

2. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ОСНОВАНИИ ГРУНТОВЫХ ТЕПЛОВЫХ НАСОСОВ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. Закономерности сезонного изменения температуры на дневной поверхности основания

Для определения температурных полей внутри грунтового основания необходимо знать температуру на его верхней границе (т.н. граничные условия) [15]. Поэтому при написании настоящего раздела преследовалась цель выработать общий подход представления температуры на верхней границе грунтовой толщи в течение весенне– летне– осенне– зимнего цикла в аналитической форме.

На решение этой проблемы и направлены изложенные ниже материалы исследований.

Задача исследований была сформулирована так. Известен закон изменения во времени температуры на дневной поверхности грунтового основания $T_v(t)$ (рис.8 и 9).

При этом закономерности изменения температуры дневной поверхности основания во времени представлены в табличной форме.

Требуется представить этот закон в виде конечного ряда непрерывных функций (т.е. выполнить аппроксимацию заданной в табличном виде функции аналитическими зависимостями).

Аппроксимация выполнялась с использованием метода наименьших квадратов [4, 5].

Рассматривались ряды вида

$$\left. \begin{aligned} T_v(t) &= a_0 + \sum_{i=1}^2 a_i \cdot \sin(2 \cdot i \cdot \pi \cdot \xi) + \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \sin(2 \cdot i \cdot \pi \cdot \xi); \\ \xi &= \frac{t}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

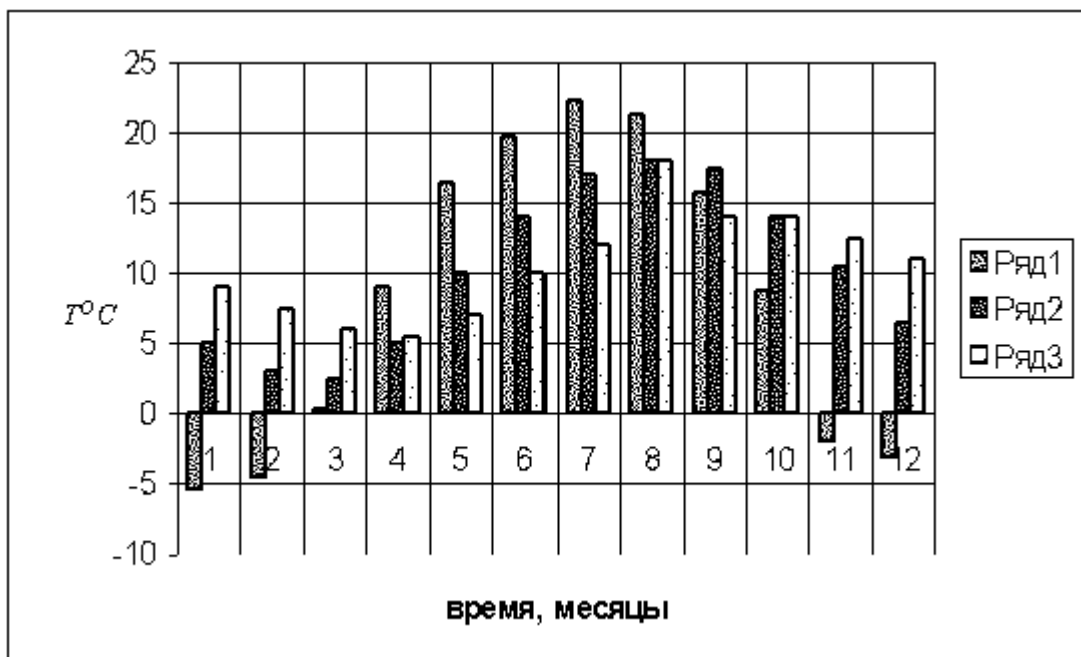


Рис. 8. Среднемесячные температуры грунтового основания в г. Днепропетровске за 2007 – 2008 годы
 Ряд 1 – на дневной поверхности; ряд 2 – на глубине 1,6 метра;
 ряд 3 – на глубине 3,2 метра

и

$$\left. \begin{aligned} T_v(t) &= \sum_{i=0}^4 a_i^* \cdot T_i^*(\xi); \\ \xi &= \frac{t}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь $T_v(t)$ – температура на дневной поверхности основания в момент времени t ; t – время в месяцах; a_i и b_i – коэффициенты аппроксимации с использованием отрезка тригонометрического ряда; a_i^* –

коэффициенты аппроксимации с использованием первых пяти смещенных полиномов Чебышева первого рода [5].

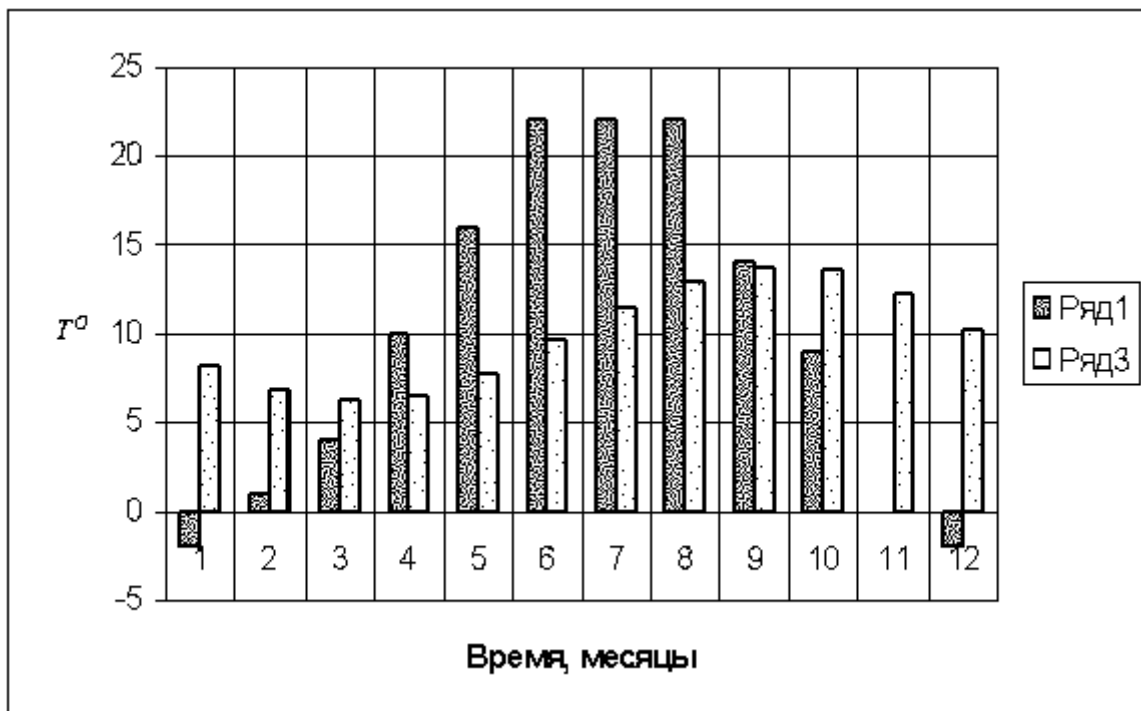


Рис. 9. Среднемесячные температуры грунтового основания в г. Львове за 2007 – 2008 годы

Ряд 1 – на дневной поверхности;
ряд 3 – на глубине 3,2 метра

В ходе аппроксимации составлялась переопределенная система линейных алгебраических уравнений, которая решалась методом наименьших квадратов [4, 5]. Полученные в ходе аппроксимации коэффициенты представлены в таблицах 8 и 9.

Для оценки точности аппроксимации нами были использованы среднее квадратичное отклонение установленных в ходе аппроксимации

температур от их фактических значений, а также максимальные относительные погрешности [4, 5].

Таблица 8

Коэффициенты аппроксимации сезонной температуры на дневной поверхности основания с использованием тригонометрических функций

Наименование города	Коэффициенты a_i			Коэффициенты b_i	
	a_0	a_1	a_2	b_1	b_2
г. Днепропетровск	8,225	-7,020	0,216	-12,637	0,175
г. Львов	9,667	-5,220	1,155	-11,607	1,667

Таблица 9

Коэффициенты аппроксимации сезонной температуры на дневной поверхности основания с использованием смещенных полиномов Чебышева первого рода

Наименование города	Коэффициенты a_i^*				
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
г. Днепропетровск	5,377	1,915	-10,393	-6,246	5,319
г. Львов	7,135	0,359	-9,513	-5,309	4,649

Кроме того, для визуальной оценки результатов аппроксимации нами были построены графики функций зависимости температуры на поверхности основания от времени $T_v(t)$ (рис. 10 и 11).



Рис. 10. Зависимости «температура дневной поверхности – время»
в г. Днепропетровске.

1 – фактическая; 2 – аппроксимация с использованием
тригонометрических
функций; 3 – то же, с использованием смещенных полиномов
Чебышева первого рода

Примечание. В качестве исходных приняты данные измерений
температуры
за 2007...2008 годы

В целом, анализ представленных в настоящем разделе материалов исследований позволил нам сделать такие выводы.

1. На глубине 1,6...3,2 метра и ниже среднемесячная температура грунтового основания в г. Днепропетровске и г. Львове не зависимо от времени года имеет строго положительное значение.

2. Температура дневной поверхности в зависимости от времени года может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

3. Получены аналитические зависимости температуры дневной поверхности грунтовых оснований от времени в районе

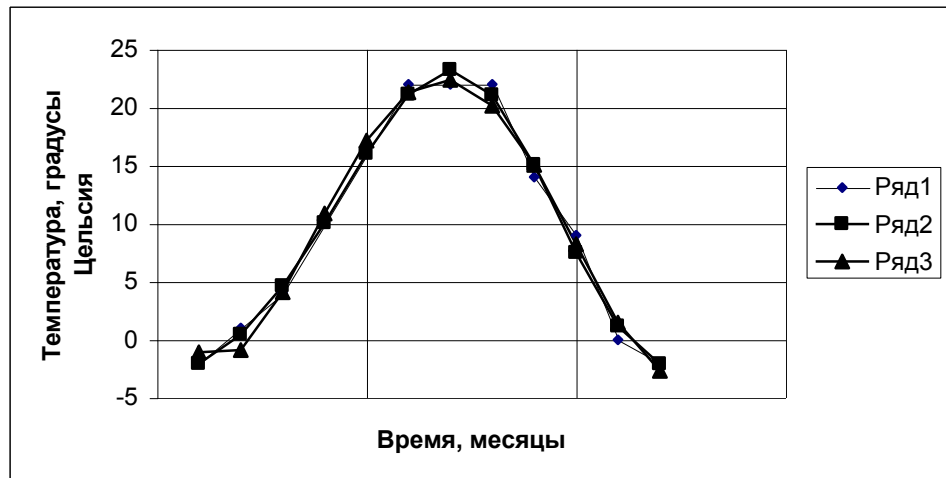


Рис. 11. Зависимости «температура дневной поверхности – время» в г. Львове.

1 – фактическая, 2 – аппроксимация с использованием тригонометрических функций; 3 – то же, с использованием смещенных полиномов Чебышева первого рода.

Примечание. В качестве исходных приняты данные измерений температуры за 2007...2008 годы.

г. Днепропетровска и г. Львова.

4. Эти данные могут быть использованы для решения таких практических задач:

- определения глубины сезонного промерзания фундаментов;
- расчета температурного режима заглубленных сооружений;
- выявления параметров грунтовых тепловых насосов.

5. Независимо от вида функций, с использованием которых выполнялась аппроксимация, расчетные значения температур имеют хорошее соответствие с их фактическими значениями

(максимальная относительная погрешность не превышает 2%, а средняя – 1%).

6. Среднегодовые температуры грунтового основания на глубине 3,2 метра в различных районах Украины весьма близки между собой (для Днепропетровска $T_{cp} = 10,5$, а для г. Львова $T_{cp} = 9,9$).

7. Для городов Днепропетровска и Львова имеет полное качественное соответствие зависимостей «температура на поверхности основания – время».

2.2. Закономерности сезонного распределения тепловых полей в грунтовом основании

При написании настоящего раздела преследовалась цель установить, насколько точно можно (и можно ли вообще) выполнить моделирование температурных полей в грунтовой толще на протяжении годичного цикла изменения температур.

Эта задача является базовой при теплотехнических расчетах грунтовых оснований тепловых насосов в случае их использования в качестве носителя, накопителя, преобразователя и источника тепловой энергии.

Данное утверждение вполне справедливо, поскольку для учета влияния на температурный режим основания коллектора грунтового теплового насоса обязательно необходимо иметь представление об изменении в основании температурных полей и тепловых потоков в течение весенне – летне – осенне – зимнего цикла.

На решение очерченной проблемы и направлены изложенные ниже материалы теоретических исследований.

Задача исследований была сформулирована так. Известно изменение

во времени температуры $T_{v1}(t)$ на верхней (при $z=0$) границе грунтового основания (рис. 12). Известно распределение температуры в основании по глубине $T_0(z)$ в момент времени $t=0$.

Известны плотность ρ и теплофизические характеристики основания (т.е. его удельная теплоемкость c_p и коэффициент теплопроводности λ).

Требуется определить теоретический закон распределения температуры в грунтовом основании и далее – выяснить, на сколько теоретические закономерности распределения температурных полей по глубине грунтового основания отличаются от их фактических величин.

С физической точки зрения такая картина имеет место на вертикали, проходящей через центр неограниченного в плане основания [12, 13, 14].

С математической точки зрения задача исследований сводится к решению уравнения теплопроводности вида [6, 14]:

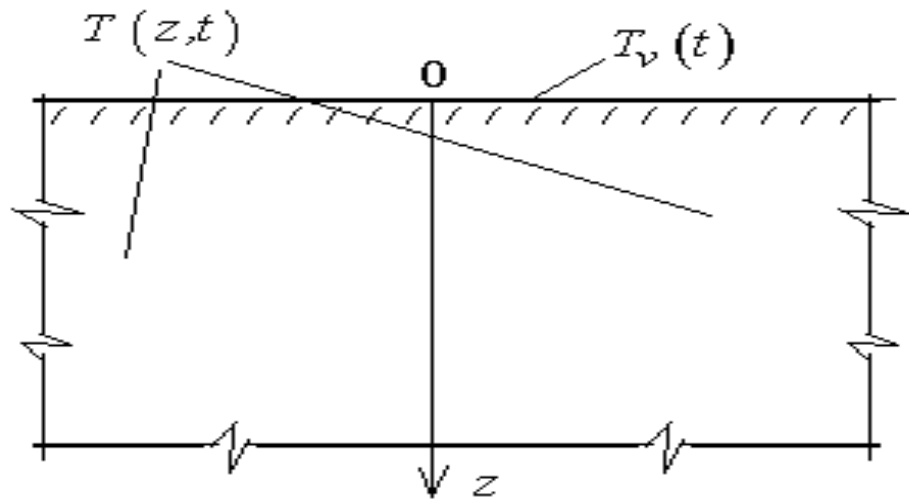


Рис. 12. К определению температурных полей в основании

$$a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

при выполнении начального и граничных условий вида:

$$\left. \begin{aligned} T(0, z) = T_0(z) = T_0 = \text{const}; \\ T(t, 0) = T_v(t); \\ T(t, \infty) < \infty; \\ z \in (0, \infty). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь $T_v(t)$ – температура на верхней границе основания, которую следует определять по формуле (6) при учете данных таблицы 9, а

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}. \quad (9)$$

Решение (7) с учетом (8) и (9) удобно искать с использованием одностороннего преобразования Лапласа по временной переменной "t" [4, 20]. Из (7) и начального условия (верхнее уравнение системы (8)) имеем:

$$\frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{\omega}{a} \cdot T = -\frac{1}{a} \cdot T_0. \quad (10)$$

При этом граничные условия (8) в области изображений по временной переменной "t" примут вид:

$$\left. \begin{aligned} T(\omega, 0) = T_v(\omega); \\ T(\omega, \infty) < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь ω – параметр одностороннего преобразования Лапласа по временной переменной "t".

Решение (10) с учетом граничных условий (11) имеет вид:

$$T = T_w \cdot e^{\left(-z \cdot \sqrt{\frac{\omega}{a}}\right)} + \frac{T_0}{\omega} \cdot \left[1 - e^{\left(-z \cdot \sqrt{\frac{\omega}{a}}\right)} \right], \quad (12)$$

а оригинал (12) имеет вид:

$$T(z, t) = T_0 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}}\right) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{T_v(\xi)}{\sqrt{(t-\xi)^3}} \cdot \exp\left[-\frac{z^2}{4 \cdot a \cdot (t-\xi)}\right] \cdot d\xi \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где ξ – имеющий размерность времени параметр.

Далее подставим в (13) полученное нами ранее (раздел 2.1, формула (6)) значение температуры на границе основания и выполним процедуру интегрирования. Имеем:

$$T(z, t) = T_0 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}}\right) + \left. \begin{aligned} &+ \sum_{i=0}^4 a_i \cdot \sum_{j=0}^i b_j \cdot \mathfrak{F}_j(z, t). \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Здесь:

$$z_1 = \frac{z}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}};$$

$$z_2 = (z_1)^2;$$

$$\mathfrak{G}_0(z, t) = \operatorname{erfc}(z_1);$$

$$\mathfrak{G}_1(z, t) = \frac{1}{12} \cdot \left[t \cdot \operatorname{erfc}(z_1) + \frac{z^2}{2 \cdot a} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) - \frac{z \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{\pi \cdot a}} \cdot \exp(-z_2) \right];$$

$$\mathfrak{G}_2(z, t) = \frac{1}{12^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot t^2 \cdot \operatorname{erfc}(z_1) + \frac{2 \cdot t \cdot z^2}{a} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) + \\ + \frac{z^4}{6 \cdot a^2} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) - \left[\begin{array}{l} \frac{10 \cdot z \cdot \sqrt{t^3}}{3 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} + \\ \frac{z^3 \cdot \sqrt{t}}{3 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \pi}} \end{array} \right] \cdot \exp(-z_2) \end{array} \right\};$$

$$\mathfrak{G}_3(z, t) = \frac{1}{12^3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot t^3 \cdot \operatorname{erfc}(z_1) + \frac{9 \cdot t^2 \cdot z^2}{a} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) + \frac{3 \cdot t \cdot z^4}{2 \cdot a^2} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) \\ + \frac{z^6}{20 \cdot a^3} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) - \left[\begin{array}{l} \frac{66 \cdot z \cdot \sqrt{t^5}}{5 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} + \\ \frac{14 \cdot z^3 \cdot \sqrt{t^3}}{5 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \pi}} + \\ \frac{z^5 \cdot \sqrt{t}}{10 \cdot \sqrt{a^5 \cdot \pi}} \end{array} \right] \cdot \exp(-z_2) \end{array} \right\};$$

$$\mathfrak{G}_4(z, t) = \frac{1}{12^4} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 24 \cdot t^4 \cdot \operatorname{erfc}(z_1) + \frac{48 \cdot t^2 \cdot z^3}{a} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) + \\ \frac{12 \cdot t^2 \cdot z^4}{a^2} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) + \\ + \frac{4 \cdot t \cdot z^6}{5 \cdot a^3} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) + \frac{z^8}{70 \cdot a^4} \cdot \operatorname{erfc}(z_1) - \\ \left[\frac{2232 \cdot z \cdot \sqrt{t^7}}{35 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} + \frac{148 \cdot z^3 \cdot \sqrt{t^5}}{7 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \pi}} + \right. \\ \left. \frac{54 \cdot z^5 \cdot \sqrt{t^3}}{35 \cdot \sqrt{a^5 \cdot \pi}} + \frac{z^7 \cdot \sqrt{t}}{35 \cdot \sqrt{a^7 \cdot \pi}} \right] \cdot \exp(-z^2) \end{array} \right\}.$$

Здесь a_i – эмпирические коэффициенты, которые следует принимать по таблице 9; b_i – коэффициенты смешенных полиномов Чебышева первого рода; $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$; а $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл вероятности [4, 5].

Для практических расчетов важно иметь зависимость температуры основания от времени и координаты при ступенчатом изменении температуры на поверхности основания. Это объясняется тем, что в справочной литературе и сводках гидрометеорологического центра Украины зависимость температуры воздуха от времени дается посуточно, подекадно, помесечно и т.д.

Представим ступенчатое изменение температуры с использованием разности функций Хевисайда в виде:

$$\Delta T(t) = \Delta T \cdot [U(t - t_1) - U(t - t_2)];$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ t_2 > t_1. \end{array} \right\}$$

Далее допустим, что известны среднемесячные значения температуры на границе основания и требуется с использованием

ступенчатых функций аппроксимировать ее изменение в течение одного года. Имеем:

$$T_v(t) \approx \sum_{i=1}^{11} T_{vi} \cdot [U(t-i) - U(t-i-1)] \quad (15)$$

Здесь $t = 1, 2, 3, \dots, 12$ – номер месяца.

Далее подставим полученное таким образом выражение для температуры на границе основания в (15) и выполним процедуру интегрирования. Имеем:

$$T(z, t) = T_0 \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right) + \left. \sum_{i=1}^{11} T_{vi} \left\langle \operatorname{erfc} \left[\frac{z}{\sqrt{a \cdot (t-i)}} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{z}{\sqrt{a \cdot (t-i-1)}} \right] \right\rangle \right\}.$$

Далее для произвольного интервала времени $\Delta t = t_i - t_{i+1}$ и произвольного значения температуры на этом интервале времен $T_{v,i}$ найдем по индукции:

$$T(z, t) = T_0 \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right) + \left. \sum_{i=1}^{11} T_{v,i} \left\langle \operatorname{erfc} \left[\frac{z}{\sqrt{a \cdot (t-t_i)}} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{z}{\sqrt{a \cdot (t-t_{i+1})}} \right] \right\rangle \right\} \quad (16)$$

В ходе численного эксперимента варьировались плотность грунтового основания, его теплоемкость и коэффициент теплопередачи [2, 5, 6, 7, 14]. Принятые в ходе численного эксперимента значения плотности,

удельной теплоемкости и теплопроводности основания представлены в таблице 10.

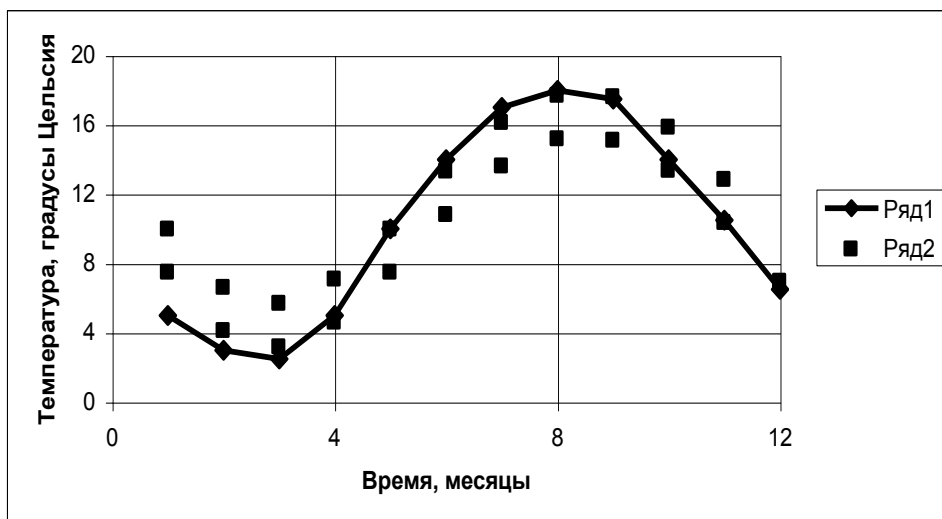
Таблица 10

Принятые в ходе численного эксперимента значения теплофизических свойств основания

№ пп.	Удельный вес γ $\frac{кН}{м^3}$	Удельная теплоемкость c_p , $\frac{кДж}{кг \cdot град}$	Коэффициент теплопроводности λ , $\frac{вт}{м \cdot град}$
1	15,50...20,00	0,50...2,00	0,50...2,00

Температурный цикл

При этом в качестве начальной температуры (т.е. температуры при



$t = 0$) были приняты ее среднегодовые значения (напомним, что согласно [13, 14] для г. Днепропетровска $T_{cp} = 10,5$, а для г. Львова $T_{cp} = 9,9$).

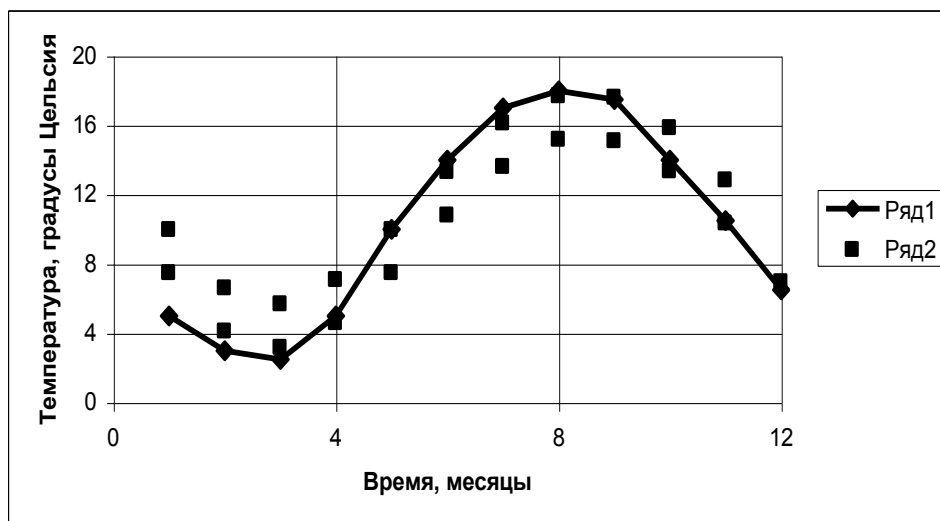


Рис. 13. Изменение температуры в грунтовом основании
г. Днепропетровск. Глубина $z=1,6$ м
1 – данные гидрометцентра, 2 – расчет

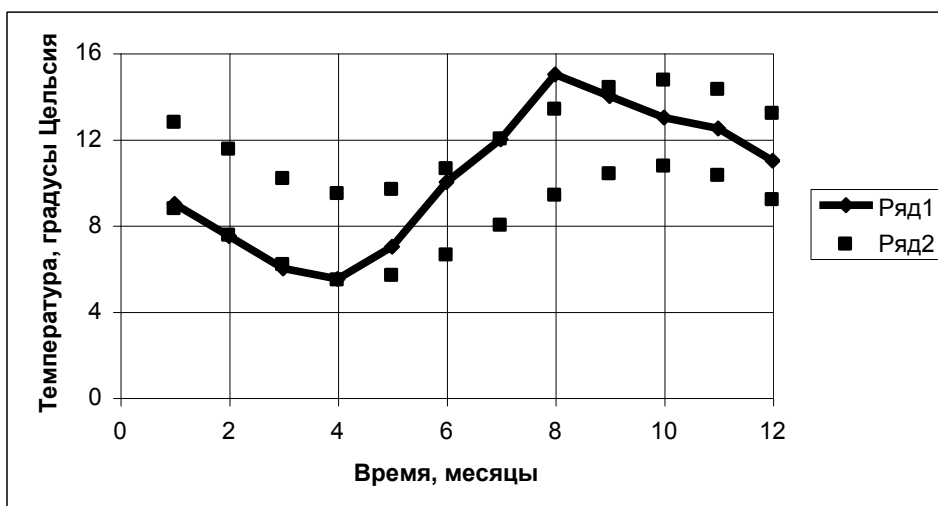


Рис. 14. Изменение температуры в грунтовом основании г. Днепропетровск. Глубина $z=3,2$ м
1 – данные гидрометцентра, 2 – расчет

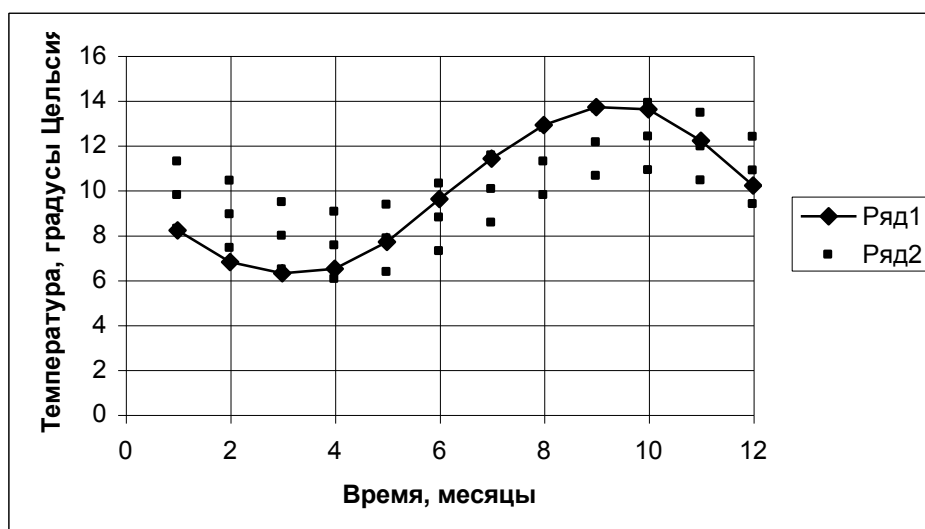


Рис. 15. Изменение температуры в грунтовом основании г. Львов. Глубина $z=3,2$ м
1 – данные гидрометцентра, 2 – расчет

Результаты расчета представлены на рисунках 13...15. Их анализ позволил нам сделать такие выводы.

1. Получено аналитическое решение задачи об изменении температурного поля в грунтовом основании под воздействием изменения температуры на дневной поверхности основания.

2. Показано что расчетные значения температур на разных глубинах имеют хорошее соответствие с их фактическими (т.е. измеренными) значениями.

В целом, нами был сделан вывод о том, что изложенный в настоящем разделе подход вполне приемлем для прогнозирования температурных полей внутри грунтовых оснований, обусловленных изменением температуры на их границе.

2.3. Закономерности изменения тепловой энергии в основании плоского коллектора теплового насоса

При написании настоящего раздела преследовалась цель выполнить теоретические исследования процесса изменения тепловой энергии в грунтовом основании плоского коллектора теплового насоса [1, 12, 14]. Для достижения поставленной цели достаточно рассмотреть одномерную задачу.

Задача исследований была сформулирована так.

1. Известна температура $T_{v1}(t)$ на верхней границе грунтового основания (рис.16).

2. Известно распределение температуры в основании по глубине $T_0(z)$ в момент времени $t = 0$.

3. Известны плотность ρ и теплофизические характеристики основания (т.е. его удельная теплоемкость c_p и коэффициент теплопроводности λ) .

4. На глубине h расположен коллектор теплового насоса в котором постоянно поддерживается температура $T_w(t)$.

5. Требуется определить, на сколько за некоторый расчетный период времени t_0 изменится тепловая энергия основания.

Представленная выше постановка задачи соответствует распределению температурного поля на вертикали, проходящей через центр неограниченного в плане плоского параллельного земной поверхности коллектора [12, 14].

Согласно [6, 14], с математической точки зрения задача исследований сводится к решению системы уравнений теплопроводности вида:

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \frac{\partial T_1}{\partial t} &= 0; \\ a \cdot \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \frac{\partial T_2}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

при выполнении начального и граничных условий, а также условий «склейки»:

$$\left. \begin{aligned} T_1(0, z) &= T_0 = \text{const}, \quad z \in (0, h); \\ T_2(0, z) &= T_0 = \text{const}, \quad z \in (h, \infty); \\ T_1(t, 0) &= T_v(t); \\ T_1(t, h) - T_2(t, h) - T_w(t) &= 0; \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1(t,h) - \frac{\partial}{\partial z} T_2(t,h) = 0; \\ T_2(t,\infty) < \infty. \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

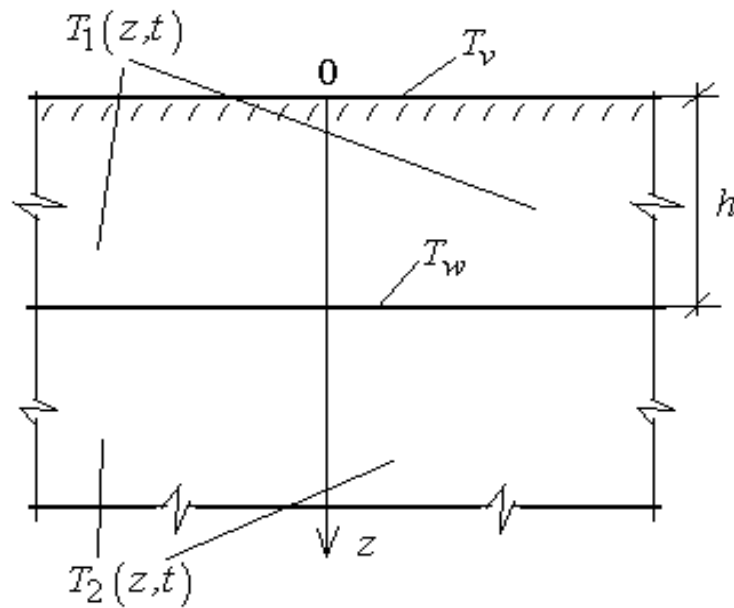


Рис. 16. К определению тепловой энергии основания

Для того чтобы определить количество тепловой энергии, извлеченной из грунтового основания за некоторый промежуток времени "t", следует вычислить интеграл вида

$$Q = \lim_{z \rightarrow h} \left\{ \int_0^t \lambda(z) \cdot \frac{\partial T(z,\xi)}{\partial z} \cdot d\xi \right\}. \quad (19)$$

Здесь Q – либо "закачанная" в основание за некоторое время t тепловая энергия при работе теплового насоса в режиме кондиционирования, либо "извлеченная" из него за время t тепловая энергия при работе теплового насоса в режиме отопительного прибора, отнесенная к одному квадратному метру коллектора; $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$.

Решение рассматриваемой задачи в изложенной выше постановке по существу является решением двух задач:

–задачи об определении температурного поля в грунтовом основании, обусловленном изменением температуры на его границе (эта задача была рассмотрена в разделе 2.2);

–задачи об определении температурного поля в грунтовом основании, обусловленном функционированием плоского грунтового коллектора теплового насоса.

На наш взгляд, для адекватного решения проблемы достаточно решить вторую задачу, а окончательный результат получить с использованием принципа суперпозиции (при этом следует использовать полученные ранее в разделе 2.2. результаты).

Для того чтобы исключить из решения задачи тепловые поля, обусловленные изменением температуры на границе основания, следует в системе уравнений (18) положить равными нулю температуру в начальный момент времени (т.е. при $t=0$) и температуру на верхней границе основания. В этой связи имеем:

$$\left. \begin{array}{l} T_1(0, z) = 0; \quad z \in (0, h); \\ T_2(0, z) = 0, \quad z \in (h, \infty); \end{array} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned}
 T_1(t,0) &= 0; \\
 T_1(t,h) - T_2(t,h) - T_w(t) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial z} T_1(t,h) - \frac{\partial}{\partial z} T_2(t,h) &= 0; \\
 T_2(t,\infty) &< \infty.
 \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Далее поступим так, как это было сделано ранее (раздел 2.2)– применим к (17) и (20) одностороннее преобразование Лапласа по временной переменной, решим полученную таким образом систему дифференциальных уравнений в обыкновенных производных и далее найдем оригинал полученного таким образом выражения. Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 a \cdot \frac{d^2 T_1}{dz^2} - \omega \cdot T_1 &= 0 \text{ при } z \in (0,h); \\
 a \cdot \frac{d^2 T_2}{dz^2} - \omega \cdot T_2 &= 0 \text{ при } z \in (h,\infty).
 \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Далее применим одностороннее преобразование Лапласа по временной переменной к (20). Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 T_1(\omega,0) &= 0; \\
 T_1(\omega,h) - T_2(\omega,h) - T_w(t) &= 0; \\
 \frac{d}{dz} T_1(\omega,h) - \frac{d}{dz} T_2(\omega,h) &= 0; \\
 T_2(\omega,\infty) &< \infty.
 \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

Решение (21) с учетом (22) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
 T_1 &= \frac{Tw(\omega)}{2} \cdot \left\langle \begin{array}{l} \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot (h-z)\right] - \\ -\exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot (h+z)\right] \end{array} \right\rangle \text{ при } z \in (0, h); \\
 T_2 &= -\frac{Tw(\omega)}{2} \cdot \left\langle \begin{array}{l} \exp\left[\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot (z-h)\right] + \\ +\exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot (h+z)\right] \end{array} \right\rangle \text{ при } z \in (h, \infty).
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Оригинал (23) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
 T_1 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \frac{Tw(\tau)}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot (t-\tau)}} \cdot \left\langle \begin{array}{l} (h-z) \cdot \exp\left[-\frac{(h-z)^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}\right] - \\ -(h+z) \cdot \exp\left[-\frac{(h+z)^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}\right] \end{array} \right\rangle \cdot d\tau \\
 \text{при } z &\in (0, h); \\
 T_2 &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^t \frac{Tw(\tau)}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot (t-\tau)}} \cdot \left\langle \begin{array}{l} (z-h) \cdot \exp\left[-\frac{(z-h)^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}\right] - \\ +(h+z) \cdot \exp\left[-\frac{(h+z)^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}\right] \end{array} \right\rangle \cdot d\tau \\
 \text{при } z &\in (h, \infty).
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Здесь τ – имеющий размерность времени параметр.

Если зависимость температуры плоского коллектора теплового насоса можно представить в виде ступенчатой функции вида

$$T_w(t) = \sum_{i=1}^n T_{w,i} \cdot [U(t-t_i) - U(t-t_{i+1})], \quad (25)$$

где $U(t)$ – функция Хевисайда, $t_i > t_{i+1}$ – некоторые значения времени а $T_{w,i}$ – среднее значение температуры плоского коллектора теплового насоса на интервале времен $t \in (t_i, t_{i+1})$, решение (24) имеет вид:

$$T_1 = \sum_{i=1}^n T_{wi} \cdot \left\{ \left. \begin{aligned} & \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{(h-z)}{2 \cdot \sqrt{a \cdot (t-t_i)}} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{(h-z)}{2 \cdot \sqrt{a \cdot (t-t_{i+1})}} \right] \right\} - \\ & - \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{(h+z)}{2 \cdot \sqrt{a \cdot (t-t_i)}} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{(h+z)}{2 \cdot \sqrt{a \cdot (t-t_{i+1})}} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } z \in (0, h);$$

$$T_2 = - \sum_{i=1}^n T_{wi} \cdot \left\{ \left. \begin{aligned} & \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{(z-h)}{2 \cdot \sqrt{a \cdot (t-t_i)}} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{(z-h)}{2 \cdot \sqrt{a \cdot (t-t_{i+1})}} \right] \right\} + \\ & + \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{(h+z)}{2 \cdot \sqrt{a \cdot (t-t_i)}} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{(h+z)}{2 \cdot \sqrt{a \cdot (t-t_{i+1})}} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } z \in (h, \infty). \quad (26)$$

Здесь $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ – дополнительный интеграл вероятности [4].

Далее учтем фактические граничные и начальные условия (18). Для

получения окончательного решения в общей форме найдем сумму (13) и (24). Имеем:

$$\begin{aligned}
 T_1 = & \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \frac{T_w(\tau)}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot (t - \tau)}} \cdot \left\langle \begin{array}{l} (h - z) \cdot \exp\left[-\frac{(h - z)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)}\right] - \\ - (h + z) \cdot \exp\left[-\frac{(h + z)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)}\right] \end{array} \right\rangle \cdot d\tau + \\
 & + T_0 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{a \cdot t}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{T_v(\xi)}{\sqrt{(t - \xi)^3}} \cdot \exp\left[-\frac{z^2}{4 \cdot a \cdot (t - \xi)}\right] \cdot d\xi, \\
 & \text{при } z \in (0, h); \\
 T_2 = & -\frac{1}{2} \cdot \int_0^t \frac{T_w(\tau)}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot (t - \tau)}} \cdot \left\langle \begin{array}{l} (z - h) \cdot \exp\left[-\frac{(z - h)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)}\right] - \\ + (h + z) \cdot \exp\left[-\frac{(h + z)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)}\right] \end{array} \right\rangle \cdot d\tau + \\
 & + T_0 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{a \cdot t}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{T_v(\xi)}{\sqrt{(t - \xi)^3}} \cdot \exp\left[-\frac{z^2}{4 \cdot a \cdot (t - \xi)}\right] \cdot d\xi \\
 & \text{при } z \in (h, \infty).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Далее найдем количество тепловой энергии, отобранной из грунтового основания с использованием плоского коллектора теплового насоса. Для этой цели используем решение (27) и интеграл (19). Имеем:

$$Q = \lambda \cdot T_0 \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \exp\left[-\frac{h^2}{4 \cdot a \cdot t}\right] - \frac{h}{a} \cdot \operatorname{erfc}\left[\frac{h}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}}\right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{T_w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h^2}{a \cdot (t-\tau)} \right] \right\} \cdot d\tau - \\
& - \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{T_v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h^2}{a \cdot (t-\tau)} \right] \right\} \cdot d\tau.
\end{aligned} \tag{28}$$

Если, начиная с некоторого момента времени $t_0 \neq 0$, тепловой насос работает в режиме отопления здания (сооружения), а температура грунта вблизи грунтового коллектора изменяется по закону $T_w^o(t)$, то извлеченную из основания тепловую энергию следует определять по формуле:

$$\begin{aligned}
Q & = \lambda \cdot T_0 \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \exp \left[-\frac{h^2}{4 \cdot a \cdot t} \right] - \frac{h}{a} \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right] \right\} + \\
& + U(t-t_0) \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_{t_0}^t \frac{T_w^o(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h^2}{a \cdot (t-\tau)} \right] \right\} \cdot d\tau \\
& - \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{T_v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h^2}{a \cdot (t-\tau)} \right] \right\} \cdot d\tau.
\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь $U(t-t_0)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда [4].

Если, начиная с некоторого момента времени $t_k \neq 0$, тепловой насос работает в режиме кондиционирования здания (сооружения), а температура грунта вблизи грунтового коллектора изменяется по закону $T_w^k(t)$, то извлеченную из основания тепловую энергию основания следует

определять по формуле:

$$\begin{aligned}
 Q = & \lambda \cdot T_0 \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \exp \left[-\frac{h^2}{4 \cdot a \cdot t} \right] - \frac{h}{a} \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right] \right\} + \\
 & + U(t - t_k) \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_{t_k}^t \frac{T_w^k(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \cdot \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h^2}{a \cdot (t - \tau)} \right] \right\} \cdot d\tau - \\
 & - \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_k^t \frac{T_v(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \cdot \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h^2}{a \cdot (t - \tau)} \right] \right\} \cdot d\tau. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Наконец, если тепловой насос работает в реверсном режиме, то извлеченную из основания тепловую энергию основания следует определять по формуле:

$$\begin{aligned}
 Q = & \lambda \cdot T_0 \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \exp \left[-\frac{h^2}{4 \cdot a \cdot t} \right] - \frac{h}{a} \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right] \right\} + \\
 & + U(t - t_k) \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_{t_0}^t \frac{T_w^k(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \cdot \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h^2}{a \cdot (t - \tau)} \right] \right\} \cdot d\tau \\
 & + U(t - t_0) \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_{t_0}^t \frac{T_w^o(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \cdot \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h^2}{a \cdot (t - \tau)} \right] \right\} \cdot d\tau \\
 & - \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{T_v(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \cdot \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h^2}{a \cdot (t - \tau)} \right] \right\} \cdot d\tau. \tag{31}
 \end{aligned}$$

Изложенные выше материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. Получено теоретическое замкнутое решение задачи об изменении тепловой энергии в грунтовом основании теплового насоса с плоским грунтовым коллектором.

2. Это решение позволяет охватить такие важные практические случаи:

–функционирование теплового насоса с плоским грунтовым коллектором в режиме отопительного прибора;

–функционирование теплового насоса с плоским грунтовым коллектором в режиме кондиционера;

–функционирование теплового насоса с плоским грунтовым коллектором в режиме в реверсном режиме.

2.4. Обсуждение результатов исследований. Выводы по разделу

Изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам установить следующее.

1. На глубине 1,6...3,2 метра и ниже среднемесячная температура грунтового основания в г. Днепропетровске и г. Львове не зависимо от времени года имеет строго положительное значение.

2. Температура дневной поверхности в зависимости от времени года может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

3. Получены аналитические зависимости температуры дневной поверхности грунтовых оснований от времени в районе г. Днепропетровска и г. Львова.

4. Эти данные могут быть использованы для решения таких практических задач:

- определения глубины сезонного промерзания фундаментов;
- расчета температурного режима заглубленных сооружений;
- выявления параметров грунтовых тепловых насосов.

5. Независимо от вида функций, с использованием которых выполнялась аппроксимация, расчетные значения температур имеют хорошее соответствие с их фактическими значениями (максимальная относительная погрешность не превышает 2%, а средняя – 1%).

6. Среднегодовые температуры грунтового основания на глубине 3,2 метра в различных районах Украины весьма близки между собой (для г. Днепропетровска $T_{cp} = 10,5$, а для г. Львова $T_{cp} = 9,9$).

7. Для городов Днепропетровска и Львова имеет полное качественное соответствие зависимостей «температура на поверхности основания – время».

8. Получено аналитическое решение задачи об изменении температурного поля в грунтовом основании под воздействием изменения температуры на дневной поверхности основания.

9. Показано, что расчетные значения температур на разных глубинах имеют хорошее соответствие с их фактическими (т.е. измеренными) значениями.

10. Получено теоретическое замкнутое решение задачи об изменении тепловой энергии в грунтовом основании теплового насоса с плоским грунтовым коллектором.

11. Это решение позволяет охватить такие важные практические случаи:

- функционирование теплового насоса с плоским грунтовым коллектором в режиме отопительного прибора;
- функционирование теплового насоса с плоским грунтовым коллектором в режиме кондиционера;
- функционирование теплового насоса с плоским грунтовым коллектором в режиме в реверсном режиме.