

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для решения многих практических задач механики используют такой прием – вначале находят решение задачи для элементарной области (как правило, точечной), а после этого с использованием принципа суперпозиции отыскивают решения для областей со сложной конфигурацией. Решения элементарных задач, которые являются основой для решения более сложных, называют **фундаментальными** [19].

Примером фундаментальных задач являются задачи Буссинеска (т.е. задача о приложенной к верхней границе грунтового основания вертикальной сосредоточенной силе), Черрути (т.е. задача о приложенной к верхней границе грунтового основания горизонтальной сосредоточенной силе) и им подобные.

В настоящем разделе представлены полученные решения таких фундаментальных задач, позволяющих рассчитывать температурные поля в основании коллекторов тепловых насосов:

1. Задача об определении температурного поля от переменного во времени точечного источника тепла в полярной системе координат с центральной симметрией (такие условия нагрева имеют место в основании, в котором на значительной глубине расположен бесконечный U-образный коллектор теплового насоса).

2. Задача об определении температурного поля от переменного во времени точечного источника температуры в цилиндрической системе координат с осевой симметрией. Такие условия нагрева имеют место в основании, в котором расположен параллельный земной поверхности плоский коллектор теплового насоса.

3. Задача об определении температурного поля от переменного во времени точечного источника тепла в цилиндрической системе координат с осевой симметрией. Такие условия нагрева имеют место в основании, в

котором на некоторой глубине расположен U-образный коллектор теплового насоса конечной длины.

3.1. Полярная система координат с центральной симметрией.

Температурное поле от точечного источника теплоты

При написании настоящего раздела преследовалась цель выполнить теоретические исследования процесса изменения тепловой энергии в грунтовом основании U – образного коллектора теплового насоса [1, 14].

Выше было показано, что температурное поле в основании можно представить в виде суперпозиции двух тепловых полей – поля, обусловленного сезонным изменением температуры на дневной поверхности основания (решение этой задачи представлено в разделе 2.2) и поля, причиной появления которого является теплообмен между U-образным коллектором и грунтовым основанием.

Вторая задача исследований была сформулирована так.

1. В центре плоскости расположен точечный источник тепла $q_w(t)$, с использованием которого осуществляется нагрев основания (рис. 17).
2. В начальный момент времени (т.е. при $t \rightarrow 0$) температура основания равна нулю.
3. На значительном удалении от источника нагрева (т.е. на бесконечности) температура основания убывает до нуля.
4. Известны плотность ρ и теплофизические характеристики слагающего основание грунта (т.е. его удельная теплоемкость c_p и коэффициент теплопроводности λ).
5. Требуется рассчитать температурное поле в окрестности источника нагрева в некоторый момент времени " t ".

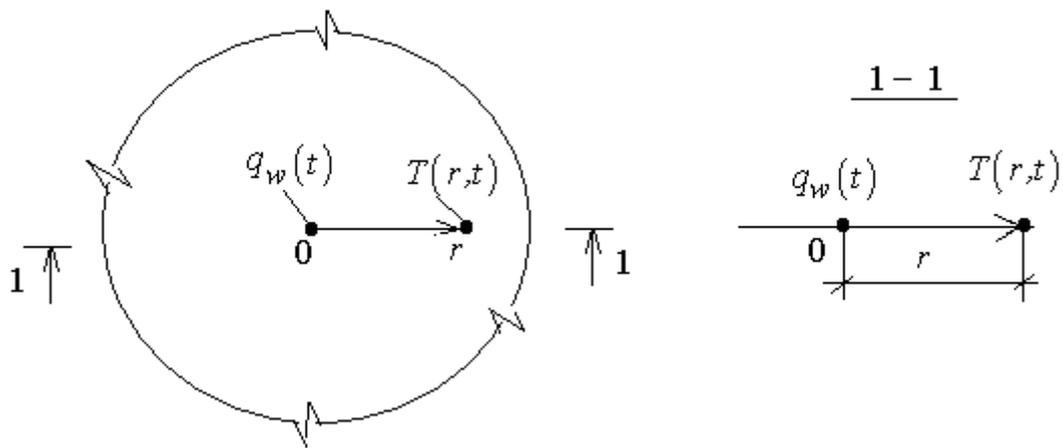


Рис. 17. К определению температурного поля в полуплоскости от точечного источника.

В данном случае задача имеет центральную симметрию, а, следовательно, распределение температуры в плоскости не зависит от угла наклона радиуса- вектора \vec{Or} к горизонту. Ранее нами было показано, что в данном случае решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных вида [6, 14]:

$$a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{q_w(t)}{\rho \cdot c_p} \cdot \frac{\delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r}, \quad (32)$$

где r – координата; t – время; T – удельная температура в точке с координатой r в момент времени t (имеет размерность $\left[\frac{^{\circ}C}{m^2} \right]$ или $\left[\frac{K}{m^2} \right]$);

$\delta(x)$ – символическая дельта-функция Дирака [4]; $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$ –

коэффициент температуропроводности [2, 6, 14]; q_w – плотность теплового источника (имеет размерность $\left[\frac{Вт}{м^3}\right]$).

В соответствии с принятыми нами допущениями и ограничениями начальные и граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} T(r,0) = 0; \\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = 0; \\ T(\infty,t) = 0. \end{array} \right\} \quad (33)$$

Далее применим к правой части (32) преобразование Ганкеля по переменной "r" [4].

Имеем:

$$\frac{q_w(t)}{\rho \cdot c_p} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{q_w(t)}{\rho \cdot c_p}. \quad (34)$$

Здесь α – параметр преобразования Ганкеля, а $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [4]. Далее применим к (34) обратное преобразование Ганкеля [4] и подставим полученное выражение в правую часть уравнения (32). Имеем:

$$a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{q_w(t)}{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha. \quad (35)$$

С учетом граничных условий (33) решение уравнения (35) ищем в виде [19].

$$T(r,t) = \int_0^{\infty} F(\alpha,t) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha, \quad (36)$$

где $F(\alpha,t)$ – некоторая подлежащая определению функция времени t , параметрически зависящая от параметра " α ". Равенство (36) автоматически удовлетворяет граничным условиям при $r=0$ и $r \rightarrow \infty$.

Далее подставим (36) в (35). Имеем:

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot \left\{ -a \cdot \alpha^2 \cdot F(\alpha,t) - \frac{dF(\alpha,t)}{dt} + \frac{q_w(t)}{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p} \right\} \cdot d\alpha = 0. \quad (37)$$

Решение уравнения (37) с начальными и граничными условиями (33) при учете (36) имеет вид:

$$T(r,t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p} \cdot \int_0^{\infty} \left\{ q_w(\tau) \cdot e^{-[a \cdot \alpha^2 \cdot (t-\tau)]} \right\} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha. \quad (38)$$

Здесь τ – имеющий размерность времени параметр. Далее вычислим несобственный интеграл по переменной " α " в правой части равенства (38). Имеем:

$$T(r,t) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p} \cdot \int_0^t \frac{q_w(\tau)}{a \cdot (t-\tau)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}\right] \cdot d\tau. \quad (39)$$

Решение (39) позволяет рассчитать в грунтовом основании температурное поле от точечного источника тепла, который является функцией времени. Для того чтобы рассчитать температурное поле от

постоянного во времени источника температуры, изменяющегося по закону $q_w(t) = q_w = const$, и подставим это выражение в (39). Имеем:

$$T(r,t) = \frac{q_w}{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p \cdot a} \cdot \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}\right] \cdot d\tau. \quad (40)$$

Равенства (39) и (40) позволяют рассчитывать температурные поля от переменного во времени и постоянного источников тепла в полярной системе координат [4]. Для того чтобы перейти к декартовой системе координат, положим $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из (39) имеем:

$$T(r,t) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p} \cdot \int_0^t \frac{q_w(\tau)}{a \cdot (t-\tau)} \cdot \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}\right] \cdot d\tau. \quad (41)$$

При этом из (40) имеем:

$$T(r,t) = \frac{q_w}{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p \cdot a} \cdot \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)} \cdot \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}\right] \cdot d\tau. \quad (42)$$

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы исследований, позволили нам сделать такие выводы.

1. В полярной системе координат с центральной симметрией получены фундаментальные решения о температурном поле вокруг расположенного в центре плоскости точечного источника теплоты. При этом рассмотрены случаи постоянного во времени и переменного теплового источника.

2. Аналогичные результаты получены в декартовой системе координат.

3. Эти решения являются фундаментальными применительно к проблеме определения температурных полей, обусловленных теплообменом между грунтовыми основаниями и U-образными коллекторами тепловых насосов на значительной глубине.

3.2. Цилиндрическая система координат с осевой симметрией.

Температурное поле от точечного источника температуры, расположенного внутри полупространства

При написании настоящего раздела преследовалась цель выполнить теоретические исследования процесса изменения тепловой энергии в грунтовом основании плоского коллектора теплового насоса [12, 14].

Выше было показано, что температурное поле в основании можно представить в виде суперпозиции двух тепловых полей – поля, обусловленного сезонным изменением температуры на дневной поверхности основания (решение этой задачи представлено в разделе 2.2) и поля, причиной появления которого является теплообмен между плоским коллектором теплового насоса и грунтовым основанием.

Вторая задача исследований была сформулирована так.

1. Внутри полупространства на глубине h расположен точечный источник температуры, с использованием которого осуществляется нагрев основания (рис 19).
2. Рассматриваются неизменная во времени и переменная (общий случай) температуры источника.
3. В начальный момент времени (т.е. при $t \rightarrow 0$) температура основания равна нулю.
4. На значительном удалении от источника нагрева в радиальном направлении (т.е. на бесконечности) температура основания убывает до нуля.
5. На значительном удалении от источника нагрева в вертикальном направлении (т.е. на бесконечности) температура основания убывает до нуля.
6. На верхней границе грунтового основания поддерживается нулевая температура.

7. Известны плотность ρ и теплофизические характеристики слагающего основание грунта (т.е. его удельная теплоемкость c_p и коэффициент теплопроводности λ).

8. Требуется рассчитать температурное поле в окрестности источника нагрева в точке основания с координатами (r, z) (если используется цилиндрическая система координат с осевой симметрией) или в точке основания с координатами (x, y, z) (если используется декартова система координат с осевой симметрией) в некоторый момент времени " t ".

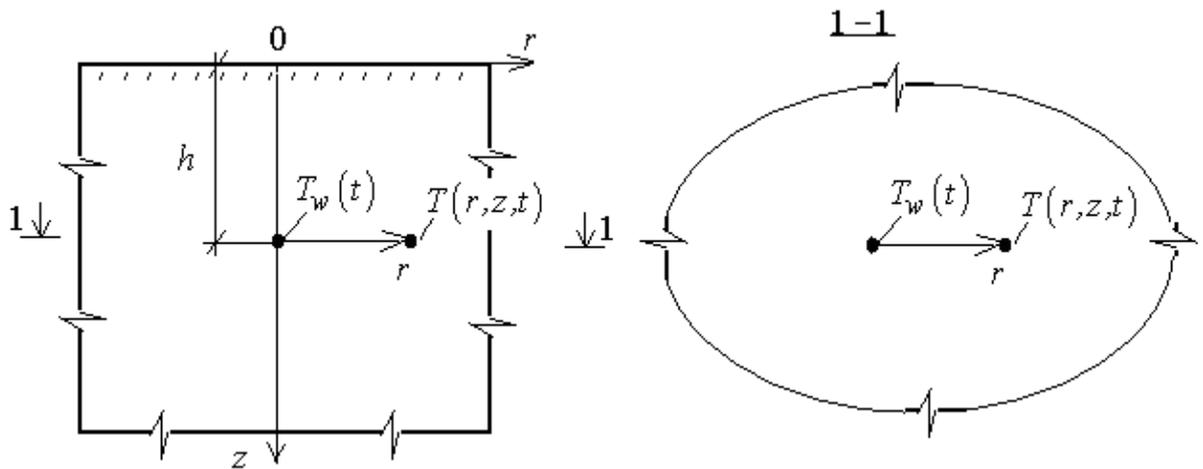


Рис. 19. К определению температурного поля от точечного источника внутри полупространства

В данном случае задача имеет осевую симметрию, а, следовательно, распределение температуры в полупространстве не зависит от угла поворота радиуса-вектора \vec{Or} вокруг оси Oz . Ранее нами было показано,

что в данном случае решение задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial t} &= 0 \quad \text{при } z \in (0, h); \\ a \cdot \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial t} &= 0 \quad \text{при } z \in (h, \infty); \end{aligned} \right\}. \quad (43)$$

В соответствии с принятыми нами допущениями и ограничениями начальные и граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} T_1(r, z, 0) &= T_2(r, z, 0) = 0; \\ T_1(r, 0, t) &= 0; \\ T_2(r, \infty, t) &= 0; \\ T_1(\infty, z, t) &= 0; \\ T_2(\infty, z, t) &= 0; \\ T_1(r, h, t) - T_2(r, h, t) &= T_w(t) \cdot \frac{\delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r}; \\ \frac{\partial T_1(r, h, t)}{\partial z} - \frac{\partial T_2(r, h, t)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (44)$$

Применим к (43) одностороннее преобразование по временной переменной "t". Имеем:

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) - \omega \cdot T_1 &= 0 \quad \text{при } z \in (0, h); \\ a \cdot \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right) - \omega \cdot T_2 &= 0 \quad \text{при } z \in (h, \infty); \end{aligned} \right\}. \quad (45)$$

Здесь ω – параметр преобразования Лапласа.

Далее представим предпоследнее граничное условие (44) в виде:

$$T_1(r, h, t) - T_2(r, h, t) = \frac{T_w(t)}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha. \quad (46)$$

Здесь α – параметр преобразования Ганкеля, а $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом.

После этого применим одностороннее преобразование Лапласа к граничным условиям (44). При этом учтем равенство (45). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} T_1(r, 0, \omega) &= 0; \\ T_2(r, \infty, \omega) &= 0; \\ T_1(\infty, z, \omega) &= 0; \\ T_2(\infty, z, \omega) &= 0; \\ T_1(r, h, \omega) - T_2(r, h, \omega) &= T_w(\omega) \cdot \frac{\delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r} = \\ &= \frac{T_w(\omega)}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha; \\ \frac{\partial T_1(r, h, \omega)}{\partial z} - \frac{\partial T_2(r, h, \omega)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (47)$$

С учетом представления граничных условий (47) решение системы уравнений (45) ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot F_1(\omega, z) \cdot \alpha \cdot d\alpha \quad \text{при } z \in (0, h); \\ T_2 &= \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot F_2(\omega, z) \cdot \alpha \cdot d\alpha \quad \text{при } z \in (h, \infty); \end{aligned} \right\}, \quad (48)$$

где $F_1(\omega, z)$ и $F_2(\omega, z)$ – некоторые подлежащие определению функции координаты z и параметра ω .

Далее подставим (48) в (45). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{\omega}{a} \right) \cdot F_1 &= 0 \quad \text{при } z \in (0, h); \\ \frac{d^2 F_2}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{\omega}{a} \right) \cdot F_2 &= 0 \quad \text{при } z \in (h, \infty); \end{aligned} \right\}. \quad (49)$$

Решение системы уравнений (49) с учетом граничных условий (47) и равенств (48) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{T_w(\omega)}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ \exp[-\gamma \cdot (h - z)] - \exp[-\gamma \cdot (h + z)] \right\} \quad \text{при } z \in (0, h); \\ F_2 &= \frac{T_w(\omega)}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ -\exp[-\gamma \cdot (z - h)] - \exp[-\gamma \cdot (h + z)] \right\} \quad \text{при } z \in (h, \infty); \\ \gamma &= \sqrt{\alpha^2 + \frac{\omega}{a}}. \end{aligned} \right\}. \quad (50)$$

Далее найдем решение системы уравнений (45). При этом учтем равенства (50) и преобразования (48). Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 T_1 &= \frac{T_w(\omega)}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \exp[-\gamma \cdot (h - z)] - \\ -\exp[-\gamma \cdot (h + z)] \end{array} \right\} \cdot \alpha \cdot d\alpha \quad \text{при } z \in (0, h); \\
 T_2 &= \frac{T_w(\omega)}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\exp[-\gamma \cdot (z - h)] - \\ -\exp[-\gamma \cdot (h + z)] \end{array} \right\} \cdot \alpha \cdot d\alpha \quad \text{при } z \in (h, \infty); \\
 \gamma &= \sqrt{\alpha^2 + \frac{\omega}{a}}.
 \end{aligned} \right\} \cdot (51)$$

После этого найдем оригинал (51). Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 T_1 &= \frac{1}{8 \cdot \pi} \cdot \int_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left\langle \int_0^t \frac{T_w(\tau)}{z_6} \cdot e^{-z_1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} z_4 \cdot e^{-z_2} - \\ -z_5 \cdot e^{-z_3} \end{array} \right\} \cdot d\tau \right\rangle \cdot \alpha \cdot d\alpha \\
 &\text{при } z \in (0, h); \\
 T_1 &= \frac{1}{8 \cdot \pi} \cdot \int_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left\langle \int_0^t \frac{T_w(\tau)}{z_6} \cdot e^{-z_1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} z_4 \cdot e^{-z_2} - \\ -z_5 \cdot e^{-z_3} \end{array} \right\} \cdot d\tau \right\rangle \cdot \alpha \cdot d\alpha \\
 &\text{при } z \in (h, \infty); \\
 z_1 &= \alpha^2 \cdot a \cdot (t - \tau);
 \end{aligned} \right\} \cdot (52)$$

$$\left. \begin{aligned}
 z_2 &= \frac{(z-h)^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}; \\
 z_3 &= \frac{(z+h)^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}; \\
 z_4 &= h-z; \\
 z_5 &= h+z; \\
 z_6 &= \sqrt{\pi \cdot a \cdot (t-\tau)^3}.
 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Далее вычислим несобственные интегралы (52). Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 T_1(r, z, t) &= \frac{1}{16 \cdot \pi} \cdot \int_0^t \frac{T_w(\tau)}{\chi_6} \cdot e^{-\chi_1} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\chi_4 \cdot e^{-\chi_2} - \\ &-\chi_5 \cdot e^{-\chi_3} \end{aligned} \right\} \cdot d\tau \\
 \text{при } z &\in (0, h); \\
 T_2(r, z, t) &= \int_0^t \frac{T_w(\tau)}{\chi_6} \cdot e^{-\chi_1} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\chi_4 \cdot e^{-\chi_2} - \\ &-\chi_5 \cdot e^{-\chi_3} \end{aligned} \right\} \cdot d\tau \\
 \text{при } z &\in (h, \infty); \\
 \chi_1 &= \frac{r^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}; \\
 \chi_2 &= \frac{(z-h)^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}; \\
 \chi_3 &= \frac{(z+h)^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)};
 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_4 &= h - z; \\ \chi_5 &= h + z; \\ \chi_6 &= \sqrt{\pi \cdot a^3 \cdot (t - \tau)^5}. \end{aligned} \right\}. \quad (53)$$

Далее представим полученное нами фундаментальное решение (53) в декартовой системе координат. Положим в нем $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} T_1(x, y, z, t) &= \frac{1}{16 \cdot \pi} \cdot \int_0^t \frac{T_w(\tau)}{\chi_6} \cdot e^{-\chi_1} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\chi_4 \cdot e^{-\chi_2} - \\ &-\chi_5 \cdot e^{-\chi_3} \end{aligned} \right\} \cdot d\tau \\ \text{при } z &\in (0, h); \\ T_2(x, y, z, t) &= \int_0^t \frac{T_w(\tau)}{\chi_6} \cdot e^{-\chi_1} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\chi_4 \cdot e^{-\chi_2} - \\ &-\chi_5 \cdot e^{-\chi_3} \end{aligned} \right\} \cdot d\tau \\ \text{при } z &\in (h, \infty); \\ \chi_1 &= \frac{x^2 + y^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)}; \\ \chi_2 &= \frac{(z - h)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)}; \\ \chi_3 &= \frac{(z + h)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)}; \\ \chi_4 &= h - z; \\ \chi_5 &= h + z; \\ \chi_6 &= \sqrt{\pi \cdot a^3 \cdot (t - \tau)^5}. \end{aligned} \right\}. \quad (54)$$

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы исследований, позволили нам сделать такие выводы.

1. В цилиндрической системе координат с осевой симметрией получено решение о температурном поле вокруг расположенного внутри полупространства точечного источника температуры (формулы (53)).
2. Аналогичные результаты получены в декартовой системе координат (формулы (54)).
3. Эти решения являются фундаментальными применительно к проблеме определения температурных полей, обусловленных теплообменом между грунтовыми основаниями и плоскими коллекторами тепловых насосов.

3.3. Температурное поле от точечного источника теплоты, расположенного внутри грунтового основания

При написании настоящего раздела преследовалась цель выполнить теоретические исследования процесса изменения тепловой энергии в грунтовом основании U-образного коллектора теплового насоса [1, 14].

Выше было показано, что температурное поле в основании можно представить в виде суперпозиции двух тепловых полей – поля, обусловленного сезонным изменением температуры на дневной поверхности основания (решение этой задачи представлено в разделе 2.2) и поля, причиной появления которого является теплообмен между U-образным коллектором и грунтовым основанием.

Вторая задача исследований была сформулирована так.

1. Внутри полупространства на глубине ξ расположен точечный источник тепла, с использованием которого осуществляется нагрев основания (рис 19).

2. Тепловая энергия, передаваемая от точечного источника основанию, может быть как неизменной во времени, так и переменной.
3. В начальный момент времени (т.е. при $t \rightarrow 0$) температура основания равна нулю.
4. На значительном удалении от источника нагрева в радиальном направлении (т.е. на бесконечности) температура основания убывает до нуля.
5. На значительном удалении от источника нагрева в вертикальном направлении (т.е. на бесконечности) температура основания убывает до нуля.
6. Известны плотность ρ и теплофизические характеристики слагающего основание грунта (т.е. его удельная теплоемкость c_p и коэффициент теплопроводности λ).
7. Требуется рассчитать температурное поле в окрестности источника нагрева в точке основания с координатами (r, z) (если используется цилиндрическая система координат с осевой симметрией) или в точке основания с координатами (x, y, z) (если используется декартова система координат с осевой симметрией) в некоторый момент времени "t".

В данном случае задача имеет осевую симметрию, а, следовательно, распределение температуры в полупространстве не зависит от угла поворота радиуса-вектора \vec{Or} вокруг оси Oz . Ранее нами было показано, что в данном случае решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных вида:

$$a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = -q_w(t) \cdot \frac{\delta(r) \cdot \delta(z - \xi)}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho \cdot c_p}, \quad (55)$$

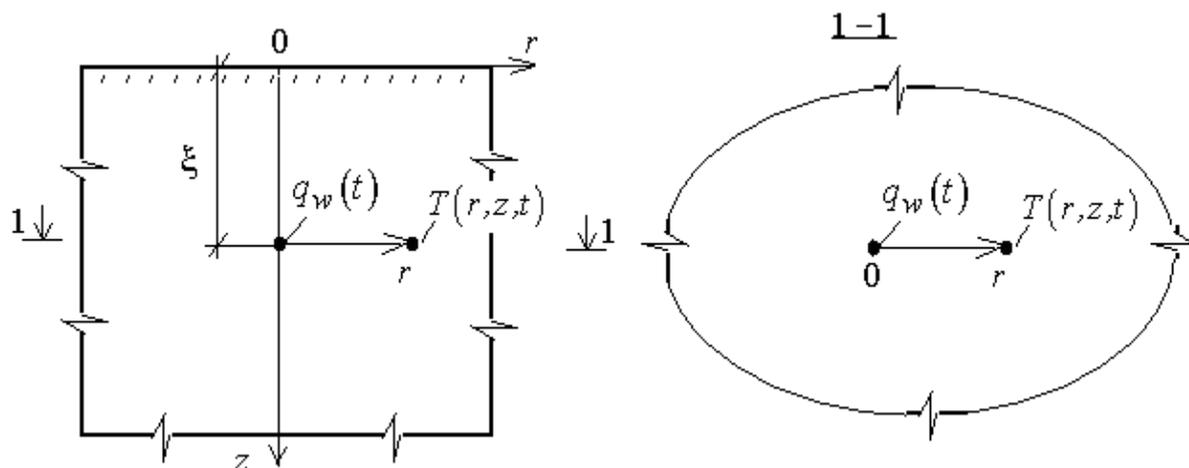


Рис. 20. К определению температурного поля от точечного источника внутри полупространства.

где r и z – координаты; t – время; T – удельная температура в точке с координатами (r, z) в момент времени t (имеет размерность $\left[\frac{0 \text{ C}}{\text{м}^3} \right]$ или

$\left[\frac{0 \text{ K}}{\text{м}^3} \right]$); $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$; ξ – глубина, на которой расположен источник тепла

(рис. 20); q_w – плотность теплового источника (имеет размерность $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3} \right]$).

Здесь $q_w(t)$ – некоторый произвольный закон изменения скорости температуры точечного источника во времени (имеет размерность $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3} \right]$);

$\delta(x)$ – символическая дельта- функция Дирака [4].

В соответствии с принятыми нами допущениями и ограничениями начальные и граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} T(r, z, 0) &= 0; \\ T(r, 0, t) &= 0; \\ T(r, \infty, t) &= 0; \\ T(\infty, z, t) &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (56)$$

Далее применим к (55) и (56) одностороннее преобразование Лапласа по временной переменной "t" [4, 20]. С учетом принятых допущений имеем:

$$a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \omega \cdot T = -q_w(\omega) \cdot \frac{\delta(r) \cdot \delta(z - \xi)}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho \cdot c_p} \quad (57)$$

и

$$\left. \begin{aligned} T(r, 0, \omega) &= 0; \\ T(r, \infty, \omega) &= 0; \\ T(\infty, z, \omega) &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (58)$$

Здесь ω – параметр одностороннего преобразования Лапласа [4]. Далее представим правую часть (55) в виде:

$$\begin{aligned} q_w(\omega) \cdot \frac{\delta(r) \cdot \delta(z - \xi)}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho \cdot c_p} &= \\ = q_w(\omega) \cdot \frac{\delta(z - \xi)}{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь α – параметр преобразования Ганкеля, а $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом.

С учетом граничных условий (58) и представления решения в виде (59) решение уравнения (57) ищем в виде [19]:

$$T(r, z, \omega) = \int_0^{\infty} F(\alpha, z, \omega) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha, \quad (60)$$

где $F(\alpha, z, \omega)$ – некоторая подлежащая определению функция координаты "z", которая параметрически зависит от параметров " α " и " ω ".

Далее подставим (60) в (57). Имеем:

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot \left\{ \frac{d^2 F}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{\omega}{a} \right) \cdot F - q_w(\omega) \cdot \frac{\delta(z - \xi)}{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p} \right\} \cdot d\alpha = 0. \quad (61)$$

Решение уравнения (61) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} T(r, z, \omega) &= \frac{k}{2 \cdot \gamma} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot F(\alpha, z) \cdot d\alpha; \\ F(\alpha, z) &= f_1 - f_2 - f_3 + f_4; \\ f_1 &= \exp[-\gamma \cdot (z - \xi)]; \\ f_2 &= \exp[-\gamma \cdot (z + \xi)]; \\ f_3 &= U(\xi - z) \cdot \exp[-\gamma \cdot (z - \xi)]; \\ f_4 &= U(\xi - z) \cdot \exp[-\gamma \cdot (\xi - z)]; \\ \gamma &= \sqrt{\alpha^2 + \frac{\omega}{a}}; \\ k &= \frac{q_w(\omega)}{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_p}; \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Здесь $U(x)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда. Далее найдем оригинал (62). Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 T(r, z, t) &= \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha \cdot \left[\int_0^t k(\tau) \cdot f_0 \cdot \{f_1 - f_2\} \cdot d\tau \right]; \\
 f_0 &= \exp \left[-\alpha^2 \cdot a \cdot (t - \tau) \right]; \\
 f_1 &= \exp \left[-\frac{(z - \xi)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)} \right]; \\
 f_2 &= \exp \left[-\frac{(z + \xi)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)} \right]; \\
 k(\tau) &= \frac{q_w(\tau)}{4 \cdot \rho \cdot c_p \cdot \sqrt{\pi^3 \cdot a \cdot (t - \tau)}}
 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Далее вычислим входящий в (63) несобственный интеграл по переменной "α". Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 T(r, z, t) &= \int_0^t k(t, \tau) \cdot f_0 \cdot [f_1 - f_2] \cdot d\tau; \\
 f_0 &= \exp \left[-\frac{r^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)} \right]; \\
 f_1 &= \exp \left[-\frac{(z - \xi)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)} \right];
 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= \exp \left[-\frac{(z + \xi)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)} \right]; \\ k(t, \tau) &= \frac{q_w(\tau)}{\rho \cdot c_p \cdot \sqrt{[\pi \cdot a \cdot (t - \tau)]^3}}. \end{aligned} \right\}. \quad (64)$$

Далее от цилиндрической системы координат с осевой симметрией перейдем к декартовой системе координат. Для достижения этой цели положим в (64) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} T(r, z, t) &= \int_0^t k(t, \tau) \cdot f_0 \cdot [f_1 - f_2] \cdot d\tau; \\ f_0 &= \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)} \right]; \\ f_1 &= \exp \left[-\frac{(z - \xi)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)} \right]; \\ f_2 &= \exp \left[-\frac{(z + \xi)^2}{4 \cdot a \cdot (t - \tau)} \right]; \\ k(t, \tau) &= \frac{q_w(\tau)}{8 \cdot \rho \cdot c_p \cdot \sqrt{[\pi \cdot a \cdot (t - \tau)]^3}}. \end{aligned} \right\}. \quad (65)$$

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы исследований, позволили нам сделать такие выводы.

1. В цилиндрической системе координат с осевой симметрией получено решение о температурном поле вокруг расположенного внутри полупространства точечного источника теплоты (формулы (64)).

2. Аналогичные результаты получены в декартовой системе координат (формулы (65)).

3. Эти решения являются фундаментальными применительно к проблеме определения температурных полей, обусловленных теплообменом между грунтовыми основаниями, плоскими и U-образными коллекторами тепловых насосов.

3.4. Обсуждение результатов исследований. Выводы по разделу

Изложенные в третьем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В полярной системе координат с центральной симметрией получены фундаментальные решения о температурном поле вокруг расположенного в центре плоскости точечного источника теплоты. При этом рассмотрены случаи постоянного во времени и переменного теплового источника.

2. Аналогичные результаты получены в декартовой системе координат.

3. Эти решения являются фундаментальными применительно к проблеме определения температурных полей, обусловленных теплообменом между грунтовыми основаниями и U-образными коллекторами тепловых насосов на значительной глубине.

4. В цилиндрической системе координат с осевой симметрией получено решение о температурном поле вокруг расположенного внутри полупространства точечного источника температуры.

5. Аналогичные результаты получены в декартовой системе координат.

6. Эти решения являются фундаментальными применительно к проблеме определения температурных полей, обусловленных теплообменом между грунтовыми основаниями и плоскими коллекторами тепловых насосов.

7. В цилиндрической системе координат с осевой симметрией получено решение о температурном поле вокруг расположенного внутри полупространства точечного источника теплоты (формулы (64)).

8. Аналогичные результаты получены в декартовой системе координат (формулы (65)).

9. Эти решения являются фундаментальными применительно к проблеме определения температурных полей, обусловленных теплообменом между грунтовыми основаниями, плоскими и U-образными коллекторами тепловых насосов.