МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕХАНИКО-МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной, теоретической и прикладной механики

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА II РОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические рекомендации
к разделу дисциплины «Спецразделы математики, теоретической кинематики и аналитической динамики»

для студентов всех форм обучения

Днепропетровск
НГУ
2013

Применение уравнений Лагранжа II рода к решению задач динамики механических систем. Методические рекомендации к разделу дисциплины «Спецразделы математики, теоретической кинематики и аналитической динамики» для студентов всех форм обучения / В.А. Ропай, О.Г. Науменко, В.Я. Киба. – Д.: Национальный горный университет, 2013. – 58 с.

Авторы:
В.А. Ропай, д-р. техн. наук, проф. (раздел 1);
Е.Г. Науменко, ст. преп. (раздел 2.1);
В.Я. Киба, ст. преп. (раздел 2.2).

Затверджено до видання редакційною радою ДВНЗ «НГУ» (протокол № 2 від 02.07.2013) за поданням методичної комісії напряму підготовки 6.050201 Системна інженерія (протокол № 3 від 15.03.2013).

На тщательно подобранных примерах объясняются такие разделы аналитической механики, как классификация связей, выбор обобщенных координат, получение выражений обобщенных сил, вывод уравнений Лагранжа II рода, составление уравнений движения механических систем с помощью уравнений Лагранжа.

Разработка рекомендаций обусловлена необходимостью подбора материалов для самостоятельной работы студентов при постоянном сокращении времени на изучение дисциплин. Эти разделы механики не могут быть рассмотрены в аудиторное время с необходимой степенью детализации.

Відповідальний за випуск в.о. зав. кафедри будівельної, теоретичної та прикладної механіки, канд. техн. наук, доц. Д.Л. Колосов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Лагранжа* II рода - это наиболее удобный и совершенный способ составления уравнений движения механических систем. Число таких уравнений минимально и равно числу степеней свободы механической системы. Для составления уравнений движения используются выражения кинетической и потенциальной энергии механической системы. Процедура составления уравнений движения имеет общий и формализованный характер.

Учебные цели данного пособия, рассчитанного на начинающего,- подробно на простых примерах рассмотреть такие разделы аналитической динамики: классификация связей, рекомендации по выбору обобщенных координат и вычислению обобщенных сил, составление уравнений движения механических систем с помощью уравнений Лагранжа.

* Жозеф Луи Лагранж (1736-1813). Родился в Турине (Франция) в семье банковского чиновника. В 17-летнем возрасте был назначен преподавателем математики в Королевской артиллерийской школе в Турине. В 1757 г вместе со своим бывшем учеником основал Туринскую академию, которая первоначально носила характер частного научного общества. В этой академии Лагранж был председателем физико-математической секции. В 1759 г был издан 1 том трудов Академии, в котором были напечатаны многие труды 23-летнего ученого по вариационному исчислению и его связи с механикой. После ознакомления с этими трудами Эйлер в письме к Лагранжу написал так: «Ваше решение изопериметрических проблем безукоризненно, и я рад, что тема, которой я давно занимаюсь, доведена вами до близкого конца…» В мае 1759 г Лагранж был избран членом Берлинской Академии наук. В 1766 г Лагранж переезжает в Берлин, где получает должность председателя Берлинской академии наук, в которой он оставался бессменно на протяжении 20 лет. Это был очень плодотворный период жизни Лагранжа. Он почти ежемесячно публиковал новую научную работу. В 1772 г Лагранж был избран членом академии наук в Париже, куда переехал в 1787 г и стал преподавать в высших учебных заведениях. В 1788 г вышел его классический трактат «Аналитическая механика», в котором Лагранж расширил основы статики и механики. Велики его заслуги в теории частных дифференциальных уравнений, теории чисел, алгебры, математическом анализе, математической картографии, астрономии и др.

Умер Лагранж в 1813 г после длительной болезни, в результате полного истощения сил. Выдающийся ученый Лаплас в речи над могилой Лагранжа дал такую характеристику деятельности покойного: « Он был среди тех, кто самым эффективным образом раздвинул пределы наших знаний. Ньютон и Лагранж в самой высокой степени владели счастливым искусством открывания новых данных, представляющих собой существо знаний..» [1].

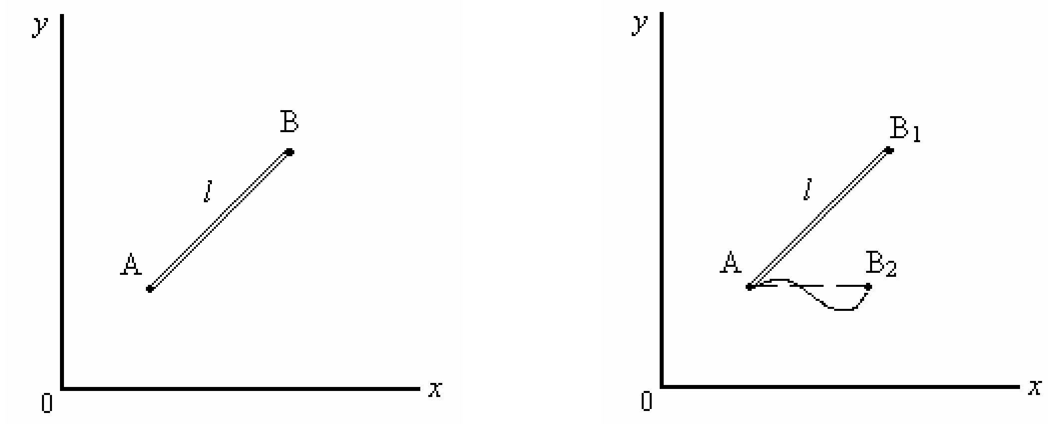
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1.1. Понятие связей

Механической системой называется совокупность материальных точек и твердых тел, в которой положение и движение каждой из них определяется движением и положением остальных точек.

Механические системы бывает свободные и связанные. Свободная система состоит из точек, каждая из которой может совершать любое движение (при наличии соответствующих сил), примером может служить солнечная система. Любая из составляющих ее планет может изменить свое движение при наличии соответствующих сил, например, силы притяжения появившейся из космоса кометы.

Гораздо чаще мы имеем дело со связанными системами, в которых движение различных элементов ограничено. Ограничения, наложенные на движение элементов механической системы, называется "связями". Связи физически реализуются при помощи подвижных и неподвижных твердых тел, а математически описывается уравнениями или неравенствами. Если аналитическим выражением связи является уравнение, то она называется удерживающей. Такая связь, препятствуя некоторому перемещению точки системы, препятствует также ее противоположному перемещению. Если же аналитическим выражением связи является неравенство, то она называется неудерживающей. Такая связь, препятствуя некоторому перемещение точи, не препятствует противоположному перемещение ее.



а б

Рис. 1.1

На рис 1.1, а точки A и B соединены стержнем. При движении системы в плоскости Oxy эта связь описывается уравнением

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2 . \qquad (1.1)$$

Расстояние AB остается неизменным, оно не может ни увеличиваться, ни уменьшаться. Эта связь удерживающая.

На рис. 1.1, б точки A и B_1 соединены гибкой нитью. Если нить натянута (AB_1), то имеет место уравнение (1.1). Если же не натянута (AB_2), то

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \leq l^2 \ . \qquad (1.2)$$

Эта связь неудерживающая. Она препятствует удалению точек A и B, но не препятствует их сближению.

В дальнейшем мы будем рассматривать только удерживающие связи. Это оправдывается тем, что в большинстве случаев активные силы как бы "закрывают" открытую сторону неудерживающей связи и позволяет рассматривать ее как удерживающую. Так, например, рельсы для вагона в вертикальном направлении, хотя и представляют собой неудерживающую связь (вагон можно поднять краном), тем не менее, вследствие значительного веса вагона при его обычном движении можно не учитывать открытую сторону этой связи.

Связи в зависимости от их характера можно разделить на стационарные (их еще называют склерономные) и нестационарные (реономные). В уравнение стационарной связи время t явно не входит (это уравнение имеет вид $f(x_i, y_i, z_i) = 0$), в уравнение же нестационарной связи оно входит явно, уравнение такой связи имеет вид $f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$. Нестационарные связи реализуются при помощи подвижных твердых тел. Например, если материальная точка может перемещаться по горизонтальной платформе, равномерно поднимающейся со скоростью V (рис. 1.2), то уравнение этой связи имеет вид $z = Vt$ (x и y могут здесь меняться произвольным образом).

В противоположность этому стационарная связь всегда может быть реализована при помощи неподвижной поверхности.

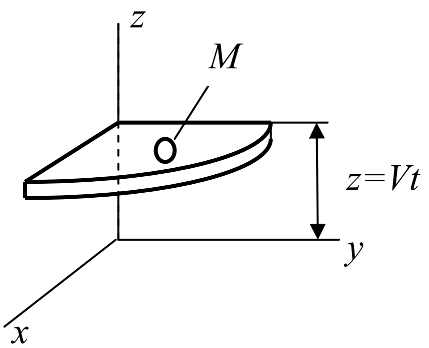


Рис. 1.2

Рассмотрим, например, математический маятник (рис. 1.3). Груз M движется по окружности $x^2 + y^2 = l^2$. Движение груза не изменится, если мы подвижную нить заменим гладкой трубкой радиусом l (рис. 1.3, б).

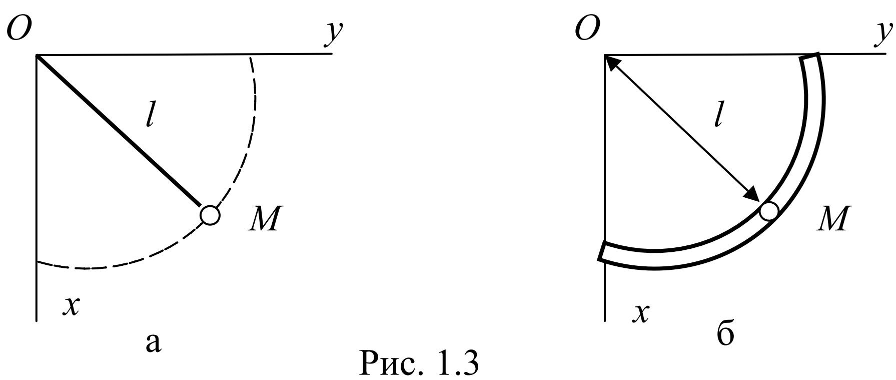


Рис. 1.3

До сих пор мы рассматривали связи, в уравнения которых входили только координаты и время. Такие связи, накладывающие ограничения только на положение (конфигурацию) механической системы, называется геометрическими. Кроме того, встречается связи, накладывающие ограничения на скорости различных точек системы, Такие связи называется кинематическими. Они описываются уравнениями вида:

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0 \quad \text{или} \quad f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0.$$

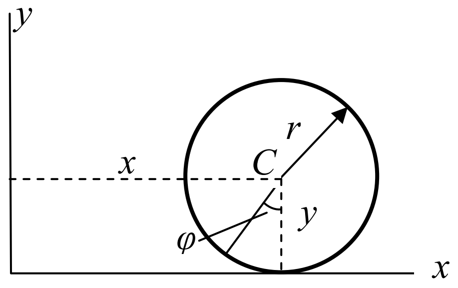


Рис. 1.4

Примером может служить колесо, катящееся без скольжения по плоскости (рис. 1.4). Положение его в плоскости определяется тремя величинами: координатами центра x и y углом поворота φ. Эти величины не являются независимыми.

Уравнения связи имеют вид:

$$y = r, \tag{1.3}$$

$$v_c = \omega r \quad \text{или} \quad \dot{x} = r\dot{\varphi}, \tag{1.4}$$

где выражение (1.3) представляет собой уравнение геометрической связи, а (1.4) - уравнение кинематической связи.

В данном случае дифференциальное уравнение кинематической связи может быть проинтегрировано, после чего оно приобретает вид $x=r\varphi+C$ (постоянная C зависит от положения начала координат). Между геометрическими и интегрируемыми кинематическими связями нет принципиального, различия. Они могут быть описаны конечным (не дифференциальным) уравнением и поэтому объединяется в одну категорию - голономные связи.

Часто встречается кинематические связи, аналитическим выражением которых является неинтегрируемое дифференциальное уравнение. Эти связи называется неголономными.

Примером неголономной системы могут служить сани (коньки) (рис. 1.5). Конструкция полозов их такова, что допускает продольное (по направление AB) скольжение и верчение (вращение вокруг C). Запрещенным является боковое скольжение (по направленно Cn). Это условие заключается в том, что проекция скорости точки С на направление Cn должна быть равна нулю. Но

$$Vn = \dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi,$$

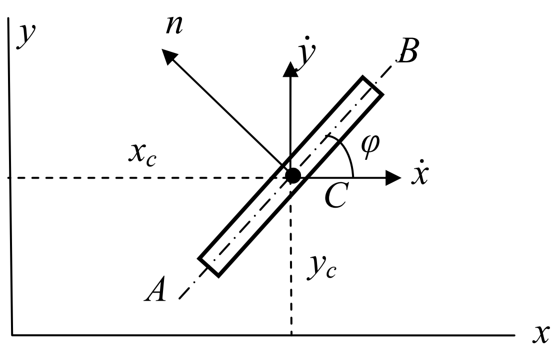


Рис. 1.5

следовательно, кинематическая связь, не допускающая *Vn*, имеет вид

$$\dot y\cos\varphi - \dot x\sin\varphi = 0. \tag{1.5}$$

Это уравнение неинтегрируемое (связь неголономная). Покажем это. Предположим противное, а именно, что (1.5) допускает интеграл

$$f(x, y, \varphi) = C. \tag{1.6}$$

Тогда, дифференцируя (1.6), мы должны получать тождественно (1.5), то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot x + \frac{\partial f}{\partial y}\dot y + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot\varphi \equiv -\sin\varphi\dot x + \cos\varphi\dot y + 0\dot\varphi = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin\varphi; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos\varphi \ ; \ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0.$$

Продифференцировав первое из них по φ, а третье - по x получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\varphi} = -cos\varphi\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial x} = 0,$$

те есть
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\varphi} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial x}.$$

Таким образом, предположение об интегрируемости (1.5) привело нас к противоречию с теоремой о равенстве смешенных производных. Следовательно, это уравнение является аналитическим выражением неголономной связи.

1.2. Обобщенные координаты. Число степеней свободы

Обобщенными координатами механической системы называется независимые величины, определяющие положение (конфигурацию) системы в любой момент времени. Обобщенные координаты принято обозначать через q_i. Мы традиционно привыкли к частому использованию декартовых координат для определений положения точек системы. Если механическая система состоят из *n* материальных точек, положение каждой из которых определяется в пространстве трех измерений координатами $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$, то для определения положения механической системы надо знать 3*n* координат. Но, если система не свободна, координаты ее точек в силу наложенных связей будут удовлетворять каким-то уравнениям (уравнениям связей) и число независимых между собой координат будет меньше 3*n*.

Например, для шарика *A*, вынужденного оставаться на некоторой горизонтальной плоскости (рис. 1.6), при выбранной системе отсчета уравнение связи имеет вид $z=0$ и положение точки *A* на плоскости может быть определено двумя независимыми координатами x_A и y_A, которые следует принять за обобщенные

$$q_1 = x_A, q_2 = y_A.$$

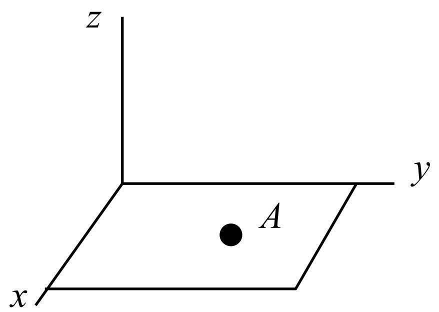


Рис. 1.6

Если материальная точка *A* кроме того связана с началом отсчета *0* стержнем *OA* длины *l* (рис. 1.7), то на точку *A* наложены две связи, уравнения которых:

1) $z_A = 0$,

2) $x_A^2 + y_A^2 = l^2$.

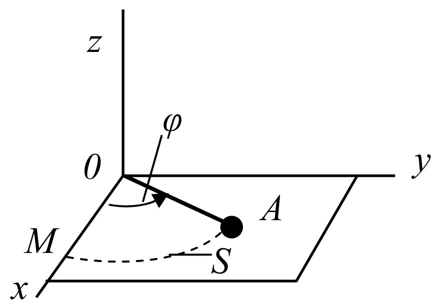


Рис. 1.7

Таким образом, независимой координатой будет только одна: или x_A, тогда y_A определиться из второго уравнения связи, или y_A, тогда x_A получим из того же уравнения связи. То есть, за обобщенную координату можно принять или $x_A = q_1$, или $y_A = q_1$, или принять за обобщенную координату угол φ, образуемый стержнем OA с осью x, $\varphi = q_1$. Тогда декартовы координаты точки A будут:

$$z_A = 0,\ x_A = l\cos\varphi,\ y_A = l\sin\varphi.$$

Независимой величиной является только φ.

Можно здесь в качестве обобщенной координаты выбрать длину S дуги AM или площадь σ сектора AOM, указав во всех случаях положительное и отрицательное направление отсчета соответствующей координаты.

То есть, для одной и той же системы выбор обобщенных координат можно производить по-разному, а сами координаты могут при этом быть параметрами разных размерностей, такими, как угол (безразмерная величина), длина, площадь, объем и др. Удачный выбор обобщенной координаты может иногда значительно упростить и облегчить решение задачи. Это будет показано ниже.

Мы рассмотрели примеры геометрических связей и увидели, что каждая геометрическая связь выражается уравнением и уменьшает число независимых координат системы на единицу. Поэтому у системы, состоящей из n материальных точек, на которую наложено k геометрических связей будет $S= 3n-k$ независимых координат. Каждая геометрическая связь выражается математическим уравнением, связывающим координаты точек системы, на которые эта связь наложена. В общем случае это уравнение связи имеет вид

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0\ . \tag{1.7}$$

<u>Числом степеней свободы механической, системы называется число независимых, возможных перемещений этой системы</u>.

Одна свободная материальная точка имеет три независимых возможных перемещения $\delta x, \delta y, \delta z$ и, следовательно, три степени свободы. Точка на плоскости xy (рис. 1.6) - два независимых возможных перемещения $\delta x, \delta y$ (две степени свободы). Точка A на плоскости xy, связанная с точкой 0 стержнем длины l имеет одно независимое перемещение - или δx, или δy, или $\delta\phi$ (одну степень свободы).

Если системе, на которую наложена геометрическая связь вида (1.7), сообщить возможное перемещение, то координаты ее точек станут равны $x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, \dots, z_n + \delta z_n$ и будут по-прежнему удовлетворять уравнении (1.7), т.е. будет

$$f(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1, \ldots, z_n+\delta z_n)=0. \tag{1.8}$$

Раскладывая это выражение в ряд Тейлора и сохраняя члены первого порядка малости, получим:

$$f(x_1, y_1, \ldots, z_n)+\frac{\delta f}{\delta x_1}\delta x_1+\frac{\delta f}{\delta y_1}\delta y_1+\cdots+\frac{\delta f}{\delta z_n}\delta z_n=0. \tag{1.9}$$

Так как согласно равенству (1.7) первое слагаемое равно 0, получаем, что возможные перемещения точек системы, на которую наложена связь вида (1.7), удовлетворяют соотношению

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}\delta x_1+\frac{\delta f}{\delta y_1}\delta y_1+\frac{\delta f}{\delta z_1}\delta z_1+\cdots+\frac{\delta f}{\delta x_n}\delta x_n+\frac{\delta f}{\delta y_n}\delta y_n+\frac{\delta f}{\delta z_n}\delta z_n=0. \tag{1.10}$$

Пользуясь этим соотношением, можно одно из возможных перемещений, например δz_n, выразить через все остальные.

Таким образом, каждая геометрическая связь вида (1.7) приводит к соотношению (1.10.), т.е. уменьшает число независимых перемещений точек системы на единицу. В результате для системы, состоящая из n материальных точек, на которую наложено k геометрических связей, будем иметь S=3n-k независимых возможных перемещений, т.е. эта система будет иметь S степеней свободы. Следовательно, <u>у системы с геометрическими связями число независимых между собой координат точек системы равно числу степеней свободы системы и наоборот.</u> Поэтому число степеней свободы такой системы можно определять или по числу независимых возможных перемещений, или по числу независимых координат (обобщенных координат). Механическую систему, конфигурация которой определяется S - обобщенными координатами, можно рассматривать как точку в S - мерном пространстве, положение которой определяется S-компонентным вектором столбцом $\vec{q}=[q_1, q_2, \ldots, q_n]'$ (штрих означает транспонированную матрицу). С точки зрения аналитической механики возможное перемещение системы представляет собой вектор

$\delta\vec{q}=[\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n]'$ т.е. вектор изохорных (в данный момент времени) вариаций обобщенных координат. Если механическая система подчинена голономным (геометрическим и интегрируемым кинематическим) связям, то, как показано выше, независимым координатам q_i соответствуют независимые вариации δq_i.

В этом случае точку, определяемую вектором $\bar{q}$, можно рассматривать как свободную.

Если же механическая система неголономная, то независимым обобщенным координатам q_{i} соответствуют зависимые вариации координат δq_i. Напомним, что неголономные связи не накладывают ограничений на конфигурацию системы, но накладывают ограничения на возможные перемещения. Значит <u>для неголономной системы число, степеней свободы меньше числа независимых (обобщенных) координат на число неголономных связей.</u> В этом случае механическую систему нельзя рассматривать как свободную точку в S - мерном пространстве. При исследовании ее движения, кроме активных сил, приходится учитывать реакции неголономных связей.

В данном пособии мы не будем касаться вопросов динамики неголономных механических систем - это один из больших и сложных разделов курса аналитической механики. Ограничимся только несколькими замечаниями общего характера.

Механика неголономных систем оформилась как самостоятельный раздел механики в 1894 г. в книге известного физика и механика Г.Герца (1837-1894). Он подробно проанализировал понятие "возможных перемещений" и впервые указал на существование неинтегрируемых дифференциальных зависимостей между координатами системы, приводящих к зависимостям между возможными перемещениями. Ему принадлежат термины "голономные неголономные системы". Работа Герца послужила началом дальнейшего развития этой области механики. В настоящее время для исследования динамики неголономных систем используются уравнение с неопределенными множителями Лагранжа, уравнения Аппеля, уравнения Ценова, уравнения Чаплыгина, уравнения Воронца, уравнения Больцмана-Гомеля. Для подробного изучения этого вопроса можем рекомендовать учебник Добронравова В. В. "Основы механики неголономных систем, пособие для вузов. М. "Высшая школа", 1970.

В дальнейшем будем рассматривать голономные системы. Если такая система имеет S степеней свободы, то её положение будет определяться S обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Поскольку параметры q_i однозначно определяет положение системы, то декартовы координаты x_i, y_i, z_i любой точек системы можно выразить через обобщенные координаты в виде:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots q_s, t). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Время t входит в эти зависимости в том случае, если связи нестационарные.

Радиус-вектор любой точки

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{i} + z_i \bar{k}, \tag{1.12}$$

как следует из (1.11), можно выразить через обобщённые координаты

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots q_s, t) . \tag{1.13}$$

При движении системы обобщенные координаты будут с течением времени изменяться, то есть будут представлять собой некоторые функции времени. Производные от обобщенных координат по времени называют обобщенными скоростями.

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i . \tag{1.14}$$

Размерность обобщенной скорости зависит от размерности выбранной обобщенной координаты: если q - линейная величина, то $\dot{q}$ - линейная скорость;

если q- угол, то $\dot{q}$ – угловая скорость; если q- площадь, то $\dot{q}$- секториальная скорость.

1.3. Обобщенные силы

Выражение для обобщенных сил получают как коэффициенты, стоящие при вариациях обобщенных координат в выражении возможной работы всех действующих на некоторую механическую систему активных сил. Пусть имеем механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которые действует активные силы $\overline{F}_1^a, \overline{F}_2^a, ..., \overline{F}_n^a$ и реакции связей $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$,…, $\overline{R}_n$. Если положение точек системы определяется относительно центра радиус-векторами $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$,…,$\overline{r}_n$, то элементарная работа всех сил на возможном перемещении системы будет

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^a \cdot \delta\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i \cdot \delta\overline{r}_i .$$

Для идеальных связей (гладкая поверхность, неподвижная шарнирная опора, нерастяжимая нить, невесомый стержень) $\sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i \cdot \delta\overline{r}_i = 0$. Реакции неидеальных связей (например, силы трения) удобно относить к числу активных сил, тогда элементарная работа всех сил на возможном перемещении системы определится выражением

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^a \cdot \delta\overline{r}_i . \qquad (1.15)$$

Допустим, что механическая система имеет S степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s$. Согласно равенству (1.13) можно все радиусы-векторы $\overline{r}_i$ выразить через S обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Тогда, вычисляя $\delta\overline{r}_i$ по правилу вычисления полного дифференциала, будем иметь (напомним, что возможное перемещение определяется для данного момента времени t, следовательно, при вычислении $\delta\overline{r}_i$ необходимо t считать величиной постоянной), получим

$$\delta\overline{r}_i = \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_S}\delta q_S .$$

Подставляя эти значения $\delta\overline{r}_i$ в равенство (1.15) и вынося общие множители $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ за скобки, найдем, что

$$\delta A^a = \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,a} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,a} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2}\right)\delta q_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,a} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_S}\right)\delta q_S .$$

Введем обозначения:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,a} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} = Q_1; \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,a} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2} = Q_2; \ \ldots\ ; \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,a} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_S} = Q_S .$$

Получаем выражение элементарной работы активных сил в обобщенных координатах:

$$\delta A^a = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_s \delta q_s. \qquad (1.18)$$

Как известно, элементарная работа силы $\overline{F}$ на возможном перемещении, равном δS, будет

$$\delta A = F_\tau \delta S. \qquad (1.19)$$

Таким образом, та часть силы, которая совершает работу, т.е. F_τ входит в выражение δA как коэффициент при возможном перемещении δS . По аналогии с этим величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$, входящие в равенство (1.16) как коэффициенты при $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$, рассматривают как некоторые обобщенные силы. В зависимости от размерности обобщенной координаты обобщенные силы могут иметь разные размерности. Так как произведение $Q \cdot \delta q$ имеет размерность работы, то $[Q]=\frac{[A]}{[q]}$, то есть, размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты. Например, если q имеет размерность длины (метр), то Q - размерность обычной силы (Ньютон); если q- угол (безразмерная величина), то Q- размерность Н·м, т.е. размерность момента; если q- объем в м^3, то Q - имеет размерность Н/м^2 , т.е. размерность давления и т.д. Как видно, понятие обобщенной силы охватывает все величины, встречающиеся ранее как меры механического взаимодействия материальных тел.

1.3.1. Случай потенциальных сил

Если существует силовая функция U от координат точек системы $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, дифференциал которой равен элементарной работе действующих на систему сил

$$\delta A = \delta U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n), \qquad (1.20)$$

то все действующие на систему силы называют потенциальными. Если система имеет S степеней свободы и положение ее определяется S обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_s$, то, как видно из равенств (1.11), все координаты точек системы x_i, y_i, z_i могут быть выражены через эти обобщенные координаты. В результате получим

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_s). \qquad (1.21)$$

Тогда $\delta A = \delta U\ (q_1, q_2, \dots, q_s)$ или, вычисляя δU как полный дифференциал,

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_S}\delta q_S.$$

Сравнивая это выражение с равенством (1.18), приходил к выводу, что

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1};\quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2};\ \dots;\ Q_S = \frac{\partial U}{\partial q_S}.$$

Замечая, что силовая функция связана с потенциальной энергией системы П зависимостью $U = -\Pi \quad (\Pi = -U)$, получаем:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1};\quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2};\ \dots;\ Q_S = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_S}. \qquad (1.22)$$

Таким образом, если все действующие на систему силы потенциальны, то обобщенные силы равны взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии системы по соответствующим обобщенным координатам.

1.3.2. Примеры вычисления обобщенных сил

Полученные выражения для обобщенных сил (1.17) редко используются для вычисления значений обобщенных сил. Они носят больше теоретический характер, а практически поступают следующим образом. Согласно (1.18) выражение элементарной работы активных сил в обобщенных координатах имеет вид

$$\delta A^a = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \dots + Q_S\delta q_S.$$

Дадим системе такое возможное перемещение, при которой изменится только одна какая-нибудь обобщенная координата, например q_1, а остальные координаты остаются неизменными, т.е.

$$\delta q_1 \neq 0, \text{ а } \delta q_2 = 0, \ \delta q_3 = 0, \ ..., \delta q_S = 0.$$

Получится, что сумма возможных работ всех сил на этом перемещении $\delta A^{(1)} = Q_1 \delta q_1$, откуда находим

$$Q_1 = \frac{\delta A^{(1)}}{\delta q_1} \ . \tag{1.23}$$

То есть обобщенная сила Q_1 будет равна коэффициенту при δq_1 в выражении возможной работы всех активных сил только на этом $\delta q_1 \neq 0$ возможном перемещении. Аналогично определяют все остальные обобщенные силы.

Часто при решении задач пользуется декартовой системой координат, что бывает удобным для систем с одной степенью свободы. Если учесть, что

$$\bar{F}_i^a = F_{ix}\,\bar{i} + F_{iy}\,\bar{j} + F_{iz}\bar{k} \quad \text{и} \quad \delta\bar{r}_i = \delta x_i \bar{i} + \delta y_i \bar{j} + \delta z_i \bar{k}, \tag{1.24}$$

то выражение элементарной работы всех активных сил, приложенных к механической системе имеет вид

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^a \, \delta\bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix}\delta x_i + F_{iy} y_i + F_{iz}\delta z_i\right). \tag{1.25}$$

Подстановкой (1.24) в (1.17) получаем выражение обобщенной силы Q_j

через проекции активных сил на оси координат

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}, \tag{1.26}$$

где $i = 1,2,3, \dots, n$ (n- число точек в системе),

$j = 1,2,3, \dots S$ (S- число степеней свободы).

Если все силы, действующие на механическую систему, потенциальны, то после выбора обобщенных координат вычисляет потенциальную энергию системы Π и, пользуясь выражениями (1.22), находят значения обобщенных сил. Этот способ определения обобщенных сил в случае систем с несколькими степенями свободы эффективнее предыдущих способов. Однако он пригоден лишь, когда все активные силы потенциальные.

Рассмотрим применение описанных способов определения обобщенных сил на примерах.

Пример 1.1. Определить обобщенную силу математического маятника весом P, если длина нити равна l (рис. 1.8).

Движение маятника плоское. Уравнение связи (в декартовых координатах)

$$x^2 + y^2 = l^2 . \tag{1.27}$$

Независимой может быть только одна координата - система имеет одну степень свободы. Единственной активной силой является вес маятника. Так как нить нерастяжимая и при движении маятника натянута, то она является идеальной связью.

а) Примем в качестве обобщенной координаты, определяющей положение маятника, координату $\boldsymbol{q_1=y}$ (положительное направление показано на рис. 1.8).

Дадим маятнику возможное перемещение $\delta\bar{r} = \delta x \cdot \bar{\imath} + \delta y \cdot \bar{j}$ (оно определяется наложенной связью). Составим выражение элементарной работы силы P.

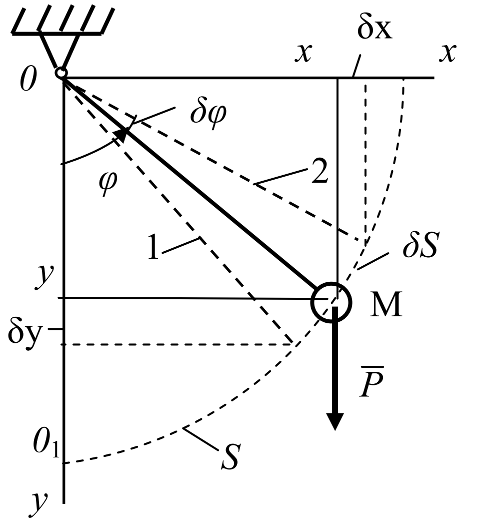


Рис. 1.8

$F_x = 0, \quad F_y = P$, подставляем в (1.25),

$$\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y = P\delta y = P\delta q .$$

Обобщенной силой, соответствующей обобщенной координате $\boldsymbol{q_1=y}$, будет

$$Q_1=P. \tag{1.28}$$

По размерности линейной обобщенной координате соответствует обобщенная сила, имеющая размерность силы [Н].

б) Примем в качестве обобщенной координаты, определяющей положение маятника, координату $\boldsymbol{q_1=x}$. Составим выражение элементарной работы силы P. Помним, что $F_x = 0$, $F_y = P$, тогда, $\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y = P\delta y$.

Обобщенной силой, соответствующей координате $q_1=x$ будет коэффициент, стоящий при вариации обобщенной координаты δx в выражении возможной работы. Т.е. необходимо преобразовать выражение возможной работы так, чтобы в нем вариация координаты y была выражена через вариацию координаты x. На перемещение маятника наложены ограничения, выражающееся математически уравнением связи (1.27), из которого

$$y = f(x) = \sqrt{l^2 - x^2} \ .$$

Тогда $$\delta y = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x = -\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}\delta x$$

и $$\delta A = P\delta y = -\frac{Px}{\sqrt{l^2 - x^2}}\delta x \ .$$

Следовательно, обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате

$\boldsymbol{q_1 = x}$, равна

$$Q_1 = -\frac{Px}{\sqrt{l^2 - x^2}} \ . \tag{1.29}$$

Опять линейной обобщенной координате соответствует обобщенная сила, имеющая размерность силы.

Обобщенную силу (1.29) мы могли бы получить сразу, воспользовавшись, выражением (1.26)

$$Q_1 = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} \ ,$$

здесь $q_1 = x, \quad F_x = 0, \quad F_y = P, \quad \dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad \dfrac{\partial x}{\partial x} = 1.$

Следовательно $$Q_1 = 0 \cdot 1 - P \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} = -\frac{Px}{\sqrt{l^2 - x^2}} \ .$$

Знак минус в полученном выражении объясняется не только правилами дифференцирования, а еще и тем (физически), что при варьировании координат (y в примере а и x в примере б) мы должны рассматривать приращения этих координат, т.е. возможные перемещения, представленные на рис. 1.8 положениями 1 и 2, соответственно. В первом случае маятник опускается и работа силы P положительная, во втором - маятник поднимается и работа силы P отрицательная. Но мы получаем это, используя только уравнение связи (1.27).

в) Примем в качестве обобщенной координаты, определяющей положение маятника, дуговую координату $\boldsymbol{S = 0_1 M}$, отсчитываемую от 0_1 к M.

Дадим маятнику возможное перемещение δS. Составим выражение элементарной работы силы P, воспользовавшись зависимостью (1.19),

$$\delta A = F_{\tau}\delta S = -P\sin\varphi\cdot\delta S = -P\sin\frac{S}{l}\cdot\delta S,$$

где $\varphi = \dfrac{S}{l}$.

Обобщенней силой Q_1, соответствующей обобщенной координате $q_1 = S$, будет

$$Q_1 = -P\sin\frac{S}{l}, \tag{1.30}$$

имеющая размерности силы.

г) Принимаем в качестве обобщенной координаты угол поворота $\boldsymbol{\varphi}$, образуемый нитью маятника с вертикалью. Дадим маятнику возможное перемещение $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ. В таком случае на угловом перемещении вокруг неподвижная точки O работу будет совершать момент силы P относительно этой опоры O $M = -Pl\sin\varphi$ (знак "-" т.к. положительным принят угол φ поворота против хода часовой стрелки, а момент силы P направлен противоположно). Тогда

$$\delta A = M\cdot\delta\varphi = -Pl\sin\varphi\cdot\delta\varphi.$$

Обобщенная сила Q_1, соответствующая обобщенной координате $\boldsymbol{q_1=\varphi}$, равна

$$Q_1 = -Pl\sin\varphi \tag{1.31}$$

и имеет размерность момента силы [Нм].

Действующая на маятник сила тяжести P потенциальная. Покажем теперь способ определения обобщенных сил как взятую со знаком минус частную производную от потенциальной энергии системы по соответствующей обобщенной координате.

В примере а). Напомним, что потенциальная энергия равна запасу работы действующей силы P на перемещении маятника из данного промежуточного положения в нулевое, т.е. $\Pi = -Py$ (знак "-" т.к. при перемещении вверх из положения, определяемого координатой y, в положение y=0 сила P, направленная вниз, совершит отрицательную работу).

За обобщенную координату принята $\boldsymbol{q_1=y}$,

$$Q_1 = -\frac{\partial П}{\partial y} = P.$$

В примере б) на перемещении из данного положения, характеризуемого координатой x, в нулевое (x=0), сила тяжести P совершит (рис. 1.8) положительную работу на вертикальном перемещении равном $l-y$ т.е.

$$П = P(l-y) = P(l-\sqrt{l^2-x^2}).$$

$$Q_1 = -\frac{\partial П}{\partial x} = -\frac{Px}{\sqrt{l^2-x^2}}.$$

В примере *в*) на перемещении из промежуточного положения, определяемого координатой S, в нулевое S=0, работа силы тяжести положительна на вертикальном перемещении, равном $l-y$.

$$П = P(l-y) = P(l-l\cos\varphi) = Pl(1-\cos\frac{S}{l}).$$

$$Q_1 = -\frac{\partial П}{\partial S} = -P\sin\frac{S}{l}.$$

В примере *г*) на перемещении из промежуточного положения, определяемого координатой φ, в нулевое φ=0, работа силы тяжести положительна на вертикальном перемещении равном l - y.

$$П = P(l-y) = P(l-l\cos\varphi),$$

$$Q_1 = -\frac{\partial П}{\partial \varphi} = -Pl\sin\varphi.$$

Как видно из этих примеров от выбора обобщенной координаты зависит вид выражений для обобщенной силы. При удачном выборе выражения менее громоздки, что является существенным в сложных задачах.

Пример 1.2. Двойной математический маятник (рис. 1.9) состоит из двух невесомых стержней длиной l_1 и l_2, на концах которых укреплены материальные точки M_1 и M_2 веса $P_1=m_1g$ и $P_2=m_2g$, соответственно. Первый стержень может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси 0, а второй - вокруг горизонтальной оси, связанной с первой точкой. Ввести обобщенные координаты и вычислить обобщенные силы.

При такой конструкции вся система движется в вертикальной плоскости, которую мы примем за плоскость xy (ось z направим перпендикулярно плоскости чертежа). Положение двойного математического маятника вполне определяется двумя углами φ_1 и φ_2 отклонения стержней от вертикали. Система имеет две степени свободы. Это можно показать следующим образом. В плоскости xy положение точек M_1и M_2 определяется четырьмя

координатами x_1, y_1, x_2, y_2.

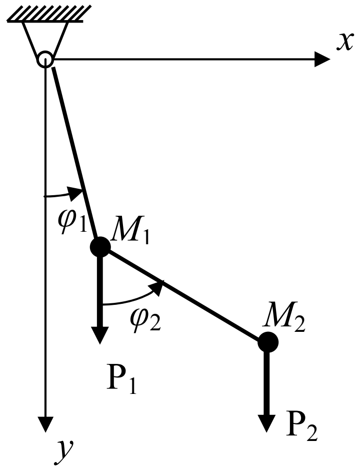


Рис.1.9

На положения точек M_1 и M_2 наложены ограничения - связи в виде невесомых стержней длинами l_1 и l_2.
Уравнений связей два:

1) $$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2,$$

2) $$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2,$$

следовательно, независимых координат точек две. Что удобнее принять за независимые обобщенные координаты не x_1 и x_2, или x_1 и y_1, или y_2 и y_1, или x_2 и y_2, или φ_1 и φ_2 мы уже знаем из опыта решения предыдущего примера.

Вычислим обобщенные силы Q_1 и Q_2 ,соответствующие обобщенным координатам $\boldsymbol{q_1 = \varphi_1}$ и $\boldsymbol{q_2 = \varphi_2}$ тремя способами.

__**Первый способ.**__ Воспользуемся формулой (1.26). Активными силами является силы веса грузов P_1 и P_2. Т.к. связь осуществляется с помощью невесомых стержней, их реакции, как реакции идеальных связей, не учитываем. Обобщенные силы в соответствии с выражением (1.26) определятся:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{2}(F_{ix}\frac{\partial x}{\partial q_1} + F_{iy}\frac{\partial y}{\partial q_1} + F_{iz}\frac{\partial z}{\partial q_1}) \ ,$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{2}(F_{ix}\frac{\partial x}{\partial q_2} + F_{iy}\frac{\partial y}{\partial q_2} + F_{iz}\frac{\partial z}{\partial q_2}).$$

Перепишем в развернутом виде (заменим q_1 u q_2 на φ_1 u φ_2)

$$Q_1 = P_{1x}\frac{\partial x}{\partial \varphi_1} + P_{1y}\frac{\partial y}{\partial \varphi_1} + P_{1z}\frac{\partial z}{\partial \varphi_1} + P_{2x}\frac{\partial x}{\partial \varphi_1} + P_{2y}\frac{\partial y}{\partial \varphi_1} + P_{2z}\frac{\partial z}{\partial \varphi_1} \ , \qquad (1.32)$$

$$Q_2 = P_{1x}\frac{\partial x}{\partial \varphi_2} + P_{1y}\frac{\partial y}{\partial \varphi_2} + P_{1z}\frac{\partial z}{\partial \varphi_2} + P_{2x}\frac{\partial x}{\partial \varphi_2} + P_{2y}\frac{\partial y}{\partial \varphi_2} + P_{2z}\frac{\partial z}{\partial \varphi_2}.$$

При принятом обозначении координатных осей

$$P_{1x} = 0, \quad P_{1y} = m_1 g, \quad P_{1z} = 0,$$
$$P_{2x} = 0, \quad P_{2y} = m_2 g, \quad P_{2z} = 0, \qquad (1.32, а)$$

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1, \quad y_1 = l_1 \cos\varphi_1, \quad z_1 = 0.$$
$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, \quad y_{21} = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2, \quad z_2 = 0.$$

Подставляя значения проекции сил и координат точек их приложения в (1.32), получим:

$$Q_1 = -m_1 g l_1 sin\varphi_1 - m_2 g l_1 sin\varphi_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 sin\varphi_1$$

$$Q_2 = -m_2 g l_2 sin\varphi_2\ . \qquad (1.33)$$

Второй способ. Составим выражение возможных работ и определим обобщенную силу как коэффициент при вариации соответствующей обобщенной координаты в выражении возможной работы.

Вычислим сначала обобщенную силу Q_2. Сообщим системе такое возможное перемещение, при котором угол φ_1 остается неизменным, а угол φ_2 получает приращение $\delta\varphi_2$ (положительное в соответствии с принятой системой отчета) (рис. 1.10). При таком перемещении работу будет производить только одна сила P_2 (точка приложения силы P_1 осталась в прежнем положении).

Возможную работу δA_2 силы P_2 на возможном перемещении $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 \neq 0$ вычислим как работу силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Момент силы P_2 относительно оси вращения второго стержня равен $M = -P_2 l_2 \sin\varphi_2 = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2$,

поэтому $\delta A_2 = M(P_2)\delta\varphi_2 = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2 \cdot \delta\varphi_2$.

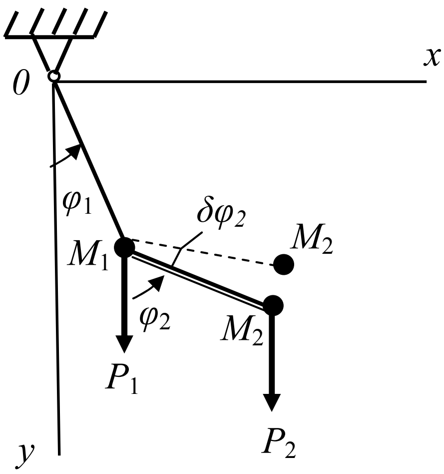


Рис. 1.10

Коэффициент при вариации $\delta\varphi_2$ равен обобщенной силе Q_2

$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2 .$$

Перейдем теперь к вычислению обобщенной силы Q_1. Для этого сообщим системе возможное перемещение, при котором угол φ_2 остается неизменным, а

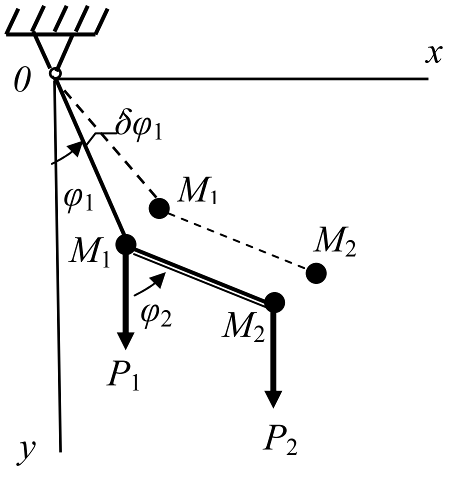


Рис.1.11

угол φ_1 получает приращение $\delta\varphi_1$ (рис. 1.11).

Работу силы P_1 вычислим по тому же правилу: момент силы P_1 относительно оси вращения первого стержня равен $M(P_1) = -m_1 g l_1 sin\varphi_1$. Следовательно, работа этой силы на возможном

перемещении $\delta\varphi_1 \neq 0, \quad \delta\varphi_2 = 0$ равна

$$\delta A_1(P_1) = M(P_1)\delta\varphi_1 = -m_1 g l_1 \sin\varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 .$$

Перемещения точек M_1 и M_2 одинаковы т.к. при измененном угле φ_2 второй стержень перемещается поступательно. Поэтому возможная работа силы P_2 будет определяться аналогичным выражением

(нужно заменить m_1 на m_2), т.е. равна $\delta A_1(P_2) = -m_2 g l_1 \sin\varphi_1 \cdot \delta\varphi_1$.

Сумма работ сил P_1 и P_2 на этом возможном перемещении будет иметь вид

$$\delta A_1 = -m_1 g l_1 \sin\varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 - m_2 g l_1 \sin\varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 .$$

Коэффициент при вариации $\delta\varphi_1$ равен обобщенной силе Q_1,

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1 .$$

<u>Третий способ.</u> Все действующие на систему активные силы P_1 и P_2 потенциальные. Воспользуемся формулами (1.22) для вычисления обобщенных сил $Q_1 = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \quad Q_2 = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}$.

Найдем потенциальную энергию системы, вычислив ее как работу сил P_1 и P_2 при перемещении системы из данного промежуточного положения $\varphi_1 \neq 0, \quad \varphi_2 \neq 0$ в нулевое $\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$ т.е. в вертикальное (рис. 1.12).

Работа силы тяжести P_1 на перемещении Δ_1 равна $A(P_1) = m_1 g l_1 (1 - \cos\varphi_1)$.

Работа силы тяжести P_2 на вертикальном перемещении $\Delta_1 + \Delta_2$ положительна и равна $A(P_2) = m_2 g \left[l_1 (1 - \cos\varphi_1) + l_2 (1 - \cos\varphi_2) \right]$.

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = m_1 g l_1 (1-\cos\varphi_1) + m_2 g\left[l_1(1-\cos\varphi_1) + l_2(1-\cos\varphi_2)\right] =$$
$$(m_1 + m_2) g l_1 (1-\cos\varphi_1) + m_2 g l_2 (1-\cos\varphi_2),$$

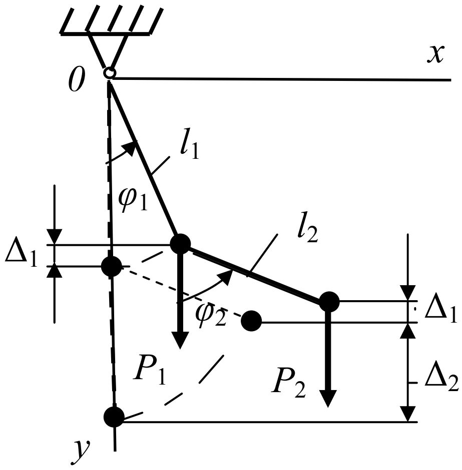


Рис.1.12

Обобщенные силы

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1,$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2.$$

Пример 1.3. Груз весом P подвешен на вертикальной пружине AB, жесткость которой C (рис. 1.13). Ввести обобщенные координаты и вычислить обобщенные силы.

Груз совершает поступательное прямолинейное движение. Его положение будет полностью определено одной координатой x - система имеет одну степень свободы.

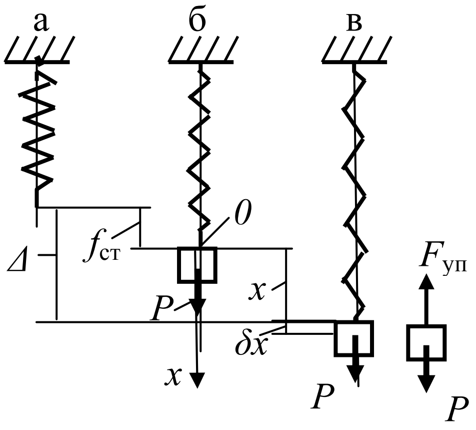


Рис. 1.13

Покажем, что в таких системах удобнее располагать начало отсчета смещений (начало 0 оси x) в положении статического равновесия груза (рис. 1.13, б).

Вычислим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате $q_1 = x$, начало которой расположим в положении статического равновесия груза, двумя способами.

Первый способ. Составим выражение возможной работы действующих на груз сил. В промежуточном произвольном положении, определяемом координатой x (рис. 1.13, в), на груз действуют сила упругости $F_{УП}$ и сила тяжести P.

На возможном перемещении δx (при принятом положительном направлении оси x вниз) сумма возможных работ сил равна

$$\delta A = (-F_{УП} + P)\delta x,$$

где $F_{УП} = C\Delta = C(f_{СТ} + x)$.

Из условия статического равновесия груза (рис.1.13, б) имеем $Cf_{СТ} = P$,

тогда $$\delta A = (-Cf_{СТ} - Cx + P)\delta x = -Cx\delta x.$$

Обобщенная сила, как коэффициент при вариации обобщенной координаты в выражении возможной работы, равна

$$Q_1 = -Cx. \tag{1.34}$$

<u>Второй способ.</u> Все действующие на груз силы F и P потенциальны. Воспользуемся формулой (1.22)

$$Q_1 = -\frac{\partial П}{\partial q_1} = -\frac{\partial П}{\partial x}.$$

Необходимо правильно составить выражение потенциальной энергии системы. Найдем ее как работу сил $F_{уп}$ и P на перемещении системы из данного промежуточного положения ($x \neq 0$) в нулевое ($x=0$).

При перемещении вверх в нулевое положение работа постоянной силы тяжести отрицательна и равна - Px, работу сил упругости вычислим как интеграл

$$\int_x^0 - F_{УП}dx = \int_x^0 - C(f_{СТ} + x)dx = -Cf_{СТ}x\Big|_x^0 - C\frac{x^2}{2}\Big|_x^0 = Cf_{СТ}x + C\frac{x^2}{2}.$$

(знак минус под интегралом учитывает направление силы упругости противоположное принятому положительному направлению оси x, т.е. $F_{уп}$ и dx направлены в противоположные стороны). Потенциальная анергия системы

$$П = -Px + Cf_{СТ}x + \frac{Cx^2}{2} = \frac{Cx^2}{2}, \tag{1.35}$$

т.к. по условию статического равновесия груза $P = Cf_{СТ}$.

Обобщенная сила $$Q_1 = -\frac{\partial П}{\partial q_1} = -\frac{\partial П}{\partial x} = -Cx.$$

Расположим теперь начало O оси x_1 в положении, соответствующем нижнему концу B недеформированной пружины (рис. 1.14).

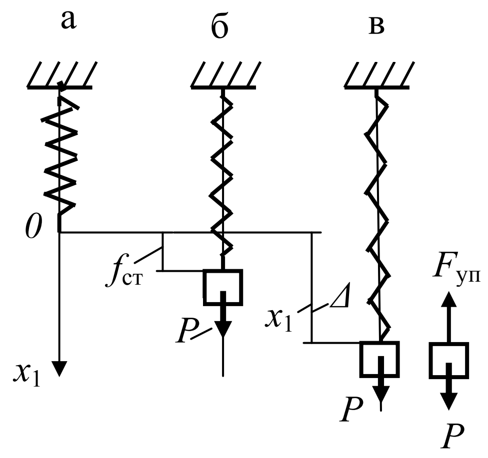


Рис. 1.14

Получим выражение обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате $q_1 = x_1$, также двумя способами.

Первый способ. Составим выражение возможной работы действующих на систему сил. В промежуточном положении груза, определяемой координатой x_1, на груз действует сила упругости $F_{УП} = Cx_1$ и сила тяжести P.

На возможном перемещении δx сумма работ сил равна

$$\delta A = (-F_{УП} + P)\delta x_1 = (-Cx_1 + P)\delta x_1 .$$

Обобщенная сила в данном случае равна

$$Q_1 = -Cx_1 + P . \qquad (1.36)$$

Второй способ. Составим выражение потенциальной энергии системы как запас работы сил $F_{УП}$ и P на перемещении из данного положения ($x_1 \neq 0$) в нулевое ($x_1 = 0$). Работа силы тяжести отрицательна и равна $-Px_1$. Работа силы упругости определится выражением:

$$A(F_{УП}) = \int_{x_1}^{0} -F_{УП}dx_1 = \int_{x_1}^{0} -Cx_1dx_1 = -\frac{Cx_1^2}{2}\bigg|_{x_1}^{0} = \frac{Cx_1^2}{2} .$$

Потенциальная энергия системы

$$П = -Px_1 + \frac{Cx_1^2}{2} . \qquad (1.37)$$

Обобщенная сила $$Q_1 = -\frac{\partial П}{\partial x_1} = P - Cx_1 .$$

Сопоставляя полученные выражения для обобщенных сил (1.34) и (1.36), видим, что проще получается выражение для Q_1 в случае выбора начала отсчета обобщенной координаты в положении статического равновесия груза. При этом получается простое выражение для потенциальной энергии системы (1.35), как половина произведения жесткости пружины на квадрат ее деформации (сравни с выражением (1.37)).

Пример 1.4. Выбрать обобщенные координаты и составить выражения обобщенных сил для механической системы, представленной на рис. 1.15.

Заданы веса (массы) грузов $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$, $P_3 = m_3 g$ и жесткости пружин C_1, C_2, C_3.

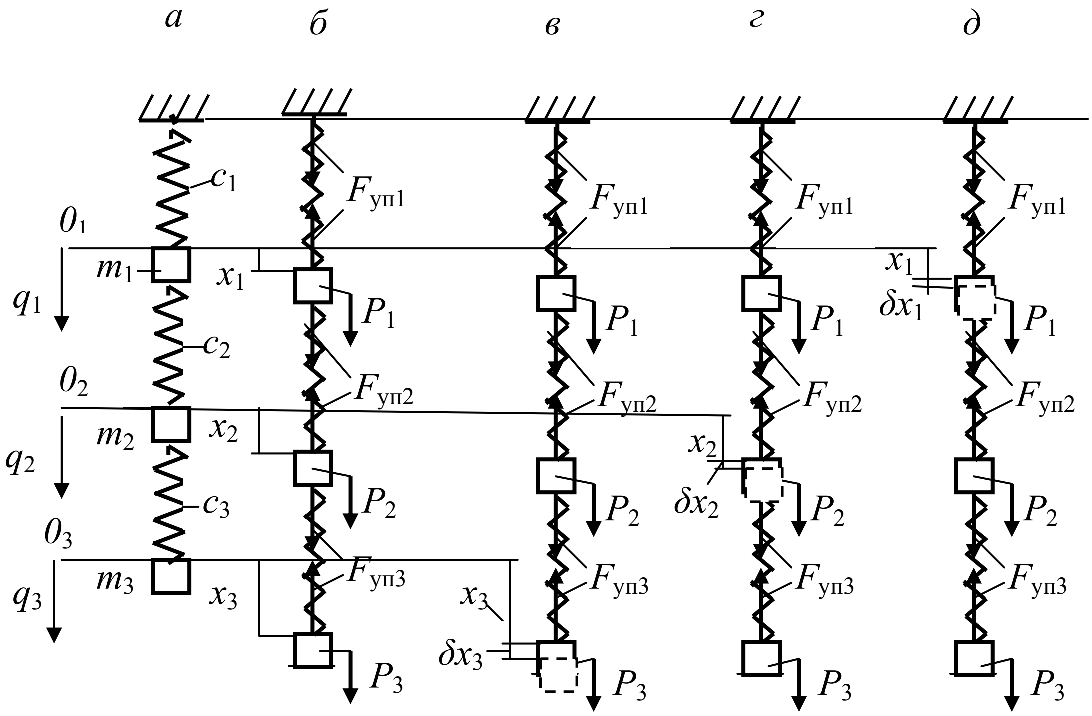


Рис. 1.15

Система состоит из трех тел, которые можно рассматривать как материальные точки, т.к. они совершают поступательное движение. Система имеет три степени свободы, поскольку каждое из трех тел можно смещать, оставляя неподвижными два других тела.

Имея опыт предыдущего примера, будем располагать начала обобщенных координат q_1, q_2, q_3 в положениях статического равновесия грузов (рис. 1.15, а). Действующие на систему силы потенциальные. Вычислим обобщенные силы двумя способами.

Для вывода уравнения движения и обобщенных сил необходимо рассматривать некоторое промежуточное положение системы $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$ (рис. 1.15, б)

Первый способ. Составим выражения возможных работ всех действующих на систему сил и определим обобщенные силы, как коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражениях возможных работ.

В положения статического равновесия системы (рис. 1.15, *а*) каждая из пружин натянута статической нагрузкой сил тяжести ниже расположенных грузов

$$F_{уп1}^{CT} = P_3 + P_2 + P_1, \qquad F_{уп2}^{CT} = P_3 + P_2\ , \qquad F_{уп3}^{CT} = P_3. \tag{1.38}$$

В промежуточном положении системы (рис. 1,15, *б*), силы упругости пружин равны

$$F_{уп1} = F_{уп1}^{CT} + C_1 x_1\ , \quad F_{уп2} = F_{уп2}^{CT} + C_2(x_2 - x_1)\ ,\ F_{уп3} = F_{уп3}^{CT} + C_3(x_3 - x_2)\ . \tag{1.39}$$

Вычислим сначала обобщенную силу Q_3. Сообщим системе такое возможное перемещение (рис. 1.15, *в*), при котором грузы 1 и 2 остаются неподвижными, а третий смешается на δx_3 (положительное направление смещения груза вниз, как принято для координаты x_3). На таком перемещении работу будут совершать только силы P_3 и $F_{уп3}$. Возможная работа δA_3 на возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = 0$, $\delta x_3 \neq 0$ равна

$$\delta A_3 = P_3 \cdot \delta x_3 - F_{уп3} \cdot \delta x_3 = P_3 \cdot \delta x_3 - \left[P_3 + C_3(x_3 - x_2)\right]\delta x_3 = -C_3(x_3 - x_2)\delta x_3 .$$

Коэффициент при вариации δx_3 равен обобщенной силы Q_3, т.е.

$$Q_3 = -C_3(x_3 - x_2)\,. \tag{1.40}$$

Вычислим обобщенную силу Q_2. Сообщим системе такое возможное перемещение, при котором координата x_2 получит приращение δx_2 , а остальные координаты не изменятся (рис. 1.15, *г*). На таком перемещении работу будут производить силы $F_{уп2}$, $F_{уп3}$ и P_2. Возможная работа δA_2 на возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$, $\delta x_3 = 0$ будет равна $\delta A_2 = (P_2 + F_{уп3} - F_{уп2})\delta x_2$. Подставляя сюда значения сил упругости из (1.39) и (1,38), получим:

$$\delta A_2 = \left[P_2 + P_3 + C_3(x_3 - x_2) - P_3 - P_2 - C_2(x_2 - x_1)\right]\delta x_2 .$$

После сокращений в квадратных скобках, получаем, что

$$Q_2 = -C_2(x_2 - x_1) + C_3(x_3 - x_2)\,. \tag{1.41}$$

Для вычисления обобщенной силы Q_1 сообщим системе возможное перемещение $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$, $\delta x_3 = 0$ (рис. 1.15, *д*).

Возможная работа δA_1 будет определяться выражением

$$\delta A_1 = (P_1 + F_{уп2} - F_{уп1}) \cdot \delta x_1\ ,$$

с учетом соотношений (1.38, 1.39), получаем

$$\delta A_1 = \left[P_1 + P_2 + P_3 + C_2(x_2 - x_1) - P_3 - P_2 - P_1 - C_1 x_1\right]\delta x_1 .$$

Обобщенная сила Q_1 есть коэффициент при вариации обобщенной координаты δx_1 в выражении возможной работы

$$Q_1 = -C_1 x_1 + C_2(x_2 - x_1) . \qquad (1.42)$$

<u>Второй способ</u>. Составим выражение потенциальной энергии системы. Помним опыт составления аналогичного выражения в примере 3, в случае выбора начала отсчета обобщенных координат в положении статического равновесия грузов, силы тяжести грузов не входят в выражение потенциальной энергии и последняя определяется как половина произведения жесткости пружин на квадрат их деформации

$$\Pi = \frac{1}{2}C_1 x_1^2 + \frac{1}{2}C_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}C_3(x_3 - x_2)^2 . \qquad (1.43)$$

Обобщенные силы получим с помощью формул (1.22),

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}, \quad Q_3 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} .$$

$$Q_1 = -C_1 x_1 + C_2(x_2 - x_1) ,$$

$$Q_1 = -C_2(x_2 - x_1) + C_3(x_3 - x_2) ,$$

$$Q_3 = -C_3(x_3 - x_2) .$$

Как видим, второй способ значительно компактнее, на практике именно он используется для получения выражений обобщенных сил для подобных систем.

<u>Пример 1.5.</u>

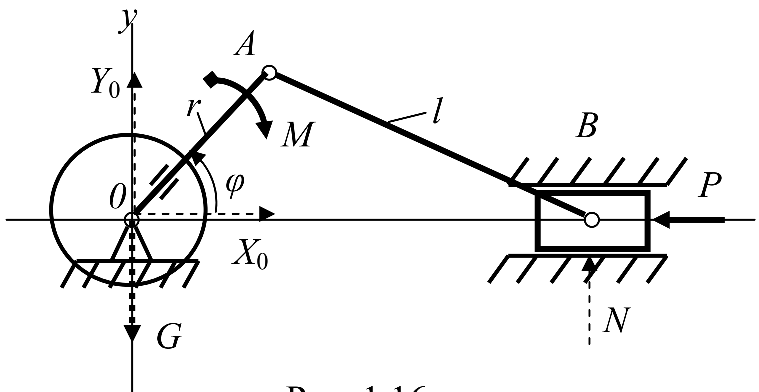


Рис. 1.16

Для кривошипно-шатунного механизма, представленного на рис. 1.16 выбрать обобщенные координаты и получить выражение соответствующих обобщенных сил. Заданы: длины кривошипа *OA*=*r* и шатуна *AB*=*l*, действующая на ползун сила *P*, момент полезного сопротивления *M*, приложенный к кривошипу. На одной оси *0* с кривошипом закреплен маховик, вес которого *G*. Собственным весом кривошипа и шатуна пренебречь.

Определим вначале число степеней свободы механизма и выберем обобщенные координаты.

Все звенья механизма расположены в одной плоскости (x0*y*) и соединены тремя шарнирами *0*, *A*, *B*, положение которых в плоскости определяется шестью координатами $x_0, y_0, x_A, y_A, x_B, y_B$. На механизм наложены геометрические связи, уравнения которых

$$1)\ x_0 = 0;\quad 2)\ y_0 = 0;\quad 3)\ x_A^2 + y_A^2 = r^2;\quad 4)\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2;\quad 5)\ y_B = 0. \tag{1.44}$$

На шесть координат наложено пять связей, следовательно, одна координата независима, а координаты остальных шарниров могут быть выражены через принятую независимую (обобщенную) координату с помощью уравнений связей (1.44). Система имеет одну степень свободы.

Например, примем за обобщенную координату $q=x_A$, тогда положение механизма определиться через эту координату так

$$1)\ x_0 = 0,\quad 2)\ y_0 = 0,\quad 3)\ x_A = q,\quad 4)\ y_A = \sqrt{r^2 - x_A^2},\quad 5)\ y_B = 0.$$
$$6)\ x_B = x_A + \sqrt{l^2 - y_A^2} = x_A + \sqrt{l^2 - r^2 + x_A^2}. \tag{1.45}$$

В качестве обобщенной координаты можно принять также $y_A=q$, или $x_B = q$, или $\varphi=q$.

Остановимся на последнем варианте, примем $\boldsymbol{q_1=\varphi}$, угол, определяющий положение кривошипа и всего кривошипно-шатунного механизма (положительное направление отсчета угла показано на рис. 1.16). Положение шарниров *O*, *A*, *B* определится через обобщенную координату $q_1=\varphi$ следующими уравнениями связей:

$$1)x_0 = 0,\quad 2)y_0 = 0,\quad 3)x_A = r\cdot\cos\varphi,\quad 4)y_A = r\cdot\sin\varphi,\quad 5)y_B = 0,$$

$$6)x_B = r\cdot\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}\ . \tag{1.46}$$

Получим выражение обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате $q_1=\varphi$.

Для механизма в этом случае применяется способ составления выражения работы всех действующих сил на возможном перемещении. Из всех действующих на механизм активных сил в реакций связей работу совершают только сила P и момент M, т.к. реакция опоры 0 (X_0, Y_0) и активная сила тяжести маховика G приложены к неподвижной точке 0, реакция направлявших ползуна N нормальна к направлению его перемещения и работа их равна нулю. Выражение возможной работы имеет вид

$$\delta A = -(M\delta\varphi + P\delta x_B). \tag{1.47}$$

Знак (-) здесь необходимо поставить потому, что и момент M и сила P направлены противоположно приращениям координат $\delta\varphi$ и δx_B. Далее нужно все возможные перемещения в (1.47) выразить с помощью уравнений связей (1.46) через вариацию $\delta\varphi$ обобщенной координаты. С учетом (1.46) получаем

$$\delta x_B = \frac{dx_B}{d\varphi}\delta\varphi = \left[-r\sin\varphi - \frac{2r^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right]\delta\varphi = -\left[r\sin\varphi + \frac{r^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right]\delta\phi.$$

Подставляем выражение для δx_B в (1.47),

$$\delta A = \left[-M + \Pr\sin\varphi + \frac{\Pr^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right]\delta\phi.$$

Следовательно, обобщенная сила Q_1, соответствующая обобщенной координате $q_1=\varphi$, равна в данном примере

$$Q_1 = -M + \Pr\sin\varphi + \frac{\Pr^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}. \tag{1.48}$$

Если определять обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате $\boldsymbol{q=x_A}$, то в выражении (1.47) необходимо выразить $\delta\varphi$ и δx_B через δx_A, используя уравнения связей (1.45) ,

$$\delta x_B = \frac{dx_B}{dx_A}\delta x_A = \left[1 + \frac{x_A}{\sqrt{l^2 - r^2 + x_A^2}}\right]\delta x_A,$$

$$\delta\varphi = -\frac{\delta x_A}{r\sin\varphi} = -\frac{\delta x_A}{\sqrt{r^2 - x_A^2}}.$$

Получение последнего соотношения объяснено на рис. 1.17 (показано приращение координаты x_A и соответствующее ему смещение звена $0A$).

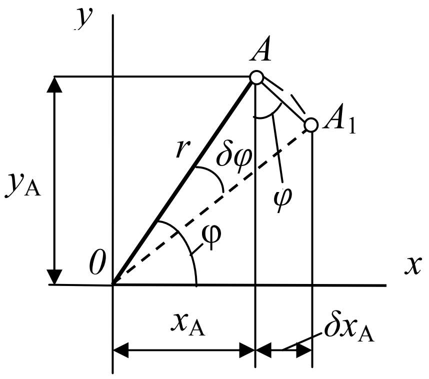


Рис. 1.17

$$A\breve{A}_1 = r\delta\varphi = A\overline{A}_1,$$

$$\delta x_A = AA_1 \sin\varphi = -r\delta\varphi \sin\varphi,$$

$$\sin\varphi = \frac{y_A}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - x_A{}^2}}{r};$$

$$\delta x_A = -r \cdot \delta\varphi \frac{\sqrt{r^2 - x_A{}^2}}{r}, \quad \text{откуда}$$

$$\delta\varphi = -\frac{\delta x_A}{\sqrt{r^2 - x_A^2}}.$$

Подставляя выражения для δx_B и $\delta\varphi$ в (1.47), получим

$$\delta A = \frac{M\delta x_A}{\sqrt{r^2 - x_A^2}} - P\left[1 + \frac{x_A}{\sqrt{l^2 - r^2 + x_A^2}}\right]\delta x_A.$$

Следовательно, обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q=x_A, определяется так

$$Q_{(q=x_A)} = \frac{M}{\sqrt{r^2 - x_A^2}} - P\left[1 + \frac{x_A}{\sqrt{l^2 - r^2 + x_A^2}}\right]. \tag{1.49}$$

2. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАЖА II РОДА ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Вывод уравнений Лагранжа II рода

Рассмотрим два наиболее простых вывода уравнений. В основе первого лежит II закон Ньютона, а второго - общее уравнение динамики. Этим мы лишний раз хотим подчеркнуть, что в основе всей динамики лежат законы Ньютона и все положения и теоремы получают на базе всех этих законов. В учебниках по теоретической механике можно встретить различные довольно громоздкие выводы уравнения Лагранжа II рода. Приводимые здесь - наиболее простые.

<u>Первый вывод (из II закона Ньютона).</u> Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек и имеющую S степеней свободы. Положение каждой точки определяется относительно некоторого центра радиус-вектором $\vec{r}_i (i = 1,2,3,...,n)$. Конфигурация системы определяется обобщенными координатами $q_j (j = 1,2,3,...,S)$.

В соответствии с аксиомой освобождаемости от связей и II законом Ньютона для точек механической системы можем записать уравнения движения в виде

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad , \quad (i = 1,2,3,...,n), \tag{2.1}$$

где $\vec{F}_i$ - равнодействующая активных сил, действующих i-ю точку;

$\vec{R}_i$ - равнодействующая реакция связей.

Каждое равенство этой системы умножим скалярно на $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ (j=1,2,3,…,S, i=1,2,3,…,n) и просуммируем:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad . \tag{2.2}$$

Таких равенств будет S, (j=1,2,3,…,S).

Введем обозначения: $Q_j^{(a)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ - обобщенная активная сила;

$Q_j^{(R)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ - обобщенная реакция связей, (j=1,2,3,…,S).

Рассмотрим скалярное произведение

$$m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = m_i (\vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) \ . \qquad (2.3)$$

Здесь можно произвести следующие преобразования:

$$\vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d\vec{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) - \vec{V}_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) - \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j} =$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}) - \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\frac{\vec{V}_i^2}{2}) - \frac{\partial}{\partial q_j} (\frac{\vec{V}_i^2}{2}). \qquad (2.4)$$

В этом выражении частная производная от $\vec{r}_i$ по q_j есть предел отношения приращения $\Delta \vec{r}_i$ к приращению Δq_j в котором в соответствии с известным правилом Лопиталя можно сделать подстановку $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_j}$, что и учтено при получении (2.4). Подставляя (2.4) в (2.3) и суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} \ . \qquad (2.5)$$

Здесь $\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} = T$ - кинетическая энергия механической системы.

Равенство (2.5) приминает вид $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$,

то есть выражения (2.2) после преобразований можем написать в виде:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{(a)} + Q_j^{(R)} \ , \qquad (j=1,2,3,\ldots,S). \qquad (2.6)$$

Полученные уравнения называются уравнениями Лагранжа II рода. Это система S обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат.

Для системы с идеальными связями обобщенные реакции связей $Q_j^{(R)} = 0$.

Докажем это. По определению идеальных связей - идеальными называются связи, сумма работ реакций которых на любом возможном перемещении $\delta \vec{r}_i$ равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \, \delta \vec{r}_i = 0 . \tag{2.7}$$

Выразим вариацию радиуса-вектора i-ой точки через принятые S обобщенных координат q_j

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j . \tag{2.8}$$

С учетом (2.8) равенство (2.7) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0,$$

или, меняя порядок суммирования:

$$\sum_{j=1}^{S} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0, \tag{2.9}$$

Выражение в круглых скобках в (2.9) есть обобщенная реакция связей $Q_j^{(R)}$. Переписываем:

$$\sum_{j=1}^{S} Q_j^{(R)} \delta q_j = 0. \tag{2.10}$$

Но так как вариации обобщенных координат $\delta q_j \neq 0$, и независимы, то равенство (2.10) справедливо только при $Q_j^{(R)} = 0$, что и требовалось доказать.

Получаем окончательно, что для системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа II рода) имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{(a)}, \quad (j = 1,2,3,...,S), \tag{2.11}$$

т.е. движение голономной механической системы с S степенями свободы описывается системой S дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно обобщенных координат.

Реакции неидеальных связей, например, силы трения, мы должны отнести к числу активных сил.

Второй вывод уравнений Лагранжа II рода из общего уравнения динамики.

Опять же рассматривается голономная механическая система, состоящая из n материальных точек и имеющая S степеней свободы. Положение каждой точки- определяется относительно некоторого центра радиусом-вектором $\vec{r}_i\ (i = 1,2,3,\dots,n)$. Выбираем S обобщенных координат q_i (j=1,2,3,…,S). Общее уравнение динамики требует, чтобы при любом движении механической системы с идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех активных сил и всех условно приложенных сил инерции на всяком возможном перемещении системы равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\delta\vec{r}_i = 0, \tag{2.12}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_i^{(a)} + \sum_{i=1}^{n}\delta A_i^{(ин)} = 0. \tag{2.13}$$

Сумма элементарных работ активных сил в обобщенных координатах (см. выше параграф "Обобщенные силы”) выражается так

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_i^{(a)} = Q_1^{(a)}\delta q_1 + Q_2^{(a)}\delta q_2 + ... + Q_S^{(a)}\delta q_S\ , \tag{2.14}$$

где

$$Q_j^{(a)} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \qquad (j = 1,2,3,...,S). \tag{2.15}$$

Сумму элементарных работ сил инерции на возможном перемещении системы можно представить аналогично (2.14) в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_i^{(ин)} = Q_1^{(ин)}\delta q_1 + Q_2^{(ин)}\delta q_2 + ... + Q_S^{(ин)}\delta q_S\ , \tag{2.16}$$

где обобщенные силы инерции выражаются формулами:

$$Q_j^{(ин)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(ин)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \qquad (j = 1,2,3,...,S). \qquad (2.17)$$

Подставляя (2.14) и (2.16) в (2.13), получим запись общего уравнения динамики в обобщенных координатах в виде

$$(Q_1^{(a)} + Q_1^{(ин)})\delta q_1 + (Q_2^{(a)} + Q_2^{(ин)})\delta q_2 + ... + (Q_S^{(a)} + Q_S^{(ин)})\delta q_S = 0. \qquad (2.18)$$

Так как вариации $\delta q_j \neq 0$ и между собою независимы, то равенство (2.18) справедливо только в случае

$$\left.\begin{array}{l} Q_1^{(a)} + Q_1^{(ин)} = 0, \\ Q_2^{(a)} + Q_2^{(ин)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_S^{(a)} + Q_S^{(ин)} = 0. \end{array}\right\} . \qquad (2.19)$$

Получена система S уравнений движения механической системы. Этими уравнениями можно непосредственно пользоваться при решении задач динамики.

Преобразовав в уравнениях (2.19) выражения для обобщенных сил инерции, выразив их через кинетическую энергию системы, получим уравнения Лагранжа II рода.

$$Q_j^{(ин)} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{V}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} . \qquad (2.20)$$

Преобразуем правую часть этого выражения так, чтобы она содержала скорости точек $\overline{V}_i$ системы. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) = \frac{d\vec{V}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{V}_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}),$$

откуда $\frac{d\vec{V}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) - \vec{V}_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) - \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j},$ следовательно

$$-Q_i^{(ин)} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}(\vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}(\vec{V}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}) - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\frac{V_i^2}{2}) - \sum_{i=1}^{n} m \frac{\partial}{\partial q_j} (\frac{V_i^2}{2}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\frac{m_i V_i^2}{2}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j} (\frac{m V_i^2}{2}) =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{m V_i^2}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \qquad (2.21)$$

Здесь в этом выводе преобразование выражения сообщенной силы инерции (2.20) к виду (2.21) осуществлено аналогично преобразованиям выражения (2.3) к виду (2.5) в предыдущем выводе уравнений Лагранжа из II закона Ньютона.

Подставляя полученные выражения сил инерции в систему уравнение (2.19), получаем систему S дифференциальных уравнения движения механической системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{(a)}, \quad (j = 1,2,3,...,S). \qquad (2.22)$$

Важное преимущество этих уравнений состоит в том, что их вид и число не зависят ни от количества тел (или точек), входящих в рассматриваемую механическую систему, ни от того, как эти тела движутся. Число уравнений равно числу степеней свободы. Кроме того, при идеальных связях, в правые части уравнений входят обобщенные активные силы и, следовательно, эти уравнения позволяют заранее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Основная задача динамики механической системы в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_S$ и начальные условия $\dot{q}_1(0),\ \dot{q}_2(0),\ ...,\ \dot{q}_S(0);\ \ q_1(0),\ q_2(0),\ ..., q_S(0)$, найти закон движения механической системы.

2.2. Уравнения Лагранжа II рода при действии на систему потенциальных сил

Если все действующие на механическую систему силы потенциальны, то обобщенные силы равны взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии по соответствующим обобщенным координатам $Q_j = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}$. Следовательно, уравнения Лагранжа можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1,2,3,...,S).$$

Потенциальная энергия П системы от времени t не зависит, от скорости движения $(\dot{q}_j)$ также не зависит, поэтому уравнения Лагранжа можем переписать так:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-\Pi)\right]-\frac{\partial T}{\partial q_j}(T-\Pi)=0\,.$$

В механике вводят функцию $L=T\text{-}\Pi$, которую называют функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом. Уравнения Лагранжа II рода в случае действия на систему потенциальных сил приникает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,3,...,S). \tag{2.23}$$

Из полученного результата следует, что состояние механической системы, на которую действуют потенциальные силы, определяется заданием одной только функции Лагранжа. Зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения механической системы.

2.3. Примеры составления уравнений движения механических систем с помощью уравнений Лагранжа

Будем составлять уравнения движения механических систем, для которых уже выбраны обобщенные координаты, и получены выражения обобщённых сил в примерах 1-5.

Предполагается, что читатель знаком с вычислением кинетической энергии материальных точек и твердых тел. при составлении уравнений движения необходимо выразить кинетическую энергию системы через принятые обобщенные координаты и обобщенные скорости.

Пример 2.1. Длина маятника (рис. 1.8) равна l, его масса m. Составить уравнение его движения, приняв в качестве обобщенной координаты а) $\boldsymbol{q_1=y}$.

Поскольку рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы, то составляется одно уравнение движения в форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=Q. \tag{2.24}$$

Выражение для обобщенной силы, соответствующей принятой обобщенной координате, $Q=P=mg$ (см. (1.28)). Кинетическая энергия маятника

$$T=\frac{mV^2}{2}=\frac{m(V_x^2+V_y^2)}{2}=\frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{2}\,.$$

Проекция скорости на ось x в силу наложенной связи (1.27) равна

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}}\dot{y}\,. \tag{2.25}$$

Подставляя (2.25) в выражение кинетической энергии, получим

$$T = \frac{m\dot{y}^2}{2}\left[1 + \frac{y^2}{l^2 - y^2}\right]. \tag{2.26}$$

Откуда

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{m\dot{y}^2 y l^2}{(l^2 - y^2)^2}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\left[1 + \frac{y^2}{l^2 - y^2}\right]; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}\left[1 + \frac{y^2}{l^2 - y^2}\right] + m\dot{y}^2\frac{2l^2 y}{(l^2 - y^2)^2}.$$

Подставим полученное выражение в (2.24)

$$m\ddot{y}\left[1 + \frac{y^2}{l^2 - y^2}\right] + m\dot{y}^2\frac{yl^2}{(l^2 - y^2)^2} = mg\,.$$

После сокращения на m получаем уравнение движения маятника в виде

$$\ddot{y}\left[1 + \frac{y^2}{l^2 - y^2}\right] + \dot{y}^2\frac{yl^2}{(l^2 - y^2)^2} = g\,. \tag{2.27}$$

б) $\boldsymbol{q_1 = x}$.

Уравнение движения составляем в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q\,. \tag{2.28}$$

Выражение для обобщенной силы было получено в виде (1.29) $Q = -\frac{mgx}{\sqrt{l^2 - x^2}}$.

Получим выражение кинетической энергии $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, где в силу наложенной связи (1.27) $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}\dot{x}$,

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}\left[1 + \frac{x^2}{l^2 - x^2}\right]. \tag{2.29}$$

Откуда

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{x}^2 \frac{xl^2}{(l^2-x^2)^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}[1+\frac{x^2}{l^2-x^2}],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}\left[1+\frac{x^2}{l^2-x^2}\right] + m\dot{x}^2\frac{2xl^2}{(l^2-x^2)^2}.$$

Подставим полученное выражение в (2.28)

$$m\ddot{x}\left[1+\frac{x^2}{l^2-x^2}\right] + \frac{m\dot{x}^2 xl^2}{(l^2-x^2)^2} = -\frac{mgx}{\sqrt{l^2-x^2}}.$$

После сокращения на m получаем уравнение движения маятника в виде:

$$\ddot{x}\left[1+\frac{x^2}{l^2-x^2}\right] + \frac{\dot{x}^2 xl^2}{(l^2-x^2)^2} + \frac{gx}{\sqrt{l^2-x^2}} = 0. \qquad (2.30)$$

в) ***q=S***.

Составляем уравнение движения в виде $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q$.

Выражение обобщенной силы было получено ранее - (1.30): $Q = -P\sin\frac{S}{l}$.

Кинетическая энергия маятника $T = \frac{mV^2}{2}$, но $V = \dot{S}$, поэтому $T = \frac{m\dot{S}^2}{2}$.

Откуда

$$\frac{dT}{dS} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = m\dot{S}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right) = m\ddot{S}.$$

Получаем уравнение движения маятника в виде $m\ddot{S} = -mg\sin\frac{S}{l}$,

или

$$\ddot{S} + g\sin\frac{S}{l} = 0. \qquad (2.31)$$

Для малых колебаний маятника можно принять $\sin\frac{S}{l} \approx \frac{S}{l}$, тогда уравнение малых колебаний имеет вид

$$\ddot{S} + \frac{g}{l}S = 0\,. \qquad (2.32)$$

г) $\boldsymbol{q=\varphi}$.

Уравнение движения составляем в виде $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q$.

Выражения для обобщенной силы было уже получено (см.(1.31)) $Q=-Pl\sin\varphi$.

Кинетическая энергия материальной точки: $T=\frac{mV^2}{2}$, где $V=\dot{\varphi}l$,

$T=\frac{m\dot{\varphi}^2l^2}{2}$.

Откуда $\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m\dot{\varphi}l^2$, $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}})=m\ddot{\varphi}l^2$.

Получаем уравнение движения маятника $ml^2\ddot{\varphi}=-Pl\sin\varphi$, или, учитывая, что $P=mg$,

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0. \tag{2.33}$$

Для малых колебаний маятника полагают $\sin\varphi\approx\varphi$ и уравнение (2.33) принимает вид

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{2.34}$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения движения маятника в виде (2.27), (2.30), (2.31) и (2.33) нужно сделать вывод, что выбор обобщенной координаты может быть удачным и неудачным. При удачном выборе обобщенных координат уравнения движения получается проще, следовательно, и решать, или анализировать эти уравнения бывает значительно легче.

Пример 2.2. Составить дифференциальные уравнения движения двойного математического маятника (рис. 1.10). В качестве обобщенных координат при вычислении обобщенных сил были приняты углы φ_1 и φ_2. Уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1})-\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}=Q_1, \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2})-\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=Q_2.$$

Обобщенные силы получены ранее (см. (1. 33)) $Q_1=-(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1$, $Q_2=-m_2\,gl_2\sin\varphi_2$.

Составим выражение кинетической энергии системы

$$T=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2,$$

где V_1 и V_2 - абсолютные скорости точек. Если воспользоваться выражениями $V_1=\dot{\varphi}_1 l_1$ и $V_2=\dot{\varphi}_2 l_2$, будет допущена ошибка, т.к. если V_1 - абсолютная скорость первой массы, то $V_2=\dot{\varphi}_2 l_2$ - относительная скорость второй массы относительно первой движущиеся массы. Воспользуемся координатным способом определения скоростей $V_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$, $V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$. Координаты точек M_1 и M_2 при принятом обозначений осей и выборе обобщенных координат определяются через принятые обобщенные координаты выражениями (1.32, а)

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \,, \quad x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \,,$$

$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1 \,, \quad y_2 = l_1 \cos\phi\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \,.$$

Дифференцируя их по времени, получим:

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 \,, \quad \dot{x}_2 = l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 \,,$$

$$\dot{y}_1 = -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 \,, \quad \dot{y}_2 = -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 \,.$$

Тогда $$V_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 \,,$$

$$V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2l_1\dot{\varphi}_1 l_2\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 \,.$$

Кинетическая энергия системы примет вид:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \;.$$

Составим сначала уравнение Лагранжа по координате φ_1

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \,,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2 \;,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\right] .$$

Получаем первое уравнение движения:

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\right] + m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 =$$
$$= -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1 \,,$$

после сокращения на l_1

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\right]+m_2l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2=$$
$$=-(m_1+m_2)g\sin\varphi_1.$$

Приводя подобные члены, получим окончательно

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_2+m_2l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2+(m_1+m_2)g\sin\varphi_1=0. \quad (2.35)$$

Составим второе уравнение движения

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi_2}=m_2l_1l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}=m_2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1+m_2l_2^2\dot{\varphi}_2\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}\right)=m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2+m_2l_1l_2\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\right].$$

Подставляем в уравнение Лагранжа полученные значения

$$m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2+m_2l_1l_2\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\right]-$$
$$-m_2l_1l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2=-m_2gl_2\sin\varphi_2.$$

После приведения подобных членов уравнение приникает вид

$$l_2\ddot{\varphi}_2+l_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_1-l_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1^2+g\sin\varphi_2=0\,. \quad (2.36)$$

Колебания двойного математического маятника описываются системой двух нелинейных дифференциальных уравнений (2.35) и (2.36), интегрирование которых связано с большими трудностями. Обычно ограничиваются интегрированием уравнения малых колебаний, которые получают, используя упрощенные выражения обобщенных сил Q_1 и Q_2 и кинетической энергии T, полагая в них: $\sin\varphi_1\approx\varphi_1$, $\sin\varphi_2\approx\varphi_2$, $\cos\varphi_1\approx\cos\varphi_2\approx1$,

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\approx1\cdot1+\varphi_1\varphi_2\approx1\,,$$

$$\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2\approx\varphi_1\cdot1-1\cdot\varphi_2\approx\varphi_1-\varphi_2\approx0\,.$$

Уравнения малых колебаний двойного математического маятника имеют вид:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2+(m_1+m_2)g\varphi_1=0,\\ l_1\ddot{\varphi}_1+l_2\ddot{\varphi}_2+g\varphi_2=0.\end{cases} \quad (2.37)$$

Это уже система двух линейных уравнений 2-го порядка, решить которые значительно легче, чем систему нелинейных уравнений (2.35) и (2.36).

Пример 2.3. Вывести уравнения колебания груза на пружине, жесткость которой C (рис. 1.14).

Выражение кинетической энергии $T=\dfrac{mV^2}{2}=\dfrac{m\dot{x}^2}{2}$,

откуда $\dfrac{\partial T}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x},\quad \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}})=m\ddot{x}$.

Обобщенная сила равна $Q=-Cx$ (см.(1.34)). Подставляя полученные значения в уравнение Лагранжа $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}})-\dfrac{\partial T}{\partial x}=Q$, получим $m\ddot{x}=-Cx$, или

$$\ddot{x}+\frac{C}{m}x=0. \tag{2.38}$$

Пример 2.4. Составить дифференциальные уравнения движения трех массовой системы m_1, m_2, m_3 на пружинах, жесткости которых равны C_1, C_2, C_3 (рис. 1.15).

Система имеет три степени свободы. Обобщенные координаты x_1, x_2, x_3, определяющие положения масс в любой момент времени, были выбраны на рис. 1.16. Начала координат расположены в положениях статического равновесия грузов. Составляем три уравнения

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1})-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_1,\qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2})-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_2,\qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3})-\frac{\partial T}{\partial x_3}=Q_3. \tag{2.39}$$

Кинетическая энергия механической системы равна $T=\dfrac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\dfrac{m_2\dot{x}_2^2}{2}+\dfrac{m_3\dot{x}_3^2}{2}$.

Выражения обобщенных сил, соответствующие принятым обобщенным координатам были получены ранее (см. (1.40), (1.41), (1.42)) $Q_1=-C_1x_1+C_2(x_2-x_1)$, $Q_2=-C_2(x_2-x_1)+C_3(x_3-x_2)$, $Q_3=-C_3(x_3-x_2)$.

Производные от кинетической энергии по обобщенным координатам и скоростям равны: $\dfrac{\partial T}{\partial x_1}=0$, $\dfrac{\partial T}{\partial x_2}=0$, $\dfrac{\partial T}{\partial x_3}=0$, $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1$, $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=m_2\dot{x}_2$,

$\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}=m_3\dot{x}_3$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=m_1\ddot{x}_1\ , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=m_1\ddot{x}_2 , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right)=m_1\ddot{x}_3 .$$

Подставляя эти значения в уравнения Лагранжа (2.39), получаем систему трех дифференциальных уравнении движения механической системы с тремя степенями свободы

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1=-C_1x_1+C_2(x_2-x_1), \\ m_2\ddot{x}_2=-C_2(x_2-x_1)+C_3(x_3-x_2), \\ m_3\ddot{x}_3=-C_3(x_3-x_2), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \ddot{x}_1+\dfrac{C_1+C_2}{m_1}x_1-\dfrac{C_2}{m_1}x_2=0, \\ \ddot{x}_2+\dfrac{C_2+C_3}{m_2}x_2-\dfrac{C_2}{m_2}x_1-\dfrac{C_3}{m_2}x_3=0, \\ \ddot{x}_3+\dfrac{C_3}{m_3}x_3-\dfrac{C_3}{m_3}x_2=0. \end{cases} \tag{2.40}$$

Это система 3-х линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, описывавших свободные колебания трех грузов на пружинах. Движение рассматриваемой системы происходит под действием только потенциальных сил.

Составим уравнения движения этой механической системы в форме (2.23) с использованием функции Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_3}=0. \tag{2.41}$$

В данном конкретном случае, используя выражения для T, (см. выше) и Π см. (1.43), имеем $L=\frac{1}{2}\left[m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2+m_3\dot{x}_3^2-C_1x_1^2-C_2(x_2-x_1)^2-C_3(x_3-x_2)^2\right]$,

откуда $\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=-C_1x_1+C_2(x_2-x_1),\quad \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=-C_2(x_2-x_1)+C_3(x_3-x_2),$

$\dfrac{\partial L}{\partial x_3}=-C_3(x_3-x_2),$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=m_2\dot{x}_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}=m_3\dot{x}_3.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) = m_3\ddot{x}_3.$$

Подставляя необходимые значения в уравнения (2.41), получаем уравнения движения трех массовой механической системы

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + C_1x_1 - C_2(x_2 - x_1) = 0, \\ m_2\ddot{x}_2 + C_2(x_2 - x_1) - C_3(x_3 - x_2) = 0, \\ m_3\ddot{x}_3 + C_3(x_3 - x_2) = 0, \end{cases}$$

или после преобразования в виде (2. 40).

Как видно из этого примера, для составления уравнений движения механической системы необходимо уметь составлять выражения ее кинетической и потенциальной энергии.

Пример 2.5. Составить дифференциальное уравнение движения кривошипно-шатунного механизма (рис. 1.16). Длина кривошипа *r,* длина шатуна *l*.

Задача максимально упрощена для того, чтобы понять суть составления уравнений движения механизмов. Здесь мы не будем учитывать массы ползуна, кривошипа и шатуна. Если бы мы их учитывали, то их значения вошли бы в выражение кинетической энергии, и в случае расположения механизма вертикальной плоскости, силы тяжести кривошипа и шатуна вошли бы в выражение обобщенной силы. Учитываем только массу махового колеса, жестко скрепленного с кривошипом. Масса колеса *m*, радиус инерции его относительно оси вращения *i*. Кривошипно-шатунный механизм движется под действием силы *P*, приложенной к ползуну, и момента полезного сопротивления *M*, приложенного к кривошипу (к колесу). Приблизительно такую схему кривошипно-шатунного механизма имеют паровоз, строгальный станок и другие механизмы.

В качестве обобщенной координаты принимаем угол поворота кривошипа $q=\varphi$. Механизм имеет одну степень свободы. Составляем уравнение движения механизма с помощью уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \qquad (2.42)$$

Выражение обобщенной силы было получено ранее (см. 1.48)

$$Q_1 = -M + \Pr\sin\varphi + \frac{\Pr^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}.$$

Кинетическая энергия всего механизма равна в нашем примере кинетической энергии махового колеса $T = \frac{I_0\dot{\varphi}^2}{2}$, где $I_0 = mi^2$.

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_0\dot{\varphi}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = I_0\ddot{\varphi}.$$

Подставляем необходимые данные и уравнение (2.42)

$$mi^2\ddot{\varphi} = -M + P\cdot r\sin\varphi + \frac{P\cdot r^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

или

$$\ddot{\varphi} - \frac{P\cdot r}{mi^2}\sin\varphi - \frac{P\cdot r^2\sin 2\varphi}{2mi^2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} = -\frac{M}{mi^2}. \qquad (2.43)$$

Мы получили нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение кривошипно-шатунного механизма.

Движение большинства механизмов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, интегрировать которые весьма сложно. В основном их решение можно осуществить численно с помощью программных продуктов Mathcad или Mathlab. Проинтегрировав уравнение (2.43), мы получим $\varphi = f(t)$ и с помощью уравнений связи (1.46) найдем закон движения узлов механизма

$$x_A = r\cos\varphi, \qquad y_A = r\sin\varphi, \qquad x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}.$$

Эти данные позволяют определять кинетические характеристики движения кривошипа и шатуна и рассчитать усилия в элементах механизма, что являются основным при конструировании механизмов и машин.

Пример 2.6.

Для механизма, показанного на рис. 2.1, состоящего из трех тел, получить выражения обобщенных сил для двух вариантов приложения внешнего тормозного момента ($M_т$): вариант 1 - $M_т$ приложен к телу 2 и удерживает механизм от движения; вариант 2 - $M_т$ приложен к телу 3 и также удерживает механизм от движения. Составить условия равновесия механической системы в обобщенных координатах для этих вариантов, вычислить и сравнить требуемые для равновесия системы значения $M_т$ при следующих исходных данных: m_1=100 кг, m_2=30 кг, m_3= 40 кг, R_2=R_3=1м, r_2=0,6 м, r_3=0,4 м. В качестве обобщенной координаты принять вертикальное перемещение груза 1 – $\boldsymbol{q=X_1}$.

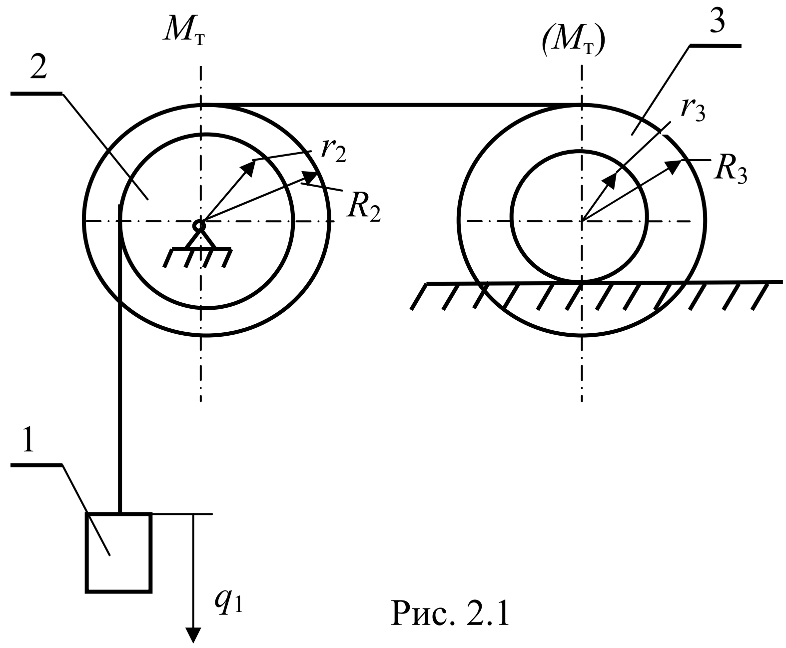


Рис. 2.1

Решение

Напоминаем, что обобщенной силой Q_1, соответствующей принятой обобщенной координате q_1, называется коэффициент при вариации обобщенной координаты в выражении возможной работы всех внешних сил $\delta A = Q_1\, \delta q_1$.

Приложим к механической системе все внешние силы (напоминаем, что главный вектор и главный момент внутренних сил всегда равны нулю), дадим системе возможное перемещение (рис. 2.2) и составим выражение возможной

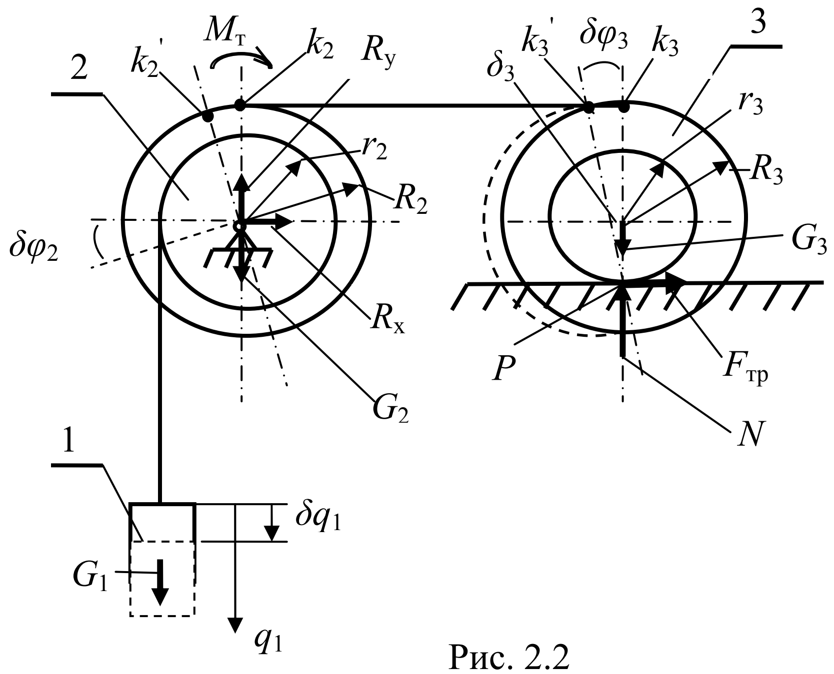


Рис. 2.2

работы внешних сил. Перечислим внешние силы: на все тела действует гравитационное поле Земли – силы G_1, G_2, G_3; силы реакций связей: R_x , R_y – горизонтальная и вертикальная составляющие реакции подшипника неподвижной оси тела 2 (считаем, что трение в подшипнике пренебрежимо мало), к телу 3 в точке контакта с неподвижной поверхностью, по которой оно перекатывается без скольжения, приложены N и $F_{тр}$ – нормальная и тангенциальная составляющие реакции шероховатой поверхности. В первом варианте задачи к телу 2 приложен внешний тормозной момент $M_т$, удерживающий механическую систему от движения.

Опишем возможное перемещение рассматриваемой механической системы. Напомним определение аналитической механики - возможным называется бесконечно малое перемещение, допускаемое связями в данный момент времени. При бесконечно малом приращении принятой обобщенной координаты δq_1 тело 1 сместится вниз на δq_1, тело 2 повернется вокруг неподвижного подшипника на бесконечно малый угол $\delta\varphi_2$ против хода стрелки часов, тело 3 совершит бесконечно малое перекатывание по неподвижной шероховатой поверхности, т.е. совершит плоскопараллельное движение, при этом его центр сместится параллельно неподвижной опорной поверхности горизонтально влево на δ_3 и тело повернется на угол $\delta\varphi_3$ тоже против хода часовой стрелки. Напомним, что плоскопараллельное движение тела может быть представлено сложением простейших движений – поступательного вместе с некоторой точкой, называемой полюсом, и вращательного вокруг полюса, при этом вращательная часть его движения не зависит от выбора полюса. И, если можно указать точку в плоскости, движущейся вместе с телом, скорость которой равна 0 в данный момент времени (ее называют мгновенным центром скоростей), то плоскопараллельное движение тела удобно рассматривать как мгновенное вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. При качении тела 3 по неподвижной поверхности без скольжения точка их контакта P неподвижна и является мгновенным центром скоростей тела 3. Ее будем использовать для определения $\delta\varphi_3$.

Составим выражение возможной работы всех активных сил (рис. 2.2). При перемещении тела 1 вниз на δq_1 его сила тяжести G_1 совершит положительную возможную работу $\delta A(G_1)=G_1\delta q_1$. При повороте тела 2 на угол $\delta\varphi_2$ против хода стрелки часов работу (отрицательную) совершит только тормозной момент $\delta A(M_т)=-M_т\delta\varphi_2$, остальные силы G_2, R_x , R_y работ не совершают, т.к. точка их приложения остается неподвижной при повороте тела 2. При плоскопараллельном бесконечно малом перемещении тела 3, которое мы рассматриваем как бесконечно малый поворот на угол $\delta\varphi_3$ вокруг мгновенного центра скоростей P, внешние силы G_3 , N, $F_{тр}$ тоже не совершают работ: перемещение центра тяжести тела 3 на δ_3 в этом примере перпендикулярно G_3, поэтому $\delta A(G_3)= G_3\cdot\delta_3\cdot\cos 90^o=0$, а силы N и $F_{тр}$ приложены в неподвижной в данное мгновение точке P.

Итак, возможная работа всех активных сил в рассматриваемом примере равна $\delta A = G_1\delta q_1-M_т\delta\varphi_2$.

Осталось выразить $\delta\varphi_2$ через δq_1. Поскольку нить, соединяющая тела 1 и 2, нерастяжимая, то перемещения ее нижнего и верхнего концов одинаковы –

$$\delta q_1 = \delta\varphi_2 \cdot r_2.$$

Теперь

$$\delta A = G_1\delta q_1 - M_т\delta\varphi_2 = (G_1 - M_т/r_2)\delta q_1.$$

Получили, что $$Q_1 = G_1 - M_т/r_2 \qquad (2.44)$$

Аналитические условия равновесия механической системы в обобщенных координатах $$Q_1 = 0,$$

откуда получаем

$$M_T = G_1 r_2 = m_1 g r_2 = 100 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}6 = 589\,\text{Нм}.$$

Напомним еще одно определение аналитической механики: « Связи, реакции которых не совершают работы на возможных перемещениях механической системы, называются идеальными». В рассматриваемом примере это шарнир без трения тела 2 и шероховатая поверхность, по которой перекатывается без скольжения тело 3. Их реакции не входят в выражения обобщенных сил и, следовательно, не учитываются в аналитических условиях равновесия и в уравнениях движения механической системы.

Определим теперь величину тормозного момента, приложенного к телу 3 для удержания механической системы от движения. На рис. 2.2 этот момент не показан, но его легко представить: нет тормозного момента $M_Т$, приложенного к телу 2, но есть тормозной момент $M^1_Т$, приложенный к телу 3 и направленный по ходу часовой стрелки. Используя описанные выше рассуждения о реакциях идеальных связей, возможную работу всех активных сил получим в виде

$$\delta A = G_1 \delta q_1 - M_T^1 \delta\varphi_3 .$$

Установим зависимость между δq_1 и $\delta\varphi_3$. Используем условие, что нити (или ремни, или цепи), соединяющие тела 1 и 2, 2 и 3 нерастяжимые, поэтому перемещения их концов с соответствующими точками тел одинаковы. Для тел 1 и 2 мы уже записывали это условие в виде

$$\delta q_1 = \delta\varphi_2 \cdot r_2 ,$$

для тел 2 и 3 можем написать, что перемещения точек k_2 и k_3 (рис. 2.2) одинаковы

$$\delta\varphi_2 R_2 = \delta\varphi_3 (R_3 + r_3),$$

здесь R_3+r_3 – расстояние от точки k_3 до мгновенного центра скоростей колеса 3 (мгновенный радиус точки k_3). Получаем

$$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_2 \frac{R_2}{R_3 + r_3} = \delta q_q \frac{R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} .$$

Выражение возможной работы приобретает вид

$$\delta A = G_1 \delta q_1 - M_T^1 \frac{R_2}{r_2(R_3 + r_3)} \delta q_1 .$$

Обобщенная сила в этом варианте приложения тормозного момента равна

$$Q_1 = G_1 - M_T^1 \frac{R_2}{r_2(R_3 + r_3)} . \qquad (2.45)$$

Из условия равенства нулю обобщенной силы в положении равновесия механической системы находим значение тормозного момента, который необходимо приложить к телу 3 для удержания механизма от движения.

$$M_T^1 = G_1 \frac{r_2(R_3 + r_3)}{R_2} = m_1 g \frac{r_2(R_3 + r_3)}{R_2} = 100 \cdot 9{,}81 \frac{0{,}6(1 + 0{,}4)}{1} = 824\,\text{Нм}.$$

Сравнивая значения тормозных моментов M_T и M_T^1 приходим к выводу, что целесообразнее прикладывать тормозной момент к телу 2. Как видим, массы и веса тел 2 и 3 не влияют на аналитические условия равновесия рассматриваемой механической системы. Аналитических условий равновесия ровно столько, сколько степеней свободы имеет механическая система и их число не зависит от числа тел в механизме.

<u>Пример 2.7</u>.

Поставим теперь следующую задачу. Составить с помощью уравнений Лагранжа II рода дифференциальное уравнение движения механической системы с одной степенью свободы (рис. 2.1) при следующих исходных данных: массы тел m_1 =100 кг, m_2=30 кг, m_3= 40 кг, радиусы колес R_2=R_3=1м, r_2=0,6 м, r_3=0,4 м. Колеса 2 и 3 состоят из двух частей одинаковой толщины h_2 и h_3, соответственно, (рис. 2.3), радиусы инерции колес i_2=0,35 м, i_3=0,3 м.

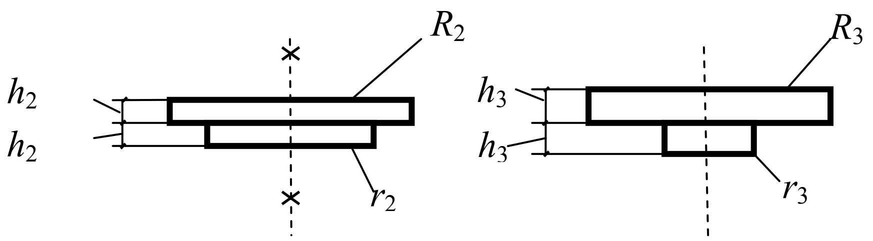


Рис. 2.3

Сопротивлением качения тела 3 пренебречь. Система начинает движение из состояния покоя. Тормозной момент, приложенный к телу 2, считать в 10 раз меньше того значения, при котором механическая система оставалась заторможенной (неподвижной), т.е. $M_T = \frac{589}{10} = 58{,}9$ Нм. Определить скорость тела 1 в тот момент времени, когда пройденный им путь S_1 =2 м.

Решение

Будем использовать уравнение Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 . \qquad (2.46)$$

В качестве обобщенной координаты принимаем как и ранее перемещение тела 1 из его начального положения $q_1 = X_1$. Соответствующее выражение для обобщенной силы было получено выше (2.44), в котором нужно будет учесть, что приняли значение тормозного момента M_T = 58,9 Нм.

Составим выражение кинетической энергии механической системы. Напомним, что кинетическая энергия это определенно положительная величина, равная сумме кинетических энергий тел, входящих в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3 , \qquad (2.47)$$

для системы с одной степенью свободы все T_i должны быть выражены через инерционные параметры тел и принятую обобщенную скорость.

Тело 1 совершает поступательное движение со скоростью $V_1 = \dot{q}_1$, поэтому

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} .$$

Тело 2 совершает вращательное движение с угловой скоростью $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{\dot{q}_1}{r_2}$,

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 i_2^2 \dot{q}_1^2}{2 r_2^2} .$$

В последней формуле учтено, что момент инерции тела сложной формы относительно оси вращения определяется как произведение его массы на квадрат его радиуса инерции $I = mi^2$. Напомним, что радиусом инерции тела относительно оси называется то расстояние от оси, на котором следовало бы расположить точечную массу, равную массе тела, чтобы момент инерции точечной масс относительно оси был равен моменту инерции тела.

На этом этапе решения задачи вычислим значения моментов инерции тел 2 и 3. Эти тела похожи, но не подобны, они имеют разные отношения линейных размеров $\frac{R_2}{r_2} \neq \frac{R_3}{r_3}$. $I_2 = m_2 i_2^2 = 30 \cdot 0{,}35^2 = 3{,}675$ кгм^2,

$$I_3 = m_3 i_3^2 = 40 \cdot 0{,}3^2 = 3{,}6 \text{ кгм}^2.$$

Только подобные тела имеют одинаковые радиусы инерции i. Это обстоятельство используют конструкторы для облегчения расчетов при вычислении моментов инерции подобных тел, примерами которых могут служить роторы электрических генераторов и двигателей разных мощностей, но подобные по конструкции, блоки зубчатых колес в редукторах разных мощностей, подшипники одной конструкции, но разных типоразмеров, роторы вентиляторов и т.п.

Тело 3 совершает плоскопараллельное движение, его движение можно рассматривать как поступательное вместе с центром масс и вращательное вокруг центра масс или как вращательное в данное мгновение вокруг мгновенной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей, обозначенный на рис 2.2 буквой *P*- точка контакта колеса с неподвижным основанием. В первом варианте можем написать

$$T_3 = \frac{m_3 V_{c3}^2}{2} + \frac{I_{c3}\omega_3^2}{2},$$

где ω_3 –угловая скорость тела 3,

V_{c3} – линейная скорость центра масс (центра тяжести) колеса 3,

I_{c3} – момент инерции колеса 3 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Выражение для ω_3 получим, воспользовавшись выражением для $\delta\varphi_3$, полученным выше, учитывая, что соотношения между возможными перемещениями и скоростями соответствующих точек механизма одинаковы. В выражении

$$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_2 \frac{R_2}{R_3 + r_3} = \delta q_1 \frac{R_2}{r_2(R_3 + r_3)}$$

меняем $\delta\varphi_3$ на ω_3 и δq_1 на $V_1 = \dot{q}_1$

$$\omega_3 = \dot{q}_1 \frac{R_2}{r_2(R_3 + r_3)}.$$

Теперь $V_{c3} = \omega_3 r_3 = \dot{q}_1 \frac{r_3 R_2}{r_2(R_3 + r_3)}$, $I_{c3} = m_3 i_3^2$. Подставляем полученные выражения в общую формулу для T_3.

$$T_3 = \frac{m_3 \dot{q}_1^2 r_3^2 R_2^2}{2r_2^2 (R_3 + r_3)^2} + \frac{m_3 i_3^2 \dot{q}_1^2 R_2^2}{2r_2^2 (R_3 + r_3)^2} = \frac{m_3 \dot{q}_1^2 R_2^2}{2r_2^2 (R_3 + r_3)^2} (r_3^2 + i_3^2).$$

Получим теперь выражение для T_3, рассматривая плоскопараллельное движение колеса 3 как вращение в данное мгновение с угловой скоростью ω_3 вокруг мгновенной оси, проходящей через мгновенній центр скоростей P (рис.2.2), тогда

$$T_3 = \frac{I_{3P} \omega_3^2}{2},$$

где I_{3P} - момент инерции колеса 3 относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P.

По теореме Гюйгенса** $I_{3P} = I_{3C} + m_3 (PC)^2 = m_3 i_3^2 + m_3 r_3^2 = m_3 (i_3^2 + r_3^2)$.

Получаем $T_3 = \frac{m_3 (i_3^2 + r_3^2)}{2} \dot{q}_1^2 \frac{R_2^2}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2}$, т.е., естественно, то же самое выражение.

Подставляем полученные выражения для T_1, T_2, T_3 в (2.46)

$$T = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 i_2^2 \dot{q}_1^2}{2r_2^2} + \frac{m_3 \dot{q}_1^2 R_2^2}{2r_2^2 (R_3 + r_3)^2} (r_3^2 + i_3^2) = \frac{m_{ПР} \dot{q}_1^2}{2}, \qquad (2.48)$$

где $m_{ПР} = m_1 + m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + m_3 \frac{R_2^2 (r_3^2 + i_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2}$ называется приведенной массой механизма, она имеет размерность кг в этом примере при линейной обобщенной координате $q_1 = X_1$. Если бы мы выбрали в качестве обобщенной координаты угловое перемещение тела 2, $q_1 = \varphi_2$, то общее для механизма выражение кинетической энергии имело бы вид

$$T = \frac{I_{ПР} \dot{\varphi}_2^2}{2} = \frac{I_{ПР} \dot{q}_1^2}{2},$$

**Гюйгенс Христиан (14.04.1629 – 8.07.1695) голландский физик, механик, математик и астроном. Теорема, о которой идет речь, доказана Г. в связи с изобретением и исследованием сконструированных им первых маятниковых часов. [1].

где $I_{ПР} = m_1 r_2^2 + I_2 + m_3 \dfrac{R_2^2 R_3^2}{(R_3 + r_3)^2} + I_{C3} \dfrac{R_2^2}{(R_3 + r_3)^2}$ называется приведенным моментом инерции механизма, он измеряется в кгм^2,

(советуем эту формулу получить самостоятельно, составив выражение кинетической энергии механизма, выразив линейные и угловые скорости тел через производную от обобщенной координаты $q_1 = \varphi_2$). Иногда для более полной информации о принятой обобщенной координате говорят в первом варианте: « Приведенная к массе m_1 масса механизма» и во втором варианте: «Приведенный к телу 2 момент инерции механизма».

Получим теперь дифференциальное уравнение движения механизма с помощью уравнения Лагранжа (2.46) для варианта обобщенной координаты $q_1 = X_1$.

Используем выражение кинетической энергии механизма (2.48) и получаем необходимые выражения производных:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_{ПР}\dot{q}_1; \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}) = m_{ПР}\ddot{q}_1 .$$

Подставляем в уравнение Лагранжа (2.46) полученные выражения для производных от кинетической энергии и выражение для обобщенной силы (2.44)

$$m_{ПР}\ddot{q}_1 = Q_1 = G_1 - \frac{M_T}{r_2} .$$

Приводим уравнение к каноническому виду (коэффициент при высшей производной должен равняться 1)

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{m_{ПР}}(G_1 - \frac{M_T}{r_2}) . \tag{2.49}$$

Правая часть полученного дифференциального уравнения постоянна, судя по смыслу второй производной от линейного перемещения тела 1 $\ddot{q}_1$, это значение ускорения тела 1, поэтому удобно ввести обозначение

$$a_1 = \frac{1}{m_{ПР}}(G_1 - \frac{M_T}{r_2}) . \tag{2.50}$$

Теперь дифференциальное уравнение движения механизма с одной степенью свободы (рис. 2.1) приобретает наиболее простой вид, как уравнение движения материальной точки, при действии на нее постоянных сил

$$\ddot{q}_1 = a_1 . \tag{2.51}$$

Для дифференциального уравнения второго порядка в соответствии с требованиями Коши*** необходимо сформулировать два начальных условия. В данной задаче механизм начинает движение из состояния покоя и из из положения, соответствующего началу отсчета принятой обобщенной координаты, т. е. при t=0

$$1)\ \dot{q}_1(0) = 0, \qquad 2)\ q_1(0) = 0. \qquad (2.52)$$

Интегрируем (2.51) $\dot{q} = at + C_1, \quad q = \dfrac{at^2}{2} + C_1 t + C_2,$

где C_1 и C_2 –постоянные интегрирования.

Используя начальные условия (2.52), получаем: $C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$

Выполняем необходимые вычисления:

$$m_{ПР} = m_1 + m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + m_3 \frac{R_2^2 (r_3^2 + i_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2} = 100 + 30 \frac{0{,}35^2}{0{,}6^2} + 40 \frac{1^2 (0{,}4^2 + 0{,}3^2)}{0{,}6^2 (1 + 0{,}4)^2} = 124{,}38 \text{ кг.}$$

$$a_1 = \frac{1}{m_{ПР}} (G_1 - \frac{M_T}{r_2}) = \frac{1}{124{,}38} (100 \cdot 9{,}81 - \frac{58{,}9}{0{,}6}) = 7{,}1 \text{ м/с}^2$$

Из условия, что необходимо найти скорость тела 1, когда его путь S_1=2м, из уравнения движения $q_1 = X_1 = S_1 = 2 = \dfrac{at^2}{2}$ находим $t = +\sqrt{\dfrac{4}{a}} = \sqrt{\dfrac{4}{7{,}1}}$ =0,75 с, теперь скорость груза 1 в этот момент времени $V_1 = at = 7{,}1 \cdot 0{,}75 = 5{,}33$ м/с.

Список литературы

1. Храмов Ю.А. Физики. Библиографический справочник. К.: «Наук. думка», 1977, -508 с.

*** Огюстен Луи Коши (1789 - 1857) выдающийся французский математик, написал свыше 800 научных работ по различным разделам математики: геометрии, теории чисел, математическому анализу, математической физике, алгебре, диффереренциальному и интегральному исчислению.[1].

Ропай Валерій Андрійович
Науменко Олена Генадіївна
Киба В'ячеслав Якович

ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА II РОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Методичні рекомендації
до розділу дисципліни «Спецрозділи математики, теоретичної кінематики та аналітичної динаміки»

для студентів усіх форм навчання

Видано в авторській редакції.

Підп. до друку 25.09.2013. Формат 30x42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 3,2.
Обл.-вид. арк. 3,2. Тираж 20 пр. Зам. №

Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.