4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ. ТЕОРИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

В настоящем разделе представлены уравнения состояния и движения водо- и неводонасыщенных оснований в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Рассмотрены случаи обладающего свойством последействия и упругого оснований.

Для учета последействия использованы интегральные уравнения Винченцо Вольтерра второго рода [22, 81], которые на протяжении многих десятилетий успешно применялись рядом исследователей для описания поведения под нагрузкой различных материалов, в том числе, грунтов [5, 7, 25, 26, 64, 65, 66, 109, 110, 111, 127, 128, 136, 137, 138].

Рассмотренная ниже модель грунтового основания в общем случае позволяет одновременно учитывать такие виды деформаций грунтового основания.

1. Упругие.
2. Запаздывающие во времени полностью обратимые деформации (т.е. упруговязкие).
3. Запаздывающие во времени полностью необратимые деформации (т.е. вязкопластичные).
4. Запаздывающие во времени и полностью восстанавливающиеся через некоторое время после снятия нагрузки деформации, обусловленные отжатием жидкости из пор грунта (т.е. фильтрационные).

Перечисленные свойства оснований следует учитывать соответствующим выбором упругих констант и ядер ползучести грунтового скелета (см. таблицу 4.1).

Таблица 4.1

Модели грунтовых оснований

№ пп.	НАИМЕНОВАНИЕ МОДЕЛИ ОСНОВАНИЯ	НАИМЕНОВАНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ КОНСТАНТЫ ИЛИ ЯДРА ПОЛЗУЧЕСТИ				
		Упругие константы	Коэффициенты фильтрации и	Ядро ползучести разностного типа	Ядро ползучести не разностного типа	Комбинированное ядро ползучести
1	Неводонасыщенное упругое	+	-	-	-	-
	Водонасыщенное упругое	+	+	-	-	-
2	Неводонасыщенное упруговязкое	+	-	+	-	-
	Водонасыщенное упруговязкое	+	+	+	-	-
3	Неводонасыщенное вязкопластичное	+	-	-	+	+
	Водонасыщенное вязкопластичное	+	+	-	+	+
4	Неводонасыщенное упруго-вязкопластичное	+	+	-	+	+
	Водонасыщенное упруго-вязкопластичное	+	+	+	+	+

4.1. ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Для вывода уравнений равновесия и состояния водонасыщенного обладающего свойством ползучести основания в декартовой системе координат (рис. 4.1.1), положим в (2.2.7):

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{C}_{ijKL} = \tilde{G} \cdot \left(\delta_{iK} \cdot \delta_{ji} + \delta_{ij} \cdot \delta_{iK}\right) + \tilde{\lambda} \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{KL};\\
&\tilde{k}_{ij}^{\Phi} = \delta_{ij} \cdot \tilde{k}^{\Phi};\\
&\frac{1}{\tilde{\beta}_{ij}} = \frac{\delta_{ij}}{\beta};\\
&i, j, K, L = 1,2,3.
\end{aligned}\right\}, \qquad (4.1.1)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера [81]; а $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{G}$ - интегральные операторы вида (3.2); $\tilde{k}^{\Phi}$ - интегро-дифференциальный оператор вида (3.3); $\tilde{\beta}$ и β - соответственно оператор и коэффициент порового давления.

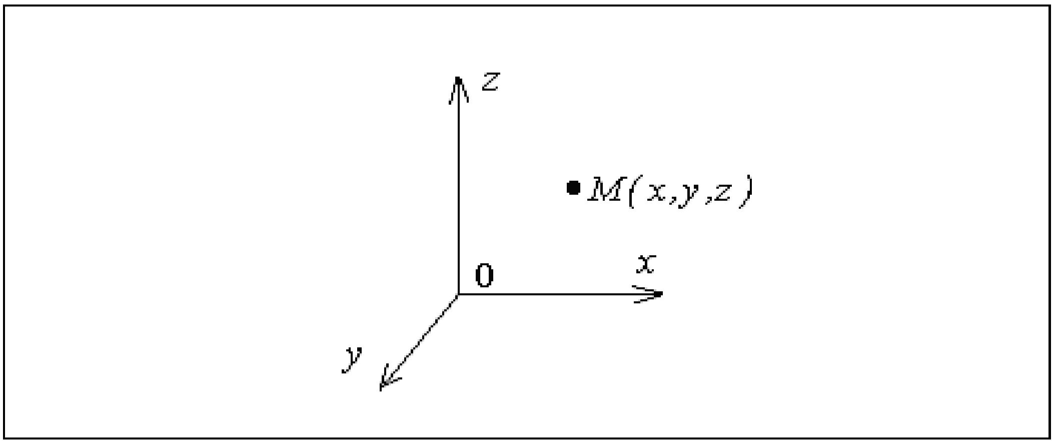

Рис. 4.1.1. К выводу уравнений равновесия и состояния в декартовой системе координат

Имеем:

$$\tilde{G}\cdot\Delta U+(\tilde{\lambda}+\tilde{G})\cdot\frac{\partial e}{\partial x}=\rho\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial x};$$

$$\tilde{G}\cdot\Delta V+(\tilde{\lambda}+\tilde{G})\cdot\frac{\partial e}{\partial y}=\rho\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial y};$$

$$\tilde{G}\cdot\Delta W+(\tilde{\lambda}+\tilde{G})\cdot\frac{\partial e}{\partial z}=\rho\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=c_v\cdot\Delta P-\frac{\beta}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{kk};$$

$$\sigma_{xx}=2\cdot\tilde{G}\cdot\varepsilon_x+\tilde{\lambda}\cdot e-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\sigma_{yy}=2\cdot\tilde{G}\cdot\varepsilon_y+\tilde{\lambda}\cdot e-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\sigma_{zz}=2\cdot\tilde{G}\cdot\varepsilon_z+\tilde{\lambda}\cdot e-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tilde{G}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right);$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\tilde{G}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right); \qquad (4.1.1)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \widetilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3 \cdot \widetilde{\lambda} + 2 \cdot \widetilde{G}) \cdot e - \frac{3}{\beta} \cdot P. \qquad (4.1.1)$$

Здесь U, V и W - перемещения в направлении координатных осей x, y и z соответственно; λ и G - константы Ламе; $\widetilde{\lambda}$ и $\widetilde{G}$ - интегральные операторы вида (3.2); $c_v = \dfrac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \gamma_w} \cdot k^{\Phi}$ - коэффициент пространственной консолидации; e - объемная относительная деформация; σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{zz} - нормальные напряжения, действующие в направлении координатных осей x, y и z соответственно; τ_{xy}, τ_{xz}, и τ_{yz} - то же касательные, действующие соответственно в плоскостях xy, xz и yz; ρ - плотность основания; P - поровое давление; c_v- коэффициент пространственной консолидации; β - коэффициент порового давления; ε_x, ε_y и ε_z - нормальные деформации в направлении осей x, y и z соответственно; γ_{xy}, γ_{xz} и γ_{yz} - деформации сдвига соответственно в плоскостях xy, xz и yz; σ_{kk} - шаровой тензор напряжений; t - время; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в декартовой системе координат.

В заключение отметим, что система уравнений (4.1.1) описывает напряженно- деформированное состояние основания в рамках **модели весомой обладающей свойством ползучести водонасыщенной среды** [66, 143, 144].

Далее положим в (4.1.1) плотность основания $\rho = 0$. В этом случае равенства эти трансформируются в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой обладающей свойством ползучести водонасыщенной среды.** Имеем:

$$\tilde{G} \cdot \Delta U + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial x};$$

$$\tilde{G} \cdot \Delta V + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \cdot \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial y};$$

$$\tilde{G} \cdot \Delta W + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \cdot \Delta P - \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk}; \qquad (4.1.2)$$

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_x + \tilde{\lambda} \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{yy} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_y + \tilde{\lambda} \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_z + \tilde{\lambda} \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}; \qquad (4.1.2)$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3 \cdot \tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}) \cdot e - \frac{3}{\beta} \cdot P. \qquad (4.1.2)$$

Здесь U, V, W, λ, G, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, e, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, ρ, P, k^{ϕ}, γ_W, β, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, σ_{kk}, t, Δ - см. пояснения к формулам (4.1.1).

Необходимо подчеркнуть, что полученная нами система уравнений (4.1.2) полностью совпадает с полученной иным способом системой [65, 66].

Далее положим в (4.1.1) поровое давление $P = 0$. В этом случае равенства (4.1.1) трансформируются в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **весомой обладающей свойством ползучести неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$\tilde{G} \cdot \Delta U + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2};$$

$$\tilde{G} \cdot \Delta V + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \cdot \frac{\partial e}{\partial y} = \rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2};$$

$$\tilde{G} \cdot \Delta W + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2};$$

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_x + \tilde{\lambda} \cdot e; \qquad (4.1.3)$$

$$\sigma_{yy} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_y + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_z + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}; \qquad (4.1.3)$$

$$\sigma_{kk} = (3 \cdot \tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}) \cdot e. \tag{4.1.3}$$

Здесь U, V, W, λ, G, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, e, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, ρ, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, σ_{kk}, t, Δ - см. пояснения к формуле (4.1.1).

Далее положим в (4.1.1) поровое давление и плотность основания $P = \rho = 0$. В этом случае они трансформируются в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой обладающей свойством ползучести неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$\tilde{G} \cdot \Delta U + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = 0;$$

$$\tilde{G} \cdot \Delta V + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \cdot \frac{\partial e}{\partial y} = 0;$$

$$\tilde{G} \cdot \Delta W + (\tilde{\lambda} + \tilde{G}) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} = 0;$$

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_x + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\sigma_{yy} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_y + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_z + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right); \tag{4.1.4}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3 \cdot \tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}) \cdot e. \qquad (4.1.4)$$

Здесь U, V, W, λ, G, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, e, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, σ_{kk}, t, Δ - см. пояснения к формуле (4.1.1).

Далее заменим в (4.1.1) интегральные операторы $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{G}$ упругими материальными константами λ и G. В этом случае они трансформируются в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **весомой упругой водонасыщенной среды**.

Имеем:

$$G \cdot \Delta U + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial\ t^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial\ P}{\partial\ x};$$

$$G \cdot \Delta V + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ y} = \rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial\ t^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial\ P}{\partial\ y};$$

$$G \cdot \Delta W + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial\ t^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial\ P}{\partial\ z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \cdot \Delta P - \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk};$$

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{yy} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right); \qquad (4.1.5)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tilde{G} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot e - \frac{3}{\beta} \cdot P. \qquad (4.1.5)$$

Здесь U, V, W, λ, G, e, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, ρ, P, c_v, γ_W, β, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, σ_{kk}, t, Δ - см. пояснения к формуле (4.1.1).

Далее положим в (4.1.5) равной нулю плотность основания ρ. В этом случае мы получим систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой упругой водонасыщенной среды**. Имеем:

$$G \cdot \Delta U + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial x};$$

$$G \cdot \Delta V + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial y};$$

$$G \cdot \Delta W + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \cdot \Delta P - \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk};$$

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{yy} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right); \qquad (4.1.6)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \cdot \left(\frac{\partial\ U}{\partial\ z} + \frac{\partial\ W}{\partial\ x} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G \cdot \left(\frac{\partial\ V}{\partial\ z} + \frac{\partial\ W}{\partial\ y} \right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot e - \frac{3}{\beta} \cdot P. \qquad (4.1.6)$$

Здесь U, V, W, λ, G, e, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, ρ, P, c_v, γ_w, β, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, σ_{kk}, t, Δ - см. пояснения к формуле (4.1.1).

Далее положим в (4.1.5) равным нулю поровое давление P. В этом случае мы получим систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние основания в рамках модели **весомой упругой неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$G \cdot \Delta U + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2};$$

$$G \cdot \Delta V + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial y} = \rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2};$$

$$G \cdot \Delta W + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2};$$

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x + \lambda \cdot e;$$

$$\sigma_{yy} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y + \lambda \cdot e;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right); \qquad (4.1.7)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot e. \qquad (4.1.7)$$

Здесь U, V, W, λ, G, e, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, ρ, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, σ_{kk}, t, Δ - см. пояснения к формуле (4.1.1).

Далее положим в (4.1.7) равной нулю плотность основания ρ. В этом случае мы получим систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой упругой неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$G \cdot \Delta U + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ x} = 0;$$

$$G \cdot \Delta V + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ y} = 0;$$

$$G \cdot \Delta W + (\lambda + G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ z} = 0;$$

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x + \lambda \cdot e;$$

$$\sigma_{yy} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y + \lambda \cdot e;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \left(\frac{\partial\ V}{\partial\ x} + \frac{\partial\ U}{\partial\ y} \right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \cdot \left(\frac{\partial\ U}{\partial\ z} + \frac{\partial\ W}{\partial\ x} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G \cdot \left(\frac{\partial\ V}{\partial\ z} + \frac{\partial\ W}{\partial\ y} \right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \qquad (4.1.8)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$e = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\sigma_{kk} = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot e. \qquad (4.1.8)$$

Здесь U, V, W, λ, G, e, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, ρ, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, σ_{kk}, Δ - см. пояснения к формуле (4.1.1).

4.2. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Ниже представлены уравнения равновесия и состояния грунтового основания в цилиндрической системе координат (рис. 4.2, [65, 66]).

Для вывода уравнений равновесия и состояния водонасыщенного грунта положим в (4.1.1)…(4.1.8):

$$\left.\begin{aligned} & z = z; \\ & r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ & \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}\right\}, \qquad (4.2.1)$$

где r - радиус - вектор, а φ - угол его поворота относительно горизонтали (рис. 1.2.1.1).

Кроме того учтем, что при осевой симметрии напряжения и перемещения в любой точке основания не зависят от координаты φ.

Далее для определенности положим, что U - это перемещение в направлении оси $0r$ и W - перемещение в направлении оси $0z$ (рис. 4.2.1).

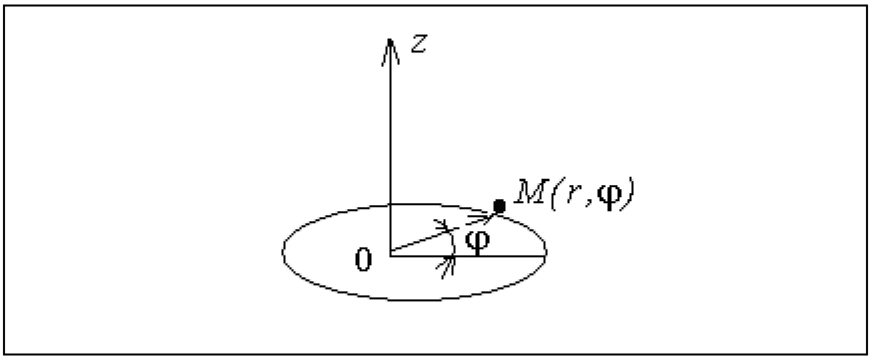

Рис. 4.2.1. К выводу уравнений равновесия и состояния в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии задачи

С учетом соотношений (4.2.1) система уравнений (4.1.1) примет вид:

$$\left(\tilde{\lambda}+2\cdot\tilde{G}\right)\cdot\frac{\partial e}{\partial r}+2\cdot\tilde{G}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial r}+\rho\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2};$$

$$\left(\tilde{\lambda}+2\cdot\tilde{G}\right)\cdot\frac{\partial e}{\partial z}-\frac{2\cdot\tilde{G}}{r}\cdot\frac{\partial(\omega\cdot r)}{\partial r}=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}+\rho\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=c_v\cdot\Delta P-\frac{\beta}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{kk};$$

$$\sigma_{zz}=2\cdot\tilde{G}\cdot\varepsilon_z+\tilde{\lambda}\cdot e-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\sigma_{rr}=2\cdot\tilde{G}\cdot\varepsilon_r+\tilde{\lambda}\cdot e-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\sigma_{\theta\theta}=2\cdot\tilde{G}\cdot\varepsilon_\theta+\tilde{\lambda}\cdot e-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\tau_{rz}=\tilde{G}\cdot\gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r=\frac{\partial U}{\partial r};$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial W}{\partial z}; \qquad (4.2.2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r}\right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \left(3\cdot\tilde{\lambda} + 2\cdot\tilde{G}\right)\cdot e - \frac{3}{\beta}\cdot P. \qquad (4.2.2)$$

Здесь U и W - перемещения соответственно в направлении координатных осей $0r$ и $0z$; ω - вращение; r и z - координаты; ρ - плотность основания; λ и G - константы Ламе; c_v - коэффициент пространственной консолидации; $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{G}$ - интегральные операторы вида (3.2); β - коэффициент порового давления; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в цилиндрической системе координат при учете осевой симметрии; σ_{zz}, σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ - нормальные напряжения; τ_{rz} - то же, касательное; σ_{kk} - шаровой тензор напряжений; P - поровое давление; ε_{zz}, ε_{rr} и $\varepsilon_{\theta\theta}$ - нормальные деформации; γ_{rz} - то же, касательная.

Уравнения (4.2.2) являются **уравнениями теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации** в рамках **модели весомой водонасыщенной обладающей свойством ползучести среды.**

Далее положим в уравнениях (4.2.2) плотность основания $\rho = 0$. В этом случае они трансформируются в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках **модели невесомой водонасыщенной обладающей свойством ползучести среды.** Имеем:

$$\left(\tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}\right) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial r} + 2 \cdot \tilde{G} \cdot \frac{\partial\ \omega}{\partial z} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial\ P}{\partial r};$$

$$\left(\tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}\right) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial z} - \frac{2 \cdot \tilde{G}}{r} \cdot \frac{\partial (\omega \cdot r)}{\partial r} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial\ P}{\partial z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \cdot \Delta P - \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk};$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_z + \tilde{\lambda} \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{rr} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_r + \tilde{\lambda} \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_\theta + \tilde{\lambda} \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\tau_{rz} = \tilde{G} \cdot \gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial\ U}{\partial\ r}; \qquad (4.2.3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \left(3 \cdot \tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}\right) \cdot e - \frac{3}{\beta} \cdot P. \qquad (4.2.3)$$

Здесь U, W, r, z, ρ, λ, G, c_v, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, β, Δ, σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{rz}, σ_{kk}, P, ε_{zz}, ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, γ_{rz} - см. пояснения к (4.2.2).

Далее положим в (4.2.2) поровое давление $P = 0$. В этом случае мы придем к системе уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **весомой обладающей свойством ползучести неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$\left(\tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}\right) \cdot \frac{\partial e}{\partial r} + 2 \cdot \tilde{G} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2};$$

$$\left(\tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}\right) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2 \cdot \tilde{G}}{r} \cdot \frac{\partial (\omega \cdot r)}{\partial r} = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \qquad (4.2.4)$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_z + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\sigma_{rr} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_r + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_\theta + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\tau_{rz} = \tilde{G} \cdot \gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \left(3 \cdot \tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}\right) \cdot e. \tag{4.2.4}$$

Здесь U, W, r, z, ρ, λ, G, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, Δ, σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{rz}, σ_{kk}, ε_{zz}, ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, γ_{rz} - см. пояснения к (4.2.2).

Далее положим в системе уравнений (4.2.2) поровое давление и плотность основания $P = \rho = 0$. В этом случае она трансформируется в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой обладающей свойством ползучести неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$\left(\tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}\right) \cdot \frac{\partial e}{\partial r} + 2 \cdot \tilde{G} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0;$$

$$\left(\tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}\right) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2 \cdot \tilde{G}}{r} \cdot \frac{\partial (\omega \cdot r)}{\partial r} = 0;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_z + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\sigma_{rr} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_r + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \cdot \tilde{G} \cdot \varepsilon_\theta + \tilde{\lambda} \cdot e;$$

$$\tau_{rz} = \tilde{G} \cdot \gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right); \qquad (4.2.5)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \left(3 \cdot \tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}\right) \cdot e. \qquad (4.2.5)$$

Здесь U, W, r, z, ρ, λ, G, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, Δ, σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{rz}, σ_{kk}, ε_{zz}, ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, γ_{rz} - см. пояснения к (4.2.2).

Далее заменим в (4.2.2) интегральные операторы $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{G}$ упругими материальными константами λ и G. В этом случае они трансформируются в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **весомой упругой водонасыщенной среды**. Имеем:

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ r} + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial\ \omega}{\partial\ z} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial\ P}{\partial\ r} + \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial\ t^2};$$

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ z} - \frac{2 \cdot G}{r} \cdot \frac{\partial(\omega \cdot r)}{\partial\ r} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial\ P}{\partial\ z} + \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial\ t^2};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \cdot \Delta P - \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\sigma_{kk};$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{rr} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_r + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P; \qquad (4.2.6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{\theta} + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\tau_{rz} = G \cdot \gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot e - \frac{3}{\beta} \cdot P. \qquad (4.2.6)$$

Здесь U, W, r, z, ρ, λ, G, c_v, β, Δ, σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{rz}, σ_{kk}, P, ε_{zz}, ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, γ_{rz} - см. пояснения к (4.2.2).

Далее положим в (4.2.6) равной нулю плотность основания ρ. В этом случае мы получим систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой упругой водонасыщенной среды**. Имеем:

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ r} + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial\ \omega}{\partial\ z} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial\ P}{\partial\ r};$$

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ z} - \frac{2 \cdot G}{r} \cdot \frac{\partial (\omega \cdot r)}{\partial\ r} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial\ P}{\partial\ z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \cdot \Delta P - \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk};$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{rr} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_r + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_\theta + \lambda \cdot e - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\tau_{rz} = G \cdot \gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r}; \qquad (4.2.7)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot e - \frac{3}{\beta} \cdot P. \quad (4.2.7)$$

Здесь U, W, r, z, ρ, λ, G, c_v, β, Δ, σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{rz}, σ_{kk}, P, ε_{zz}, ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, γ_{rz} - см. пояснения к (4.2.2).

Далее положим в (4.2.6) равным нулю поровое давление P. В этом случае мы получим систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние основания в рамках модели **весомой упругой неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ r} + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial\ \omega}{\partial\ z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial\ t^2};$$

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial\ e}{\partial\ z} - \frac{2 \cdot G}{r} \cdot \frac{\partial (\omega \cdot r)}{\partial\ r} = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial\ t^2};$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e;$$

$$\sigma_{rr} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_r + \lambda \cdot e;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_\theta + \lambda \cdot e; \quad (4.2.8)$$

$$\tau_{rz} = G \cdot \gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r};$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta;$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot e. \qquad (4.2.8)$$

Здесь U, W, r, z, ρ, λ, G, c_v, β, Δ, σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{rz}, σ_{kk}, P, ε_{zz}, ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, γ_{rz} - см. пояснения к (4.2.2).

Далее положим в (4.2.8) равной нулю плотность основания ρ. В этом случае мы придем к системе уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой упругой неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial e}{\partial r} + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0;$$

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2 \cdot G}{r} \cdot \frac{\partial (\omega \cdot r)}{\partial r} = 0;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot e;$$

$$\sigma_{rr} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_r + \lambda \cdot e;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_\theta + \lambda \cdot e;$$

$$\tau_{rz} = G \cdot \gamma_{rz};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r};$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} \right);$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r}; \tag{4.2.9}$$

$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta$;

$$\sigma_{kk} = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot e. \qquad (4.2.9)$$

Здесь U, W, r, z, ρ, λ, G, c_v, β, Δ, σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{rz}, σ_{kk}, P, ε_{zz}, ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, γ_{rz} - см. пояснения к (4.2.2).

4.3. СФЕРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В данном случае в силу центральной симметрии [81, 104, 123] напряжения, поровое давление и перемещения абсолютно не зависят от углов φ и ψ, а являются функциями только одного радиуса r (см. рисунок 4.3.1).

Кроме того, в данном случае в силу центральной симметрии имеют место такие равенства:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{r\varphi} = 0;\ \ \sigma_{r\psi} = 0;\ \ \sigma_{\varphi\psi} = 0;\ \ U_\varphi = 0; \\ U_\psi = 0;\ \ \varepsilon_{r\varphi} = 0;\ \ \varepsilon_{r\psi} = 0;\ \ \varepsilon_{\varphi\psi} = 0. \end{array}\right\}. \qquad (4.3.1)$$

Здесь $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{r\psi}$ *и* $\sigma_{\varphi\psi}$ - напряжения; U_φ *и* U_ψ - перемещения, а $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{r\psi}$ *и* $\varepsilon_{\varphi\psi}$ - деформации.

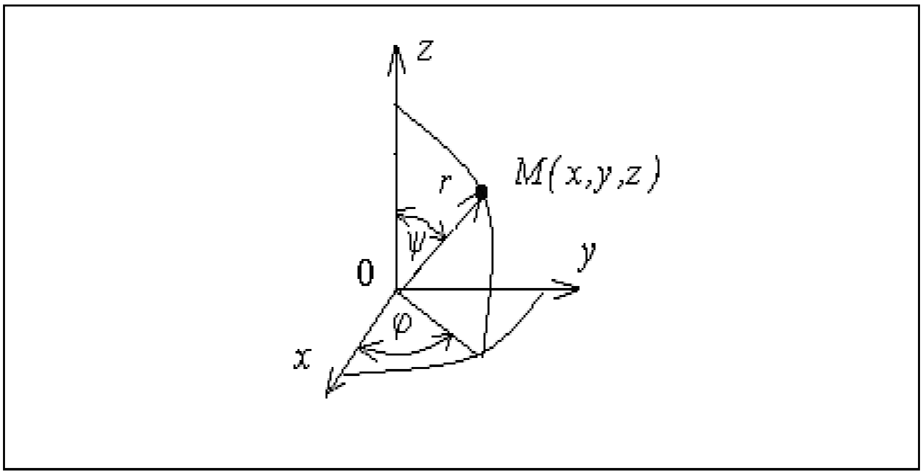

Рис. 4.3.1. К выводу уравнений равновесия и состояния в сферической системе координат.

Из рисунка 4.3.1 вытекает такая взаимосвязь между сферической и декартовой системой координат:

$$\left.\begin{aligned} z &= r \cdot \cos\psi; \\ x &= r \cdot \sin\psi \cdot \cos\varphi; \\ y &= r \cdot \sin\psi \cdot \sin\varphi; \end{aligned}\right\}. \tag{4.3.2}$$

С учетом равенств (4.3.1) и (4.3.2) из (4.1.1) имеем.

$$(\tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\left(r^2 \cdot U\right)}{\partial r}\right] = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial\ t^2}; \tag{4.3.3}$$

$$\frac{\partial\ P}{\partial\ t}=\frac{c_v}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\cdot\frac{\partial P}{\partial r}\right]-\frac{\beta}{3}\cdot\frac{\partial\ \sigma_{kk}}{\partial\ t};$$

$$\sigma_{rr}=(\tilde{\lambda}+2\cdot\tilde{G})\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2\cdot\tilde{\lambda}}{r}\cdot U-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\psi\psi}=\tilde{\lambda}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2\cdot(\tilde{\lambda}+\tilde{G})}{r}\cdot U-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial U}{\partial r};\quad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{U}{r};\quad \varepsilon_{\psi\psi}=\frac{U}{r};$$

$$e=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{\psi\psi};$$

$$\sigma_{kk}=\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{\psi\psi}. \tag{4.3.3}$$

Здесь r - координата; U - перемещение в отношении оси *Or;* σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$ *и* $\sigma_{\psi\psi}$ - напряжения; ρ, λ, G, c_v, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, β, P - см. пояснения к (4.2.1)

Уравнения (4.3.3) являются **уравнениями теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации** в рамках **модели весомой водонасыщенной обладающей свойством ползучести среды.**

Далее положим в уравнениях (4.3.3) плотность основания $\rho=0$. В этом случае они трансформируются в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках **модели невесомой водонасыщенной обладающей свойством ползучести среды.**

Имеем:

$$(\tilde{\lambda}+2\cdot\tilde{G})\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(r^2\cdot U\right)}{\partial r}\right]=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial r};$$

$$\frac{\partial\ P}{\partial\ t}=\frac{c_v}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\cdot\frac{\partial P}{\partial r}\right]-\frac{\beta}{3}\cdot\frac{\partial\ \sigma_{kk}}{\partial\ t};$$

$$\sigma_{rr}=(\tilde{\lambda}+2\cdot\tilde{G})\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2\cdot\tilde{\lambda}}{r}\cdot U-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\psi\psi}=\tilde{\lambda}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2\cdot(\tilde{\lambda}+\tilde{G})}{r}\cdot U-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial U}{\partial r};\quad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{U}{r};\quad \varepsilon_{\psi\psi}=\frac{U}{r};$$

$$e=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{\psi\psi};$$

$$\sigma_{kk}=\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{\psi\psi}. \qquad (4.3.4)$$

Здесь r, U, σ_{rr},$\sigma_{\varphi\varphi}$ *и* $\sigma_{\psi\psi}$, ρ, λ, G, c_v, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, β, P - см. пояснения к (4.3.3)

Далее положим в (4.3.3) поровое давление $P=0$. В этом случае мы придем к системе уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **весомой обладающей свойством**

ползучести неводонасыщенной среды. Имеем:

$$(\tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\left(r^2 \cdot U\right)}{\partial r}\right] = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial\ t^2};$$

$$\sigma_{rr} = (\tilde{\lambda} + 2 \cdot \tilde{G}) \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2 \cdot \tilde{\lambda}}{r} \cdot U;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} = \tilde{\lambda} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2 \cdot (\tilde{\lambda} + \tilde{G})}{r} \cdot U;$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{U}{r}; \quad \varepsilon_{\psi\psi} = \frac{U}{r};$$

$$e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\psi\psi};$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\psi\psi}. \qquad (4.3.5)$$

Здесь r, U, σ_{rr},$\sigma_{\varphi\varphi}$ *и* $\sigma_{\psi\psi}$, ρ, λ, G, c_v, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, β, P - см. пояснения к (4.3.3).

Далее положим в системе уравнений (4.3.3) поровое давление и плотность основания $P = \rho = 0$. В этом случае она трансформируется в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой обладающей свойством ползучести неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$(\tilde{\lambda}+2\cdot\tilde{G})\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(r^2\cdot U\right)}{\partial r}\right]=0;$$

$$\sigma_{rr}=(\tilde{\lambda}+2\cdot\tilde{G})\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2\cdot\tilde{\lambda}}{r}\cdot U;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\psi\psi}=\tilde{\lambda}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2\cdot(\tilde{\lambda}+\tilde{G})}{r}\cdot U;$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial U}{\partial r};\quad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{U}{r};\quad \varepsilon_{\psi\psi}=\frac{U}{r};$$

$$e=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{\psi\psi};$$

$$\sigma_{kk}=\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{\psi\psi}. \tag{4.3.6}$$

Здесь r, U, $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$ *и* $\sigma_{\psi\psi}$, ρ, λ, G, c_v, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{G}$, β, P - см. пояснения к (4.3.3).

Далее заменим в (4.3.3) интегральные операторы $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{G}$ упругими материальными константами λ и G. В этом случае они трансформируются в систему уравнений, описывающих напряженно- деформированное состояние основания в рамках модели **весомой упругой водонасыщенной среды**. Имеем:

$$(\lambda+2\cdot G)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(r^2\cdot U\right)}{\partial r}\right]=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial r}+\rho\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\ t^2}; \tag{4.3.7}$$

$$\frac{\partial\ P}{\partial\ t}=\frac{c_v}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\cdot\frac{\partial\ P}{\partial\ r}\right]-\frac{\beta}{3}\cdot\frac{\partial\ \sigma_{kk}}{\partial\ t};$$

$$\sigma_{rr}=(\lambda+2\cdot G)\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2\cdot\lambda}{r}\cdot U-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\psi\psi}=\lambda\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2\cdot(\lambda+G)}{r}\cdot U-\frac{1}{\beta}\cdot P;$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial U}{\partial r};\quad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{U}{r};\quad \varepsilon_{\psi\psi}=\frac{U}{r};$$

$$e=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{\psi\psi};$$

$$\sigma_{kk}=\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{\psi\psi}. \qquad (4.3.7)$$

Здесь r, U, σ_{rr},$\sigma_{\varphi\varphi}$ *и* $\sigma_{\psi\psi}$, ρ, λ, G, c_v, β, P - см. пояснения к (4.3.3).

Далее положим в (4.3.7) равной нулю плотность основания ρ. В этом случае мы получим систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой упругой водонасыщенной среды**. Имеем:

$$(\lambda+2\cdot G)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(r^2\cdot U\right)}{\partial r}\right]=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial r}; \qquad (4.3.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{c_v}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \cdot \frac{\partial P}{\partial r}\right] - \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t};$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2 \cdot \lambda}{r} \cdot U - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} = \lambda \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2 \cdot (\lambda + G)}{r} \cdot U - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{U}{r}; \quad \varepsilon_{\psi\psi} = \frac{U}{r};$$

$$e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\psi\psi};$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\psi\psi}. \tag{4.3.8}$$

Здесь r, U, σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\psi\psi}$,, λ, G, c_v, β, и P - см. пояснения к (4.3.3).

Далее положим в (4.3.7) равным нулю поровое давление P. В этом случае мы получим систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние основания в рамках модели **весомой упругой неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \left(r^2 \cdot U\right)}{\partial r}\right] = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \tag{4.3.9}$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2 \cdot \lambda}{r} \cdot U\,;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} = \lambda \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2 \cdot (\lambda + G)}{r} \cdot U\,;$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}\,; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{U}{r}\,; \quad \varepsilon_{\psi\psi} = \frac{U}{r}\,;$$

$$e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\psi\psi};$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\psi\psi}. \qquad (4.3.9)$$

Здесь r, U, σ_{rr},$\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\psi\psi}$,, ρ, λ, G, c_v, β, P - см. пояснения к (4.3.3).

Наконец, положим в (4.3.9) равной нулю плотность основания ρ. В этом случае мы придем к системе уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние основания в рамках модели **невесомой упругой неводонасыщенной среды**. Имеем:

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\left(r^2 \cdot U\right)}{\partial r}\right] = 0\,;$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2 \cdot \lambda}{r} \cdot U\,; \qquad (4.3.10)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} = \lambda \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2\cdot(\lambda+G)}{r} \cdot U;$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{U}{r}; \quad \varepsilon_{\psi\psi} = \frac{U}{r};$$

$$e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\psi\psi};$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\psi\psi}. \qquad (4.3.10)$$

Здесь r, U, σ_{rr},$\sigma_{\varphi\varphi}$ *и* $\sigma_{\psi\psi}$, ρ, λ, G - см. пояснения к (4.3.3).

4.4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ. ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ

В целом изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В **декартовой, цилиндрической и сферической** системах координат получены **уравнения движения и состояния** в рамках модели **весомой обладающей свойством ползучести изотропной водонасыщенной среды** и теории **взаимосвязанной** фильтрационной консолидации. Данная модель позволяет учитывать такие свойства грунта:

- упругость;
- упруговязкость;
- вязкопластичность;

- фильтрационные свойства;
- инерционные свойства.

2. Эти результаты обобщены на случаи таких моделей грунтовых оснований:

- обладающего свойством ползучести невесомого водонасыщенного;
- весомого обладающего свойством ползучести неводонасыщенного;
- невесомого, обладающего свойством ползучести неводонасыщенного;
- весомого, упругого водонасыщенного;
- невесомого упругого водонасыщенного;
- весомого упругого неводонасыщенного;
- невесомого упругого неводонасыщенного.