МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ГЕОЛОГОРОЗВІДУВАЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра вищої математики

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

МАТЕРІАЛИ МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

поглибленого вивчення розділу
студентами технічних спеціальностей

Дніпропетровськ
НГУ
2013

Інтегральне числення функції однієї змінної. Матеріали методичного забезпечення поглибленого вивчення розділу студентами технічних спеціальностей / Упоряд.: Т.С. Кагадій, Л.І. Шелест, К.Ю. Шелест. – Д.: Національний гірничий університет, 2013. – 64 с.

Упорядники: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (розділи II, III),
Л.І. Шелест, ст. викл. (розділ I, II),
К.Ю. Шелест, асист. (розділ I).

Затверджено методичною радою за напрямом підготовки «Комп'ютерні науки» за поданням кафедри вищої математики (протокол № 12 від 16.05.12).

Подано основні теоретичні відомості до розділу «Інтегральне числення функції однієї змінної», наведено розв’язання задач підвищеної складності та приклади для самостійного розгляду.

Відповідальна за випуск зав. кафедри вищої математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Дані методичні матеріали є другою частиною з циклу, що призначений для студентів, які цікавляться вищою математикою і прагнуть поглибити свої знання з цього предмету.

Мета цього видання:

- сформувати математичне мислення студентів, розвити у них практичні навички при розв'язуванні нестандартних задач;
- не виходячи за рамки програми курсу для технічних спеціальностей, допомогти студентам самостійно вивчити нові прийоми та методи розв'язання, а також ознайомитися з деякими теоретичними відомостями.

Дана робота складається з таких розділів: невизначений інтеграл, визначений інтеграл і його застосування, невласний інтеграл. У додатку містяться варіанти завдань міжнародних студентських олімпіад з вищої математики і їх розв'язання.

Розділ І. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Первісною функцією від даної функції $f(x)$ називається така функція $F(x)$, похідна від якої дорівнює $f(x)$.

Кожна неперервна на проміжку функція має на цьому проміжку первісну.

Якщо функція $F(x)$ є первісною від функції $f(x)$ на проміжку $x \in [a,b]$, то всяка друга первісна от $f(x)$ відрізняється від $F(x)$ на сталий доданок, тобто вона дорівнює $F(x)+C$, де C – стала.

Якщо $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$, де C – довільна стала, називається невизначеним інтегралом і позначається $\int f(x)dx = F(x)+C$

1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від кожного доданка, тобто

$$\int \left(f(x) + g(x) - \varphi(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int \varphi(x)dx .$$

Сталий множник можна винести за знак невизначеного інтеграла, тобто

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx .$$

У наступних прикладах нагадаємо **основні методи інтегрування:**

- метод розкладення підінтегральної функції на суму функцій;
- інтегрування методом заміни змінної;
- інтегрування частинами ($\int u dv = uv - \int v du$).

1.3. Приклади та розв'язання

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

Розв’язання:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}} = \int \frac{\left(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}\right)dx}{\left(\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}\right)\left(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}\right)} =$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}\right)dx}{1+e^x-1+e^x} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+e^x}dx}{e^x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-e^x}dx}{e^x} = \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} - \frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+e^x}}{1-\sqrt{1+e^x}} - \frac{\sqrt{1-e^x}}{e^x}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\left(1-\sqrt{1-e^x}\right)}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)\left(1+\sqrt{1-e^x}\right)} - \frac{\sqrt{1+e^x}}{2e^x} + \frac{\sqrt{1-e^x}}{2e^x} + C.$$

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{1+e^x}dx}{e^x} = \left\{ \begin{array}{l} t^2 = 1+e^x \Rightarrow e^x = t^2-1 \\ 2tdt = e^x dx \Rightarrow dx = \dfrac{2t}{t^2-1}dt \end{array} \right\} = 2\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2-1\right)^2};$$

$$\frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2};$$

$$t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t+1)(t-1)^2 + D(t-1)^2;$$

$$\left\{ \begin{array}{ll|llll} t=1: 1=4B; & B=\dfrac{1}{4}.-t^3 & 0=A+C; & & A=-C; & A=\dfrac{1}{4} \\ t=-1: 1=4D; & D=\dfrac{1}{4}.-t^0 & 0=-A+B+C+D; & 0=2C+\dfrac{1}{2}; & & C=-\dfrac{1}{4} \end{array} \right\}$$

$$2\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2-1\right)^2} = 2\int \left(\frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{4(t-1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t+1)^2}\right)dt =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln(t-1)-\frac{1}{t-1}-\ln(t+1)-\frac{1}{t+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{t-1}{t+1}-\frac{2t}{t^2-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}-\frac{2\sqrt{1+e^x}}{1+e^x-1}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}-\frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x};$$

$$I_2=\int\frac{\sqrt{1-e^x}\,dx}{e^x}=\left\{\begin{array}{l} t^2=1-e^x\Rightarrow e^x=1-t^2 \\ 2tdt=-e^x dx\Rightarrow dx=-\dfrac{2t}{1-t^2}dt \end{array}\right\}=-2\int\frac{t^2dt}{\left(1-t^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\ln(t-1)+\frac{1}{t-1}+\ln(t+1)+\frac{1}{t+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{t+1}{t-1}+\frac{2t}{t^2-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1-e^x}+1}{\sqrt{1-e^x}-1}-\frac{\sqrt{1-e^x}}{e^x}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли

а) $\int e^{-|x|}dx$.

Розв'язання:

1) $\int e^{-|x|}dx=e^x dx=e^x+C_1 \ \left(x<0\right);$

2) $\int e^{-|x|}dx=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C_2 \ \left(x\geq 0\right).$

Первісна функції неперервна, тому в точці $x=0$ маємо $-1+C_2=1+C_1$, звідки $C_2=2+C_1$

$$\int e^{-|x|}dx=\begin{cases} 2-e^{-x}+C, & x\geq 0, \\ e^x+C, & x<0, \end{cases}$$

б) $\int f(x)dx$, де $f(x)=\begin{cases} 1, & -\infty<x<0, \\ x+1, & 0\leq x\leq 1, \\ 2x, & 1<x<\infty. \end{cases}$

Розв'язання. Інтегруванная проводиться на різних проміжках:

$$\int f(x)dx=\begin{cases} x+C_1, & -\infty<x<0, \\ \dfrac{x^2}{2}+x+C_2, & 0\le x\le 1, \\ x^2+C_3, & 1<x<\infty. \end{cases}$$

З неперервності первісної функції витікає, що

$C_1=C_2$, $\dfrac{3}{2}+C_2=1+C_3$ або $C_1=C_2=C_3-\dfrac{1}{2}$.

Тоді

$$\int f(x)dx=\begin{cases} x+C, & -\infty<x<0, \\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, & 0\le x\le 1, \\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & 1<x<\infty. \end{cases}$$

Розв'язати самостійно:

$\int f(x)dx$, где $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & |x|\le 1; \\ 1-|x|, & |x|>1. \end{cases}$

Приклад 3. Виявити неточність у низці міркувань.

1. Інтегруємо n разів частинами інтеграл $\int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx$, якщо введені

позначення $\left\{\begin{matrix} u=\dfrac{1}{\sin x}, & du=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x \end{matrix}\right\}$.

2. Маємо $\int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx=\dfrac{\sin x}{\sin x}+\int \dfrac{\sin x\cos x}{\sin^2 x}dx=1+\int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx=$

$$=2+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\ldots n+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx.$$

3. Виходить $0=1=2=\ldots=n$.

Розв'язання. Згадаємо виведення формули інтегрування частинами. $d(uv)=udv+vdu$, інтегруючи обидві частини даної рівності, маємо $\int d(uv)=\int udv+\int vdu \Rightarrow \int udv=\int d(uv)-\int vdu$. Але $\int d(uv)=uv+C$ і

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

В останньому рівнянні довільну сталу C ми не пишемо, бо в правій частині формули залишився невизначений інтеграл, який вміщує довільну сталу. Отже, ліва і права частини рівності дорівнюють одна одній з точністю до довільної сталої.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int \sin x \ln\left(\cos x + \sqrt{2-\sin^2 x}\right)dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами:

$$\int \sin x \ln\left(\cos x + \sqrt{2-\sin^2 x}\right)dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln\left(\cos x + \sqrt{2-\sin^2 x}\right) & du = -\dfrac{\sin x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}dx \\ dv = \sin x dx & v = \text{-}\cos x \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\cos x \ln\left(\cos x + \sqrt{2-\sin^2 x}\right) - \int \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}dx = \left\{\begin{matrix} t = 2-\sin^2 x \\ dt = -2\sin x \cos x dx \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\cos x \ln\left(\cos x + \sqrt{2-\sin^2 x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\cos x \ln\left(\cos x + \sqrt{2-\sin^2 x}\right) + \sqrt{t} =$$

$$= -\cos x \ln\left(\cos x + \sqrt{2-\sin^2 x}\right) + \sqrt{2-\sin^2 x} + C .$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx = \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx + \int \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}e^x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx + \int e^x tg\frac{x}{2}dx = \left\{\begin{matrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} & v = 2tg\dfrac{x}{2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2e^x tg\frac{x}{2} - 2\int e^x tg\frac{x}{2}dx\right) + \int e^x tg\frac{x}{2}dx = e^x tg\frac{x}{2} + C .$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int x arctgx \ln\left(1+x^2\right)dx$.

Розв'язання:

$$\int x arctgx \ln\left(1+x^2\right)dx = \left\{\begin{array}{ll} u = arctgx & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\ln\left(1+x^2\right)dx & v = \dfrac{x^2+1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{arctgx}{2}\left(\left(x^2+1\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2\right)-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{arctgx}{2}\left(\left(x^2+1\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2\right)-\frac{1}{2}\int\ln\left(1+x^2\right)dx+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{arctgx}{2}\left(\left(x^2+1\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2\right)-\frac{x}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{3}{2}(x-arctgx).$$

У розв'язанні використовувалися такі результати:

$$\int x\ln\left(1+x^2\right)dx = \left\{\begin{array}{ll} u = \ln\left(1+x^2\right) & du = \dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = \frac{x^2+1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{2};$$

$$\int\ln\left(1+x^2\right)dx = \left\{\begin{array}{ll} u = \ln\left(1+x^2\right) & du = \dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right\} = x\ln\left(1+x^2\right)-2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= x\ln\left(1+x^2\right)-2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x\ln\left(1+x^2\right)-2\left(x-arctgx\right).$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)dx$.

Розв'язання:

$$\int e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)dx = \left\{\begin{array}{ll} u = \ln\left(1+e^{-x}\right) & du = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}\right\} =$$

$$= e^x \ln\left(1+e^{-x}\right) + \int \frac{dx}{1+e^{-x}} = e^x \ln\left(1+e^{-x}\right) + \int \frac{e^x dx}{1+e^x} = e^x \ln\left(1+e^{-x}\right) + \ln\left(1+e^x\right) + C .$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} dx = \int \frac{\cos x}{x} dx - \int \frac{\sin x}{x^2} dx = \left\{ \begin{matrix} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{\sin x}{x} + \int \frac{\sin x}{x^2} dx - \int \frac{\sin x}{x^2} dx = \frac{\sin x}{x} + C .$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l|l} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = u & du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = dv & v = \sqrt{1+x^2} - \end{array} \right\} =$$

$$= \sqrt{1+x^2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int dx = \sqrt{1+x^2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - x + C .$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^2}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\left(a^2+x^2\right) - x^2}{\left(a^2+x^2\right)^2} dx = \frac{1}{a^3} arctg \frac{x}{a} + \frac{1}{a^2} \int \frac{-x^2}{\left(a^2+x^2\right)^2} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} x = u & du = dx \\ -\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^2} = dv & v = \frac{1}{2\left(a^2+x^2\right)} \end{array} \right\} = \frac{1}{a^3} arctg \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2\left(a^2+x^2\right)} - \frac{1}{2a^3} arctg \frac{x}{a} + C =$$

$$= \frac{1}{2a^3} arctg \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2\left(a^2+x^2\right)} + C .$$

Приклад 11. Знайти первісну для функції:

а) $y=\dfrac{x^2}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}$; б) $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^{100}}$.

Розв'язання: а) $y=\dfrac{x^2}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}=\displaystyle\int\frac{x^2\cos x dx}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2\cos x}=$

$$=\left\{\begin{aligned}&u=\frac{x}{\cos x},\quad du=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}dx\\&dv=\frac{x\cos x dx}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2},\quad v=-\frac{1}{x\sin x+\cos x}\end{aligned}\right\}=$$

$$=-\frac{x}{\left(x\sin x+\cos x\right)\cos x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\frac{x}{\left(x\sin x+\cos x\right)\cos x}+tgx+C;$$

$$\text{б)}\int\frac{x^3}{\left(x-1\right)^{100}}dx=\left\{\begin{aligned}&x-1=t\\&x=t+1\\&dx=dt\end{aligned}\right\}=\int\frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{100}}dt=\int\left(t^{-97}+3t^{-98}+3t^{-99}+t^{-100}\right)dt=$$

$$=\frac{t^{-96}}{-96}+3\frac{t^{-97}}{-97}+3\frac{t^{-98}}{-98}+\frac{t^{-99}}{-99}+C=\frac{-\left(x-1\right)^{-96}}{96}-\frac{3\left(x-1\right)^{-97}}{97}-\frac{3\left(x-1\right)^{-98}}{98}-\frac{\left(x-1\right)^{-99}}{99}+C.$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\frac{x^4dx}{x^8+3x^4+2}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{x^4dx}{x^8+3x^4+2}=\left\{\begin{aligned}&x^4=t\qquad x^3dx=\frac{dt}{4}\\&4x^3dx=dt\end{aligned}\right\}=\frac{1}{4}\int\frac{t^2dt}{t^2+3t+2}=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{3t+2}{t^2+3t+2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{\frac{3}{2}\left(2t+3\right)-\frac{5}{2}}{t^2+3t+2}\right)dt=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{3}{2}\frac{2t+3}{t^2+3t+2}+\frac{5}{2}\frac{1}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(t-\frac{3}{2}\ln\left|t^2+3t+2\right|+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right|\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}\ln\left|x^8+3x^4+2\right|+\frac{5}{8}\ln\left|\frac{x^4+1}{x^4+2}\right|+C.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int\frac{x^9dx}{\left(x^{10}+2x^5+2\right)^2}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{x^9dx}{\left(x^{10}+2x^5+2\right)^2}=\int\frac{x^4\cdot x^5dx}{\left(x^{10}+2x^5+2\right)^2}=\left\{\begin{matrix} x^5=t & x^4dx=\dfrac{dt}{5} \\ 5x^4dx=dt & \end{matrix}\right\}=\frac{1}{5}\int\frac{tdt}{\left(t^2+2t+2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{tdt}{\left((t+1)^2+1\right)^2}=\left\{\begin{matrix} t+1=tgz & dt=\dfrac{dz}{\cos^2 z} \\ t=tgz-1 & \end{matrix}\right\}=\frac{1}{5}\int\frac{tgz-1}{\left(tg^2z+1\right)^2}\frac{dz}{\cos^2 z}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{tgz-1}{\left(\frac{1}{\cos^2 z}\right)^2\cos^2 z}dz=\frac{1}{5}\int\left(tgz-1\right)\cos^2 zdz=\frac{1}{5}\int\left(\sin z\cos z-\cos^2 z\right)dz=$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2}\sin 2z-\frac{1}{2}(1+\cos 2z)\right)dz=-\frac{1}{20}\cos 2z-\frac{1}{20}\sin 2z-\frac{1}{10}z=$$

$$=-\frac{1}{20}\frac{1-tg^2z}{1+tg^2z}-\frac{1}{20}\frac{2tgz}{1+tg^2z}-\frac{1}{10}z+C=-\frac{1}{20}\frac{1-\left(x^5+1\right)^2}{1+\left(x^5+1\right)^2}-\frac{1}{10}\frac{x^5+1}{1+\left(x^5+1\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{10}arctg(x^5+1)+C=-\frac{1}{20}\frac{1-x^{10}-2x^5-1+2x^5+2}{x^{10}+2x^5+2}-\frac{1}{10}arctg\left(x^5+1\right)+C=$$

$$=-\frac{2-x^{10}}{20\left(x^{10}+2x^5+2\right)}-\frac{1}{10}arctg\left(x^5+1\right)+C.$$

Приклад 14. Обчислити інтеграл $\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$.

Розв’язання:

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \left\{\begin{matrix} x^n+1=t & x^{n-1}dx=\dfrac{dt}{n} \\ nx^{n-1}dx=dt & \end{matrix}\right\} = \frac{1}{n}\int \frac{(t-1)dt}{t} = \frac{1}{n}t - \frac{1}{n}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{x^4+1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left|x^n+1\right| + C = \frac{x^4}{n} - \frac{1}{n}\ln\left|x^n+1\right| + C.$$

Приклад 15. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x\left(x^{10}+2\right)}$.

Розв’язання:

$$\int \frac{dx}{x\left(x^{10}+2\right)} = \begin{bmatrix} x^5=t & x^4dx=\dfrac{dt}{5} \\ 5x^4dx=dt & \end{bmatrix} = \int \frac{x^4dx}{x^5\left(x^{10}+2\right)} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t\left(t^2+2\right)} =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{2+t^2-t^2}{t\left(t^2+2\right)}dt = \frac{1}{10}\int\left(\frac{2+t^2}{t\left(t^2+2\right)} - \frac{t^2}{t\left(t^2+2\right)}\right)dt = \frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+2\right|\right) = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\right| = \frac{1}{10}\ln\frac{x^5}{\sqrt{x^{10}+2}} + C.$$

Приклад 16. Обчислити інтеграл $\int \frac{1-x^7}{x\left(1+x^7\right)}dx$.

Розв’язання:

$$\int \frac{1-x^7}{x\left(1+x^7\right)}dx = \int \frac{2-\left(x^7+1\right)}{x\left(1+x^7\right)}dx = \int \frac{2}{x\left(1+x^7\right)}dx - \int \frac{\cancel{x^7+1}}{x\cancel{\left(1+x^7\right)}}dx = \int \frac{2x^6}{x^7\left(1+x^7\right)}dx - \ln|x| =$$

$$= \left\{\begin{matrix} x^7=t & x^6dx=\dfrac{dt}{7} \\ 7x^6dx=dt & \end{matrix}\right\} = \frac{2}{7}\int \frac{dt}{t(t+1)} - \ln|x| =$$

$$= \frac{2}{7}\int\left(\frac{1+t}{t(t+1)} - \frac{t}{t(t+1)}\right)dt - \ln|x| = \frac{2}{7}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt - \ln|x| =$$

$$= \frac{2}{7}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| - \ln|x| = \frac{2}{7}\ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right| - \ln|x| + C = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^{14}}{\left(x^7+1\right)^2 x^7}\right| + C = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{\left(x^7+1\right)^2}\right| + C.$$

Приклад 17. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^4-1}{x\left(x^4-5\right)\left(x^5-5x+1\right)}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x^4-1}{x\left(x^4-5\right)\left(x^5-5x+1\right)}dx = \int \frac{x^4-1}{\left(x^5-5x\right)\left(x^5-5x+1\right)}dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} x^5-5x=t & \left(x^4-1\right)dx=\frac{dt}{5} \\ 5\left(x^4-1\right)dx=dt & \end{matrix} \right\} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5-5x}{x^5-5x+1}\right|.$$

Приклад 18. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} x+\frac{1}{x}=t & x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2 \\ x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2 & dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{t^2-2+t+1} = \int \frac{dt}{t^2+t-1} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{5}}{2}}\ln\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2t+1-\sqrt{5}}{2t+1+\sqrt{5}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1-\sqrt{5}}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+\left(1-\sqrt{5}\right)x+2}{2x^2+\left(1+\sqrt{5}\right)x+2}.$$

Приклад 19. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \int \frac{x^4+1-x^2+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}dx = \int \frac{x^4+1-x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)} + \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}dx =$$

$$=\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x^2dx}{x^6+1}=\begin{Bmatrix} x^3=t & x^2dx=\dfrac{dt}{3} \\ 3x^2dx=dt & \end{Bmatrix}=arctgx+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}=arctgx+\frac{1}{3}arctgx^3+C.$$

Обчислити самостійно такі інтеграли:

1) $\int\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; 2) $\int\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$;

3) $\int x\arccos\frac{1}{x}dx$; 4) $\int x^x\left(1+\ln x\right)dx$; 5) $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$; 6) $\int\frac{arctge^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}\left(1+e^x\right)}dx$.

Розділ ІІ. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Інтегральна сума. Визначений інтеграл

Нехай на проміжку $\left[a;b\right]$ задана неперервна функція $y=f(x)$. Виконаємо такі дії:

1. За допомогою точок ділення $x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_{n-1}$ розіб'ємо проміжок $\left[a;b\right]$ на n «маленьких» проміжків: $\left[x_0,x_1\right]$, $\left[x_1,x_2\right]$, …, $\left[x_{i-1},x_i\right]$, …, $\left[x_{n-1},x_n\right]$, де $x_0=a$, $x_n=b$.

2. В кожному проміжку $\left[x_{i-1},x_i\right]$ $(i=1,2,3,...,n)$ виберемо довільну точку ξ_i, $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ і помножимо значення функції $f(x)$ в точці ξ_i на довжину $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$.

3. Складемо суму σ_n всіх таких добутків:

$$\sigma_n=f\left(\xi_1\right)\Delta x_1+f\left(\xi_2\right)\Delta x_2+...+f\left(\xi_i\right)\Delta x_i+...+f\left(\xi_n\right)\Delta x_n$$

або в скороченому вигляді

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i. \quad (1)$$

Така сума називається інтегральною сумою.

4. Назвемо найбільшу з довжин проміжків $\left[x_{i-1},x_i\right]$ діаметром розбиття і позначимо його через λ. Нехай число n проміжків розбиття $\left[x_{i-1},x_i\right]$ необмежено зростає і $\lambda\to 0$. Якщо при цьому інтегральна сума σ_n має границю, що дорівнює числу $\dot{I}$, яка не залежить ні від способу розбиття

проміжку $[a,b]$ на «малі» проміжки $[x_{i-1},x_i]$, ні від вибору точок ξ_i в кожному з них, то це число $\dot{I}$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ і позначається символом $\int_a^b f(x)dx$.

Таким чином, визначений інтеграл є число, яке дорівнює границі, до якої наближається інтегральна сума (1), коли діаметр розбиття прямує до нуля.

2.2. Обчислення визначених інтегралів за допомогою формули Ньютона-Лейбниця

Якщо функція $f(x)$ визначена та неперервна на сегменті $[a,b]$ і $F(x)$ – її первісна, тобто $F'(x)=f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \tag{2}$$

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x)\geq 0$ геометрично являє собою площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, віссю OX та двома перпендикулярами до осі OX: $x=a$ і $x=b$.

2.3. Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x)\geq 0$ на відрізку $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2. Якщо $f(x)\leq g(x)$ на відрізку $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

3. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

4. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, m – найменше, M – найбільше значення $f(x)$ на $[a,b]$, то

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

(теорема про оцінку визначеного інтеграла).

5. Якщо функція $f(x)$ неперервна, а $g(x)$ – функція, яка інтегрується на відрізку $[a,b]$, $g(x) \geq 0$, m і M – найбільше і найменше значення $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

(узагальнена теорема про оцінку визначеного інтеграла).

6. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує така точка $c \in (a,b)$ і при цьому виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(теорема про середнє значення).

Число $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

7. Якщо функція $f(x)$ неперервна, а $g(x)$ – функція, яка інтегрується і $g(x) \geq 0$, то існує така точка $c \in (a,b)$ і при цьому виконується рівність

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

(узагальнена теорема про середнє).

8. Якщо $f^2(x)$ і $g^2(x)$ – функції, які інтегруються на відрізку $[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx}$$

(нерівність Коші – Буняковського).

9. Інтегрування парних і непарних функцій в симетричних границях. Якщо функція $f(x)$ парна, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$. Якщо функція $f(x)$ непарна, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

10. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то інтеграл зі змінною границею

$$\Phi(x) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

є первісною для функції $f(x)$, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_{a}^{x} f(t)dt \right)' = f(x),\ x \in [a,b].$$

11. Якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ такі, що диференціюються в точці $x \in (a,b)$ і функція $f(t)$ неперервна при $\varphi(a) \le t \le \psi(b)$, то

$$\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt \right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

2.4. Заміна змінних у визначеному інтегралі

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а функція $x = \varphi(t)$ така, що неперервно диференціюється на відрізку $[t_1,\ t_2]$, причому $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

2.5. Інтегрування за частинами

Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ і їх похідні $u'(x)$ і $v'(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, то

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

2.6. Приклади та розв'язання

Приклад 1. Довести існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ та виразити її значення через інтеграл, якщо:

а) $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$; б) $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n}$;

в) $S_n = \frac{n^2}{n^3+1} + \frac{n^2}{n^3+2^3} + \frac{n^2}{n^3+3^3} + \ldots + \frac{n^2}{2n^3}$.

Розв'язання

Розглянемо завдання а). Доведемо існування границі послідовності S_n. Відомо, що монотонна та обмежена послідовність має границю. Покажемо, що $S_{n+1} < S_n$, тобто послідовність S_n монотонно спадає.

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+2}, \quad S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Додамо до S_{n+1} та віднімемо $1/n$, одержимо

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = S_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} =$$

$$= S_n - \frac{3n+2}{(2n+1)(2n+2)n} < S_n, \text{ тобто } S_{n+1} < S_n .$$

Послідовність S_n – обмежена. Покажемо це.

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} < \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ доданків}} = \frac{1}{n} + 1 < 2 .$$

Таким чином, S_n – монотонна та обмежена послідовність, отже, вона має границю. Знайдемо цю границю за допомогою інтеграла.

Інтегралом функції $f(x)$ на сегменті $[a,b]$ називається число

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

де $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Розглянемо інтегральну суму для неперервної на відрізку $[0,1]$ функції $f(x)=1/(1+x)$. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на відрізки довжиною $1/n$, тоді точками розбиття будуть $\left\{0;\frac{1}{n};\frac{2}{n};...;\frac{n}{n}\right\}$ (рис. 1).

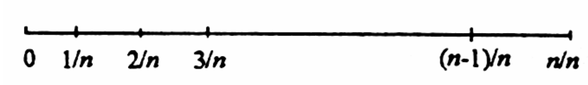


Рис. 1

За точки ξ_i візьмемо точки $1/n$, $2/n$, …, n/n, при цьому інтегральна сума для $f(x)=1/(1+x)$ буде мати вигляд

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}.$$

Тоді $\int\limits_0^1\frac{1}{1+x}dx=\lim\limits_{\frac{1}{n}\to 0}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$.

Для розв'язання задачі необхідно обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)=$$

$$=0+\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2.$$

Розглянемо завдання б). Існування границі послідовності в другому прикладі доводиться так само, як і в попередньому. Знайдемо границю цієї послідовності. Будемо розглядати інтегральну суму для функції $f(x)=1/(1+x)$ на сегменті $[0,2]$. Розіб'ємо його на відрізки довжиною $1/n$, тоді точками розбивання будуть $\left\{0;\frac{1}{n};\frac{2}{n};...;\frac{2n}{n}\right\}$. За ξ_i візьмемо точки $1/n$, $2/n$, …, $2n/n$, а інтегральна сума для $f(x)$ матиме вигляд

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+...+\frac{1}{1+\frac{2n}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}.$$

Тоді $\lim\limits_{\frac{1}{n}\to 0}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}\right)=\int\limits_0^2\frac{1}{1+x}dx=\ln|1+x|\Big|_0^2=\ln 3.$

Розглянемо завдання в). Знайдемо інтегральну суму для функції $f(x)=1/\left(1+x^3\right)$ на відрізку $[0,1]$. Діаметр розбиття $-\ 1/n$. Точки $1/n$, $2/n$, … , n/n приймемо за ξ_i. Інтегральна сума для $f(x)$ матиме вигляд:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{2^3}{n^3}}\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n^3}{n^3}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{n^3+2^3}+\ldots+\frac{n^2}{2n^3}.$$

$$\lim_{\frac{1}{n}\to 0}\left(\frac{n^2}{n^3+1}+\frac{n^2}{n^3+2^3}+\ldots+\frac{n^2}{2n^3}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2},\\ A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x-2}{1-x+x^2}dx=\frac{1}{3}\ln|1+x|\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{2x-1}{1-x+x^2}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4}=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{6}\ln\left|1-x+x^2\right|\Big|_0^1+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}}-arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}.$$

Приклад 2. Функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[0,1]$, причому $\int_0^1 f(x)dx>0$. Довести, що існує відрізок $[a,b]\subset[0,1]$, на якому $f(x)>0$.

Розв'язання

Оскільки функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[0,1]$, то при будь-якому виборі точок ξ_i, для яких виконується умова $\frac{i-1}{n}\le\xi_i\le\frac{i}{n}$, сума $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)$ прямує до $\int_0^1 f(x)dx$ при $n\to\infty$. Якщо на будь-якому відрізку $[a,b]$ існує точка, в якій $f(x)\le 0$, то точки ξ_i можна вибрати так, що $f(\xi_i)\le 0$; при цьому сума $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)$ буде не додатною і відповідно її границя не може бути додатною.

Приклад 3. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^4\frac{|x-1|dx}{|x-2|+|x-3|}$, б) $\int_0^1\left(1+xf'(x)\right)e^{f(x)}dx$.

Розв'язання

Розглянемо завдання а). Розіб'ємо відрізок $\left[0,4\right]$ на частини, в яких вирази, що стоять під знаком модуля, мають сталий знак. Маємо чотири інтервали:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x-1 \le 0 \\ x-2 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1 < x \le 2 \\ x-1 > 0 \\ x-2 \le 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2 < x \le 3 \\ x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x-3 \le 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3 < x \le 4 \\ x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}.$$

Даний інтеграл розіб'ємо на суму чотирьох інтегралів:

$$\int_0^1 \frac{(-x+1)dx}{-x+2-x+3} + \int_1^2 \frac{(x-1)dx}{-x+2-x+3} + \int_2^3 \frac{(x-1)dx}{x-2-x+3} + \int_3^4 \frac{(x-1)dx}{x-2+x-3} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)dx}{5-2x} + \int_1^2 \frac{(x-1)dx}{5-2x} + \int_2^3 \frac{(x-1)dx}{1} + \int_3^4 \frac{(x-1)dx}{2x-5} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 dx - 3\int_0^1 \frac{dx}{5-2x}\right] - \frac{1}{2}\left[\int_1^2 dx - 3\int_1^2 \frac{dx}{5-2x}\right] + \int_2^3 (x-1)dx + \frac{1}{2}\left[\int_3^4 dx + 3\int_3^4 \frac{dx}{2x-5}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\ln|5-2x|\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\ln|5-2x|\right)\Bigg|_1^2 + \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_2^3 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\ln|2x-5|\right)\Bigg|_3^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 5 - 2 + 1 + \frac{3}{2}\ln 3 + 4 - 1 + 4 + \frac{3}{2}\ln 3 - 3\right) = 2 + \frac{3}{4}\ln\frac{27}{5};$$

б) $\displaystyle\int_0^1 \left(1 + xf'(x)\right)e^{f(x)}dx = \int_0^1 e^{f(x)}dx + \int_0^1 xf'(x)e^{f(x)}dx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = f'(x)e^{f(x)}dx, & v = e^{f(x)} \end{matrix}\right\} = \int_0^1 e^{f(x)}dx + xe^{f(x)}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 e^{f(x)}dx = xe^{f(x)}\Bigg|_0^1 = e^{f(1)}.$$

Приклад 4. Обчислити $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x + 1}{\cos^2 x}dx$.

Розв'язання: $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x + 1}{\cos^2 x}dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7 dx}{\cos^2 x} - 3\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^5 dx}{\cos^2 x} +$

$$+7\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^3 dx}{\cos^2 x} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos^2 x} + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Оскільки в перших чотирьох інтегралах підінтегральна функція непарна, то вони дорівнюють нулю. Обчислимо останній інтеграл.

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=2 \text{. Отже, } \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^7-3x^5+7x^3-x+1}{\cos^2 x}dx=2 .$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$.

Розв'язання: $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|dx=$

$=\{$для $x\in(0,\pi/2)$ $\cos x>0,$ а для $x\in(\pi/2,\pi)$ $\cos x<0,$ тому розіб'ємо наш інтеграл на два та розкриємо модуль за його визначенням$\}=$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos x dx-\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x dx=\sqrt{2}\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)=2\sqrt{2} .$$

Приклад 6. Довести, що $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2 dx>0$.

Розв'язання

Зробимо заміну змінної $x^2=y$, тоді

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy\right)=\{\text{для другого інтеграла } y=z+\pi,\ dy=dx\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy+\int_0^{\pi}\frac{\sin(z+\pi)}{\sqrt{z+\pi}}dz\right)=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy-\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{\sqrt{z+\pi}}dz\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin y}{\sqrt{y}}-\frac{\sin y}{\sqrt{y+\pi}}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{y+\pi}}\right)\sin y dy>0 ,$$

оскільки підінтегральна функція в останньому інтегралі додатна на відрізку $(0,\pi)$.

Приклад 7. Визначити точки локального екстремуму функції

$$f(x)=\int_0^{x}e^{u^2}\left(u^2-3u+2\right)du ,\ x\in R .$$

Розв'язання

Функція досягає екстремуму в точках, в яких її похідна дорівнює нулю, а знак похідної при переході через ці точки змінюється. Знайдемо похідну $f(x)$.

$$f'(x) = \left(\int_0^x e^{u^2} \left(u^2 - 3u + 2 \right) du \right)' = e^{x^2} \left(x^2 - 3x + 2 \right).$$

Через те, що $e^{x^2} \neq 0$, похідна $f'(x)$ дорівнює 0, якщо $x^2 - 3x + 2 = 0$, тобто в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Визначимо знаки $f'(x)$ зліва та справа від точок $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$, пам'ятаючи, що $e^{x^2} > 0$ (рис. 2). Скористуємося методом інтервалів.

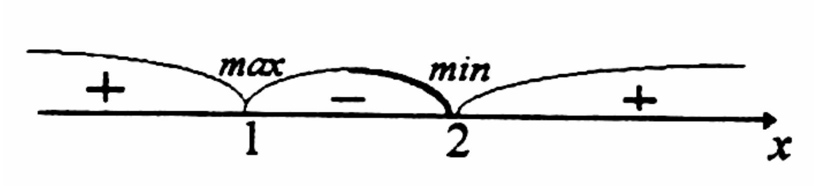


Рис. 2

Отже, $\max f(x) = f(1)$, а $\min f(x) = f(2)$.

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$.

Розв'язання

При $x \to 0$ $\int_0^x \cos x^2 dx \to 0$, оскільки верхня границя інтеграла прямує до нуля. Тоді під знаком границі маємо невизначеність $\left(\dfrac{0}{0} \right)$, яку можна розкрити за правилом Лопіталя. Отже, маємо $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos x^2 = 1$.

Приклад 9. Перевірити, що при $x \geq 0$ рівняння $z^3 + xz = 8$ (*) визначає тільки одну функцію $z(x)$ з дійсними значеннями та знайти $\int_0^7 z^2 dx$.

Розв'язання

Функція $\varphi(z)=z^3+xz$ монотонно зростає при $x\ge 0$, тому що $\varphi'(z)=3z^2+x\ge 0$. Оскільки $\varphi(0)=0$, а $\varphi(\infty)=\infty$, існує тільки один розв'язок $z(x)$ рівняння (*), причому $z(x)>0$. Покажемо тепер, що функція $z(x)$, яка є розв'язком рівняння (*), монотонно спадає. Для цього продиференціюємо рівняння (*) за змінною x, одержимо: $3z^2z'+z+xz'=0$, звідки знайдемо $z'=-z/\left(3z^2+x\right)$. Через те, що $z(x)>0$, маємо $z'\le 0$.

Оскільки функція $z(x)$ монотонно спадає, вона має обернену функцію $x(z)$. Знаючи, що $z(0)=2$ (підставимо $x=0$ в (*)) та $z(7)=1$, зробимо заміну в інтегралі $\int\limits_0^7 z^2dx$, взявши за нову змінну z. Тоді дістанемо

$$\int\limits_0^7 z^2(x)dx=\int\limits_2^1 z^2x'\left(z\right)dz=\int\limits_2^1\frac{z^2dz}{z'\left(x\right)}=-\int\limits_2^1\frac{3z^2+x}{z}z^2dz=\int\limits_1^2\left(3z^3+xz\right)dz=$$

$$=\left\{\text{з рівності (*) маємо } xz=8-z^3\right\}=\int\limits_1^2\left(3z^3+8-z^3\right)dz=\left(\frac{z^4}{2}+8z\right)\Bigg|_1^2=\frac{31}{2}.$$

Приклад 10. Нехай $0<f(z)<1/2z$. Довести, що функція

$$g(x)=\int\limits_0^x z^2f(z)dz-\left(\int\limits_0^x zf(z)dz\right)^2$$ зростає при $x>0$.

Розв'язання

Функція $g(x)$ зростає при $x>0$, якщо за цих умов $g'(x)\ge 0$. Знайдемо похідну даної функції.

$$g'(x)=x^2f(x)-2xf(x)\int\limits_0^x zf(z)dz=xf(x)\left(x-2\int\limits_0^x zf(z)dz\right).$$

За умовою $0<f(z)<1/2z$, тому $0<\int\limits_0^x zf(z)dz<\int\limits_0^x z\frac{1}{2z}dz=\frac{x}{2}$. Отже, $x-2\int\limits_0^x zf(z)dz>0$, тоді $g'(x)>0$, що означає, що функція $g(x)$ зростає.

Приклад 11. Нехай $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[0,1]$, a – додатне число, причому $\int\limits_0^1 f(x)dx = a$, $0 \le f(x) \le a^{2/3}$. Довести, що

$$\int\limits_0^1 \sqrt{f(x)}dx \ge a^{2/3}.$$

Розв'язання: $\int\limits_0^1 \sqrt{f(x)}dx = \int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{f(x)}} \ge \int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{a^{2/3}}} = \frac{\int\limits_0^1 f(x)dx}{a^{1/3}} = a^{2/3}$.

Приклад 12. В інтегралі $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x dx$ необхідно виконати заміну змінної $\sin x = t$.

Розв'язання

Нехай $\sin x = t \;\; dt = \cos x dx$,

$$x = (-1)^k \arcsin t + k\pi \; (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

На проміжку $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $x = \arcsin t$ при $x_1 = 0$ $t_1 = 0$, при $x_1 = \frac{\pi}{2}$ $t_2 = 1$.

На проміжку $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ $x = \pi - \arcsin t$ при $x_1 = \frac{\pi}{2}$ $t_1 = 1$, при $x_2 = \pi$ t_2=0.

На проміжку $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ $x = \pi - \arcsin t$ при $x_1 = \pi$ $t_1 = 0$, при $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ t_2=–1.

На проміжку $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ $x = 2\pi + \arcsin t$ при $x_1 = \frac{3\pi}{2}$ $t_1 = -1$, при $x_2 = 2\pi$ t_2=0.

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x dx + \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x dx + \int\limits_{3\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx =$$

$$= \int\limits_0^1 f(\arcsin t)dt + \int\limits_1^0 f(\pi - \arcsin t)dt + \int\limits_0^{-1} f(\pi - \arcsin t)dt + \int\limits_{-1}^0 f(2\pi + \arcsin t)dt =$$

$$=\int_0^1 f(\arcsin t)\,dt-\int_0^1 f(\pi-\arcsin t)\,dt+\int_{-1}^0 f(2\pi+\arcsin t)\,dt-\int_{-1}^0 f(\pi-\arcsin t)\,dt=$$

$$=\int_0^1\left(f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)\right)dt+\int_{-1}^0\left(f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)\right)dt.$$

Приклад 13. Нехай відомо, що $\int_0^x f(t)dt=xf(\theta x)$. Знайти θ, якщо $f(t)=\ln t$. Чому дорівнюють $\lim\limits_{x\to 0}\theta$?

Розв'язання:

$$\int_0^x \ln t dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x \ln t dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(t\ln t-t\right)\Big|_\varepsilon^x=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x-x-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\right)=$$

$$=\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}\text{(застосовується правило Лопіталя)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon=0\right\}=$$

$$=x\ln x-x\Rightarrow x\ln x-x=x\ln\theta x\Rightarrow x\ln x-x=x\ln\theta+x\ln x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\theta=-1\Rightarrow\theta=\frac{1}{e},\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{e}=\frac{1}{e},\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e}=\frac{1}{e}.$$

Приклад 14. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x (arctgx)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x (arctgx)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\left\{\lim_{x\to\infty}\int_0^x (arctgx)^2\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^{\sqrt{3}}(arctgx)^2\,dx+\int_{\sqrt{3}}^x (arctgx)^2\,dx=\infty,\right.$$

оскільки $(arctgx)^2$ – функція неперервна, тому $\int_0^{\sqrt{3}}(arctgx)^2\,dx$ існує і дорівнює числу, а для $x>\sqrt{3}$ $arctgx>1$, тому $\int\limits_{\sqrt{3}}^{x}\left(arctgx\right)^2 dx>\int\limits_{\sqrt{3}}^{x} dx$, при $x\to\infty$ $\int\limits_{\sqrt{3}}^{x} dx\to\infty$, так як чисельник і знаменник при $x\to\infty$ наближається до ∞, то застосовуємо правило Лопіталя $\Bigg\} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(arctgx\right)^2 \cancel{2}\sqrt{x^2+1}}{\cancel{2}x} =$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(arctgx\right)^2\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\pi^2}{4}$$, через те що $\lim\limits_{x\to\infty} arctg\, x\to\dfrac{\pi}{2}$, а $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\to 1$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{2x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{\frac{d}{dx}e^{x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{tgt}\,dt}{\int\limits_0^{tgx}\sqrt{\sin x}\,dt}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{tgt}\,dt}{\int\limits_0^{tgx}\sqrt{\sin x}\,dt}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{tg(\sin x)}}{\frac{\sqrt{\sin(tgx)}}{\cos^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{tg(\sin x)}}{\sqrt{\sin(tgx)}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin x}{tgx}}=1;$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos x^2 dx}{x}$.

Розв'язання:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos x^2 dx}{x}=\Big\{\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_0^x \cos x^2 dx=\int\limits_0^0 \cos x^2 dx=0$, чисельник наближається при $x\to 0$ до 0 і знаменник також. Для обчислення цієї границі застосуємо правило Лопіталя $\Big\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1$.

Приклад 15. Довести, що $\int\limits_{-3}^{3}\frac{x^2\sin x}{1+x^4}dx=0$.

Розв'язання

Функція $f(x)=\frac{x^2\sin x}{1+x^4}$ – непарна.

Приклад 16. Знайти: а) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2 dx$; б) $\frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin x^2 dx$; в) $\frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2 dx$.

Розв'язання:

а) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2 dx=0$, так як визначений інтеграл – число.

б) $\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx = -\sin a^2$.

в) $\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2$.

Приклад 17. Знайти похідні: а) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$; б) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos \pi t^2 dt$.

Розв'язання:

а) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt = \sqrt{1+\left(x^2\right)^2}\,2x$;

б) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos \pi t^2 dt = -\cos\left(\pi\cos^2 x\right)\sin x - \cos\left(\pi \sin^2 x\right)\cos x =$

$= \left\{\cos\left(\pi\cos^2 x\right) = \cos\left(\pi\left(1-\sin^2 x\right)\right) = \cos\left(\pi - \pi\sin^2 x\right) =\right.$

$\left.= -\cos\left(\pi\sin^2 x\right)\right\} = (\sin x - \cos x)\cos(\pi \sin^2 x)$.

Приклад 18. Пояснити, чому формальна змінна $x = \varphi(t)$ приводить до неправильних результатів, якщо:

а) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$, де $x = \frac{1}{t}$; б) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$, де $tgx = t$.

Розв'язання:

а) $x = \frac{1}{t}$; $\begin{matrix} t_1 = -1 \\ t_2 = 1 \end{matrix}$; $-1 \le t \le 1$ на цьому проміжку функція $\frac{1}{t}$ розривна у точці $t = 0$;

б) функція tgx розривна в точці $x = \frac{\pi}{2}$, а це значення x входить у проміжок $[0;\pi]$.

Приклад 19. Довести, що якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f\left(a+(b-a)x\right)dx$.

Розв'язання: $\int\limits_0^1 f\left(a+\left(b-a\right)x\right)dx = \int\limits_0^1 f\left(a+\left(b-a\right)t\right)dt$,

$$\int\limits_0^1 f\left(a+\left(b-a\right)t\right)dt = \left\{\begin{aligned} &x = a+\left(b-a\right)t, \\ &dx = \left(b-a\right)dt \Rightarrow dt = \frac{dx}{b-a}, \\ &t_1 = 0,\ x_1 = a,\ \text{при } t_2 = 1,\ x_2 = b \end{aligned}\right\} = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Приклад 20. Довести, що якщо $f(x)$ неперервна на проміжку $\left[0,1\right]$, то

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi} xf\left(\sin x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx$.

Розв'язання:

а) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx = \left\{\begin{matrix} \frac{\pi}{2}-x = t & t_1 = \frac{\pi}{2} \\ -dx = dt & t_2 = 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\cos t\right)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos t\right)dt;$$

б) $\int\limits_0^{\pi} xf\left(\sin x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx$

$$\int\limits_0^{\pi} xf\left(\sin x\right)dx = \int\limits_0^{\pi} xf\left(\sin\left(\pi-x\right)\right)dx = \left\{\begin{matrix} \pi-x = t & t_1 = \pi \\ -dx = dt & t_2 = 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\int\limits_{\pi}^{0}\left(\pi-t\right)f\left(\sin t\right)dt = \int\limits_0^{\pi}\left(\pi-t\right)f\left(\sin t\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\pi f\left(\sin t\right)dt - \int\limits_0^{\pi} tf\left(\sin t\right)dt,\ \int\limits_0^{\pi} xf\left(\sin x\right)dx = \int\limits_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx - \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx,$$

$$\int\limits_0^{\pi} xf\left(\sin x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx.$$

Приклад 21. Обчислити інтеграл $\int\limits_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\left(\cos\ln\frac{1}{x}\right)'\right|dx$.

Розв'язання

Якщо $e^{-2\pi n}\le x\le 1\Rightarrow 1\le\frac{1}{x}\le e^{2\pi n}\Rightarrow \ln 1\le\ln\frac{1}{x}\le\ln e^{2\pi n}$ або $0\le\ln\frac{1}{x}\le 2\pi n$.

Враховуючи, що функція $\cos\ln\frac{1}{x}$ періодична з періодом 2π, маємо проміжок $[0;2\pi n]$, що складається з n проміжків 2π, тому $\int\limits_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\left(\cos\ln\frac{1}{x}\right)'\right|dx=n\int\limits_{e^{-2\pi}}^{1}\left|\left(\cos\ln\frac{1}{x}\right)'\right|dx$. На цьому відрізку функція $\cos\ln\frac{1}{x}$ приймає як додатні, так і від'ємні значення, тому маємо

$$\int\limits_{e^{-2\pi n}}^{1}\left(\left|\cos\ln\frac{1}{x}\right|\right)'dx=-\int\limits_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\frac{d\left(\cos\ln\frac{1}{x}\right)}{d\left(\ln\frac{1}{x}\right)}\right|d\left(\ln\frac{1}{x}\right)=\left\{\begin{array}{l}\ln\frac{1}{x}=t\\ \ln e^{2\pi n}=2\pi n=t_1\end{array}\right\}=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi n}\left|\frac{d}{dt}\cos t\right|dt=\int\limits_{0}^{2\pi n}|\sin t|dt=2n\int\limits_{0}^{\pi}\sin t dt=4n.$$

2.7. Загальна схема застосування визначеного інтеграла

Якщо будь-якому інтервалу $[\alpha;\beta]$, що міститься в зафіксованому інтервалі $[a;b]$, відповідає значення визначеної фізичної або геометричної величини P, то P називається функцією інтервалу $[\alpha;\beta]$ та позначається $P([\alpha;\beta])$ (наприклад, якщо $f(x)$ неперервна додатна функція на інтервалі $[a;b]$, тоді з кожним інтервалом $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$ пов'язуємо величину $F([\alpha;\beta])$ площі криволінійної трапеції, що обмежена кривою $y=f(x)$, відрізками прямих $x=\alpha$, $x=\beta$ і відрізком осі OX від $x=\alpha$ до $x=\beta$).

Функція інтервалу $P([\alpha;\beta])$ називається адитивною, якщо при $\alpha<\gamma<\beta$ $P([\alpha;\beta])=P([\alpha;\gamma])+P([\gamma;\beta])$ (прикладом адитивної функції є функція $F([\alpha;\beta])$, що згадувалася вище).

Розглянемо адитивну функцію інтервалу $P([\alpha;\beta])$ і припустимо, що на фіксованому інтервалі $[a;b]$ визначена неперервна функція $p(x)$, що пов'язана з функцією $P([\alpha;\beta])$, $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$ співвідношенням

$$P\big([x;x+\Delta x]\big)=p(x)\Delta x+\rho\big([x;x+\Delta x]\big),$$

де $\rho\big([x;x+\Delta x]\big)$ така функція, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\rho\big([x;x+\Delta x]\big)}{\Delta x}=0$.

Тоді

$$P\big([a;b]\big)=\int_a^b p(x)dx. \qquad (3)$$

Таким чином, якщо нам вдалося з точністю до нескінченно малої більш високого порядку в порівнянні з Δx встановити наближену рівність $P\big([x;x+\Delta x]\big)\approx p(x)\Delta x$, то можемо обчислити значення $P\big([a;b]\big)$ за формулою (3).

В цьому і полягає схема застосування визначеного інтеграла.

Задача 1. Визначити масу стрижня довжиною $l=10$ см, якщо лінія змінюється згідно із законом $\mu=6+0{,}3x$ кг/м, де x – відстань від одного з кінців стрижня.

Розв'язання

Обчислимо елемент маси $m\big([x;x+dx]\big)$ стрижня довжиною dx з точністю до нескінченно малої більш високого порядку ніж dx: маємо $m\big([x;x+dx]\big)=\mu(x)dx$, звідки

$$m=\int_0^l \mu(x)dx=\int_0^l\big(6+0{,}3x\big)dx=6l+\frac{0{,}3}{2}l^2=\frac{1}{2}\big(12+0{,}3l\big).$$

Підставляючи замість l його значення і враховуючи розмірність l та μ, знаходимо $m=75$ кг.

Задача 2. Яку роботу необхідно виконати, щоб розтягнути пружину на 0,1 м, якщо сила в 1 Н розтягує цю пружину на 0,01 м?

Розв'язання

Реакція F пружної пружини, один кінець якої закріплено, розраховується згідно із законом Гука за формулою $F=cx$, де c – коефіцієнт жорсткості пружини, x – деформація.

Оскільки для деформації пружини на 0,01 м потрібно прикласти силу в 1 Н, постійну c знаходимо з умови 1 Н = c 0,01 м, $c = \frac{1}{0{,}01} \cdot \frac{H}{м}$.

Елементарна робота сили пружності (реакція пружини) наближено (з точністю до нескінченно малої більш високого порядку ніж dx) визначається співвідношенням

$$A\left(\left[x; x+dx\right]\right) = -cxdx,$$

де dx – елементарне переміщення, що направлене у протилежний бік від сили F.

Загальну роботу знайдемо інтегруванням у межах $\left[0;0{,}1\right]$

$$A = -c\int_0^{0{,}1} xdx = -100\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}1} = -0{,}5 \text{ Дж.}$$

Робота пружної сили від'ємна. Шукана робота $|A| = 0{,}5$ Дж.

Задача 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$ та $\left(x^2+y^2\right) = a^2 \quad \left(\left(x^2+y^2\right) \ge a^2\right)$.

Розв'язання

Запишемо рівняння даних кривих у полярній системі координат. Відомо, що $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, тому рівняння будуть мати вигляд $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ – лемніската та $\rho = a$ – коло (рис. 3).

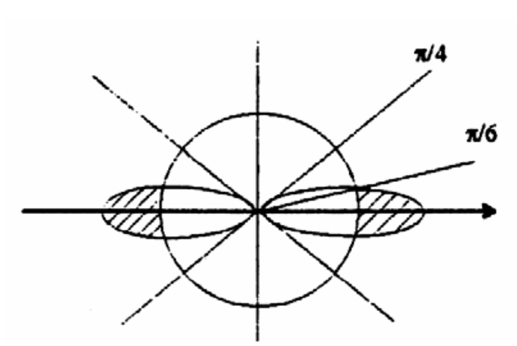


Рис. 3

Знайдемо точки перетину кривих

$$\begin{cases} \rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi \\ \rho^2 = a^2 \end{cases},$$

$2a^2\cos 2\varphi = a^2$, $\cos 2\varphi = 1/2$,

$2\varphi = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$.

Враховуючи той факт, що шукана площа складається з двох рівновеликих частин та симетрична відносно полярної осі, маємо

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6}\left(2a^2\cos 2\varphi-a^2\right)d\varphi=2a^2\left(\sin 2\varphi-\varphi\right)\Big|_0^{\pi/6}=a^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$

Задача 4. Дано рівняння еліпса у параметричній формі: $x=2\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, тобто $a=2$, $b=1$ – його півосі. Знаючи, що $\rho^2=x^2+y^2$, студент обчислює площу, обмежену еліпсом, так:

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\rho^2 d\varphi=2\int\limits_0^{\pi/2}\left(4\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)d\varphi=\frac{5\pi}{2}.$$

Але відомо, що площа еліпса $S=\pi ab$, тобто в нашому прикладі $S=2\pi$. У чому полягає помилка студента?

Розв'язання

Рівняння еліпса задані параметрично в декартовій системі координат, а студент застосував формулу обчислення площі в полярній.

Розділ III. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

3.1. Невласні інтеграли першого роду

1. Якщо функція $y=f(x)$ визначена при $a\le x<+\infty$ та інтегрована на кожному скінченному інтервалі $a\le x\le b<+\infty$, то згідно з визначенням

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{X\to+\infty}\int\limits_a^X f(x)dx. \tag{4}$$

Якщо при $X\to+\infty$ функція $F(X)=\int\limits_a^X f(x)dx$ має скінченну границю, то невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається збіжним або збігається, якщо при $X\to+\infty$ функція $F(X)$ не має скінченної границі, невласний інтеграл називається розбіжним.

2. Якщо $f(x)$ невід'ємна функція на проміжку $\left[a;+\infty\right)$, то $F(X)=\int\limits_a^X f(x)dx$ – не спадаюча. Якщо $F(X)$ не обмежена на інтервалі $\left(a;+\infty\right)$, тоді при $X\to+\infty$ $F(X)\to+\infty$, а інтеграл (4) розбіжний і прямує до $+\infty$. Якщо

$F(X)$ обмежена на інтервалі $(a;+\infty)$, то $\sup\{F(X)\} = \lim F(X)$ та інтеграл (4) збігається.

3. Ознака порівняння: якщо на інтервалі $(a;+\infty)$ існують дві невід'ємні інтегровані функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$, причому $f_1(x) \le Cf_2(x)$, $(C > 0)$, тоді із збіжності інтеграла функції $f_2(x)$ витікає збіжність інтеграла від функції $f_1(x)$, а з розбіжності інтеграла від функції $f_1(x)$ виходить розбіжність інтеграла від $f_2(x)$.

Нехай в інтегралі (4) $f(x) = \dfrac{1}{x^{\lambda}}$. При $\lambda > 1$ інтеграл збігається, при $\lambda \le 1$ – розбігається.

4. Ознака Діріхле збіжності невласного інтеграла. Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx. \tag{5}$$

Якщо при $x \to +\infty$ неперервно диференційована функція $g(x)$ спадає та прямує до нуля, а функція $f(x)$ має обмежену первісну $F(x)$, $|F(x)| \le C$, то інтеграл (5) збігається.

3.2. Невласні інтеграли другого роду

Якщо функція $f(x)$ обмежена та інтегрована в кожному проміжку $[a+\varepsilon, b]$, але не інтегрована (наприклад, необмежена) на всьому відрізку $[a,b]$, тоді за визначенням

$$\int_a^b f)x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{6}$$

Якщо ця границя існує, тоді інтеграл (6) (невласний інтеграл другого роду) називається збіжним, в іншому випадку його називають розбіжним.

Практична ознака збіжності: якщо при $x \to a+0$ $f(x) = 0^*\left(\dfrac{1}{(x-a)^{\lambda}}\right)$, то при $\lambda < 1$ інтеграл (6) збігається, а при $\lambda \ge 1$ – розбігається (символ 0^* позначає порядок зростання функції).

Зауваження. Якщо $c \in (a,b)$ і функція $f(x)$ не обмежена ні в якому двосторонньому околі цієї точки, то згідно з визначенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\mu}^{b} f(x)dx \right\}$$

за умови, що ε та μ прямують до 0 незалежно один від одного (інтеграли в дужках мають бути).

3.3. Приклади та розв'язання

Приклад 1. Довести, що $\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}$ не залежить від α.

Розв’язання

Маємо

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} = I_1 + I_2 .$$

Зробимо у першому інтегралі заміну змінної $x = 1/y$, $dx = -dy/y^2$, одержимо

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} = \int_\infty^1 \frac{-\frac{1}{y^2}dy}{\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\left(1+\frac{1}{y^\alpha}\right)} = \int_1^\infty \frac{dy}{\left(1+y^2\right)\left(1+y^{-\alpha}\right)} .$$

Позначаючи змінну інтегрування в першому інтегралі через x, одержимо

$$I_1 + I_2 = \int_1^\infty \left(\frac{1}{1+x^\alpha} + \frac{1}{1+x^{-\alpha}} \right) \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{1+x^\alpha} + \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} \right) \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} ,$$ цей

інтеграл не залежить від α.

Приклад 2. Нехай $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ збігається і дорівнює I. Довести, що $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$ також збігається і дорівнює I.

Розв'язання: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_{0}^{\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int\limits_{-\infty}^{0} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = I_1 + I_2$.

У кожному з цих інтегралів зробимо заміну змінної $x-1/x=t$, тоді $x^2-xt-1=0$; $x=\frac{t\pm\sqrt{t^2+4}}{2}$ для $x>0$ і $x=\frac{t-\sqrt{t^2+4}}{2}$ для $x<0$. Таким чином,

$$I_1=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt, \qquad I_2=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.$$

Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}}$ збігається, тому що збігається $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, а функція $\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}$ обмежена на проміжку $(-\infty,\infty)$ (за ознакою Абеля). Звідси одержимо, що I_1 та I_2 збігаються та

$$I_1+I_2=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)+f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)\right]dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=I.$$

Приклад 3. Знайти: а) $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}dt}{x^2}$.

Розв'язання

Розглянемо завдання а). Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$, тут $\cos t$ – функція, що інтегрується на проміжку $(0;1)$, оскільки $\cos t>0$ на цьому інтервалі, то можна застосувати узагальнену теорему про середнє:

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_x^1 \cos t\cdot\frac{1}{t^2}dt=\lim_{x\to 0} M\int\limits_x^1 \frac{1}{t^2}dt=\infty.$$

$$\lim_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt=\{0;\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt}{\frac{1}{x}}=\{\text{застосуємо правило Лопіталя}\}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\cos x}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}} = 1;$$

б)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3} = \left\{ \int_0^\infty \sqrt{1+t^4}\,dt > \int_0^\infty t^2 dt \to \infty, \text{ тому маємо невизначеність } \frac{\infty}{\infty}, \right.$$

застосуємо правило Лопіталя$\}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 4. Дослідити збіжність інтервалу $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}$.

Розв'язання:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^q} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^p + x^q} = \{\text{розглянемо випадок, коли}$$

$$p \le q\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p\left(1+x^{q-p}\right)} + \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^p\left(1+x^{q-p}\right)} = \left\{ \text{для } \frac{1}{1+x^{q-p}} > 0 \text{ на інтервалах} \right.$$

$x \in [\varepsilon, 1)$ і $x \in (1; \infty)\}$ і ця функція обмежена $\frac{1}{1+x^{q-p}} \le \frac{1}{1+\varepsilon^2}$, тоді можна застосовувати узагальнену теорему про середнє

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p\left(1+x^{q-p}\right)} + \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^p\left(1+x^{q-p}\right)} = M_1 \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} + M_2 \lim_{a\to 0} \int_1^a \frac{dx}{x^p}.$$

Перший інтеграл розбігається, якщо $p \ge 1$, а другий $-$ при $p \le 1$, тому при будь-яких p і q цей інтеграл є розбіжним.

Приклад 5. Дослідити на збіжність інтеграли

а) $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}dx$; б) $\int\limits_1^\infty \frac{3x^2+\sqrt{(1+x)^3}}{2x^2+\sqrt[3]{x^5}+1}dx$; в) $\int\limits_1^\infty \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$; г) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}=0$. Підінтегральна функція є нескінченно малою при $x\to\infty$ порядку $\frac{1}{x^2}$, оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}:\frac{1}{x^{3/2}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}\right)x^{3/2}}{x^3+3x+1}=1$, а $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}$ збігається, значить, даний інтеграл також збігається.

Розглянемо завдання б). Функція $\frac{3x^2+\sqrt{(1+x)^3}}{2x^2+\sqrt[3]{x^5}+1}$ при $x\to\infty$ є нескінченно малою одного і того ж порядку з нескінченно малою $\frac{1}{x}$. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+\sqrt{(1+x)^3}}{2x^2+\sqrt[3]{x^5}+1}:\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+\sqrt{(1+x)^3}\cdot x}{2x^2+\sqrt[3]{x^5}+1}=\frac{3}{2}\neq 0$, а $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}dx$ є розбіжним, то наданий інтеграл також розбіжний.

Розглянемо завдання в). Функція $\frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\geq 0$ для $x\in[1;\infty)$ $\frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}>\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$, оскільки $-1\leq \sin x\leq 1$, а $\int\limits_1^\infty \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$ є розбіжним, то і $\int\limits_1^\infty \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$ розбіжний.

Розглянемо завдання г). Функція $\frac{1}{\sqrt{x}+\cos^2 x}>0$ і при $x\to\infty$ є нескінченно малою того ж порядку малості, що і функція $\frac{1}{\sqrt{x}}$, оскільки

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\cos^2 x}:\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}}=1$. Через те що $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ є розбіжним, інтеграл $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$ також розбіжний.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I=\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

Розв'язання

Оскільки

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}=-\frac{1}{5}\int\frac{d\left(\frac{1}{x^5}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^5}\right)^2+\left(\frac{1}{x^5}\right)+1}}=\frac{1}{5}\ln\frac{2x^5}{2+x^5+2\sqrt{x^{10}+x^5+1}}+C,$$

то згідно із визначенням

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{5}\left(\ln\frac{2x^5}{2+x^5+2\sqrt{x^{10}+x^5+1}}-\ln\frac{2}{3+2\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{5}\ln\frac{3+1\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

ДОДАТОК 1

Додаток містить варіанти завдань і їх розв'язання, що були запропоновані студентам на міжнародних олімпіадах з вищої математики (наведено мовою оригінала).

СТУДЕНЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПГУВК 2010 ГОДА

Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций,
198035, Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7;
тел.: (812)334-38-14; e-mail: kvo_kuz@mail.ru

Приводятся задачи математической олимпиады СПГУВК 2010 г. с решениями.

Задачи олимпиады 2010 г.

1. Пусть $y = f(x)$ – положительная дифференцируемая функция в интервале $(0,+\infty)$, причем $\left(f(x)\right)^x = x^{f(x)}$ и $f(4)=2$. Найти $f'(4)$. (2 балла)

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+ch2x-4x^2-2x-2}{tgx-\sin x}$, где $chx=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ – гиперболический косинус. (3 балла)

3. Доказать, что $e^x > 1+x$ для любых $x\in R$, $x\neq 0$. (3 балла)

4. Найти $y^{(13)}(0)$, если $y=\sin^3 x$. (4 балла)

5. Найти расстояние между двумя прямыми в пространстве:
$x=y=z$ и $\begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$ (5 баллов)

6. Найти $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \min\left\{\sqrt{x},y\right\}dx$. (4 балла)

7. Доказать, что $\int\limits_0^1 x^x dx > \dfrac{3}{4}$. (6 баллов)

8. При каких значениях t интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - t|\, dx$ принимает наименьшее значение? (8 баллов)

9. Пусть $\varphi(x)$ – обратная функция к $f(x) = e^x + x - 1$; $y(x)$ – решение дифференциального уравнения $xy' - y = x^2\varphi(x)$ с начальным условием $y(e) = e$. Найти $\lim\limits_{x\to 0} y'(x)$. (9 баллов)

10. Вычислить определитель 2010-го порядка (10 баллов)

$$\begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$$

11. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\sqrt{n}\right]}}{n}$, где $[n]$ – целая часть числа n? (12 баллов)

Решения задач

1. $\left(f(x)\right)^x = x^{f(x)} \Leftrightarrow x\ln f(x) = f(x)\ln(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(x\ln f(x)\right)' = \ln f(x) + \frac{xf'(x)}{f(x)} = f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} = \left(f(x)\ln x\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{f(x)}{x} - \ln f(x)}{\frac{x}{f(x)} - \ln x};\ f'(4) = \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{2 - \ln 4} = \frac{1 - \ln 4}{4(1 - \ln 2)}.$$

2. $tgx-\sin x = tgx\left(1-\cos x\right) \sim x\cdot\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^3}{2}$ (при $x\to 0$). Применяя три раза правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+ch2x-4x^2-2x-2}{tgx-\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+ch2x-4x^2-2x-2}{x^3}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}+ch2x-4x^2-2x-2\right)'''}{\left(x^3\right)'''}=2\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}+8shx}{6}=\frac{8}{3}.$$

3. Для функции $y=e^x-x$ имеем: $y'=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$; $y'<0$ при $x<0$, $y'>0$ при $x>0$. Следовательно, $y(0)=1$ – наименьшее значение функции $y=e^x-x$ на $\left(-\infty,\infty\right)$, т.е. $y(x)=e^x-x>1$ при $x\neq 0$ и, значит, $e^x>x+1$ при $x\neq 0$.

4. Поскольку $\sin^3 x=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x$, $\left(\sin x\right)'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, то

$$y^{(13)}(x)=\left(\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\right)^{(13)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{13\pi}{2}\right)-\frac{3^{13}}{4}\sin\left(3x+\frac{13\pi}{2}\right),$$

$$y^{(13)}(0)=\frac{3}{4}\sin\frac{13\pi}{2}-\frac{3^{13}}{4}\sin\frac{13\pi}{2}=\frac{3}{4}\left(1-3^{12}\right).$$

5. Поскольку $\left(u;u;u\right)$, $\left(1;3;v\right)$ – произвольные точки данных прямых ($u,v\in R$), то расстояние между прямыми есть наименьшее значение функции $f(u,v)=\sqrt{\left(u-1\right)^2+\left(u-3\right)^2+\left(u-v\right)^2}$. Имеем $f(u,v)=\sqrt{2\left(u-2\right)^2+\left(u-v\right)^2+2}\geq\sqrt{2}$ и $f(u,v)=\sqrt{2}\Leftrightarrow u=v=2$.

6. $$\int_0^1 dy\int_0^1\min\left\{\sqrt{x},y\right\}dx=\int_0^1\left(\int_0^{y^2}\sqrt{x}dx+\int_{y^2}^1 ydx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{y^2}+yx\Big|_{y^2}^1\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{2}{3}y^3+y-y^3\right)dy=\int_0^1\left(y-\frac{y^3}{3}\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{12}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{12}.$$

7. Воспользуемся неравенством $e^t>t+1$ при $t\neq 0$. Имеем

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 e^{x\ln x}dx > \int_0^1 (1+x\ln x)dx = 1+\frac{1}{2}\int_0^1 \ln x dx^2 = 1+\frac{1}{2}\left(x^2\ln x \Big|_{+0}^{1} - \int_0^1 x dx \right) =$$

$$= 1+\frac{1}{2}\left(-\lim_{x\to+0} x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \right) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \text{ где } \lim_{x\to+0} x^2\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'}=$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+0} x^2 = 0.$$

8. Пусть $f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - t| dx$.

Если $t \ge 1$, то $f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t-\sin x)dx \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)dx = f(1) = \frac{\pi}{2}-1$,

если $t \le 0$, то $f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + |t|)dx \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = f(0) = 1$. Таким образом, $f(t) \ge \frac{\pi}{2}-1$ для любого $t \notin (0,1)$. Если $t \in (0,1)$, $f(t) = \int_0^{\arcsin t} (t-\sin x)dx + \int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - t)dx$, т.е. $f(t)$ равна сумме площадей двух фигур, ограниченных графиком функции $y=\sin x$ и прямыми $y=t$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$. Поскольку график функции $y=\sin x$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ совпадает с графиком функции $x=\arcsin y$, то по геометрическому смыслу интеграла для суммы площадей этих же двух фигур имеем

$$f(t) = \int_0^t \arcsin y dy + \int_t^1 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right)dy.$$

Отсюда $f'(t) = \arcsin t - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin t\right)$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \arcsin t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(t) < 0$ при $t \in \left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f'(t) > 0$, при $t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. Значит,

$f(t) \ge f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$ при любом $t \in (0,1)$, и поскольку $\sqrt{2} - 1 < \dfrac{\pi}{2} - 1$, то $\min\limits_{t \in R} f(t) = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$.

9. При $x \ne 0$ имеем: $xy' - y = x^2\varphi(x) \Leftrightarrow \left(\dfrac{y}{x}\right)' = \varphi(x) \Rightarrow y = x\left(\int\limits_e^x \varphi(t)\,dt + C\right)$.

Поскольку $y(e) = e$, то $e = e(0 + C) \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = x + x\int\limits_e^x \varphi(t)\,dt$. Тогда

$$y' = 1 + \int\limits_e^x \varphi(t)\,dt + x\varphi(x), \qquad \lim_{x\to 0} y'(x) = \left(1 + \int\limits_e^x \varphi(t)\,dt + x\varphi(x)\right)\Bigg|_{x=0} = 1 + \int\limits_e^0 \varphi(t)\,dt =$$

$$= 1 - \int\limits_0^e \varphi(t)dt = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ t = f(x) \end{vmatrix} = 1 - \int\limits_0^1 x\,df(x) = 1 - xf(x)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 f(x)dx = 1 - f(1) + \left(e^x + \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - e + \left(e - \frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Отметим, что по ходу решения использовались строгая монотонность функции $f(x)$ ($f'(x) > 0$ при любом $x \in R$) и дифференцируемость, а значит, и непрерывность обратной функции $\varphi(x)$.

10. Пусть Δ_n – данный определитель n-го порядка. При $x \ne \pi k$, $k \in Z$, имеем

$$\Delta_1 = 2\cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x},\ \Delta_2 = 4\cos^2 x - 1 = 2\cos x\frac{\sin 2x}{\sin x} - 1 =$$
$$= \frac{2\cos x \sin 2x - \sin x}{\sin x} = \frac{\sin 3x + \sin x - \sin x}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

Пусть $\Delta_n = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x}$ для некоторого $n \ge 2$ и всех $x \ne \pi k$, $k \in Z$. Раскладывая Δ_{n+1} по первой строке, получим

$$\Delta_{n+1} = 2\cos x\Delta_n - \Delta_{n-1} = \frac{2\cos x \sin(n+1)x - \sin nx}{\sin x} =$$
$$= \frac{\sin(n+2)x + \sin nx + \sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n+2)x}{\sin x}.$$

Функция $\Delta_n(x)$ непрерывна на $\Delta_n(x)$. Поэтому для $k \in Z$

$$\Delta_n(\pi k) = \lim_{x\to\pi k} \Delta_n(x) = \lim_{x\to\pi k} \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = \lim_{x\to\pi k} \frac{\left(\sin(n+1)x\right)'}{\left(\sin x\right)'} =$$

$$= \left(n+1\right) \lim_{x\to\pi k} \frac{\cos(n+1)x}{\cos x} = (n+1)\frac{\left(-1\right)^{(n+1)k}}{\left(-1\right)^{k}} = (n+1)(-1)^{nk}.$$

При $n = 2010$, в частности, получаем

$\dfrac{\sin 2011x}{\sin x}$ при $x \neq k\pi$, $k \in Z$; 2011 при $x = k\pi$, $k \in Z$.

11. Если $k^2 \le n \le k^2 + 2k$, $k \in N$, то $\left(-1\right)^{\left[\sqrt{n}\right]} = \left(-1\right)^k$. Поэтому члены ряда с номерами от k^2 до $k^2 + 2k$ имеют один и тот же знак. Просуммировав их, получим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k s_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{\left[\sqrt{n}\right]}}{n}$, где $s_k = \sum\limits_{n=k^2}^{k^2+2k}\dfrac{1}{n}$, $k = 1,2,\ldots$. Поскольку $0 \le s_k = \sum\limits_{n=k^2}^{k^2+2k}\dfrac{1}{n} \le \sum\limits_{n=k^2}^{k^2+2k}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{2k}{k^2} = \dfrac{2}{k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$, то $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Проверим, что $s_{k+1} \le s_k$. Действительно, при всех $x > 1$ $x - 1 < \left[x\right] \le x \Rightarrow \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{\left[x\right]} < \dfrac{1}{x-1}$. Значит, если $2 \le l \le m$, то

$$\int_l^{m+1}\frac{dx}{x} \le \int_l^{m+1}\frac{dx}{\left[x\right]} = \sum_{n=l}^{m}\frac{1}{n} < \int_l^{m+1}\frac{dx}{x-1} = \int_{l-1}^{m}\frac{dx}{x}. \qquad (*)$$

Из (*) получаем

$$s_k - s_{k+1} > \int_{k^2}^{(k+1)^2}\frac{dx}{x} - \int_{k^2+2k}^{(k+1)^2+2(k+1)}\frac{dx}{x} = \ln\frac{\left(k+1\right)^2}{k^2} - \ln\frac{\left(k+1\right)\left(k+3\right)}{k\left(k+2\right)} =$$

$$= \ln\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{k\left(k+3\right)} = \ln\left(1 + \frac{2}{k\left(k+3\right)}\right) > 0.$$

По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k s_k$, а значит, и исходный ряд сходятся.

Задача А. Пусть C – центр равносторонней гиперболы на плоскости, S – множество точек плоскости, симметричных точке C относительно касательных, проведенных в каждой точке гиперболы. Найти уравнение линии L, множество точек которой состоит из точки C и множества S. Пользуясь этим уравнением, построить L.

Решение. Пусть уравнение данной гиперболы: $x^2 - y^2 = a^2$. $T\left(x', y'\right)$ – точка касания, $M\left(x_0, y_0\right)$ – точка кривой L, $P\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ – точка пересечения касательной с перпендикуляром MO (см. рис. Д. 1).

Уравнение касательной в точке $T\left(x', y'\right)$ будет иметь вид:

$$2x'\left(x - x'\right) - 2y'\left(y - y'\right) = 0$$

или

$$2x'x - 2y'y - 2\left(x'^2 - y'^2\right) = 0.$$

Так как $x'^2 - y'^2 = a^2$, то имеем: $x'x - y'y = a^2$ – уравнение касательной. Уравнение перпендикуляра MO: $yx' + xy' = 0$.

Точка P принадлежит касательной, поэтому:

$$x_0 x' - y_0 y' = 2a^2. \quad \text{(Д. 1)}$$

Точка P принадлежит прямой MO, поэтому:

$$y_0 x' + x_0 y' = 0. \quad \text{(Д. 2)}$$

Точка P принадлежит гиперболе, поэтому:

$$x'^2 - y'^2 = a^2 \quad \text{(Д. 3)}$$

Найдем уравнение множества точек S. Для этого найдем x' из уравнения (Д. 2) и, подставив его в уравнение (Д. 1), найдем x' и y' через x_0 и y_0:

$$y' = \frac{2a^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2}, \; x' = \frac{2a^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Подставив последнее выражение в (Д. 3), получим:

$$\left(x_0^2 + y_0^2\right)^2 = 4a^2\left(x_0^2 - y_0^2\right),$$

т.е. уравнение лемнискаты. Переходя к полярной системе координат, строим кривую, используя ее уравнение: $\rho = 2a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (рис. Д. 2).

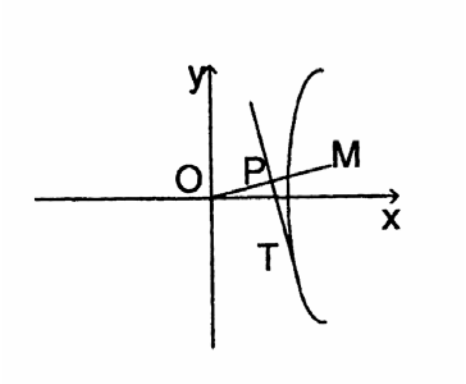


Рис. Д. 1

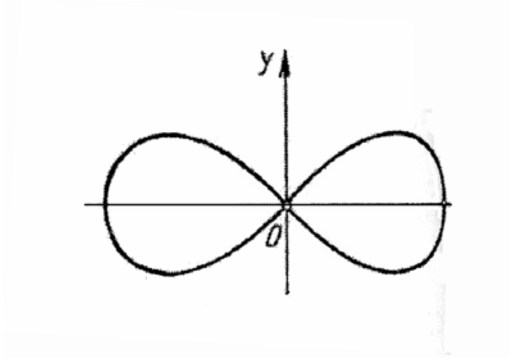


Рис. Д. 2

Координаты центра $C(0,0)$, очевидно, удовлетворяют полученному уравнению. Поэтому лемниската дает решение задачи.

Замечания. Многие, решая эту задачу, получали искомое множество точек в виде некоторого уравнения, но оставляли его неупрощенным. Поэтому они не могли сказать, какой геометрический образ представляет собой полученное уравнение. Однако жюри не считает это грубой ошибкой.

Отметим также, что некоторые применяли чисто геометрический способ построения искомого геометрического места, не обосновывая, конечно, построений.

Самым распространенным пробелом при решении задачи было упущение рассматривать начало координат.

Большинство тех, кто решил задачу правильно, в основном следовали способу решения, приведенному нами. Иногда решение проводилось в полярной системе координат.

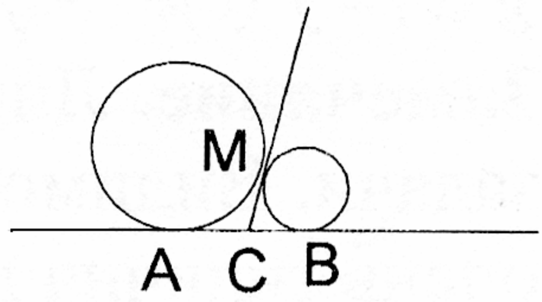
Задача В. Длина вектора, равного сумме данных 10 ненулевых векторов, больше длины суммы любых девяти их них. Доказать, что существует ось, на которую проекция каждого из данных 10 векторов положительна.

Решение. Пусть $\overline{s} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_{10}}$. По условию $\left|\overline{s} - \overline{a_k}\right| = \left|\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_{k-1}} + \overline{a_{k+1}} + \ldots + \overline{a_{10}}\right| < \left|\overline{s}\right|$, $k = 1, 2, \ldots 10$.

Отсюда: $\left|\overline{s} - \overline{a_k}\right|^2 = \left|\overline{s}\right|^2 - 2\left(\overline{s}, \overline{a_k}\right) + \left|\overline{a_k}\right|^2 < \left|\overline{s}\right|^2$, т.е. $\left(\overline{s}, \overline{a_k}\right) > \frac{1}{2}\left|\overline{a_k}\right|^2 > 0$ для всех k.

Замечание. Из 60-ти участников олимпиады с этой задачей справились 15. Лишь немногие догадались, что решить эту задачу в общем виде проще, чем ограничивая количество векторов небольшим числом.

Задача C. Точки A и B фиксированы на плоскости. Два шара S_A и S_B касаются плоскости в точках A и B соответственно и касаются друг друга в точке M. Для всех таких пар шаров (S_A, S_B) найти множество точек M в пространстве.



Решение. Решением является окружность с диаметром AB (с исключенными точками A и B), лежащая в плоскости, перпендикулярной заданной плоскости. Действительно, проведя плоскость через центры шаров и точки A и B, видим, что задача сводится к плоскому случаю касающихся окружностей. Проводя общую внутреннюю касательную окружностей, видим, что $CM = CA = CB = const$.

Замечание. Почти все, кто решил эту задачу, забывали исключить точки A и B. Большинство участников олимпиады решали ее аналитическим способом. При этом часто не могли из полученного уравнения сделать вывод о том, что геометрически представляет это множество. Задачу C решили примерно 30 из 55 участников олимпиады.

Задача D. Найти x из уравнения: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi^n}{n!} \cos\left[\pi\left(x + \frac{n}{2}\right)\right] = 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[-\cos(\pi x)\right]^{(n)} = 1$.

Сравним левую часть уравнения с рядом Тейлора для $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Получим: $f(x) = -\cos(\pi x)$, $x - x_0 = -1$, $x = x_0 - 1$.

Уравнение принимает вид:

$$\cos\pi(x_0 - 1) = -1;$$

$$\pi(x_0 - 1) = \pi + 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow x_0 - 1 = 1 + 2k,$$

$x_0 = 2 + 2k$ – четные числа.

Задача E. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f(a)=f(b)=0$. Доказать, что найдется такая точка $c\in(a;b)$, что $f(c)=f'(c)$.

Решение. Применим теорему Роля к функции $g(x)=f(x)e^{-x}$. Функция $g(x)$ удовлетворяет всем условиям указанной теоремы на отрезке $[a;b]$. Поэтому существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $g'(c)=f'(c)e^{-c}-f(c)e^{-c}=0$, т.е. $f(c)=f'(c)$.

Замечание. Лишь 10 участников из 50 справились с решением этой задачи. Видимо, такая задача несколько теоретического характера не очень типична для олимпиад среди студентов технических вузов.

Задача F. Найти уравнение общей касательной (если она существует) к графикам функции $y=e^x$ и $y=e^{2x}$. Сделать рисунок.

Решение. Уравнение касательной к кривой $y=e^x$ в точке x_1 имеет вид: $y=e^{x_1}+e^{x_1}(x-x_1)=e^{x_1}x+e^{x_1}(1-x_1)$.

Аналогично для второй кривой в точке x_2: $y=e^{2x_2}+2e^{2x_2}(x-x_2)=2e^{2x_2}x+e^{2x_2}(1-2x_2)$.

Приравнивая угловые коэффициенты и свободные члены этих прямых, получим систему:

$$\begin{cases} e^{x_1}=2e^{2x_2}, \\ e^{x_1}(1-x_1)=e^{2x_2}(1-2x_2). \end{cases}$$

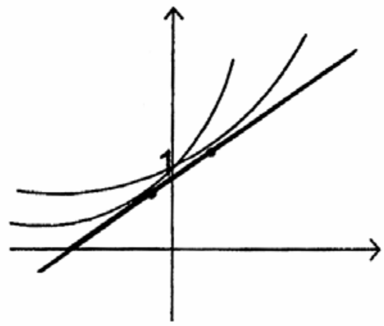


Рис. Д. 3

Из 2-го и 1-го уравнений этой системы получим соответственно:

$$\frac{1-2x_2}{1-x_1}=2,\ x_1-2x_2=\ln 2.$$

Отсюда $1-2x_2=2-2x_1$, $x_1-2x_1+1=\ln 2$, $x_1=1-\ln 2$, $x_2=1/2-\ln 2$.

Уравнение общей касательной: $y=\dfrac{e}{2}x+\dfrac{e}{2}\ln 2$ (рис. Д. 3).

Замечание. Данная задача на первый взгляд не является сложной, однако около половины участников олимпиады, кто пытался ее решить, не смогли получить правильный ответ. Причина этого заключается, по-видимому, в том, что не достаточно ясно была представлена геометрическая картина задачи.

ДОДАТОК 2

Задачи V Международной олимпиады по математике (III тур Всероссийской студенческой олимпиады), Ярославль, 2010 г.

1. Линейная алгебра

1.1. Пусть $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ – квадратные матрицы n-го порядка, $b_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}a_{ij}$ ($i,j=1,2,...,n$). Как связаны определители этих матриц? (2 балла)

Решение. Очевидно, что $\det B=\left(-1\right)^{2(1+2+...+n)}\det A=\det A$.

1.2. Решить матричное уравнение $AX+XA+X=A$, где A – заданная квадратная матрица, квадрат которой $A^2=E$ – единичная матрица. (6 баллов)
Решение. Умножим уравнение на A слева и справа:

$$A^2X+AXA+AX=A^2 \text{ и } AXA+XA^2+XA=A^2.$$

С учетом равенства $A^2=E$ получаем $X+AXA+AX=E$ и $X+AXA+XA=E$. Поэтому $AX=XA$ и уравнение принимает вид $2AX+X=A$. Умножим его слева на $2A$: $4X+2AX=2E$. Из этих двух уравнений получаем $3X=E-2A$, $X=\frac{1}{3}E-\frac{2}{3}A$. Проверкой убеждаемся, что $X=\frac{1}{3}E-\frac{2}{3}A$ – действительное решение.

1.3. Пусть $X^{\vee}$ – матрица, полученная из квадратной матрицы X заменой каждого ее элемента на его алгебраическое дополнение. Доказать, что для любой квадратной матрицы A порядка $n>2$ $\left(A^{\vee}\right)^{\vee}=\left(\det A\right)^{n-2}A$. (10 баллов)

Решение. Если $\det X\neq 0$, то $X^{\vee}=\left(\det X\right)\left(X^{-1}\right)^{T}$ и $\det X^{\vee}=\left(\det X\right)^{n}\det X^{-1}=\left(\det X\right)^{n-1}$. Поэтому в случае $\det A\neq 0$

$$\left(A^{\vee}\right)^{\vee}=\left(\det A^{\vee}\right)\left(\left(A^{\vee}\right)^{-1}\right)^{T}=\left(\det A\right)^{n-1}\left(\left(\left(\left(\det A\right)A^{-1}\right)^{T}\right)^{-1}\right)^{T}=$$

$$=\left(\det A\right)^{n-1}\left(\det A\right)^{-1}A=\left(\det A\right)^{n-2}A.$$

Пусть $\det A = 0$. Тогда $\mathrm{rang} A < n$ и хотя бы одна из строк, для определенности последняя, является линейной комбинацией остальных строк: $a_{nj} = \lambda_1 a_{1j} + \ldots + \lambda_{n-1} a_{n-1j}$. Поэтому $A_{ij} = -\lambda_i A_{nj}$ для $i = 1,\ldots,n-1$ и $j = 1,\ldots,n$, то есть все строки $A^{\vee}$ пропорциональны одной. Тогда все дополнительные миноры элементов матрицы $A^{\vee}$ содержат две пропорциональные строки и потому равны нулю. Следовательно, $\left(A^{\vee}\right)^{\vee}$ – нулевая матрица и равенство $\left(A^{\vee}\right)^{\vee} = \left(\det A\right)^{n-2} A$ очевидно.

2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

2.1. Найти наибольшее из расстояний от точки $C(3,2,3)$ до плоскостей, проходящих через точки $A(1,1,1)$ и $B(2,2,2)$. (3 балла)

Решение. Наибольшее из расстояний от C до плоскостей, проходящих через (AB), равно расстоянию от C до (AB), которое находится по известной формуле $d = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| / \left|\overrightarrow{AB}\right|$. Так как $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{AC} = \left(2,1,2\right)$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(1,0,-1\right)$, то $d = \sqrt{2/3}$.

2.2. Пусть $\vec{a}$ – заданный ненулевой вектор. Найти все такие векторы $\vec{x}$, что $\left(\vec{a} \cdot \vec{x}\right)\vec{x} + \left(\vec{a} \times \vec{x}\right) \times \vec{x} = \vec{a}$. Здесь точкой обозначено скалярное произведение, крестом – векторное. (7 баллов)

Решение. Используя формулу двойного векторного произведения $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$, преобразуем уравнение к виду $\left(\vec{a} \cdot \vec{x}\right)\vec{x} + \left(\vec{a} \cdot \vec{x}\right)\vec{x} - \vec{x}^{\,2}\vec{a} = \vec{a}$, или $2\left(\vec{a} \cdot \vec{x}\right)\vec{x} = \left(\vec{x}^{\,2} + 1\right)\vec{a}$. Так как $\left(\vec{x}^{\,2} + 1\right)\vec{a} \neq \vec{0}$, то и $\vec{a} \cdot \vec{x} \neq 0$. Поэтому $\vec{x} = k\vec{a}$. Подставляя это выражение в уравнение, получаем $2k^2 \vec{a}^{\,2} \vec{a} = \left(k^2 \vec{a}^{\,2} + 1\right)\vec{a}$, $k^2 \vec{a}^{\,2} = 1$, $k = \pm 1/\sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \pm 1/\left|\vec{a}\right|$, $\vec{x} = \pm \vec{a}/\left|\vec{a}\right|$.

2.3. В треугольнике ABC известны длины сторон: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Пусть O – центр вписанной окружности. Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ лежат в одной плоскости и потому линейно зависимы. Найти эту зависимость. (8 баллов)

Решение. По свойству биссектрисы CC_1 точка C_1 делит AB в отношении $\lambda = \dfrac{AC_1}{C_1 B} = \dfrac{b}{a}$. Поэтому $AC_1 = \dfrac{b}{a}\left(c - AC_1\right)$, $AC_1 = \dfrac{bc}{a+b}$,

$$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}. \qquad (Д. 4)$$

Так как AO_1 – биссектриса угла A в треугольнике ACC_1, то точка O делит отрезок C_1C в отношении $\frac{C_1O}{OC}=\frac{AC_1}{AC}=\frac{bc}{a+b}:b=\frac{c}{a+b}$. Поэтому $\overrightarrow{OC_1}=-\frac{c}{a+b}\overrightarrow{OC}$. Подставляя это выражение в (Д. 4), получаем

$$-\frac{c}{a+b}\overrightarrow{OC}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB} \text{ или } a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

3. Пределы

3.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$.

(2 балла)

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{x'}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0$, а $e^t-1\sim t$ при $t\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln\cos x}{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x\cos x}=-\frac{1}{2}$.

3.2. При каких $x>0$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)\left(1+x^2\right)...\left(1+x^n\right)$?

(7 баллов)

Решение. Обозначим $f_n(x)=(1+x)\left(1+x^2\right)...\left(1+x^n\right)$. Так как $1+t\le e^t$ для любого t, то при $0<x<1$

$$f_n(x)\le e^x e^{x^2}...e^{x^n}=e^{x+x^2+...+x^n}=e^{\frac{x\left(1-x^n\right)}{1-x}}\le e^{\frac{x}{1-x}}.$$

Поскольку при этом последовательность $f_n(x)$ возрастает, то она сходится. При $x\ge 1$ $f_n(x)\ge 2^n$ и потому $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\infty$.

3.3. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, заданная формулами $x_1 = 0$, $x_n = 2^{x_{n-1}-2} + 2^{-1}$, сходится и найти ее предел. (9 баллов)

Решение. Если $\lim x_n = a$, то, переходя в равенстве $x_n = 2^{x_{n-1}-2} + 2^{-1}$ к пределу, получаем, что $a = 2^{a-2} + 2^{-1}$. Это уравнение имеет очевидный корень $a = 1$. Докажем, что $\lim x_n = 1$. Пусть $x \in [0,1)$. По формуле Лагранжа $f(1) - f(x) = f'(c)(1-x)$ для функции $f(x) = 2^{x-2} + 2^{-1}$ получаем $1 - f(x) = 2^{c-2} \ln 2 (1-x)$, где $c \in (0,1)$. Поэтому если $x_{n-1} \in [0,1)$, то $1 - x_n = 2^{c-2} \ln 2 (1 - x_{n-1}) > 0$, то есть и $x_n \in [0,1)$. Учитывая, что $x_1 = 0 \in [0,1)$, получаем, что $x_n \in [0,1)$ при всех n. Кроме того $1 - x_n = 2^{c-2} \ln 2 (1 - x_{n-1}) \le q(1 - x_{n-1})$, где $q = \dfrac{\ln 2}{2} < 1$. Теперь $0 < 1 - x_{n-1} \le q^{n-1}(1 - x_1)$. Поскольку $\lim q^{n-1} = 0$, то $\lim(1 - x_n) = 0$, $\lim x_n = 1$.

4. Дифференциальное исчисление

4.1. Дифференцируема ли в точке $x = 0$ функция $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$? (2 балла)

Решение. Так как

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to\pm 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \pm \lim_{x\to\pm 0} \sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}} = \pm 1,$$

то $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ не существует, то есть функция не дифференцируема в точке $x = 0$.

4.2. К параболе $y = x^2$ проведены две взаимно перпендикулярные касательные. Чему равно наименьшее из расстояний между точками касания? (6 баллов)

Решение. Пусть x_1 и x_2 – абсциссы точек касания. Тогда угловые коэффициенты касательных в этих точках равны $2x_1$ и $2x_2$. Условие перпендикулярности касательных имеет вид $4x_1x_2 = -1$. Квадрат расстояния между точками касания $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2$. Запишем его как функцию от x_1: $d^2 = \left(x_1 + \dfrac{1}{4x_1}\right)^2 + \left(x_1^2 - \dfrac{1}{16x_1^2}\right)^2$, или $d^2 = x_1^2 + \dfrac{1}{16x_1^2} + x_1^4 + \dfrac{1}{16^2 x_1^4} + \dfrac{3}{8}$.

Обозначим $x_1^2 + \frac{1}{16x_1^2} = t$. Тогда $d^2 = t^2 + t + \frac{1}{4}$, где $t \geq \frac{1}{2}$. Наименьшее значение d^2, равное 1, достигается при $t = \frac{1}{2}$. Соответственно, наименьшее из расстояний между точками касания равно 1.

4.3. Доказать, что найдется такое число a, что уравнение $ax^4 + x^3 + \left(a^2 - 4\right)x^2 + 5x - 2 - 3a^2 = 0$ имеет четыре различных действительных корня. (10 баллов)

Решение. Обозначим $f_a(x) = ax^4 + x^3 + \left(a^2 - 4\right)x^2 + 5x - 2 - 3a^2$. Функция $f_0(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ имеет точку максимума $x = 1$, причем $f_0(1) = 0$, и точку минимума $x = \frac{5}{3}$, причем $f_0\left(5/3\right) < 0$. При достаточно малых $a > 0$ $f_a(0) = -2 - 3a^2 < 0$, $f_a(1) = a\left(1 - 2a\right) > 0$, $f_a\left(5/3\right) < 0$. При $a > 0$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = +\infty$, и потому существуют числа $x_1 < 0$ и $x_2 > \frac{5}{3}$ такие, что $f_a\left(x_1\right) > 0$ и $f_a\left(x_2\right) > 0$. Таким образом, при достаточно малом $a > 0$ $f_a(x)$, по крайней мере, четыре раза меняет знак и записывается не менее чем с четырьмя различными нулями. Так как $f_a(x)$ – многочлен четвертой степени, то он имеет четыре различных нуля.

5. Интегралы

5.1. Вычислить $\int \ln\left(5 + x + 2\sqrt{x}\right)dx$. (2 балла)

Решение. $\int \ln\left(5 + x + 2\sqrt{x}\right)dx = \left\|\sqrt{x} = t\right\| = \int \ln\left(5 + 2t + t^2\right)dt^2 = t^2 \ln\left(5 + 2t + t^2\right) -$

$-\int \frac{2t^3 + 2t^2}{t^2 + 2t + 5}dt = t^2 \ln\left(5 + 2t + t^2\right) - \int\left(2t - 2\right)dt + \int \frac{6t - 10}{t^2 + 2t + 5}dt = x\ln\left(5 + 2t + t^2\right) -$

$-x + 2\sqrt{x} + 3\ln\left(5 + 2\sqrt{x} + x\right) - 8arctg\frac{\sqrt{x} + 1}{2} + C$.

5.2. Пусть $f(x)$ – произвольная непрерывная функция на R. Доказать, что уравнение $f(x) = 2xf\left(x^2\right)$ имеет хотя бы одно решение. (8 баллов)

Решение. Рассмотрим функцию $F(x)=\int\limits_0^x\left(2tf\left(t^2\right)-f\left(t\right)\right)dt$. Она дифференцируема на отрезке $\left[0,1\right]$, $F(0)=0$,

$$F(1)=\int\limits_0^1 f\left(t^2\right)d\left(t^2\right)-\int\limits_0^1 f(t)dt=\int\limits_0^1 f(z)dz-\int\limits_0^1 f(t)dt=0.$$

По теореме Ролля $\exists c\in\left(0,1\right)$, значит, $F'(c)=2cf\left(c^2\right)-f(c)=0$. Тогда $f(c)=2cf\left(c^2\right)$.

5.3. При каких значениях $a>0$, $b>0$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}dx$? (8 баллов)

Решение

$$\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}=\frac{1}{b^2}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+x\right)=\frac{x^2}{b^2}\left(1-\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{1/2}\right)\left(1+\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right)^{1/2}\right)=$$

$$=\frac{x^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{2x^2}+\frac{a^4}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\left(2+\frac{b^2}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4+b^4}{4b^2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

При $a\neq b$ $\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}\sim\ln\frac{a^2}{b^2}\neq 0$ и интеграл расходится.

При $a=b$ $\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}=\ln\left(1+\frac{a^2}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\sim\frac{a^2}{2}\frac{1}{x^2}$.

Так как $\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty}\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}dx$.

Итак, интеграл сходится тогда и только тогда, когда $a=b$.

6. Дифференциальные уравнения

6.1. Найти решение задачи Коши $\frac{dx}{dt}=2t\left(t^2-x\right)$, $x(0)=-1$. (2 балла)

Решение. Уравнение является линейным. Решая его любым стандартным методом, получаем $x=t^2-1$.

6.2. Найти все функции $f(x)$ такие, что для любого $x \in R$

$$f''(x) = f(x) \int_0^{+\infty} f(x)dx. \tag{6.1}$$

(6 баллов)

Решение. Пусть $f(x)$ – искомая функция. Обозначим

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = m. \tag{6.2}$$

Тогда $f(x)$ – решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - my = 0$. Если $m > 0$, то $f(x) = C_1 e^{-\sqrt{m}x} + C_2 e^{\sqrt{m}x}$. Эта функция удовлетворяет уравнению (6.1), если выполняется (6.2). Но тогда $C_2 = 0$ и равенство (6.2) принимает вид $-\frac{1}{\sqrt{m}} C_1 e^{-\sqrt{m}x} \Big|_0^{+\infty} = m$, или $C_1 = m\sqrt{m}$. Итак, при любом $m > 0$ $f(x) = m\sqrt{m}e^{-\sqrt{m}x}$ – решение уравнения (6.1). Если $m = 0$, то $f(x) = ax + b$ и равенство (6.2) выполняется только при $a = b = 0$ и $f(x) \equiv 0$. Если $m < 0$, то $f(x) = C_1 \cos\sqrt{-m}x + C_2 \sin\sqrt{-m}x$, и равенство (6.2) невозможно из-за расходимости несобственного интеграла.

Обозначив $a = \sqrt{m}$, получаем, что все решения уравнения (6.1) имеют вид $f(x) = a^3 e^{-ax}$, где $a \ge 0$.

6.3. Функция $y(x)$, $x \in [0, \infty)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = e^{-xy}$. Доказать, что существует $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) \in (0, \infty)$. (10 баллов)

Решение. Если $\forall x \in [0, \infty)$ $y(x) \le 0$, то $\forall x \in [0, \infty)$ $y'(x) \ge e^0 = 1$. Поэтому $\forall x \in [0, \infty)$ $y(x) \ge y(0) + x$. Но тогда $y(x) > 0$ для всех $x > -y(0)$, что противоречит предположению. Таким образом, $y(x_0) = m > 0$ для некоторого $x_0 \in [0, \infty)$. Так как $\forall x \in [0, \infty)$ $y'(x) = e^{-xy(x)} > 0$, то $y(x)$ – возрастающая функция. В частности, $y(x) \ge m$ при $x \ge x_0$. Из равенства $y'(x) = e^{-xy(x)}$ получаем, что $y'(x) \le e^{-mx}$ при $x \ge x_0$. Проинтегрируем это неравенство:

$$y(x) - y(x_0) \le \int_{x_0}^{x} e^{-mx} dx \text{ при } x \ge x_0.$$

Отсюда $y(x) \le y\left(x_0\right) - \frac{1}{m} e^{-mx} + \frac{1}{m} e^{-mx_0} \le y(x_0) + \frac{1}{m} e^{-mx_0} = M$ при $x \ge x_0$, то есть $y(x)$ – функция, ограниченная сверху при $x \ge x_0$. Так как при $x \ge x_0$ $y(x)$ возрастает и $y(x) \ge m > 0$, то существует $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) \in \left(0,\infty\right)$.

7. Ряды

7.1. При каких значениях $x \in R$ сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{nx^2+1}{\left(2n^2-n-1\right)\ln\left(x^2+n\right)}$?

(3 балла)

Решение. Члены ряда определены и положительны при всех $x \in R$. Если $x \ne 0$, то при $n \to \infty$

$$\frac{nx^2+1}{\left(2n^2-n+1\right)\ln\left(x^2+n\right)} \sim \frac{x^2}{2n\ln\left(x^2+n\right)} \sim \frac{x^2}{2\left(x^2+n\right)\ln\left(x^2+n\right)}.$$

Так как интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dn}{\left(x^2+n\right)\ln\left(x^2+n\right)} = \ln\ln\left(x^2+n\right)\Big|_2^{+\infty} = \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+n\right)\ln\left(x^2+n\right)}$ расходится. По предельному признаку сравнения расходится и заданный ряд. Если $x = 0$, то n-й член рада имеет вид: $\frac{1}{\left(2n^2-n+1\right)\ln n}$. Так как при $n \ge 3$ $\frac{1}{\left(2n^2-n+1\right)\ln n} \sim \frac{1}{2n^2\ln n}$, $\frac{1}{2n^2\ln n} < \frac{1}{2n^2}$, а $\int\limits_2^{\infty} \frac{dn}{n^2}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(2n^2-n+1\right)\ln n}$ также сходится.

Итак, заданный ряд сходится только при $x = 0$.

7.2. Ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{a_n^{a_n}}$?

(5 баллов).

Решение. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 0$. Используя это равенство, а также то, что $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t\ln^2 t = 0$ и $e^z - 1 \sim z$ при $z \to 0$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a_n^{a_n}}}{a_n}=\lim_{t\to 0}\frac{t^{t^t}}{t}=\lim_{t\to 0}t^{t^t-1}=\lim_{t\to 0}\exp\left(\left(e^{t\ln t}-1\right)\ln t\right)=\exp\lim_{t\to 0}\left(t\ln^2 t\right)=\exp 0=1.$$

По предельному признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{a_n^{a_n}}$ сходится.

7.3. Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ имеют место равенства $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(u_{n+1}-u_n\right)=0$. Доказать, что ряд сходится. (10 баллов)

Решение. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(u_{n+1}-u_n\right)=0$ следует, что для некоторого числа $M>0$ $n^3\left|u_n-u_{n+1}\right|\le M$ при всех n. Но тогда $\left|u_n-u_{n+1}\right|\le\dfrac{M}{n^3}$ и ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\left(u_k-u_{k+1}\right)$ сходится абсолютно, а его сумма

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(u_k-u_{k+1}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\left(u_n-u_{n+1}\right)+\ldots+\left(u_N-u_{N+1}\right)\right)=\lim_{N\to\infty}\left(u_n-u_{N+1}\right)=u_n.$$

Следовательно, при $n\ge 2$

$$\left|u_n\right|\le\sum_{k=n}^{\infty}\left|u_k-u_{k+1}\right|\le M\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3}\le M\int_{n-1}^{\infty}\frac{dk}{k^3}=\frac{M}{2\left(n-1\right)^2}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\left(n-1\right)^2}$ сходится, то абсолютно сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Задачи олимпиады 2008 г.

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xctgx-1}{x^2}$. (2 балла)

2. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$. (3 балла)

3. Найти $\int\left(\left|x\right|+2x\right)^2dx$. (4 балла)

4. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2n}}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}\right)$. (5 баллов)

5. Найти определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (6 баллов)

6. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, дифференцируема в интервале $(0;1)$ и $f(0)=f(1)=0$, $f(x_0)=1$ для некоторого $x_0 \in (0;1)$. Доказать, что найдется $c \in (0;1)$ такое, что $|f'(c)| \geq 2$.

(7 баллов)

7. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. (7 баллов)

8. Найти наименьшее значение функции $u = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$ при $x, y, z > 0$.

(8 баллов)

9. Доказать, что площадь, заключенная между касательной к гиперболе и ее асимптотами, имеет постоянную величину. (6 баллов)

Задачи олимпиады 2009 г.

1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0+0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$. (2 балла)

2. Доказать, что кривая $y = \frac{x^5 + 5x + 1}{5x^4 + 5}$ пересекает ось абсцисс под углом в 45°.

(3 балла)

3. Доказать, что $tgx + arctgx > 2x$ при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. (4 балла)

4. Найти кратчайшее расстояние между точками графиков $y = x^2 + 2x + a$ и $y^2 + 2y + a$. (5 баллов)

5. Найти все непрерывные функции $f(x)$ такие, что $f(x) = f(\sin x)$, $\forall x \in R$.

(6 баллов)

6. Найти интеграл $\int \frac{x^2-2}{x^4+4}dx$**.** (4 балла)

7. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$. (4 балла)

8. Найти все функции f такие, что $2\left(f(x)-f(y)\right)=\left(f'(x)+f'(y)\right)\left(x-y\right)$, $\forall x,y\in R$. (6 баллов)

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ при $n=2009$

и $x=2$. (8 баллов)

10. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\left|\cos nx\right|dx$, где $f(x)$ – непрерывная на ортезке $\left[0,2\pi\right]$ функція.

(10 баллов)

Ответы к задачам олимпиады 2008 г.

1. $-\frac{1}{3}$; **2.** 1; **3.** $\frac{5}{3}x^3+\frac{4}{3}\left|x\right|^3+C$; **4.** $2-\ln 4$; **5.** 1; **7.** $\mathrm{ch}x$; **8.** $\frac{3}{2}$.

Решения задач олимпиады 2009 г.

1. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln\left(e^x-1\right)\right)'}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\left[\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{e^x}\right]}=e^1=e$.

2. Поскольку $\left(x^5+5x+1\right)'=5x^4+5>0$, то многочлен нечетной степени x^5+5x+1 строго возрастает на $(-\infty,\infty)$ и имеет единственный корень x_0. Если α – угол наклона кривой к оси абсцисс в точке $(x_0;0)$, то

$$tg\alpha=y'(x_0)=\frac{\left(5x_0^4+5\right)\left(5x_0^4+5\right)-\left(x_0^5+5x_0+1\right)\cdot 20x_0^3}{\left(5x_0^4+5\right)^2}=\frac{\left(5x_0^4+5\right)^2}{\left(5x_0^4+5\right)^2}=1,$$

поскольку $x_0^5+5x_0+1=0$. Поэтому $\alpha=45^\circ$.

3. Поскольку $(tgx-x)'=tg^2x>0$ на $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, то $tgx-x>tg0-0=0\Leftrightarrow tgx>x$ для всех $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Так как

$$(tgx+arctgx-2x)'=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{1+x^2}-2=tg^2x-\frac{x^2}{1+x^2}>tg^2x-x^2>0,$$

то $tgx+arctgx-2x>tg0+arctg0-2\cdot 0$ при любом $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Замена переменных $\begin{cases}\tilde{x}=x+1\\ \tilde{y}=y+1\end{cases}$ (параллельный перенос системы координаты вдоль прямой $y=x$) сводит задачу к нахождению кратчайшего расстояния d между графиками взаимно обратных функций $y=x^2+a$ и $x=y^2+a$. Поскольку параболы $y=x^2+a$ и $x=y^2+a$ симметричны относительно прямой $y=x$, то $d=2\rho$, где ρ – расстояние от графика функции $y=x^2+a$ до прямой $y=x$. Имеем:

$$\rho=\rho(a)=\min_{x\in R}\frac{\left|x-\left(x^2+a\right)\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\min_{x\in R}\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}\right|=\begin{cases}0,\ \text{при } a\le\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\dfrac{1}{4}\right),\ \text{при } a>\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

5. Покажем, что $|\sin x|<|x|$ для любого $x\neq 0$. Для $x\in R$, $|x|>1$ неравенство очевидно. Если $x\in[-1,0)\cup(0,1]$, то $|\sin x|<|x|$ следует из того, что $(x-\sin x)'=1-\cos x>0$. Поэтому $x-\sin x>0-\sin 0=0$ на полуинтервале $(0,1]$ и $x-\sin x<0-\sin 0=0$ на полуинтервале $[-1,0)$. Отметим, что из доказанного неравенства вытекает, что $\sin x=x\Leftrightarrow x=0$.

Зафиксируем произвольное $x \in R$ и рассмотрим последовательность x_n: $x_1 = x$, $x_2 = \sin x_1$, $x_3 = \sin x_2$, … Тогда $|x_{n+1}| = |\sin x_n| \le |x_n|$, $n \ge 1$. Поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = c$, причем

$$c = \lim_{n\to\infty} |x_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |\sin x_n| = \left| \lim_{n\to\infty} \sin |x_n| \right| = |\sin c|.$$

Отсюда $c = 0$. По условию $f(x) = f(x_1) = f(x_2) = \ldots$ Но в силу непрерывности функции $f(x_n) \xrightarrow[n\to 0]{} f(0)$. Значит, $f(x) = f(0)$ при любом $x \in R$, т.е. $f(x)$ – постоянная функция.

6. $$\int \frac{x^2-2}{x^4+4}dx = (\text{при } x \neq 0) = \int \frac{1-2x^{-2}}{x^2+4x^{-2}}dx = \int \frac{d\left(x+\frac{2}{x}\right)}{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\frac{2}{x}-2}{x+\frac{2}{x}+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2} + C.$$

Проверка дифференцированием показывает, что $\int \frac{x^2-2}{x^4+4}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2} + C$ на интервале $(-\infty, \infty)$.

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=4}^{m+3}\frac{1}{2n-1}\right] = \frac{1}{6}\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=m+1}^{m+3}\frac{1}{2n-1}\right] = \frac{1}{6}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{2n-1} = \frac{23}{90}.$$

8. При $y = 0$ получим $2\big(f(x) - f(0)\big) = \big(f'(x) + f'(0)\big)x$. Пусть $a = f(0)$, $b = f'(0)$, $u = f(x) - a$. Тогда $2u = (u' + b)x \Rightarrow u' - \frac{2}{x} + b = 0$, $x \neq 0$, – линейное дифференциальное уравнение. Найдем решение однородного уравнения $u' - \frac{2}{x}u = 0$: $\int \frac{du}{u} = 2\int\frac{dx}{x} + \ln|C| \Rightarrow \ln|u| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow u = Cx^2$. Подставляя его в исходное уравнение и варьируя произвольную постоянную, получаем:

$$C'x^2 + 2Cx - 2Cx + b = 0 \Rightarrow C' = -\frac{b}{x^2} \Rightarrow C = \frac{b}{x} + c \Rightarrow u = cx^2 + bx.$$

Тогда $f(x)=cx^2+bx+a$, где $a,b,c\in R$ – произвольные постоянные. Подстановка найденной функции в исходное уравнение подтверждает полученный результат.

9. Раскладывая исходный определитель Δ_n, где $n=2009$, по n-му столбцу, получим $\Delta_n = x\cdot\Delta_{n-1}+n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=x\cdot\Delta_{n-1}+n=2\Delta_{n-1}+n$. Отсюда

$$\Delta_n+n+2=2\left(\Delta_{n-1}+n+1\right)\Rightarrow\Delta_n+n+2=2^{n-1}\left(\Delta_1+2+1\right)=2^{n+1}.$$

Следовательно, $\Delta_n=2^{n+1}-n-2$, $\Delta_{2009}=2^{2010}-2011$.

10. $I_n=\int\limits_0^{2\pi} f(x)\left|\cos nx\right|dx=\left(t=nx\right)=\frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi n} f\left(\frac{t}{n}\right)\left|\cos t\right|dt=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{2\pi(k-1)}^{2\pi k} f\left(\frac{t}{n}\right)\left|\cos t\right|dt=$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right)\int\limits_{2\pi(k-1)}^{2\pi k}\left|\cos t\right|dt=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right)\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos t\right|dt=\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right)\Delta x_k,$$

где $c_k\in\left[\frac{2\pi(k-1)}{n},\frac{2\pi k}{n}\right]$; $\Delta x_k=\frac{2\pi}{n}$; $k=1,2,...,n$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай и др. – К.: Вища шк., 1978. – 696 с.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
3. Садовничий В.А. Задачи студенческих математических олимпиад / В.А. Садовничий, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. – М.: МГУ, 1987. – 310 с.
4. Садовничий В.А. Задачи студенческих олимпиад по математике / В.А. Садовничий, А.С. Подколузин. – М.: Наука, 1978. – 207 с.

З М І С Т

Упорядники:
Кагадій Тетяна Станіславівна
Шелест Людмила Іванівна
Шелест Катерина Юліївна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

МАТЕРІАЛИ МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
поглибленого вивчення розділу
студентами технічних спеціальностей

Редактор Ю.В. Рачковська

Підп. до друку 14.05.13. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 3,6.
Обл.-вид. арк. 3,6. Тираж 50 пр. Зам. №

Державний вищий навчальний заклад
«Національний гірничий університет»
49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.