МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ТЕОРІЯ ІГОР В ДОСЛІДЖЕННІ КОНФЛІКТНИХ СИТУАЦІЙ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня
спеціаліст та магістр

Дніпропетровськ
2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра системного аналізу і управління

ТЕОРІЯ ІГОР В ДОСЛІДЖЕННІ КОНФЛІКТНИХ СИТУАЦІЙ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня спеціаліст та магістр

Дніпропетровськ
НГУ
2011

Теорія ігор в дослідженні конфліктних ситуацій. Методичні рекомендації до лабораторних робіт для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня спеціаліст та магістр / В.М. Рева, О.П. Купенко. − Д.: Національний гірничий університет, 2011. − 56 с.

Автори:
В.М. Рева, канд. фіз.-мат. наук, доц. (лабораторні роботи № 1−4);
О.П. Купенко, канд. фіз.-мат. наук, доц. (лабораторні роботи № 5−7).

Затверджено до видання методичною комісією напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз (протокол № 4 від 01.06.2011) за поданням кафедри системного аналізу і управляння (протокол № 4 від 01.06.2011).

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз під час виконання лабораторних робіт і підготовки до модульного контролю за результатами вивчення нормативної дисципліни «Теорія ігор в дослідженні конфліктних ситуацій».

Розглянуто деякі з основних ігрових моделей конфліктних ситуацій, принципи та методи розв'язання конфліктів. Наведено приклади їх застосування та подано рекомендації до розв'язання типових задач.

Описано порядок виконання робіт, вимоги до оформлення звіту про лабораторну роботу, критерії оцінювання та питання для самоконтролю.

Рекомендації орієнтовано на теоретичну та методичну підтримку навчальної діяльності студентів

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу і д-р техн. наук, проф. В.В. Слєсарєв.

Вступ

У різних сферах людської діяльності виникають ситуації, які називаються конфліктними.

Розділ математики, в якому досліджуються математичні моделі прийняття рішень в умовах конфлікту, тобто в умовах зіткнення сторін, кожна з яких прагне впливати на розвиток конфлікту у власних інтересах, називається теорією ігор. За визначенням Н. Н. Воробйова, «теорія ігор − це теорія математичних моделей прийняття рішень в умовах невизначеності, коли суб'єкт («гравець»), що ухвалює рішення, має в своєму розпорядженні інформацію лише про безліч можливих ситуацій, в одній з яких він насправді перебуває, та безліч рішень («стратегій»), які він може прийняти, і про кількісну міру того «виграшу», який він міг би отримати, вибравши в даній ситуації дану стратегію».

Моделями теорії ігор можна, в принципі, змістовно описувати вельми різноманітні явища: економічні, правові, класові конфлікти, взаємодію людини з природою, біологічну боротьбу за існування і таке інше. Всі такі моделі в теорії ігор прийнято називати **іграми.**

Необхідність прийняття рішень в конфліктних ситуаціях − розв'язання конфлікту − приводить до того, що теорія ігор стає важливим елементом освіти фахівців, пов'язаних з її застосуванням у розв'язанні задач, що виникають в додатках. Методи теорії ігор описані в численних джерелах [1−15] та все ж методичної літератури, присвяченої цим питанням, на наш погляд, недостатньо.

Метою методичних рекомендацій є забезпечення ефективної самостійної роботи студентів під час освоєння курсу «Теорія ігор в дослідженні конфліктних ситуацій», виконання лабораторних робіт і підготовки до модульного контролю.

Дисципліна «Теорія ігор в дослідженні конфліктних ситуацій» викладається студентам напряму 6.040303 Системний аналіз на п'ятому курсі.

В методичні рекомендації входить сім лабораторних робіт, які доповнюють теоретичний матеріал відповідно до програми курсу. Лабораторні роботи містять необхідний теоретичний матеріал, приклади моделювання конфліктів та методи їх розв'язання, порядок виконання роботи, зміст звіту, питання для самоперевірки та варіанти індивідуальних завдань.

Необхідні в лабораторних роботах розрахунки можна виконувати за допомогою додатка Microsoft Excel або програм, що самостійно написані студентом, у середовищі Matlab 6.1.

При оцінюванні лабораторної роботи враховується самостійність і своєчасність її виконання, правильність розрахунків, рівень оволодіння теоретичним та практичним матеріалом, своєчасність оформлення звіту.

Лабораторна робота № 1
Конфліктні ситуації і матричні ігри

Мета роботи: отримати навики побудови математичної моделі та аналізу конфліктної ситуації.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал та ознайомиться з прикладами ігрового моделювання конфліктів [2, 3, 4, 6, 7].

2. Навести приклад конфліктної ситуації, побудувати її математичну модель та, використовуючи засоби додатка Microsoft Excel або середовище Matlab 6.1, провести необхідний аналіз, згідно з варіантом індивідуального завдання.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити:

− постановку задачі;

− опис та аналіз ходу розв’язання задачі;

− висновки за результатом виконаної роботи.

1. Короткі теоретичні відомості

Конфлікт − це ситуація з кількома учасниками, цілі яких не збігаються і дії яких не є абсолютно незалежними.

До конфліктних ситуацій належать, наприклад, взаємини між банком і клієнтом, покупцем та продавцем, начальником та підлеглим і т. п.

Теорія ігор − це розділ математики, в якому досліджуються математичні моделі прийняття рішень в умовах конфлікту, тобто в умовах зіткнення сторін, кожна з яких прагне впливати на розвиток конфлікту у власних інтересах.

Математична модель конфліктної ситуації називається **грою**, сторони, що беруть участь у конфлікті, − **гравцями.**

Вибір і застосування однієї з передбачених правилами дій називається **ходом** гравця. Ходи можуть бути особистими і випадковими.

Особистий хід − це свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій (наприклад, хід у шаховій грі). **Випадковий хід −** це випадково вибрана дія (наприклад, вибір карти з перетасованої колоди). Далі розглядатимемо тільки особисті ходи гравців.

Природно, що гравець приймає рішення по ходу гри. Проте теоретично **можна припустити, що всі ці рішення прийняті гравцем заздалегідь.** Сукупність цих рішень становить його **стратегію.**

Стратегією гравця називається деякий план або сукупність правил, за якими він обирає рішення під час кожного особистого ходу залежно від ситуації, що склалася у процесі гри.

У ігровій моделі конфлікту мають бути такі компоненти:

а) зацікавлені сторони конфлікту − **гравці**, їх множину позначимо літерою I;

б) можливі способи дій − **стратегії** кожного гравця $k \in I$ та набір кінцевих станів − ситуацій, якими закінчується гра, що залежить від вибору гравцями стратегій;

в) інтереси сторін, що задаються у вигляді **платежів** або **виграшів,** які відповідають кожному можливому кінцевому стану.

Опишемо все це детальніше.

Кожен гравець $k \in I$ має у своєму розпорядженні деякий набір **стратегій** S_k. Множини $S_1, S_2, ..., S_n$ можуть бути як скінченними, так і нескінченними.

В основі раціональної поведінки учасників гри лежить так званий **постулат «загального знання»**: кожен учасник повністю інформований про свої стратегічні можливості та стратегічні можливості своїх партнерів і конкурентів. Це означає, що набір множин $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ відомий кожному з гравців.

Процес гри полягає у виборі кожним із гравців своєї стратегії: $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, ..., $s_n \in S_n$. Результатом чого є **ігрова ситуація** $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, яку називають ще **результатом** гри. Множина Q всіх можливих ігрових ситуацій утворює **ситуаційний простір** гри $Q = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$.

Дані стратегії називають ще **чистими стратегіями**, оскільки є й інші погляди на перебіг гри і, відповідно, на поняття стратегії.

Ступінь зацікавленості гравця k у тій чи іншій ситуації s визначається розміром виграшу − значенням функції $H^k(s)$, який він в цій ситуації може отримати. Функції $H^1=H^1(s)$, $H^1=H^2(s), \ldots, H^n = H^n(s)$ називаються **платіжними** або **функціями виграшу.** Ці функції набувають числових значень, мають загальну область визначення Q і кожна з них є функцією від n змінних, тобто функцією від кількості гравців.

Таким чином, будь-який конфлікт подано системою

$$\Gamma=(I, \{S_1, S_2, ... S_n\}, \{H^1, H^2, \ldots, H^n\}), \quad (1)$$

яка називається **безкоаліційною** грою або просто грою.

Систему (1) називають **нормальною формою** гри.

Передбачається, що в безкоаліційній грі учасники діють розумно, незалежно один від одного, без взаємної співпраці та обміну інформацією. Поведінкою учасників такої гри керують чисто егоїстичні мотиви, а саме: отримати якомога більший індивідуальний виграш.

Розглянемо детальніше, в рамках даної загальної схеми, опис гри з двома учасниками. Хай гравців звуть А і В, тоді I={A, B}. Припустімо, що кожен з учасників має у своєму розпорядженні скінченну кількість стратегій, перший має m, а другий − n стратегій: $S_A = \{б_1, б_2, ..., б_m\}$, $S_B = \{в_1, в_2, ..., в_n\}$.

Тоді множина ігрових ситуацій $Q = S_A \times S_B$ складається з $m \times n$ таких елементів:

$$\begin{pmatrix} (б_1, в_1) & (б_1, в_2) & ... & (б_1, в_n) \\ (б_2, в_1) & (б_2, в_2) & ... & (б_2, в_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ (б_m, в_1) & (б_m, в_2) & ... & (б_m, в_n) \end{pmatrix}$$

Хай, крім того, H^A, H^B − функції виграшів. Оскільки в нашому випадку множина ігрових ситуацій скінченна, ці функції можуть бути задані у вигляді таблиць за допомогою пари матриць $A = [a_{jk}]$ та $B = [b_{jk}]$ розміру $m \times n$, елементи яких − суть **виграшу** гравців у кожній з ситуацій: $a_{jk} = H^A(б_j, в_k)$, $b_{jk} = H^B(\alpha_j, \beta_k)$. Матриці A і B також **платіжні.**

Очевидно, якщо перший гравець в матричній грі має всього m стратегій, а другий − n, то таку гру Г можна описати, задавши виграші гравців двома матрицями. Така пара матриць також називається **нормальною формою гри Г.**

Оскільки в описі гри двох осіб фігурують дві матриці, такі ігри часто називають **біматричними.**

Біматрична гра двох гравців така, що для будь-яких стратегій i, j виконується: $a_{ij} + b_{ij} = const$, може бути задана за допомогою однієї матриці і тому такі ігри називають **матричними іграми з постійною сумою** або просто **матричними.** Матричні ігри з нульовою сумою називають **антагоністичними.** Нормальна форма матричної гри з матрицею A позначається через Γ_A, вона є самою платіжною матрицею A.

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою може розглядатися як подана нижче абстрактна гра двох гравців.

Перший гравець має m стратегій i = 1, 2, ..., m, другий − n стратегій j = 1, 2, ..., n. Кожній парі стратегій (i, j) поставлено у відповідність число a_{ij}, що виражає виграш гравця 1 за рахунок гравця 2, якщо перший гравець вибере свою i-ту стратегію, а гравець 2 – свою j-ту стратегію.

Кожен із гравців робить один хід: гравець 1 вибирає свою i-ту стратегію ($i=\overline{1,m}$), гравець 2 − свою j-ту стратегію ($j=\overline{1,n}$), після чого гравець 1 отримує виграш a_{ij} за рахунок гравця 2 (якщо $a_{ij} < 0$, то це означає, що перший гравець платить другому суму $|a_{ij}|$). На цьому гра закінчується.

2. Приклади ігрового моделювання конфліктів

Наведемо приклади конфліктних ситуацій і їх моделей у вигляді матричних ігор.

Приклад 1(гра в монети). Перший із двох учасників гри накриває рукою монету, яка може бути орлом догори або решкою. Другий учасник відгадує, якою стороною догори лежить ця монета. Якщо другий відгадав, то перший платить йому суму, рівну одиниці. Якщо другий не відгадав, то він платить першому суму, рівну одиниці.

У цій грі два учасники, що мають протилежні інтереси: отримати виграш за рахунок іншого гравця. У першого гравця є тільки дві (чисті) стратегії: 1-ша − накрити монету догори орлом, 2-га − накрити монету решкою догори. У другого гравця також є тільки дві стратегії: 1-ша − сказати, що монета накрита орлом догори, 2-га − монета накрита решкою догори.

Матриця виграшів формується так: якщо чисті стратегії у обох гравців збігаються, то це означає, що другий гравець відгадав, якою стороною накрив монету перший гравець, отже, виграє другий гравець, а перший − програє 1. Якщо гравці застосовують різні стратегії, то це означає, що другий гравець не відгадав, якою стороною накрита монета, і 1 виграє перший гравець.

Матриця A виграшів першого гравця має вигляд:

	1	2
1	−1	1
2	1	−1

Ця матриця є одночасно матрицею програшів другого гравця.

Дана гра належить до матричних ігор з нульовою сумою.

Приклад 2 (вибір складу команди). Спортивний клуб A має в своєму розпорядженні три варіанти складу команди Al, A2 і A3. Клуб B − два варіанти B1, B2. Подаючи заявку для участі в змаганні, жоден з клубів не знає, який склад вибере супротивник. Ймовірності виграшу клубу A за різних варіантів складів команд (формовані з досвіду минулих зустрічей) задані матрицею:

	B1	B2
A1	0,5	0,9
A2	0,2	0,6
A3	0,4	0,5

Потрібно знайти оптимальну поведінку кожного клубу − оптимальний варіант складу команд.

3. Розв'язання матричних ігор в чистих стратегіях

Розглядається матрична гра Γ_A з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що проведення кожної партії матричної гри з матрицею A зводиться до вибору першим гравцем i-го рядка, а другим гравцем j-го стовпця та отримання гравцем 1 (за рахунок гравця 2) виграшу a_{ij}.

Головним у дослідженні ігор є поняття оптимальних стратегій гравців. У це поняття інтуїтивно вкладається такий сенс: стратегія гравця є **оптимальною,** якщо: а) застосування цієї стратегії забезпечує йому найбільший гарантований виграш при всіляких стратегіях іншого гравця і б) відхилення від цієї стратегії не вигідне. Виходячи з цих міркувань, гравець 1 досліджує матрицю виграшів A таким чином: для кожного значення i ($i = \overline{1,m}$) визначається мінімальне значення виграшу залежно від вживаних стратегій гравця 2: $\min\limits_j a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$), тобто визначається мінімальний виграш для гравця 1 за умови, що він прийме свою i-ту чисту стратегію, потім з цих мінімальних виграшів відшукується така стратегія $i = i_0$, за якої цей мінімальний виграш буде максимальним, тобто знаходиться

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{б}. \qquad (2)$$

Визначення 1. Число $\underline{\alpha}$, що визначається за формулою (2) називається **нижньою чистою ціною гри** і показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець 1, застосовуючи свої чисті стратегії за будь-яких дій гравця 2.

Величина $\underline{\alpha}$ називається також **максиміном**, принцип побудови стратегії i_0, заснований на максимізації мінімального виграшу, − **принципом максиміну,** а вибрана відповідно до цього принципу стратегія i_0 − **максимінною** або **захисною стратегією** гравця 1.

Гравець 2 при оптимальній своєї поведінці повинен прагнути і за рахунок своїх стратегій по можливості максимально зменшити виграш гравця 1. Тому для гравця 2 шукається $\max_i a_{ij} (j=\overline{1,n})$, тобто визначається максимальний виграш гравця 1, за умови, що гравець 2 застосує свою j-ту чисту стратегію, потім гравець 2 шукає таку свою стратегію $j = j_1$, при якій гравець 1 отримає мінімальний виграш, тобто знаходить

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \overline{б}. \qquad (3)$$

Визначення 2. Число $\overline{\alpha}$, визначене за формулою (3), називається **чистою верхньою ціною гри** і показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може собі гарантувати гравець 1.

Число $\overline{\alpha}$ називається також **мінімаксом.** При цьому принцип побудови стратегії j_1, заснований на мінімізації максимальних втрат, називається **принципом мінімакса,** а вибрана відповідно до цього принципу стратегія j_1 − **мінімаксною** або **захисною** стратегією гравця 2.

Іншими словами, застосовуючи свої чисті стратегії гравець 1 може забезпечити собі виграш не менше $\underline{\alpha}$, а гравець 2 за рахунок застосування своїх чистих стратегій може не допустити виграш гравця 1 більше, ніж $\overline{\alpha}$.

Використання одним із гравців захисної стратегії не гарантує того, що супротивник також скористається захисною стратегією. Якщо $\underline{\alpha} \neq \overline{\alpha}$, то при використанні одним із гравців захисної стратегії другому гравцеві вигідно не вибирати захисну стратегію, тобто для таких ігор виникає спокуса переграти супротивника (див., наприклад, гру в монети).

Визначення 3. Якщо у грі з матрицею А виконується $\underline{\alpha}=\overline{\alpha}$, то говорять, що ця гра має **сідлову** точку в чистих стратегіях і **чисту ціну гри** $\upsilon = \underline{\alpha}=\overline{\alpha}$.

Сідлова точка − елемент $a_{i_o j_0}$ визначається парою чистих стратегій (i_0, j_0) гравців 1 та 2, відповідно, при яких досягається рівність $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$. Таку пару стратегій називають **урівноваженою.**

У це поняття вкладено такий сенс: якщо один із гравців дотримується урівноваженої стратегії, то інший гравець не зможе вчинити краще, ніж також дотримуватися урівноваженої стратегії. Математично це можна записати й інакше:

$$a_{ij_o} \le a_{i_o j_o} \le a_{i_o j} \qquad (4)$$

де i, j − будь-які чисті стратегії відповідно гравців 1 і 2, а (i_0, j_0) − стратегії, що визначають сідлову точку.

Можна показати, що будь-яка урівноважена пара стратегій є захисною, проте зворотне твердження не має місця.

Сідловий елемент $a_{i_o j_o}$, як видно з (4), є мінімальним в і-му рядку і максимальним в j-му стовпці матриці А. Пошук сідлової точки матриці А відбувається таким чином: у матриці А послідовно в кожному рядку знаходять мінімальний елемент і перевіряють, чи є цей елемент максимальним у своєму стовпці. Якщо так, то він і є сідловим елементом, а пара стратегій, що відповідають йому, утворюють сідлову точку.

Визначення 4. Пара чистих стратегій (i_0, j_0) гравців 1 і 2, які утворюють сідлову точку, називається **розв'язком гри.** При цьому i_0, j_0 називаються **оптимальними чистими стратегіями** відповідно гравців 1 та 2.

Приклад 1

$$\begin{array}{lcl} & & \min\limits_j a_{ij} \\ & & \quad\| \\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} & & \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\ \max\limits_i a_{ij} = \underbrace{2 \quad 5 \quad 4}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2.} & & \end{array}$$

Сідловою точкою є пара ($i_0 = 3$; $j_0 = 1$), при якій $\upsilon = \underline{\text{б}} = \overline{\text{б}} = 2$.

Зазначимо, що хоча виграш в ситуації (3;3) також дорівнює $2 = \underline{\text{б}} = \overline{\text{б}}$, вона не є сідловою точкою, оскільки цей виграш не є максимальним серед виграшів третього стовпця.

Приклад 2

$$\begin{array}{lcl} & & \min\limits_j a_{ij} \\ H = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 10 \\ 20 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 20 \\ \max\limits_i a_{ij} \downarrow \quad \downarrow & & \\ \underbrace{40 \quad 30}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 30.} & & \end{array}$$

З аналізу матриці виграшів видно, що $\underline{\alpha} < \overline{\alpha}$, тобто ця матриця не має сідлової точки. Якщо гравець 1 вибирає свою чисту максимінну стратегію і = 2, то гравець 2, вибравши свою мінімаксну j = 2, програє тільки 20. В цьому випадку гравцеві 1 вигідно вибрати стратегію і = 1, тобто відхилитися від своєї чистої максимінної стратегії та виграти 30. Тоді гравцеві 2 буде вигідно вибрати стратегію j = 1, тобто відхилитися від своєї чистої мінімаксної стратегії і програти 10. У свою чергу гравець 1 повинен вибрати свою 2-гу стратегію, щоб виграти 40, а гравець 2 відповість вибором 2-ї стратегії і так далі.

Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи

1. Чи будь-який конфлікт моделюється матричною грою?

2. Які припущення про поведінку гравців робляться при моделюванні конфлікту?

3. Чим відрізняються захисна та урівноважена стратегії?

4. За яких умов матрична гра має декілька оптимальних розв'язків?

5. Який сенс мають нижня та верхня ціни гри?

Задача лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань

1. Навести змістовний приклад конфліктної ситуації, що моделюється у вигляді біматрічної або матричної гри та має не менше чотирьох чистих стратегій для кожного гравця. Побудувати відповідну ігрову модель.

2. Знайти для цієї гри:

1) розв'язання в чистих стратегіях та всі сідлові точки, якщо це можливо;

2) обчислити нижню і верхню ціни в чистих стратегіях і відповідні мінімаксну і максимінну стратегії гравців.

3. Навести по два приклади матричних ігор (матриць A), які:

1) мають більше однієї сідлової точки і знайти ці сідлові точки та відповідні оптимальні розв'язки;

2) мають тільки одну сідлову точку та знайти відповідний оптимальний розв'язок;

3) не мають оптимальних рішень в чистих стратегіях, обчислити для них нижню і верхню ціни в чистих стратегіях і відповідні мінімаксну і максимінну стратегії гравців.

У матриці A повинно бути не менше чотирьох попарно різних елементів і таких, що їх величини перебувають у межах відрізка [C1, C2]. Розмірність матриці A та межі C1, C2 вибрати у нижчеподаній таблиці відповідно до номера в журналі:

№	n	m	C1	C2	№	n	m	C1	C2
1	3	3	−4	5	16	2	6	5	11
2	3	4	−4	5	17	4	3	5	11
3	3	5	−4	5	18	4	5	5	11
4	2	6	−4	5	19	4	4	5	11
5	4	3	−4	5	20	6	2	5	11
6	4	5	−4	5	21	5	2	5	11
7	4	4	−4	5	22	5	3	5	11
8	6	2	−4	5	23	5	4	5	11
9	5	2	−4	5	24	5	5	5	11
10	5	3	−4	5	25	3	3	11	16
11	5	4	−4	5	26	3	4	11	16
12	5	5	−4	5	27	3	5	11	16
13	3	3	5	11	28	2	6	11	16
14	3	4	5	11	29	4	3	11	16
15	3	5	5	11	30	4	5	11	16

Лабораторна робота № 2
Матричні ігри. Метод Брауна−Робінсон

Мета роботи: отримати навики застосування методу Брауна−Робінсон до розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал [14].

2. Написати програму в середовищі Matlab 6.1, що дозволяє застосовувати метод Брауна−Робінсон до розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях для довільної, наперед заданої кількості ітерацій, згідно з варіантом індивідуального завдання та провести необхідний аналіз.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який має містити:

− постановку задачі;

− опис та аналіз ходу розв'язання задачі (роботу програми);

− висновки за результатом виконаної роботи.

1. Короткі теоретичні відомості

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою може розглядатися як така абстрактна гра двох гравців.

Задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

називається матрицею виграшів (платіжною матрицею). Перший гравець має m стратегій i = 1, 2,.., m, другий має n стратегій j = 1, 2,..., n. Дані стратегії називають ще чистими. Кожній парі стратегій (i, j) відповідає число a_{ij}, що виражає виграш гравця 1 і програш гравця 2, якщо перший гравець прийме свою i-ту стратегію, а другий − свою j-ту стратегію.

Гра проходить так: кожен гравець робить один хід: гравець 1 вибирає свою i-ту стратегію (i = 1, 2,..., m), гравець 2 − свою j-ту стратегію (j = 1, 2,..., n). Якщо a_{ij}, > 0, то гравець 1 отримує виграш a_{ij}, за рахунок гравця 2 (це означає, що гравець 2 платить першому суму a_{ij},), якщо ж a_{ij}, < 0, то гравець 2 отримує виграш a_{ij}, за рахунок гравця 1. На цьому гра закінчується.

Дану гру в чистих стратегіях з матрицею А позначатимемо через $Г_A$.

Головним у дослідженні ігор є поняття оптимальних стратегій гравців. У це поняття інтуїтивно вкладається такий сенс: стратегія гравця є **оптимальною,** якщо: а) застосування цієї стратегії забезпечує йому найбільший гарантований виграш за будь-яких стратегій іншого гравця та б) відхилення від цієї стратегії не вигідне.

Визначення 1. Якщо у грі з матрицею А виконується рівність: $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$, то говорять, що ця гра має **сідлову** точку в чистих стратегіях і **чисту ціну гри** $u = \max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0}$, пару чистих стратегій (i_0, j_0), на якій це досягається, і називають **сідловою** точкою, а елемент $a_{i_0 j_0}$ − **сідловим елементом.**

Сідловий елемент $a_{i_0 j_0}$ є мінімальним в i_0-му рядку і максимальним в j_0-му стовпці в матриці А. Пошук сідлової точки матриці А відбувається таким чином: у кожному рядку матриці А послідовно знаходять мінімальний елемент і перевіряють, чи цей елемент максимальний у своєму стовпці. Якщо так, то він і є сідловим елементом, а пара стратегій, що йому відповідає, утворює сідлову точку.

Визначення 2. Пара чистих стратегій (i_0, j_0), що визначає сідлову точку, називається **розв'язанням гри.** При цьому i_0, j_0 називають **оптимальними чистими стратегіями** відповідно гравців 1 і 2.

Дослідження в матричних іграх починається зі знаходження сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, то знаходженням цієї сідлової точки закінчується дослідження гри. Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, то можна знайти нижню та верхню чисті ціни цієї гри, які вказують, що гравець 1 не повинен сподіватися на виграш більший, ніж верхня ціна гри, і може бути упевнений в отриманні виграшу не меншого за нижню ціну гри. Поліпшення розв'язання матричних ігор слід шукати у використанні секретності застосування чистих стратегій і можливості багатократного повторення ігор у вигляді серії партій. Цей результат досягається застосуванням чистих стратегій випадково, з певною ймовірністю.

Визначення 3. Змішаною стратегією гравця називається розподіл імовірностей на множині чистих стратегій.

Таким чином, якщо гравець 1 має m чистих стратегій {1,2...,m}, то його змішана стратегія x – це набір чисел $x = (x_1, ..., x_m)$, що задовольняють співвідношення:

$$x_i \geq 0, (i = 1,2...,m), \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Аналогічно для гравця 2, який має n чистих стратегій j = 1,2...,n, змішана стратегія y – це набір чисел y = (y1, ..., yn), що задовольняють співвідношення:

$$y^j \geq 0, (j = 1,2...,n), \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Чиста стратегія − це окремий випадок змішаної стратегії. Дійсно, якщо у змішаній стратегії яка-небудь і-та чиста стратегія застосовується з вірогідністю 1, то решта чистих стратегій не застосовується.

Для дотримання секретності кожен гравець застосовує свої стратегії незалежно від вибору іншого гравця.

Визначення 4. Середній виграш гравця 1 (програш гравця 2) в матричній грі з матрицею А виражається у вигляді математичного сподівання його виграшів (програшів гравця 2):

$$E\ (A, x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x\ A\ y^T$$

Змішана стратегія x першого гравця називається **захисною,** якщо вона максимізувала середній гарантований виграш першого гравця проти будь-якої змішаної стратегії другого гравця, тобто вибирається за **максимінним критерієм:**

$$\max_x \min_y E\ (A, x, y).$$

Отримана при цьому величина $\underline{\alpha} = \max_x \min_y E\ (A,\ x,\ y)$ називається **нижньою ціною** гри.

Змішана стратегія y другого гравця називається **захисною,** якщо вона мінімізує середній гарантований програш другого гравця проти будь-якої змішаної стратегії першого, тобто вибирається за **мінімаксним критерієм:**

$$\min_y \max_x E\ (A, x, y).$$

Отримана величина $\overline{\alpha} = \min_y \max_x E(A, x, y)$ називається **верхньою ціною гри.**

Подібно до ігор, що мають сідлові точки в чистих стратегіях, вводиться наступне визначення.

Визначення 5. Оптимальними змішаними стратегіями гравців 1 та 2 називаються такі змішані стратегії x_0, y_0, відповідно, які задовольняють рівності

$$\min_y \max_x E\ (A, x, y) = \max_x \min_y E\ (A, x, y) = E\ (A, x_0, y_0).$$

Величина $E\ (A, x_0, y_0)$ називається при цьому **ціною гри** і позначається через u.

Є й інше визначення оптимальних змішаних стратегій.

Визначення 6. Змішані стратегії x, y називаються **оптимальними** відповідно для гравців 1 та 2, якщо вони утворюють сідлову точку:

$$E\ (A, x, y_0) \le E\ (A, x_0, y_0) \le E\ (A, x_0, y)$$

Оптимальні змішані стратегії і ціна гри називаються **розв'язком матричної гри у змішаних стратегіях.** Дану гру у змішаних стратегіях з матрицею А позначатимемо через $\overline{\Gamma}_A$.

Теорема (про мінімакс). Для будь-якої матричної гри $\overline{\Gamma}_A$ величини $\underline{\alpha} = \max_x \min_y E\ (A, x, y)$ та $-\ \overline{\alpha} = \min_y \max_x E(A, x, y)$ існують і рівні між собою.

2. Ітеративний метод Брауна−Робінсон (метод фіктивного розіграшу)

Для **розв'язання** гри $\overline{\Gamma}_A$ − пошуку оптимальних змішаних стратегій можна використовувати ітеративний метод Брауна−Робінсон. Ідея методу полягає в багатократному фіктивному розігруванні гри із заданою матрицею виграшу.

Одне повторення гри називатимемо **партією.** У черговій партії гравці вибирають свої найкращі чисті стратегії проти **спостережуваного емпіричного розподілу** чистих стратегій супротивника.

Нехай розігрується гра з ($m\times n$)-матрицею A.

У 1-й партії обох гравців вибирають абсолютно довільні чисті стратегії i та j.

Нехай супротивниками на перших N кроках послідовно вибирали стратегії $(i_1, i_2, \ldots, i_N)$ і $(j_1, j_2, \ldots, j_N)$ та x_i^N, y_j^N – кількість кроків, на яких першим і другим гравцями вибиралися стратегії i та j відповідно. Очевидно, що $\sum_i^m x_i^N = \sum_j^n y_j^N = N$.

Позначимо відносні частоти застосування стратегій i та j через $p_i^N = \dfrac{x_i^N}{N}$ і $q_j^N = \dfrac{y_i^N}{N}$. Таким чином, на кроці N маємо спостережувані змішані стратегії $p^N = (p_1^N, p_2^N, \ldots, p_m^N)$ і $q^N = (q_1^N, q_2^N, \ldots, q_n^N)$. Ці вектори визначають емпіричний розподіл стратегій після перших N кроків.

На (N + 1) кроці гравці вибирають такі чисті стратегії i_{N+1} та j_{N+1}, що

$$\alpha^N = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^N = \sum_{j=1}^n a_{i_{N+1} j} q_j^N,$$

$$\beta^N = \min_{1\le i\le m} \sum_{i=1}^n a_{ij} p_j^N = \sum_{i=1}^n a_{i j_{N+1}} p_j^N.$$

Частоти стратегій перераховуються за такими формулами:

$$p_i^{N+1} = \begin{cases} \dfrac{N\cdot p_i^N}{N+1}, i \ne i_{N+1}, \\ \dfrac{N\cdot p_i^N + 1}{N+1}, i = i_{N+1}; \end{cases} \qquad q_j^{N+1} = \begin{cases} \dfrac{N\cdot q_j^N}{N+1}, j \ne j_{N+1}, \\ \dfrac{N\cdot q_j^N + 1}{N+1}, j = j_{N+1}; \end{cases}$$

Автори методу довели, що зі зростанням N емпіричні розподіли сходяться до оптимальних змішаних стратегій:

$$p^N \to p^*,\ q^N \to q^*,\ v^N = \frac{\alpha^N + \beta^N}{2} \to v.$$

Метод простий в описі та реалізації, складність однієї ітерації становить O(n+m). Недоліком методу є його повільна немонотонна збіжність. На практиці зупинка алгоритму відбувається після виконання великої кількості ітерацій.

Приклад 1

Виконати 12 ітерацій методу Брауна–Робінсон для розв’язання матричної гри з платіжною матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв’язання

Запишемо зміну емпіричних розподілів на кожному кроці алгоритму.

Крок 1

$i_1 = 1,\ j_1 = 1 \Rightarrow p^1 = (1, 0, 0),\ q^1 = (1, 0, 0).$

Крок 2

$\alpha^1 = 3,\ i_2 = 3,\ p^2 = (1/2, 0, 1/2),$

$\text{в}^1 = 1,\ j_2 = 1,\ q^2 = (1, 0, 0),$

$$v^1 = \frac{\alpha^1 + \beta^1}{2} = 2.$$

Крок 3

$\alpha^2 = 3,\ i_3 = 3,\ p^3 = (1/3, 0, 2/3),$

$\text{в}^2 = 3/2,\ j_3 = 3,\ q^3 = (2/3, 0, 1/3),$

$$v^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 9/4 = 2{,}25.$$

Крок 4

$\text{б}^3 = 7/3,\ i_4 = 3,\ p^4 = (1/4, 0, 3/4),$

$\text{в}^3 = 4/3,\ j_4 = 3,\ q^4 = (1/2, 0, 1/2),$

$$v^3 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} = 11/6 \approx 1{,}833.$$

Крок 5

$\alpha^4 = 5/2,\ i_5 = 2,\ p^5 = (1/5, 1/5, 3/5),$

$\text{в}^4 = 5/4,\ j_5 = 3,\ q^5 = (1/3, 0, 2/3),$

$$v^4 = \frac{\text{б}^4 + \text{в}^4}{2} = 11/6 = 1{,}875.$$

Крок 6

$\alpha^5 = 8/3,\ i_6 = 2,\ p^6 = (1/6, 2/6, 1/2),$

$\text{в}^5 = 8/5,\ j_6 = 3,\ q^6 = (1/4, 0, 3/4),$

$$v^5 = \frac{\text{б}^5 + \text{в}^5}{2} \approx 2{,}133.$$

Крок 7

$\text{б}^6 = 11/4,\ i_7 = 2,\ p^7 = (1/7, 3/7, 3/7),$

$\text{в}^6 = 11/6,\ j_7 = 3,\ q^7 = (1/5, 0, 4/5),$

$$v^6 = \frac{\alpha^6 + \beta^6}{2} \approx 2{,}291.$$

Крок 8

$\alpha^7 = 11/4,\ i_8 = 2,\ p^8 = (1/8, 1/2, 3/8),$

$\text{в}^7 = 11/6,\ j_8 = 2,\ q^8 = (1/6, 1/6, 2/3),$

$$v^7 = \frac{\alpha^7 + \beta^7}{2} = 11/6 \approx 2{,}257.$$

На подальших кроках отримаємо:

$v^8 \approx 2{,}02,\ v^9 \approx 1{,}98,\ v^{10} \approx 1{,}875,\ v^{11} \approx 1{,}984,\ v^{12} \approx 2{,}208.$

Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи

1. Який сенс мають змішані стратегії гри?

2. Як на практиці реалізувати вибір гравцем змішаної стратегії?

3. Якщо матрична гра має оптимальний розв'язок у чистих стратегіях, чи має вона оптимальний розв'язок у змішаних стратегіях?

4. В чому полягає ідея методу Брауна−Робінсон?

5. Що на практиці можна вибрати як критерій зупинки методу Брауна−Робінсон?

Задача лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань

1. Здійснити 10 ітерацій методу фіктивного розіграшу Брауна−Робінсон для розв'язання матричної гри.

2. Побудувати графік залежності наближеного значення ціни гри від номера ітерації.

Матрицю A вибрати самостійно відповідно до таких обмежень: у A має бути не менше чотирьох попарно різних елементів і таких, що їх величини перебувають у межах відрізка [C1, C2]. Розмірність матриці A і межі C1, C2 вибрати у таблиці відповідно до номера в журналі.

№	n	m	C1	C2	№	n	m	C1	C2
1	3	3	−4	5	16	2	6	5	11
2	3	4	−4	5	17	4	3	5	11
3	3	5	−4	5	18	4	5	5	11
4	2	6	−4	5	19	4	4	5	11
5	4	3	−4	5	20	6	2	5	11
6	4	5	−4	5	21	5	2	5	11
7	4	4	−4	5	22	5	3	5	11
8	6	2	−4	5	23	5	4	5	11
9	5	2	−4	5	24	5	5	5	11
10	5	3	−4	5	25	3	3	11	16
11	5	4	−4	5	26	3	4	11	16
12	5	5	−4	5	27	3	5	11	16
13	3	3	5	11	28	2	6	11	16
14	3	4	5	11	29	4	3	11	16
15	3	5	5	11	30	4	5	11	16

Лабораторна робота № 3
Графоаналітичний метод розв'язання матричних (2× n)-ігор та (m×2)-ігор

Мета роботи: отримати навики застосування графоаналітичного методу розв'язання матричних (2× n)-ігор та (m×2)-ігор.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал [3, 14].

2. Застосувати графоаналітичного метод розв'язання матричних (2× n)-ігор та (m×2)-ігор згідно з варіантом індивідуального завдання та провести необхідний аналіз, будуючи відповідні графіки за допомогою засобів додатка Microsoft Excel або середовища Matlab 6.1.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який має містити:

− постановку задачі;

− опис та аналіз ходу розв'язання задачі;

− висновки за результатом виконаної роботи.

1. Короткі теоретичні відомості

Серед матричних ігор, що мають практичне значення, порівняно рідко зустрічаються ігри з сідловою точкою; типовішим є випадок, коли нижня і верхня ціни гри різні. В цьому випадку шукають розв'язок матричної гри у змішаних стратегіях.

Визначення 1. Змішаною стратегією гравця називається розподіл імовірностей на множині його чистих стратегій.

Для матричної гри з матрицею $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ змішаною стратегією першого гравця буде вектор $x = (x_1, ..., x_m)$ такий, що

$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., m) \text{ та } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

а змішаною стратегією другого гравця − вектор $y = (y_1, ..., y_n)$ такий, що

$$y_j \geq 0, (j = 1, 2,\ldots, n) \text{ і } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Фон Нейман довів теорему (основну теорему матричних ігор) про те, що кожна матрична гра має принаймні один розв'язок (можливо, в області змішаних стратегій).

Виграш, отриманий у результаті розв'язання, називається ціною гри. З основної теореми виходить, що кожна кінцева гра має ціну.

Знаходження розв'язку матричної гри у змішаних стратегіях досить трудомістка процедура. Проте для окремих випадків матричної гри − для ігор розміру (2×n) та (m×2) розв'язки у змішаних стратегіях можна знайти порівняно просто за допомогою графоаналітичного (графічного) методу, який ґрунтується на теоремі Неймана і такому результаті:

$$V = \max_{0 \leq x \leq 1} \min_{1 \leq j \prec n} A(x, j) = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, y), \qquad (1)$$

де $A(x, j) = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}$, $A(i, y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$, а V − ціна гри.

Розглянемо (2×n)-гру. Хай перший гравець має дві чисті стратегії − A_1, A_2, а супротивник − n чистих стратегій: B_1, B_2, ..., B_n. Тоді змішана стратегія першого гравця має вигляд p = (x, 1−x), де $0 \le x \le 1$. Другий гравець при використанні своєї j-ї чистої стратегії проти змішаної стратегії p першого гравця отримує виграш: $y_j = a_{1j} \cdot x + a_{2j} \cdot (1-x)$, де j = 1, 2, ..., n. Виграш другого гравця є лінійною функцією від змішаної стратегії першого гравця.

Для знаходження значення гри і оптимальної змішаної стратегії першого гравця досить на відрізку [0,1] побудувати графіки сімейства лінійних функцій $y^j = a_{1j} \cdot x + a_{2j} \cdot (1-x)$, де j = 1, 2, ..., n та знайти точку максимуму x^0 функції $\min\limits_{1\le j\le n}(a_{1j}x + a_{2j}(1-x))$ − нижнього обвідного сімейства.

Розв'язок (m×2)-гри шукається аналогічним чином.

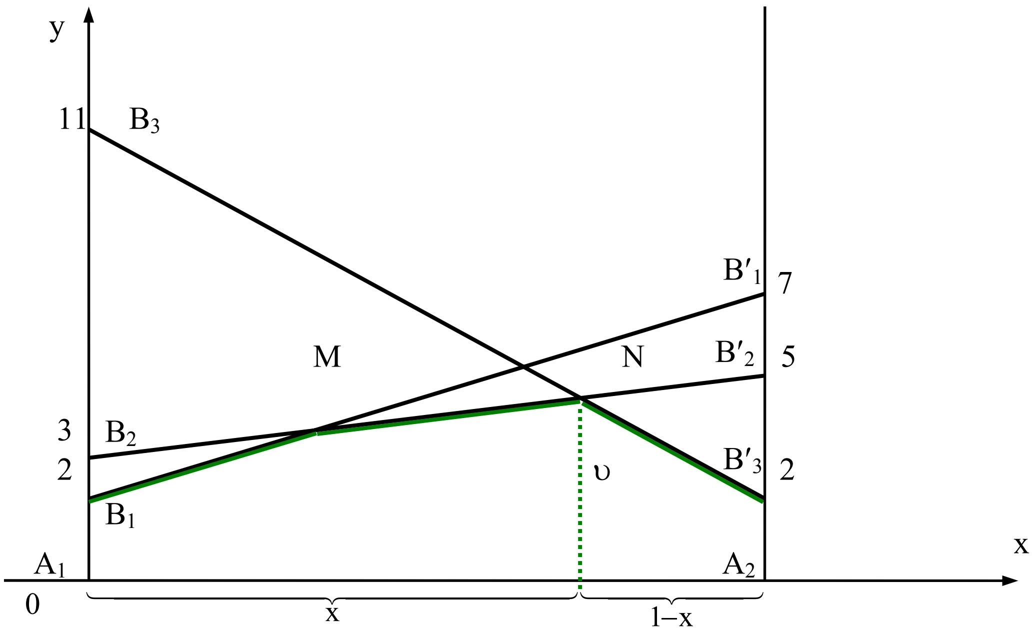
Пояснимо метод на прикладах.

Приклад 1

Розглянемо гру, задану платіжною матрицею.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{ccc} & 2 & \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На площині xOy введемо систему координат та на осі x відкладемо відрізок одиничної довжини A_1, A_2, кожній точці якого відповідатиме деяка змішана стратегія першого гравця (x, 1−x). Зокрема, точці A_1 = (0;0) відповідає стратегія A_1, точці A_2 = (1;0) − стратегія A_2 і так далі.



У точках A_1 та A_2 відновимо перпендикуляр і на отриманих прямих відкладатимемо виграші гравців. На першому перпендикулярі (в даному випадку він збігається з віссю y) відкладемо виграш гравця 1 при стратегії A_1, а на другому − при стратегії A_2. Якщо гравець 1 застосує стратегію A_1, то виграє при стратегії B_1 другого гравця − 2, при стратегії B_2 − 3, а при стратегії B_3 − 11. Числам 2, 3, 11 на осі x відповідають точки B_1, B_2 та B_3.

Якщо ж гравець 1 застосує стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 дорівнює 7, при B_2 − 5, а при B_3 − 2. Ці числа визначають точки B'_1, B_2', B_3 на перпендикулярі, відновленому в точці A_2. З'єднавши між собою точки B_1 та B'_1, B_2 та B'_2, B_3 та B'_3, отримаємо три прямі, відстань до яких від осі x визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій. Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізка $B_1B'_1$ до осі x визначає середній виграш υ_1 при будь-якому поєднанні стратегій A_1 та A_2 (з частотами x та 1−x) і стратегією B_1 гравця 2. Ця відстань дорівнює $2x_1 + 6(1-x_2) = \upsilon_1$

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній $B_1MNB'_3$ визначають мінімальний виграш гравця 1 при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці N; отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $X^* = (x, 1-x)$, а її ордината дорівнює ціні гри υ. Координати точки N знаходимо як точку перетину прямих B_2 B'_2 та B_3 B'_3.

Відповідні два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 3x + 5(1-x) = \upsilon \\ 11x + 2(1-x) = \upsilon \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{11}, \upsilon = \frac{49}{11}.$$

Отже, $X = (\frac{3}{11}; \frac{9}{11})$, при ціні гри $\upsilon = \frac{49}{11}$. Таким чином, ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Оптимальні стратегії для гравця 2 можна знайти за системою

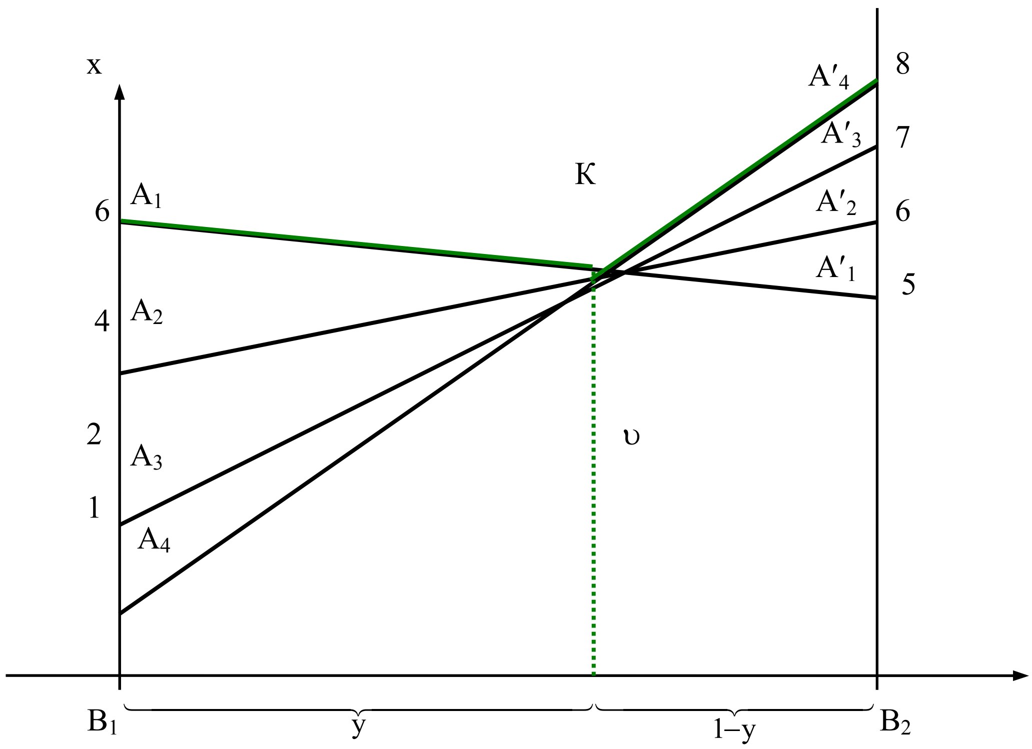
$$\begin{cases} 3y + 5(1-y) = \upsilon \\ 5y + 2(1-y) = \upsilon \end{cases} \Rightarrow y = \frac{9}{11},$$

тому $Y = (0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11})$. (З рисунка видно, що стратегія B1 не увійде до оптимальної стратегії).

Приклад 2

Знайти розв'зок гри, заданої матрицею

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$



Розв'язання. Матриця має розмірність 2×4. Будуємо прямі, що відповідають стратегіям гравця 1. Ламана $A_1KA'_4$ відповідає верхній межі виграшу гравця 1, а відрізок NK − ціні гри. Розв'язок гри такий $Y = (\frac{3}{8}; \frac{5}{8})$; $X = (\frac{7}{8}; 0; 0; \frac{1}{8})$; $\upsilon = \frac{43}{8}$.

Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи

1. Як графічно виявляється співвідношення (1)?

2. Описати процедуру графоаналітичного розв'язання (m×2)-гри.

3. Чи може (2× n)-гра мати нескінчену множину розв'язків?

4. Чому точка максимуму x^0 нижнього обвідного сімейства функцій $y_j = a_{1j}x + a_{2j}(1-x)$ є розв'язком (2× n)-гри?

Задача лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань

1. Вибрати матрицю A розміру (2× n) і таку, що має сідлову точку, та знайти розв'язання відповідної гри в чистих стратегіях і, використовуючи графічний метод, знайти розв'язання цієї ж гри у змішаних стратегіях. Визначити ціну гри, результати порівняти.

2. Вибрати матрицю A розміру (2× n) і таку, що не має сідлової точки і, використовуючи графічний метод, знайти розв'язання відповідної гри у змішаних стратегіях. Визначити ціну гри.

3. Вибрати матрицю A розміру (m× 2) і таку, що вона має сідлову точку та знайти розв'язання відповідної гри в чистих стратегіях і, використовуючи гра-

фічний метод, знайти розв’язання цієї ж гри у змішаних стратегіях. Визначити ціну гри, результати порівняти.

4. Вибрати матрицю А розміру $(m \times 2)$ і таку, що вона не має сідлової точки і, використовуючи графічний метод, знайти розв’язання відповідної гри у змішаних стратегіях. Визначити ціну гри.

У матриці А повинно бути не менше трьох попарно різних елементів і обов’язково мають бути задіяні числа C1, C2. Розмірність матриці А та числа C1, C2 вибрати в поданій таблиці відповідно до номера в журналі:

№	n	m	C1	C2	№	n	m	C1	C2
1	3	3	−4	5	16	3	5	0	62
2	3	4	−2	6	17	4	3	15	18
3	3	5	0	7	18	4	5	−2	11
4	4	5	10	15	19	4	4	25	32
5	4	3	−14	5	20	6	3	−5	40
6	4	5	2	21	21	5	5	3	12
7	4	4	−24	0	22	5	3	−7	13
8	5	3	32	43	23	5	4	8	22
9	5	4	−10	25	24	5	5	14	19
10	5	3	−40	−25	25	3	3	1	16
11	5	4	−6	3	26	3	4	−8	1
12	5	5	−41	35	27	3	5	−11	26
13	3	4	15	34	28	3	4	−3	12
14	3	4	23	31	29	4	3	10	20
15	3	5	25	54	30	4	5	−6	6

Лабораторна робота № 4
Елементи теорії кооперативних ігор

Мета роботи: знайомство з кооперативними моделями конфліктних ситуацій та придбання навиків аналізу і розв'язання кооперативних ігор.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал [7, 11, 12].

2. Проаналізувати і знайти розв'язки кооперативної гри згідно з варіантом індивідуального завдання. Необхідні розрахунки виконувати за допомогою середовища Matlab 6.1.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити:

− постановку задачі;

− опис та аналіз ходу розв'язання задачі;

− висновки за результатом виконаної роботи.

1. Короткі теоретичні відомості

Нехай N = {1, 2, .., n} − множина всіх гравців, а S − будь-яка його підмножина. Множини S називатимемо **коаліціями.** Очевидно, що кількість коаліцій, які складаються з k гравців, дорівнює C_n^k − числу поєднань з n по k, а кількість всіляких коаліцій дорівнює $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Гру називають **кооперативною,** якщо в ній гравцям дозволяється обговорювати перед грою свої стратегії та домовлятися про сумісні дії (добровільно обмінюватися інформацією, спільно вибирати стратегії, передавати частину виграшу один одному і тому подібне), інакше кажучи, гравці можуть утворювати коаліції. Теорія кооперативних ігор досліджує типи коаліцій, що утворюються в процесі гри та умови, необхідні для їх стійкого існування.

Утворивши коаліцію, множина гравців S діє як один гравець проти решти, і виграш цієї коаліції залежить від вживаних стратегій кожним з n гравців. Спільність інтересів гравців з S означає, що виграш об'єднаного гравця становить суму виграшів гравців, що входять в S.

У кооперативній грі можливості коаліції S можна охарактеризувати одним числом V(S), що є максимальним гарантованим сумарним виграшем гравців коаліції S у найбільш несприятливих для неї умовах − коли решта гравців також об'єднується в коаліцію з протилежними інтересами.

Визначення 1. Функція V, що ставить у відповідність кожній коаліції S найбільший виграш V(S), який вона може отримати, називається **характеристичною** функцією.

Визначення 2. Якщо для всіх підмножин A та B, що не мають спільних елементів, виконується нерівність

$$V(A \cup B) \geq V(A) + V(B), \tag{1}$$

то характеристична функція V називається **супераддитивною.**

Кооперативна гра Г = (N, V) задана у **формі характеристичної функції,** якщо вказана множина гравців N та супераддитивна характеристична функція V.

Супераддитивність означає, що якщо немає жодного гравця, який входив би одночасно в обидві коаліції А та В, то коаліція, як об'єднання цих двох підмножин, матиме виграш не менший, ніж сума виграшів коаліцій А та В, тобто об'єднання гравців в коаліції є доцільним з погляду збільшення виграшу. Тому припущення про супераддитивність цілком логічне, оскільки створення коаліцій було б безглуздим, якби величина виграшу зменшувалася зі збільшенням кількості учасників коаліції.

Основна проблема, що виникає для кооперативних ігор, − введення для них поняття оптимального результату, а також з'ясування умов існування оптимальних результатів і розробка способів їх пошуку.

Однією з форм супераддитивності характеристичної функції (найслабшою її формою) є її **аддитивність,** при якій нерівність (1) перетворюється на рівність:

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B) \text{ для всіх } A, B \subset N, A \cap B = \varnothing. \quad (2)$$

Аддитивність характеристичної функції відображає незацікавленість гравців в утворенні яких-небудь коаліцій.

Теорема 1. Для того, щоб характеристична функція була аддитивною, необхідно і достатньо виконання рівності

$$\sum_{i \in N} V(i) = V(N). \quad (3)$$

Визначення 3. Кооперативна гра з аддитивною характеристичною функцією називається **неістотною.**

Гра (N,V) називається **істотною** в тому випадку, якщо

$$\sum_{i \in N} V(i) < V(N). \quad (4)$$

Основне завдання в кооперативних іграх полягає у поділі загального виграшу між членами коаліції. Навіть у тому випадку, коли гра істотна, не завжди гравці захочуть об'єднуватися, оскільки вони не знають правил поділу додаткового виграшу, що виникає у результаті їх об'єднання в коаліцію. Якщо в результаті поділу виграш деякого члена коаліції буде меншим того виграшу, який він отримав би, діючи самостійно, то він не захоче входити в дане об'єднання.

Визначення 4. Вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який задовольняє умови:

$$x_i \geq V(i) \text{ для всіх } i \in N, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} x_i = V(N), \quad (6)$$

називається **поділом.**

В даному випадку вектор X визначає виграш кожного гравця, який він отримає під час поділу загального виграшу між усіма членами коаліції.

Умова (4) називається **умовою індивідуальної раціональності,** сенс якої полягає в тому, що об'єднуватися вигідно тільки у тому випадку, коли кожен гравець, що увійшов до коаліції, отримає під час поділу загального виграшу суму не меншу, ніж та, яку він міг би отримати, діючи самостійно, не об'єднуючись з іншими гравцями ні в які коаліції.

Умова (5) називається **умовою колективної раціональності** і означає, що гравці повинні ділити між собою реально можливий виграш.

Таким чином, вектор $X = (x_1\ x_2, ..., x_n)$, що відповідає умовам індивідуальної і колективної раціональності, називається **поділом для характеристичної функції V.**

Визначення 5. Система (N, V), що складається з множини гравців, характеристичної функції над цією множиною та множиною поділів, що задовольняють співвідношенням (4) та (5) називається **класичною кооперативною грою.**

Класичні кооперативні ігри нерідко називають іграми у формі характеристичної функції.

Теорема 2. Для того, щоб вектор $X = (x_1\ x_2, ..., x_n)$ був поділом в класичній кооперативній грі (N, V), необхідно і достатньо виконати умови:

$$x_i = V(i) + a_i, \tag{7}$$

де $i \in N$, при цьому $a_i \geq 0$, $\sum_{i\in N} a_i = V(N) - \sum_{i \in N} V(i)$.

Теорема 3. У неістотній грі є тільки один поділ:

$$[V(1), V(2), ..., V(n)] \tag{8}$$

У будь-якій істотній грі з більш ніж одним гравцем множина поділів нескінченна.

Поняття поділу є одним із центральних в теорії кооперативних ігор, оскільки сам поділ, що виникає як результат угоди гравців, є **розв'язком** гри.

Щоб виявити які з множини поділів можуть стати розв'язками гри, вводиться поняття домінування, що дозволяє порівнювати поділи за перевагою.

Визначення 6. Поділ X **домінує** над поділом Y в коаліції S, що позначається як ($X \overset{S}{\succ} Y$), якщо виконуються наступні співвідношення:

1) $x_i > y_i$ для всіх $i \in S$;

2) $\sum_{i\in S} x_i \leq V(S)$

Умова 1) означає, що поділ X краще за поділ Y для всіх членів коаліції S, тобто відображає необхідність «**одноголосності»** в перевазі з боку коаліції, а умова 2) означає реальну можливість коаліції S запропонувати кожному гравцеві, що увійшов до її складу, величину виграшу x_i.

Домінування можливе не у всякій коаліції. Зокрема домінування неможливе в коаліції, що складається з одного гравця, а також у множині всіх гравців N.

Визначення 7. Поділ X називають **недомінованим**, якщо не існує поділу Y і коаліції S таких, що $X \overset{S}{\succ} Y$.

Визначення 8. Кооперативна гра (N, V) називається **еквівалентною** грі (N, V'), що позначається як (N, V) ~ (N, V'), або $V \sim V'$, якщо існує позитивне число k та дійсні числа c_i (i= 1, 2, ..., n) такі, що для будь-якої коаліції $S \subset N$ виконується рівність: $V'(S) = k \cdot V(S) + \sum_{i\in S} c_i$.

Для еквівалентних ігор виконуються такі властивості:

а) **рефлексивність:** $V \sim V$;

б) **симетричність:** якщо $V \sim V'$, то $V' \sim V$;

в) **транзитивність:** якщо $V \sim V'$ і $V' \sim V''$, то $V \sim V''$.

Теорема 4. Якщо $V \sim V'$, то відображення $X \to X'$, де $x_i' = k \cdot x_i + c_i$, $i \in N$, встановлює таке взаємно однозначне відображення множини всіх поділів гри V на множину поділів гри V', що з $X \overset{S}{\succ} Y$ випливає − $X' \overset{S}{\succ} Y'$.

Визначення 9. Гра (N, V) називається грою в **0-1 спрощеній формі,** якщо V(i)= 0 для всіх $i \in N$, V(N) = 1.

Теорема 5. Кожна істотна кооперативна гра еквівалентна одній і лише одній грі в 0-1 спрощеній формі.

З теореми 4 випливає, що істотні ігри можна вивчати за їх 0-1 спрощеними формами.

Якщо V − характеристична функція довільної істотної гри (N,V), то

$$V'(S) = \frac{V(S) - \sum_{i \in S} V(i)}{V(N) - \sum_{i \in N} v_i} \tag{9}$$

є **0-1 нормалізацією** відповідної функції V.

Поділом у грі, поданій в 0-1 спрощеній формі, є вектор X, компоненти якого відповідають таким умовам:

$$x_i \ge 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{10}$$

Приклад 1

Припустімо, що:

V(l) = 100; V(2) = 150; V(3) = 200; V(l, 2) = 300; V(l, 3) = 350; V(2, 3) = 420; V(l, 2, 3) = 550. Тоді значення цієї функції, виражені в 0-1 спрощеній формі, матимуть вигляд:

V'(Ø) = 0; V'(1) = V'(2) = V'(3) = 0;

$$V'(1,2) = \frac{V(1,2) - \sum_{i=1}^{2} v_i}{V(N) - \sum_{i \in N} v_i} = \frac{300 - (100 + 150)}{550 - (100 + 150 + 200)} = 0{,}5,$$

$$V'(1,3) = \frac{V(1,3) - \sum_{i=1,3} v_i}{V(N) - \sum_{i \in N} v_i} = \frac{350 - (100 + 200)}{550 - (100 + 150 + 200)} = 0{,}5,$$

$$V'(2,3) = \frac{V(2,3) - \sum_{i=2,3} v_i}{V(N) - \sum_{i \in N} v_i} = \frac{420 - (150 + 200)}{550 - (100 + 150 + 200)} = 0{,}7,$$

$V'(1, 2, 3) = 1$.

Розглянемо деякі аспекти, що дозволяють зрозуміти відмінність поділу від недомінованого поділу, а також які вимоги окрім індивідуальної та колективної раціональності, можуть пред'являти гравці до поділу X. Деяка коаліція S може заперечувати проти цього поділу, оскільки вважає, що її інтереси недостатньо враховані у поділі спільного виграшу, отриманого від об'єднання всіх учасників гри. В тому випадку, якщо її вимога не буде врахована, коаліція S загрожує не входити в кооперацію з множиною гравців N\S. На загрозу коаліції S решта гравців, що не увійшли до неї, також відповідає **стабілізаційною** загрозою, яка полягає в тому, що гравці множини N\ S об'єднується в одну коаліцію, що протистоїть коаліції S. У цьому разі максимальний гарантований виграш коаліції S становитиме V(S).

Таким чином, для попередження реалізації погроз треба враховувати інтереси і можливості кожної з коаліцій. Отже, поділ X*, що враховує можливості кожної з коаліцій, яку могли б організувати учасники гри, домінуватиме поділ X, яке ігнорує ці погрози. Поділ X* відрізняється від недомінованого поділу X тим, що крім задоволення вимог індивідуальної та колективної раціональності, він відповідає також і вимогам коаліційної раціональності.

Формально вимоги коаліційної раціональності виражаються в системі додаткових обмежень, яким мають відповідати недоміновані поділи.

Визначення 10. Множина недомінованих поділів кооперативної гри називається **С-ядром.**

Теорема 6. Поділ X належить С-ядру кооперативної гри з характеристичною функцією V тільки тоді, коли виконується система нерівностей:

$$V(S) \le X(S) = \sum_{i \in S} x_i \text{ для всіх } S \subset N.$$

С-ядро є замкнутою, опуклою підмножиною множини поділів.

Проілюструємо систему нерівностей, яку мають задовольняти поділи, що належать С-ядру, на прикладі розглянутої вище кооперативної гри трьох осіб, поданої в 0-1 спрощеній формі.

Приклад 2

Припустімо, що:

V(l) = 100; V(2) = 150; V(3) = 200; V(l, 2) = 300; V(l, 3) = 350; V(2, 3) = 420; V(l, 2, 3) = 550.

Тоді значення цієї функції, виражені в 0-1 спрощеній формі, матимуть вигляд:

$V'(\emptyset) = 0$; $V'(1) = V'(2) = V'(3) = 0$; $V'(l, 2) = 0{,}5$; $V'(l, 3) = 0{,}5$; $V'(2, 3) = 0{,}7$.

Отже, необхідною і достатньою умовою того, щоб поділ X належав С-ядру, є виконання наступних нерівностей:

$$V'(l, 2) = 0{,}5 \le x'_1 + x'_2,$$

$$V'(l, 3) = 0{,}5 \le x'_1 + x'_3,$$

$$V'(2, 3) = 0{,}7 \le x'_2 + x'_3,$$

де X' спрощена форма поділу X.

Множина поділів, що належать С-ядру, має задовольняти умови індивідуальної, колективної і **коаліційної раціональності** (останнє означає, що повинні виконуватися умови теореми 6).

2. Розв'язок за Нейманом−Моргенштерном

Розглянуте нами С-ядро включає множину поділів, кожний з яких є недомінованим якими-небудь іншими поділами. Проте ідеальним було б знаходження такого поділу, який не тільки був би недомінованим якими-небудь іншими поділами, але і сам домінував би над будь-яким іншим поділом. На жаль, такого поділу знайти не вдається.

Дж. фон Нейман та О. Моргенштерн запропонували розглядати таку підмножину поділів, яка відповідає наступним двом властивостям:

a) **зовнішня стійкість**, тобто домінування над будь-якими поділами, які не належать цій підмножині;

b) **внутрішня стійкість**, тобто поділи, що належать цій підмножині, не домінують один над одним.

Формалізація цих вимог призводить до такого визначення.

Визначення 11. Підмножину поділів R кооперативної гри (N, V) називають **розв'язком за Нейманом−Моргенштерном** (або **Н−М розв'язком**) якщо:

1) з того, що $X \succ Y$ випливає, що або $X \notin R$, або $Y \notin R$; (внутрішня стійкість);

2) для будь-якого $X \notin R$ існує такий $Y \in R$, що $Y \succ X$ (зовнішня стійкість).

Між С-ядром кооперативної гри та її Н−М розв'язком є зв'язок, що виражається поданою нижче теоремою.

Теорема 7. Якщо в кооперативній грі є С-ядро і R є Н−М розв'язком, то $C \subset R$.

Слід зазначити, що Н−М розв'язок кооперативної гри не може складатися тільки з одного поділу.

Теорема 8. Якщо деякий Н−М розв'язок кооперативної гри (N, V) складається з єдиного поділу X, то характеристична функція V є неістотною.

Слід зазначити, що є кооперативні ігри, які не мають Н−М розв'язків. Крім того, багато кооперативних ігор мають більше одного розв'язку, тому принцип оптимальності, що призводить до Н−М розв'язків, не в змозі дати гравцям один варіант поділу виграшу. Особливо відзначимо, що розв'язання істотних кооперативних ігор складаються більш ніж з одного поділу. Отже, вибір конкретного Н−М рішення ще не визначає величину виграшу кожного з гравців.

Теорема 9. Якщо для кооперативної гри (N, V) характеристична функція якої подана в 0-1 спрощеній формі, виконуються нерівності

$$V(S) \le \frac{1}{n - |S| + 1}, \tag{11}$$

де n − кількість членів в коаліції (N), |S| − кількість членів в коаліції S, то С-ядро такої гри не порожнє і є Н−М розв'язком.

Слід зазначити, що якщо Н−М розв'язок існує, а С-ядро непорожнє, то Н−М розв'язок містить С-ядро.

Використовуючи дану теорему, визначимо, чи є С-ядро даної гри з прикладу 1 непорожньою множиною.

Для наявних даних:

V'(0) = 0; V'(1) = V'(2) = V'(3) = 0; V'(l,2) = 0,5; V'(l,3) = 0,5; V'(2,3) = 0,7; V'(l,2,3)= l.

Перевіримо виконання системи нерівностей:

V'(l) = V'(2) = V'(3) = 0 < 1/(3 − 1 + 1) = 1/3,

V'(l,2) = 0,5 < 1/(3 − 2 + 1) = 0,5,

V'(2,3) = 0,7 > 1/(3 − 2 + 1) = 0,5.

Оскільки умова для V'(2,3) не виконується, то не можна зробити висновок про те, що С-ядро розглянутої кооперативної гри (N, V) непорожнє.

Приклад 3

Розглядається кооперативна гра з трьома гравцями. Відомі значення характеристичної функції, що визначають відповідно виграші першого, другого і третього гравців, коли кожен із них грає поодинці, не кооперуючись ні з ким з інших гравців:

V(l) = 1200; V(2) = 1500; V(3) = 1800.

Виграші, які можуть забезпечити собі гравці, діючи попарно, становлять:

V(l,2) = 2900; V(l,3) = 3300; V(2,3) = 3500.

Загальний виграш, який можуть забезпечити собі гравці, утворюючи максимально велику коаліцію N, що складається з трьох гравців дорівнює: V(l, 2, 3)= 6000.

Необхідно визначити, чи вигідно гравцям об'єднувати свої зусилля і якщо так, то на яких умовах? Основним критерієм, який використовує кожен із гравців для ухвалення рішення, є максимізація виграшу.

Розв'язання. Кількість підмножин, на яких визначена характеристична функція V, дорівнює $2^3 = 8$. Вона складається з трьох одноелементних коаліцій, трьох двоелементних коаліцій, однієї трьохелементної коаліції і порожньої множини, для якої V(Ø) = 0.

Визначимо, яким чином формуються непересічні коаліції S і Q. Якщо частина гравців з N входить в коаліцію S, то всі інші гравці утворюють коаліцію Q, яка формується за правилом Q = N\S. Таким чином, якщо S є одноелементною коаліцією, що складається з першого гравця, то до коаліції Q увійдуть другий і третій гравці; якщо ж до коаліції S увійдуть перший і другий гравці, то коаліція Q складатиметься тільки з третього гравця і так далі.

Перевіримо виконання властивості супераддитивності для такого прикладу.

Нехай S = {1}, тоді Q = {2,3}; V(l) + V(2,3)< V(S Q) = V(N)
1200 + 3500 = 4700 < 6000.

Нехай S = {2}, тоді Q = {1,3}; V(2) + V(l,3) < V(S Q) = V(N)
1500 + 3300 = 4800 < 6000.

Нехай S = {3}, тоді Q = {1,2}; V(3) + V(l,2)< V(S Q) = V(N)
1800 + 2900 = 4700 < 6000.

Оскільки кожна з розглянутих нерівностей відповідає умові (1), можна зробити висновок, що характеристична функція є супераддитивною. Це свідчить про доцільність об’єднання гравців з погляду збільшення виграшу.

Тепер перевіримо, чи є дана гра істотною:

$$\sum_{i\in N} V(i) = 1200 + 1500 + 1800 = 4500 < V(N) = 6000,$$

тобто виконується нерівність (2). Отже, дана гра є істотною і її розв’язок слід шукати у множині недомінованих поділів.

Представимо дану гру в 0-1 спрощеній формі. Оскільки $V'(i) = 0$ для всіх $i \in N$ і $V'(N) = 1$, то $V'(1) = V'(2) = V'(3) = 0$; $V'(1,2,3) = 1$.

Щоб визначити інші значення характеристичної функції, скористаємося формулою (9).

$$V'(1,2) = \frac{V(1,2) - \sum_{i=1}^{2} v_i}{V(N) - \sum_{i\in N} v_i} = \frac{2900 - (1200 + 1500)}{6000 - (1200 + 1500 + 1800)} = 2/15,$$

$$V'(1,3) = \frac{V(1,3) - \sum_{i=1,3} v_i}{V(N) - \sum_{i\in N} v_i} = \frac{3300 - (1200 + 1500)}{6000 - (1200 + 1500 + 1800)} = 0{,}2,$$

$$V'(2,3) = \frac{V(2,3) - \sum_{i=2,3} v_i}{V(N) - \sum_{i\in N} v_i} = \frac{3500 - (1500 + 1800)}{6000 - (1200 + 1500 + 1800)} = 2/15,$$

$V'(1,2,3) = 1.$

Для того, щоб переконатися, що С-ядро непорожнє, слід перевірити виконання умов (11):

1) для одноелементних коаліцій:

$V'(i) = 0 < 1(3 - 1 + 1) = 1/3;$

2) для двоелементних коаліцій:

$V'(1, 2) = 2/15 < 1/(3 - 2 + 1) = 1/2;$

$V'(1, 3) = 0{,}2 < 1/(3 - 2 + 1) = 1/2;$

$V'(2, 3) = 2/15 < 1/(3 - 2 + 1) = 1/2;$

3) для трьохелементних коаліцій:

$V'(1, 2, 3) = 1 = 1/(3 - 3 + 1) = 1.$

Оскільки характеристична функція гри, подана у 0-1 спрощеній формі, задовольняє систему обмежень (11), то С-ядро такої системи непорожнє і будь-який поділ, що належить С-ядру, є розв’язком гри.

Відповідно до теореми про необхідні і достатні умови належності поділу С- ядру, маємо:

$V'(1) = 0 < x'_1,$

$V'(2) = 0 < x'_2,$

$V'(3) = 0 < x'_3,$

$V'(1,2) = 2/15 < x'_1 + x_2$,

$V'(1,3) = 0,2 < x'_1 + x'_3$,

$V'(2,3) = 2/15 < x'_2 + x'_3$,

$V'(1,2,3) = 1 = x'_1 + x'_2 + x'_3$.

Розглянутій системі обмежень відповідатиме вектор $X' = (x'_1 = 0,3;\ x'_2 = 0,3;\ x'_3 = 0,4)$. Щоб знайти відповідний йому вектор X, скористаємося взаємно однозначною відповідністю множини всіх поділів в еквівалентних іграх, згідно з яким:

$$x'_i = k\,x_i + c_i \text{ і } x_i = k'\,x'_i + c'_i \ (i \in N), \text{ де } k' = V(N) - \sum_{i \in N} V(i),\ c'_i = V(i).$$

Тоді

$x_1 = k'\,x'_1 + c'_1 = [6000 - (1200 + 1500 + 1800)] - 0,3 + 1200 = 1650$,

$x_2 = k'\,x'_2 + c'_2 = [6000 - (1200 + 1500 + 1800)] - 0,3 + 1500 = 1950$,

$x_3 = k'\,x'_3 + c'_3 = [6000 - (1200 + 1500 + 1800)] - 0,4 + 1800 = 2400$.

Таким чином

$$\sum_{i \in N} V(i) \quad \sum_{i=1}^{3} x_i = 1650 + 1950 + 2400 = 6000.$$

Слід зазначити, що знайдений розв'язок гри буде не єдиним.

3. Вектор Шеплі

Недоліки класичних H−M розв'язків призвели до необхідності їх модифікацій. Зокрема вводяться так звані ігри з обов'язковими угодами. У цих іграх учасники прагнуть до кооперації, яка дозволена правилами та критеріями економічної корисності для гравців тієї або іншої коаліції. Крім того, в грі присутній **арбітр,** у функції якого входить поділ. Коли гравці схвалюють основні принципи поділу загального виграшу і сформований арбітром поділ, то в подальшому ніхто з них не заперечуватиме проти такого поділу. В цьому випадку поділ, запропонований арбітром, можна розглядати як розв'язок кооперативної гри. Якщо ж гравці не згодні з принципами поділу загального виграшу, то кожен із них матиме тільки той виграш, який він може забезпечити собі, діючи самостійно.

Поділ, запропонований арбітром, має відповідати таким вимогам:

1) бути справедливим до всіх членів коаліції;

2) мати алгоритм формування цього поділу;

3) бути єдиним, що задовольняє дану систему принципів (аксіом).

Розглянемо арбітражне рішення, запропоноване Шеплі. Всі учасники кооперативної гри діляться на «бовдурів» і «носіїв». Гравець називається «**бовдуром» (b),** якщо він не здатний збільшити виграш жодної з коаліцій S, до якої б він не приєднався, тобто для нього виконується співвідношення:

$$V(S \cup b) = V(S) + V(b) \text{ для } \forall b \in B \subset N, \qquad (12)$$

де B − множина «бовдурів» у грі (N, V).

Підмножина всіх «небовдурів» називається **носієм** гри, тобто це множина D = N\b, для якої виконується

$$V(S) = V(S \cap D) \qquad (13)$$

для $\forall S \subset N$.

Процедура формування коаліцій передбачає, що:

1) кожен із гравців має свій порядковий номер;

2) гравці беруть участь у переговорах не за порядковими номерами, а в послідовності, яка формується випадково з рівними ймовірностями;

3) кожен із гравців бере участь в переговорах, коли інші гравці вже утворили коаліцію S\i. Тому його внесок під час приєднання до цієї коаліції становитиме величину [V(S)−V(S\i)].

Арбітр кожній кооперативній грі (N, V) може поставити у відповідність вектор Шеплі: $\Phi(V) = (\phi_1(V), \phi_2(V), ..., \phi_n(V))$, компоненти якого інтерпретуються як міра цінності гравців для коаліції у результаті поділу загального виграшу, який дало об’єднання всіх учасників гри.

Припущення, на яких ґрунтується арбітражне рішення, були описані Шеплі як система аксіом:

1. Аксіома симетрії стверджує, що виграші гравців не залежать від їх порядкових номерів у довільній перестановці.

2. Оптимальність за Парето означає, що не існує варіанту поділу загального виграшу V(N), отриманого в результаті об’єднання всіх учасників кооперативної гри, в якому виграш хоч би одного з гравців збільшився, не зменшуючи виграші інших гравців.

3. Аксіома ефективності означає, що в поділі загального виграшу, отриманого від об’єднання всіх гравців «бовдур» не бере участь, тобто якщо для будь-якої коаліції S N виконується рівність V(S{i}) = V(S), то ф(V) = 0.

Це обумовлено тим, що «бовдур» невигідний для коаліції, оскільки його приєднання до неї не збільшить виграш.

4. Аксіома агрегації стверджує: якщо гравець бере участь у двох іграх (N,V) та (N, U), то його сумарний виграш визначатиметься як сума виграшів ф(V) та ф(U), отриманих у кожній з цих ігор.

Будь-яка кооперативна гра (N, V) має тільки один поділ Шеплі, що обумовлено існуванням і єдиністю функції Ф, яка відповідає аксіомам 1)−4). При цьому величина платежів залежить від «сили» кожного гравця і враховується виходячи зі значення додаткового виграшу, який може отримати коаліція, якщо даний гравець увійде до неї.

Теорема 10. Для будь-якої кооперативної гри Г = (N, V) існує єдина функція Шеплі, компоненти якої (компоненти вектора Шеплі) визначаються рівністю:

$$ц_i(V) = \phi(i) = \sum_{S \subset N: i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}[V(S) - V(S \setminus \{i\})].$$

Приклад 4

Розглядається кооперативна гра з трьома гравцями. Відомі значення характеристичної функції, визначені відповідно до виграшів першого, другого і третого гравців, коли кожен з них грає поодинці, не кооперуючись ні з ким з інших гравців:

$V(1) = 1200$; $V(2) = 1500$; $V(3) = 1800$.

Виграші, які можуть забезпечити собі гравці, діючи попарно, становлять:

$V(1, 2) = 2700$; $V(1, 3) = 3000$; $V(2, 3) = 4000$.

Спільний виграш, який можуть забезпечити собі гравці, утворюючи максимально велику коаліцію N, що складається з трьох гравців дорівнює:

$V(1, 2, 3) = 5200$.

У даній грі:

$V(1, 2) = V(1 \cup 2) = 2700$; $V(1) + V(2) = 1200 + 1500 = 2700$.

Отже, $V(1 \cup 2) = V(1) + V(2)$.

$V(1, 3) = V(1 \cup 3) = 3000$; $V(1) + V(2) = 1200 + 1800 = 3000$.

Отже, $V(1 \cup 3) = V(1) + V(3)$.

$V(2,3) = V(2 \cup 3) = 4000$; $V(2) + V(3) = 1500 + 1800 = 3300$.

Отже, $V(2 \cup 3) > V(2) + V(3)$.

$V(1,2,3) = V(1 \cup 2 \cup 3) = 5200$; $V(1) + V(2 \cup 3) = 1200 + 4000 = 5200$.

Отже, $V(1 \cup 2 \cup 3) = V(1) + V(2 \cup 3)$.

Таким чином, в даній грі «бовдуром» є перший гравець, оскільки його приєднання до будь-якої з можливих коаліцій не збільшує її виграш. «Носієм» гри є другий і третій гравці.

Для визначення можливих виграшів кожного з гравців у разі їх об'єднання може бути використаний вектор Шеплі:

$$\text{ф}_1(V) = \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[V(1,2,3) - V(2,3)] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(1,2) - V(2)] +$$
$$+ \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(1,3) - V(3)] + \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[V(1) - 0] = 1200;$$

$$\text{ф}_2(V) = \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[V(1,2,3) - V(1,3)] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(1,2) - V(1)] +$$
$$+ \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(2,3) - V(3)] + \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[V(2) - 0] = 1850;$$

$$\text{ф}_3(V) = \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[V(1,2,3) - V(1,2)] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(1,3) - V(1)] +$$
$$+ \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(2,3) - V(2)] + \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[V(3) - 0] = 2150.$$

У тому разі якщо всі три гравці погоджуються з даним поділом загального виграшу, то вектор Ф стає розв'язком гри, при цьому виграш від об'єднання отримують тільки другий і третій гравці, а розв'язок першого гравця залишиться таким же, яким він був до об'єднання.

Перевіримо належність вектора Шеплі С-ядру. Покладемо $\text{ф}_1 = x_1$, $\text{ф}_2 = x_2$, $\text{ф}_3 = x_3$. Відповідно до теореми про необхідні і достатні умови належності поділу С-ядру маємо:

$V(1) = 1200 = x_1 = 1200$;

$V(2) = 1500 < x_2 = 1850$;

$V(3) = 1800 < x_3 = 2150$;

$V(1, 2) = 2700 < x_1 + x_2 = 3050$;

$V(1, 3) = 3000 < x_1 + x_3 = 3350$;

$V(2, 3) = 4000 = x_2 + x_3 = 4000$;

$V(1, 2, 3) = 5200 = x_1 + x_2 + x_3 = 5200$.

Оскільки система нерівностей виконується, вектор Шеплі належить С-ядру і є одним із можливих розв’язків даної класичної кооперативної гри.

Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи

1. Який сенс має поняття супераддитивності?
2. Чому кооперативні ігри часто називають іграми у формі характеристичної функції?
3. Що вважається розв’язком кооперативної гри?
4. Як співвідносяться С-ядро кооперативної гри та її Н−М розв’язок?
5. Які недоліки мають введені поняття розв’язків кооперативних ігор?

Задачі лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань

Розглядається кооперативна гра з трьома гравцями. Відомі значення характеристичної функції, визначені відповідно до виграшів першого, другого і третього гравців, коли кожен із них грає поодинці, не кооперуючись ні з ким з інших гравців: V(l); V(2); V(3), а також виграші, які можуть забезпечити собі гравці, діючи попарно: V(l, 2); V(l, 3); V(2, 3) і спільний виграш, який можуть забезпечити собі гравці, утворюючи максимально велику коаліцію, що складається з трьох гравців: V(l, 2, 3). Необхідно:

1. Перевірити виконання умов супераддитивності й істотності для даної кооперативної гри.
2. Виразити значення характеристичної функції в 0-1 спрощеній формі.
3. Перевірити умови, що визначають непорожнечу С-ядра і знайти один з варіантів розв’язку гри (поділ X).
4. Визначити розв’язки кожного з гравців у разі їх об’єднання на основі використання вектора Шеплі. Перевірити належність вектора Шеплі С-ядру.

Вибрати варіант відповідно до номера в журналі.

Варіанти задач:

1) V(l) = 1000; V(2) = 800; V(3) = 1200; V(l, 2) = 2000; V(l, 3) = 2500; V(2, 3) = 2300; V(l, 2, 3) = 4000.

2) V(l) = 1500; V(2) = 1200; V(3) = 1000; V(l, 2) = 3000; V(l, 3) = 2700; V(2, 3) = 2400; V(l, 2, 3) = 4400.

3) V(l) = 1100; V(2) = 1600; V(3) = 1300; V(l, 2) = 3000; V(l, 3) = 2600; V(2, 3) = 3200; V(l, 2, 3) = 5000.

4) V(l) = 900; V(2) = 850; V(3) = 1200; V(l, 2) = 2000; V(l, 3) = 2400; V(2, 3) = 2500; V(l, 2, 3) = 3600.

5) V(1) = 1300; V(2) = 1400; V(3) = 1700; V(l, 2) = 3000; V(l, 3) = 3400; V(2, 3) = 3600; V(l, 2, 3) = 5600.

6) $V(1) = 2000$; $V(2) = 1800$; $V(3) = 1500$; $V(1, 2) = 4200$; $V(1, 3) = 4000$; $V(2, 3) = 3700$; $V(1, 2, 3) = 6400$.

7) $V(1) = 960$; $V(2) = 1200$; $V(3) = 2300$; $V(1, 2) = 2400$; $V(1, 3) = 3600$; $V(2, 3) = 3900$; $V(1, 2, 3) = 5800$.

8) $V(1) = 2400$; $V(2) = 2000$; $V(3) = 1800$; $V(1, 2) = 4800$; $V(1, 3) = 4500$; $V(2, 3) = 4200$; $V(1, 2, 3) = 7000$.

9) $V(1) = 80$; $V(2) = 130$; $V(3) = 180$; $V(1, 2) = 240$; $V(1, 3) = 280$; $V(2, 3) = 350$; $V(1, 2, 3) = 480$.

10) $V(1) =100$; $V(2) = 180$; $V(3) = 120$; $V(1, 2) = 300$; $V(1, 3) = 250$; $V(2, 3) = 340$; $V(1, 2, 3) = 480$.

11) $V(1) = 960$; $V(2) = 740$; $V(3) = 800$; $V(1,2) = 1800$; $V(1,3) = 1900$; $V(2, 3) = 1700$; $V(1, 2, 3) = 2800$.

12) $V(1) = 1600$; $V(2) = 1400$; $V(3) = 1500$; $V(1, 2) = 3300$; $V(1, 3) = 3400$; $V(2, 3) = 3100$; $V(1, 2, 3) = 5500$.

13) $V(1) = 10800$; $V(2) = 11200$; $V(3) = 13000$; $V(1, 2) = 23000$; $V(1, 3) = 25000$; $V(2, 3) = 26000$; $V(1, 2, 3) = 42000$.

14) $V(1) = 1640$; $V(2) = 1460$; $V(3) = 1400$; $V(1, 2) = 3280$; $V(1, 3) = 3200$; $V(2, 3) = 3000$; $V(1, 2, 3) = 5200$.

15) $V(1) = 2200$; $V(2) = 2000$; $V(3) = 1800$; $V(1, 2) = 4500$; $V(1, 3) = 4100$; $V(2, 3) = 4000$; $V(1, 2, 3) = 6800$.

16) $V(1) = 1700$; $V(2) = 1500$; $V(3) = 1300$; $V(1, 2) = 3600$; $V(1, 3) = 3400$; $V(2, 3) = 3100$; $V(1, 2, 3) = 6000$.

17) $V(1) = 1000$; $V(2) = 1400$; $V(3) = 1200$; $V(1, 2) = 2700$; $V(1, 3) = 2600$; $V(2, 3) = 3100$; $V(1, 2, 3) = 5000$.

18) $V(1) = 1600$; $V(2) = 1400$; $V(3) = 2000$; $V(1, 2) = 3500$; $V(1, 3) = 4200$; $V(2, 3) = 4000$; $V(1, 2, 3) = 6800$.

19) $V(1) = 1400$; $V(2) = 2200$; $V(3) = 4000$; $V(1, 2) = 4200$; $V(1, 3) = 6000$; $V(2, 3) = 7000$; $V(1, 2, 3) = 10000$.

20) $V(1) = 1700$; $V(2) = 1500$; $V(3) = 1800$; $V(1, 2) = 3500$; $V(1, 3) = 4000$; $V(2, 3) = 3800$; $V(1, 2, 3) = 6500$.

21) $V(1) = 40$; $V(2) = 60$; $V(3) = 100$; $V(1, 2) = 120$; $V(1, 3) = 170$; $V(2, 3) = 200$; $V(1, 2, 3) = 300$.

21) $V(1) = 2500$; $V(2) = 3000$; $V(3) = 2500$; $V(1, 2) = 6000$; $V(1, 3) = 5800$; $V(2, 3) = 6400$; $V(1, 2, 3) = 10000$.

22) $V(1) = 1200$; $V(2) = 1000$; $V(3) = 1800$; $V(1, 2) = 2500$; $V(1, 3) = 3500$; $V(2, 3) = 3400$; $V(1, 2, 3) = 6000$.

23) $V(1) = 2400$; $V(2) = 1800$; $V(3) = 1800$; $V(1, 2) = 4600$; $V(1, 3) = 4800$; $V(2, 3) = 4200$; $V(1, 2, 3) = 8000$.

24) $V(1) = 800$; $V(2) = 1600$; $V(3) = 2600$; $V(1, 2) = 3000$; $V(1, 3) = 4300$; $V(2, 3) = 5000$; $V(1, 2, 3) = 7000$.

Лабораторна работа № 5
Зведення матричних ігор до задач лінійного програмування

Мета роботи: ознайомитися зі способами розв'язання матричних ігор, що базуються на методах лінійного програмування.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал [14].

2. Привести матричну гру до пари двоїстих задач лінійного програмування та розв'язати їх симплекс методом, використовуючи сервіс «Поиск решения» додатку Microsoft Excel або іншу програму для розв'язання задач лінійного програмування.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити:

− постановку задачі;

− опис та аналіз ходу розв'язання задачі;

− висновки за результатом виконаної роботи.

1. Короткі теоретичні відомості

Матрична гра являє собою антагоністичну гру двох осіб з платіжною матрицею $A_{m\times n} = [a_{ij}]$, з m можливими стратегіями першого гравця та n стратегіями другого гравця. Перший гравець прагне максимізувати свій виграш, а другий – мінімізувати свій програш. Якщо матриця гри має сідлову точку, тобто існує елемент, що є максимальним у стовпці і мінімальним у рядку, то гра має розв'язок в чистих стратегіях. У протилежному випадку гра має розв'язок у змішаних стратегіях, які являють собою ймовірнісні розподіли на множині чистих стратегій: $\overline{p} = \left(p_1,...,p_m\right)^T$ – змішана стратегія першого гравця, $\overline{q} = \left(q_1,...,q_n\right)^T$ – змішана стратегія другого гравця, $\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Використання у грі оптимальних змішаних стратегій забезпечує першому гравцеві виграш, не менший ніж при використанні ним іншої довільної стратегії; другому гравцеві – програш, не більший ніж при використанні ним іншої довільної стратегії. Ціна гри (оптимальне очікуване значення) має вигляд

$$V = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^0 q_j^0, \text{ де } \overline{p}_0 = \left(p_1^0,...,p_m^0\right)^T \text{ і } \overline{q}_0 = \left(q_1^0,...,q_n^0\right)^T.$$

Для знаходження оптимальних стратегій в іграх двох гравців з нульовою сумою можна застосовувати графічний метод (для ігор виду 2×m чи n×2 – див. лабораторну роботу № 3), а також можна звести задачу до загального вигляду задач лінійного програмування і розв'язувати її, використовуючи симплекс-метод.

Згідно з основною теоремою теорії ігор, кожна скінченна гра має принаймні один розв'язок, який визначає деяка змішана стратегія. Окрім того, має місце така теорема:

Теорема 1. Для того, щоб число V було ціною гри, а вектори $\overline{p}_0 = \left(p_1^0,...,p_m^0\right)^T$ та $\overline{q}_0 = \left(q_1^0,...,q_n^0\right)^T$ були векторами ймовірностей оптимальних стратегій, необхідно і достатньо, щоб виконувалась така система нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^0 \ge V, \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \le V, \quad i = 1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Для зручності, будемо вважати, що $V > 0$. На практиці цього завжди можна досягти, збільшуючи всі елементи матриці $[a_{ij}]$ на одне і те ж додатне число K (дана процедура не впливає на оптимальні стратегії, а тільки збільшує ціну гри на K).

Метою першого гравця є отримання максимального виграшу, а другого – мінімального програшу. З огляду на сформульовану теорему, задачу максимізації гарантованого виграшу першого гравця та задачу гарантованого програшу другого гравця можна представити як пару взаємно двоїстих задач лінійного програмування.

Задача I гравця:

$$Z^* = V \to max;$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij} \ge V, \ j = 1,...,n; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1, p_i^0 \ge 0, \ i = 1,...,m;$$

Задача II гравця:

$$F^* = V \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \le V, \ i = 1,...,m; \tag{2}$$

$$\sum_{J=1}^{n} q_j^0 = 1, \ q_j^0 \ge 0, \ j = 1,...,n.$$

Запишемо систему обмежень (1) в розширеній формі:

$$p_1^0 a_{11} + p_2^0 a_{21} + \cdots + p_m^0 a_{m1} \ge V,$$

$$\vdots$$

$$p_1^0 a_{1n} + p_2^0 a_{2n} + \cdots + p_m^0 a_{mn} \ge V,$$

$$p_1^0 + p_2^0 + \cdots + p_m^0 = 1.$$

Поділимо праві та ліві частини обмежень на V (відповідно до зробленого припущення V – додатне число). Отримаємо:

$$\frac{p_1^0 a_{11}}{V} + \frac{p_2^0 a_{21}}{V} + \cdots + \frac{p_m^0 a_{m1}}{V} \ge \frac{V}{V},$$

$$\frac{p_1^0 a_{12}}{V} + \frac{p_2^0 a_{22}}{V} + \cdots + \frac{p_m^0 a_{m2}}{V} \ge \frac{V}{V},$$

$$\vdots$$

$$\frac{p_1^0 a_{1n}}{V} + \frac{p_2^0 a_{2n}}{V} + \cdots + \frac{p_m^0 a_{mn}}{V} \geq \frac{V}{V},$$

$$\frac{p_1^0}{V} + \frac{p_2^0}{V} + \cdots + \frac{p_m^0}{V} = \frac{1}{V}.$$

Зробивши заміну $\frac{p_i^0}{V} = x_i, \ i = 1, 2, \ldots, m,$ маємо:

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_m a_{m1} \geq 1,$$
$$\vdots$$
$$x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \cdots + x_m a_{mn} \geq 1,$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = \frac{1}{V}.$$

Оскільки метою першого гравця є отримання максимального виграшу, то тим самим, він повинен забезпечити $\min \frac{1}{V}$. Отже, визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до розв'язання такої задачі лінійного програмування:

знайти $Z = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \rightarrow \min$ за обмежень

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_m a_{m1} \geq 1,$$
$$\vdots$$
$$x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \cdots + x_m a_{mn} \geq 1,$$
$$x_i \geq 0, \quad \forall i = 1,2,\ldots,m.$$

Міркуючи аналогічним чином відносно другого гравця, та ввівши заміну $\frac{q_j^0}{V} = y_j, \ j = 1,2,\ldots,n,$ отримаємо задачу:

знайти $F = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \rightarrow \max$ за обмежень

$$y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \cdots + y_n a_{1n} \leq 1,$$
$$\vdots$$
$$y_1 a_{m1} + y_2 a_{m2} + \cdots + y_n a_{mn} \leq 1,$$
$$y_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Задача другого гравця є двоїстою задачею відносно задачі першого гравця і навпаки. Процес знаходження розв'язку гри з використанням лінійного програмування складається з таких етапів:

1. Побудова пари двоїстих задач лінійного програмування, які є еквівалентними матричній грі, що розглядається.

2. Знаходження оптимальних планів пари двоїстих задач.

3. Знаходження розв'язку гри, враховуючи співвідношення між оптимальними планами двоїстих задач та оптимальними стратегіями і ціною гри.

2. Приклад застосування лінійного програмування

Дві фірми можуть вкласти свій наявний капітал у будівництво п'яти об'єктів. Стратегія фірм: i-та стратегія полягає у фінансуванні i-го об'єкта (i=1, 2, …, 5). Враховуючи особливості вкладів й інші умови, прибуток фірми виражається за допомогою матриці A:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Прибуток першої фірми є величиною збитку другої, тобто описувану гру можна розглядати як гру двох осіб з нульовою сумою.

Розв'язання. Для зведення вищезгаданої задачі до задачі лінійного програмування треба, насамперед, до кожного елемента матриці додати число k=4 (усі елементи матриці A мають бути додатними). Отримуємо:

$$A=\begin{bmatrix} 6\,4\,5\,1\,8 \\ 4\,2\,3\,8\,7 \\ 6\,4\,7\,6\,3 \\ 4\,1\,5\,4\,5 \\ 7\,4\,4\,2\,6 \end{bmatrix}.$$

Вводимо невідомі величини $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Тоді отримуємо таку задачу лінійного програмування: знайти $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min$ при виконанні умов

$$6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 \geq 1,$$
$$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \geq 1,$$
$$5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 4x_5 \geq 1,$$
$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \geq 1,$$
$$8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 \geq 1,$$
$$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$$

Розв'язком цієї задачі буде: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0{,}125,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0{,}125.$

Оскільки $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \dfrac{1}{V}$, то $V = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = \dfrac{1}{0{,}25} = 4.$

Знаючи те, що $x_i = \dfrac{p_i}{V}$, отримуємо $p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0{,}5,\ p_4 = 0,\ p_5 = 0{,}5.$

Побудуємо до задачі двоїсту. За невідомі візьмемо $y_1, y_2, \ldots, y_5$. Маємо:

$$F = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to \max,$$
$$6y_1 + 4y_2 + 5y_3 + y_4 + 8y_5 \leq 1,$$

$4y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 8y_4 + 7y_5 \le 1,$

$6y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 6y_4 + 3y_5 \le 1,$

$4y_1 + y_2 + 5y_3 + 4y_4 + 5y_5 \le 1,$

$7y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 6y_5 \le 1, y_j \ge 0, j = \overline{1,5}.$

Розв'язком цієї задачі буде: $y_1 = 0,\ y_2 = 0{,}25,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 = 0.$

Знаючи те, що $y_i = \frac{q_i}{V}$, отримуємо $q_1 = 0,\ q_2 = 1,\ q_3 = 0,\ q_4 = 0,\ q_5 = 0.$

Отже, вектори ймовірностей оптимальних змішаних стратегій відповідно для першої та другої фірми будуть p = (0; 0; 0,5; 0; 0,5); q = (0; 1; 0; 0; 0), а ціна початкової гри − $V^* = V - 4 = 0$.

Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи

1. Як визначаються оптимальні стратегії гравців?
2. В чому полягає метод зведення матричних ігор до задач лінійного програмування?

Задача лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань

1. Зробити формальну постановку задачі.
2. Привести матричну гру до пари двоїстих задач лінійного програмування та розв'язати їх симплекс-методом.
3. Знайти оптимальні стратегії гравців.

Вибрати матрицю A: у ній має бути не менше чотирьох попарно різних елементів і таких, що їх величини належать відрізку [C1,C2]. Розмірність матриці A та межі C1, C2 вибрати у таблиці відповідно до номеру в журналі:

№	n	m	C1	C2	№	n	m	C1	C2
1	3	3	–4	5	16	5	6	5	11
2	3	4	–4	5	17	4	3	5	11
3	3	5	–4	5	18	4	5	5	11
4	4	6	–4	5	19	4	4	5	11
5	4	3	–4	5	20	6	2	5	11
6	4	5	–4	5	21	5	2	5	11
7	4	4	–4	5	22	5	3	5	11
8	6	3	–4	5	23	5	4	5	11
9	5	4	–4	5	24	5	5	5	11
10	5	3	–4	5	25	3	3	11	16
11	5	4	–4	5	26	3	4	11	16
12	5	5	–4	5	27	3	5	11	16
13	3	3	5	11	28	5	6	11	16
14	3	4	5	11	29	4	3	11	16
15	3	5	5	11	30	4	5	11	16

Лабораторна робота № 6
Антагоністичні ігри двох осіб у стратегічній формі. Некооперативна рівновага гри – оптимум за Нешем. Кооперативна рівновага гри – оптимум за Парето. Обережні стратегії

Мета роботи: ознайомитися з правилами прийняття рішень в антагоністичних іграх двох осіб.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал [9].

2. Для заданих антагоністичних ігор визначити точку некооперативної рівноваги, кооперативної рівноваги та обережні стратегії, користуючись засобами додатка Microsoft Excel або середовища Matlab 6.1.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який має містити:

– постановку задачі;

– опис та аналіз ходу розв'язання задачі;

– висновки за результатом виконаної роботи.

1. Короткі теоретичні відомості

Розглянемо дві множини E і F допустимих стратегій гравців 1 і 2, відповідно. Мета першого гравця – вибрати стратегію x з множини E, а другого – стратегію y з множини F. Пара $(x, y) \in E \times F$ ще називається бістратегією.

Механізм, який дозволяє гравцям обирати ті чи інші стратегії з усієї множини стратегій, насправді складається з правил прийняття ними відповідних рішень.

Визначення 1. Правило прийняття рішення першого гравця являє собою **відображення** $C_E : F \Rightarrow E$, яке ставить у відповідність кожній стратегії супротивника $y \in F$ множину стратегій $x \in C_E(y)$, які може обрати перший гравець, коли він знає, що другий гравець обирає $y \in F$.

Аналогічно, правило прийняття рішення для другого гравця – це відображення $C_F : E \Rightarrow F$, що ставить у відповідність кожній стратегії першого гравця $x \in E$ множину стратегій $y \in C_F(x)$, які може обрати другий гравець, за умови, що він знає вибір супротивника.

Визначення 2. Пара стратегій $(\overline{x}, \overline{y})$ таких, що $\overline{x} \in C_E(\overline{y})$ і $\overline{y} \in C_F(\overline{x})$ для правил прийняття рішень C_E і C_F гравців 1 і 2 відповідно, називається **парою узгоджених стратегій** (або узгодженою бістратегією).

Задача знаходження узгоджених пар стратегій зводиться до задачі про нерухому точку відображення. Визначимо через $\vec{C} : E \times F \to E \times F$ відображення, що визначається за формулою $\forall (x, y) \in E \times F, \quad \vec{C}(x, y) = C_E(y) \times C_F(x).$ Точка $(x^*, y^*) \in E \times F$ називається нерухомою точкою відображення $\vec{C},$ якщо $(x^*, y^*) \in \vec{C}(x^*, y^*).$

Теорема 1. Нехай K – опукла компактна підмножина скінченно-вимірного простору. Всяке неперервне відображення множини K в себе має нерухому точку.

Будемо вважати, що кожен гравець класифікує свої стратегії за допомогою функції оцінки f, яка має багато назв: критеріальна функція, функція корисності, прибуток, функція витрат тощо. Якщо така функція є, то їй ставиться у відповідність предпорядок $\geq$ таким чином:
стратегія $(x_1, y_1) \in E \times F$ переважає стратегію $(x_2, y_2) \in E \times F$ тоді і тільки тоді, коли $f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_2)$ у випадку, якщо f – функція витрат (у випадку функції корисності знак міняється на протилежний).

Поведінка кожного гравця полягає у мінімізації своїх витрат у рамках можливого.

Припустімо, що гравці 1 і 2 обирають стратегії окремо, використовуючи свої функції витрат $f_E, f_F : E \times F \to R$. Покладемо $\vec{f}(x, y) = (f_E(x, y), f_F(x, y)) \in R^2$.

Визначення 3. Гра двох осіб в нормальній формі (або в стратегічній формі), визначається за допомогою відображення $\vec{f} : E \times F \to R^2$**,** яке називається **відображенням бівитрат.**

Таким чином, можна записати правила прийняття рішень для учасників гри в стратегічній формі. Якщо перший гравець має можливість знати стратегію $y \in F$, яка застосовується другим гравцем, то він постарається обрати стратегію $\overline{x} \in E$, яка мінімізує його витрати $x \to f_E(x, y)$ при фіксованій стратегії другого гравця, тобто якщо він обере стратегію з такої множини стратегій − $\overline{C}_E(y) := \{\overline{x} \in E \mid f_E(\overline{x}, y) = \inf\limits_{x \in E} f_E(x, y)\}$.

Це одразу дозволяє визначити правило прийняття рішення для першого гравця: $\overline{C}_E : F \Rightarrow E$. Аналогічно, для другого гравця правило прийняття рішення $\overline{C}_F : E \Rightarrow F$ також визначає формула $\overline{C}_F(x) := \{\overline{y} \in F \mid f_F(x, \overline{y}) = \inf\limits_{y \in F} f_F(x, y)\}$.

Визначення 4. Правила прийняття рішення $\overline{C}_E$ і $\overline{C}_F$ називаються **канонічними правилами прийняття рішення.**

Узгоджена пара стратегій $(\overline{x}, \overline{y})$ для канонічних правил прийняття рішень називається **некооперативною рівновагою гри або парою оптимальною за Нешем.**

Таким чином, пара стратегій $(\overline{x}, \overline{y})$ є некооперативною рівновагою (оптимумом за Нешем) тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються такі рівності:

$$\begin{cases} f_E(\overline{x}, \overline{y}) = \inf\limits_{x \in E} f_E(x, \overline{y}), \\ f_F(\overline{x}, \overline{y}) = \inf\limits_{y \in F} f_F(\overline{x}, y). \end{cases}$$

Отже, некооперативна рівновага – це ситуація, коли кожен гравець оптимізує власний критерій, вважаючи, що вибір його партнера фіксований. Це називається ситуацією індивідуальної стійкості.

Зручний спосіб виділити некооперативну рівновагу полягає у введенні функцій

$$\begin{cases} \bar{f}_E(y) = \inf\limits_{x \in E} f_E(x,y), \\ \bar{f}_F(x) = \inf\limits_{y \in F} f_F(x,y). \end{cases}$$

Таким чином, пара $(\bar{x},\bar{y}) \in E \times F$ є парою некооперативної рівноваги тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} f_E(\bar{x},\bar{y}) = \bar{f}_E(\bar{y}), \\ f_F(\bar{x},\bar{y}) = \bar{f}_F(\bar{x}). \end{cases}$$

Проте, чи можна прийняти поняття некооперативної рівноваги в якості єдиного розумного розв'язку гри у стратегічній формі? Не обов'язково, особливо якщо вважати, що гравці спілкуються, обмінюються інформацією і співпрацюють. В цьому випадку, вони можуть помітити, що існують пари стратегій (x,y), які задовольняють нерівності $f_E(x,y) < f_E(\bar{x},\bar{y})$ і $f_F(x,y) < f_F(\bar{x},\bar{y})$, тобто такі пари, які завдають кожному з гравців витрат, менших за ті, що вони мають в точці некооперативної рівноваги $(\bar{x},\bar{y})$.

Визначення 5. Пара стратегій $(x^*, y^*) \in E \times F$ **називається оптимальною за Парето** (або **Парето-оптимальною**), якщо не існує інших пар стратегій $(x,y) \in E \times F$ таких, що $f_E(x,y) < f_E(x^*, y^*)$ і $f_F(x,y) < f_F(x^*, y^*)$.

Ідеальною була б ситуація, якби існували точки оптимальні за Нешем, які були б також оптимальними за Парето. Нажаль, прикладів таких ігор відомо мало, і ніяка загальна теорема тут також невідома.

Зазначимо, що вибір точок оптимальних за Парето – це не надто чітке правило поведінки. Припустімо, наприклад, що існує пара $(\hat{x},\hat{y})$, яка реалізує мінімум функції витрат першого гравця на $E \times F$:

$$f_E(\hat{x},\hat{y}) = \inf\limits_{\substack{x \in E \\ y \in F}} f_E(x,y) =: \alpha_E.$$

Зрозуміло, що така пара є оптимальною за Парето, оскільки (див. визначення 5) не існує другої пари стратегій, яка приносила б менше значення функції витрат першого гравця. Але для того, щоб гравець 2 погодився на цю ситуацію, треба уявити, що єдина мета його життя – це приносити радість першому гравцеві, що малоймовірно. Точно так, оптимальною за Парето є пара $(\breve{x},\breve{y})$, яка мінімізує функцію витрат другого гравця на $E \times F$:

$$f_F(\breve{x},\breve{y}) = \inf\limits_{\substack{x \in E \\ y \in F}} f_F(x,y) =: \alpha_F.$$

Якщо пара стратегій $(\tilde{x},\tilde{y})$ мінімізує на $E \times F$ одразу обидві функції витрат f_E і f_F, то вона є кращим кандидатом на роль розв'язку. В цьому випадку $\alpha_E = f_E(\tilde{x},\tilde{y})$ і $\alpha_F = f_F(\tilde{x},\tilde{y})$, що буває тільки у виключних випадках. Тому вектор $\vec{\alpha} := (\alpha_E, \alpha_F) \in R^2$ називається **віртуальним мінімумом гри.**

Бістратегії $(\hat{x},\hat{y})$ і $(\breve{x},\breve{y})$ не є вдалим вибором, оскільки вони являють собою альтруїстичну поведінку гравців. Оскільки, якщо цілком нормально вважати, що гравці хочуть домовитися, замінити дану пару стратегій на таку, яка принесла б **кожному з них** менші витрати, то було б недоречно думати, що один погодиться віддати другому весь прибуток від цієї операції.

На противагу альтруїстичній поведінці одного з гравців, існує також інша поведінка, коли єдиною метою, наприклад, другого з гравців, є нашкодити першому, і перший про це знає. (Можна вважати, що перший гравець впевнений в нечесності другого, або що він параноїк.) А якщо так, то перший гравець оцінює в цьому випадку витрати, пов'язані зі своєю стратегією x за допомогою функції $f_E^{\#}(x) := \sup\limits_{y \in F} f_E(x, y)$. Кажуть, що $f_E^{\#}$ – функція найбільших витрат першого гравця. В цьому випадку поведінка першого гравця – це пошук стратегій $x^{\#} \in E$, які мінімізують найбільші втрати, тобто пошук розв'язку задачі

$$f_E^{\#}(x^{\#}) = \inf_{x \in E} f_E^{\#}(x).$$

Будемо говорити, що $x^{\#} \in E$ є обережною стратегією першого гравця. Покладемо $v_E^{\#} := \inf\limits_{x \in E} \sup\limits_{y \in F} f_E(x,y) := \inf\limits_{x \in E} f_E^{\#}(x)$ і назвемо $v_E^{\#}$ гарантованим значенням першого гравця. Це гарантоване значення можна використати як погрозу. Дійсно, перший гравець може відхилити пару стратегій $(x,y) \in E \times F$, що задовольняють умову $f_E(x,y) > v_E^{\#}$, оскільки, залучаючи обережну стратегію $x^{\#} \in E$, перший гравець гарантує собі витрати менші, ніж $f_E(x,y)$. Отже, якщо він дійде згоди зі своїм партнером, то може завжди йому погрожувати залученням обережної стратегії $x^{\#} \in E$ і обмежити, таким чином, свої витрати величиною $v_E^{\#}$.

Симетрично, гарантоване значення $v_F^{\#}$ другого гравця визначається за формулою $v_F^{\#} := \inf\limits_{y \in F} \sup\limits_{x \in E} f_F(x,y) := \inf\limits_{y \in F} f_F^{\#}(y)$, де $f_F^{\#}(y) := \sup\limits_{x \in E} f_F(x,y)$.

Будемо говорити, що вектор $\vec{v}^{\#} = (v_E^{\#}, v_F^{\#})$ є гарантованим вектором гри. Таким чином, цікавими є тільки ті пари, які задовольняють умову $\vec{f}(x,y) \le \vec{v}^{\#}$. Отже, множина допустимих бівитрат міститься у квадраті $[\alpha_E, v_E^{\#}] \times [\alpha_F, v_F^{\#}]$.

Ідеальним, було б знайти оптимум за Нешем, який одночасно був би оптимумом за Парето, або пару обережних стратегій, яка одночасно була б оптимальною за Парето. Ігри, в яких гарантований вектор є оптимальним за Парето, прийнято називати несуттєвими.

2. Приклад

Нехай є дві держави, кожна з яких має причини завоювати іншу. В кожної з них, відносно іншої, є дві стратегії поведінки – мирна та войовнича. Нехай втрати, які несуть гравці в кожному з випадків, задані в таблиці:

Перша держава	Друга держава	
	Мирна стратегія 1	Войовнича стратегія 2
Мирна стратегія I	(a,a)	(c,0)
Войовнича стратегія II	(0,c)	(b,b)

Причому $0 < a < b < c$.

Розглянемо функції найбільших втрат першого та другого гравців:

$f_E^{\#}(II) = c$, $f_E^{\#}(III) = b$, $f_F^{\#}(1) = c$, $f_F^{\#}(2) = b$ і, отже, $v_E^{\#} = b$, $v_F^{\#} = b$.

Таким чином, (II, 2) – пара обережних стратегій. Звідси випливає, що в парах стратегій (I, 2) та (II, 1) немає ніякої користі, оскільки використовуючи, наприклад, стратегію I, перший гравець ризикує втратити величину c, а використовуючи стратегію II, він обмежує свої втрати величиною $b < c$.

З іншого боку, легко перевірити, що

$\bar{f}_E(1) = 0$, $\bar{f}_E(2) = b$, $\bar{f}_F(I) = 0$, $\bar{f}_F(II) = b$, так, що пара (II, 2) також є некооперативною рівновагою, оскільки

$f_E(II, 2) = b < f_E(I, 2) = c$,

$f_F(II, 2) = b < f_F(II, 1) = c$.

Оптимальними за Парето є пари стратегій (I,1), (II,1), (1,2).

Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи

1. Як визначаються бістратегії, які утворюють некооперативну рівновагу?
2. Як визначаються бістратегії, які утворюють кооперативну рівновагу?
3. Як визначаються гарантований та віртуальний вектори гри?
4. Як визначаються обережні стратегії?

Задача лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань

1. Побудувати матрицю бістратегій гри.
2. Визначити бістратегії, оптимальні за Нешем.
3. Визначити бістратегії, оптимальні за Парето і віртуальний мінімум гри.
4. Визначити обережні стратегії і гарантований вектор гри.
5. Зробити висновок.

Задачі для розв’язання

1. Дилема ув’язненого.

Двоє підозрюваних у скоєнні тяжкого злочину заарештовані і зачинені в окремих одиночних камерах, причому вони не мають можливості передавати один одному повідомлення. Їх допитують по одному. Якщо обидва зізнаються в скоєнні злочину, то їм загрожує, враховуючи їх зізнання, тюрма по 6 років кожному. Якщо обидва мовчатимуть, то їх покарають за якийсь незначний злочин (наприклад за зберігання зброї), і вони отримають по 1 року тюрми. Якщо ж один зізнається, а інший ні, то першого – за допомогу слідству, буде звільнено від покарання, тоді як другого чекають 10 років тюрми.

2. Гра Морра

Гравці одночасно показують один чи два пальці, і в той же момент кожен гравець називає число. Якщо число, назване одним із гравців збігається з загальною кількістю пальців, що показують обидва гравці, то гравець отримує від свого супротивника виграш, рівний цьому числу.

3. Гра A, B, C

Тасується колода, яка містить три карти: A, B, C, і кожному з гравців дається по одній карті. Подивившись свою карту, перший гравець робить припущення щодо того, яка карта у другого. Подивившись на свою карту і почувши припущення першого гравця, другий гравець також пробує вгадати карту першого. Якщо хтось із гравців вгадує, то другий платить йому 1$.

4. Спрощений покер

Перший гравець отримує одну з карт «Старшу» чи «Молодшу» з рівними ймовірностями, а потім може «зробити ставку» або «спасувати». Якщо перший робить ставку, то другий може спасувати і витратити $б$ або «зрівняти гру», і виграти або програти в залежно від того, що на руках у першого гравця: карта Мол. або Ст. Якщо перший гравець пасує, то другий також може спасувати, що дає виграш 0, або зробити ставку, виграючи $б$, якщо в першого гравця карта Мл, і програючи $в$, якщо в першого гравця карта Ст.

5. Про кулі

Відомо, що в урні міститься дві кулі, чорного чи білого кольору. Гравець повинен визначити скільки чорних куль міститься в урні. Якщо його припущення правильне – йому платять $б$; якщо його відповідь відрізняється від правильної на 1 (наприклад, він говорить 1, якщо насправді там 2 чорні кулі, або 2, якщо в урні одна чорна куля тощо), то йому виплачують $в$; якщо відповідь відрізняється від правильної на 2, то йому виплачують g, причому $б > в > g$. Вартість дослідження однієї кулі дорівнює d.

6. Задача про рекламу

Дві конкуруючі компанії займаються пасажирськими авіаперевезеннями з Москви до Магадану. Для збільшення кількості пасажирів у них є 4 варіанти реклами: в газеті, на радіо, на телебаченні, в Інтернеті. Частина цільової аудиторії, яку охоплює кожен вид реклами, становить, відповідно, 0,2, 0,4, 0,7 і 0,25. Кількість потенційних пасажирів – близько 10 000 чоловік на рік. Імовірність того, що людина, почувши рекламу конкретної компанії, скористається її послугами, дорівнює 0,01. Треба визначити оптимальні рекламні стратегії компаній.

7. Гральні кубики

Двоє гравців кидають гральні кубики. Кожний гравець може кинути один, два або три кубики. Якщо гравець кидає один кубик, то його виграш дорівнює кількості очок, що випали на кубику, помноженій на 3. Якщо гравець кидає два кубики, то виграш становить кількість очок на обох кубиках, помноженій на 1,5. Якщо гравець кидає три кубики, то виграш дорівнює кількості очок на трьох кубиках. Виграє той, у кого сума більша.

8. Війна між червоними та синіми

Генерал синіх хоче зайняти місто червоних, маючи три роти. До міста можна підійти однією з трьох доріг. Генерал синіх кожну свою роту може спрямувати будь-якою дорогою. Генерал червоних командує шістьма ротами і може наказати будь-якій роті охороняти певну дорогу. Сині займуть місто в тому випадку, якщо на одній із доріг у них буде більше рот, ніж у червоних. При цьому сині отримають 1, а червоні – –2. Якщо сині не займуть місто, то виграші становитимуть –1 і 1 відповідно.

9. Спрощена гра в «21»

Колода складається з 30 карт: 10 «шісток», 10 «п'ятірок» і 10 «четвірок». Двоє гравців витягають по три карти. Після цього кожний гравець може додатково взяти одну або дві карти. Після цього вони відкривають карти, і виграє той, у кого сума очок більша, але не більша ніж 21. Результат гри розраховується як модуль різниці між кількістю очок гравця, що виграв, і гравця, що програв.

10. Держава та платник податків

Розглянемо гру, в якій беруть участь держава та платник податків. Дохід платника податків рівний чотирьом одиницям. Держава обирає рівень податку на прибуток: високий (В = 50 %), середній (С = 35 %) або низький (Н = 25 %). Платник податків може чесно заплатити податок, а може ухилитися від сплати. Якщо він вирішує не платити податки, то з деякою ймовірністю податкові органи це виявляють і примушують сплатити весь податок і додатково внести в бюджет штраф у розмірі 1 одиниці. Виграш держави – це очікуваний обсяг податкових надходжень мінус затрати на утримання податкових органів, а виграш платника податків – його очікуваний прибуток (після сплати всіх податків і штрафів). Визначте оптимальні стратегії держави і платників податків. На утримання податкових органів виділяється 1 одиниця, щоб забезпечити ймовірність виявлення неплатника 75 %, 0,5 одиниці, щоб забезпечити ймовірність виявлення неплатника 50 % і 0,2 одиниці, щоб забезпечити ймовірність виявлення неплатника 25 %.

11. Спрощений «Морський бій»

Перший гравець має один двопалубний корабель на полі 3×3. Другий гравець робить постріли по полю супротивника, з наміром потопити корабель. За кожний постріл другий гравець виплачує першому 1 \$. Після першого влучення (корабель поранено) перший гравець виплачує другому 2 \$, а після другого (поразки) – 3 \$.

12. Гра «Перехрестя»

Двоє гравців виїжджають із двох сторін на нерегульоване перехрестя без правил пріоритету. В кожного є дві стратегії – зупинитися (стратегії 1 і I) або проїхати (стратегії 2 та II). Якщо обидва вирішать проїхати, то зіткнення призведе до втрат С для кожного. Якщо обидва зупиняться, то невелика затримка призведе до втрат А< С для кожного. Якщо один із них зупиниться, а інший проїде, то той хто проїхав не понесе ніяких втрат, а той, хто зупинився, додасть до запізнення невдоволення, що буде йому коштувати $\mathrm{B} \in (\mathrm{A};\mathrm{C})$.

13. Сімейна сварка

Стратегії чоловіка і дружини такі: піти на футбол або піти гуляти. Чоловік пропонує матч, а дружина – пройтися по магазинах, але у обох випадках вони хочуть бути разом. Якщо вони підуть на матч, то чоловік не понесе жодних втрат, а дружині буде нецікаво (втрати a > 0). Якщо вони підуть вдвох на прогулянку, то нецікаво буде чоловікові (втрати a), а дружині весело (втрати 0). І нарешті, якщо вони проведуть вечір окремо, то їм це повністю зіпсує настрій (втрати обох становитимуть $b > a$).

14. Гра координації

Двом гравцям треба відчинити двері, щоб вибратися з будівлі, що горить. У кожного з гравців дві стратегії: пройти (стратегії 1 і I) і штовхнути двері (стратегії 2 і II). Якщо ніхто не відчинить двері, то вони обидва залишаться у приміщенні, що горить, і несуть втрати величини c. Якщо перший гравець штовхає двері (стратегія II), а другий в них проходить, то другий гравець вискакує першим (втрати 0), а перший з легкими опіками (втрати розміру $a < c$) – за ним. Якщо ж вони одночасно штовхають двері, то вони затримуються в дверях довше, і виходять маючі сильні опіки (втрати $b \in (a; c)$).

Лабораторна работа № 7
Дуополія Курно

Мета роботи: ознайомитися з поняттями Парето-оптимальності, некооперативної рівноваги та обережних стратегій у рамках певної економічної моделі – дуополії Курно.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал [6, 7, 9].
2. Намалювати графік відображення функції бівитрат в Microsoft Excel або Matlab 6.1.
3. Знайти підмножини стратегій, оптимальних за Парето, оптимальних за Нешем, підмножину обережних стратегій та позначити їх на графіку.
3. Скласти звіт про виконання роботи, який має містити:

− постановку задачі;
− опис та аналіз ходу розв’язання задачі;
− висновки за результатом виконаної роботи.

1. Побудова моделі

Припустімо, що двоє гравців виступають в ролі підприємців-виробників, що виробляють один і той же товар. Функції втрат у даному випадку є функціями витрат, які залежать від кількості продукції обох гравців. Антуан Курно був першим, хто запропонував поняття некооперативної рівноваги в рамках економічної моделі. Ця модель зіграла важливу роль, пояснивши природу поведінки виробників, що конкурують на одному ринку.

Припустімо, що обидва гравці: гравець I та гравець II, виробляють один і той же товар. Позначимо через $x \in R$ та $y \in R$ кількість товару, що виробляють гравці. Припустімо, що ціна товару є афінною функцією всієї продукції, а саме $p(x, y) := a - (x + y), a > 0$, а функції витрат кожного виробника є афінними функціями обсягу виробництва виду: $C1(x) = kx, C2(y) = ky$.

Таким чином, чисті витрати першого гравця дорівнюють: $f_E(x,y) = kx - p(x,y)x = x(x+y+k-a)$, а чисті витрати другого гравця, відповідно, $f_F(x,y) = ky - p(x,y)y = y(x+y+k-a)$.

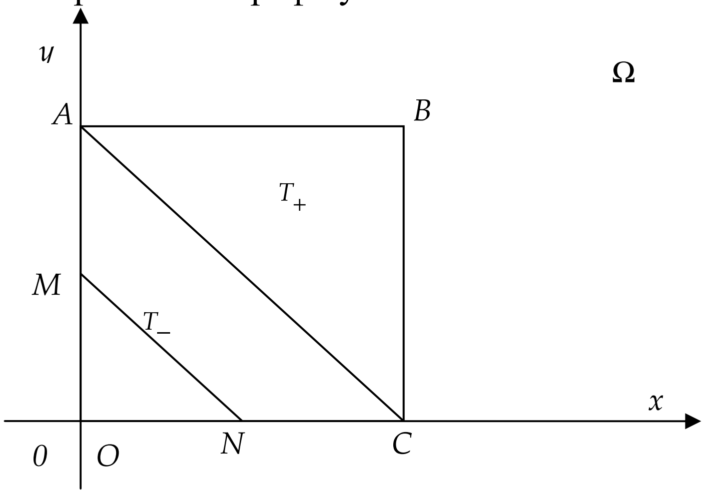
Тоді, покладаючи $u = a - k$, можемо розглядати дуополію як гру двох осіб, де $E := [0,u]$, $F := [0,u]$, а функції втрат визначити за формулами

$$f_E(x,y) = x(x+y-u),\ f_F(x,y) = y(x+y-u). \tag{1}$$

Відображення бівтрат, в такому випадку, визначається за формулою

$$\vec{f}(x,y) = (x(x+y-u), y(x+y-u)). \tag{2}$$

Таким чином, множину допустимих бістратегій $\Omega := E \times F = [0,u] \times [0,u]$, можна зобразити на графіку так:



Визначимо які значення приймає вектор-функція $\vec{f}(x,y)$, коли пари стратегій (x,y) пробігають множину допустимих бістратегій.

Поділимо всю множину Ω – квадрат $[0,u] \times [0,u]$, за допомогою діагоналі $T_0 := \{(x,y) \in [0,u] \times [0,u] : x + y = u\}$ на дві частини – верхній і нижній трикутники: $T_+ := \{(x,y) \in [0,u] \times [0,u] : x + y \ge u\}$ і $T_- := \{(x,y) \in [0,u] \times [0,u] : x + y \le u\}$.

Отже, почнемо з верхнього трикутника T_+. Знайдемо спочатку рівняння його сторін AB, BC і AC.

$$AB: \begin{cases} y = u; \\ 0 \le x \le u, \end{cases} \quad BC: \begin{cases} x = u; \\ 0 \le y \le u, \end{cases} \quad AC: \begin{cases} x + y = u; \\ 0 \le x \le u, 0 \le y \le u. \end{cases}$$

Тоді, відображення бівтрат на цих відрізках набуває таких значень: $\vec{f}(AB) = \{(x^2, ux),\ 0 \le x \le u\}$; $\vec{f}(BC) = \{(uy, y^2),\ 0 \le y \le u\}$; $\vec{f}(AC) = (0{,}0)$ або в координатах простору бівтрат:

$$\vec{f}(AB):\ f_E = 1/u^2 (f_F)^2;\ \vec{f}(BC):\ f_F = 1/u^2 (f_E)^2,\ 0 \le f_E, f_F \le u^2\};\ \vec{f}(AC) = (0{,}0).$$

Далі візьмемо довільну внутрішню точку трикутника T_+, наприклад, $(2u/3, 2u/3)$, і знайдемо її образ відносно відображення бівтрат. Отримаємо $\vec{f}(2u/3, 2u/3) = (2u^2/9, 2u^2/9)$.

Аналогічним чином покажемо, що образом нижнього трикутника $T_- := \{(x,y) \in [0,u] \times [0,u] : x + y \le u\}$ відносно відображення бівтрат є трикутник

$$S_{-} := \left\{ (f_E, f_F) \in \left[-\frac{u^2}{4}, 0 \right] \times \left[-\frac{u^2}{4}, 0 \right] : f_E + f_F \geq -\frac{u^2}{4} \right\}. \tag{3}$$

Дійсно, відрізок

$$MN := \left\{ (x, y) \in [0, u] \times [0, u] : x + y = \frac{u}{2} \right\} \tag{4}$$

переходить у підмножину

$$\vec{f}(MN) = \left\{ (f_E, f_F) \in \left[-\frac{u^2}{4}, 0 \right] \times \left[-\frac{u^2}{4}, 0 \right] : f_E + f_F = -\frac{u^2}{4} \right\}, \tag{5}$$

оскільки $f_E + f_F = (x + y)(x + y - u) = \frac{u}{2}\left(\frac{u}{2} - u\right) = -\frac{u^2}{4}$.

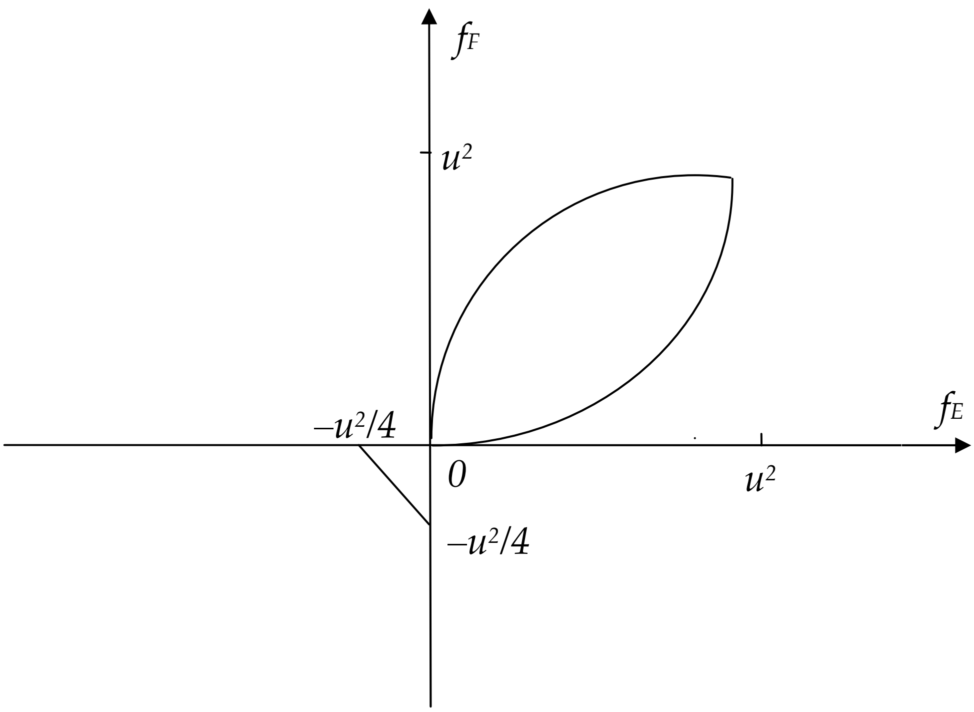
Відрізки $OA := \begin{cases} x = 0, \\ 0 \leq y \leq u \end{cases}$ і $OC := \begin{cases} 0 \leq x \leq u, \\ y = 0 \end{cases}$ відображаються на просторі бівтрат таким чином

$$\vec{f}(OA) := \begin{cases} f_E = 0, \\ f_F = y(y - u), \; 0 \leq y \leq u \end{cases} = \left\{ (0, f_F) : \; 0 \leq f_F \leq \frac{u^2}{4} \right\};$$

$$\vec{f}(OC) := \begin{cases} f_E = x(x - u), \; 0 \leq x \leq u \\ f_F = 0 \end{cases} = \left\{ (f_E, 0) : \; 0 \leq f_E \leq \frac{u^2}{4} \right\}.$$

Окрім того, довільна внутрішня точка нижнього трикутника T_ переходить у внутрішню точку трикутника S_.

Таким чином, образ множини Ω відносно відображення бівтрат можна зобразити на графіку:



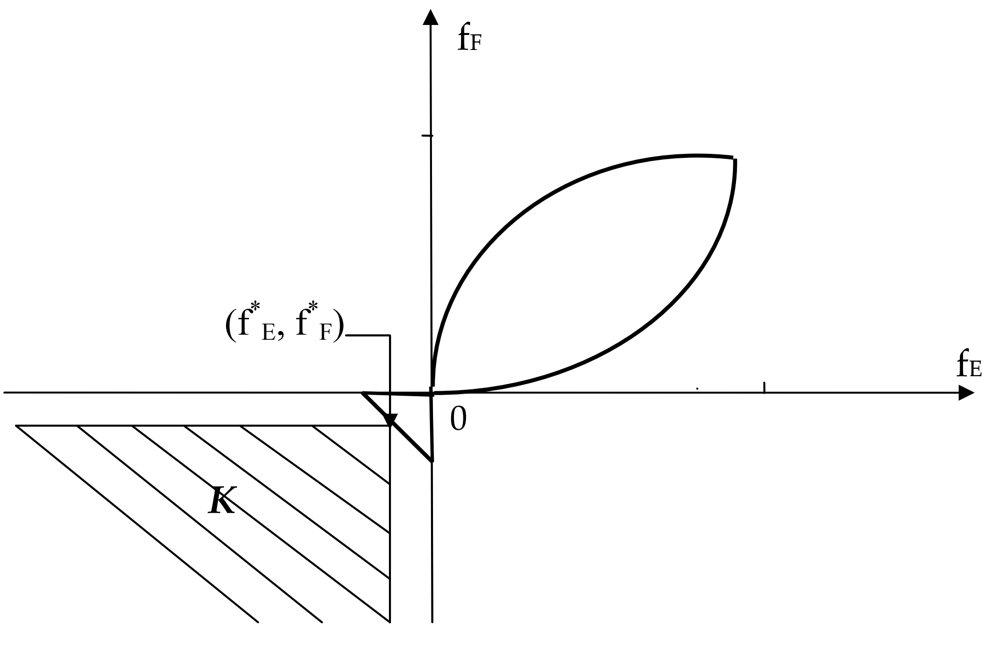
З графіка видно, що гравцям не вигідно застосовувати бістратегії (x, y), такі, що $x + y \geq u$. Дійсно, застосування таких бістратегій призводить не до прибутків (третя чверть площини бівитрат), а до збитків (перша чверть площини бівитрат) для кожного з них. Таким чином, зрозуміло, що гравці обиратимуть свої бістратегії серед тих пар (x, y), які містяться у нижньому трикутнику множини допустимих бістратегій, оскільки для таких бістратегій втрати обох гравців є від'ємними, тобто, насправді, це не витрати, а прибутки.

2. Кооперативні точки рівноваги

Зазначимо, що підмножина MN множини допустимих бістратегій є множиною оптимумів за Парето. Покажемо, що не існує інших точок з множини допустимих бістратегій, які б зменшували бівитрати обох гравців. Розглянемо простір бівитрат. У цьому просторі візьмемо довільну точку на відрізку

$$\vec{f}(MN) = \left\{ (f_E, f_F) \in \left[-\frac{u^2}{4}, 0 \right] \times \left[-\frac{u^2}{4}, 0 \right] : f_E + f_F = -\frac{u^2}{4} \right\},$$

наприклад, точку (f_E^*, f_F^*). Визначимо, де лежить множина точок (f_E, f_F), що є меншими за вихідну у сенсі Парето, тобто такі, для яких виконуються одночасно умови $f_E \leq f_E^*$ і $f_F \leq f_F^*$, причому, знак хоча б однієї нерівності – строгий. Множина таких точок розміщена всередині кута К, вершина якого – точка (f_E^*, f_F^*), а сторони – паралельні координатним осям.



Проте, оскільки не існує жодної точки на множині допустимих бістратегій **Ω**, яка б відображалась вектор-функцією бівтрат у конус К, значить у множині **Ω** немає пар (x, y), які б завдавали обом гравцям втрат менших, у вищезазначеному сенсі, ніж точки відрізка MN.

Кожна точка відрізка MN являє собою певні умови, на яких дійшли згоди гравці. Зокрема, пара стратегій $x_P := \frac{u}{4}; y_P := \frac{u}{4}$ дає кожному з гравців рівні витрати $-\frac{u^2}{8}$. Отже, якщо виробники згодні кооперуватися і бути співробітниками, то дана пара стратегій, яка є оптимальною за Парето, становить розумний компроміс. Кінці відрізка MN – точки з координатами $\left(0, \frac{u}{2}\right)$ і $\left(\frac{u}{2}, 0\right)$ – являють собою бістратегії альтруїстичної поведінки першого та другого гравців. Звідси випливає, що віртуальний мінімум гри – $\vec{\alpha} = (-\frac{u^2}{4}, -\frac{u^2}{4})$.

3. Обережні стратегії

Зрозуміло, що функція найгірших втрат першого гравця, $f_E^{\#}(x) = \sup\limits_{0 \le y \le u} x(x + y - u) = x^2$, досягає свого найменшого значення в точці $x_{\#} = 0$, і симетричним чином, $f_F^{\#} = y^2$, досягає свого найменшого значення в точці $y_{\#} = 0$. Отже, обережні стратегії першого і другого гравців дорівнюють нулю. Це означає, що виробництво кожного з гравців нульове. Гарантований вектор гри дорівнює $\vec{v}^{\#} = (0,0)$.

4. Некооперативні точки рівноваги

Припустімо, що другий гравець виробляє y одиниць продукції. В цьому випадку перший гравець пустить в справу x одиниць продукції, так щоб мінімізувати на $[0, u]$ його функцію втрат $x \mapsto x(x + y + u)$. Мінімум по x даної функції становить $\overline{x} = \overline{C}_E(y) = \frac{1}{2}(u - y)$. Отже $\overline{C}_E : y \mapsto \frac{1}{2}(u - y)$ є канонічним правилом прийняття рішення для першого гравця. Таким же чином визначається канонічне правило прийняття рішення для другого гравця: $\overline{C}_F : x \mapsto \frac{1}{2}(u - x)$. Отже точка некооперативної рівноваги для дуополії, вона також називається точкою рівноваги Курно, є так званою, нерухомою точкою відображення $(x, y) \mapsto (\overline{C}_E(y), \overline{C}_F(x))$. Нею є пара стратегій $x_C = \frac{u}{3}$, $y_C = \frac{u}{3}$, яка завдає кожному з гравців витрат $-\frac{u^2}{9}$. Цю пару легко знайти, користуючись таким алгоритмом. Припустімо, що гравці ходять по черзі, а саме, перший гравець – непарними кроками, а другий – парними.

Нехай спочатку перший гравець обирає в якості своєї стратегії x_1. Тоді, другий гравець згідно з канонічним правилом прийняття рішень обирає стратегію $y_2 = \frac{1}{2}(u - x_1)$. Далі знову перший обирає $x_3 = \frac{1}{2}(u - y_2)$ і т. д.

Отримаємо таку низку рівностей:

$$x_1 + 2y_2 = u,\ y_2 + 2x_3 = u,\ x_3 + 2y_4 = u,\ y_4 + 2x_5 = u, \ldots$$

Послідовності елементів $x_1,\ y_2,\ x_3,\ y_4, \ldots,\ x_{2n-1},\ y_{2n,\ldots}$ є насправді підпослідовностями (позначеними відповідно непарними та парними індексами) послідовності елементів z_k, що задовольняють рекурентне співвідношення $2z_{k+1} + z_k = u$. Знайдемо границю послідовності $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ при $k \to \infty$. Для цього кожну з рівностей помножимо на $(-1)^{k+1}2^k$ і додамо:

$$\left.\begin{array}{l} 2z_2 + z_1 = u \ \ |\times 2 \\ 2z_3 + z_2 = u \ \ |\times(-2^2) \\ 2z_4 + z_3 = u \ \ |\times(2^3) \\ \vdots \end{array}\right\} +$$

Таким чином, у результаті маємо:

$$2z_1 + (-1)^{k+1} 2 \cdot 2^k z_{k+1} = u(2 - 2^2 + \ldots + (-1)^{k+1} 2^k),$$

або, якщо виразити звідси z_{k+1}, отримаємо

$$z_{k+1} = z_1(-1)^k 2^{-k} + \frac{u}{2}(-1)^{k+1}\left(1 - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}\right) \xrightarrow{k\to\infty} \frac{u}{2} \cdot \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{u}{3}.$$

Отже послідовність $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, а разом із нею підпослідовності $\{x_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{y_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ збігаються до значення $\dfrac{u}{3}$. Зауважимо, що в даній грі некооперативна точка рівноваги не є оптимальною за Парето.

5. Гра на правилах прийняття рішення

Можна порівняти дуополію з грою, де потрібно обирати не стратегії, а правила прийняття рішень. Розглянемо справу з погляду першого гравця. Він може застосовувати таке правило прийняття рішень C_E^a виду $C_E^a(y) := a(u - y),\ a \in (0,1]$. Це означає, що перший гравець нічого не виробляє, коли другий гравець виробляє максимальну кількість продукції u, і він вирішує виробляти кількість au, якщо другий гравець не виробляє нічого.

Якщо ж другий гравець, у свою чергу, вирішить керуватися правилом прийняття рішень C_F^b, що визначається формулою $C_F^b(x) := b(u - x),\ b \in (0,1]$, то узгодженою буде тільки одна пара стратегій $\left(\dfrac{a(1-b)u}{1-ab}, \dfrac{b(1-a)u}{1-ab}\right)$, яка завдає гравцям таких витрат:

$$\begin{cases} f_E(a,b) := -\dfrac{a(1-a)(1-b)^2 u^2}{(1-ab)^2}, \\ f_F(a,b) := -\dfrac{b(1-b)(1-a)^2 u^2}{(1-ab)^2}. \end{cases}$$

Цю узгоджену пару стратегій можна знайти користуючись алгоритмом аналогічним тому, що використовувався для пошуку стратегій некооперативної рівноваги.

Отже, ми сконструювали нову гру, стратегіями якої є тангенси кутів нахилу даних правил прийняття рішень (відповідно a та b). У рамках даної гри, якщо другий гравець застосовує тангенс кута нахилу b, то перший гравець застосовує тангенс кута $\bar{a} = y_E(b)$, який мінімізує функцію $a \mapsto f_E(a,b)$. Знаходимо, що $\bar{a} = \sigma_E(b) = \dfrac{1}{2-b}$. Таким же чином, канонічне правило прийняття рішень для другого гравця у новій грі визначається за формулою $\bar{b} = y_F(a) = \dfrac{1}{2-a}$. Некооперативна рівновага в цій грі утворюється парою тангенсів кутів нахилу: $\bar{a} = 1$ та $\bar{b} = 1$.

Приймаючи цю концепцію і застосовуючи правила прийняття рішення $C_E^a(y) = u - y$, $C_F^b(x) = u - x$, отримаємо, що множиною узгоджених пар стратегій, які відповідають цим правилам прийняття рішень, є множина $A := \{(x,y) \in [0,u] \times [0,u] : x + y = u\}$. Ці узгоджені пари стратегій завдадуть кожному з гравців нульових витрат.

6. Рівновага за Штакельбергом

Нехай гру починає перший гравець, розігруючи тангенс кута нахилу a=1/2, що, власне, є ні чим іншим, як його канонічним правилом прийняття рішень $\overline{C}_E(0)$. Якщо другий гравець, перебуваючи у рамках нової гри, здогадується, що його супротивник використає своє канонічне правило прийняття рішень, то він, у свою чергу, розіграє тангенс кута нахилу $\bar{b} = y_F(1/2) = \dfrac{1}{2-1/2} = \dfrac{2}{3}$. Правило прийняття рішення, асоційоване з $C_F^{2/3}$, називається правилом прийняття рішення за Штакельбергом для другого гравця. Узгоджена пара стратегій, що ставиться у відповідність правилам прийняття рішень $C_E^{1/2}$ і $C_F^{2/3}$ (її можна знайти за алгоритмом аналогічним тому, що використовувався для пошуку стратегій некооперативної рівноваги) дорівнює $\left(\dfrac{u}{4}, \dfrac{u}{2}\right)$. Ця пара називається точкою рівноваги за Штакельбергом для другого гравця. Відповідний вектор бівитрат – $\left(-\dfrac{u^2}{16}, -\dfrac{u^2}{8}\right)$. У своїй точці рівноваги за Штакельбергом другий гравець несе витрати менші за ті, які йому давала некооперативна рівновага, у той час, як перший гравець на цьому втрачає.

Якщо ж припустити, що перший гравець настільки ж розумний, як і другий, то в цьому випадку вони обидва розігрують свої правила прийняття рішень за Штакельбергом $C_E^{2/3}$ і $C_F^{2/3}$. Тоді узгодженою парою стратегій буде пара $\left(\dfrac{2u}{5}, \dfrac{2u}{5}\right)$, а відповідні витрати рівні $\left(-\dfrac{2u^2}{25}, -\dfrac{2u^2}{25}\right)$. Отриману пару стратегій називають нерівноважною парою Штакельберга, оскільки витрати гравців у цьому випадку більші за ті, що отримуються у точці некооперативної рівноваги.

Таким чином наявна парадоксальна ситуація, в якій використання одним з гравців правила прийняття рішень Штакельберга вигідне для того, хто ним користується, тоді як сумісне використання цих правил прийняття рішень є невигідним для обох гравців.

Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи

1. У чому полягає модель дуополії Курно?
2. Яку роль в моделі дуополії Курно грає параметр u?
3. Який економічний сенс у моделі дуополії набувають стратегії кооперативної та некооперативної рівноваги, обережні стратегії?
4. Як знаходиться некооперативна рівновага у грі на правилах прийняття рішень?

Задача лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань

Для заданого значення параметра u треба:

1. Побудувати множину бівитрат гравців. Намалювати графік.
2. Знайти множину Парето-оптимальних бівитрат.
3. Визначити бістратегії, які є оптимальними за Парето і віртуальним мінімум гри.
4. Визначити обережні стратегії і гарантований вектор гри.
5. Знайти бістратегії рівноваги за умови некооперативного прийняття рішень.
6. Знайти рівноважну та нерівноважну пари стратегій Штакельберга і порівняти отримані витрати гравців з їх витратами для випадків кооперативної і некооперативної рівноваги.
7. Зробити висновок (яка ситуація вигідніша для кожного з гравців, скільки кожному з гравців потрібно виробляти).

Під час виконання завдання значення параметра u дорівнює сумі чисел: номеру за списком та числу, що утворюють останні дві цифри номера паспорта.

Список літератури

1. Берж, К. Общая теория игр нескольких лиц [Текст] / К. Берж. − М.:Физматгиз, 1961. − 126 с.

2. Васин, А.А. Введение в теорию игр с приложениями к экономике [Текст] / А.А. Васин, В.В. Морозов. − М., 2003. − 278 с.

3. Вентцель, Е.С. Элементы теории игр [Текст] / Е.С. Вентцель. − М.: Физматгиз, 1961. − 72 с.

4. Воробьев, Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры [Текст] / Н.Н. Воробьев. − М.: Наука, 1984. − 495 с.

5. Горелик, П. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления [Текст] / П. Горелик. − М: Радио и связь, 1991. − 287 с.

6. Давыдов, Э.Г. Методы и модели теории антагонистических игр [Текст] / Э.Г. Давыдов. − М.:МГУ, 1978. − 208 с.

7. Дюбин, Г.Н. Введение в прикладную теорию игр [Текст] / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль.− М.: Наука, 1981. − 336 с.

8. Зенкевич, Н.А. Игры со многими участниками [Текст] / Н.А. Зенкевич, В.Д. Ширяев. − М.:МГУ, 1989. − 92 с.

9. Калугина, Т.Ф. Исследование операций. Теория игр [Текст]: учебное пособие / Т.Ф. Калугина, В.Ю. Киселев. − Иваново: Иван. гос. энерг. ун-т, 2006. − 392 с.

10. Кукушкина, Н.С. Теория антагонистических игр [Текст] / Н.С. Кукушкина, В.В. Морозов. − М.:МГУ, 1984. − 104 с.

11. Мулен, Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели [Текст] / Мулен Э. − М.: Мир, 1991. − 464 с.

12. Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики [Текст] / Мулен Э. − М.: Мир, 1985.− 189 с.

13. Нейман, Д. Теория игр и экономическое поведение [Текст] / Д. Нейман, О. Моргенштерн. − М.: Наука, 1970. − 707 с.

14. Оуэн, Г. Теория игр [Текст] / Г. Оуэн. − М.: Мир, 1971. − 230 с.

15. Саасти, Т.Л. Математические модели конфликтных ситуаций [Текст] / Т. Л. Саасти. − М.: Сов. Радио, 1977. − 302 с.

Зміст

Рева Володимир Миколайович

Купенко Ольга Петрівна

ТЕОРІЯ ІГОР В ДОСЛІДЖЕННІ КОНФЛІКТНИХ СИТУАЦІЙ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня спе
ціаліст та магістр

Редактор Т.С. Меркулова

Підписано до друку 22.06.11. Формат 30×42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,2.
Обл.-вид. арк. 2,2. Тираж 100 прим. Зам. №

Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.