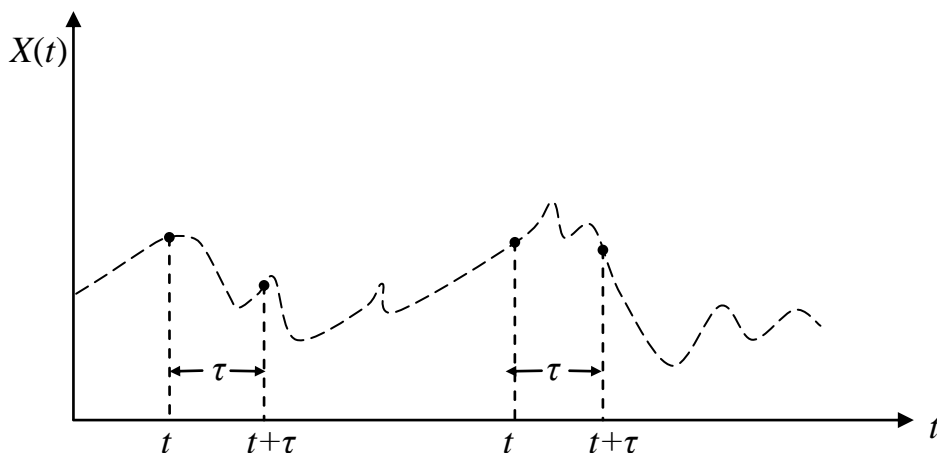


Рис. 2.3. Зображення стаціонарного випадкового процесу

Зауважимо, що коли математичне сподівання мінливе, тобто процес не є стаціонарним, то можна перейти до центрованого процесу: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$,

й розглядати його як стаціонарний. Надалі, щоб не висувати спеціальних умов до математичного сподівання $m_x(t)$, будемо розглядати тільки центровані СВФ.

Крім того, друга умова є окремим випадком третьої, оскільки для СВП має місце рівність: $D_x(t) = K_x(t, t) = k_x(0) = const$.

Враховуючи все вищезазначене, робимо висновок, що умова: $K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau)$, являє собою єдину істотну умову, яку має задовольняти СВП (СВФ).

Взагалі, кореляційна функція СВФ має такі властивості (вони впливають із загальних властивостей кореляційної функції):

1. Кореляційна функція СВП – парна, тобто $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$.

Дійсно, $K_x(t, t') = K_x(t', t)$. Тоді маємо, що

$$k_x(\tau) = K_x(t, t + \tau) = K_x(t + \tau, t) = k_x(-\tau).$$

2. Абсолютна величина кореляційної функції не перевищує її значення у точці початку координат:

$$|k_x(\tau)| \leq k_x(0).$$

Зауважимо, що для оцінювання ступеня залежності між розрізами СВФ можна також використовувати *нормовану кореляційну функцію* СВП, яка визначається за такою формулою:

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{D_x}.$$

Оскільки $D_x = k_x(0)$, то $\rho_x(0) = 1$. Отже, абсолютна величина нормованої кореляційної функції не перевищує одиниці.

§ 2.2. Ергодична властивість СВП

Нехай спостерігається СВП $X(t)$, потрібно оцінити його характеристики: математичне сподівання m_x й кореляційну функцію $k_x(\tau)$.

Для того, щоб це зробити, необхідно мати кілька реалізацій СВП. Обробляючи дані цих реалізацій, знайдемо оцінку математичного сподівання $\tilde{m}_x(t)$ та кореляційної функції $\tilde{k}_x(t, t')$. Але у зв'язку з обмеженістю даних на інтервалі $0 \div \tau$ (скінченне число реалізацій), ми отримаємо лише наближені значення оцінок, тому $\tilde{m}_x(t)$ не буде сталим, а $\tilde{k}_x(t, t')$ залежатиме від двох аргументів і для одержання характеристик СВП необхідно усереднити математичне сподівання $\tilde{m}_x(t)$ за часом t , а кореляційну функцію усереднити стосовно різних значень аргументу: $\tau = t - t'$. Такий метод обробки дуже громіздкий, тому виникає питання: чи не можна одержати оцінки характеристик СВП на основі єдиної реалізації, спостережуваної на досить тривалому проміжку часу? Виявляється можна, але тільки в тому випадку, коли СВП має *ергодичну* властивість.

Ергодична властивість СВП полягає в тому, що кожна його окрема реалізація є ніби "характерним представником" усієї сукупності можливих реалізацій, тобто одна реалізація достатньої тривалості заміняє при обробці множину реалізацій.

Якщо СВП $X(t)$ має ергодичну властивість, то для нього середнє за часом (на досить великому інтервалі) приблизно дорівнює середньому значенню за множиною спостережень. Отже, в цьому випадку всі характеристики випадкового процесу $X(t)$ можна визначати за однією реалізацією.

Розглянемо, які стаціонарні випадкові процеси мають, а які не мають ергодичну властивість.

Для цього розглянемо приклади на рисунках 2.4 та 2.5.

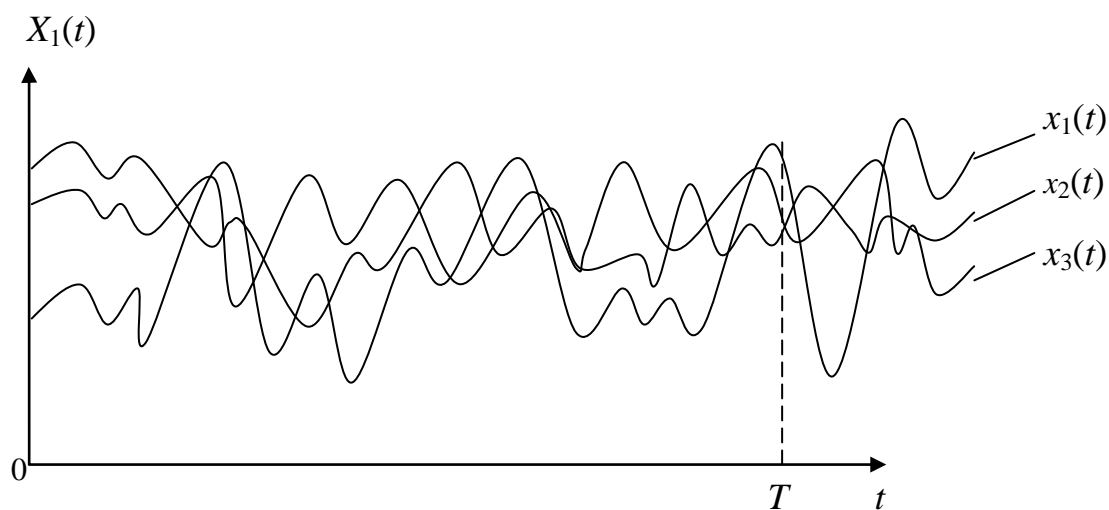


Рис. 2.4. Графіки реалізацій стаціонарного процесу $X_1(t)$, що має ергодичну властивість

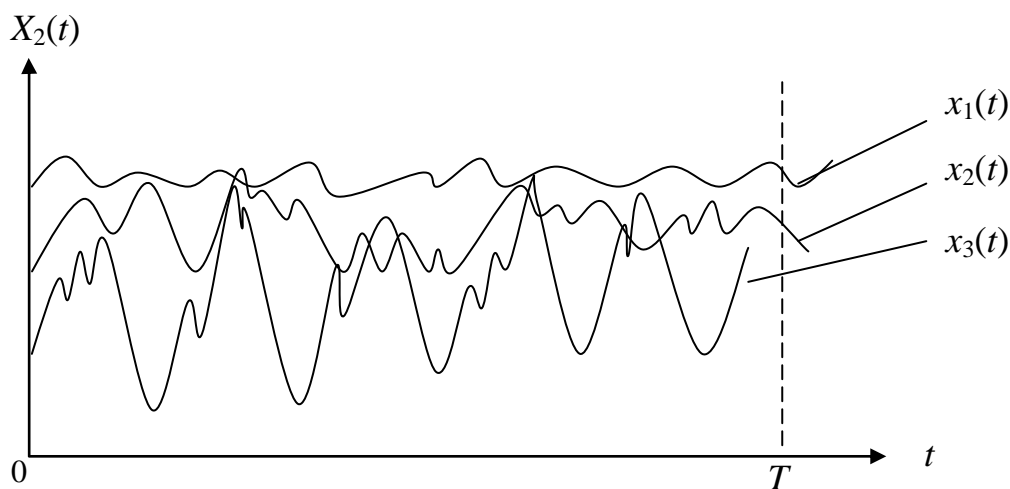


Рис. 2.5. Графіки реалізацій стаціонарного процесу $X_2(t)$, який не має ергодичної властивості

Очевидно, що ВП $X_1(t)$ і $X_2(t)$ є стаціонарними. Однак процесу $X_1(t)$ властива ергодичність, а процесу $X_2(t)$ – ні.

Припустимо, що $X_1(t)$ і $X_2(t)$ – процеси коливань величини кута атаки літака на даній висоті h . Тоді для процесу $X_1(t)$ висота h стала ($h = const$), а стосовно $X_2(t)$ висота для кожної з реалізацій набуває деякого випадкового значення в межах певного діапазону. Це означає, що ВП $X_2(t)$ має більш складну внутрішню структуру: він розкладений на елементарні ВП зі своїми індивідуальними характеристиками.

У цьому прикладі неергодичність ВП пов'язується із наявністю в його складі звичайної ВВ, а саме, висоти h .

Дійсно, розглянемо випадкову функцію: $Z(t) = X(t) + Y$, де $X(t)$ – ергодична СВФ із характеристиками $m_x, k_x(\tau)$, Y – ВВ з характеристиками m_y, D_y . Припустимо, що СВФ $X(t)$ і ВВ Y – некорельовані.

Відповідно до загальних правил додавання ВФ, характеристики ВФ $Z(t)$ будуть мати такі значення:

$$m_z = m_x + m_y,$$

$$k_z(\tau) = k_x(\tau) + D_y.$$

З цих формул видно, що ВФ $Z(t)$ стаціонарна. Але вона не ергодична, тому що кожна з її реалізацій буде мати індивідуальні характеристики, залежно від того, якого значення набула ВВ Y .

Про ергодичність або не ергодичність ВП можна безпосередньо судити, оцінюючи вигляд його кореляційної функції. Річ у тім, що кореляційна функція неергодичного процесу відрізняється наявністю у своєму складі сталої D_y (рис.2.6).

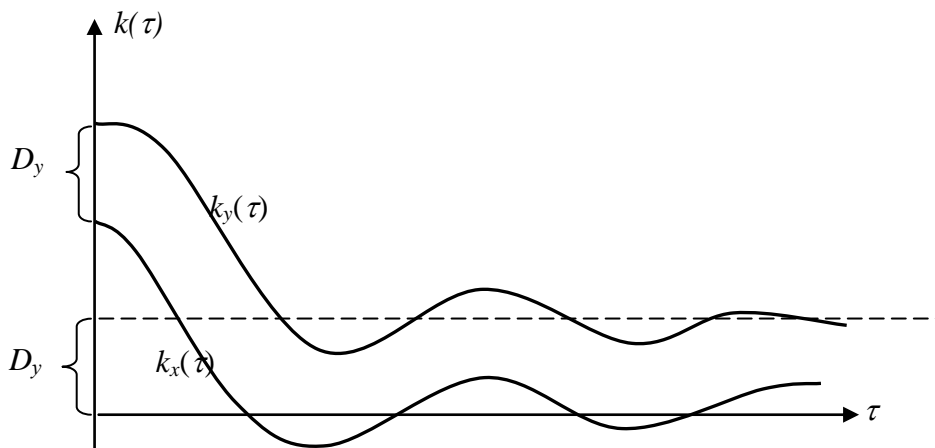


Рис. 2.6. Графіки кореляційних функцій ергодичного й неергодичного випадкових процесів: $k_x(\tau)$ – процес ергодичний, $k_y(\tau)$ – процес не ергодичний

Отже, якщо кореляційна функція СВП вже не спадає, коли $\tau \rightarrow \infty$, а за умови досягнення деякого значення τ залишається сталою, то це свідчить про те, що в складі ВФ $Z(t)$ є ВВ, а сам процес $Z(t)$ не є ергодичним. Як буде показано далі, в цьому випадку спектр ВФ $Z(t)$ буде складатися не тільки з неперервної частини: у разі, коли частота $\omega = 0$, буде мати місце скінченна дисперсія.

§ 2.3. Визначення характеристик ергодичного СВП на основі однієї реалізації

Нехай ВФ $X(t)$ являє собою СВП, якому властива ергодичність, і він заданий однією реалізацією на інтервалі $0 \div T$.

Характеристики ергодичної випадкової функції $X(t)$ можуть бути визначені не як середні за множиною реалізацій, а як середні за часом.

Тобто оцінку математичного сподівання можна визначити за такою формулою:

$$M_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dx. \quad (2.1)$$

Аналогічно на основі однієї реалізації випадкової функції $X(t)$ можна знайти оцінку кореляційної функції, а саме:

$$k_x(\tau) = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t + \tau)]. \quad (2.2)$$

Для обчислення функції $k_x(\tau)$ зручно спочатку центрувати ВП $X(t)$, тобто визначити функцію: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x$, а потім обчислити кореляційну функцію за такою формулою:

$$k_x(\tau) \approx \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t + \tau) dt. \quad (2.3)$$

Обчислюючи інтеграл (2.3) для різних значень τ , отримують функцію $k_x(\tau)$. На практиці при обчисленні інтегралів (2.1) і (2.3), їх замінюють скінченними сумами. Для цього попередньо весь інтервал даного ВП розбивається на n рівних частин довжиною Δt (див. рис. 2.7). Нехай t_1, t_2, \dots, t_n – середини цих інтервалів; $x_1 = x(t_1); x_2 = x(t_2), \dots, x_n = x(t_n)$ – значення, які набуває реалізація ВП у цих точках.

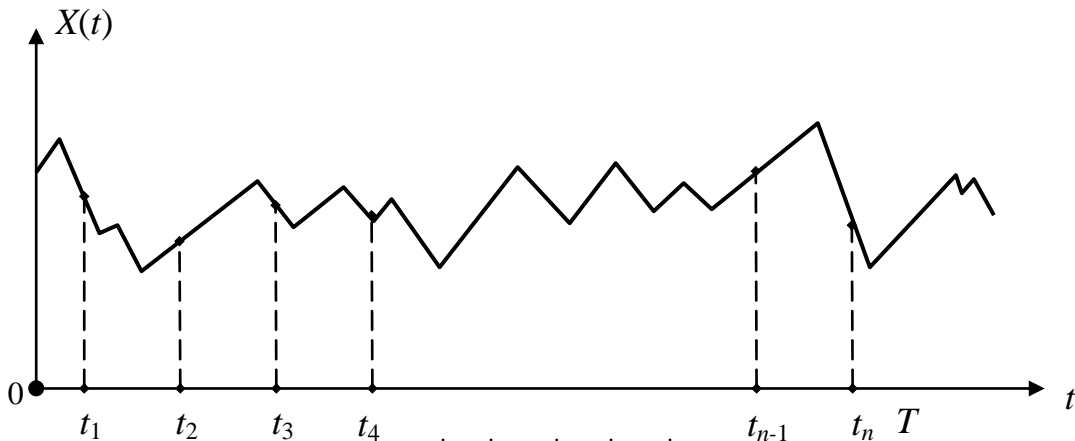


Рис. 2.7. Ілюстрація до обчислення характеристик випадкових функцій

Тоді інтеграл (2.1) приблизно обчислюється за такою формулою:

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.4)$$

Аналогічно обчислюється і кореляційна функція для значень аргументу τ , які дорівнюють $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, m\Delta t$, ($m < n$), а саме:

$$k_x(j\Delta t) = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} x_i x_{i+j}, \quad j = \overline{0, m}, \quad (m < n). \quad (2.5)$$

Обчислення функції: $k_x(\tau) = k_x(j\Delta t)$ (тобто $\tau = j\Delta t$, $j = \overline{0, m}$), за виразом (2.5) виконують послідовно, для всіх значень параметра j ($j = 0, 1, 2, \dots$). При цьому беруть таке значення m , що коли $\tau = m\Delta t$, то кореляційна функція $k_x(\tau)$ буде дорівнювати нулю, або робити невеликі нерегулярні коливання поблизу нуля.

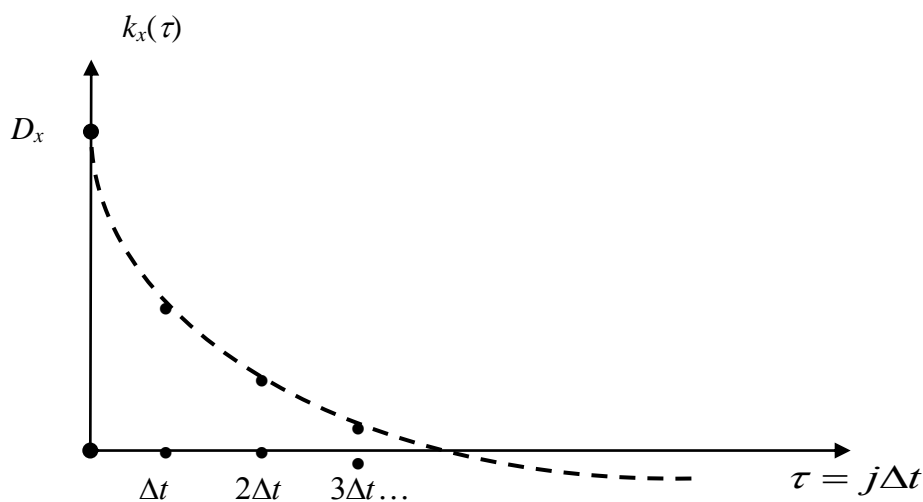


Рис. 2.8. Графік кореляційної функції ВФ

З огляду на сказане вище, можемо висловити такі зауваження:

1. Для того, щоб математичне сподівання m_x і кореляційну функцію $k_x(\tau)$ визначити з достатньою точністю, потрібно мати результати досить великої кількості вимірів n (сто і більше).

2. Вибір довжини часткових інтервалів Δt залежить від характеру ВФ $X(t)$, тобто швидкості її зміни. Зокрема, значення Δt вибирається так, щоб на один період найвищої частоти в спектрі $X(t)$ припадало орієнтовно до десяти вимірів.

3. Варто також мати на увазі, що при наближенні величини m до n кількість доданків у виразі (2.5) зменшується і, в силу цього, точність обчислень за цим виразом різко спадає.

§ 2.4. Спектральне розкладання СВП на скінченному проміжку часу. Спектр дисперсій

Відомо, що будь-яка не випадкова функція може бути подана у вигляді ряду Фур'є, тобто як сума гармонічних складових з певними амплітудами. При цьому *спектром процесу* називається функція, яка описує розподіл амплітуд за різними частотами. Спектр показує, якого роду коливання (які частоти) переважають у даному процесі.

Аналогічно можна описати й СВП. Справа в тому, що випадковий процес (як і детермінований) має свою певну структуру й свій спектральний склад.

Але особливістю випадкового процесу є те, що амплітуди гармонічних складових – випадкові величини. Тому *спектр* СВП являє собою розподіл дисперсій цих ВВ за частотами.

Розглянемо центрований ($m_x = 0$) СВП $\overset{\circ}{X}(t)$ на інтервалі $0 \div T$ (рис. 2.9).

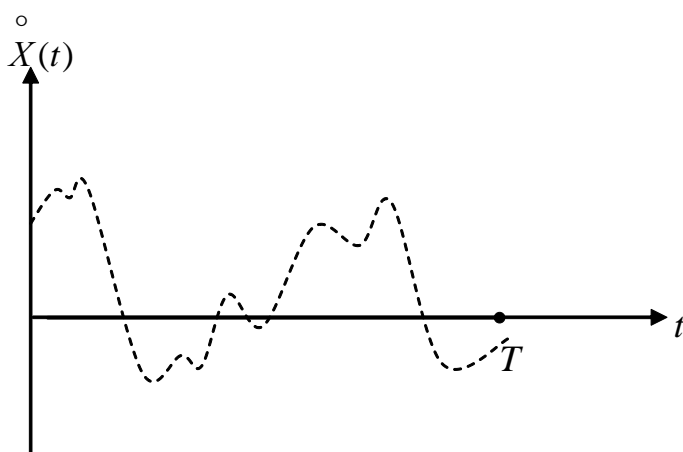


Рис. 2.9. Графік реалізації центрального випадкового процесу $\overset{\circ}{X}(t)$ на інтервалі $0 \div T$

Йому відповідає кореляційна функція: $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$ (див. рис. 2.10).

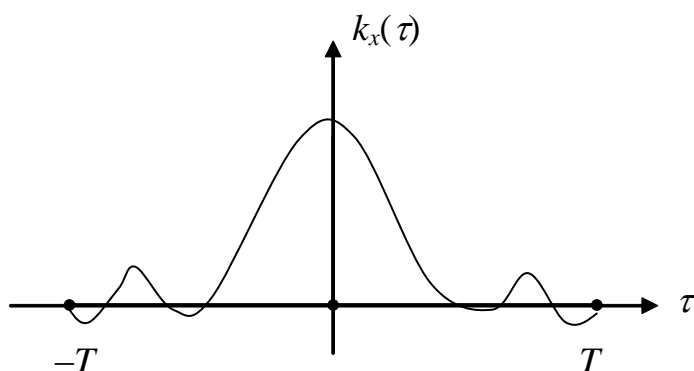


Рис. 2.10. Графік кореляційної функції СВП

Оскільки функція $k_x(\tau)$ – парна, то її можна подати у вигляді ряду парних гармонік:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \quad (2.6)$$

при цьому

$$\omega_k = k\omega_1; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}, \quad (2.6 \text{ a})$$

тобто величина ω_1 визначається інтервалом T і являє собою основну гармоніку. Коефіцієнти D_k визначаються за такими формулами:

$$\begin{cases} D_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T k_x(\tau) d\tau, \\ D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau, \quad \text{якщо } k \neq 0. \end{cases}$$

Оскільки $k_x(\tau)$ і $\cos \omega_k \tau$ є парними функціями, то ці формули можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} D_0 = \frac{1}{T} \int_0^T k_x(\tau) d\tau, \\ D_k = \frac{2}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau, \quad \text{якщо } k \neq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Перейдемо у формулі (2.6) до двох аргументів, враховуючи, що $\tau = t' - t$. Тоді отримуємо, що

$$\cos \omega_k \tau = \cos \omega_k (t' - t) = \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + \sin \omega_k t' \sin \omega_k t$$

і

$$K_x(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} (D_k \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t' \sin \omega_k t). \quad (2.8)$$

Формула (2.8) є канонічним розкладанням кореляційної функції $K_x(t, t')$. Координатними функціями цього розкладання є косинуси й синуси із частотами, кратними основній гармоніці ω_1 . Однак канонічному розкладанню кореляційної функції $K_x(t, t')$ відповідає канонічне розкладання самої ВФ $X(t)$ з тими самими координатними функціями (див. §1.6), тобто ми можемо записати, що

$$\dot{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t) \quad (2.9)$$

де U_k, V_k – некорельовані ВВ, математичні сподівання яких дорівнюють нулю, а дисперсії є сталими, а саме:

$$D(U_k) = D(V_k) = D_k. \quad (2.10)$$

При цьому дисперсії D_k визначаються за формулами (2.7).

Розкладання (2.9) називається спектральним розкладанням СВП.

Визначимо дисперсію ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$, яка задана своїм спектральним розкладанням [див. формулу (2.9)], таким чином:

$$\begin{aligned} D_x &= D\left[\overset{\circ}{x}(t)\right] = D\left[\sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t)\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \cos^2(\omega_k t) D[U_k] + \sin^2(\omega_k t) D[V_k] = \sum_{k=0}^{\infty} (\cos^2 \omega_k t + \sin^2 \omega_k t) D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k, \end{aligned}$$

тобто

$$D_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \quad (2.11)$$

Отже, дисперсія СВФ дорівнює сумі дисперсій усіх гармонік її спектрального розкладання. Формула (2.11) показує, що дисперсія ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$ розподілена певним чином за частотами. Графічно такий розподіл зображується спектром дисперсій СВФ (СВП) (див. рис. 2.11). Відповідно до формули (2.11) сума всіх ординат D_k дорівнює дисперсії D_x ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$.

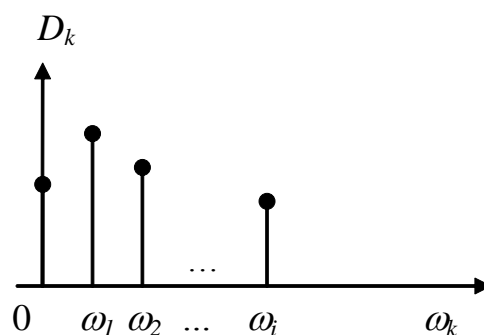


Рис. 2.11. Графічне зображення спектра дисперсій СВФ

Спектр дисперсій будується відповідно до заданої реалізації СВП $X(t)$ (t належить до інтервалу $0 \div T$) у такій послідовності:

1. СВП центрується, тобто будемо ВП: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$.

2. Обчислюємо кореляційну функцію ВП $k_x(\tau)$ (τ належить до інтервалу $0 \div T$).
3. Визначаємо гармоніки ω_1 й ω_k за формулами (2.6, а).
4. Розраховуємо дисперсії гармонік D_k ($k = 0 \div \infty$) за формулами (2.7).

§ 2.5. Спектральне розкладання СВП на нескінченному часовому інтервалі. Спектральна щільність

Складові спектра дисперсій $D_k(\omega_k)$ СВП, що був розглянутий у попередньому параграфі, відповідають частотам ω_k , які відрізняються одна від одної на сталу величину $\Delta\omega$, тобто $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1} = \omega_1 = \frac{2\pi}{2T}$. Очевидно, що ця величина буде визначатися довжиною реалізації СВП.

При збільшенні довжини реалізації T , відстані $\Delta\omega$ ($\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$) будуть зменшуватися. Якщо T буде прямувати до нескінченності, то відповідно, відстань $\Delta\omega$ наблизатиметься до нуля, а спектральні лінії $D_k(\omega_k)$ будуть також нескінченно наблизатися одна до одної. Крім того, величини складових $D_k(\omega_k)$ також будуть прямувати до нуля, оскільки дисперсія $D_x = const$, а гармонічних складових за такими умовами стає нескінченно багато.

Розглянемо відношення: $\frac{D_k}{\Delta\omega} = S_k(\omega_k)$. Воно показує середню щільність дисперсії на інтервалі частот $(\omega_k \div \omega_{k+1})$. Для всіх значень ω_k таким чином можна побудувати діаграму щільності дисперсій на відповідних інтервалах (див. рис. 2.12).

Обчислимо площу k -го прямокутника. Очевидно, що вона відповідає такій рівності: $\frac{D_k}{\Delta\omega} \Delta\omega = D_k$, а площа всієї фігури – дисперсії СВП ($\sum_{k=1}^{\infty} D_k = D_x$).

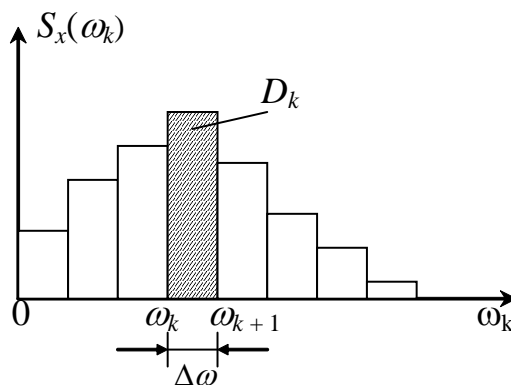


Рис. 2.12. Діаграма щільності дисперсій $S_x(\omega_k)$ СВП

Отже, якщо $T \rightarrow \infty$, то $\Delta\omega \rightarrow 0$ і східчаста фігура $S_x(\omega_k)$ буде необмежено наближатися до плавної кривої $S_x(\omega)$. Ця крива (залежність) виражає щільність розподілу дисперсій за частотами. Вона називається *спектральною щільністю* ВФ $X(t)$ й описується таким чином:

$$S_x(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_k}{\Delta\omega}.$$

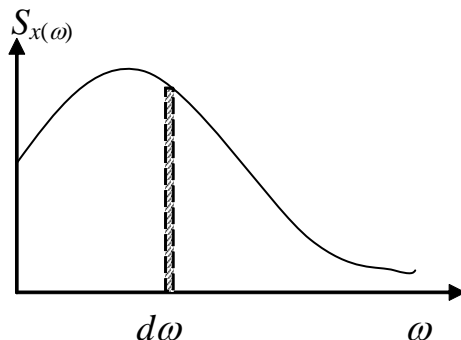


Рис. 2.13. Графічне зображення спектральної щільності ВФ

Графічне зображення спектральної щільності ВФ подано на рис. 2.13. Очевидно, що площа, обмежена кривою спектральної щільності $S_x(\omega)$, як і раніше, дорівнює D_x , тобто

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) описує розкладання дисперсії D_x СВП $\dot{X}(t)$ на суму елементарних доданків $S_x(\omega)d\omega$, кожен з яких показує дисперсію: $dD = S_x(\omega)d\omega$, яка відповідає елементарній ділянці частот $d\omega$. До того ж, як і спектр дисперсій $D_x(\omega)$, спектральну щільність $S_x(\omega)$ можна повністю визначити за допомогою кореляційної функції $k_x(\tau)$ СВП $\dot{X}(t)$.

Знайдемо цей зв'язок. Будемо виходити з розкладання кореляційної функції $k_x(\tau)$ у ряд Фур'є на інтервалі $(-T; T)$:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \quad (2.13)$$

при цьому дисперсія D_k на частоті ω_k обчислюється за такою формулою:

$$D_k = \frac{2}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau. \quad (2.14)$$

Розглянемо середню щільність дисперсії на ділянці $\Delta\omega$:

$$S_x(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega}, \quad (2.15)$$

тоді $D_k = S_x(\omega_k)\Delta\omega = S_x(\omega_k)\omega_1 = S_x(\omega_k)\frac{\pi}{T}$, тобто

$$D_k = S_x(\omega_k)\frac{\pi}{T}. \quad (2.16)$$

З урахуванням виразу (2.16) перепишемо формули (2.13) і (2.14) таким чином:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} S_x(\omega_k) \cos\omega_k \tau \Delta\omega, \quad (2.17)$$

$$S_x(\omega_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^T k_x(\tau) \cos\omega_k \tau d\tau. \quad (2.18)$$

Знайдемо границі у виразах (2.17) та (2.18), якщо $T \rightarrow \infty$ і $\Delta\omega \rightarrow d\omega$. За цих умов $S_x(\omega_k)$ буде прямувати до $S_x(\omega)$, а сума перетвориться на інтеграл, тоді:

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos\omega\tau d\omega, \quad (2.19)$$

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau. \quad (2.20)$$

Формула (2.20) називається інтегралом Фур'є і являє собою розкладання СВП $\overset{\circ}{X}(t)$, заданого в нескінченному інтервалі, на суму гармонік із неперервним спектром.

Разом формули (2.19) і (2.20) називають перетвореннями Фур'є. Вони встановлюють взаємний зв'язок між кореляційною функцією $k_x(\tau)$ і спектральною щільністю $S_x(\omega)$ СВП $\overset{\circ}{X}(t)$.

На практиці замість спектральної щільності $S_x(\omega)$, часто використовують нормовану спектральну щільність $\alpha_x(\omega)$, яка визначається таким чином:

$$\alpha_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x},$$

де D_x – дисперсія ВП.

Очевидно, що взаємні перетворення Фур'є будуть також справедливими, коли кореляційна функція й спектральна щільність нормовані, а саме:

$$\rho_x(\tau) = \int_0^{\infty} \alpha_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (2.21)$$

$$\alpha_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (2.22)$$

де $\rho_x(\tau)$ – нормована кореляційна функція, $\alpha_x(\omega)$ – нормована спектральна щільність СВП $\dot{X}(t)$.

Коли у виразі (2.21) задати, що $\tau = 0$, то, враховуючи, що $\rho_x(0) = 1$, отримуємо такий результат: $\int_0^{\infty} \alpha_x(\omega) d\omega = 1$. Тобто площа під кривою нормованої спектральної щільності дорівнює 1.

П р и к л а д 2.1. Нормована кореляційна функція $\rho_x(\tau)$ ВФ $X(t)$ спадає за лінійним законом від одиниці до нуля, коли $0 < \tau < \tau_0$, і дорівнює нулю, якщо $\tau > \tau_0$. Визначити нормовану спектральну щільність ВФ $X(t)$.

Розв'язування

Графік функції $\rho_x(\tau)$ має вигляд, показаний на рис. 2.14.

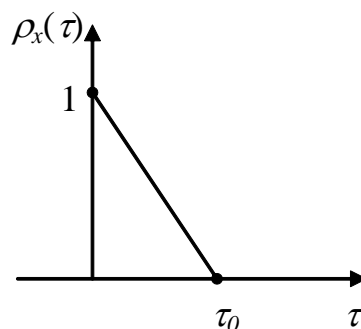


Рис. 2.14. Графік нормованої кореляційної функції ВП $X(t)$

Аналітично ця функція може бути описана такою формулою:

$$\rho_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{\tau_0}, & \text{якщо } 0 < \tau < \tau_0, \\ 0, & \text{якщо } \tau > \tau_0. \end{cases}$$

Обчислимо нормовану спектральну щільність $\alpha_x(\omega)$ за формулою (2.22):

$$\alpha_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi \tau_0 \omega^2} (1 - \cos \omega \tau_0).$$

Графічне зображення нормованої спектральної щільності $\alpha_x(\omega)$ показано на рис. 2.15. Очевидно, що характер графіка $\alpha_x(\omega)$ залежить від величини τ_0 . Зміна її значення приводить до зміни масштабу по осях ω і $\alpha_x(\omega)$ при збереженні площі, обмеженої кривою, ця площа дорівнює 1. При збільшенні значення τ_0 масштаб по осі ω зменшується; по $\alpha_x(\omega)$ – збільшується. Якщо $\tau_0 \rightarrow \infty$, то випадкова функція вироджується у випадкову величину; при цьому нормована кореляційна функція $\rho_x(\tau) = 1$ для всіх значень τ , а спектр стає дискретним із частотою: $\omega_0 = 0$.

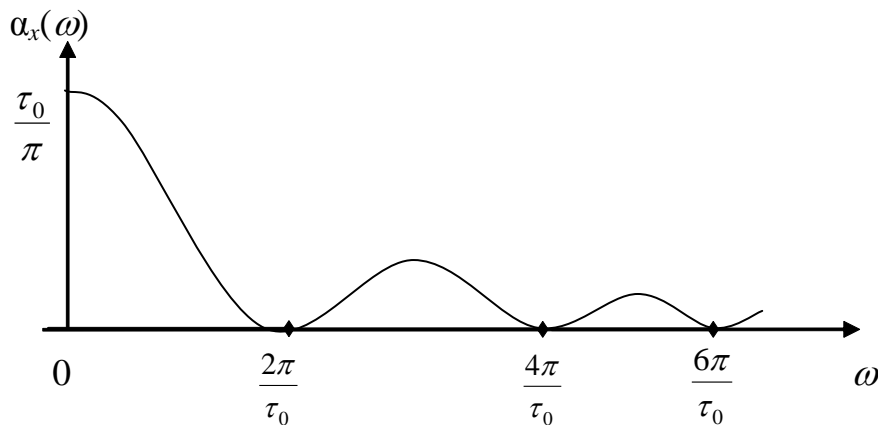


Рис. 2.15. Графік нормованої спектральної щільності ВП $X(t)$

П р и к л а д 2.2. Нормована спектральна щільність $\alpha_x(\omega)$ ВФ $X(t)$ стала на деякому інтервалі частот $\omega_1 \div \omega_2$ і дорівнює нулю поза цим інтервалом. Визначити нормовану кореляційну функцію ВФ $X(t)$.

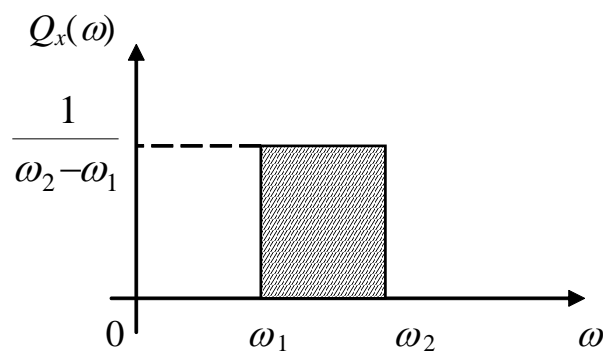


Рис. 2.16. Графічне зображення нормованої спектральної щільності $\alpha_x(\omega)$ ВФ $X(t)$

Розв'язування

Оскільки площа, обмежена кривою $\alpha_x(\omega)$ дорівнює 1, то $\alpha_x(\omega) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}$, коли $\omega_1 < \omega < \omega_2$ (див. рис. 2.16).

Тоді, використовуючи формулу (2.19), обчислимо, що

$$\begin{aligned} \rho_x(\tau) &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \alpha_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \alpha_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \\ &= \frac{1}{\tau(\omega_2 - \omega_1)} (\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau) = \frac{2}{\tau(\omega_2 - \omega_1)} \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \tau\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau\right). \end{aligned}$$

Графічно функція $\rho_x(\tau)$ зображена на рис. 2.17.

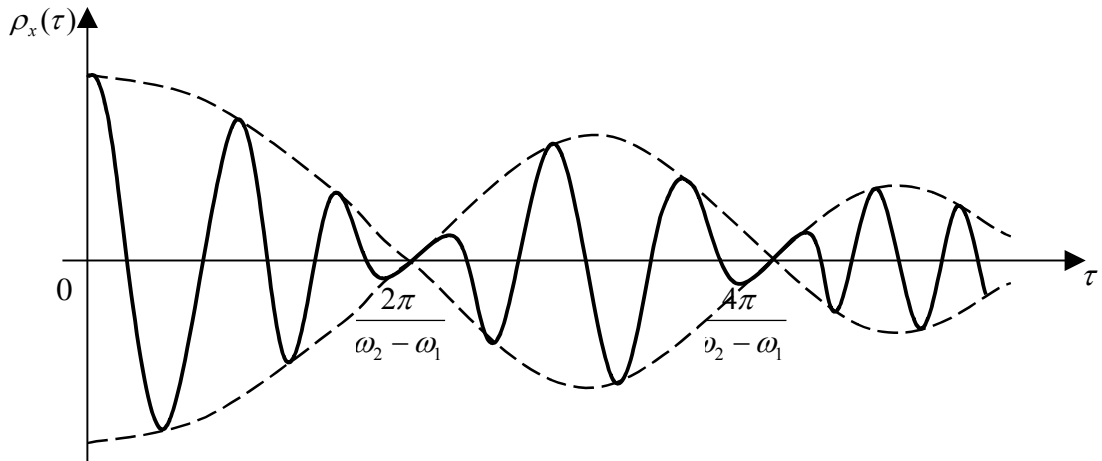


Рис. 2.17. Графік нормованої кореляційної функції ВП $X(t)$

У граничному випадку, коли $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ (тобто $\omega_1 = \omega_2$), спектр стає дискретним з однією-єдиною лінією на частоті ω . При цьому кореляційна функція $\rho_x(\tau) = \cos \omega \tau$, а ВФ $X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t$, тобто це є гармонічне коливання із частотою ω , але з випадковою амплітудою і фазою.

На практиці трапляються ситуації, коли ВФ має у своєму складі чисто періодичну складову частоти ω_k із випадковою амплітудою. Тоді в спектральному розкладанні, крім неперервного спектра $S_x(\omega)$ буде присутня окрема частота ω_k із скінченною дисперсією. Якщо таких складових декілька, то спектр включає дві частини: дискретну й неперервну, тобто

$$k_x(\tau) = \sum_k D_k \cos \omega_k \tau + \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Коли скінченна дисперсія в спектральному розкладанні припадає на нульову частоту: $\omega = 0$, це означає, що до складу ВФ як доданок входить звичайна ВВ із дисперсією D_0 .

§ 2.6. Моделі функції спектральної щільності. Білий шум

Із властивостей спектральної щільності випливає, що площа, обмежена її кривою, дорівнює дисперсії СВП $X(t)$, тобто враховуючи, що $R_x(\tau) = k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega$, маємо:

$$D_x = R_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega.$$

Це означає, що для реальних СВП із обмеженою дисперсією площа, обмежена кривою $S_x(\omega)$, має бути також скінченною величиною. Отже, спектральна щільність $S_x(\omega)$ прямує до 0 ($S_x(\omega) \rightarrow 0$), якщо $\omega \rightarrow \infty$. Тому за математичні моделі спектральної щільності часто беруть функції частоти, які мають цю властивість. Наприклад, широко застосовуються моделі у вигляді раціональних функцій частоти (відношення поліномів), а саме:

$$S_x(\omega) = \frac{a_m \omega^m + a_{m-1} \omega^{m-1} + \dots + a_1 \omega + a_0}{b_n \omega^n + b_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + b_1 \omega + b_0},$$

причому $n > m$, а значить $S_x(\omega) \rightarrow 0$, якщо $\omega \rightarrow \infty$.

Існують також моделі, що не є раціональними функціями, наприклад, така модель:

$$S_x(\omega) = \frac{\sin(d\omega)}{d\omega}.$$

Специфічним варіантом моделі випадкового процесу є так званий «білий шум».

Білим шумом називається випадковий процес, спектральна щільність якого є сталою для всіх частот ω , тобто $S(\omega) = S_0 = \text{const}$.

Хоча такий процес фізично не може існувати (оскільки його дисперсія дорівнює нескінченності), він є зручною математичною моделлю, яку використовують у задачах аналізу й синтезу систем. Нерідко за допомогою білого шуму імітують дію перешкод широкого спектра частот.

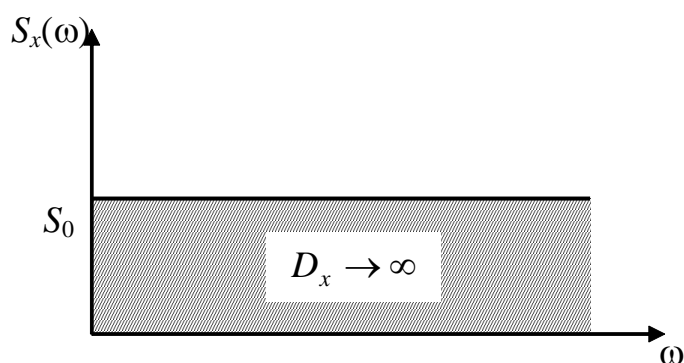


Рис. 2.18. Графічне зображення спектральної щільності випадкового процесу типу «білий шум»

Кореляційна функція білого шуму являє собою дельта-функцію, помножену на S_0 , тобто $R_x(\tau) = S_0\delta(\tau)$. Дельта-функція – це імпульс нескінченно малої тривалості, площа якого дорівнює одиниці (див. рис. 2.19).

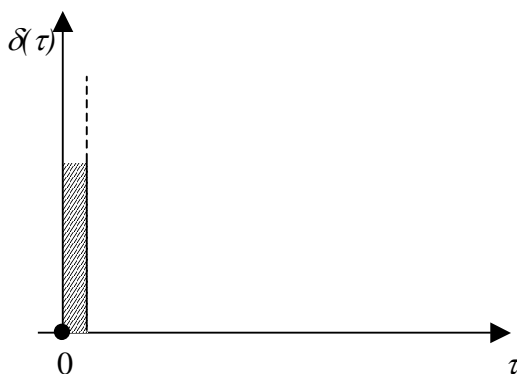


Рис. 2.19. Графік дельта-функції

Дійсно функція: $S_x(\omega) = \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \int_0^{\infty} S_0 \delta(\tau) \cos \omega \tau d\tau = S_0$, являє собою спектральну щільність білого шуму, інтенсивність якого визначається величиною S_0 .

На практиці також часто використовується поняття білого шуму, спектр якого обмежений у деякій смузі. При цьому мають на увазі СВП, спектральна щільність якого стала в межах обмеженої смуги частот, і дорівнює нулю поза нею (див. рис. 2.20).

Аналітичний запис такої функції має такий вигляд:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega < \omega_1, \\ S_0, & \text{якщо } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \text{якщо } \omega > \omega_2. \end{cases}$$

Дисперсія цього СВП $D_x = S_0(\omega_2 - \omega_1)$.

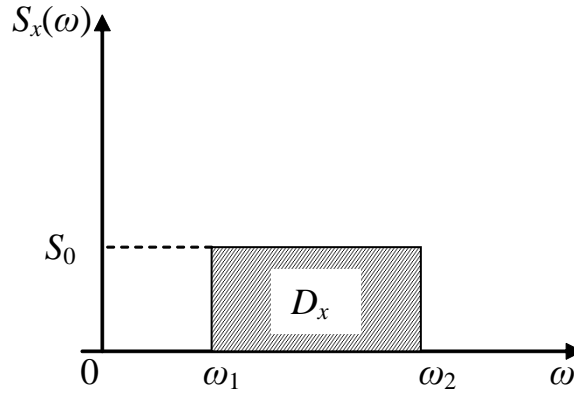


Рис. 2.20. Графічне зображення спектральної щільності білого шуму з обмеженим у смузї спектром

Розглянемо тепер випадок, коли $\omega_1 = 0$. Тоді спектральна щільність записується таким чином:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} S_0, & \text{якщо } \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \text{якщо } \omega > \omega_2. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 2.21.

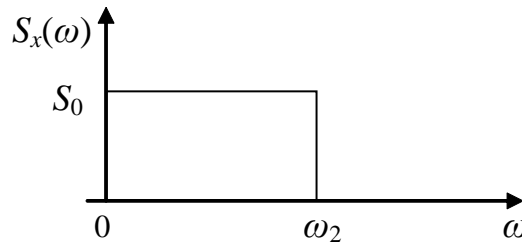


Рис. 2.21. Графічне зображення спектральної щільності білого шуму з обмеженим у смузї спектром, коли $\omega_1 = 0$

Дисперсія такого процесу $D_x = S_0 \omega_2$, а кореляційна функція

$$R_x(\tau) = \int_0^{\omega_2} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = S_0 \int_0^{\omega_2} \cos \omega \tau d\omega = \frac{S_0}{\tau} \sin \omega \tau \Big|_0^{\omega_2} = \frac{S_0}{\tau} \sin \omega_2 \tau.$$

Її графік зображено на рис. 2.22.

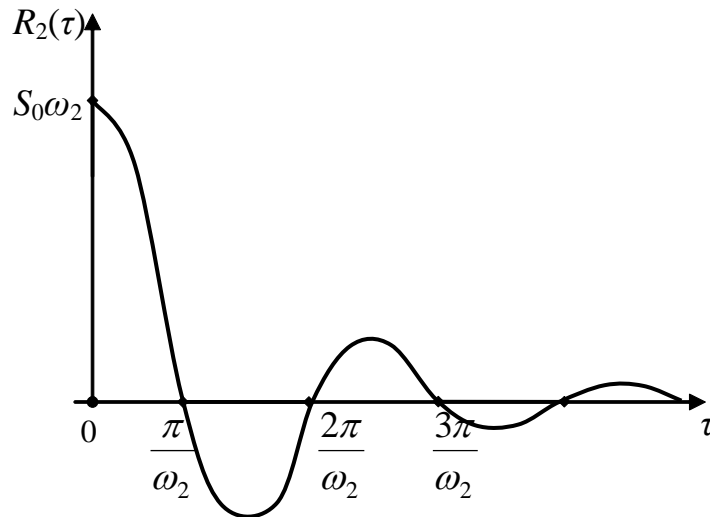


Рис. 2.22. Графік кореляційної функції білого шуму з обмеженим у смузі спектром, коли $\omega_1 = 0$

§ 2.7. Спектральне розкладання ВФ у комплексній формі

У деяких випадках при виконанні математичних перетворень зручніше користуватися комплексною формою запису спектрального розкладання. Перетворення виконуються простіше, оскільки гармонічні функції розкладання записуються в комплексному поданні не у вигляді синусів і косинусів, а як експоненти. Перейдемо від дійсної форми спектрального розкладання до комплексної. Розглянемо спектральне розкладання ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$ на інтервалі $(0 \div T)$:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (2.23)$$

де U_k, V_k – некорельовані ВВ, причому $D[U_k] = D[V_k] = D_k$.

Оскільки $\omega_0 = 0$, то вираз (2.23) можна записати в такому вигляді:

$$\overset{\circ}{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t). \quad (2.24)$$

Підставимо у вираз (2.24) відомі формули Ейлера:

$$\cos \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2},$$

$$\sin \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2} = -i \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2},$$

тоді

$$\overset{\circ}{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_k \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2} - iV_k \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2} \right). \quad (2.24)$$

Формула (2.24) є розкладанням ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$ за координатними функціями $e^{i\omega_k t}$, $e^{-i\omega_k t}$.

Припустимо, що параметр k набуває не тільки додатних, але й від'ємних значень: $\omega_k = k\omega_1$ ($k = \pm 1; \pm 2; \pm 3 \dots$).

Тоді формула (2.24) запишеться таким чином:

$$\overset{\circ}{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k - iV_k}{2} e^{i\omega_k t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{U_k + iV_k}{2} e^{-i\omega_k t}, \quad (2.25)$$

тут передбачається, що $U_{-k} = U_k$ і $V_{-k} = V_k$.

Розкладання (2.25) можна записати в більш компактній формі:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.26)$$

при цьому $W_k = U_0$, якщо $k = 0$;

$$W_k = \frac{U_k - iV_k}{2}, \text{ якщо } k > 0;$$

$$W_k = \frac{U_k + iV_k}{2}, \text{ якщо } k < 0.$$

Вираз (2.26) є канонічним розкладанням ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$ із комплексними координатними функціями $e^{i\omega_k t}$ й комплексними коефіцієнтами W_k , дисперсії яких

$$D[W_k] = D\left[\frac{U_k \pm iV_k}{2}\right] = \frac{D[U_k]}{4} + \frac{D[V_k]}{4} = \frac{2D_k}{4} = \frac{D_k}{2}.$$

Позначимо, що $D_k^* = \frac{D_k}{2}$, коли $k \neq 0$ й $D_0^* = D_0$. Побудуємо дискретний

спектр ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$, який поширюється на частоти в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ (рис. 2.23).

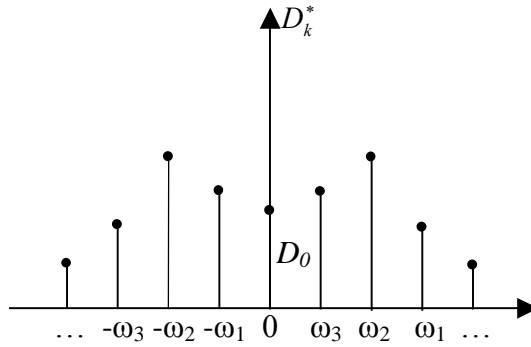


Рис. 2.23. Графічне зображення дискретного спектра ВФ

Цей спектр D_k^* буде симетричний щодо осі ординат, його ординати вдвічі менші спектра D_k , якщо $k \neq 0$, і виконується така умова:

$$D_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k.$$

Отже, у комплексному записі кореляційна функція набуває такого вигляду:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^* e^{i\omega_k \tau}, \quad (2.27)$$

при цьому

$$D_k^* = \frac{1}{2} D_k = \frac{1}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau, \quad (2.28)$$

якщо $k \neq 0$.

Надамо виразу (2.28) комплексної форми, підставивши у нього таке значення:

$$\cos \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2}.$$

Тоді отримуємо, що

$$\begin{aligned} D_k^* &= \frac{1}{2T} \int_0^T k_x(\tau) (e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau}) d\tau = \frac{1}{2T} \int_0^T k_x(\tau) e^{i\omega_k \tau} d\tau + \frac{1}{2T} \int_0^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau + \frac{1}{2T} \int_{-T}^0 k_x(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau, \end{aligned}$$

тобто

$$D_k^* = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k t} d\tau. \quad (2.29)$$

Тепер у виразах (2.27), (2.29) визначимо границі, коли $T \rightarrow \infty$, тобто розглянемо спектральну щільність:

$$S_x^*(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_k^*}{\Delta\omega}. \quad (2.30)$$

У цьому випадку формули (2.27) і (2.29) набувають вигляду інтегральних співвідношень, які поєднують кореляційну функцію й спектральну щільність, а саме:

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (2.31)$$

$$S_x^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2.32)$$

Вирази (2.31) і (2.32) являють собою комплексну форму перетворень Фур'є.

Якщо у формулі (2.31) прийняти, що $\tau = 0$, то одержимо вираз для обчислення дисперсії ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$:

$$D_x^* = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) d\omega. \quad (2.33)$$

Ця формула подає дисперсію ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$ у вигляді суми елементарних доданків, розподілених з певною щільністю S_x^* у діапазоні частот $(-\infty; +\infty)$. Порівнюючи вираз (2.32) і формулу для дійсної форми розкладання:

$$S_k(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau,$$

бачимо, що спектральні щільності $S_x(\omega)$ і $S_x^*(\omega)$ відрізняються (див. рис. 2.24), а саме: $S_x^*(\omega)$ визначена в діапазоні частот $(-\infty; +\infty)$, а $S_x(\omega)$ – у діапазоні $(0; +\infty)$; також $S_x(\omega)$ має вдвічі більші ординати, ніж $S_x^*(\omega)$; крім того, $S_x^*(\omega)$ – симетрична відносно осі ординат.

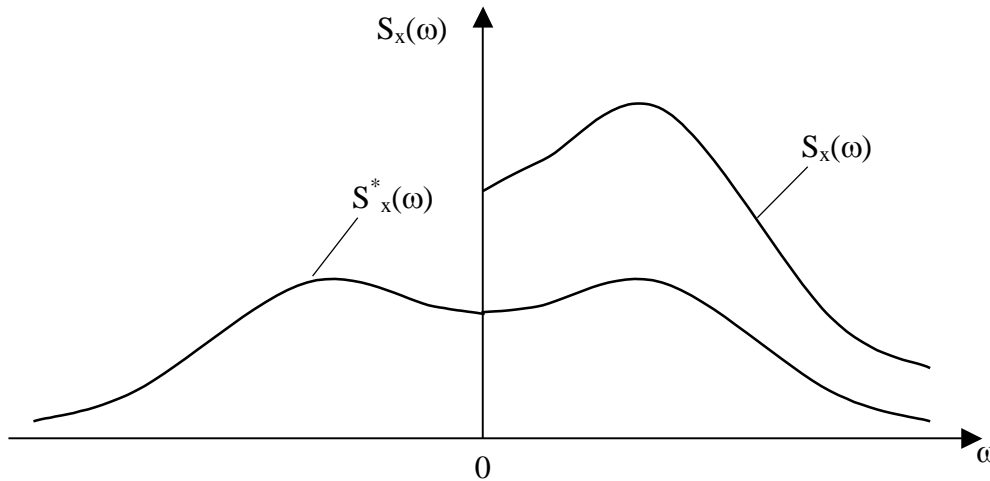


Рис. 2.24. Графічне зображення спектральних щільностей $S_x(\omega)$ і $S_x^*(\omega)$ ВФ $\overset{\circ}{X}(t)$

§ 2.8. Перетворення СВП стаціонарною лінійною системою

Лінійна система називається *стаціонарною*, якщо її параметри є сталими в часі. Функціонування стаціонарної лінійної системи описується, зазвичай, лінійними диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо задачу про перетворення СВП стаціонарною лінійною системою.

Нехай на вхід лінійної системи L прибуває СВП $X(t)$; реакція системи $Y(t)$ також являє собою СВП (рис. 2.25). Характеристики СВП $X(t)$ відомі, зокрема його математичне сподівання m_x і кореляційна функція $k_x(\tau)$. Потрібно визначити ті самі характеристики СВП $Y(t)$: m_y й $k_y(\tau)$.

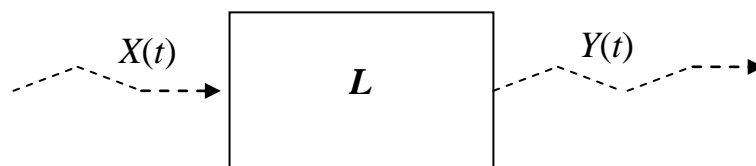


Рис. 2.25. Схема перетворення СВП лінійною системою

Щоб розв'язати цю задачу, скористаємося підходом, який базується на канонічному розкладанні ВФ. Він полягає в тому, що при лінійних перетвореннях ВФ, заданих канонічним розкладанням, їхні математичні сподівання й координатні функції перетворюються за допомогою того самого лінійного оператора. Оскільки доводиться перетворювати не випадкові функції (математичне сподівання й координатні функції), то розглянемо спочатку перетворення не випадкових функцій лінійною системою.

Рівняння лінійної стаціонарної системи має такий вигляд:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) X(t), \quad (2.34)$$

тут p – означає оператор диференціювання, тобто $p = \frac{d}{dt}$.

У скороченому вигляді його можна записати таким чином:

$$A_n(p)Y(t) = B_m(p)X(t) \quad (2.35)$$

або

$$Y(t) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} X(t). \quad (2.36)$$

Реакцію системи $Y(t)$ на вплив $X(t)$ визначають, розв'язавши рівняння (2.34) відносно $Y(t)$. Розв'язок цього рівняння являє собою суму двох складових: $Y_1(t)$ і $Y_2(t)$. Причому $Y_2(t)$ є рішенням рівняння (2.34) без правої частини – це так званий *вільний рух системи*, складова $Y_1(t)$ – це *примусовий рух системи*, тобто її рух під дією вхідного впливу $X(t)$. У стійких системах складова $Y_2(t)$ прямує до 0, якщо $t \rightarrow \infty$, тобто в сталому режимі $Y_2(t) = 0$. Тому для стійкої системи будемо вважати, що $Y(t) = Y_1(t)$.

Координатні функції спектрального розкладання ВФ $X(t)$ являють собою гармонічні коливання. Отже проаналізуємо реакцію лінійної стаціонарної системи на елементарний гармонічний вплив.

Нехай на вхід системи прибуває гармонійне коливання з одиничною амплітудою та частотою ω , що відповідає такому виразу:

$$X(t) = 1 \cdot \sin \omega t$$

або в комплексній формі

$$X(t) = e^{i\omega t}. \quad (2.37)$$

У цьому випадку реакція лінійної системи також буде гармонічною функцією із частотою ω , але з деякою амплітудою, яка залежить від частоти, тобто

$$Y(t) = \varphi(i\omega) e^{i\omega t}. \quad (2.38)$$

Підставимо вирази (2.37) і (2.38) у рівняння (2.34). Тоді це рівняння ми можемо записати таким чином:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} [\varphi(i\omega) e^{i\omega t}] + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [\varphi(i\omega) e^{i\omega t}] + \dots + a_0 [\varphi(i\omega) e^{i\omega t}] = \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} e^{i\omega t} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e^{i\omega t} + \dots + b_0 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Враховуючи, що для будь-якого значення k виконуються такі рівності:

$$\frac{d^k}{dt^k}[\varphi(i\omega)e^{i\omega t}] = (i\omega)^k \varphi(i\omega)e^{i\omega t},$$

$$\frac{d^k}{dt^k}[e^{i\omega t}] = (i\omega)^k e^{i\omega t},$$

записуємо остаточний варіант рівняння:

$$\varphi(i\omega)[a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + a_1(i\omega) + a_0] = b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + b_1(i\omega) + b_0.$$

Або в компактній формі

$$\varphi(i\omega)A_n(i\omega) = B_m(i\omega). \quad (2.40)$$

Із цієї формули отримуємо, що

$$\varphi(i\omega) = \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}. \quad (2.41)$$

Функцію $\varphi(i\omega)$ називають *частотною характеристикою* лінійної системи. Для її визначення необхідно в поліноми $A_n(p)$ і $B_m(p)$ замість оператора p підставити величину $(i\omega)$, де i – уявна одиниця.

Таким чином, якщо на вхід лінійної стаціонарної системи прибуває гармонічне коливання: $X(t) = \sin \omega t$, то реакція системи записується у вигляді такого самого гармонічного коливання, помноженого на частотну характеристику системи.

Якщо ж на вході система зазнає гармонічного впливу з випадковою амплітудою, тобто $X(t) = Ue^{i\omega t}$, де U – випадкова величина, то реакція системи

$$Y(t) = U\varphi(i\omega)e^{i\omega t}.$$

Тепер застосуємо цей самий підхід до перетворення математичного сподівання СВП $X(t)$ і координатних функцій його розкладання.

Математичне сподівання запишемо у вигляді гармонічного коливання з нульовою частотою: $\omega = 0$, при цьому $\varphi(0) = \frac{B_m(0)}{A_n(0)} = \frac{b_0}{a_0}$, а математичне

сподівання ВФ $Y(t)$ (реакції системи) $m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x$.

Тепер перейдемо до перетворення випадкової частини функції $X(t)$, а саме: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$. Для цього запишемо функцію $\overset{\circ}{X}(t)$ на інтервалі $(0; T)$ у вигляді спектрального розкладання:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.42)$$

де U_k – некорельовані ВВ, дисперсії яких утворюють спектр $\overset{\circ}{X}(t)$.

Відповідно до принципу суперпозиції (накладання), реакція лінійної системи на суму впливів дорівнює сумі реакцій на окремі впливи, тобто

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \varphi(i\omega) e^{i\omega_k t}, \quad (2.43)$$

Формула (2.43) являє собою канонічне розкладання ВФ $\overset{\circ}{Y}(t)$ за системою гармонічних функцій. Визначимо спектр розкладання (2.43). Для цього знайдемо дисперсію k -ї випадкової величини таким чином:

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}, \quad W_k = U_k \varphi(i\omega),$$

$$D[W_k] = M[|U_k \varphi(i\omega_k)|^2] = M[|U_k|^2 |\varphi(i\omega)|^2] = |\varphi(i\omega)|^2 M[|U_k|^2] = |\varphi(i\omega)|^2 D_k,$$

тобто

$$D[W_k] = |\varphi(i\omega)|^2 D_k. \quad (2.44)$$

Висновок: при перетворенні стаціонарної випадкової функції лінійною стаціонарною системою кожен з ординат її спектра множать на квадрат модуля частотної характеристики системи.

Теоретично при проходженні ВФ $X(t)$ через систему її спектр певним чином [це залежить від частотної характеристики $\varphi(i\omega)$] перебудовується: сигнали на деяких частотах підсилюються, а на деяких послаблюються.

Розглянемо, як при даному перетворенні зміниться спектральна щільність ВФ. Для цього у виразі (2.44) перейдемо до границі коли, $T \rightarrow \infty$ і одержимо аналогічне перетворення функції спектральної щільності:

$$S_y(\omega) = |\varphi(i\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (2.45)$$

Отже, при перетворенні СВП $X(t)$ стаціонарною лінійною системою його спектральну щільність множать на квадрат модуля частотної характеристики системи.

Користуючись виразом (2.45) та останнім правилом, можна легко розв'язати поставлену задачу: за характеристиками $X(t)$ на вході системи знайти характеристики $Y(t)$ на її виході.

Нехай функція $X(t)$ являє собою СВП математичне сподівання m_x й кореляційна функція $k_x(\tau)$ якого відомі.

Потрібно знайти математичне сподівання m_y та кореляційну функцію $k_y(\tau)$ реакції системи $Y(t)$.

Цю задачу розв'язують у такому порядку:

1. Знаходимо математичне сподівання СВП на виході системи:

$$m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x.$$

2. За кореляційною функцією $k_x(\tau)$ визначаємо спектральну щільність на вході:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

3. Використовуючи диференціальне рівняння системи, знаходимо її частотну характеристику: $\varphi(i\omega) = \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}$, а потім квадрат її модуля:

$$|\varphi(i\omega)|^2 = \left| \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)} \right|^2.$$

4. Застосовуючи наведене вище правило, обчислюємо спектральну щільність на виході системи:

$$S_y(\omega) = |\varphi(i\omega)|^2 S_x(\omega).$$

5. За спектральною щільністю реакції системи знаходимо кореляційну функцію:

$$k_y(\tau) = \int_0^{\infty} S_y(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Зауважимо, що в багатьох задачах не потрібно визначати кореляційну функцію $k_y(\tau)$ повністю, а достатньо лише обчислити дисперсію D_y :

$$D_y = k_y(0) = \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega.$$

Розглянемо, нарешті, випадок коли в складі ВФ на вході є звичайна ВВ U_0 , тобто

$$X_1(t) = U_0 + X(t),$$

де U_0 – ВВ з дисперсією D_0 .

Реакція системи буде являти собою суму такого вигляду: $Y_1(t) = V_0 + Y(t)$, де $Y(t)$ – реакція системи на ВП $X(t)$ – також являє собою ВФ, V_0 – ВВ, яку можна вважати гармонічним коливанням із нульовою

частотою, тобто $V_0 = \frac{B_0}{A_0} U_0$, а її дисперсія $D_0^* = \left(\frac{B_0}{A_0} \right)^2 D_0$.

Приклад 2.3. Робота лінійної динамічної системи описується таким диференціальним рівнянням:

$$a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{x} + b_0 x$$

На вхід системи прибуває СВП $X(t)$, математичне сподівання якого m_x , а кореляційна функція $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$, де α – додатний коефіцієнт. Знайти математичне сподівання m_y і дисперсію D_y СВП на виході системи.

Розв'язування

Застосуємо описаний вище алгоритм розв'язування цієї задачі.

1. Знайдемо математичне сподівання функції виходу $Y(t)$:

$$m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x.$$

2. Використовуючи кореляційну функцію $k_x(\tau)$, обчислимо спектральну щільність СВП на вході системи таким чином:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega \tau \, d\tau = \frac{2D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

3. Знайдемо частотну характеристику системи.

Враховуючи, що робота системи описується рівнянням: $(a_1 p + a_0)y(t) = (b_1 p + b_0)x(t)$, отримуємо, що

$$y(t) = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + a_0} x(t), \quad p \rightarrow j\omega,$$

$$\varphi(j\omega) = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_0}.$$

Знайдемо квадрат модуля частотної характеристики системи, тобто

$$|\varphi(j\omega)| = \frac{|b_1 j\omega + b_0|^2}{|a_1 j\omega + a_0|^2} = \frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2}.$$

4. Обчислимо спектральну щільність на виході системи, а саме:

$$S_y(\omega) = |\varphi(j\omega)| S_x(\omega) = \frac{2D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \cdot \frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2}.$$

5. Визначаємо дисперсію вихідного сигналу за такою формулою:

$$D_y = \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega.$$

$$D_y = \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{2D_x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega.$$

Інтеграл обчислимо методом розкладання підінтегральної функції на прості дроби, а саме:

$$\frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{A}{a_0^2 + a_1^2 \omega^2} + \frac{B}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Визначаємо, що

$$A = \alpha \frac{a_1^2 b_0^2 - a_0^2 b_1^2}{a_1^2 \alpha^2 - a_0^2}; \quad B = \alpha \frac{b_1^2 \alpha^2 - b_0^2}{a_1^2 \alpha^2 - a_0^2}.$$

Отже, дисперсія вихідного сигналу

$$D_y = D_x \frac{a_1 b_0^2 + a_0 b_1^2 \alpha}{a_0 a_1 (a_1 \alpha + a_0)}.$$

§ 2.9. *Поняття про задачі аналізу й синтезу динамічних систем*

При дослідженні динамічних систем методами теорії ВФ виникають два види задач: пряма й обернена. Вони називаються задачами аналізу й синтезу відповідно. Розглянемо їх.

П р я м а з а д а ч а (задача аналізу)

Існує лінійна динамічна система, яка описується диференціальним рівнянням такого вигляду:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) X(t). \quad (2.45)$$

Необхідно дослідити точність роботи системи при наявності на її вході СВП – перешкоди $X(t)$.

Для цього спочатку визначають характеристики перешкоди $X(t)$: математичне сподівання, кореляційну функцію, спектральну щільність. Потім визначають характеристики реакції $Y(t)$ як СВП. Отже, задача аналізу полягає в оцінюванні точності роботи системи в умовах різного роду перешкод.

Обернена задача (задача синтезу)

Ця задача полягає у виборі параметрів системи, тобто коефіцієнтів рівняння (2.45), таким чином, щоб для заданого спектра перешкоди $X(t)$ помилки на виході були б мінімальними.

Очевидно, що дисперсія вихідного сигналу $Y(t)$ при заданому спектрі $X(t)$ залежить від коефіцієнтів рівняння (2.45) (параметрів системи). Тоді задача синтезу записується таким чином:

$$D_y(a_0, a_1 \dots a_n, b_0, b_1 \dots b_m) \rightarrow \min_{a_i, b_j}. \quad (2.46)$$

Оскільки значення коефіцієнтів рівняння (2.45) $a_i, b_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, залежать від конструктивних фізичних величин, що обумовлюють процес, під час проектування їх можна варіювати в певних межах для того, щоб задовольнити умову (2.46).

Зауважимо, що розглянуті в § 2.8 формули для визначення кореляційної функції $k_x(\tau)$ і дисперсії D_y справедливі стосовно сталого режиму роботи, коли перехідні процеси закінчилися й вільна складова дорівнює нулю. Якщо ж перехідні процеси не закінчилися, то в системі, крім статичної помилки, зумовленої дисперсією D_y , мають місце й динамічні помилки. У цьому випадку оптимізацію проводять не за дисперсією D_y , а за складеним критерієм, який має такий вигляд: $J = D_y + m_y^2$. Тобто розв'язують задачу оптимізації:

$$J = D_y + m_y^2 \rightarrow \min_{a_i b_j}. \quad (2.47)$$

Параметри системи $a_i, b_j, (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$, за яких критерій J набуває мінімального значення, називаються *оптимальними*.

Більш загальною задачею синтезу є задача не параметричної, а структурної оптимізації, коли вибираються не тільки параметри, але й структура оператора системи L таким чином, щоб забезпечити мінімальний рівень перешкод на виході.

Насамкінець зауважимо, що критерій (2.47) не єдиний, що використовується у задачі синтезу. Наприклад, часто застосовується критерій, який дорівнює відношенню потужності корисного інформативного сигналу до потужності перешкод (шумів).

П р и к л а д 2.4. На вхід системи прибуває сума корисного сигналу $a(t)$ у вигляді прямокутного імпульсу й білого шуму $X(t)$ із спектральною щільністю S_0 (див. рис. 2.26). Математична модель системи має відому структуру:

$$b\dot{z}(t) + z(t) = y(t); \quad (2.48)$$

$$(bp + 1)z(t) = y(t). \quad (2.49)$$

Необхідно вибрати таке значення параметра системи b , щоб відношення «сигнал/шум» за потужністю на виході системи, тобто в сигналі $Z(t)$, було б максимальним.

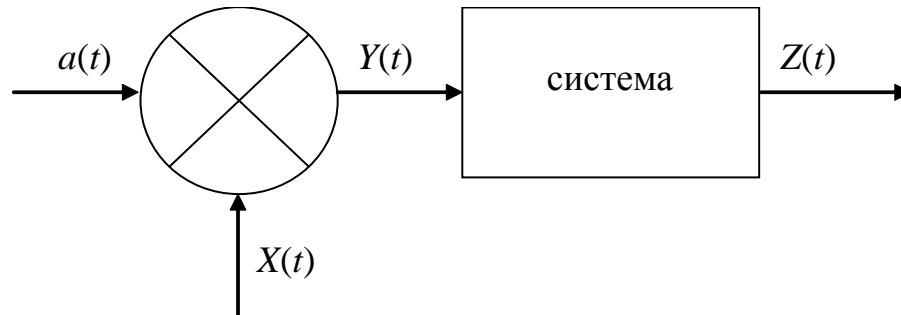


Рис. 2.26. Схема динамічної системи

Розв'язування

Сформульована задача відноситься до типу обернених задач. Вона полягає у виборі оптимального значення параметра системи, структуру якої відомо.

Сигнал на вході в систему дорівнює сумі корисного сигналу $a(t)$ і шуму $X(t)$, тобто $Y(t) = a(t) + X(t)$. Оскільки система лінійна, то вихідний сигнал $Z(t)$ також буде являти собою суму двох складових: реакції системи на корисний сигнал $a^1(t)$ і реакції на шум $X^1(t)$, тобто $Z(t) = a^1(t) + X^1(t)$. Енергетична потужність сигналу пропорціональна квадрату його рівня або дисперсії центрованого сигналу. Тому критерій оптимізації має такий вигляд:

$$J = \frac{[a^1(t_0)]^2}{D_{x^1}} \rightarrow \max_b, \quad (2.50)$$

де t_0 – момент часу, який відповідає максимальному значенню корисного сигналу $a^1(t)$. Для його визначення необхідно розв'язати рівняння (2.48), коли на вході системи має місце сигнал $a(t)$, а на виході – $a^1(t)$, тобто

$$b\dot{a}^1 + a^1(t) = a(t) \quad \text{за умови, що } a^1(0) = 0.$$

Коли корисний сигнал $a(t)$ задано у вигляді прямокутного імпульсу, тобто:

$$a(t) = \begin{cases} A, & \text{якщо } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{якщо } t > T, \end{cases}$$

то розв'язок цього рівняння – вихідний сигнал $a^1(t)$ – буде мати такий вигляд:

$$a^1(t) = \begin{cases} A \left(1 - e^{-\frac{t}{b}} \right), & \text{якщо } 0 \leq t < T, \\ A \left(1 - e^{-\frac{t}{b}} \right) e^{-\frac{(t-T)}{b}}, & \text{якщо } t \geq T. \end{cases}$$

Його графічне зображення показано на рис. 2.27.

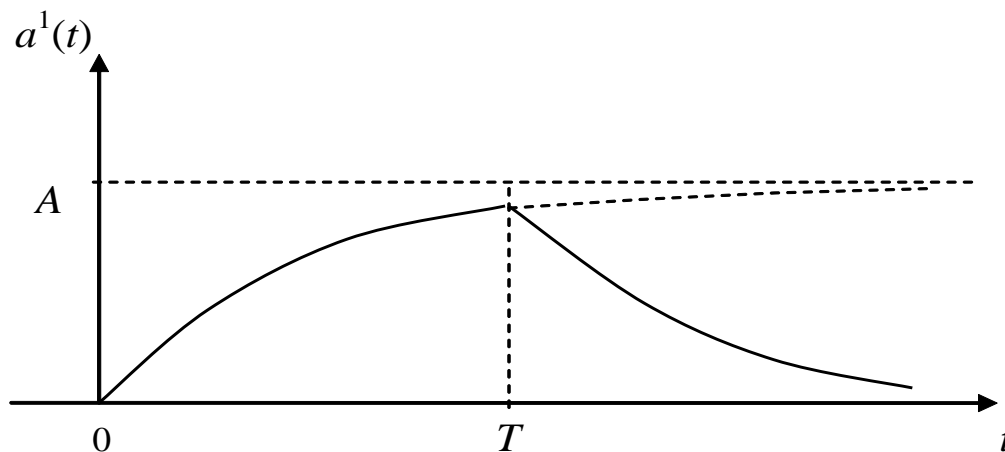


Рис. 2.27. Графік реакції системи на корисний сигнал

Очевидно, що максимального значення сигнал $a^1(t)$ набуває тоді, коли $t = T$ і, отже, $t_0 = T$. Крім того,

$$a^1(t_0) = A \left(1 - e^{-\frac{T}{b}} \right) \quad (2.51)$$

Тепер визначимо дисперсію реакції системи D_{x^1} на білий шум $X(t)$, що діє на її вході.

Вхідний сигнал $X(t)$ являє собою білий шум із сталою спектральною щільністю S_0 , тобто $S_0(\omega) = S_0 = const$. Знайдемо за цих умов спектральну щільність реакції системи $S_{x^1}(\omega)$ на білий шум.

За формулою (2.45) маємо, що $S_{x^1}(\omega) = |\varphi(j\omega)|^2 S(\omega)$, де $|\varphi(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотної характеристики системи. Визначимо цю величину.

З рівняння (2.49) можемо записати:

$$W(p) = \frac{\bar{z}(t)}{\bar{y}(t)} = \frac{1}{bp+1}; \text{ при цьому } p \rightarrow j\omega,$$

$$\begin{aligned}\varphi(j\omega) &= \frac{1}{bj\omega + 1}, \\ |\varphi(j\omega)| &= \frac{1}{|bj\omega + 1|} = \frac{1}{\sqrt{b^2\omega^2 + 1}}, \\ |\varphi(j\omega)|^2 &= \frac{1}{b^2\omega^2 + 1}.\end{aligned}$$

Тоді спектральна щільність реакції на білий шум

$$S_{x^1}(\omega) = \frac{S_0}{b^2\omega^2 + 1}.$$

Обчислимо дисперсію реакції системи на білий шум таким чином:

$$\begin{aligned}D_x &= \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{S_0}{b^2\omega^2 + 1} d\omega = S_0 \int_0^\infty \frac{d\omega}{1 + b^2\omega^2} = \frac{S_0}{b} \int_0^\infty \frac{d(b\omega)}{1 + b^2\omega^2} = \\ &= \frac{S_0}{b} \operatorname{arctg}(b^2\omega^2) \Big|_0^\infty = \frac{S_0\pi}{2b}.\end{aligned}$$

Отже,

$$D_x = \frac{S_0\pi}{2b}. \quad (2.52)$$

На основі отриманих виразів для максимального значення сигналу $a^1(t_0)$ (2.51) і дисперсії шуму D_{x^1} на виході системи (2.52), запишемо критерій (2.50), тобто

$$J = \frac{[a^1(t_0)]^2}{D_{x^1}} = \frac{A^2(1 - e^{-\frac{T}{b}})^2}{\frac{S_0\pi}{2b}} \rightarrow \max_b. \quad (2.53)$$

Критерій J необхідно максимізувати за параметром системи b . Для цього зведемо вираз (2.53) до такого вигляду:

$$J = \frac{2A^2T}{S_0\pi} \frac{(1 - e^{-\frac{T}{b}})^2}{\frac{T}{b}} = C \frac{(1 - e^{-m})^2}{m} \rightarrow \max_m, \quad (2.54)$$

тут $m = \frac{T}{b}$; а $C = \frac{2A^2T}{S_0\pi}$, тобто являє собою сталу, яку обчислюють для конкретного випадку і значення якої не впливає на розв'язок, тому для

спрощення розрахунків, її значення може бути прийнято таким, що дорівнює одиниці. Тоді критерій набуває вигляду:

$$J = \frac{(1 - e^{-m})^2}{m} \rightarrow \max_m.$$

Розв'яжемо цю задачу.

Необхідною умовою оптимальності є рівність нулю похідної функції. Тому обчислимо похідну для критерію J і прирівняємо її до нуля, а саме:

$$\frac{\partial J}{\partial m} = \frac{2(1 - e^{-m})e^{-m}m - (1 - e^{-m})^2}{m^2} = \frac{(1 - e^{-m})(2e^{-m}m - 1 + e^{-m})}{m^2} = 0,$$

$$2e^{-m}m - 1 + e^{-m} = (2m + 1)e^{-m} - 1 = 0.$$

Корінь цього рівняння може бути відшуканий за допомогою одного з числових методів. У даному випадку $m = 1,2565$; $\frac{T}{b} = 1,2565$ і, відповідно,

$$b^* = \frac{T}{1,2565}. \quad (2.55)$$

Отриманий результат варто розуміти так: для того, щоб відношення $\frac{\text{сигнал } Z^1(t)}{\text{шум } X^1(t)}$ за потужністю на виході системи було максимальним, необхідно обчислювати параметр системи b за формулою (2.55) залежно від тривалості корисного сигналу T .

Заключний етап розв'язування – це аналіз отриманого оптимального розв'язку задачі на чутливість до зміни параметра системи. На рис. 2.28 показано залежність функції: $J' = \frac{(1 - e^{-m})^2}{m}$, від значення параметра m .

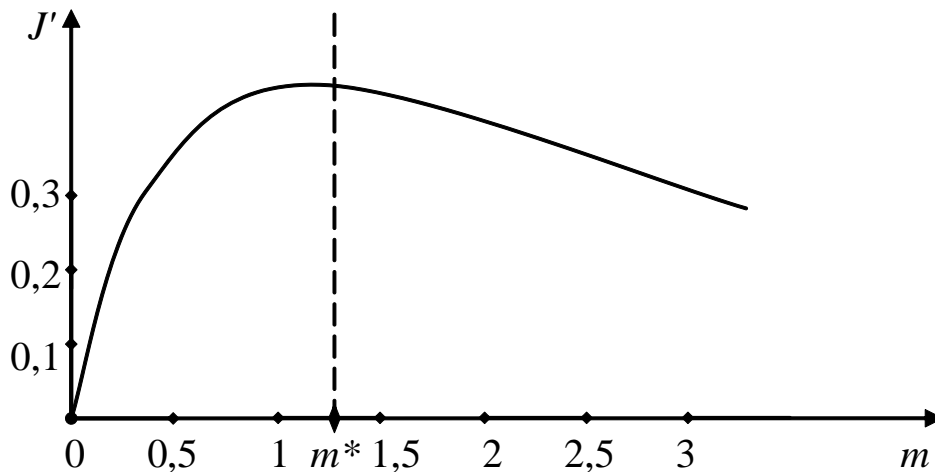


Рис. 2.28. Графік залежності критерію J' від параметра m

З графіка видно, що оптимальне значення критерію J' в околі точки екстремуму: $m^* = 1,2565$, слабо чутливе до зміни параметра m , тобто невеликі варіації параметра системи b навколо оптимального значення не спричинять помітного погіршення якості роботи системи з погляду даного критерію.

Висновки

1. Випадкова функція $X(t)$ називається стаціонарною, якщо всі її ймовірнісні характеристики не залежать від аргументу t (від часу).
2. СВП має ергодичну властивість, якщо кожна його окрема реалізація, досліджена протягом досить тривалого інтервалу часу, може замінити обробку всієї множини реалізацій.
3. Характеристики СВП, який має ергодичну властивість, можуть бути визначені на основі однієї реалізації.
4. Для аналізу частотного складу СВП на практиці використовують його канонічне розкладання за системою гармонічних функцій. Таке розкладання називають спектральним.
5. Спектральне розкладання СВП на скінченному проміжку часу називається спектром дисперсій і являє собою розподіл загальної дисперсії СВП за частотами.
6. Спектральне розкладання СВП на нескінченному проміжку часу описується функцією спектральної щільності, що являє собою розподіл щільності дисперсій за частотами.
7. Спектральне розкладання може бути подане в дійсній або комплексній формі.
8. У процесі дослідження ефективності функціонування динамічних систем за наявності перешкод виникають дві основні задачі – задача аналізу й задача синтезу.

9. Задача аналізу має на меті оцінювання точності роботи системи в умовах різного роду перешкод, тобто дослідження характеристик процесу на виході системи, якщо відомо його характеристики на її вході.

10. Задача синтезу полягає у виборі оператора системи таким чином, щоб при заданому спектрі перешкоди $X(t)$ помилки на виході були б мінімальні.

Питання для самоконтролю

1. Які випадкові функції називають стаціонарними?
2. Дайте визначення стаціонарної функції, використовуючи її характеристики.
3. Які властивості має кореляційна функція стаціонарної випадкової функції?
4. Які властивості має нормована кореляційна функція СВФ?
5. Чи буде стале математичне сподівання достатньою умовою стаціонарності ВФ?
6. Які випадкові функції називають ергодичними?
7. Яким чином визначають характеристики ергодичної СВФ за результатами випробування?
8. Дайте визначення спектра СВФ.
9. Що називають спектральною щільністю СВП? Що вона виражає?
10. Як визначається спектральне розкладання СВП на скінченному інтервалі часу? На нескінченному інтервалі часу?
11. Як можна побудувати спектр дисперсій СВФ за її реалізацією?
12. Яким чином пов'язані між собою спектральна щільність і кореляційна функція СВП?
13. Яким чином пов'язані між собою нормована спектральна щільність і нормована кореляційна функція СВП?
14. Чому дорівнює площа, обмежена кривою спектральної щільності СВП?
15. Чому дорівнює площа, обмежена кривою нормованої спектральної щільності СВП?
16. Як можна записати спектральне розкладання СВФ у комплексній формі?
17. Який ВП називають «білим шумом»?
18. Які моделі «білого шуму» ви знаєте? Які їхні характеристики?
19. Що називають частотною характеристикою динамічної системи?
20. Яким чином визначають реакцію системи на СВП?
21. У чому полягає задача аналізу динамічних систем при наявності на її вході перешкоди?
22. Сформулюйте задачу синтезу динамічних систем, які функціонують в умовах перешкод.

Задачі до розділу 2

Приклади розв'язування задач

1. Випадкова функція $X(t)$ має такі характеристики: $m_x(t) = 0$, $K_x(t, t') = \frac{1}{1 + (t' - t)^2}$. Знайти характеристики ВФ: $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$. Визначити, чи є стаціонарними ВФ $X(t)$ і $Y(t)$.

Розв'язування

Оператор інтегрування є лінійним, тому

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau = 0,$$

$$K_y(t, t') = \int_0^t d\tau \int_0^{t'} K_x(\tau, \tau') d\tau' = \int_0^t \left(\int_0^{t'} \frac{d\tau'}{1 + (\tau' - \tau)^2} \right) d\tau = \int_0^t [\arctg(t' - \tau) - \arctg(-\tau)] d\tau =$$

$$= t \arctg t + t' \arctg t' - (t - t') \arctg(t - t') - \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + t^2)(1 + t'^2)}{1 + (t - t')^2},$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = 2t \arctg t - \ln(1 + t^2).$$

ВФ $X(t)$ стаціонарна, оскільки її математичне сподівання $m_x(t) = const$ й $D_x(t) = 1 = const$, крім того корелційна функція $K_x(t, t') = k_x(\tau) = \frac{1}{1 + \tau^2}$; де $\tau = t' - t$.

ВФ $Y(t)$ нестаціонарна, тому що її дисперсія залежить від аргументу t .

2. Випадкова функція $X(t)$ задана канонічним розкладанням: $X(t) = t + V_1 \cos \omega t + V_2 \sin \omega t$, де V_1 й V_2 центровані некорельовані випадкові величини, дисперсії яких $D_{v_1} = D_{v_2} = 2$. Визначити, чи є стаціонарною ВФ $X(t)$.

Розв'язування

Спочатку знайдемо характеристики випадкової функції $X(t)$, таким чином:

$$m_x(t) = M[t + V_1 \cos \omega t + V_2 \sin \omega t] = t;$$

$$K_x(t) = D_{v_1} \cos \omega t \cdot \cos \omega t' + D_{v_2} \sin \omega t \cdot \sin \omega t' = 2(\cos \omega t \cdot \cos \omega t' + \sin \omega t \cdot \sin \omega t') =$$

$$= 2 \cos \omega(t' - t);$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) = 2 \cos(\omega \cdot 0) = 2.$$

ВФ $X(t)$ не є стаціонарною, оскільки її математичне сподівання залежить від часу. Кореляційна ж функція та дисперсія задовольняють умови

стаціонарності. Тому, наприклад, центрована функція: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$, буде стаціонарною ВФ.

3. Випадкова функція $X(t)$ задана таким виразом: $X(t) = V \cos \omega t$, де V – випадкова величина, характеристики якої: $m_V = 2$; $\sigma_V = 3$. Випадкова величина $Y(t) = X(t) + \alpha \frac{dX(t)}{dt}$. Знайти характеристики ВФ $X(t)$ і $Y(t)$ та визначити, чи є вони стаціонарними?

Розв'язування

$$m_x(t) = M[V \cos \omega t] = m_V \cos \omega t = 2 \cos \omega t,$$

$$K_x(t, t') = D_V \cos \omega t \cdot \cos \omega t' = 9 \cos \omega t \cdot \cos \omega t',$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) = 9 \cos^2 \omega t.$$

Знайдемо характеристики ВФ $Y(t)$, попередньо подавши її подібно до $X(t)$ у вигляді елементарної функції:

$$Y(t) = V \cos \omega t + \alpha \frac{dV \cos \omega t}{dt} = V(\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t),$$

$$m_y(t) = m_V (\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t) = 2(\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t),$$

$$K_y(t, t') = D_V (\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t)(\cos \omega t' - \alpha \omega \sin \omega t'),$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = D_V (\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t)^2.$$

4. Дано спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу $X(t)$:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega < \omega_0, \\ c^2, & \text{якщо } \omega_0 \leq \omega \leq 2\omega_0, \\ 0, & \text{якщо } \omega > 2\omega_0. \end{cases}$$

Визначити кореляційну функцію СВП $X(t)$.

Розв'язування

Щоб розв'язати цю задачу, використаємо перетворення Фур'є, а саме:

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega = \int_{\omega_0}^{2\omega_0} c^2 \cdot \cos \omega \tau \, d\omega = \frac{c^2}{\tau} \sin \omega \tau \Big|_{\omega_0}^{2\omega_0} = \\ &= \frac{c^2}{\tau} (\sin 2\omega_0 \tau - \sin \omega_0 \tau) = \frac{c^2}{\tau} \sin \omega_0 \tau (2 \cos \omega_0 \tau - 1). \end{aligned}$$

5. Визначити спектральну щільність випадкового процесу $X(t)$, якщо його кореляційна функція $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha\tau}$.

Розв'язування

Застосуємо перетворення Фур'є:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D_x e^{-\alpha\tau} \cos \omega \tau d\tau =$$

$$= \frac{2D_x}{\pi} \cdot \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2 + \omega^2} (-\alpha \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau) \Big|_0^{\infty} = \frac{2\alpha D_x}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}.$$

6. На рис. 2.29 зображено графік нормованої спектральної щільності $S(\omega)$. Знайти частоту ω_0 (див. рис. 2.29).

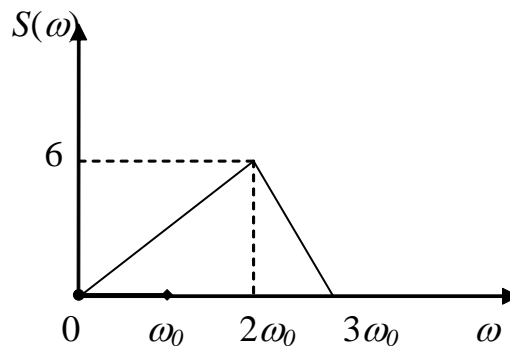


Рис. 2.29. Графік нормованої спектральної щільності до задачі 6

Розв'язування

Враховуючи, що площа, окреслена лінією нормованої спектральної щільності, дорівнює одиниці, частоту ω_0 можна знайти з такої умови:

$$\int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = 1.$$

Користуючись графіком, обчислимо цю площу й складемо рівняння, а саме:

$$S = \frac{1}{2} 6 \cdot 2\omega_0 + \frac{1}{2} 6 \cdot \omega_0 = 6\omega_0 + 3\omega_0 = 9\omega_0 = 1,$$

звідси $\omega_0 = \frac{1}{9}$.

7. На рис. 2.30 зображено графік спектральної щільності випадкового процесу $X(t)$. Необхідно знайти дисперсію ВП $X(t)$.

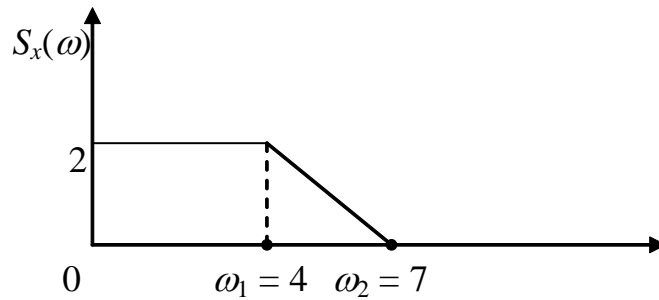


Рис. 2.30. Графік спектральної щільності до задачі 7

Розв'язування

Дисперсія ВП $X(t)$ дорівнює площі, окресленій лінією графіка спектральної щільності, тому

$$D_x = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 11.$$

8. Визначити дисперсію похідної випадкової функції $X(t)$, якщо відомо її спектральну щільність: $S_x(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + a^2)^2}$.

Розв'язування

Можна вважати, що випадковий процес перетворюється системою, яку описано оператором диференціювання: $\frac{d}{dt} = p$, тобто її передатна функція $W(p) = p$. Така система має частотну характеристику: $W(j\omega) = j\omega$. Отже, $|W(j\omega)|^2 = \omega^2$. Спектральна щільність похідної (тобто функції на виході системи)

$$S_{\dot{x}}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{a^2 \omega^2}{(\omega^2 + a^2)^2}.$$

Тоді дисперсія похідної

$$D_{\dot{x}}(\omega) = \int_0^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{a^2 \omega^2}{(\omega^2 + a^2)^2} \cdot d\omega = \left[-\frac{\omega a^2}{2(\omega^2 + a^2)} + \frac{a}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi a}{4}.$$

9. На вхід лінійної системи прибуває випадковий процес $X(t)$, кореляційна функція якого $K_x(\tau) = ae^{-\tau\alpha}$. Знайти спектральну щільність $S_y(\omega)$ процесу на

виході системи, якщо її вхід і вихід пов'язані таким диференціальним рівнянням: $Y(t) = k_1 X(t) + k_2 \dot{X}(t)$.

Розв'язування

Щоб знайти спектральну щільність $Y(t)$, необхідно скористатися таким співвідношенням: $S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega)$.

Знайдемо квадрат модуля частотної характеристики системи:

$$W(p) = k_1 + k_2 p,$$

$$W(j\omega) = k_1 + k_2(j\omega),$$

$$|W(j\omega)|^2 = k_1^2 + k_2^2 \omega^2.$$

Крім того, використовуючи перетворення Фур'є, обчислимо спектральну щільність вхідного процесу:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a e^{-\alpha \tau} \cos \omega \tau \, d\tau = \\ &= \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{e^{-\alpha \tau}}{\alpha^2 + \omega^2} (-\alpha \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau) \Big|_0^{\infty} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Отримуємо остаточний результат:

$$S_y(\omega) = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot (k_1^2 + k_2^2 \omega^2).$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Чи є стаціонарною випадкова функція: $X(t) = t^3 U$, у якій U – випадкова величина, причому: а) $m_u \neq 0$, б) $m_u = 0$?

Відповідь: а) ні, оскільки $m_x(t) \neq const$; б) ні, бо кореляційна функція залежить не від різниці аргументів, а від кожного з них.

2. Чи є стаціонарною випадкова функція $X(t) = \sin(t + \varphi)$, де φ – випадкова величина, розподілена рівномірно на інтервалі $(0, 2\pi)$?

Відповідь: так, оскільки $m_x(t) = 0 = const$, $K_x(t_1, t_2) = 0,5 \cos(t_2 - t_1)$.

3. Задано випадкову функцію: $X(t) = t + U \sin t + V \cos t$, тут U і V – випадкові величини, причому $M(U) = M(V) = 0$, $D(U) = D(V) = 5$, $M(UV) = 0$. Довести, що: а) $X(t)$ – нестационарна функція; б) $\dot{X}(t)$ – стационарна функція.

Відповідь: а) $m_x(t) \neq const$, б) $m_{\dot{x}}(t) = const$, $K_x(t_1, t_2) = 5 \cos(t_2 - t_1)$.

4. Відомо, що кореляційна функція стационарної випадкової функції $X(t)$ $k_x(\tau) = 3e^{-2\tau^2}$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції: $Y(t) = 5X(t)$.

Відповідь: $k_x(\tau) = 75e^{-2\tau^2}$.

5. Задано кореляційну функцію стационарної випадкової функції $X(t)$: $k_x(\tau) = 2e^{-2\tau^2}$. Знайти нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$.

Відповідь: $\rho_x(\tau) = e^{-\tau^2}$.

6. Задано кореляційну функцію стационарної випадкової функції $X(t)$: $k_x(\tau) = 6e^{-0,2\tau}$. Знайти: а) кореляційну функцію СВФ $X(t)$; б) дисперсію її похідної: $X'(t) = \dot{x}$.

Відповідь: а) $k_{\dot{x}}(\tau) = 0,24e^{-0,2\tau^2} (1 - 0,4\tau^2)$; б) $D_{\dot{x}} = 0,24$.

7. Задано кореляційну функцію стационарної випадкової функції $X(t)$: $k_x(\tau) = e^{|\tau|}$. Знайти дисперсію інтеграла: $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

Відповідь: $D_y(t) = 2(t + e^{-t} - 1)$.

8. Знайти дисперсію стационарної випадкової функції $X(t)$, знаючи, що її спектральна щільність $S_x(\omega) = \frac{6}{\pi(1 + \omega^2)}$.

Відповідь: $D_x = 6$.

9. Знайти спектральну щільність стационарної випадкової функції $X(t)$, коли відомо, що її кореляційна функція

$$k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}|\tau|, & \text{якщо } |\tau| \leq 3, \\ 0, & \text{якщо } |\tau| > 3. \end{cases}$$

Відповідь: $S_x(\omega) = \frac{2 \sin^2(3\omega/2)}{3\pi\omega^2}$.

10. Знайти спектральну щільність стаціонарної випадкової функції $X(t)$, знаючи, що її кореляційна функція $k_x(\tau) = 5e^{-2|\tau|}$.

Відповідь: $S(\omega) = \frac{10}{\pi(4 + \omega^2)}$.

11. Задано спектральну щільність стаціонарної випадкової функції $X(t)$: $S_x(\omega) = 6/(\pi(1 + \omega^2))$. Знайти її нормовану спектральну щільність.

Відповідь: $\alpha_x(\omega) = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$.

12. Знайти кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції $X(t)$, знаючи, що її спектральна щільність

$$S_x(\omega) = \begin{cases} s_0, & \text{якщо } \omega \in (-4\omega_0, -2\omega_0) \cup (2\omega_0, 4\omega_0), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Відповідь: $k_x(\tau) = \frac{2s_0}{\tau} \sin \omega_0 \tau (2 \cos 2\omega_0 \tau - 1)$.

13. Спектральна щільність стаціонарної випадкової функції $X(t)$ стала в діапазоні частот (ω_1, ω_2) , а поза ним дорівнює нулю, тобто

$$S_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega < \omega_1, \\ s, & \text{якщо } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \text{якщо } \omega > \omega_2. \end{cases}$$

Знайти: а) кореляційну функцію; б) дисперсію; в) нормовану кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції $X(t)$.

Відповідь: а) $k_x(\tau) = \frac{s(\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau)}{\tau}$; б) $D_x = s(\omega_2 - \omega_1)$;

в) $\rho_x(\tau) = \frac{\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau}{\tau(\omega_2 - \omega_1)}$.

14. На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням: $Y'(t) + 3Y(t) = X'(t) + 4X(t)$, подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання якої $m_x = 6$, а кореляційна функція

$k_x(\tau) = 5e^{-3|\tau|}$. Знайти математичне сподівання і дисперсію функції $Y(t)$ на виході системи в режимі, що встановився.

Відповідь: $m_y = 8$; $D_y = 22/3$.

15. На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням: $Y''(t) + 5Y'(t) + 6Y(t) = X''(t) + X(t)$, подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання якої $m_x = 4$, а кореляційна функція $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}$. Знайти математичне сподівання і спектральну щільність випадкової функції $Y(t)$ на виході системи в режимі, що встановився.

Відповідь: $m_y = 2/3$; $S_y(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{25\omega^2 + (6 - \omega^2)^2}$.

16. На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням: $Y'''(t) + 6Y''(t) + 11Y'(t) + 6Y(t) = 7X'''(t) + 5X(t)$, подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$, кореляційна функція якої $k_x(\tau) = 2e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$. Знайти спектральну щільність випадкової функції $Y(t)$ на виході системи в режимі, що встановився.

В к а з і в к а. Розкласти на лінійні множники знаменник передатної функції таким чином: $p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = (p + 1)(p + 2)(p + 3)$.

Відповідь: $S_y(\omega) = \frac{4(49\omega^6 + 25)}{\pi(\omega^2 + 1)^3(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)}$.

РОЗДІЛ 3

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ, ХАРАКТЕРНІ ЛІЧИЛЬНОЮ МНОЖИНОЮ СТАНІВ

Мета розділу: ознайомлення з випадковими процесами, які мають рахункову множину станів, та їх особливостями. Набуття навичок застосування теорії випадкових процесів до розв'язування практичних задач.

§ 3.1. ВП як зміна стану системи

Функціонування системи в часі може бути описане різними способами. У даному розділі ми розглянемо функціонування системи як процес послідовної зміни її станів.

Стан системи є фундаментальним поняттям системного аналізу. У будь-який момент часу він визначається фіксованим набором значень змінних, які називають *змінними стану*. Ці змінні в загальному випадку описують як вектор: $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, і вони мають певний фізичний зміст для кожної окремої задачі.

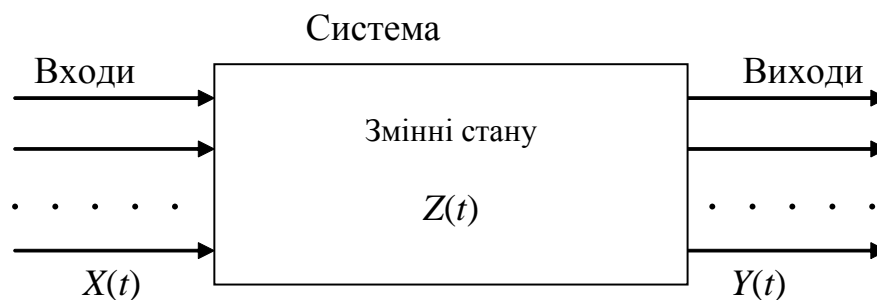


Рис. 3.1. Модель функціонування системи

Під дією вхідних впливів $X(t)$ стан системи $Z(t)$ та її реакція (вихід) $Y(t)$ змінюються в часі (рис. 3.1). Змінні стану при цьому являють собою проміжні змінні, які характеризують внутрішній стан системи.

Математична модель системи, описана через змінні стану, в детермінованому випадку має таку структуру:

$$\dot{Z}(t) = \varphi[z(t), X(t)]. \quad (3.1)$$

$$Y(t) = f[z(t), X(t)]. \quad (3.2)$$

Ця модель описує ситуацію, коли стан системи в наступний момент часу (рівняння (3.1)) та її реакція в даний момент часу (рівняння (3.2)) цілком визначається станом $Z(t)$ і вхідним впливом $X(t)$ в даний момент часу. Рівняння (3.1) називається при цьому рівнянням стану; а рівняння (3.2) – рівнянням виходу.

Однак, на практиці входи $X(t)$ часто являють собою ВП, отже, і зміна стану системи під їхнім впливом, природно, також буде являти собою ВП.

У цьому випадку для опису роботи системи застосовуються інші підходи й методи, які називаються *стохастичними* (імовірнісними). Цей розділ має на меті розглянути саме такі підходи й відповідний їм математичний опис.

Нагадаємо, що випадкові процеси за ознаками дискретності й неперервності можна поділити на чотири класи (див. § 1.1.). Розглянемо класифікацію процесів функціонування систем відносно стану $Z(t)$ й незалежного аргументу (часу t).

1. *Неперервні процеси, характерні неперервним часом.* Стан Z набуває значень із деякої неперервної множини і може змінюватись в будь-який момент часу t із певного проміжку.

Прикладом системи, функціонування якої описується саме таким процесом є нагрівальна піч. Тут стан Z – це температура печі, вочевидь вона являє собою неперервний у часі ВП.

2. *Неперервні процеси, характерні дискретним часом.* У таких процесах стан Z набуває значень з деякого проміжку (неперервної множини), однак ці значення фіксуються в дискретні моменти часу t .

Таким процесом є проведення періодичного циклічного опитування (з періодом Δt) датчиків струму кількох електродвигунів електронною системою контролю струму.

3. *Дискретні процеси, характерні неперервним часом.* Тобто стан системи Z набуває значень із деякої дискретної множини і він може змінюватися в будь-який момент часу t (оскільки час неперервний).

Приклад такої системи – інформаційна система обслуговування клієнтів, де стан системи Z – це кількість клієнтів у черзі на обслуговування в момент часу t .

4. *Дискретні процеси, характерні дискретним часом.* Стан Z набуває значень із деякої дискретної множини, причому його зміна може відбуватися тільки у фіксовані моменти часу t .

У даному розділі ми будемо вивчати процеси, що відбуваються у системах третього і четвертого типу, тобто ті, що характеризуються дискретною множиною станів.

§ 3.2. Ланцюги Маркова

Ланцюгом будемо називати послідовність випробувань, у кожному з яких може відбутися лише одна подія з повної групи подій $Q_1, Q_2 \dots Q_m \dots$. Ці події інтерпретуються як стани системи, а чергове k -те випробування може розглядатися як зміна стану в момент часу t_k . Оскільки кількість станів є лічильною множиною (найчастіше скінченною), а час також набуває значень з дискретної (рахункової) множини, то процес зміни станів ланцюга (системи) є дискретним ВП, що характеризується дискретним часом.

Уведемо такі позначення: $p_{ij}(k)$ – імовірність того, що при k -му випробуванні система перейде в стан Q_j , за умови, що під час $(k-1)$ -го випробування вона перебувала в стані Q_i .

Послідовність випробувань утворить *ланцюг Маркова* в тому випадку, якщо ймовірність $p_{ij}(k)$ залежить тільки від значень i, j, k і не залежить від того, які стани мали місце в минулому (тобто до того, як система перейшла в стан Q_i).

Інакше кажучи, ланцюг Маркова являє собою ВП *без післядії*, у якому ймовірність переходу із стану Q_i в стан Q_j залежить тільки від номера випробування k і не залежить від того, яким чином система потрапила в стан Q_i . Таке спрощення дозволяє створити ефективний математичний апарат для опису подібних ВП.

Ланцюг Маркова повністю описується матрицею переходів такого вигляду:

$$P_k = \|p_{ij}(k)\|_{m \times m}. \quad (3.3)$$

У кожному стовпці матриці (3.3) є хоча б один відмінний від нуля елемент, а ймовірності переходу $p_{ij}(k)$ зі стану Q_i ($i = 1, m$) для будь-якого значення k (номера випробування) задовольняють таке співвідношення:

$$\sum_{j=1}^m p_{ij}(k) = 1, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.4)$$

Система рівнянь (3.4) означає, що при k -му випробуванні система зі стану Q_i ($i = 1, m$) обов'язково перейде в один з можливих станів $Q_1, Q_2 \dots Q_m$.

П р и к л а д 3.1. Ланцюг Маркова описано такими матрицями переходу:

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{vmatrix}; \quad P_2 = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0,7 \end{vmatrix}; \quad P_3 = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \dots$$

Аналізуючи ці дані, можна визначити, що система має два стани ($m = 2$). При першому випробуванні ($k = 1$) ймовірність переходу зі стану Q_1 до стану Q_1 дорівнює 0,1 (тобто, якщо система перебуває в стані Q_1 , то при першому випробуванні з імовірністю 0,1 вона в ньому залишиться). Імовірність переходу із стану Q_1 в стан Q_2 дорівнює 0,9 (тобто з ймовірністю 0,9 система перейде зі стану Q_1 в стан Q_2). Аналогічно ймовірність переходу при першому випробуванні із стану Q_2 до Q_1 дорівнює 0,4, а з Q_2 в Q_2 – 0,6. Матриці P_2 й P_3 описують поведінку системи в другому й третьому випробуваннях.

Ланцюг Маркова називається *скінченним*, якщо він характеризується скінченною множиною станів.

Ланцюг Маркова називається *незвідним*, якщо кожен стан системи може бути досягнутий із будь-якого іншого стану.

Ланцюг Маркова називається *періодичним*, якщо повернення системи в будь-який стан відбувається тільки через певну кількість кроків, кратну деякому цілому числу γ , більшому за 1 ($\gamma > 1$).

Характерним випадком ланцюга Маркова є *однорідний* ланцюг, у якому перехідні ймовірності $p_{ij}(k)$ не залежать від номера випробування k , тобто $p_{ij}(k) = p_{ij}$.

П р и к л а д 3.2. Ланцюг Маркова описується матрицею переходів, яка має такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Це означає, що система має три стани (оскільки розмірність матриці – три). Незалежно від номера випробування k зі стану, наприклад, Q_2 система може перейти до стану Q_1 з імовірністю: $p_{21} = 0,4$ або до стану Q_3 з імовірністю: $p_{23} = 0,6$, залишитися в стані Q_2 система не може.

Стовпець $p(n)$ ймовірностей того, що при n -му випробуванні система перейде відповідно в стани $Q_1, Q_2 \dots Q_m$, можна визначити таким чином:

$$p(n) = (P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n)' p(0). \quad (3.5)$$

де $p(0)$ – стовпець початкових імовірностей станів системи, P' – транспонована матриця; $p(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots, p_m(n))$.

Ті самі ймовірності для однорідного ланцюга визначаються за такою формулою:

$$p(n) = (P')^n p(0). \quad (3.6)$$

П р и к л а д 3.3. Із таблиці, що містить усі цілі числа від 1 до m включно, навмання вибираються числа. Система перебуває в стані Q_j , якщо найбільше з вибраних чисел дорівнює j . Потрібно скласти матрицю переходів системи й визначити клас такого ланцюга Маркова.

Розв'язування

Якщо система перебуває в стані Q_1 то вона може з рівною ймовірністю перейти в будь який інший стан (оскільки одиниця – найменше число). Зі стану Q_2 вона може перейти лише в стани $Q_2, Q_3 \dots Q_m$, причому якщо буде вибрана одиниця або двійка, то система залишиться в стані Q_2 , тому ймовірність цього стану буде вдвічі більша за інші. Розмірковуючи аналогічно, будуюмо матрицю переходів. Вона буде мати такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & \frac{2}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \frac{3}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m-1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ланцюг Маркова, описаний даною матрицею, є скінченним (оскільки число станів m скінченне), звідним, тому що з кожного стану можливий перехід лише в стани, які мають більший номер (наприклад із стану Q_m не можна перейти в жоден інший стан), неперіодичним і однорідним (матриця переходу не залежить від номеру випробування).

П р и к л а д 3.4. Машина перевозить вантаж між чотирма пунктами, які розташовані на кільцевій трасі. Вантажі перевозяться з кожного пункту тільки в наступний (з імовірністю 0,8) або в попередній (з імовірністю 0,2). Початкове розташування машини – пункт 2. Визначити ймовірності перебування машини в кожному з пунктів після чотирьох перевезень.

Розв'язування

За стани системи візьмемо місця розташування машини – чотири можливі пункти – Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 . Тоді матриця переходів буде мати такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0,2 & 0 \end{vmatrix},$$

Отриманий ланцюг Маркова – скінченний, незвідний, періодичний, однорідний.

Знайдемо ймовірності станів після чотирьох випробувань за формулою (3.6). У даному випадку її можна записати таким чином:

$$p(4) = (P')^4 p(0).$$

Обчислимо послідовно добутки матриць.

Вихідна транспонована матриця переходу має такий вигляд:

$$P' = \begin{vmatrix} 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо її квадрат: $(P')^2 = P' \times P' = \begin{vmatrix} 0,32 & 0 & 0,68 & 0 \\ 0 & 0,32 & 0 & 0,68 \\ 0,68 & 0 & 0,32 & 0 \\ 0 & 0,68 & 0 & 0,32 \end{vmatrix},$

куб: $(P')^3 = (P')^2 \cdot P' = \begin{vmatrix} 0 & 0,608 & 0 & 0,392 \\ 0,608 & 0 & 0,392 & 0 \\ 0 & 0,392 & 0 & 0,608 \\ 0,392 & 0 & 0,608 & 0 \end{vmatrix},$

та четвертий степінь: $(P')^4 = (P')^3 \cdot P' = \begin{vmatrix} 0,4352 & 0 & 0,5648 & 0 \\ 0 & 0,4352 & 0 & 0,5648 \\ 0,5648 & 0 & 0,4352 & 0 \\ 0 & 0,5648 & 0 & 0,4352 \end{vmatrix}.$

Маємо такий остаточний результат: $p(4) = (P')^4 \cdot p(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0,4352 \\ 0 \\ 0,5648 \end{vmatrix}.$

Варто припустити, що зі збільшенням числа випробувань імовірності будуть прямувати до 0,5, тобто

$$p(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{vmatrix}, \text{ якщо } n - \text{ парне}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{vmatrix}, \text{ якщо } n - \text{ непарне}.$$

Зауважимо, що для практики найбільш цікавим є визначення саме граничних імовірностей станів $p(\infty)$. Ці границі в стовпці $p(\infty)$ існують за певних умов.

Визначимо ці умови.

Для цього розглянемо характеристичні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матриці переходів P . Вони є коренями характеристичного рівняння:

$$|\lambda E - P| = 0, \quad (3.7)$$

Граничні ймовірності $p(\infty)$ мають місце, якщо один з коренів рівняння (3.7.) дорівнює 1, тобто $\lambda_1 = 1$, а інші задовольняють таку умову:

$$|\lambda_s| < 1, \quad S = \overline{2, m}. \quad (3.8)$$

У загальному випадку корені рівняння (3.7) задовольняють умову: $|\lambda_s| \leq 1$, $S = \overline{1, m}$.

Якщо виконується умова (3.8), то елементи стовпця $p(\infty)$ можна визначити із такої системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} p_i^{(\infty)} = p_j^{(\infty)}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.9)$$

Оскільки ця система складається з лінійно залежних рівнянь, то її доповнюють очевидною умовою:

$$\sum_{j=1}^m p_j^{(\infty)} = 1. \quad (3.10)$$

На закінчення зауважимо, що матриця: $P^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P)^n$, називається матрицею граничних імовірностей переходів. При виконанні умови (3.8) усі рядки матриці $P^{(\infty)}$ однакові й кожен з них збігається зі стовпцем $p(\infty)$.

П р и к л а д 3.5. Однорідний марковський ланцюг описується матрицею переходів, яка має такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \end{vmatrix}.$$

Знайти вектор імовірностей граничних станів $p(\infty)$.

Розв'язування

Спочатку необхідно визначити, чи існує вектор $p(\infty)$, тобто перевірити умову (3.8).

Для знаходження коренів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ рівняння: $|\lambda E - P| = 0$, складемо це рівняння для нашого випадку:

$$\begin{vmatrix} 0,1-\lambda & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2-\lambda & 0,3 \\ 0 & 0,6 & 0,4-\lambda \end{vmatrix} = (0,1-\lambda)(0,2-\lambda)(0,4-\lambda) + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 -$$

$$-0,3 \cdot 0,6(0,1-\lambda) - 0,25(0,4-\lambda) = -\lambda^3 + 0,7\lambda^2 + 0,29\lambda + 0,01 = 0.$$

Таким чином, рівняння (3.7) набуває такого вигляду:

$$\lambda^3 - 0,7\lambda^2 - 0,29\lambda - 0,01 = 0.$$

Знайдемо його корені. Оскільки $\lambda_1 = 1$, то для визначення інших коренів поділимо вихідне рівняння на $(\lambda - 1)$, тобто

$$\begin{array}{r} \lambda^3 - 0,72\lambda^2 - 0,29\lambda - 0,01 \quad | \quad \lambda - 1 \\ \underline{\lambda^3 - \lambda^2} \\ 0,3\lambda^2 - 0,29\lambda \\ \underline{0,3\lambda^2 - 0,3\lambda} \\ 0,01\lambda - 0,01 \\ \underline{0,01\lambda - 0,01} \\ 0 \end{array}$$

і розв'яжемо отримане рівняння: $\lambda^2 + 0,3\lambda + 0,01 = 0$.

Його корені $\lambda_2 = -0,0382$, $\lambda_3 = -0,2618$.

Оскільки $|\lambda_S| < 1$, коли $S = \overline{2,3}$, то умови (3.8) виконуються. Отже, вектор $p(\infty)$ існує.

Тепер знайдемо елементи вектора: $p(\infty) = \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{vmatrix}$, з рівнянь (3.9) і (3.10).

Відповідна система записується таким чином:

$$\begin{cases} 0,1p_1 + 0,5p_2 + 0 \cdot p_3 = p_1, \\ 0,5p_1 + 0,2p_2 + 0,6p_3 = p_2, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язучи її, знаходимо, що $p_1 = 0,229$; $p_2 = 0,4122$; $p_3 = 0,3588$; тобто

вектор $p(\infty) = \begin{pmatrix} 0,229 \\ 0,4122 \\ 0,3588 \end{pmatrix}$, і гранична матриця переходів набуває такого вигляду:

$$P^\infty = (P)^\infty = \begin{pmatrix} 0,229 & 0,4122 & 0,3588 \\ 0,229 & 0,4122 & 0,3588 \\ 0,229 & 0,4122 & 0,3588 \end{pmatrix}.$$

§ 3.3. *Потоки подій. Найпростіший потік*

Перш ніж продовжити вивчення дискретних процесів зміни станів системи, варто проаналізувати причини, які викликають перехід системи від одного стану до іншого. Очевидно, що цей перехід зумовлюється впливом зовнішнього середовища на систему, тобто система змінює свій стан під дією вхідних впливів, або *входів* (рис. 3.2).

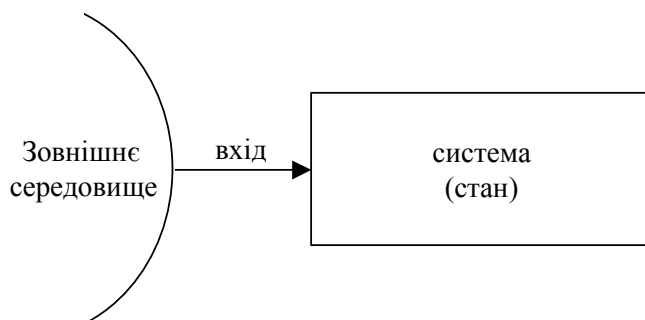


Рис. 3.2. Схема взаємодії системи і середовища

У дискретних системах вхід являє собою деякий потік подій, що відбуваються у випадкові моменти часу.

Розглянемо способи опису потоків подій.

Потоком подій називається така їхня послідовність, коли події відбуваються одна за одною у деякі моменти часу. Ми будемо розглядати потоки однорідних подій, тобто такі, що розрізняються тільки моментами появи. Графічно такі потоки зображується у вигляді точок (моменти настання подій) на осі часу (рис. 3.3).

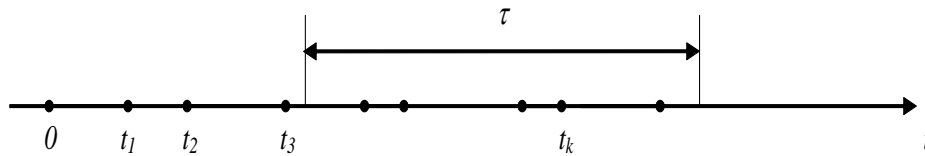


Рис. 3.3. Зображення потоку однорідних подій

Потік називається *регулярним*, якщо події в ньому розділені однаковими проміжками часу. Такі потоки рідко мають місце на практиці. Типовим для реальних ситуацій є випадковий потік.

Уведемо такі визначення:

Потік подій називається *стаціонарним*, якщо ймовірність попадання тієї або іншої події в інтервал часу τ залежить тільки від довжини інтервалу й не залежить від того, де саме на осі t обрано цей інтервал (рис. 3.3).

Потік подій називається *потокком без післядії*, якщо для будь-яких інтервалів часу, що не перекриваються, число подій, які попадають в один з них, не залежить від числа подій, що попадають в інші.

Потік подій називається *ординарним*, якщо ймовірність попадання на елементарний інтервал Δt двох або більше подій надто мала порівняно з імовірністю попадання в нього однієї події.

Якщо потік подій має всі три, описані вище, властивості, то він називається *найпростішим* (або *стаціонарним пуассонівським*) потоком.

Найпростіший потік подій відіграє серед інших особливу роль. Відомо, що, підсумовуючи велику кількість незалежних ВВ, у результаті одержуємо випадкову величину, розподілену нормально. Аналогічно, можна довести, що при підсумовуванні (взаємному накладанні) великого числа ординарних, стаціонарних потоків, результатом буде потік, близький до найпростішого.

Таким чином, найпростіші потоки (і близькі до них) дуже часто трапляються в реальних обставинах.

Розглянемо на осі $0t$ найпростіший потік подій як необмежену послідовність точок (рис. 3.4).

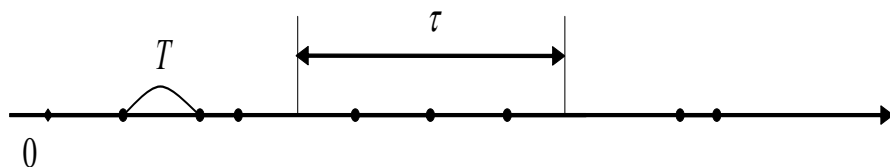


Рис. 3.4. Графічне зображення найпростішого потоку подій

Число точок, які попадають на довільну ділянку довжиною τ цієї осі, для найпростішого потоку розподілено відповідно до закону Пуассона, причому його математичне сподівання $M_\tau = \tau\lambda$, де λ – *щільність потоку* (середнє число

подій, що припадають на одиницю часу). Тоді ймовірність того, що за час τ відбудеться рівно m подій, обчислюється за такою формулою:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^m}{m!} e^{-\lambda \tau}.$$

Наприклад, імовірність того, що ділянка буде порожньою,

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda \tau}.$$

Важливою характеристикою потоку є закон розподілу довжини проміжку T між сусідніми подіями: $F(t) = p(T < t)$.

Визначимо цей закон. Запишемо ймовірність протилежної події, тобто

$$p(T > t) = 1 - F(t).$$

Очевидно, що $p(T > t)$ – це ймовірність того, що за час t не настала жодна подія і $p(T > t) = e^{-\lambda t}$.

Отже, $1 - F(t) = e^{-\lambda t}$ або $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Відповідна щільність розподілу $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Ця формула описує показовий закон розподілу, а λ – його параметр. Тобто, якщо кількість подій на інтервалі часу розподілена згідно із законом Пуассона, то довжина інтервалу між подіями буде розподілена за показовим законом. Відомо, що характеристики цього закону розподілу визначаються за такими формулами:

$$M_t = M[T] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{і} \quad D_t = D[T] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_t = \frac{1}{\lambda}.$$

Отже, для показового закону розподілу характерна така властивість: якщо проміжок часу T , розподілений за цим законом, вже триває деякий час τ , то цей факт ніяк не впливає на закон розподілу тієї частини проміжку, що залишилася, – він буде таким самим, як і закон розподілу всього проміжку T .

Ця властивість, насправді, являє собою, інше формулювання відсутності післядії, що є основною ознакою найпростішого потоку.

Доведемо відсутність післядії стосовно показового закону розподілу.

З цією метою розглянемо випадковий проміжок часу T з такою функцією розподілу:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{3.11}$$

Припустимо, що цей проміжок вже тривав якийсь час τ , тобто відбулася подія: $T > \tau$. Знайдемо умовний закон розподілу частини проміжку, що залишилася: $T_1 = T - \tau$, позначивши його таким чином:

$$F^{(\tau)}(t) = P(T - \tau < t | T > \tau).$$

Доведемо, що умовний закон розподілу $F^{(\tau)}(t)$ не залежить від значення τ і дорівнює $F(t)$. Спочатку знайдемо ймовірність добутку двох подій, а саме:

$$P((T > \tau)(T - \tau < t)) = P(T > \tau) \cdot P(T - \tau < t | T > \tau) = P(T > \tau) \cdot F^{(\tau)}(t),$$

звідси маємо, що

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{P((T > \tau)(T - \tau < t))}{P(T > \tau)},$$

але подія $(T > \tau)(T - \tau < t)$ рівносильна події: $\tau < T < t + \tau$, ймовірність якої

$$P(\tau < T < t + \tau) = F(t + \tau) - F(\tau).$$

З іншого боку, $P(T > \tau) = 1 - F(\tau)$, отже,

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{F(t + \tau) - F(\tau)}{1 - F(\tau)}. \quad (3.12)$$

Підставимо вираз (3.11) у (3.12), тоді

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{1 - e^{-\lambda(t+\tau)} - (1 - e^{-\lambda\tau})}{1 - (1 - e^{-\lambda\tau})} = \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}} = 1 - e^{-\lambda t},$$

що й потрібно було довести.

У такий спосіб ми впевнилися, що коли інтервал часу між подіями розподілений за показовим законом, то будь-які відомості про його тривалість не впливають на закон розподілу частини проміжку, яка залишилася: він буде також показовим. На рис. 3.5, 3.6 показано графічні зображення щільностей розподілу законів $F(t)$ і $F^{(\tau)}(t)$.

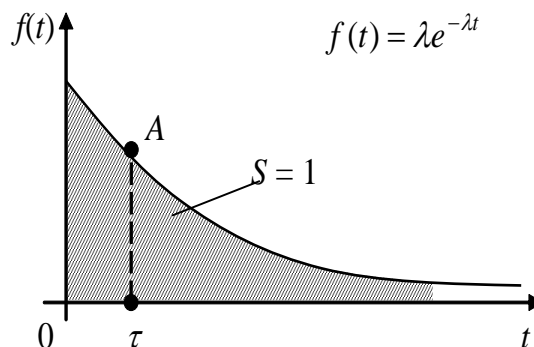


Рис. 3.5. Графік щільності розподілу показового закону $F(t)$

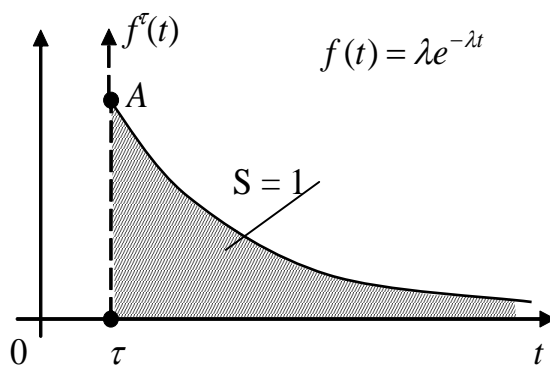


Рис. 3.6. Графік щільності розподілу показового закону $F^{(\tau)}(t)$

Можна довести, що показовий закон – єдиний, який має таку властивість. Наприклад, для рівномірного закону розподілу його щільності мають вигляд, який зображено на рис. 3.7:

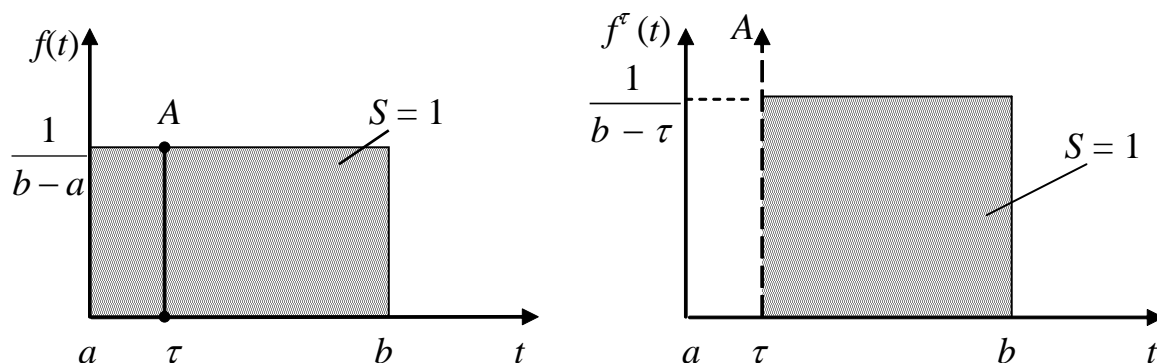


Рис. 3.7. Графіки щільності розподілу, коли проміжки між подіями розподілено рівномірно

Зауважимо, що крім найпростішого (стаціонарного, пуассонівського) існують інші ідеалізації реальних потоків подій. Розглянемо їх більш детально.

1. *Нестационарний пуассонівський потік* – має властивості ординарності й відсутності післядії однак, характеризується змінною щільністю $\lambda(t)$. У цьому потоці середнє число подій, що мають місце на проміжку часу τ , залежить не тільки від його довжини, але й від його розташування на осі часу t_0 (рис. 3.8).

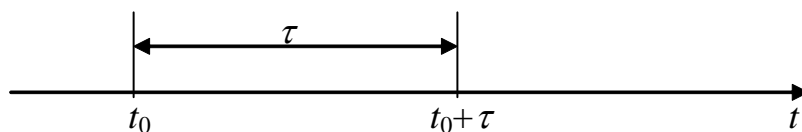


Рис. 3.8. Схематичне зображення проміжку τ для нестационарного пуассонівського потоку

Кількість подій, які попадають на ділянку часу $[t_0; t_0 + \tau]$, розподілена відповідно до закону Пуассона, тобто

$$P_m(t_0 \tau) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (m = 0, 1, 2 \dots),$$

тут $a = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt$.

Знайдемо закон розподілу інтервалу часу T між двома подіями (рис. 3.9):
 $F(t_0, t) = P(T < t) = 1 - P(T > t)$.

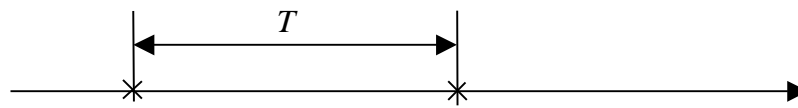


Рис. 3.9. Інтервал часу між двома подіями

Але $P(T > t)$ – це ймовірність того, що на ділянці $(t_0 \div t)$ не відбудеться жодної події, тому

$$F(t_0, t) = 1 - e^{-a}.$$

Прикладом реальної ситуації, що відповідає описаній моделі є потік машин у певному районі міста протягом доби. Він має змінну щільність і близький до нестационарного пуассонівського потоку.

2. *Потік Пальма* (потік з обмеженою післядією). Проміжки часу між подіями $T_1, T_2 \dots$ є незалежними випадковими величинами. Найпростіший потік – це окремий випадок потоку Пальма: у ньому $T_1, T_2 \dots$ – незалежні випадкові величини, розподілені за показовим законом.

3. *Потоки Ерланга*. Вони являють собою, власне, різновид потоку Пальма і характерні обмеженою післядією. Потоки Ерланга утворюються внаслідок «просіювання» найпростішого потоку. Наприклад, якщо з найпростішого потоку вилучити кожен другу подію (кожен другу точку), то решта точок утворять потік Ерланга першого порядку E_1 . Очевидно, що E_1 являє собою потік Пальма: оскільки, якщо $T_1, T_2 \dots$ – незалежні, то будуть незалежними і їхні попарні суми. Потік Ерланга другого порядку E_2 виходить, якщо в найпростішому потоці зберегти кожен третю точку, а дві проміжні вилучити. Аналогічно потік E_k виходить із найпростішого як збереження в ньому кожної $(k + 1)$ -ї точки. За умови, що $k = 0$, потік Ерланга стає найпростішим (без післядії); зі збільшенням величини k ефект післядії наростає, і коли $k = \infty$, потік Ерланга перетворюється в регулярний (інтервали $T_1, T_2 \dots$ – являють собою однакові, тобто не випадкові величини).

§ 3.4. Марковські дискретні процеси, характерні неперервним часом

У § 3.2. було розглянуто марковські дискретні процеси, характерні дискретним часом (марковські ланцюги). У цьому параграфі ми розглянемо процеси зміни станів системи, які можуть відбуватися під дією вхідного потоку подій в будь-який момент часу.

Зручною моделлю подібних процесів зміни станів є марковський дискретний процес, що характеризується неперервним часом.

Нагадаємо, що процес, який відбувається у фізичній системі, називається марковським (або процесом без післядії), якщо для кожного моменту часу ймовірність будь-якого стану системи в майбутньому залежить тільки від стану системи в даний момент і не залежить від того, яким чином система потрапила в цей стан.

Для того, щоб процес зміни станів системи був марковським, необхідно, щоб потік подій, які викликають зміну станів системи, був пуассонівським, тобто потоком без післядії, розподілений за показовим законом. Покажемо це на прикладі.

Нехай маємо пристрій, що складається з кількох елементів. Ці елементи можуть незалежно один від одного виходити з ладу у випадкові моменти часу, викликаючи відмову роботи всього пристрою. Отже, час безвідмовної роботи кожного елемента являє собою випадкову величину, що розподілена за показовим законом з параметром λ . Час, необхідний для відновлення роботи пристрою – це також ВВ, розподілена за показовим законом з параметром μ .

Таким чином, функціонування системи, являє собою ВП, характерний неперервним часом і скінченною множиною станів, а саме:

X_0 – система працює (справна);

X_1 – система ремонтується (несправна)

Граф станів і переходів системи має вигляд, зображений на рис. 3.10.

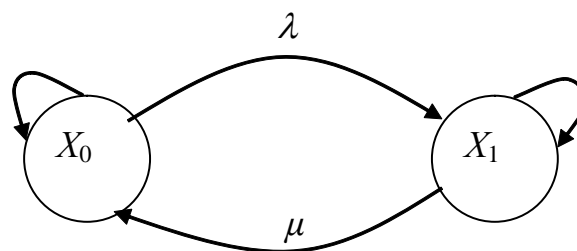


Рис. 3.10. Граф станів і переходів системи

Вочевидь, існує два потоки подій: потік відмов, що переводить систему із стану X_0 в стан X_1 з інтенсивністю λ (середнє число відмов в одиницю часу) і потік відновлень, що переводить систему із стану X_1 до стану X_0 з інтенсивністю μ (середнє число відновлених елементів в одиницю часу).

Даний процес є марковським саме тому, що потоки відмов і відновлень розподілені за показовим законом, тобто без післядії (цю властивість показового закону розглянуто в § 3.3). Підтвердимо це міркування.

Нехай в момент часу t_0 система перебуває в стані X_0 (працює). Оскільки час безвідмовної роботи кожного елемента характеризується показовим розподілом, то момент відмови кожного елемента в майбутньому не залежить від того, скільки часу він уже працював. Тому ймовірність того, що в майбутньому система залишиться в стані X_0 або змінить його, не залежить від минулого процесу. Припустимо тепер, що в момент t_0 система перебуває в стані X_1 (ремонтується). Оскільки час ремонту також характеризується показовим розподілом, то ймовірність закінчення ремонту в будь-який момент після t_0 не залежить від того, коли розпочався ремонт. Отже, процес є марковським.

Очевидно, що показовий розподіл часу роботи елемента й часу ремонту – це істотні умови, без яких процес не був би марковським.

Наприклад, рівномірний закон розподілу часу безвідмовної роботи системи приводить до того, що ймовірність відмови елемента залежить від того, скільки часу він вже пропрацював.

Розглянемо методику розрахунку дискретних марковських процесів у системі, характерної неперервним часом.

Нехай маємо випадковий процес, що відбувається в системі, можливі стани якої $X_0, X_1 \dots X_i \dots X_j$. Позначимо умовну ймовірність того, що в момент: $t = t_0 + \tau$, система перебуватиме в стані X_j , якщо в момент t_0 вона перебувала в стані X_i , через $p_{ij}(t_0, \tau)$. ВП називається *марковським*, якщо ця ймовірність $p_{ij}(t_0, \tau)$ залежить тільки від i, j, t_0, τ тобто тільки від того, у якому стані система була в момент t_0 й у який стан вона перейде через час τ .

Таким чином, для опису поведінки системи в класі марковських дискретних процесів, характерних неперервним часом, необхідно:

1. Ввести поняття стану системи.
2. Визначити всі стани, у яких може перебувати система.
3. Скласти граф станів і переходів системи, тобто окреслити шляхи можливих безпосередніх переходів системи з одного стану в інший.
4. Для розрахунку перехідних процесів у системі визначити, у якому стані вона перебуває в початковий момент часу.
5. Для кожного можливого переходу на графі показати інтенсивність λ_{ij} потоку подій, що переводять систему зі стану X_i в стан X_j . Іntenсивності λ_{ij} , як правило, визначаються експериментально.

Вичерпною характеристикою марковського процесу є сукупність імовірностей $P_j(t)$ того, що процес у момент часу t буде перебувати в стані X_j , $j = \overline{0, n}$. Ці ймовірності визначаються розв'язуванням системи таких диференціальних рівнянь:

$$P_j'(t) = - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ij} \right) P_j(t) + \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n P_i(t) \lambda_{ij}, \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.13)$$

$$P_0(0) = 1, \quad P_j(0) = 0, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.14)$$

Система (3.13) описує перехідний процес, припускаючи, що початковим станом є нульовий (рівності (3.14)).

Якщо кількість станів системи – n , і від кожного з них можна перейти в будь-який інший, то така система буде мати *граничний стаціонарний режим*. Так, системі, яку зображено на рис. 3.11, а, властивий стаціонарний режим, а системі на рис. 3.11, б – ні.

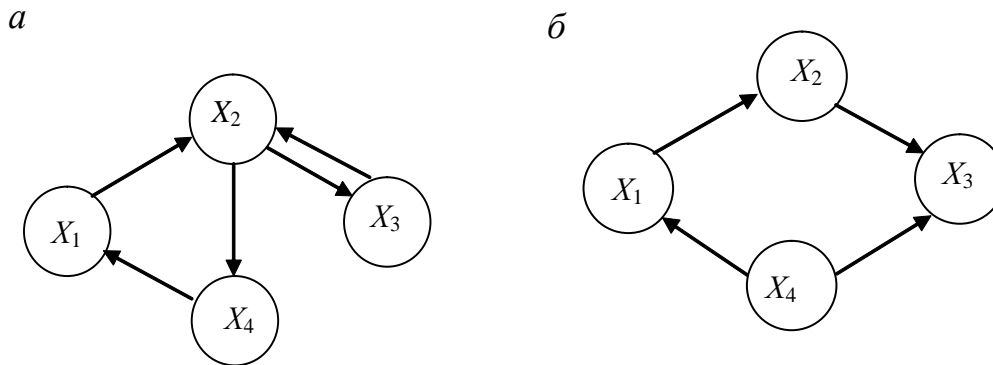


Рис. 3.11. Граф станів і переходів системи, якій властивий граничний стаціонарний режим (а); граф станів і переходів системи, яка не має граничного стаціонарного режиму (б)

З практичного погляду цікавим є визначення ймовірностей станів системи саме в граничному стаціонарному режимі. Для їхнього розрахунку використовується система алгебраїчних рівнянь, що виходить із системи (3.13) шляхом прирівнювання до нуля похідних, а саме:

$$- \left(\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ij} \right) P_j + \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n P_i \lambda_{ij} = 0, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.15)$$

Система (3.15) – лінійно залежна, тому її необхідно доповнити таким рівнянням:

$$\sum_{i=0}^n P_i = 1. \quad (3.16)$$

П р и к л а д 3.6. Два абоненти A і B працюють із одним інформаційним центром. У кожен момент часу центр може обслуговувати тільки одного абонента. Абонент A має більш високий пріоритет, тому, якщо від A приходить заявка, то обслуговування абонента B припиняється до закінчення обслуговування абонента A . За таких умов потрібно:

1. Розрахувати ймовірності можливих станів даної системи, коли відомі інтенсивності потоків подій, що переводять систему в сусідні стани.

2. З'ясувати, чи буде система працювати ефективно, коли відомо, що для цього необхідно, аби втрати часу абонента B на очікування становили б не більше 50 % часу його обслуговування.

3. Встановити, які параметри і яким чином повинні змінитися, щоб підвищилася ефективність обслуговування абонента B ?

Розв'язування

Уведемо поняття стану системи.

Очевидно, що стан системи визначається станом абонентів A і B . Для абонента A можливі два стани: 0 – відсутність заявки; 1 – обслуговування. Для абонента B можливі три стани: 0 – відсутність заявки; 1 – обслуговування; 2 – очікування обслуговування. Тоді можна визначити такі стани системи:

(0, 0) – X_1 – відсутність заявок від абонентів A і B ;

(0, 1) – X_2 – відсутність заявки від абонента A й обслуговування абонента B ;

(1, 0) – X_3 – обслуговування абонента A і відсутність заявки від абонента B ;

(1, 2) – X_4 – обслуговування абонента A й очікування обслуговування для абонента B .

Граф станів і переходів системи має вигляд, який зображено на рис. 3.12.

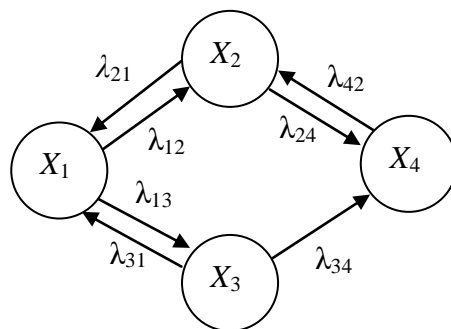


Рис. 3.12. Граф станів і переходів системи

Відповідно до формул (3.15) складемо систему алгебраїчних рівнянь для визначення ймовірностей станів P_i , $i = \overline{1,4}$:

$$\begin{cases} -(\lambda_{12} + \lambda_{13})P_1 + \lambda_{21}P_2 + \lambda_{31}P_3 = 0, \\ -(\lambda_{21} + \lambda_{24})P_2 + \lambda_{42}P_4 + \lambda_{12}P_1 = 0, \\ -(\lambda_{31} + \lambda_{34})P_3 + \lambda_{13}P_1 = 0, \\ -\lambda_{42}P_4 + \lambda_{24}P_2 + \lambda_{34}P_3 = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Систему рівнянь можна скласти і безпосередньо за графом, користуючись таким правилом: для кожного i -го стану складається одне рівняння, причому вихідні інтенсивності λ беруться зі знаком мінус і множаться на ймовірність даного стану P_i ; вхідні інтенсивності беруться зі знаком плюс і множаться на ймовірності станів, з яких вони виходять.

Допустимо, що для графа задано такі значення інтенсивності: $\lambda_{12} = \lambda_{13} = 1$; $\lambda_{21} = \lambda_{31} = 0,5$; $\lambda_{34} = 2$; $\lambda_{24} = 3$; $\lambda_{42} = 4$; $\lambda_{21} = \lambda_{31} = 0,5$; $\lambda_{34} = 2$; $\lambda_{24} = 3$; $\lambda_{42} = 4$; Тоді система (3.17) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} -2P_1 + 0,5P_2 + 0,5P_3 = 0, \\ P_1 - 3,5P_2 + 4P_4 = 0, \\ P_1 - 2,5P_3 = 0, \\ 3P_2 + 2P_3 - 4P_4 = 0. \end{cases}$$

Це система лінійно залежних рівнянь. Тому одне з рівнянь (не важливо, яке) необхідно замінити умовою (3.16). Замінімо нею перше рівняння системи, а саме

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1, \\ P_1 - 3,5P_2 + 4P_4 = 0, \\ P_1 - 2,5P_3 = 0, \\ 3P_2 + 2P_3 - 4P_4 = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Розв'язуючи систему (3.18), наприклад, методом Гаусса, одержимо, що

$$P_1 = \frac{10}{79}; \quad P_2 = \frac{36}{79}; \quad P_3 = \frac{4}{79}; \quad P_4 = \frac{29}{79}.$$

Відношення часу очікування й часу обслуговування абонента B визначається відношенням імовірностей станів P_4 і P_2 , тобто

$$\frac{P_4}{P_2} = \frac{29}{39}.$$

Оскільки це відношення більше 0,5 (50 %), то можна зробити висновок про неефективність роботи системи.

Щоб зменшити відношення $\frac{P_4}{P_2}$, необхідно зменшити інтенсивність потоків λ_{21} , λ_{24} , λ_{34} або збільшити інтенсивність потоків λ_{12} і λ_{42} .

П р и к л а д 3.7. В умовах попередньої задачі скласти граф станів і переходів для визначення ймовірностей станів системи, якщо з інформаційним центром працює три абоненти A , B , C , а їхні пріоритети мають вигляд $A > B > C$.

Уведемо такі позначення:

- 0 – відсутність заявки,
- 1 – обслуговування,
- 2 – очікування обслуговування.

Тоді можливі стани системи можуть бути описані таким чином:

$X_1 - (0, 0, 0)$ – відсутність заявок від абонентів A, B, C ;

$X_2 - (1, 0, 0)$ – обслуговування абонента A , відсутність заявок від абонентів B, C ;

$X_3 - (0, 1, 0)$ – обслуговування абонента B , відсутність заявок від абонентів A, C ;

$X_4 - (0, 0, 1)$ – обслуговування абонента C , відсутність заявок від абонентів A, B ;

$X_5 - (1, 2, 0)$ – обслуговування абонента A , очікування обслуговування для абонента B , відсутність заявок від абонента C ;

$X_6 - (1, 0, 2)$ – обслуговування абонента A , відсутність заявок від абонента B , очікування для абонента C ;

$X_7 - (0, 1, 2)$ – відсутність заявок від абонента A , обслуговування B , очікування обслуговування для абонента C ;

$X_8 - (1, 2, 2)$ – обслуговування абонента A , очікування обслуговування для абонентів B, C .

Граф станів і переходів системи має вигляд, зображений на рис. 3.13.

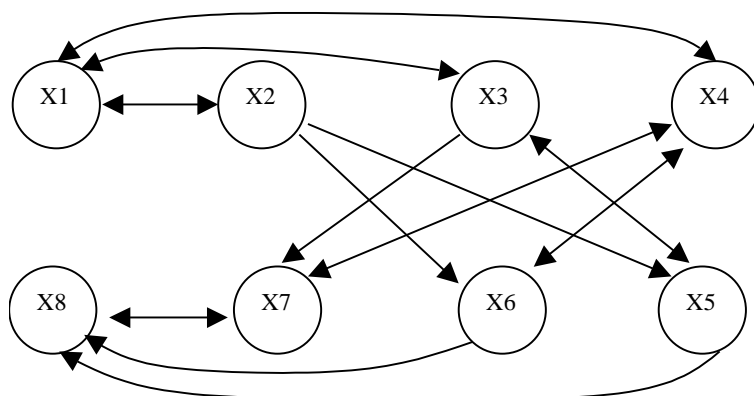


Рис. 3.13. Граф станів і переходів системи у прикладі 3.7

§ 3.5. Марковські процеси типу «загибель – розмноження».
Рівняння Ерланга

Процеси типу «загибель – розмноження» є одним з випадків дискретних процесів, які характеризуються неперервним часом, розглянутих у § 3.4. Такі процеси мають структуру графа станів і переходів, зображену на рис. 3.14.

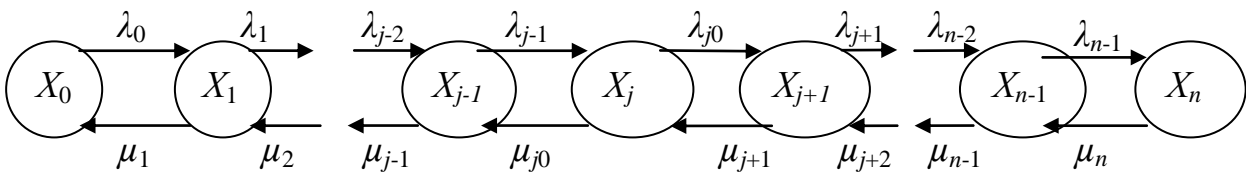


Рис. 3.14. Структура графа переходів процесу типу «загибель – розмноження»

Система, зображена на рис. 3.14, має \$(n + 1)\$ стан \$X_j, j = \overline{0, n}\$, з них два кінцевих: \$X_0\$ й \$X_n\$ (у загальному випадку крайнього правого стану може й не існувати, тобто \$n \rightarrow \infty\$). У ній діють дві протилежні тенденції: потік подій \$\lambda\$, що переводить систему в праві сусідні стани, й потік подій \$\mu\$, що переводять систему в сусідні ліві стани. Наведемо приклади таких потоків.

1. Надходження й витрата грошей у касі.
2. Надходження й витрата матеріалів на складі.
3. Поява й обслуговування клієнтів.
4. Розмноження особин у популяціях та їхня загибель, і под.

У загальному випадку інтенсивність потоків \$\lambda\$ і \$\mu\$ залежить від стану, в якому перебуває система. Передбачається, що потоки подій \$\lambda\$ і \$\mu\$ найпростіші (стаціонарні, без післядії, ординарні) і щільність розподілу часу між подіями підпорядковується показовому закону, тобто

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \lambda_j e^{-\lambda_j t}, \\ g_j(t) &= \mu_j e^{-\mu_j t}, \end{aligned} \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.19)$$

Як відомо, для найпростіших потоків імовірність настання за час \$\tau\$ саме \$m\$ подій визначається за такою формулою:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^m}{m!} e^{-\lambda \tau}. \quad (3.20)$$

Завдання полягає у визначенні ймовірностей станів системи $P_j(t)$, $j = \overline{0, n}$, для будь-якого моменту часу t .

Оскільки обидва потоки подій λ і μ – найпростіші, то процес, який триває в системі – марковський.

Визначимо спочатку ймовірність того, що в момент часу $(t + \Delta t)$ система перебуває в стані X_0 . Це може відбутися у двох випадках:

A – у момент t система перебувала в стані X_0 і за час Δt не відбулося жодної події з потоку λ .

B – у момент t система перебувала в стані X_1 і за час Δt відбулася подія з потоку μ . Тоді

$$P_0(t + \Delta t) = P(A) + P(B).$$

Згідно з формулою (3.20), $P(A) = P_0(t)e^{-\lambda_0\Delta t} \approx P_0(t)[1 - \lambda_0\Delta t]$.

Тут $P_0(t)$ – ймовірність того, що в момент t система перебувала в стані X_0 . $e^{-\lambda_0\Delta t}$ – ймовірність того, що за час Δt не відбулося жодної події з потоку λ .

Аналогічно $P(B) = P_1(t)(1 - e^{-\mu_1\Delta t}) \approx P_1(t)\mu_1\Delta t$. При цьому $1 - e^{-\mu_1\Delta t} = \mu_1\Delta t$ – ймовірність того, що за час Δt відбудеться хоча б одна подія потоку μ , тоді

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda_0\Delta t) + \mu_1P_1(t)\Delta t.$$

Переходячи до границі, коли $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо, що

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0P_0(t) + \mu_1P_1(t).$$

Тепер знайдемо диференціальне рівняння для будь-якої ймовірності $P_j(t)$, $j = \overline{1, n-1}$, тобто для будь-якого внутрішнього стану системи.

Позначимо події: A – система залишиться в стані X_j ; B – система перейде зі стану X_{j-1} в стан X_j протягом часу Δt ; C – система перейде зі стану X_{j+1} у стан X_j протягом періоду Δt .

Вочевидь,

$$P_j(t + \Delta t) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Ймовірність того, що жодна подія потоків λ і μ не відбудеться й система залишиться в стані X_j , можна обчислити таким чином:

$$e^{-\lambda_j\Delta t} e^{-\mu_j\Delta t} = e^{-(\lambda_j + \mu_j)\Delta t} \approx 1 - (\lambda_j + \mu_j)\Delta t.$$

Тепер обчислимо ймовірності подій A, B, C :

$$P(A) = P_j(t)[1 - (\lambda_j + \mu_j)\Delta t] \text{ – система залишиться в стані } X_j.$$

$P(B) = P_{j-1}(t)\lambda_{j-1}\Delta t$ – система перейде зі стану X_{j-1} в стан X_j протягом часу Δt .

$P(C) = P_{j+1}(t)\mu_{j+1}\Delta t$ – система перейде зі стану X_{j+1} у стан X_j протягом періоду Δt .

Отже, остаточно отримуємо таку систему рівнянь:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \lambda_{j-1}P_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_j(t) + \mu_{j+1}P_{j+1}(t), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Далі визначимо ймовірність $P_n(t + t\Delta)$, а саме:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \mu_n\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t,$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) - \mu_nP_n(t).$$

Таким чином, маємо систему n рівнянь, яка називається *системою рівнянь Ерланга*. Запишемо її.

$$\begin{cases} \dot{P}_0(t) = -\lambda_0P_0(t) + \mu_1P_1(t), \\ \dot{P}_j(t) = \lambda_{j-1}P_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_j(t) + \mu_{j+1}P_{j+1}(t), \quad j = \overline{1, n-1}, \\ \dot{P}_n(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) - \mu_nP_n(t). \end{cases} \quad (3.21)$$

Інтегрування цієї системи, доповненої умовою: $\sum_{j=0}^n P_j(t) = 1$, за певних

початкових умов (наприклад, $P_0(0) = 1, P_1(0) = \dots = P_n(0) = 0$) визначає перебіг у системі перехідного процесу в часі, тобто ймовірності $P_0(t), P_1(t) \dots P_n(t)$.

Як уже було сказано вище, для багатьох практичних задач більш цікавими є ймовірності станів P_j , $j = \overline{0, n}$, у граничному стаціонарному (сталому) режимі. Ці ймовірності стаціонарного режиму обчислюють, розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda_0P_0 + \mu_1P_1 = 0, \\ \lambda_{j-1}P_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)P_j + \mu_{j+1}P_{j+1} = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ \lambda_{n-1}P_{n-1} - \mu_nP_n = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Система (3.22) виходить із системи (3.21), якщо прийняти, що $P_j = const$.

Насамкінець відзначимо, що система (3.22) є лінійно залежною, тому її варто доповнити такою умовою:

$$\sum_{j=0}^n P_j = 1. \quad (3.23)$$

Застосований у даному параграфі підхід до виведення формул Ерланга (3.21), (3.22) для системи типу «загибель – розмноження», може бути використаний і до більш загального випадку, коли структура графа станів довільна. Так, на основі цього підходу отримано систему рівнянь (див. § 3.4.) для розрахунку ймовірностей станів у системі з довільною структурою. Методика виведення розрахункових формул аналогічна описаній вище. Істотним тут є марковський характер (відсутність післядії) процесу зміни станів.

П р и к л а д 3.8. АТС має 4 лінії зв'язку. На станцію надходить у середньому 3 виклики за хвилину. Виклик, що надійшов, коли всі лінії були зайняті, одержує відмову й залишає систему. Середня тривалість телефонної розмови $T = 2$ хвилини. Вважаючи потік викликів найпростішим, а час розмови розподіленим за показовим законом, визначити ймовірність відмови та ймовірність простою АТС.

Розв'язування

Оскільки потоки подій розглядаються у системі без післядії, то будемо вважати процес зміни станів марковським.

Позначимо можливі стани системи:

- X_0 – усі лінії зв'язку вільні,
- X_1 – один канал зайнятий,
- X_2 – два канали зайняті,
- X_3 – три канали зайняті,
- X_4 – чотири канали зайняті.

Граф станів і переходів даної системи має вигляд, зображений на рис. 3.15.

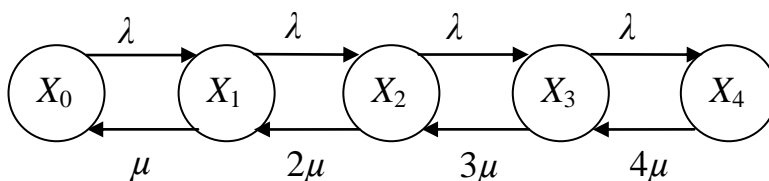


Рис. 3.15. Граф станів і переходів системи в прикладі 3.8

Отже, маємо систему типу «загибель – розмноження» (точніше її окремий випадок), коли вхідний потік викликів має сталу інтенсивність: $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 3 \text{ хв}^{-1}$, μ – потік звільнення ліній зв'язку, інтенсивність якого змінна, а саме, кратна числу зайнятих каналів у системі: $\mu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \text{ хв}^{-1}$ (кількість розмов у хвилину на одній лінії). Таким чином, $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = 2\mu$, $\mu_3 = 3\mu$, $\mu_4 = 4\mu$.

Система рівнянь Ерланга (3.23) в цьому окремому випадку має розв'язок такого вигляду:

$$P_k = \frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{j=0}^n \frac{a^j}{j!}}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (3.24)$$

$$a = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Для наших даних $n = 4$; $a = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{1/2} = 6$.

Ймовірність відмови – це ймовірність того, що всі чотири лінії зв'язку зайняті, тобто це ймовірність стану X_4 . Обчислимо її за формулами 3.24.

$$P_4 = \frac{\frac{a^4}{4!}}{\sum_{j=0}^4 \frac{a^j}{j!}} = \frac{\frac{6^4}{24}}{1 + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}} = 0,47.$$

Тепер розрахуємо ймовірність простою системи, тобто того, що всі канали вільні:

$$P_0 = \frac{\frac{a^0}{0!}}{\sum_{j=0}^4 \frac{a^j}{j!}} = \frac{1}{1 + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}} = 0,0087.$$

П р и к л а д 3.9. У перукарні працює три майстри. У середньому протягом години перукарню відвідують 8 клієнтів. Середній час обслуговування клієнта одним майстром $T = 15$ хв. Вважаючи, що потік клієнтів і час їхнього обслуговування підпорядковуються показовому закону, а в разі, коли всі майстри зайняті, потенційний клієнт залишає перукарню, розрахувати середнє число зайнятих майстрів.

Розв'язування

Позначимо можливі стани системи:

X_0 – усі майстри вільні,

X_1 – один майстер зайнятий,

X_2 – два майстри зайняті,

X_3 – три майстри зайняті.

Граф станів і переходів системи буде мати вигляд, зображений на рис. 3.16.

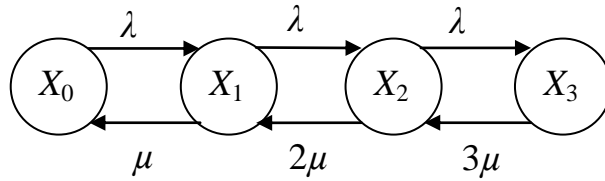


Рис. 3.16. Граф станів і переходів системи у прикладі 3.9

Визначимо параметри системи.

З умов задачі маємо: $n = 3$, $\lambda = 8 \text{ год}^{-1}$, $\mu = \frac{1}{T} \text{ год}^{-1} = 4 \text{ год}^{-1}$.

Отже, $a = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{4} = 2$.

Середнє число зайнятих майстрів обчислюється за такою формулою:

$$\bar{S} = \sum_{j=0}^n jP_j.$$

Спочатку, використовуючи формули (3.24), знайдемо ймовірності станів системи:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} = \frac{1}{6,333} = 0,1579 \text{ – імовірність простою;}$$

$$P_1 = \frac{\frac{a^1}{1!}}{6,333} = \frac{2}{6,333} = 0,3158;$$

$$P_2 = \frac{\frac{a^2}{2!}}{6,333} = \frac{2}{6,333} = 0,3158;$$

$$P_3 = \frac{\frac{a^3}{3!}}{6,333} = \frac{1,333}{6,333} = 0,2105 \text{ – імовірність відмови.}$$

Тепер обчислимо середнє число зайнятих майстрів:

$$\bar{S} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 = 1 \cdot 0,3158 + 2 \cdot 0,3158 + 3 \cdot 0,2105 = 1,5789.$$

Висновки

Функціонування системи в часі може бути описано як процес послідовної зміни її станів.

Це дозволяє використовувати теорію випадкових процесів у розв'язуванні багатьох практичних задач. Існує ефективний математичний апарат моделювання роботи системи в разі, коли її функціонування може бути описане як випадковий процес, характерний дискретною множиною станів.

Функціонування системи, яка відповідає випадковому процесу, характерному дискретними станами і дискретним часом, повністю описується матрицею переходу.

У разі, коли система описується випадковим процесом, який характеризується дискретними станами і неперервним часом, то її математичною моделлю буде система диференціальних рівнянь.

Питання для самоконтролю

1. Що визначають змінні стану системи?
2. Дайте визначення поняття «ланцюг подій».
3. Яка послідовність подій називається ланцюгом Маркова?
4. Які величини необхідно знати, для того щоб повністю описати ланцюг Маркова?
5. Які співвідношення повинні задовольняти ймовірності переходу системи від одного стану до іншого?
6. Який ланцюг Маркова називається скінченим? Однорідним? Періодичним? Незвідним?
7. Які ВП називаються процесами без післядії?
8. Як можна визначити ймовірність того, що при n -му випробуванні система перейде в стан Q_j ?
9. Які випадкові процеси називають марковськими?
10. Наведіть алгоритм побудови моделі системи в класі марковських дискретних процесів, що відбуваються у неперервному часі.
11. Якими характеристиками описується марковський процес?
12. Яким чином формується граф станів і переходів марковського процесу?
13. Яким системам властивий граничний стаціонарний режим?
14. За яких умов системам властивий граничний стаціонарний режим?
15. Дайте визначення потоку подій.
16. Який потік подій називають регулярним? Ординарним? Стаціонарним? Найпростішим? Пуассонівським?
17. За яким законом розподілено кількість точок, що попадають в інтервал, довжиною τ , коли потік найпростіший?

18. Як визначають ймовірність того, що за час τ відбудеться рівно m подій у випадку найпростішого потоку?

19. Яка властивість є найсуттєвішою для визначення найпростішого потоку?

20. Яка властивість показового закону розподілу використовується в розрахунках найпростішого потоку подій?

21. Який потік подій називається нестационарним пуассонівським? Поток Пальма? Поток Ерланга?

22. Яку структуру має граф випадкового процесу типу «загибель – розмноження»?

23. Наведіть приклади реальних систем, що описуються моделлю ВП типу «загибель – розмноження»?

24. Яким чином визначаються інтенсивності потоків подій? Від чого вони залежать?

25. Виведіть формули Ерланга.

Задачі до розділу 3

1. Система може перебувати в одному з шістьох станів. Перехід системи з одного стану в інший здійснюється таким чином: на черговому кроці кидають гральний кубик. Коли цифра, яка випала, збігається з номером стану системи, то номер стану збільшується на одиницю; якщо не збігається, то система залишається в тому самому стані. Від шостого стану перехід здійснюється в перший. Скласти матрицю переходів й описати властивості ланцюга Маркова.

Розв'язування

Ймовірність того, що система в ньому залишиться в будь-якому із можливих станів, буде дорівнювати $\frac{5}{6}$, ймовірність переходу в стан з наступним

номером становить $\frac{1}{6}$ (оскільки ймовірність того, що на кубіку випаде певна цифра дорівнює $\frac{1}{6}$), а ймовірність переходу в усі інші стани буде дорівнювати

0. Отже, матриця переходів набуває такого вигляду:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Ланцюг Маркова, що описується даною матрицею, є скінченним (оскільки число станів 6), незвідним (тому що з кожного стану можна дістатися будь-якого іншого стану), неперіодичним і однорідним (матриця переходу не залежить від номера випробування).

2. Матриця переходів системи має такий вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Визначити властивості цього ланцюга Маркова та розрахувати ймовірності станів системи через три кроки, якщо початковим її станом є перший.

Розв'язування

Цей ланцюг скінченний (кількість станів – три), звідний (оскільки із стану 3 не можна перейти в жоден інший), неперіодичний, однорідний (матриця переходу не залежить від номера випробування).

Для однорідного ланцюга вектор імовірностей станів визначається за такою формулою:

$$p(n) = (P^n)' \cdot p(0),$$

де n – кількість кроків; $p(0)$ – вектор початкових станів; $p(n)$ – вектор станів через n кроків; P – матриця переходів.

Виконаємо обчислення, якщо $n = 3$, а вектор початкових станів $p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

таким чином,

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,098 & 0,135 & 0,767 \\ 0,081 & 0,098 & 0,821 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(P^3)' = \begin{pmatrix} 0,098 & 0,081 & 0 \\ 0,135 & 0,098 & 0 \\ 0,767 & 0,821 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p(3) = (P^3)' \cdot p(0) = \begin{vmatrix} 0,098 & 0,081 & 0 \\ 0,135 & 0,098 & 0 \\ 0,767 & 0,821 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,098 \\ 0,135 \\ 0,767 \end{vmatrix}.$$

Отже ймовірності станів системи через три кроки становлять: першого – $p_1(3) = 0,098$; другого – $p_2(3) = 0,135$ і третього – $p_3(3) = 0,767$.

3. Дано таку матрицю переходів системи:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{vmatrix}$$

Знайти граничні ймовірності її станів.

Розв'язування

Вектор граничних станів системи p^∞ існує тоді, коли всі корені характеристичного рівняння: $|\lambda E - P| = 0$, крім одного ($\lambda_k = 1$), за модулем менші від одиниці. Перевіримо цю умову для заданої матриці переходів. Спочатку складемо характеристичне рівняння, а саме:

$$|\lambda E - P| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 - \lambda & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(0,4 - \lambda)(0,8 - \lambda) - 0,7 \cdot 0,2 \cdot (0,4 - \lambda) -$$

$$- 0,6 \cdot 0,3 \cdot (0,8 - \lambda) = -\lambda^3 + 1,2\lambda^2 - 0,2 = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 \approx 0,558$; $\lambda_3 \approx -0,358$.

За цих обставин умова існування граничних імовірностей виконується. Обчислимо їх, скориставшись такою системою рівнянь:

$$\sum_{i=1}^m P_{ij} p_i^\infty = p_j^\infty, \quad j = \overline{1, m},$$

доповнену очевидною умовою: $\sum_{j=1}^m p_j^\infty = 1$.

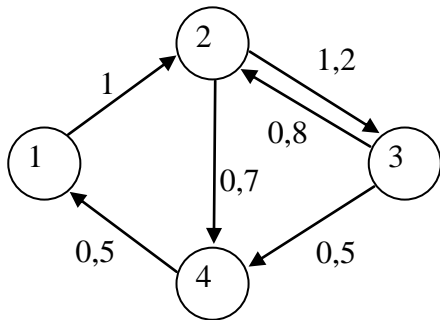
У даній задачі ця система набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} 0p_1 + 0,6p_2 + 0,2p_3 = p_1, \\ 0,3p_1 + 0,4p_2 + 0p_3 = p_2, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язок являє собою граничні ймовірності станів.

Отже, $p_1^\infty = 0,1854$; $p_2^\infty = 0,0556$; $p_3^\infty = 0,759$.

4. Граф станів і переходів системи, характерної дискретним числом



і неперервним часом, має вигляд, зображений на рис. 3.16.

На дугах графа проставлено значення інтенсивності переходів λ_{ij} .

Необхідно скласти систему рівнянь для визначення ймовірностей зміни станів і розрахувати ймовірності станів системи в граничному стаціонарному режимі.

Рис. 3.16. Граф станів і переходів системи (до задачі 4)

Розв'язування

У загальному вигляді система рівнянь для розрахунку ймовірностей станів $P_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, має такий вигляд:

$$\dot{P}_j(t) = -P_j(t) \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ji} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ij} P_i(t), \quad j = \overline{1, n}.$$

Відповідно до умов нашої задачі запишемо її таким чином:

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{41}P_4(t), \\ \dot{P}_2(t) = -(\lambda_{23} + \lambda_{24}) \cdot P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{32}P_3(t), \\ \dot{P}_3(t) = -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) \cdot P_3(t) + \lambda_{23}P_2(t), \\ \dot{P}_4(t) = -\lambda_{41}P_4(t) + \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t). \end{cases},$$

Ця система диференціальних рівнянь, з огляду на початкові умови та з урахуванням, що $\sum_{j=1}^n p_j(t) = 1$, визначає процес зміни ймовірностей станів системи.

Для визначення ймовірностей станів системи у граничному стаціонарному режимі необхідно в даній системі диференціальних рівнянь

прирівняти похідні нулю й замінити одне з рівнянь умовою: $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, тоді відповідна система рівнянь записується таким чином:

$$\begin{cases} -P_1 + 0,5P_4 = 0, \\ -1,9P_2 + P_1 + 0,8P_3 = 0, \\ -1,3P_3 + 1,2P_2 = 0, \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знайдемо ймовірності станів системи у граничному режимі, тобто

$$P_1 = 0,214794; P_2 = 0,184922; P_3 = 0,170697; P_4 = 0,429587.$$

5. Три рибальських траулери обслуговує одна плавуча база. Середній час плавання траулера становить 2 доби, після чого він прибуває на базу для обслуговування. На базі є один причал, а середній час обслуговування траулера дорівнює 8 годин. Визначити середній час простою бази, вважаючи, що процеси в цій системі марковські.

Розв'язування

Цей об'єкт можна описати як систему масового обслуговування із скінченним числом вимог. Уведемо поняття станів системи:

X_0 – на базі немає жодного траулера (простій бази);

X_1 – на базі обслуговується один траулер;

X_2 – один траулер обслуговується, а ще один – у черзі;

X_3 – один траулер обслуговується, а два – у черзі.

Граф станів і переходів системи зображено на рис. 3.17:

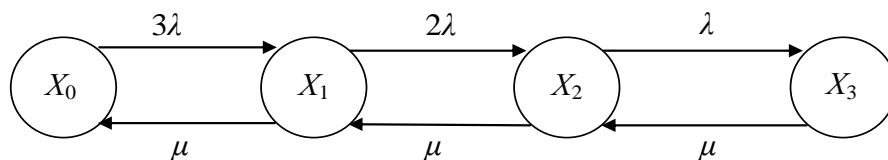


Рис. 3.17. Граф станів і переходів системи (до задачі 5)

Визначимо інтенсивності μ і λ потоків обслуговування і вимог відповідно, враховуючи, що вони повинні мати однакову розмірність, а саме:

$$\lambda = 0,5 \text{ доби}^{-1}; \mu = 3 \text{ доби}^{-1}.$$

Граничні ймовірності станів P_j , $j = \overline{0,3}$, обчислимо, розв'язуючи таку систему рівнянь [див. формули (3.22), (3.23)]:

$$\begin{cases} -3\lambda P_0 + \mu P_1 = 0, \\ -(2\lambda + \mu)P_1 + \mu P_2 + 3\lambda P_0 = 0, \\ -(\mu + \lambda)P_2 + \mu P_3 + 2\lambda P_1 = 0, \\ -\mu P_3 + \lambda P_2 = 0, \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases}$$

Перші чотири рівняння – лінійно залежні, тому одне з них вилучаємо. Підставляючи значення інтенсивності λ і μ , одержимо, що

$$\begin{cases} -1,5P_0 + 3P_1 = 0, \\ -4P_1 + 3P_2 + 1,5P_0 = 0, \\ -3P_3 + 0,5P_2 = 0, \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо, що $P_0 \approx 0,59$. Обчислимо середній час простою бази: $24 \text{ год} \cdot 0,59 = 14,16$ години на добу.

6. Клієнти, що звертаються в майстерню побутового обслуговування, створюють найпростіший потік з інтенсивністю λ . Кожного клієнта майстер обслуговує протягом випадкового інтервалу часу, який розподілено за показовим законом з параметром μ . У разі відсутності вільних майстрів клієнт не чекає, а відмовляється від обслуговування.

Визначити, скільки необхідно мати майстрів, щоб імовірність відмови клієнтові в негайному обслуговуванні не перевершувала 0,016, якщо $\mu = \lambda$.

Розв'язування

Даний об'єкт може бути описаний у вигляді системи масового обслуговування, інтенсивність джерела якої не залежить від її стану.

Позначимо через m кількість каналів обслуговування (тобто майстрів). Граф станів і переходів системи має вигляд, зображений на рис. 3.18.

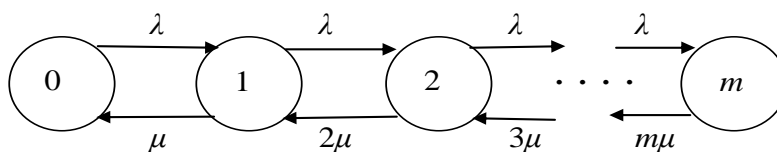


Рис. 3.18. Граф станів і переходів системи (до задачі 6)

Ймовірність відмови в обслуговуванні дорівнює ймовірності стану m , тобто P_m . Отже, необхідно знайти таке мінімальне ціле значення m , щоб виконувалася умова: $P_m \leq 0,016$. Скористаємося формулою Ерланга:

$$P_m = \frac{\frac{a^m}{m!}}{\sum_{j=0}^m \frac{a^j}{j!}}$$

Тут $a = \lambda / \mu$, тобто відповідно до нашої задачі $a = 1$. Неважко підрахувати, що коли $m = 3$, то

$$P_3 = \frac{\frac{1}{6}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 0,0625 > 0,016,$$

якщо ж $m = 4$, то

$$P_3 = \frac{\frac{1}{24}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}} \approx 0,015385 < 0,016$$

Отже, в перекурні повинні працювати чотири майстри.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Матриця переходів системи має такий вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Охарактеризувати цей ланцюг Маркова та визначити ймовірності станів системи через три кроки, якщо початковим її станом є перший.

2. Матриця переходів системи має такий вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Визначити властивості цього ланцюга Маркова й розрахувати ймовірності станів системи через три кроки, якщо початковим її станом є третій.

3. Дано таку матрицю переходів системи:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Знайти граничні ймовірності її станів.

4. Дано таку матрицю переходів системи:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Знайти граничні ймовірності її станів.

5. Граф станів і переходів системи, характерної дискретним числом станів і неперервним часом, має вигляд, зображений на рис. 3.19. На дугах графа проставлено значення інтенсивності переходів λ_{ij} . Необхідно скласти систему рівнянь для визначення процесу зміни ймовірностей станів і визначити ймовірності станів системи в умовах граничного стаціонарного режиму.

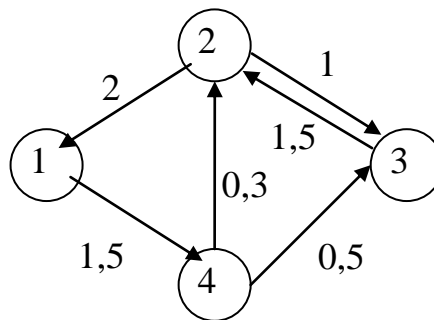


Рис. 3.19. Граф станів і переходів системи (до задачі 5)

6. Клієнти, що звертаються в майстерню побутового обслуговування, створюють найпростіший потік з інтенсивністю λ . Кожного клієнта майстер обслуговує протягом випадкового часового інтервалу, який розподілено за показовим законом з параметром μ . У разі відсутності вільних майстрів клієнт не чекає, а відмовляється від обслуговування. Визначити, скільки необхідно мати майстрів, щоб імовірність відмови клієнтові в негайному обслуговуванні не перевершувала 0,15, якщо: а) $\mu = 2\lambda$; б) $\mu = 0,5\lambda$.

Список скорочень

ВВ – випадкова величина;
ВП – випадковий процес;
ВФ – випадкова функція;
МС – математичне сподівання;
СВП – стаціонарний випадковий процес;
СВФ – стаціонарна випадкова функція.

Список літератури

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1964. – 576 с.
2. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1973. – 368 с.
3. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.
4. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей [Текст] / Б.В. Гнеденко – М.: Наука, 1969. – 400 с.
5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций [Текст] / под общей ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1965. – 632 с.

Предметний покажчик

А

Автокореляційна функція 13

Б

Білий шум 57

В

Взаємна кореляційна функція 24

Випадкова функція 4, 6

– – стаціонарна 42

Випадковий процес 7

– – характерний дискретним часом 7

– – – неперервним часом 7

– – – неперервними станами 8

Вільний рух системи 65

Властивості дисперсії ВФ 11

– кореляційної функції 15

– математичного сподівання ВФ 9

Вхідний сигнал 18

Г

Граничний стаціонарний режим 102

Д

Дискретні процеси, характерні
неперервним часом 87

– – – дискретним часом. 87

Дисперсія випадкової функції 11

Е

Елементарна ВФ 26

Ергодична властивість СВП 44

З

Задача аналізу 19

– виміру 19

– ідентифікації 20

Закон розподілу ВФ одновимірний 8

Змінні стану 86

К

Канонічне розкладання 29

Коефіцієнти розкладання 28

Координатні функції 28, 31, 49, 61

Кореляційна теорія ВФ 9

Кореляційна функція 13

Кореляційна функція нормована 43

Л

Ланцюг 87

– Маркова 88

– – незвідний 88

– – періодичний 89

– – скінченний 88

Лінійна система стаціонарна 64

М

Математичне сподівання ВФ 9

Н

Неперервні процеси, характерні
дискретним часом 87

– – – неперервним часом 87

Нестаціонарний пуассонівський
потік 98

О

Однорідний ланцюг 89

Оператор 19

– лінійний неоднорідний 21

– – однорідний 20

П

Потік подій 94

– – без післядії 95

– – марковський 101

– – найпростіший 95

– – ординарний 95

– – пальма 99

– – пуассонівський 95

– – регулярний 95

– – стаціонарний 95
Примусовий рух системи 65
Процес випадковий 7
Процеси типу «загибель -
розмноження» 106

Р

Реакція системи 18
Реалізація випадковою функції 6
Розкладання ВФ 28
– – канонічне 29
Розріз ВФ 7

С

Система рівнянь Ерланга 108
Сім'я реалізацій 6
Спектр процесу 48
Спектральна щільність ВФ 52

Ч

Частотна характеристика системи 66

Щ

Щільність потоку 95

Навчальне видання

Новицький Ігор Валерійович
Ус Світлана Альбертівна

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Навчальний посібник

Редактор О.Н. Ільченко

Підписано до друку 04.02.2011. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 7,1
Обл.-вид. арк. 9,1. Тираж 100 прим. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
в Національному гірничому університеті
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.