МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

В.А. Рябчій

В.В. Рябчій

Ю.Є. Трегуб

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СПОТВОРЕНЬ

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2014

УДК 528.9 (075.8)
ББК 26.1 я73
Р 98

Рекомендовано редакційною радою ДВНЗ «Національний гірничий університет» як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (протокол № 1 від 14.01.2014)

Рецензенти:

І.В. Калинич, канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри землевпорядкування та кадастру Ужгородського національного університету;

С.Г. Радов, канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри землевпорядкування та кадастру Луганського національного аграрного університету;

М.В. Трегуб, канд. техн. наук, в.о. завідувача кафедри геодезії Державного вищого навчального закладу «Національний гірничий університет.

Рябчій В.А.

Р 98 Основи теорії спотворень : навч. посіб. / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій, Ю.Є. Трегуб; Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2014. – 96 с.

У цьому навчальному посібнику викладено основні положення теорії спотворень, що виникають під час зображення поверхні еліпсоїда і поверхні кулі на площині, а також поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Висвітлено загальні відомості про геоцентричні координати і різні загальноземні еліпсоїди та системи координат у світі. Наведено завдання і приклади виконання лабораторних робіт для студентів. Наприкінці кожного розділу подано контрольні питання для самостійної перевірки засвоєного матеріалу, а в кінці навчального посібника – тести і критерії оцінювання знань студентів.

Посібник призначено для студентів, аспірантів, спеціалістів і викладачів, які займаються дослідженнями математичної основи карт і картографічних проекцій.

УДК 528.9 (075.8)
ББК 26.1 я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчальний посібник призначений для самостійної роботи студентів Державного вищого навчального закладу „Національний гірничий університет” усіх форм підготовки напряму 6.080101 „Геодезія, картографія та землеустрій”, які вивчають дисципліну „Картографія”. Посібник висвітлює найголовніші теоретичні і практичні питання, що відносяться до розділу „Теорія спотворень”.

Навчальний посібник складається з трьох розділів. У першому розділі розглянуті питання зображення поверхні земного еліпсоїда на площині й основні випадки спотворень довжин, площ, кутів і форм, а також приклади виконання розрахунків під час визначення елементів спотворень на дрібномасштабних картах та при побудові еліпса спотворень.

У другому розділі висвітлені питання зображення поверхні земної кулі на площині та наведені загальні відомості про геоцентричні координати і системи координат.

У третьому розділі розкрито питання зображення поверхні земного еліпсоїда на поверхні кулі, а також приклади основних розрахунків при рівнокутному, рівновеликому, рівнопроміжковому по меридіанах і рівнопроміжковому по паралелях зображеннях поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

Наприкінці кожного розділу наведені контрольні питання для самостійної перевірки засвоєного матеріалу студентом, а в кінці навчального посібника – тести і критерії оцінювання знань студентів. Для більш глибокого і широкого вивчення даного матеріалу рекомендується використовувати літературу, зазначену наприкінці навчального посібника.

Авторський колектив сподівається, що пропонований навчальний посібник допоможе студентам глибше осмислити основні теоретичні питання й успішно виконувати практичні завдання.

Автори виражають щиру вдячність колегам за рецензування книги та цінні поради щодо її поліпшення.

ВСТУП

Спочатку наведемо узагальнююче поняття про картографію і деякі особливості цієї дисципліни. ***Картографія*** – наука про карту як особливий спосіб зображення дійсності, її створення і використання або галузь науки техніки та виробництва, що охоплює вивчення, створення і використання картографічних творів. Під картографічними творами розуміють твір у галузі відображення об'єктів природи і суспільства у певній картографічній проекції із застосуванням картографічних умовних знаків (креслення, карта, атлас, ескіз, макет тощо). Предметом картографії є відображення і дослідження об’єктів природи і суспільства, їх розміщення, властивостей, взаємозв’язків і змін у часі і просторі за допомогою карт та інших картографічних творів.

Структура картографії (система наукових і технічних дисциплін) може бути представлена таким чином:

- ***загальна теорія картографії*** – вивчає загальні проблеми, предмет і метод картографії як науки, питання методології створення і використання карт. Основні розробки з теорії картографії виконуються в межах картознавства – загального вчення про картографічні твори;
- ***математична картографія (картознавство)*** – дисципліна, що вивчає математичну основу карт і розробляє теорію картографічних проекцій, методи побудови картографічних сіток, аналіз і розподіл спотворень у них;
- ***цифрова картографія*** – науково-технічна дисципліна, що охоплює теорію та практику створення різноманітних видів цифрових карт і моделей місцевості, автоматизацію картографічних і фотограмметричних робіт;
- ***картометрія*** – дисципліна про вимірювання й обчислення по картах координат, відстаней, довжин, висот, площ та інших топографічних характеристик, тобто усіх кількісних показників;
- ***морфометрія*** – дисципліна, що досліджує кількісні показники форми і структури зображених на картах об’єктів – загальний характер їх обрисів, витягнутість, звивистість, кривизну, розчленування тощо;
- ***історія картографії*** – вивчає історію ідей, подань, методів картографії, розвиток картографічного виробництва, а також старого картографічного добутку;
- ***проектування і складання карт*** – вивчає та розробляє методи і технології лабораторного (камерального) виготовлення й редагування карт. У свою чергу, підрозділяється на кілька великих розділів, присвячених загальним питанням, проектуванню й складанню карт загальногеографічних, природи, соціально-економічних, екологічних тощо;
- ***оформлення карт (картографічний дизайн)*** – вивчає теорію й методи художнього проектування картографічних творів, їх штрихового й кольорового оформлення, у тому числі засобами комп’ютерної графіки;
- ***видання карт*** – технічна дисципліна, що розробляє технологію карт, атласів та іншої картографічної продукції;

- ***використання карт*** – розробляє теорію й методи застосування картографічних творів (карт, атласів, глобусів та ін.) у різних сферах практичної, наукової, культурної, освітньої діяльності. Основу цієї дисципліни становить картографічний метод дослідження – метод використання карт для пізнання зображених на них явищ;
- ***картографічне джерелознавство*** – вивчає та розробляє методи оцінки і систематизації картографічних джерел (карт, знімків, статистичних даних та інших документів), використаних для складання карт;
- ***картографічна інформатика*** – вивчає та розробляє методи збору, зберігання й надання споживачам інформації про картографічні твори й їх джерела. Розділ, що займається систематизацією виданих карт і атласів, складанням покажчиків, списків, оглядів, називається картобібліографією;
- ***картографічна топоніміка*** – вивчає географічні назви, їх смислове значення з погляду правильної передачі на картах. До завдань цієї дисципліни входить нормалізація й стандартизація назв і термінів, які наносяться на карти;
- ***картографічна семіотика*** – розробляє мову карти, теорію й методи побудови систем картографічних знаків, правила їх використання. У рамках картографічної семіотики виділяють три розділи: картографічну синтактику, семантику й прагматику, що вивчають співвідношення знаків між собою, їх зв’язок із відображуваними об’єктами, особливості сприйняття читачами, інформаційну цінність знаків тощо;
- ***економіка й організація картографічного виробництва*** – розділ на стику картографії й економіки, у межах якого вивчаються проблеми оптимальної організації й планування виробництва, використання картографічного устаткування, матеріалів, трудових ресурсів, підвищення продуктивності праці й економічної ефективності тощо.

Оскільки питання, які вивчаються в цьому навчальному посібнику, відносяться до математичної картографії, то розглянемо основні завдання математичної картографії:

- вивчення картографічних проекцій, їх властивостей і взаємозв'язків, а також їх оптимальне застосування;
- удосконалення наявних картографічних проекцій і розробка нових;
- удосконалення методів дослідження нових картографічних проекцій;
- розроблення нових математичних елементів карт;
- вивчення способів і засобів різних вимірювань по картах з урахуванням властивостей картографічних проекцій;
- вивчення і розв’язання задач математичного характеру, що виникають при складанні карт;
- вивчення способів застосування картографічних проекцій у геодезії;
- розроблення теорії і методів автоматизації в математичній картографії.

1. ЗОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ ЕЛІПСОЇДА НА ПЛОЩИНІ

1.1. Основні положення

Оскільки поверхню еліпсоїда неможливо розгорнути на площині без розривів або складок, то зображення на площині виходить спотвореним. Існує чотири види спотворень.

Спотворення довжин на карті (площині) виражаються в тому, що масштаб довжин на ній змінюється при переході від однієї точки до іншої, а також при зміні напрямку в даній точці.

Спотворення площ на карті виражаються в тому, що масштаб площі в різних точках карти різний і порушуються співвідношення площ різних географічних об'єктів.

Спотворення кутів на карті виражаються в тому, що кути між напрямками на карті не дорівнюють відповідним кутам на місцевості.

Спотворення форм на карті виражаються в тому, що фігури об'єктів на карті не подібні фігурам відповідних географічних об'єктів на місцевості.

Під час зображення поверхні еліпсоїда на площині приймають три ***умови безперервності картографічного зображення***:

1. При елементарній (нескінченно малій) зміні координат φ і λ точок поверхні земного еліпсоїда повинні відповідно мінятися на елементарні величини і прямокутні координати x і y точок площини (рис. 1.1).

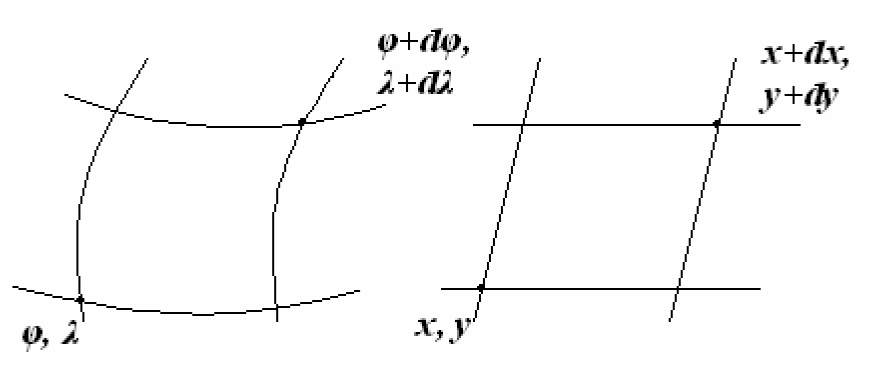


Рис. 1.1. Елементарна область на поверхні еліпсоїда і на площині

2. Елементарний лінійний відрізок на поверхні еліпсоїда повинен бути зображений на площині також елементарним і лінійним (рис. 1.2).

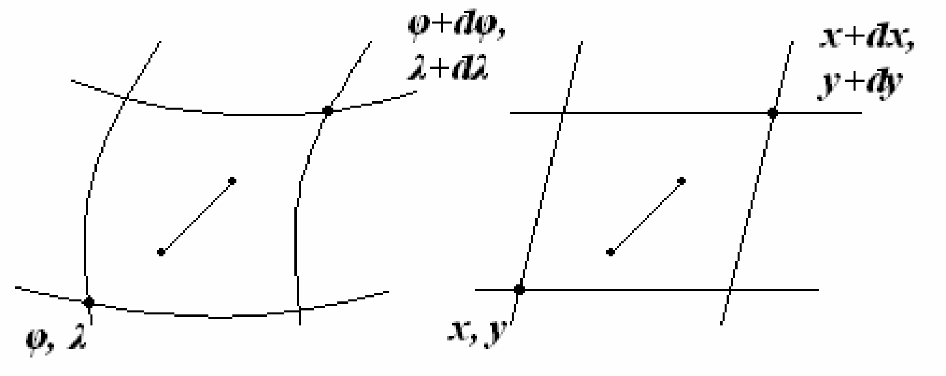


Рис. 1.2. Елементарний відрізок на поверхні еліпсоїда і на площині

3. Два лінійних і паралельних відрізки, взятих у межах елементарної ділянки на поверхні еліпсоїда, на площині повинні бути елементарними і паралельними відрізками (рис. 1.3).

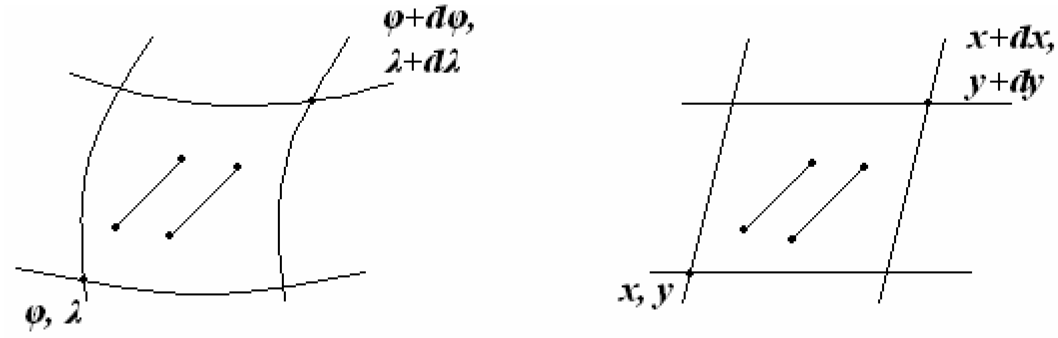


Рис. 1.3. Два паралельних елементарних відрізка на поверхні еліпсоїда і на площині

1.2. Геометричні елементи земного еліпсоїда

Земний еліпсоїд за формою дуже побідний до фігури геоїда і утворюється під час обертання еліпса з невеликим стиском (рис. 1.4 – для наочності стиск збільшено) навколо малої осі (рис. 1.5).

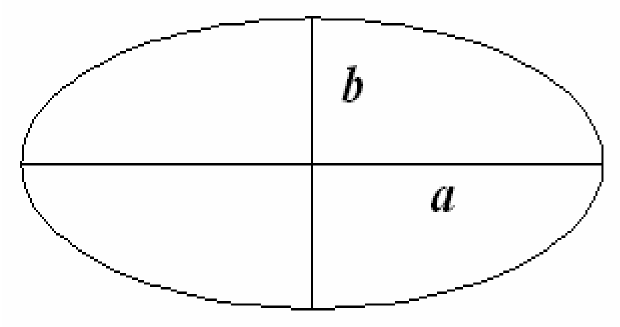


Рис. 1.4. Еліпс з невеликим стиском

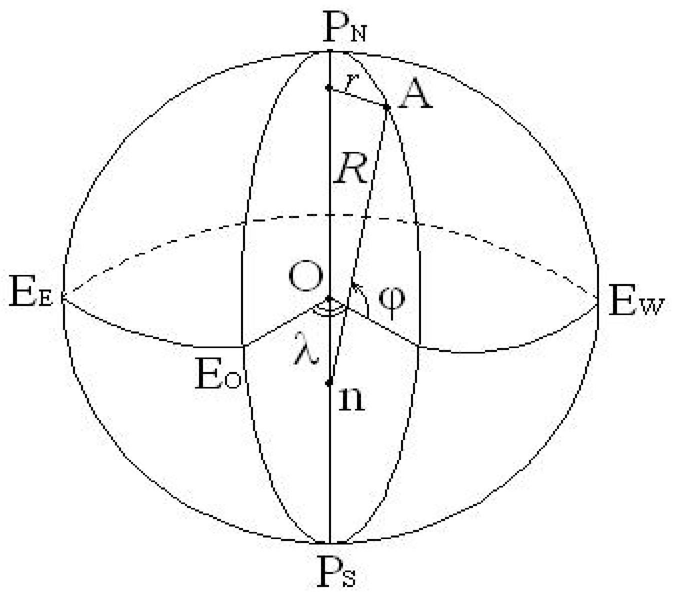


Рис. 1.5. Земний еліпсоїд

Як видно з рис. 1.4 і 1.5, можна виділити такі ***геометричні елементи*** земного еліпсоїда:

- велика піввісь (a);
- мала піввісь (b);
- полярна вісь ($P_N P_S$);
- екваторіальна вісь ($E_W E_E$);
- нормаль An – перпендикуляр до поверхні еліпсоїда в точці A;
- меридіан – переріз площини, що проходить через полярну вісь і поверхні еліпсоїда. Він має вигляд еліпса;
- паралель – переріз площини, що перпендикулярна до полярної вісі (паралельна екваторіальній площині) і поверхні еліпсоїда. Вона має форму кола;
- північний і південний полюси (P_N і P_S) – паралелі з нульовим радіусом кривизни;
- екватор ($E_W E_O E_A E_E$) – найбільша паралель або паралель із найбільшим радіусом кривизни, який дорівнює великій піввісі a;
- сфероїдична широта (φ) – кут у площині меридіану точки A від екватора до нормалі в точці A. Існує дві земні півкулі, які поділяються екватором на північну і південну, в яких сфероїдична широта набуває значень від 0 на екваторі до 90° на полюсах;
- сфероїдична довгота (λ) – двогранний кут між площинами Гринвіцького меридіану і меридіану в точці A. Існує дві земні півкулі, які поділяються Гринвіцьким меридіаном на східну і західну, в яких сфероїдична довгота набуває значень від 0 на Гринвіцькому меридіані до 180° на лінії зміни дат.

Сфероїдичні координати φ і λ дозволяють визначити положення тільки нормалі або точки на поверхні земного еліпсоїда.

Розміри еліпсоїда цілком визначаються величинами півосей a і b, але на практиці також застосовують й інші параметри.

1. ***Полярний стиск α***:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \text{ – перший,}$$
$$\alpha' = \frac{a-b}{b} \text{ – другий.} \tag{1.1}$$

2. ***Ексцентриситет e***:

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \text{ – перший,}$$
$$e' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \text{ – другий.} \tag{1.2}$$

З формул (1.1) і (1.2) одержимо, що

$$b = a(1-\alpha),$$
$$b^2 = a^2(1-e^2)\,. \tag{1.3}$$

Або приблизно

$$\alpha \approx \frac{e^2}{2}\,. \tag{1.4}$$

3. Кривизна поверхні еліпсоїда характеризується ***головними радіусами кривизни***. Якщо в довільно обраній точці на поверхні еліпсоїда відновити до неї нормаль і через останню провести безліч площин, то кожна площина перетне поверхню за кривою лінією, що називається нормальним перетином. З них два взаємно перпендикулярних перетини будуть головними, один із них буде мати найбільшу кривизну, а другий – найменшу. Одним із головних перетинів є ***меридіан***, другим буде перетин, перпендикулярний до меридіана. Його називають ***нормальним перетином першого вертикала***.

У картографії обчислюють такі ***радіуси кривизни***:

- ***меридіану M***:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}; \tag{1.5}$$

- ***першого вертикалу N***:

$$N = \frac{a}{W}; \tag{1.6}$$

- ***паралелі r***:

$$r = N\cos\varphi = \frac{a\cos\varphi}{W}; \tag{1.7}$$

- ***середній R***:

$$R = \sqrt{MN} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{W^3}\,\frac{a}{W}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2}, \tag{1.8}$$

де $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ – допоміжна функція широти.

1.3. Державна геодезична референцна система координат УСК-2000

З 1 січня 2007 р. на території України введено в дію нову систему координат УСК 2000 (див. табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Значення елементів земних референц-еліпсоїдів

Референц-еліпсоїд	Піввісі		Стиск, α	Країни, де використовується референц-еліпсоїд
	велика a, (м)	мала b, (м)		
Красовського (1940)	6378245	6356863	1:298,3	Росія, країни СНД та Східної Європи, Антарктида
Бесселя (1841)	6377397,2	6356079	1:299,15	Європа й Азія
Хайфорда (1909)	6378388	6356912	1:297,0	Європа, Азія, Південна Америка, Антарктида
Кларка I (1866)	6378206	6356584	1:294,98	Північна і Центральна Америка
Кларка II (1880)	6378249	6356515	1:293,46	Африка, Барбадос, Ізраїль, Йорданія, Іран, Ямайка
Ейрі (1880)	6377491	6356185	1:299,3	Великобританія
Ейрі (№ 1)	6377563,4	6356257	1:298,32	Великобританія
Ейрі (№ 2)	6377340,2	6356034	1:298,32	Ірландія
Евересту (1830)	6377276,3	6356075	1:300,8	Індія, Пакистан, Непал, Шрі-Ланка
Евересту (1956)	6377301,24	6356100	1:300,8	Індія, Непал
Австралійський (1965)	6378160	6356775	1:298,25	Австралія, Папуа-Нова Гвінея
GRS (1980)	6378137	6356752	1:298,26	Аляска, Центральна Америка, Мексика, США, Канада
Міжнародний	6378388	6356912	1:297	
Південноамериканський (1969)	6378160	6356775	1:298,25	Південна Америка
WGS-72	6378135	6356750	1:298,26	
WGS-84	6378137	6356752	1:298,257	
ПЗ-90	6378136	6356751	1:298,258	Росія

Єдина система геодезичних координат 1942 року була введена постановою Ради Міністрів колишнього СРСР від 07.04.1946 № 760.

У 70-х роках із упровадженням супутникових та комп'ютерних технологій геодезія стала наукою планетарного масштабу. Національні геодезичні системи відліку перестали задовольняти потреби науки і практики. Замість них розвитку набули загальноземні системи відліку та геодезичні референцні системи координат, утворені на їх основі.

Застосування сучасних супутникових технологій у практиці геодезичного та картографічного забезпечення доводить, що ефективне використання глобальних навігаційних супутникових систем типу GPS і ГЛОНАСС у діючій системі координат 1942 р. у багатьох випадках неможливе. Це пояснюється такими причинами:

- система координат 1942 р. не забезпечує на необхідному рівні точності однозначного переходу до геоцентричної системи координат, у якій функціонують глобальні супутникові навігаційні системи GPS і ГЛОНАСС. Середня квадратична похибка переходу із системи координат 1942 р. до геоцентричної становить близько 4-5 м;
- відсутність однозначних параметрів зв'язку з іншими референцними системами, що мають поширення у світі, в тому числі й для забезпечення загальнодержавного картографування;
- похибки взаємного положення пунктів Державної геодезичної мережі в системі координат 1942 р. на відстанях 50-100 км можуть сягати 1 м і більше, що не дозволяє в багатьох випадках із необхідною точністю виконувати геодезичну прив'язку до пунктів Державної геодезичної мережі чи інших спеціальних мереж, які будуються з використанням супутникових приймачів Global Positioning System (GPS, США), Глобальна Навігаційна Супутникова Система (ГЛОНАСС, Росія) та Galileo (Європейський союз);
- деформація Державної геодезичної мережі в системі координат 1942 р. у межах зон використання місцевих систем координат у багатьох випадках не забезпечує, з необхідною точністю, визначення параметрів переходу до місцевих систем координат.

Удосконалення та розвиток Державної геодезичної мережі України, формування та використання геодезичних ресурсів, створення нової системи координат віднесено до ключових завдань Концепції Державної цільової науково-технічної програми розвитку топографо-геодезичної діяльності та національного картографування на 2011-2015 роки, затвердженої розпорядженням Кабінету Міністрів України від 29.12.2010 № 2354-р. Зокрема у Програмі визначені такі основні завдання:

- удосконалення нормативно-технічного та організаційного забезпечення геоінформаційної діяльності;
- забезпечення розвитку національної геодезичної системи відліку, пов'язаної з європейськими та світовими системами координат;
- створення геоінформаційних ресурсів і систем;

- забезпечення топографічного картографування території та удосконалення національної системи картографування;
- забезпечення тематичного і спеціального картографування;
- забезпечення розвитку фундаментальних досліджень і прикладних наукових розробок;
- забезпечення міжнародного співробітництва у сфері топографо-геодезичної та картографічної діяльності.

Державна геодезична референцна система координат УСК-2000 встановлена для виконання топографо-геодезичних та картографічних робіт на території України. Вона отримана в результаті спільного вирівнювання пунктів Української перманентної мережі спостережень Глобальних навігаційних супутникових систем та Державної геодезичної мережі 1-4 класів на епоху 2005 року. Система координат 2000 року закріплена пунктами Державної геодезичної мережі. Вона введена в дію Постановою Кабінету Міністрів України “Деякі питання застосування геодезичної системи координат” від 22.09.2004 № 1259.

У даний час на території України, як і на всій території колишнього Радянського Союзу, використовується еліпсоїд Красовського (1946 р.). Основні параметри цього еліпсоїда такі:

$$a = 6378245 \text{ м};$$
$$b = 6356863 \text{ м};$$
$$\alpha = 1{:}298{,}3;$$
$$e^2 \approx 0{,}0066934275 \ (e \approx 0{,}08181337).$$

Система координат УСК-2000 встановлена під умовою паралельності її осей просторовим осям Міжнародної загальноземної референцної системи координат ITRS. За поверхню відліку в системі координат УСК-2000 прийнятий референц-еліпсоїд Красовського.

Система координат УСК-2000 року чітко узгоджена з Міжнародною загальноземною референцною системою координат ITRS на епоху 2000 року – ITRF2000, що закріплена пунктами космічної геодезичної мережі.

УСК-2000 змодельована відповідно системи ITRS/ITRF2000 за умовами:

- масштаб референцної системи дорівнює масштабу системи ITRS/ITRF2000;
- вісі координат референцної системи паралельні осям координат системи ITRS/ITRF2000;
- розміщення центру референцної системи координат (суміщене з центром референц-еліпсоїда) забезпечує оптимальне відхилення поверхні референц-еліпсоїда від реальної поверхні Землі на регіон України, тобто мінімізація поправок за висоти геоїда та відхилення прямовисних ліній.

За поверхню відліку в системі координат УСК-2000 прийнятий референц-еліпсоїд Красовського з параметрами:

- велика піввісь 6 378 245 м;
- полярне стиснення 1:298,3.

Положення пунктів у прийнятій системі координат визначається такими координатами:

- просторовими прямокутними координатами X, Y, Z (вісь Z співпадає з віссю обертання еліпсоїда, вісь X лежить у площині нульового меридіану, а вісь Y доповнює систему до правої. Початком системи координат є геометричний центр еліпсоїда);
- геодезичними (еліпсоїдальними) координатами: широтою – B, довготою – L, висотою – H;
- плоскими прямокутними координатами x та y, які обчислюються в проекції Гаусса-Крюгера.

Геодезична висота H утворюється як сума нормальної висоти та висоти квазигеоїда над еліпсоїдом Красовського. Нормальні висоти геодезичних пунктів визначаються в Балтійській системі висот 1977 року, вихідним початком якої є нуль Крондштадського футштоку, а висоти квазигеоїда обчислюються над еліпсоїдом Красовського.

Загальноземний еліпсоїд – це еліпсоїд, який найкраще узгоджується з поверхнею геоїда в цілому. Він повинен бути орієнтований у тілі Землі відповідно до таких вимог:

- мала піввісь повинна співпадати з віссю обертання Землі;
- центр еліпсоїда повинен співпадати з центром мас Землі.
- висоти геоїда над еліпсоїдом h_i (так звані аномалії висот) повинні підкорятися умові найменших квадратів.

Параметри загальноземного еліпсоїда WGS-84 такі:

$$a = 6378137 \text{ м};$$
$$b = 6356752{,}314 \text{ м};$$
$$\alpha = 0{,}0033528106;$$
$$e^2 \approx 0{,}0066943799 \ (e \approx 0{,}08181337).$$

Сучасними загальноземними еліпсоїдами є:

- GRS80 (Geodetic Reference System 1980) розроблений Міжнародною Асоціацією Геодезії та Геофізики (International Union of Geodesy and Geophysics) і рекомендований для геодезичних робіт;
- WGS84 (World Geodetic System 1984) застосовується в системі супутникової навігації GPS;
- ПЗ-90 (Параметри Землі 1990 року) використовується на території Росії для геодезичного забезпечення орбітальних польотів. Цей еліпсоїд застосовується в системі супутникової навігації ГЛОНАСС;
- IERS96 (International Earth Rotation Service 1996) рекомендований Міжнародною службою обертання Землі для обробки РНДБ-спостережень.

Таблиця 1.2

Параметри сучасних загальноземних еліпсоїдів

Назва	Рік	Держава / організація	a, км	точність m_a, м	$1/f$	точність m_f
GRS 80	1980	Marri (IUGG)	6378,137	2	298,257222101	0,001
WGS84	1984	США	6378,137	2	298,25722356	0,001
ПЗ-90	1990	СРСР	6378,136	1	298,257839303	0,001
IERS96	1996	МСВЗ (IERS)	6378,13649	-	298,25645	-

1.4. Математична основа карт

Математична основа карт складається із сукупності математичних елементів карти, що визначають математичний зв'язок між картою і поверхнею, яку зображуємо, а саме:

- масштаб;
- картографічна проекція;
- координатна сітка;
- номенклатура;
- система розграфлення.

Масштаб карти – це загальний ступінь зменшення горизонтальних прокладень ліній місцевості під час їх зображення на карті.

Картографічна проекція – це математично визначене зображення поверхні еліпсоїда або кулі на площині. ***Рівняннями картографічної проекції*** називаються два рівняння, що визначають взаємозв'язок між плоскими прямокутними координатами точок на карті (x і y) і сфероїдичними координатами цих же точок на поверхні еліпсоїда (φ і λ). Загальні рівняння картографічної проекції мають вигляд

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda), \\ y &= f_2(\varphi, \lambda). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Властивості проекції будуть залежать від властивостей і характеру функцій f_1 і f_2. Виключивши з рівнянь (1.9) широту φ, одержимо рівняння меридіанів

$$F_1(x, y, \lambda) = 0, \tag{1.10}$$

а якщо довготу λ, то – рівняння паралелі

$$F_2(x, y, \varphi) = 0. \tag{1.11}$$

Існують картографічна, прямокутна, кілометрова та інші ***координатні сітки***. Зображення ліній меридіанів і паралелей на площині проекції називається ***картографічною сіткою***. Кожній проекції відповідає визначена картографічна сітка.

Якщо $x = f_1(\varphi)$ і $y = f_2(\lambda)$, то лінії паралелей і меридіанів зображуються прямими лініями (рис. 1.6, а).

Якщо $x = f_1(\varphi)$ і $y = f_2(\varphi, \lambda)$, то лінії паралелей зображуються прямими лініями, а лінії меридіанів – кривими (рис. 1.6, б).

Якщо $x = f_1(\varphi, \lambda)$ і $y = f_2(\lambda)$, то лінії паралелей зображуються кривими лініями, а лінії меридіанів – прямими (рис. 1.6, в).

Якщо $x = f_1(\varphi, \lambda)$ і $y = f_2(\varphi, \lambda)$, то лінії паралелей і меридіанів зображуються кривими лініями (рис. 1.6, г).

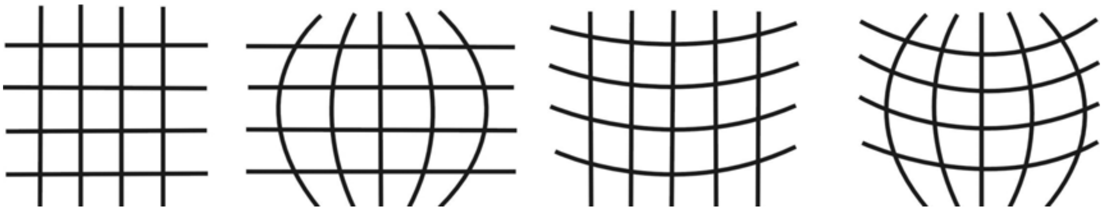


Рис. 1.6. Види картографічних сіток

Прямокутна сітка – це координатна сітка в системі плоских прямокутних координат даної картографічної проекції. ***Кілометрова квадратна сітка*** – це прямокутна координатна сітка, лінії якої проведені на карті через інтервали, що відповідають визначеному числу кілометрів.

Номенклатурою називається система позначення (нумерації) окремих аркушів топографічних карт різних масштабів. Система їх взаємного розташування встановлюється прийнятою ***системою розграфлення***.

1.5. Окремі масштаби довжин і площ. Спотворення кутів і форм

Кожна карта має ***головний масштаб*** $\boldsymbol{\mu_0}$, який показує загальний ступінь зменшення всієї картографованої поверхні або її частини під час відображення на площині. Але він зберігається тільки в окремих точках або на деяких лініях карти. Оскільки головний масштаб не впливає на властивості використовуваної картографічної проекції (1.9), то зазвичай його приймають за одиницю, тобто $\mu_0 = 1$.

Оскільки масштаб на карті є величиною змінної, то введемо поняття окремих масштабів довжин і площ.

Окремим масштабом довжин $\boldsymbol{\mu}$ називається відношення елементарного відрізка на карті (площині) dl' до відповідного елементарного відрізка на картографованій поверхні dl

$$\mu = \frac{dl'}{dl}. \tag{1.12}$$

Окремий масштаб довжин є функцією координат (φ і λ) і азимута напрямку (α)

$$\mu = F_1(\varphi, \lambda, \alpha). \tag{1.13}$$

При α = 0° (180°) окремий масштаб називається ***масштабом довжин по меридіанах***

$$\mu = m. \tag{1.14}$$

При α = 90° (270°) окремий масштаб довжин називається ***масштабом довжин по паралелях***

$$\mu = n. \tag{1.15}$$

Максимальне і мінімальне значення окремого масштабу в точці називаються ***екстремальними масштабами довжин*** по головних напрямках і позначаються відповідно

$$\mu_{\max} = a, \tag{1.16}$$

$$\mu_{\min} = b. \tag{1.17}$$

Спотворенням довжин $\boldsymbol{v_\mu}$ називається різниця між окремим масштабом довжин і одиницею (головним масштабом), яка виражена у частках одиниці або у відсотках

$$v_\mu = (\mu - 1)100\%. \tag{1.18}$$

Наприклад, при μ = 1,42 v_μ = +0,42 або v_μ = +42%, а при μ = 0,42 v_μ = –0,58 або v_μ = –58%.

У деяких випадках для визначення спотворення довжин доцільно застосувати таку формулу

$$v_\mu = \ln \mu \tag{1.19}$$

Окремим масштабом площі $\boldsymbol{p}$ називається відношення площі елементарної ділянки на карті dS' до площі відповідної елементарної ділянки на картографованій поверхні dS

$$p = \frac{dS'}{dS}. \tag{1.20}$$

Окремий масштаб площі залежить тільки від координат (φ і λ) точки

$$p = F_2(\varphi, \lambda). \tag{1.21}$$

Спотворенням площі $\boldsymbol{v_p}$ називається різниця між окремим масштабом площі й одиницею, яка виражена в частках одиниці або у відсотках

$$v_p = (p - 1)100\%. \tag{1.22}$$

Наприклад, якщо p = 1,23, то v_p = +0,23 або v_p = 23%, а якщо p = 0,78, то v_p = –0,22 або v_p = –22%.

У деяких випадках, для визначення спотворення площі доцільно застосовувати таку формулу

$$v_p = \ln p \tag{1.23}$$

При сумісних розрахунках спотворень довжин і площ необхідно використовувати тільки формули (1.18) і (1.22) або (1.19) і (1.23).

Спотворенням кутів $\boldsymbol{\Delta U}$ називається різниця між величиною кута на площині U' і величиною відповідного кута на картографованій поверхні U

$$\Delta U = U' - U. \tag{1.24}$$

Спотворення кутів є функцією координат (φ і λ) і азимута напрямку (α)

$$\Delta U = F_3(\varphi, \lambda, \alpha). \tag{1.25}$$

За міру кутових спотворень беруть найбільше спотворення кутів у точці

$$\Delta U_{\max} = \omega. \tag{1.26}$$

Спотворенням форм w називається відношення максимального a і мінімального b масштабів довжин у даній точці

$$w = \frac{a}{b}. \tag{1.27}$$

Ізоколами називаються лінії, що проходять через точки з однаковими значеннями спотворень довжин або площ.

Ізогонами називаються лінії, що проходять через точки з однаковими значеннями спотворень кутів.

За міру спотворень довжин у заданій точці береться величина ε_1, яка характеризується середніми квадратичними спотвореннями довжин по головних напрямках

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2}\left((a-1)^2 + (b-1)^2\right) = \frac{1}{2}\left(v_a^2 + v_b^2\right) \tag{1.28}$$

або

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2}(\ln^2 a + \ln^2 b). \tag{1.29}$$

Також за міру спотворень довжин у заданій точці може братись величина ε_2, яка характеризується середніми квадратичними спотвореннями довжин у всіх напрямках

$$\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mu-1)^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\mu^2 d\alpha \tag{1.30}$$

або

$$\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^2 \mu d\alpha. \tag{1.31}$$

Для визначення міри спотворень на всій картографічній площі обчислюють критерій Ейрі

$$E_1^2 = \frac{1}{S}\int^{S} \varepsilon_1^2 dS \tag{1.32}$$

або критерій Йордана

$$E_2^2 = \frac{1}{S}\int^{S} \varepsilon_2^2 dS. \tag{1.33}$$

Для визначення міри спотворень тільки для окремої ділянки ΔS усієї території S величина міри спотворення довжин обчислюється за формулою

$$E^2 = \frac{\Delta S}{S}\sum \varepsilon^2. \tag{1.34}$$

Величини спотворень є одними з основних критеріїв оцінки значущості картографічних проекцій.

1.6. Масштаб довжин

З формули (1.12) окремий масштаб довжин дорівнює $\mu = \dfrac{dl'}{dl}$.

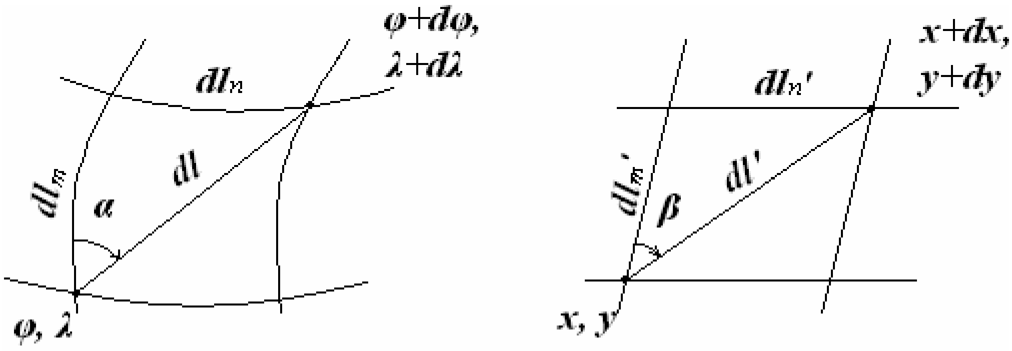


Рис. 1.7. Зображення елементарного відрізка на поверхні еліпсоїда та площині

З рис. 1.7 одержимо

$$dl' = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,,\qquad dl = \sqrt{dl_m^2 + dl_n^2}\,, \tag{1.35}$$

де dl_m і dl_n – елементарні частки дуг меридіана і паралелі відповідно; $d\varphi$ і $d\lambda$ – приріст координат по широті і довготі відповідно.

При цьому

$$dl_m = M d\varphi\,,\qquad dl_n = r d\lambda\,. \tag{1.36}$$

З урахуванням виразів (1.35) і (1.36) формула (1.12) набуває вигляду

$$\mu^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(Md\varphi)^2 + (rd\lambda)^2}\,. \tag{1.37}$$

Із загальних рівнянь картографічних проекцій (1.9) одержимо повні диференціали

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda\,,\qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda\,. \tag{1.38}$$

Звівши у квадрат і склавши вирази (1.38) одержимо, що

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi^2 + 2\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}d\varphi d\lambda + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi^2 + 2\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}d\varphi d\lambda + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 =$$

$$=\left(\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right)d\varphi^2+2\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)d\varphi d\lambda+\left(\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2\right)d\lambda^2=$$

$$=ed\varphi^2+2fd\varphi d\lambda+gd\lambda^2. \qquad (1.39)$$

Уведемо позначення:

$$\begin{aligned} e&=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2,\\ f&=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\lambda},\\ g&=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2,\\ h&=\sqrt{eg-f^2}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\lambda}-\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\varphi}, \end{aligned} \qquad (1.40)$$

де e, f, g, h – коефіцієнти Гаусса.

Уведемо допоміжну функцію u

$$u=\frac{d\varphi}{d\lambda}. \qquad (1.41)$$

Тоді з урахуванням виразів (1.39) і (1.41) формула (1.37) набуває такого вигляду

$$\mu^2=\frac{ed\varphi^2+2fd\varphi d\lambda+gd\lambda^2}{(Md\varphi)^2+(rd\lambda)^2}=\frac{eu^2+2fu+g}{M^2u^2+r^2}. \qquad (1.42)$$

Формула (1.42) виражає масштаб довжин як функцію тільки сфероїдичних координат φ і λ. Але, як відомо з (1.13), масштаб довжин також залежить і від азимута напрямку α. Знайдемо значення u з елементарного сфероїдичного трикутника (рис. 1.7). Оскільки

$$tg\alpha=\frac{dl_n}{dl_m}=\frac{rd\lambda}{Md\varphi}=\frac{r}{Mu}, \qquad (1.43)$$

то

$$u=\frac{r}{M}ctg\alpha. \qquad (1.44)$$

Тоді з урахуванням формули (1.44) і, враховуючи, що $ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, після перетворення вираз (1.42) набуде вигляду

$$\mu^2=\frac{e\left(\frac{r}{M}ctg\alpha\right)^2+2f\frac{r}{M}ctg\alpha+g}{M^2\left(\frac{r}{M}ctg\alpha\right)^2+r^2}= \qquad (1.45)$$

$$=\frac{e}{M^2}\cos^2\alpha+2\frac{f}{Mr}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{g}{r^2}\sin^2\alpha=$$

$$= \frac{e}{M^2}\cos^2\alpha + \frac{f}{Mr}\sin 2\alpha + \frac{g}{r^2}\sin^2\alpha.$$

Уведемо позначення

$$P = \frac{e}{M^2},$$
$$Q = \frac{f}{Mr}, \qquad (1.46)$$
$$R = \frac{g}{r^2}.$$

З урахуванням формул (1.46) формула масштабу довжин (1.45) набуде остаточний вигляд

$$\mu^2 = P\cos^2\alpha + Q\sin 2\alpha + R\sin^2\alpha. \qquad (1.47)$$

Масштаб довжин по меридіанах

Якщо значення азимута напрямку α = 0°(180°), то з формули (1.47) $\mu^2 = m^2 = P$. Тоді масштаб довжин по меридіанах можна обчислити за такою формулою

$$m = \frac{\sqrt{e}}{M}. \qquad (1.48)$$

Масштаб довжин по паралелях

Якщо значення азимута напрямку α = 90° (270°), то з формули (1.47) $\mu^2 = m^2 = P$. Тоді масштаб довжин по паралелях можна обчислити за такою формулою

$$n = \frac{\sqrt{g}}{r} = \frac{\sqrt{g}}{N\cos\varphi}. \qquad (1.49)$$

1.7. Зображення азимутів і кутів на площині

На рис. 1.7 азимут довільного напрямку α на еліпсоїді на площині позначимо β.

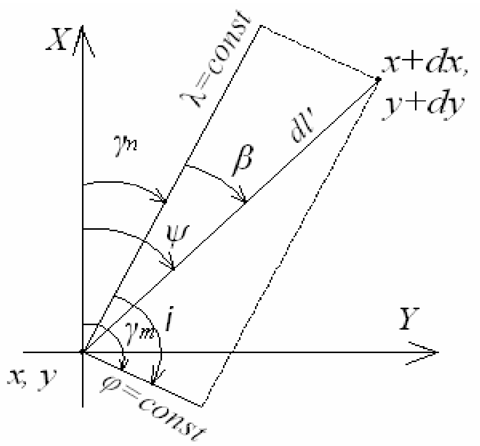


Рис. 1.8. Зображення кутів на площині

З рис. 1.8 знайдемо азимут β елементарного відрізка dl'

$$\beta = \psi - \gamma_m \tag{1.50}$$

або

$$tg\beta = \frac{tg\psi - tg\gamma_m}{1 + tg\psi + tg\gamma_m}. \tag{1.51}$$

Знайдемо кут ψ з урахуванням повних диференціалів (1.38)

$$tg\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda}. \tag{1.52}$$

Приймаючи у виразі (1.52), що для меридіана λ = const, одержимо $tg\gamma_m$

$$tg\gamma_m = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}. \tag{1.53}$$

Тоді після перетворення і з урахуванням коефіцієнтів Гаусса (1.40) вираз (1.51) набуде вигляду

$$tg\beta = \frac{\dfrac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda} - \dfrac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}}{1 + \dfrac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda} \cdot \dfrac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}d\lambda}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\partial\lambda}}{\dfrac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda} + \dfrac{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)d\lambda}{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right)d\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)d\lambda} = \frac{hd\lambda}{ed\varphi + fd\lambda}. \tag{1.54}$$

Застосувавши допоміжну функцію (1.41), формула (1.54) набуде вигляду

$$tg\beta = \frac{h}{eu+f}. \tag{1.55}$$

З урахуванням виразу (1.44) формула (1.55) матиме остаточний вигляд

$$tg\beta = \frac{h}{e\frac{r}{M}ctg\alpha + f} = \frac{hM}{erctg\alpha + fM} = \frac{hMtg\alpha}{er + fMtg\alpha}. \tag{1.56}$$

За цією формулою обчислюється азимут β елементарного відрізка dl' на площині.

1.8. Кут між зображеннями меридіанів і паралелей

З рис. 1.8. кут між зображеннями меридіанів і паралелей i дорівнює

$$i = \gamma_n - \gamma_m. \tag{1.57}$$

Можна записати, що

$$tgi = \frac{tg\gamma_n - tg\gamma_m}{1 + tg\gamma_n tg\gamma_m}. \tag{1.58}$$

Приймаючи у виразі (1.52), що для паралелі φ = const, отримаємо

$$tg\gamma_n = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}. \tag{1.59}$$

Тоді після перетворення і з урахуванням коефіцієнтів Гаусса (1.40) вираз (1.58) набуде вигляду

$$tgi = \frac{\frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} - \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}}{1 + \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}} = \frac{\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}}}{\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}} = \frac{h}{f}. \tag{1.60}$$

Для подальших розрахунків визначимо інші тригонометричні функції кута між зображенням меридіанів і паралелей i

$$\sin^2 i = \frac{tg^2 i}{1 + tg^2 i} = \frac{\frac{h^2}{f^2}}{1 + \frac{h^2}{f^2}} = \frac{h^2}{f^2 + h^2} = \frac{h^2}{eg}. \tag{1.61}$$

Звідки:

$$\sin i = \frac{h}{\sqrt{eg}}. \tag{1.62}$$

Косинус кута i можна визначити трьома шляхами:

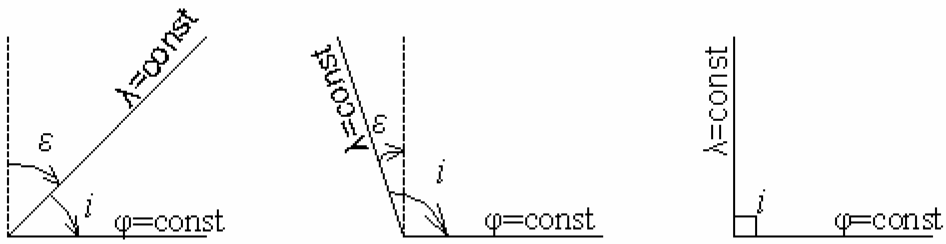
$$\cos i = \frac{\sin i}{tgi} = \sqrt{1 - \sin^2 i} = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 i}} = ... = \frac{f}{\sqrt{eg}}. \tag{1.63}$$

Оскільки тригонометрична функція косинус – парна, то формула (1.63) дозволяє визначити чверть, у якій знаходиться кут i.

Якщо $f > 0$, то кут i знаходиться у І-й чверті, тобто $i < 90°$ (рис. 1.9, а).

Якщо $f < 0$, то кут i знаходиться у ІІ-й чверті, тобто $i > 90°$ (рис 1.9, б).

Якщо $f = 0$, то кут між зображеннями меридіанів і паралелей $i = 90°$ (рис. 1.9, в), тобто виконується умова ортогональності.



а) *б)* *в)*

Рис. 1.9. Кут між зображенням меридіанів і паралелей

Коли коефіцієнт Гаусса f дорівнює нулю, тобто

$$f = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0, \tag{1.64}$$

то вираз (1.64) має назву ***умови ортогональності***, а кут між зображенням меридіанів і паралелей $i = 90°$.

Відхилення кута і від 90°

Як видно з рис. 1.9, а і 1.9, б кут між зображенням меридіанів і паралелей i не завжди дорівнює 90°. Тому необхідно обчислювати його відхилення від 90°, тобто

$$\varepsilon = i - 90^0. \tag{1.65}$$

$$i = 90^0 + \varepsilon \tag{1.66}$$

При $i < 90°$, $\varepsilon < 0$ (рис. 1.9, а), а при $i > 90°$, $\varepsilon > 0$ (рис. 1.9, б). Якщо $\varepsilon = 0$, то також виконується умова ортогональності (рис. 1.9, в).

1.9. Дослідження масштабу довжин

Дослідження характеру змін масштабу довжин μ залежно від напрямку α дозволяє встановити при яких значеннях він досягає найбільшого й найменшого значення. Щоб визначити екстремальні значення масштабу довжин, знайдемо першу похідну від μ^2 по α й прирівняємо її до нуля. Згідно з (1.47)

$$\begin{aligned}\frac{d(\mu^2)}{d\alpha} &= -2P\sin\alpha\cos\alpha + 2Q\cos 2\alpha + 2R\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= (R-P)\sin 2\alpha + 2Q\cos 2\alpha = (R-P)tg2\alpha + 2Q = 0\,.\end{aligned} \tag{1.67}$$

Звідси, з урахуванням (1.46)

$$tg2\alpha = \frac{2Q}{P-R} = \frac{2\dfrac{f}{Mr}}{\dfrac{e}{M^2} - \dfrac{g}{r^2}} = \frac{2fMr}{er^2 - gM^2}\,. \tag{1.68}$$

Значенню $tg2\alpha$ відповідають два значення α в інтервалі між 0° і 180°, які між собою відмінні на 90°. Знайдемо другу похідну від μ^2 по α й прирівняємо її до нуля

$$\frac{d^2(\mu^2)}{d\alpha^2} = 2(R-P)\cos 2\alpha - 4Q\sin 2\alpha = 2(R-P-2Qtg2\alpha)\cos 2\alpha = 0\,. \tag{1.69}$$

Оскільки вираз у дужках $(R-P-2Qtg2\alpha)$ на знак не впливає, то вираз (1.69) показує, що похідна буде мати протилежні знаки для α і α + 90°. Таким чином у зображенні даної точки існує два взаємоперпендикулярних напрямки α і α + 90°, за якими масштаби довжин мають максимальні й мінімальні значення, тобто вони є екстремальними.

Визначимо, під яким кутом будуть перетинатися ці два напрямки α і α + 90° на площині. Якщо $\beta_1 = \beta + 90°$, то $tg\beta \cdot tg\beta_1 = -1$. Згідно з (1.56)

$$\begin{aligned} tg\beta &= \frac{hMtg\alpha}{er + fMtg\alpha}, \\ tg\beta_1 &= \frac{-hMctg\alpha}{er - fMctg\alpha}\,. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Звідки

$$tg\beta \cdot tg\beta_1 = \frac{-h^2M^2}{e^2r^2 + efMr(tg\alpha - ctg\alpha) - f^2M^2}\,. \tag{1.71}$$

Оскільки

$$ctg\alpha - tg\alpha = 2ctg2\alpha, \tag{1.72}$$

то з урахуванням виразу (1.68)

$$ctg2\alpha = \frac{er^2 - gM^2}{2fMr} \tag{1.73}$$

Й остаточно з урахуванням (1.72) та (1.73) отримаємо

$$tg\beta \cdot tg\beta_1 = \frac{-h^2M^2}{e^2r^2 - 2efMrctg2\alpha - f^2M^2} = \tag{1.74}$$

$$= \frac{-h^2M^2}{e^2r^2 - 2efMr\dfrac{er^2 - gM^2}{2fMr} - f^2M^2} =$$

$$= \frac{-h^2M^2}{e^2r^2 - e^2r^2 + egM^2 - t^2M^2} = \frac{-h^2}{eg - f^2}.$$

Оскільки, згідно з коефіцієнтами Гаусса (1.40), $f^2 - eg = -h^2$ або $h^2 = eg - f^2$, то $tg\beta \cdot tg\beta_1 = -1$, а значить $\beta_1 = \beta + 90°$.

Ці напрямки називаються ***головними напрямками***. Якщо картографічна сітка ортогональна, то головні напрямки збігаються з меридіанами і паралелями.

1.10. Еліпс спотворень. Положення Аполлонія

Еліпс спотворень – це елементарний еліпс у кожній точці на карті (площині), який є відображенням елементарного кола на поверхні еліпсоїда. Згідно з формулою (1.13), окремий масштаб довжин у точці змінюється залежно від азимута напрямку. Наприклад, азимуту α_1 на поверхні еліпсоїда відповідає азимут β_1 на площині, азимуту α_2 – β_2, азимуту α_3 – β_3 і т.д. Масштаби довжин по цих напрямках позначимо відповідно μ_1, μ_2, μ_3, (рис 1.10).

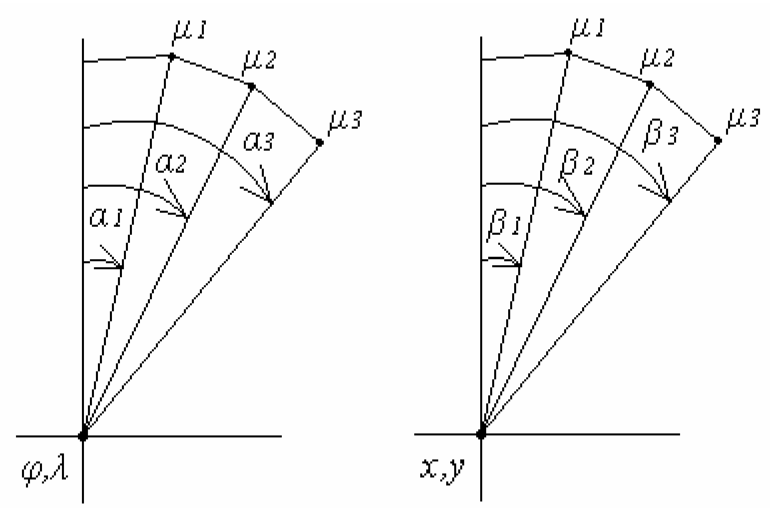


Рис. 1.10. Залежність окремого масштабу довжин від азимута напрямку

У плоских полярних координатах

$$x = \mu \cos\beta, \quad y = \mu \sin\beta. \tag{1.75}$$

Визначимо орієнтування еліпса спотворень відносно ліній меридіанів і паралелей (рис. 1.11).

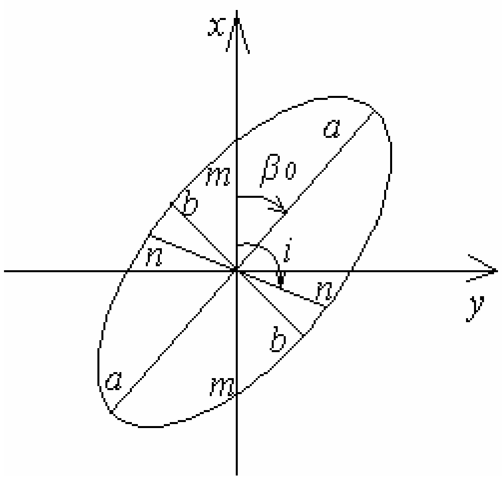


Рис. 1.11. Еліпс спотворень

Загальне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1.76}$$

Як видно з рис. 1.10, якщо замість μ підставити масштаб довжин по меридіанах m, то вираз (1.75) набуде вигляду

$$\begin{aligned} x &= m\cos\beta_0, \\ y &= m\cos\beta_0. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Звідки

$$\frac{m^2\cos^2\beta_0}{a^2}+\frac{m^2\sin^2\beta_0}{b^2}=1. \tag{1.78}$$

Виконаємо низку перетворень для визначення кута β_0

$$\frac{m^2\cos^2\beta_0}{a^2}+\frac{m^2\sin^2\beta_0}{b^2}=\cos^2\beta_0+\sin^2\beta_0,$$

$$\frac{m^2\sin^2\beta_0}{b^2}-\sin^2\beta_0=\cos^2\beta_0-\frac{m^2\cos^2\beta_0}{a^2},$$

$$\sin^2\beta_0\left(\frac{m^2}{b^2}-1\right)=\cos^2\beta_0\left(1-\frac{m^2}{a^2}\right),$$

$$tg^2\beta_0=\frac{1-\frac{m^2}{a^2}}{\frac{m^2}{b^2}-1}=\frac{b^2(a^2-m^2)}{a^2(m^2-b^2)}. \tag{1.79}$$

Добувши квадратний корінь з лівої і правої частин виразу (1.79), одержимо остаточно

$$tg\beta_0=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-m^2}{m^2-b^2}}. \tag{1.80}$$

Також значення $tg\beta_0$ можна одержати і через масштаб довжин по паралелях *n*. Тоді

$$tg\beta_0 = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}}\,. \tag{1.81}$$

Як видно з рис. 1.11 і отриманих формул (1.80) і (1.81), для побудови еліпса спотворень необхідно і достатньо знати чотири лінійні ***a***, ***b***, ***m***, ***n*** і дві кутові ***i*** (***ε***) і $\boldsymbol{\beta_0}$ величини.

Положення Аполлонія

Сформулюємо два основних положення Аполлонія, застосовані до еліпса спотворень.

1. Сума квадратів сполучених напівдіаметрів еліпса – величина постійна, що дорівнює сумі квадратів його півосей

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2\,. \tag{1.82}$$

2. Площа паралелограма, побудованого на сполучених напівдіаметрах еліпса, – величина постійна, що дорівнює площі прямокутника, побудованого на його півосях

$$mn\sin i = ab\,. \tag{1.83}$$

Розв’яжемо спільно рівняння (1.82) і (1.83)

$$\begin{gathered} m^2 + n^2 + 2mn\sin i = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 = A^2, \\ m^2 + n^2 - 2mn\sin i = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = B^2. \end{gathered} \tag{1.84}$$

Звідки

$$\begin{gathered} A = a + b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\sin i}\,, \\ B = a - b = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\sin i}\,, \end{gathered} \tag{1.85}$$

$$\begin{gathered} a = \frac{A+B}{2}, \\ b = \frac{A-B}{2}. \end{gathered} \tag{1.86}$$

Таким чином, за формулами (1.86) обчислюються максимальний та мінімальний масштаби довжин у точці. У випадку рівнокутних проекцій, де $a = b = m = n$, $i = 90°$, то $A = 2a$, $B = 0$.

1.11. Масштаб площі

З формули (1.20) окремий масштаб площі дорівнює $p = \dfrac{dS'}{dS}$.

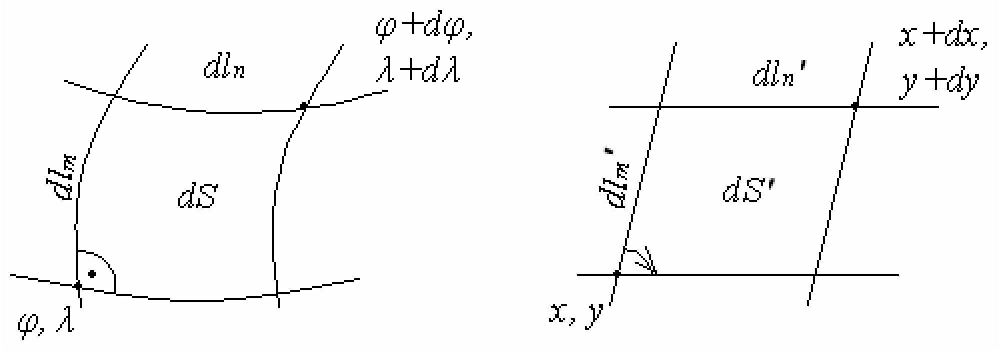


Рис. 1.12. Елементарна ділянка на поверхні еліпсоїда та площині

З рис. 1.12 одержимо

$$dS' = dl_m^{'} dl_n^{'} \sin i\,, \qquad dS = dl_m dl_n\,. \tag{1.87}$$

Підставивши вирази (1.87) у формулу (1.20), одержимо

$$p = \frac{dl_m^{'} dl_n^{'} \sin i}{dl_m dl_n} = \frac{dl_m^{'}}{dl_m}\frac{dl_n^{'}}{dl_n}\sin i = mn\sin i = \frac{\sqrt{e}}{M}\frac{\sqrt{g}}{r}\frac{h}{\sqrt{eg}} = \frac{h}{Mr} = \frac{h}{MN\cos\varphi}\,. \tag{1.88}$$

Таким чином, за формулою (1.88) обчислюється окремий масштаб площі.

При значенні окремого масштабу площі $p = 1$ з формули (1.88) одержимо

$$h = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\lambda} - \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\varphi} = Mr = MN\cos\varphi\,. \tag{1.89}$$

Вираз (1.89) є ***умовою рівновеликості,*** тобто виконується сталість відношення елементарних площ на поверхні еліпсоїда і площини.

1.12. Максимальне спотворення кутів

Кут *U*, утворений двома довільними напрямками *OA* і *OB* на поверхні еліпсоїда (рис. 1.13), під час зображення на площині набуває значення *U'* (рис. 1.13).

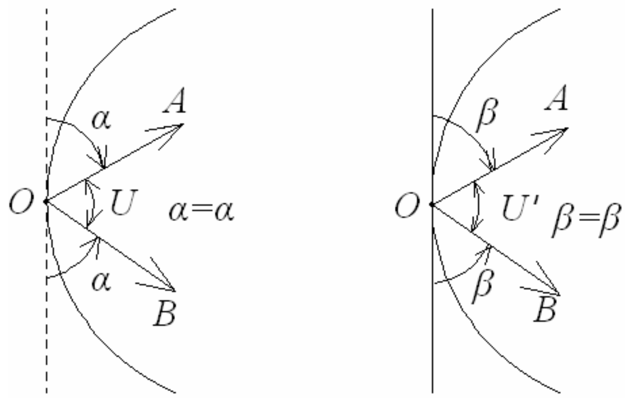


Рис. 1.13. Зображення кута *U* на поверхні еліпсоїда та кута *U'* на площині

Спотворення кута обчислюється за формулою (1.24)

$$\Delta U = U' - U .$$

З рис. 1.13 одержимо

$$\begin{aligned} U' &= 180^0 - 2\beta , \\ U &= 180^0 - 2\alpha . \end{aligned} \tag{1.90}$$

З урахуванням виразів (1.90) спотворення кута можна обчислити за формулою

$$\Delta U = 2(\alpha - \beta). \tag{1.91}$$

Звідки

$$\frac{\Delta U}{2} = \alpha - \beta . \tag{1.92}$$

Для проекції з ортогональною сіткою (коли коефіцієнт Гаусса f дорівнює нулю), оскільки головні напрямки збігаються з напрямками меридіанів і паралелей, вираз (1.56) набуде вигляду

$$tg\beta = \frac{hMtg\alpha}{er + fMtg\alpha} = \frac{hMtg\alpha}{er} = \frac{\sqrt{eg}Mtg\alpha}{er} = \frac{M}{\sqrt{e}}\frac{\sqrt{g}}{r}tg\alpha = \frac{n}{m}tg\alpha = \frac{b}{a}tg\alpha . \tag{1.93}$$

Ліву і праву частини виразу (1.93) віднімемо з $tg\alpha$ і додамо до $tg\alpha$

$$\begin{aligned} tg\alpha - tg\beta &= \frac{a-b}{a}tg\alpha , \\ tg\alpha + tg\beta &= \frac{a+b}{a}tg\alpha . \end{aligned} \tag{1.94}$$

Відомо, що

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}. \tag{1.95}$$

Тоді, з урахуванням формули (1.95) вирази (1.94) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a}tg\alpha &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}, \\ \frac{a+b}{a}tg\alpha &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}. \end{aligned} \tag{1.96}$$

Розділивши в (1.96) перше рівняння на друге, одержимо

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a-b}{a+b}. \tag{1.97}$$

Звідки

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha + \beta) = \sin\frac{\Delta U}{2} . \tag{1.98}$$

Аналізуючи вираз (1.98), можна дійти висновку, що максимальне значення спотворень кутів буде, коли $\alpha + \beta = 90°$. Тобто

$$\sin(\alpha + \beta) = 1 . \tag{1.99}$$

Тоді, з урахуванням (1.26) і (1.98) одержимо:

$$\sin\frac{\Delta U_{\max}}{2}=\sin\frac{\omega}{2}=\frac{a-b}{a+b}. \qquad (1.100)$$

З виразу (1.100) знайдемо інші тригонометричні функції спотворення кутів, які будуть використані нами пізніше:

$$\cos\frac{\omega}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\omega}{2}}=\sqrt{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2}}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b},$$

$$tg\frac{\omega}{4}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\omega}{2}}{1+\cos\frac{\omega}{2}}}=\sqrt{\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \qquad (1.101)$$

$$tg\left(\frac{\omega}{4}+45°\right)=\frac{1+tg\frac{\omega}{4}}{1-tg\frac{\omega}{4}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

1.13. Рівнокутне, рівновелике і довільне зображення поверхні еліпсоїда на площині

У математичній картографії частіше використовуються рівнокутні і рівновеликі картографічні проекції. ***Основною умовою рівнокутного зображення поверхні еліпсоїда на площині є незалежність масштабу довжин від напрямів***, тобто перша похідна масштабу довжин по азимуту буде дорівнювати нулю. З урахуванням формули (1.67)

$$\frac{\partial(\mu^2)}{\partial\alpha}=(R-P)\sin 2\alpha+2Q\cos 2\alpha=0. \qquad (1.102)$$

Ця рівність дотримується, коли $P = R$ і $Q = 0$ або з урахуванням (1.46)

$$\frac{e}{M^2}=\frac{g}{r^2},$$

$$Q=\frac{f}{M\cdot r}.$$

Звідки $m^2 = n^2$ ($m = n$) і $f = 0$.

У рівнокутних проекціях картографічна сітка ортогональна $i = 90°$, максимальний a і мінімальний b масштаби довжин збігаються з напрямками меридіанів і паралелей $a = b = m = n$, масштаб площі дорівнює $p = a^2 = m^2$, спотворення форм ($w = 0$) і спотворення кутів ($\omega = 0$) відсутні.

З урахуванням коефіцієнтів Гаусса (1.40)

$$\begin{cases} f = \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{1}{M} = \left(\dfrac{(\partial x)^2}{(\partial \varphi)} + \dfrac{(\partial y)^2}{(\partial \varphi)} \right) = \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{(\partial x)^2}{(\partial \lambda)} + \dfrac{(\partial y)^2}{(\partial \lambda)} \right) \end{cases} \tag{1.103}$$

отримаємо остаточний вигляд рівнянь рівнокутної проекції (рівняння Коші-Рімана)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} = -\dfrac{r}{M}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} = +\dfrac{r}{M}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \end{cases}. \tag{1.104}$$

Для наближених розрахунків при рівнокутному зображенні можна використовувати такі формули:

$$\begin{gathered} v_a = v_b = v\,, \\ v_p = 2v\,, \\ \omega = 0\,. \end{gathered} \tag{1.105}$$

При рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на площині зберігається постійним відношення площі на площині (карті) до відповідної площі на поверхні еліпсоїда, тобто

$$\begin{gathered} p = mn\sin i = ab = \frac{h}{M \cdot r} = const = 1\,, \\ a = \frac{1}{b} \text{ і } b = \frac{1}{a}\,, \\ h = M\,r = MN\cos\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\,, \\ tg\left(\frac{\omega}{4} + 45^\circ\right) = \sqrt{\frac{a}{b}} = a\,. \end{gathered} \tag{1.106}$$

Для наближених розрахунків при рівновеликому зображенні можна використовувати такі формули:

$$\begin{gathered} v_p = 0\,, \\ v_a + v_b = 0\,, \\ \omega = v_a - v_b\,. \end{gathered} \tag{1.107}$$

У довільних проекціях можуть бути різні умови, наприклад, щоб один із екстремальних масштабів довжин дорівнював одиниці. Якщо це $a = 1$, то $p = b$, якщо це $b = 1$, то $p = a$. Якщо у такій довільній проекції картографічна сітка ортогональна, то така проекція називається ***рівнопроміжковою по меридіанах*** ($m = 1$, $p = n$, $\sin\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{1-n}{1+n}$) або ***рівнопроміжковою по паралелях*** ($n = 1, p = m$, $\sin\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{m-1}{m+1}$).

1.14. Завдання та методичні пояснення до виконання лабораторної роботи № 1

Тема: Дослідження топографічної карти дрібного масштабу.

Завдання:

1. У вказаній точці на топографічній карті масштабу 1:10 000 000 визначити значення таких величин:

- кут між зображенням меридіанів і паралелей i та його відхилення від $90° - \varepsilon$;
- масштаби довжин по меридіанах m і по паралелях n;
- спотворення довжин по меридіанах v_m і паралелях v_n;
- масштаби довжин по головних напрямках a і b;
- спотворення довжин по головних напрямках v_a і v_b;
- азимут максимального спотворення довжин β_0;
- масштаб площі p;
- спотворення площі v_p;
- спотворення кутів ω;
- спотворення форм w.

Значення масштабу довжин по меридіанах m, масштабу довжин по паралелях n, масштабу довжин по головних напрямках, масштабу площі p, спотворення форм w – з точністю до 0,0001; спотворення довжин по меридіанах v_m, спотворення довжин паралелях v_n, довжин по головних напрямках v_a і v_b – з точністю до 0,01 %; азимут максимального спотворення довжин β_0 – з точністю до 1′; спотворення кутів ω – з точністю до 1″.

2. За визначеними параметрами побудувати еліпс спотворень.

Вихідні дані: обираються за номером студента в списку групи з додатка А.

Хід роботи

1. Визначення кутів, масштабів та спотворень

1. Кут між меридіанами і паралелями i визначається на карті за допомогою геодезичного транспортира. Для цього до дуги паралелі, на якій знаходиться задана точка, проводимо дотичну (рис. 1.14). На центр прямої лінійки транспортира нанесена рисочка (центр півкола), а його півколо розділене на 180 частин (градусів). Щоб виміряти кут, необхідно прикласти пряму лінійку транспортира до однієї з його сторін (до меридіана, в нашому випадку) і подивитися, на яку поділку півкола транспортира потрапляє дотична. Значення поділки і буде виміряним кутом i у градусах.

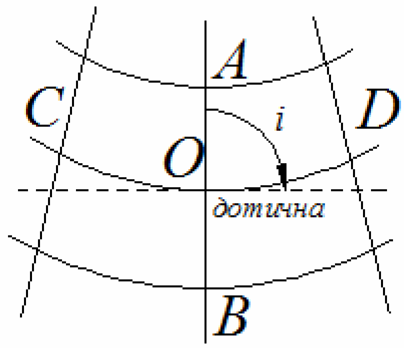


Рис. 1.14. Схема ділянки дрібномасштабної карти

2. Кут між зображенням меридіанів і паралелей i не завжди дорівнює 90°. Тому необхідно обчислювати його відхилення від 90°, тобто:

$$\varepsilon = i - 90^\circ . \tag{1.108}$$

3. З рис. 1.14 визначимо широти паралелей точок А і В. За значеннями широт обчислюємо довжину дуги меридіана між паралелями точок А і В навкруги заданої точки (рис. 1.14) за такою формулою:

$$\Delta S_m = S_{m_A} - S_{m_b} = AB_m = S_{m_{півн}} - S_{m_{півд}} , \tag{1.109}$$

де $S_{m_{півн}}$ – довжина дуги меридіана від екватора до північної паралелі (точки А), м; $S_{m_{півд}}$ – довжина дуги меридіана від екватора до південної паралелі (точки В), м.

При цьому значення $S_{m_{півн}}$ і $S_{m_{півд}}$ визначається з додатка Б, відповідно до широти паралелей точок А і В.

4. З рис. 1.1 визначимо довготи меридіанів точок С і D та широту паралелі точки О. Оскільки різниця між довготами меридіанів точок С і D становить $6°$, то обчислюємо довжину дуги паралелі у межах ділянки навкруги заданої точки за такою формулою:

$$\Delta S_n = CD_m = 6S_{n_O} , \tag{1.110}$$

де S_n – довжина дуги паралелі, на якій знаходяться вказані точки О, С і D, м.

5. Обчислюємо числовий масштаб довжин по меридіану:

$$\mu_{мер} = \frac{CD_к}{CD_m} = \frac{1}{CD_m / CD_к} , \tag{1.111}$$

де $CD_к$ – довжина дуги паралелі, виміряна по карті й обчислена в метрах.

6. Обчислюємо числовий масштаб довжин по паралелі:

$$\mu_{пар} = \frac{AB_к}{AB_m} = \frac{1}{AB_m / AB_к} , \tag{1.112}$$

де $AB_к$ – довжина дуги меридіана, виміряна по карті й обчислена в метрах.

7. Окремий масштаб довжин по меридіанах m обчислюємо за формулою:

$$m = \frac{\mu_{мер}}{\mu_0} , \tag{1.113}$$

де μ_0 = 10 000 000 – головний масштаб карти.

8. Окремий масштаб довжин по паралелях n визначається за такою формулою:

$$n = \frac{\mu_{пар}}{\mu_0}. \tag{1.114}$$

9. Спотворення довжин по меридіанах v_m обчислюється за формулою:

$$v_m = (m-1)100\%, \tag{1.115}$$

10. Спотворення довжин по паралелях v_n обчислюється за такою формулою:

$$v_n = (n-1)100\%. \tag{1.116}$$

10. Масштаби довжин по головних напрямках a і b визначаються за формулами:

$$a = \frac{A+B}{2}, \tag{1.117}$$

$$b = \frac{A-B}{2}, \tag{1.118}$$

де допоміжні величини A і B обчислюються за формулами

$$A = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cdot \sin i}, \tag{1.119}$$

$$B = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\sin i}. \tag{1.120}$$

11. Обчислюємо спотворення довжин по головних напрямках v_a і v_b:

$$v_a = (a-1)100\%, \tag{1.121}$$

$$v_b = (b-1)100\%. \tag{1.122}$$

12. Значення азимута максимального спотворення довжин β_0 одержимо за формулами:

$$\beta_0 = arctg\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-m^2}{m^2-b^2}} \tag{1.123}$$

або

$$\beta_0 = arctg\frac{b}{a}\sqrt{\frac{n^2-b^2}{a^2-n^2}}. \tag{1.124}$$

13. Масштаб площі визначається за такою формулою:

$$p = mn\sin i = ab. \tag{1.125}$$

14. Спотворення площі v_p:

$$v_p = (p-1)100\%. \tag{1.126}$$

15. Обчислюємо спотворення кутів ω:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}. \tag{1.127}$$

16. Спотворення форм визначається за такою формулою:

$$w = \frac{a}{b}. \tag{1.128}$$

2. Побудова еліпса спотворень

Еліпс спотворень – це елементарний еліпс у кожній точці на карті (площині), який є відображенням елементарного кола на поверхні еліпсоїда (рис. 1.11). Він використовується для відображення напрямків величин та характеру спотворень у заданій точці картографічної проекції.

Для побудови еліпса спотворень необхідно і достатньо знати чотири лінійні a, b, m, n та дві кутові i (ε) і β_0 величини.

1. Визначення і побудова основних напрямків еліпса спотворень.

Для побудови еліпса спотворень треба дотримуватися такої послідовності:

- проводимо вісь x і приймаємо, що вона відповідає північному напрямку меридіану, а по ній будемо відкладати спотворення масштабу довжин по меридіанах m;
- від прийнятого північного напрямку меридіану за допомогою геодезичного транспортира відкладаємо кут i. Отриманий напрямок – паралель, на якій будемо відкладати спотворення масштабу довжин по паралелях n;
- від прийнятого північного напрямку меридіану за допомогою геодезичного транспортира відкладаємо азимут максимального спотворення довжин β_0. Отриманий напрямок – велика піввісь a;
- перпендикулярно до проведеної великої піввісі a через центр еліпса спотворень будуємо малу піввісь b.

2. Визначення умовного масштабу для побудови еліпса спотворень.

Помноживши умовний масштаб на масштаби довжин по меридіанах m, по паралелях n, по головних напрямках a і b, отримаємо елементи еліпса спотворень a, b, m, n у міліметрах:

- по меридіану на північ і на південь відкласти відрізок m;
- по паралелі на схід та захід відкласти відрізок n;
- по обидві сторони від центральної точки по великій і малій піввісі відкласти відрізки a і b відповідно;
- отримані точки з’єднати плавною лінією.

Одержимо еліпс спотворень (рис. 1.15).

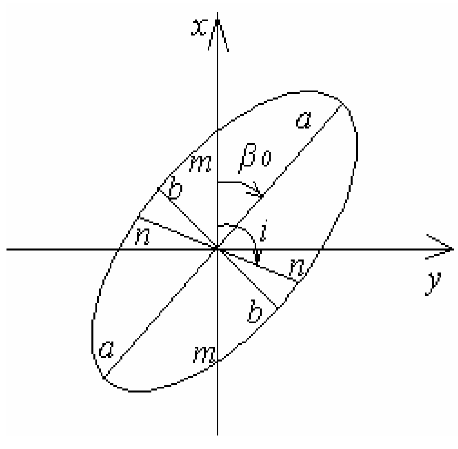


Рис. 1.15. Еліпс спотворень

3. Висновки

Виходячи з отриманих результатів, у висновках слід надати оцінку спотворень у заданій точці на топографічній карті дрібного масштабу, а також охарактеризувати параметри необхідні для побудови еліпса спотворень.

1.15. Приклад виконання лабораторної роботи № 1

Відповідно до номера студента за списком групи з додатка А обирається варіант рисунка, де вказана відповідна точка О (рис. 1.16).

Рис. 1.16 Фрагмент заданої ділянки

Усі обчислені значення величин у цьому прикладі та інших наведені з округленням, але при розрахунках використовувалися точні значення.

1. Визначення кутів, масштабів та спотворень

1. За допомогою геодезичного транспортира вимірюємо кут між зображенням меридіанів і паралелей i на заданій ділянці. У даному випадку i = 90°30'. Обчислюємо його відхилення від 90° за формулою (1.108): $\varepsilon = -0°30'$.

2. Відповідно до широт точок А і В із додатка Б вибираємо значення $S_{m_{півн}}$ і $S_{m_{півд}}$ та за формулою (1.109) обчислюємо довжину дуги меридіана:

$$AB_m = 5763445 - 5318521 = 444924 \ (м).$$

3. Згідно з довготою точок С і D, із додатка Б вибираємо значення S_n та обчислюємо довжину дуги паралелі за формулою (1.110):

$$CD_m = 6 \cdot 71697 \cdot = 430182 \ (м).$$

4. На карті вимірюємо лінійкою довжину дуги меридіану $AB_к$ та циркулем-вимірювачем довжину дуги паралелі $CD_к$ у міліметрах:

$$AB_к = 44{,}0 \ (мм); \ CD_к = 44{,}1 \ (мм).$$

5. Обчислюємо числові масштаби довжин по меридіану і паралелі за

формулами (1.111) та (1.112) в масштабі карти:

$$\mu_{мер} = \frac{441000}{430182} = \frac{1}{9754694} \approx \frac{1}{9755000};\ \mu_{пар} = \frac{440000}{444924} = \frac{1}{10111909} \approx \frac{1}{10112000}.$$

6. Окремий масштаб довжин по меридіанах та по паралелях одержуємо за формулами (1.113) і (1.114):

$$m = \frac{1}{9754694} \div \frac{1}{10000000} = 1{,}0251;$$

$$n = \frac{1}{10111909} \div \frac{1}{10000000} = 0{,}9889.$$

7. Спотворення довжин по меридіанах v_m та по паралелях v_n обчислюється за формулами (1.115) і (1.116) відповідно:

$$v_m = (1{,}025 - 1)100\% = 2{,}51\%;$$

$$v_n = (0{,}9889 - 1)100\% = -1{,}11\%.$$

8. Допоміжні величини A і B обчислюються за формулами (1.119) і (1.120):

$$A = \sqrt{1{,}0251^2 + 0{,}9889^2 + 2 \cdot 1{,}0251 \cdot 0{,}9889 \sin 90°30'} = 2{,}0140;$$

$$B = \sqrt{1{,}0251^2 + 0{,}9889^2 - 2 \cdot 1{,}0251 \cdot 0{,}9889 \sin 90°30'} = 0{,}0372.$$

Тоді масштаби довжин по головних напрямках a і b визначаються за формулами (1.117) і (1.118):

$$a = \frac{2{,}0140 + 0{,}0372}{2} = 1{,}0256;$$

$$b = \frac{2{,}0140 - 0{,}0372}{2} = 0{,}9884.$$

9. Обчислюємо спотворення довжин по головних напрямках v_a і v_b за формулами (1.121) та (1.122):

$$v_a = (1{,}0256 - 1)100\% = 2{,}56\%;$$

$$v_b = (0{,}9884 - 1)100\% = -1{,}16\%.$$

10. Значення азимута максимального спотворення довжин β_0 одержимо за формулами (1.123) або (1.124):

$$\beta_0 = arctg \frac{1{,}0051}{1{,}0088} \sqrt{\frac{1{,}0088^2 - 1{,}0251^2}{1{,}0251^2 - 1{,}0051^2}} = 36°39'.$$

11. Масштаб площі визначається за формулою (1.125):

$$p = 1{,}0251 \cdot 0{,}9889 \sin 90°30' = 1{,}0137.$$

12. За формулою (1.126) спотворення площі v_p дорівнює:

$$v_p = (1{,}0137 - 1)100\% = 1{,}37\%.$$

13. За формулою (1.127) одержуємо спотворення кутів ω:

$$\omega = 2\, arcsin \frac{1{,}0088 - 1{,}0051}{1{,}0088 + 1{,}0051} = 0°02'05''.$$

14. Спотворення форм визначається за формулою (1.128):

$$w = \frac{1{,}0088}{1{,}0051} = 1{,}0037.$$

2. Побудова еліпса спотворень

Виконавши наведені вище розрахунки, ми отримали необхідні величини для побудови еліпса спотворень, а саме: *a, b, n, m, i,* β_0.

Тепер необхідно виконати методичні рекомендації наведені вище (пункт 2) щодо визначення положення й орієнтування осей лінійних елементів *a, b, n, m* еліпса спотворень.

Обираємо умовний масштаб.

Перемножимо усі лінійні величини на масштаб та виконаємо дії, які описані в пункті 2 побудови еліпса спотворень.

Виконавши всі рекомендації у заданій послідовності, отримаємо еліпс спотворень.

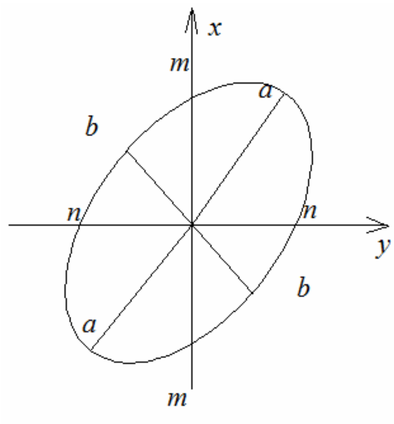


Рис. 1.17. Побудований еліпс спотворень

3. Висновки

Побудований еліпс спотворень використовується для зображення величини спотворення в заданій точці картографічної сітки. У нашому випадку спотворення у заданій точці на топографічній карті дрібного масштабу близькі до значення одиниці. Це говорить про те, що картографічну проекцію заданої карти можна вважати рівнокутною.

1.16. Контрольні питання

1. Які види спотворень під час зображення поверхні еліпсоїда на площині ви знаєте?
2. Наведіть умови безперервності зображення поверхні еліпсоїда на площині.
3. Дайте визначення земного еліпсоїда.
4. Укажіть геометричні елементи земного еліпсоїда.
5. Що таке сфероїдичні координати?
6. Які значення може набувати сфероїдична широта?
7. Який вигляд мають паралелі еліпсоїда?
8. Які значення може набувати сфероїдична довгота?
9. Який вигляд мають меридіани еліпсоїда?

10. Які параметри земного еліпсоїда ви знаєте?

11. Який еліпсоїд використовуються на території України? Укажіть його параметри?

12. Наведіть математичні елементи карти.

13. Що таке масштаб карти?

14. Що таке картографічна проекція?

15. Що таке картографічна сітка?

16. Що таке прямокутна сітка?

17. Що таке кілометрова квадратна сітка?

18. Що таке головний масштаб карти?

19. Дайте визначення окремого масштабу довжин.

20. При яких значеннях азимута напрямку окремий масштаб довжин називається масштабом довжин по меридіанах і по паралелях?

21. Що таке спотворення довжин?

22. Дайте визначення окремого масштабу площі.

23. Що таке спотворення площі?

24. Що таке спотворення кутів?

25. Що таке спотворення форм?

26. Що таке ізоколи?

27. Що таке ізогони?

28. Укажіть основні критерії оцінки значущості картографічних проекцій.

29. При якому значенні кута між зображенням меридіанів і паралелей виконується умова ортогональності?

30. Що таке відхилення кута між зображенням меридіанів і паралелей від 90°?

31. Якщо коефіцієнт Гаусса f дорівнює нулю, то що це значить?

32. Для чого виконується дослідження масштабу довжин?

33. Дайте визначення еліпса спотворень.

34. Які величини необхідно знати для побудови еліпса спотворень.

35. Які величини впливають на розмір, а які на орієнтування еліпса спотворень?

36. Сформулюйте положення Аполлонія.

37. Що таке умова рівновеликості?

38. Від яких величин залежить максимальне спотворення кутів у точці?

39. Які види зображення поверхні еліпсоїда на площині ви знаєте?

2. ЗОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ КУЛІ НА ПЛОЩИНІ

2.1. Геометричні елементи земної кулі

Основним геометричним елементом земної кулі, як видно з рис. 2.1, є його радіус *R*. Крім нього, можна виділити такі геометричні елементи земної кулі, аналогічні геометричним елементам земного еліпсоїда:

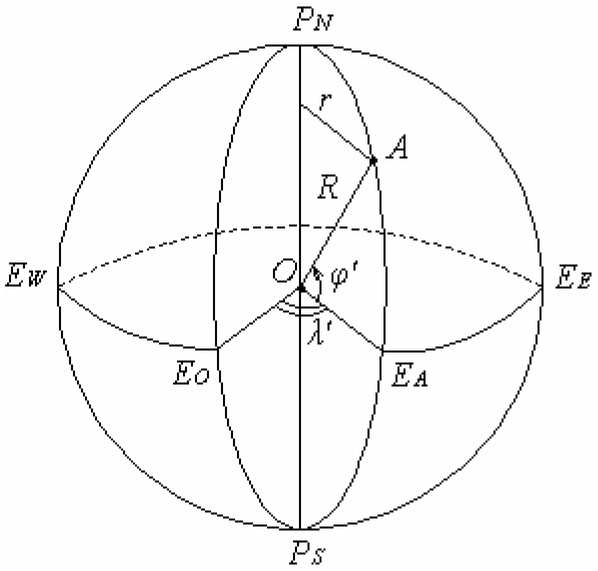


Рис. 2.1. Геометричні елементи земної кулі

- нормаль – *AO* перпендикуляр до поверхні кулі в точці *A*;
- полярна вісь ($P_N P_S$);
- північний і південний полюси (P_N і P_S) – паралелі з нульовим радіусом кривизни;
- екватор ($E_W E_O E_A E_E$) – найбільша паралель або паралель з найбільшим радіусом кривизни, який дорівнює радіусу кулі *R*;
- меридіани і паралелі – мають вигляд кіл;
- сферична широта (φ') – кут у площині меридіану точки *A* від екватора до нормалі в точці *A*. Існує дві земні півкулі, які поділяються екватором на північну і південну, в яких сферична широта набуває значень від 0° на екваторі до 90° на полюсах;
- сферична довгота (λ') – двогранний кут між площинами Гринвіцького і меридіану точки *A*. Існує дві земні півкулі, які поділяються Гринвіцьким меридіаном на східну і західну, в яких сферична довгота набуває значень від 0° на Гринвіцькому меридіані до 180° на лінії зміни дат.

Сферичні координати φ' і λ' дозволяють визначити положення тільки нормалі або точки на поверхні земної кулі.

Для земної кулі відсутні полярний стиск і ексцентриситет, тобто $\alpha = 0$ і $e = 0$.

Радіуси кривизни меридіана (1.5) і першого вертикала (1.6) земної кулі дорівнюють її радіусу

$$M = N = R. \tag{2.1}$$

Радіус кривизни паралелі земної кулі обчислюється за формулою, аналогічною (1.7)

$$r = R\cos\varphi'. \tag{2.2}$$

2.2. Зображення поверхні кулі на площині

Як і поверхню еліпсоїда, поверхню кулі також неможливо розгорнути на площині без розривів або складок. Тому зображення поверхні кулі на площині виходить спотвореним. Аналогічно зображенню поверхні еліпсоїда на площині можна виділити чотири види спотворень:

- спотворення довжин;
- спотворення площ;
- спотворення кутів;
- спотворення форм.

Під час зображення поверхні кулі на площині також приймаються три умови безперервності зображення (див. 1.1).

Картографічна сітка під час зображення поверхні кулі на площині є ***ортогональною***, тобто виконується умова (1.64).

Загальні рівняння картографічної проекції (1.9) для поверхні кулі мають вигляд

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varphi', \lambda'), \\ y &= f_2(\varphi', \lambda'). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Окремий масштаб довжин

Окремий масштаб довжин (1.45) на поверхні кулі обчислюється за такою формулою

$$\mu^2 = \frac{1}{R^2}\left(e\cos^2\alpha + \frac{f}{\cos\varphi'}\sin 2\alpha + \frac{g}{\cos^2\varphi'}\sin^2\alpha\right). \tag{2.4}$$

Масштаб довжин по меридіанах

Якщо значення азимута напрямку α = 0º (180º), то з формули (2.4) $\mu^2 = m^2 = \dfrac{e}{R^2}$. Тоді масштаб довжин по меридіанах можна обчислити за такою формулою

$$m = \frac{\sqrt{e}}{R}. \tag{2.5}$$

Цю формулу також можна отримати, підставивши у формулу (1.48) вираз (2.1).

Масштаб довжин по паралелях

Якщо значення азимута напрямку α = 90º (270º), то з формули (2.4) $\mu^2 = n^2 = \dfrac{g}{(R\cos\varphi')^2}$. Тоді масштаб довжин по паралелях можна обчислити за такою формулою

$$n = \frac{\sqrt{g}}{R\cos\varphi'}. \tag{2.6}$$

Цю формулу також можна отримати, підставивши у формулу (1.49) вираз (2.1).

Масштаб площі

Масштаб площі (1.88) для поверхні кулі обчислюється за такою формулою

$$p = mn = \frac{h}{R^2\cos\varphi'} = \frac{\sqrt{eg}}{R^2\cos\varphi'}. \tag{2.7}$$

Азимут довільного напрямку

Азимут довільного напрямку на поверхні кулі (1.43) обчислюється за такою формулою

$$tg\alpha = \frac{R\cos\varphi' d\lambda'}{Rud\varphi'} = \frac{\cos\varphi' d\lambda'}{ud\varphi'} = \frac{\cos\varphi'}{u}. \tag{2.8}$$

Азимут довільного напрямку на площині (1.56) обчислюється за такою формулою

$$tg\beta = \frac{hRtg\alpha}{eR\cos\varphi'} = \frac{htg\alpha}{e\cos\varphi'} = \frac{\sqrt{g}\cdot tg\alpha}{\sqrt{e}\cdot\cos\varphi'} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{eu}}. \tag{2.9}$$

Спотворення кутів

Спотворення кутів для поверхні кулі обчислюється за аналогічною формулою (1.100)

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{m-n}{m+n}.$$

2.3. Геоцентричні координати

Геоцентричні координати – це просторові прямокутні координати X, Y, Z, що віднесені до центра земного еліпсоїда або кулі.

На даний час у глобальній системі позиціювання GPS використовується світова геодезична система WGS-84 (G873), глобальна узгодженість якої складає близько 0,1 м. Світова геодезична система WGS-84 є Загальноземною референцною системою. Визначення цієї системи дано Міжнародною службою обертання Землі. Основні критерії даної системи:

• геоцентрична, визначаючи центр мас враховуються також маси океанів та атмосфери;

• масштаб системи такий, як і в локальній системі координат з урахуванням релятивної теорії гравітаційного поля;

• орієнтація системи за визначенням Міжнародного бюро часу на епоху 1984 року;

• зміни положення системи з часом повинні узгоджуватися з рухом земної кори.

Система WGS-84 є правостороння ортогональна система координат, початок якої суміщений із центром мас Землі (рис. 2.2).

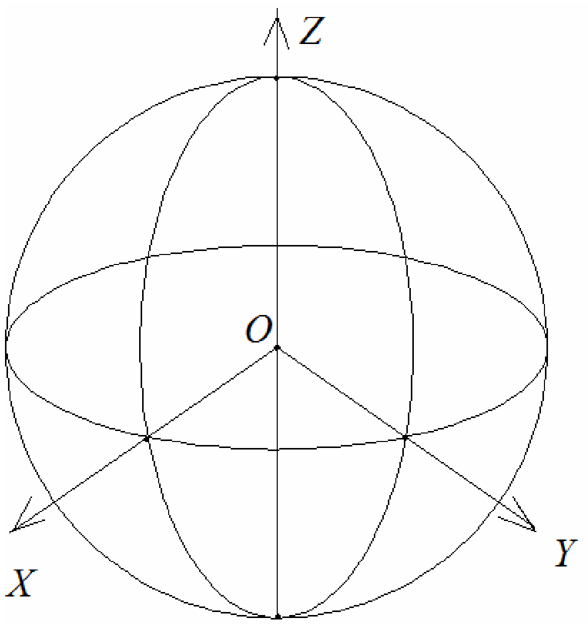


Рис. 2.2. Система координат WGS-84

Початок та осі системи WGS-84 задаються таким чином (рис. 2.2):

• за початок координат береться центр мас Землі;

• вісь *Z* – направлена на Умовний земний полюс, як рекомендовано Міжнародною службою обертання Землі. Цей напрямок відповідає напрямку на Загальноземний полюс за визначенням Міжнародного Бюро Часу на епоху 1984 року з похибкою 0,005";

• вісь *X* – направлена в точку перетину нульового (Грінвічського) меридіана з площиною екватора, які встановлені Міжнародною службою обертання Землі;

• вісь *Y* – завершує правосторонню ортогональну систему координат з початком у центрі мас Землі. Вона розміщена в площині екватора під кутом 90^o на схід від осі *X*.

Координатна система WGS-84 суміщена з геометричним центром загальноземного еліпсоїда WGS-84, а вісь *Z* – з віссю обертання цього еліпсоїда.

2.3.1. *Геоцентричні координати земного еліпсоїда*

Рівняння земного еліпсоїда в геоцентричних координатах *X*, *Y*, *Z* має вигляд

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{b^2}=1. \tag{2.10}$$

З рис. 2.3 рівняння меридіанного еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.11}$$

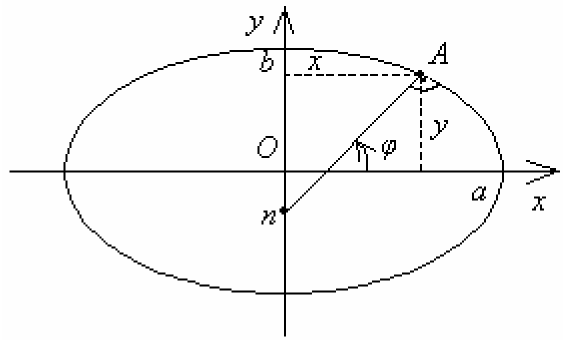


Рис. 2.3. Зображення меридіанного еліпса

Між геоцентричними координатами *X*, *Y*, *Z* еліпсоїда й плоскими прямокутними координатами *x*, *y* еліпса існує зв'язок (рис. 2.4). Звідки:

$$\begin{aligned} X &= x\cos\lambda, \\ Y &= x\sin\lambda, \\ Z &= y, \end{aligned} \tag{2.12}$$

де λ – сфероїдична довгота (двогранний кут між площиною меридіана даної точки й площиною меридіана, що проходить через вісь *X*).

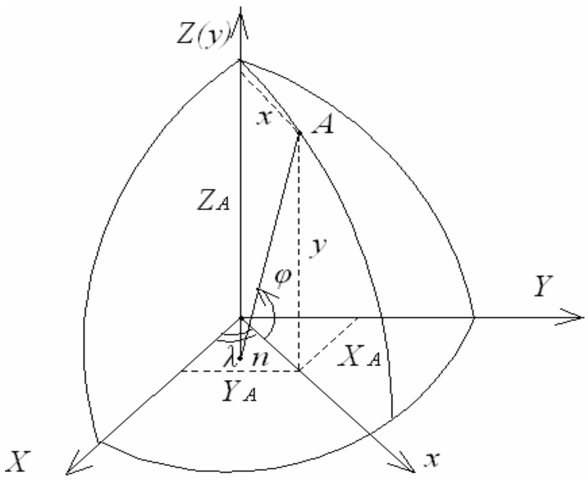


Рис. 2.4. Зв'язок між геоцентричними та плоскими прямокутними координатами

З урахуванням параметрів земного еліпсоїда і рис. 2.4 отримаємо, що

$$x = r = N\cos\varphi = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a\cos\varphi}{W},$$
$$y = N(1-e^2)\sin\varphi = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{W}. \qquad (2.13)$$

Підставивши вирази (2.13) у рівняння (2.12), одержимо остаточні формули обчислення геоцентричних координат еліпсоїда

$$X = \frac{a\cos\varphi\cos\lambda}{W},$$
$$Y = \frac{a\cos\varphi\sin\lambda}{W}, \qquad (2.14)$$
$$Z = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{W}.$$

2.3.2. Геоцентричні координати земної кулі

Рівняння земної кулі радіуса R у геоцентричних координатах має вигляд

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2. \qquad (2.15)$$

Рівняння меридіанного кола має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (2.16)$$

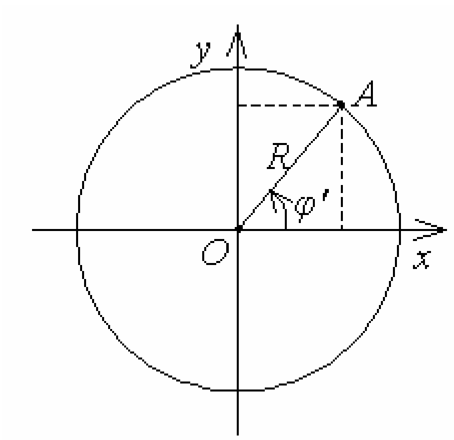


Рис. 2.5. Зображення меридіанного кола

З рис. 2.5 отримаємо, що

$$x = R\cos\varphi,$$
$$y = R\sin\varphi. \qquad (2.17)$$

Підставивши вирази (2.17) у рівняння (2.12) одержимо остаточні формули обчислення геоцентричних координат земної кулі:

$$X = R\cos\varphi\cos\lambda,$$
$$Y = R\cos\varphi\sin\lambda, \qquad (2.18)$$
$$Z = R\sin\varphi.$$

2.4. Полярні сферичні координати

За земну поверхню в косих і поперечних картографічних проекціях береться тільки поверхня земної кулі, радіус якої є залежним від якоїсь заданої умови (рівнокутне, рівновелике, рівнопроміжкове по меридіанах або рівнопроміжкове по паралелях зображення).

У косій і поперечній картографічних проекціях нормальна сітка не збігається з основною. Нормальною в цих проекціях буде сітка вертикалів і альмукантаратів.

Вертикали – це великі кола, що перетинаються в точках полюсів Q і Q' косої або поперечної систем координат.

Альмукантарати – це малі кола перпендикулярні вертикалам.

Положення вертикалів на картографічній поверхні визначається азимутом a, який дорівнює двогранному куту між площинами початкового і поточного вертикалів (рис. 2.7). Значення азимута a може бути від 0 до 360°. ***Початковим*** називається вертикал, який збігається з меридіаном полюса Q косої або поперечної системи координат, тобто має довготу λ_0.

Сітку вертикалів і альмукантаратів можна представити як зміщену сітку меридіанів і паралелей, в якій географічний полюс P замінений полюсом Q (φ_0, λ_0) косої або поперечної систем координат (рис. 2.6).

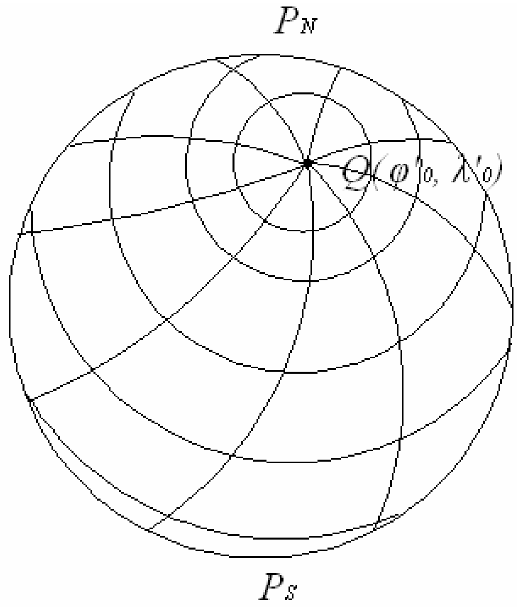


Рис. 2.6. Сітка вертикалів та альмукантаратів

Положення альмукантарату на картографічній поверхні визначається зенітною відстанню z, що дорівнює дузі вертикала від полюса косої або поперечної систем координат Q до поточного альмукантарату (рис. 2.7). Зенітна відстань може набувати значень від 0º на полюсі Q до 180° на полюсі Q'.

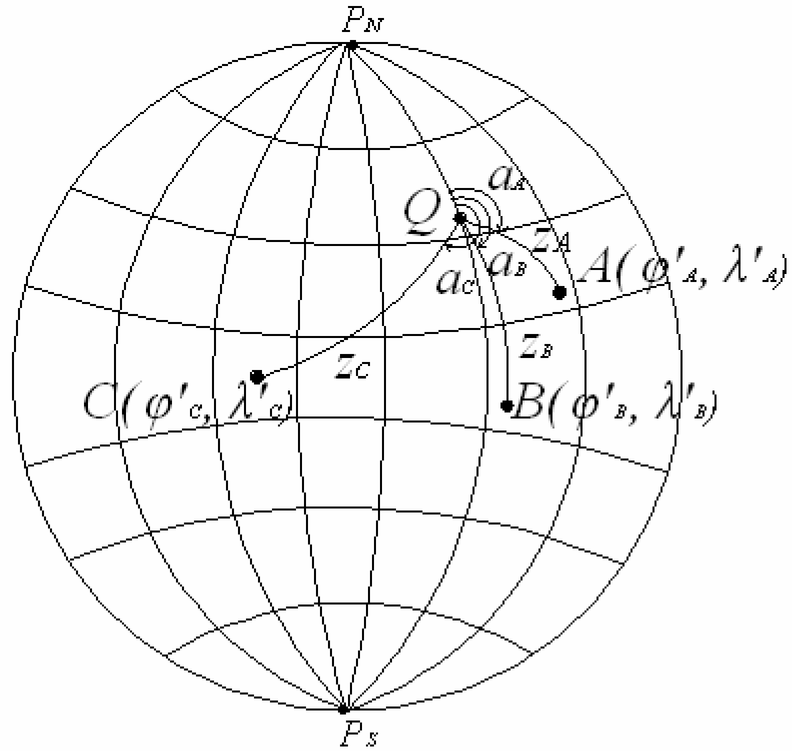


Рис. 2.7. Положення довільних точок у полярній сферичній системі координат

Перехід від сферичних координат до сферичних полярних координат косої або поперечної проекції здійснюється за відомими формулами сферичної тригонометрії:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \sin\varphi' \sin\varphi'_0 + \cos\varphi' \cos\varphi'_0(\lambda'_0 - \lambda'),\\
\sin z \sin a &= \cos\varphi' \sin(\lambda'_0 - \lambda'),\\
\sin z \cos a &= \sin\varphi' \cos\varphi'_0 - \cos\varphi' \sin\varphi'_0 \cos(\lambda'_0 - \lambda').
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Розділивши в (2.19) другу формулу на третю одержимо

$$tga = \frac{\cos\varphi' \sin(\lambda'_0 - \lambda')}{\sin\varphi' \cos\varphi'_0 - \cos\varphi' \sin\varphi'_0 \cos(\lambda'_0 - \lambda')}. \tag{2.20}$$

Для переходу до полярних сферичних координат необхідно знати координати φ'_0 і λ'_0 полюса Q. У косих картографічних проекціях координати полюса Q задаються якоюсь умовою або визначаються за такими формулами:

$$\varphi'_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi'_i}{n}, \tag{2.21}$$

$$\lambda'_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i}{n}, \qquad (2.22)$$

де φ'_i, λ'_i – сферичні координати контуру картографованої території, взяті через якийсь невеликий інтервал.

У поперечних картографічних проекціях довгота полюса Q визначається за аналогічною формулою (2.21), а його широта завжди дорівнює нулю ($\varphi'_0 = 0$).

2.5. Контрольні питання

1. Наведіть геометричні елементи земної кулі.
2. Що таке сферичні координати?
3. Який вигляд мають паралелі під час зображення поверхні кулі на площині?
4. Який вигляд мають меридіани під час зображення поверхні кулі на площині?
5. Які види спотворень виникають при зображені поверхні кулі на площині?
6. Дайте визначення кожному виду спотворення.
7. Наведіть умови безперервності зображення поверхні кулі на площині.
8. Який вигляд має картографічна сітка під час зображення поверхні кулі на площині.
9. Які параметри, що використовуються для опису земного еліпсоїда, відсутні при описі земної кулі?
10. Від чого залежить масштаб довжин по меридіанах і масштаб довжин по паралелях під час зображення поверхні кулі на площині?
11. Від чого залежить масштаб площі під час зображення поверхні кулі на площині?
12. Від яких величин залежить максимальне спотворення кутів у точці?
13. Що таке геоцентричні координати?
14. Чим відрізняються формули геоцентричних координат для поверхні еліпсоїда і кулі?
15. Що таке полярні сферичні координати?
16. Дайте визначення вертикалам.
17. Дайте визначення альмукантаратам.
18. Що таке азимут a полярних сферичних координат? Яких значень він може набувати?
19. Що таке зенітна відстань z полярних сферичних координат? Яких значень вона може набувати?
20. Який вигляд має картографічна сітка в косих проекціях?
21. Який вигляд має картографічна сітка в поперечних проекціях?

3. ЗОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ ЕЛІПСОЇДА НА ПОВЕРХНІ КУЛІ

3.1. Основні положення

Картографічні проекції можуть бути отримані шляхом безпосереднього зображення поверхні еліпсоїда на площині (розділ 1) або ***способом подвійного відображення***, коли поверхня еліпсоїда зображується на поверхні кулі, а потім остання відображається на площині. У більшості випадків спосіб подвійного відображення є більш простим і ефективним.

Загальні рівняння зображення еліпсоїда на поверхні кулі мають вигляд

$$\begin{aligned} \varphi' &= f_1(\varphi, \lambda), \\ \lambda' &= f_2(\varphi, \lambda). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Якщо екваторіальні площини еліпсоїда і кулі та їх центри збігаються, то

$$\begin{aligned} \varphi' &= f(\varphi), \\ \lambda' &= \alpha\lambda, \end{aligned} \tag{3.2}$$

де

$$\alpha = \frac{d\lambda'}{d\lambda} \tag{3.3}$$

– коефіцієнт пропорційності довгот, причому $\alpha \le 1$.

Найбільш простим є спосіб, у якому можна зневажити полярним стиском, тоді

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi, \\ \lambda' &= \lambda. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Радіус земної кулі залежить від поставленої умови, наприклад:

- рівність об’ємів кулі й еліпсоїда ($V_к = V_{ел}$, тоді $R = \sqrt[3]{a^2 b} = 6371108$ м);
- рівність площ поверхонь кулі й еліпсоїда ($P_к = P_{ел}$, тоді $R = 6371116$ м);
- рівність довжини екватора кулі й еліпсоїда або рівність радіуса кулі великій півосі еліпсоїда ($R = a = 6378245$ м);
- рівність радіуса кулі малій півосі еліпсоїда ($R = b = 6356863$ м);
- рівність довжин дуг меридіанів ($S_к^{90} = S_{ел}^{90}$, тоді $R = 6367558$ м) або паралелей кулі й еліпсоїда тощо.

Наприклад, при радіусі кулі $R = a$ максимальне спотворення довжин буде $v_\mu = -0{,}3 \div +0{,}7\%$, максимальне спотворення площ – $v_p = \pm 0{,}7\%$, максимальне спотворення кутів – $\omega = 0{,}4°$. А при радіусі $R = \dfrac{a+b}{2}$ максимальне спотворення довжин буде $v_\mu = \pm 0{,}5\%$, максимальне спотворення площ – $v_p = -1{,}0 \div +0{,}4\%$, максимальне спотворення кутів $\omega = 0{,}4°$.

Для невеликих територій радіус кулі обчислюють за такими формулами

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{M_0 N_0}, \\ R &= \sqrt{R_N R_S}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

де M_0 і N_0 – радіуси кривизни меридіана (1.5) і першого вертикала (1.6) центральної точки відображаємої території еліпсоїда відповідно; R_N і R_S – середні радіуси кривизни (1.8) північної і південної точок відображуваної території еліпсоїда відповідно.

Одержимо основні формули масштабів і спотворень, що виникають під час зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

Окремий масштаб довжин

Згідно з формулою (1.12), окремий масштаб довжин дорівнює

$$\mu = \frac{dl'}{dl} = \frac{\sqrt{dl_m'^2 + dl_n'^2}}{\sqrt{dl_m^2 + dl_n^2}}, \tag{3.6}$$

де dl – елементарний відрізок на поверхні еліпсоїда; dl' – відповідний елементарний відрізок на поверхні кулі; dl_m' і dl_n' – елементарні відрізки дуг меридіана і паралелі на поверхні кулі відповідно; dl_m і dl_n – елементарні відрізки дуг меридіана і паралелі на поверхні еліпсоїда (1.36) відповідно.

При чому:

$$\begin{aligned} dl_m' &= Rd\varphi', \\ dl_n' &= R\cos\varphi' d\lambda'. \end{aligned} \tag{3.7}$$

З урахуванням виразів (3.7) і (1.36) формула окремого масштабу довжин (3.6) набуде вигляду

$$\mu^2 = \frac{R^2 d\varphi'^2 + R^2\cos^2\varphi' d\lambda'^2}{(Md\varphi)^2 + (rd\lambda)^2} = \frac{R^2(d\varphi'^2 + \cos^2\varphi' d\lambda'^2)}{(Md\varphi)^2 + (N\cos\varphi d\lambda)^2}. \tag{3.8}$$

Масштаб довжин по меридіанах

При λ = const з формули (3.8) масштаб довжин по меридіанах можна обчислити за такою формулою

$$m = \frac{Rd\varphi'}{Md\varphi}. \tag{3.9}$$

Масштаб довжин по паралелях

При φ = const з формули (3.8) масштаб довжин по паралелях можна обчислити за такою формулою

$$n = \frac{R\cos\varphi' d\lambda'}{rd\lambda} = \alpha\frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi}. \tag{3.10}$$

Масштаб площі

З урахуванням формул (3.9) і (3.10) масштаб площі обчислюється за такою формулою

$$p = mn = \alpha\frac{R^2\cos\varphi' d\varphi'}{MN\cos\varphi d\varphi}. \tag{3.11}$$

Спотворення кутів

Спотворення кутів обчислюється за відомою формулою (1.100)

$$\sin\frac{\omega}{2}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{m-n}{m+n}.$$

Як видно з формул (3.8-3.11), при зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі масштаби довжин і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти, тому ізоколи й ізогони мають вигляд концентричних кіл, що збігаються з паралелями.

У математичній картографії найбільше поширення одержали способи рівнокутного, рівновеликого та рівнопроміжкового по меридіанах або паралелях зображень.

3.2. Рівнокутне зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

При рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда поверхні кулі ставиться умова незалежності масштабу довжини від напрямку, тобто зберігається подібність елементарних фігур $w=1$ і відсутні спотворення кутів $\omega=0$

$$\mu=m=n. \tag{3.12}$$

Підставивши у вираз (3.12) формули (3.9) і (3.10), одержимо

$$\frac{Rd\varphi'}{Md\varphi}=\alpha\frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi}. \tag{3.13}$$

Перетворимо вираз (3.13) так, щоб ліворуч були елементи тільки сферичної широти, а праворуч – сфероїдичної широти

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\alpha\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}. \tag{3.14}$$

З урахуванням формул (1.5) і (1.6)

$$\frac{M}{N}=\frac{1-e^2}{W^2}=\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}. \tag{3.15}$$

З урахуванням формули (3.15) вираз (3.14) набуде вигляду

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\alpha\frac{\left(1-e^2\right)d\varphi}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)\cos\varphi}. \tag{3.16}$$

Помножимо e^2 у чисельнику виразу (3.16) на $(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)$ і перетворимо отриманий вираз

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\alpha\frac{\left(1-e^2\sin^2\varphi-e^2\cos^2\varphi\right)d\varphi}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)\cos\varphi}=\alpha\left(\frac{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)d\varphi}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)\cos\varphi}-\frac{\left(e^2\cos^2\varphi\right)d\varphi}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)\cos\varphi}\right)=$$

$$=\alpha\left(\frac{d\varphi}{\cos\varphi}-e\frac{e\cos\varphi d\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\right). \tag{3.17}$$

Уведемо позначення

$$\sin\psi=e\sin\varphi, \tag{3.18}$$

де ψ – функція широти, яка дорівнює нулю при $\varphi = 0°$.
Тоді

$$d(e\sin\varphi) = e\cos\varphi d\varphi = d(\sin\psi) = \cos\psi d\psi\,. \tag{3.19}$$

З урахуванням (3.18) і (3.19) вираз (3.17) набуде вигляду

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = \alpha\left(\frac{d\varphi}{\cos\varphi} - e\frac{\cos\psi d\psi}{1-\sin^2\psi}\right) = \alpha\left(\frac{d\varphi}{\cos\varphi} - e\frac{d\psi}{\cos\psi}\right). \tag{3.20}$$

Після інтегрування виразу (3.20) одержимо

$$\ln tg\left(45° + \frac{\varphi'}{2}\right) = \alpha \ln tg\left(45° + \frac{\varphi'}{2}\right) - \alpha e \ln tg\left(45° + \frac{\psi}{2}\right) + \ln C\,. \tag{3.21}$$

Звідки

$$tg\left(45° + \frac{\varphi'}{2}\right) = CU^{\alpha}\,, \tag{3.22}$$

де U – ізометрична широта, що обчислюється за формулою

$$U = \frac{tg\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)}{tg^e\left(45° + \frac{\psi}{2}\right)} = tg\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}. \tag{3.23}$$

У 1807 р. Мольвейде було запропоновано, а у 1825 р. Гауссом реалізовано, що рівнокутне зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі характеризується такими початковими умовами: довжини зберігаються на екваторі, $\varphi_0' = \varphi_0 = 0°$ і $\lambda' = \lambda$, звідки $C = 1$ і $\alpha = 1$.

Значення сферичної широти з точністю до 0,1" може бути обчислене за формулою

$$\varphi' = \varphi - A\sin 2\varphi + B\sin 4\varphi\,, \tag{3.24}$$

де

$$A = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{5}{24}e^4\right)\rho = 692{,}23''\,,$$

$$B = \frac{5}{48}e^4\rho = 0{,}96''\,.$$

Наближене значення сферичної широти може бути обчислене за такою формулою

$$\varphi' = \varphi - \frac{e^2}{2}\rho\sin 2\varphi\,. \tag{3.25}$$

Наприклад, якщо значення сфероїдичної широти $\varphi \approx 45°$ максимальна різниця між сфероїдичною і сферичною широтами буде $(\varphi - \varphi')_{\max} \approx 12'$.

Радіус кулі

Радіус кулі обчислюється за формулою

$$R = a\left(1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi_0\right). \qquad (3.26)$$

Тоді при $\varphi_0 = 0°$: $R = a = 6378245м$.

Масштаб довжин

Окремий масштаб довжин обчислюється за формулою

$$\mu = m = n \approx \frac{R}{a}\left(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi\right). \qquad (3.27)$$

При $R = a$

$$\mu = m = n \approx 1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi. \qquad (3.28)$$

Наприклад, при $\varphi = 90°$: $\mu_{\max} = 1{,}003$ або $v_{\mu\max} = +0{,}3\%$.

Масштаб площі

Масштаб площі обчислюється за формулою

$$p = m^2 \approx \frac{R^2}{a^2}\left(1 + e^2\sin^2\varphi\right). \qquad (3.29)$$

При $R = a$

$$p = m^2 \approx 1 + e^2\sin^2\varphi. \qquad (3.30)$$

Наприклад, при $\varphi = 90°$: $p_{\max} = 1{,}007$ або $v_{p\max} = +0{,}7\%$.

Основні формули:

1. $\varphi' = \varphi - 692{,}23''\sin 2\varphi + 0{,}96''\sin 4\varphi$,
2. $\lambda' = \lambda$,
3. $R = a\left(1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi_0\right)$, при $\varphi_0 = 0$ $R = a = 6378245$ м,
4. $\mu = m = n \approx \frac{R}{a}\left(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi\right)$, (3.31)
5. $p = m^2 \approx \frac{R^2}{a^2}\left(1 + e^2\sin^2\varphi\right)$,
6. $\omega = 0$.

Як видно з основних формул (3.31), при рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі її радіус, масштаби довжин і площ залежать тільки від широти. Максимальні значення масштабів довжин і площ виходять на полюсах, а мінімальні – на екваторі. Ізоколи мають вигляд концентричних кіл, що збігаються з паралелями.

3.3. Приклади розрахунків при рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Для наочності теоретичного матеріалу, викладеного в попередньому підрозділі, виконаємо обчислення значень радіусу земної кулі, сферичної широти, масштабів та спотворень при рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Розрахунки виконаємо для семи паралелей зі значенням сферичної широти φ від 0° до 90° через кожні 15°.

Значення сферичної широти φ' обчислюється за формулою (3.24). Результати розрахунків наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Значення сферичної довготи φ'

φ, °	0	15	30	45	60	75	90
φ'	0°00′00″	14°54′15″	29°50′02″	44°48′28″	59°50′00″	74°54′14″	90°00′00″
$\varphi-\varphi'$	0°00′00″	0°05′45″	0°09′58″	0°11′32″	0°10′00″	0°05′46″	0°00′00″

За даними табл. 3.1 побудовано графік залежності різниці $\Delta\varphi=\varphi-\varphi'$ від значення сфероїдичної широти φ (рис. 3.1).

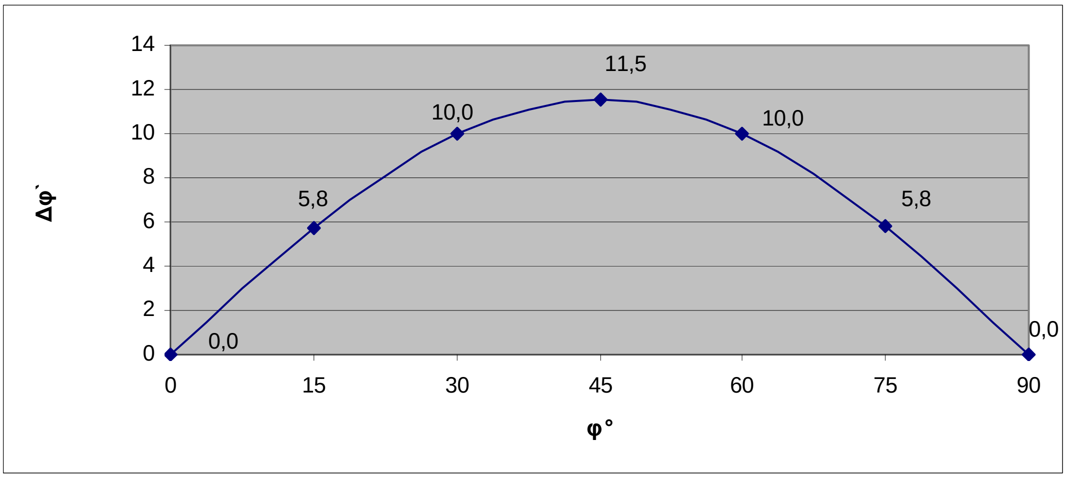


Рис. 3.1. Графік залежності $\Delta\varphi$ від широти φ

Значення радіусу кулі обчислюється за формулою (3.26) при e^2 = 0,0066934275. Результати розрахунків наведено у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Значення радіуса земної кулі R

φ_0, °	0	15	30	45	60	75	90
R, *м*	6 378 245	6 372 720	6 367 572	6 363 151	6 359 759	6 357 626	6 356 899

За даними табл. 3.2 побудовано графік залежності радіусу земної кулі R від сфероїдичної широти φ (рис. 3.2).

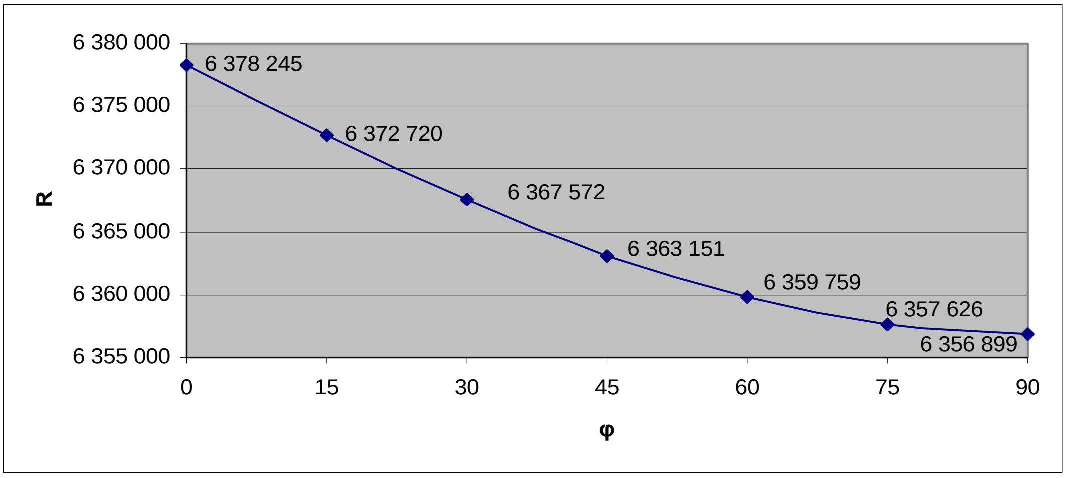


Рис. 3.2. Графік залежності R від широти φ

Для кожного значення R обчислимо по сім значень масштабів довжин та площ за формулами (3.27) і (3.29) відповідно. Результати розрахунків наведено у табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Значення масштабів довжин та площ

R, м	*φ,* °	0	15	30	45	60	75	90
6378245	*m*	1,000000	1,000224	1,000837	1,001673	1,002510	1,003123	1,003347
	p	1,000000	1,000448	1,001673	1,003347	1,005020	1,006245	1,006693
6372720	*m*	0,999134	0,999358	0,999970	1,000806	1,001642	1,002254	1,002478
	p	0,998268	0,998716	0,999939	1,001609	1,003280	1,004503	1,004950
6367572	*m*	0,998327	0,998550	0,999162	0,999997	1,000832	1,001444	1,001668
	p	0,996656	0,997103	0,998324	0,999992	1,001659	1,002880	1,003327
6363151	*m*	0,997634	0,997857	0,998468	0,999303	1,000138	1,000749	1,000972
	p	0,995273	0,995719	0,996938	0,998604	1,000269	1,001488	1,001934
6359759	*m*	0,997102	0,997325	0,997936	0,998770	0,999604	1,000215	1,000439
	p	0,994212	0,994658	0,995875	0,997539	0,999203	1,000421	1,000866
6357626	*m*	0,996767	0,996991	0,997601	0,998435	0,999269	0,999880	1,000103
	p	0,993545	0,993991	0,995208	0,996870	0,998533	0,999750	1,000195
6356899	*m*	0,996653	0,996877	0,997487	0,998321	0,999155	0,999765	0,999989
	p	0,993318	0,993763	0,994980	0,996642	0,998304	0,999521	0,999966

За даними табл. 3.3 побудовані графіки залежності масштабів довжин m та площ p від значення сфероїдичної широти φ (рис. 3.3 – 3.9).

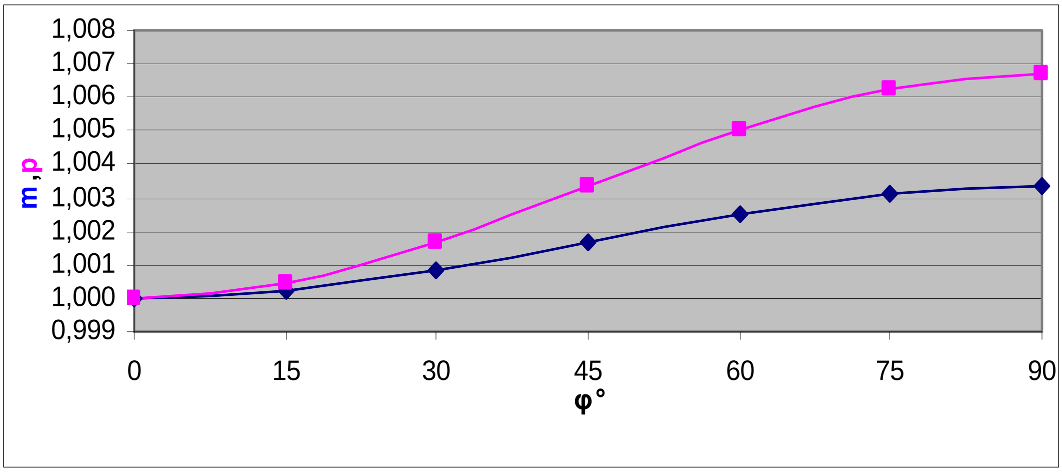


Рис. 3.3. Графік залежності m і p від широти φ при $R = 6378245$ м

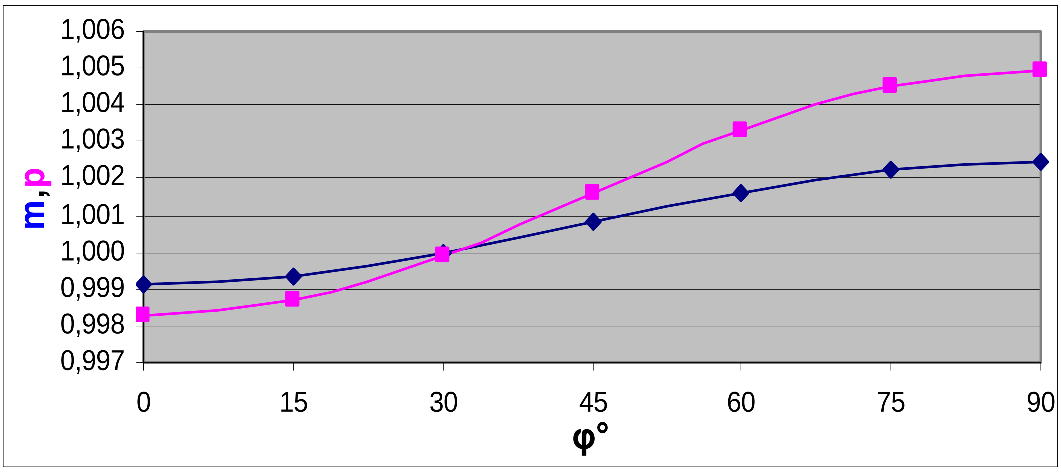


Рис. 3.4. Графік залежності m і p від широти φ при $R = 6372521$ м

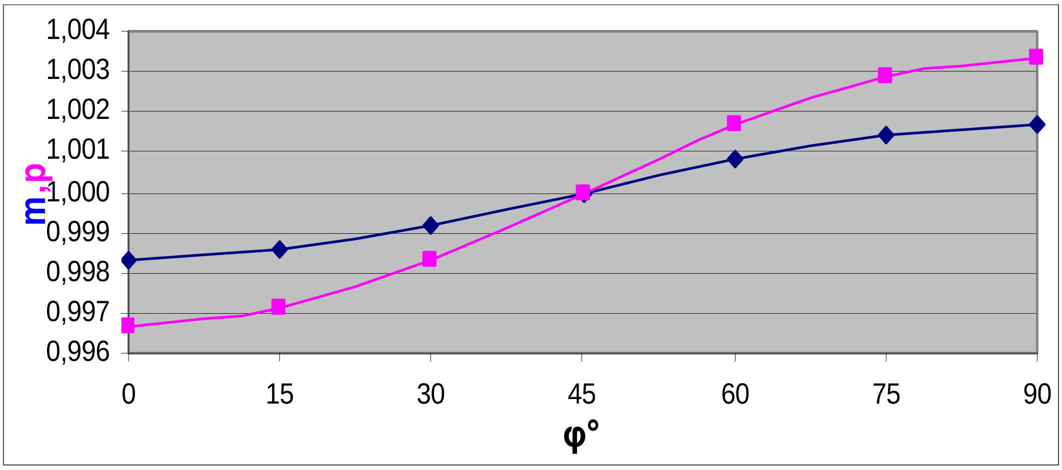


Рис. 3.5. Графік залежності m і p від широти φ при $R = 6367188$ м

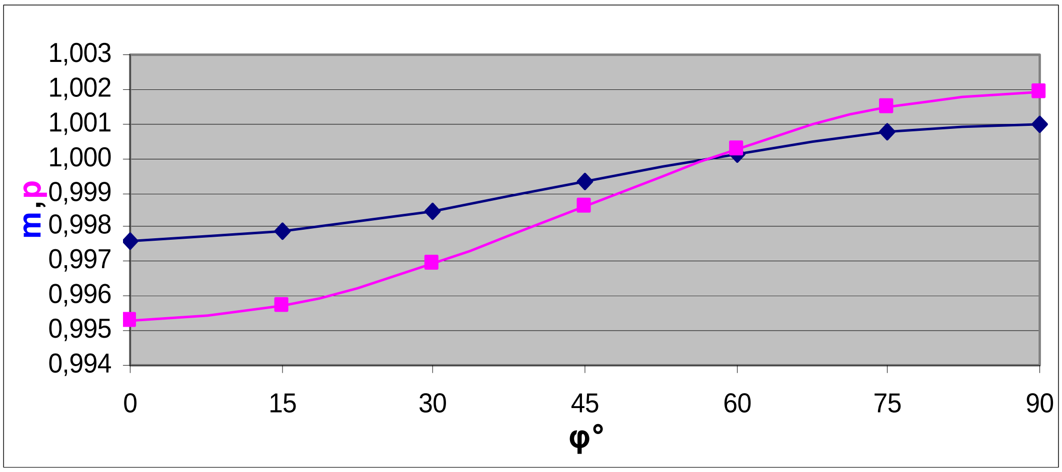


Рис. 3.6. Графік залежності m і p від широти φ при R = 6362608 м

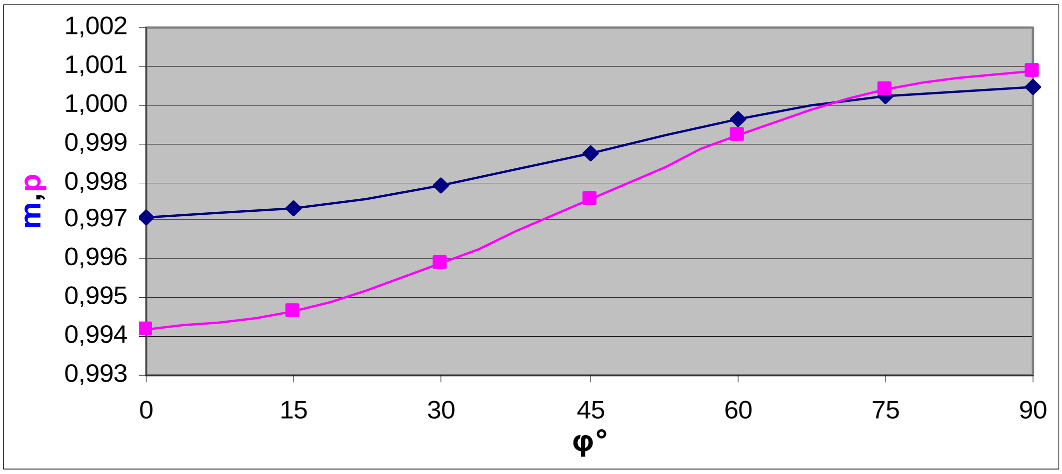


Рис. 3.7. Графік залежності m і p від широти φ при R = 6359094 м

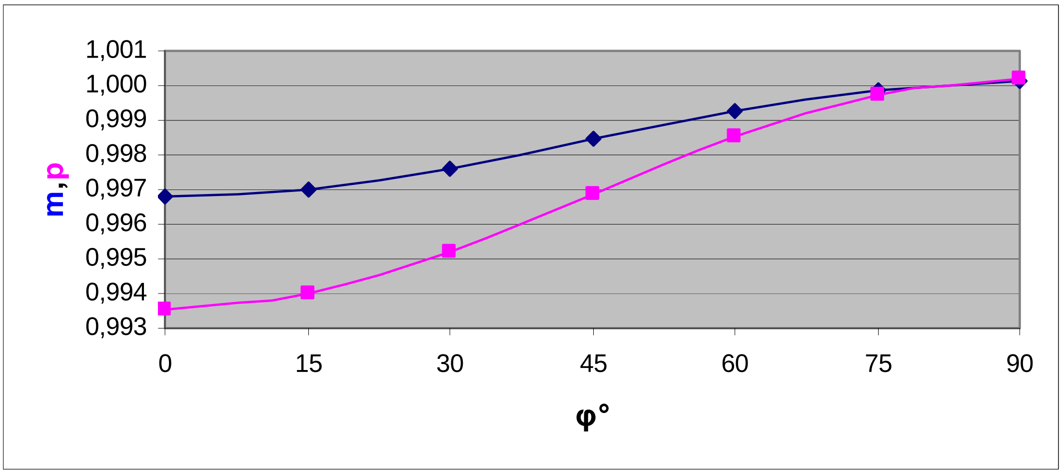


Рис. 3.8. Графік залежності m і p від широти φ при R = 6356885 м

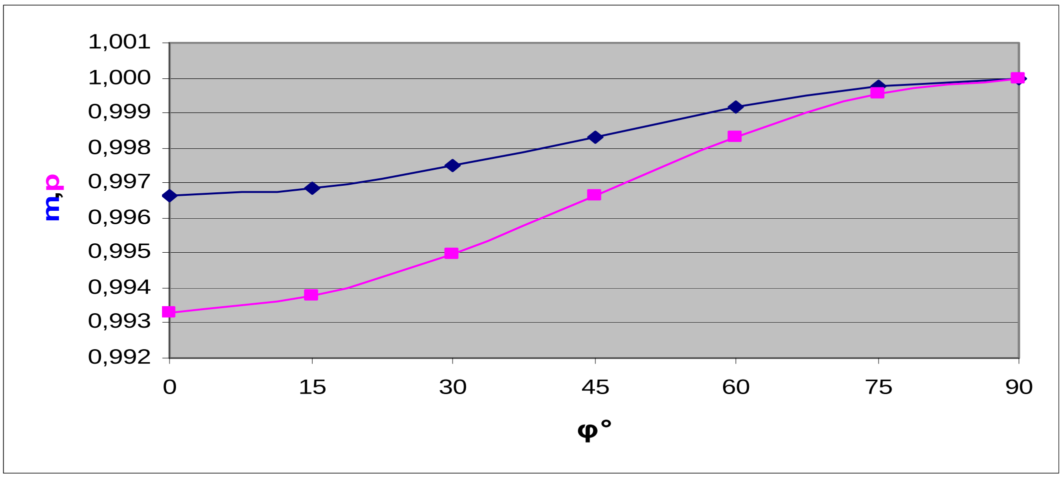


Рис. 3.9. Графік залежності m і p від широти φ при $R = 6356131$ м

Як видно з даних табл. 3.3 і рис. 3.3 – 3.9, висновки попереднього підрозділу збігаються, а саме: при рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальна різниця між сфероїдичною і сферичною широтами буде у середніх широтах; радіус земної кулі, масштаби довжин і площ залежать тільки від широти. Максимальні значення масштабів довжин і площ виходять на полюсах, а мінімальні – на екваторі.

3.4. Рівновелике зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

При рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі ставиться умова збереження сталості відношення площ зображення і зображуваної поверхні, тобто масштаб площі є постійною величиною і, зокрема, дорівнює одиниці $p = mn = const = 1$ або

$$p = \alpha \frac{R^2 \cos\varphi' d\varphi'}{MN \cos\varphi d\varphi} = 1. \tag{3.32}$$

Перетворимо вираз (3.32) так, щоб ліворуч були елементи тільки сферичної широти, а праворуч – сфероїдичної широти

$$\cos\varphi' d\varphi' = \frac{MN}{\alpha R^2} \cos\varphi d\varphi. \tag{3.33}$$

З урахуванням формул (1.5) і (1.6)

$$MN = \frac{a^2(1-e^2)}{W^4} = \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}. \tag{3.34}$$

З урахуванням формули (3.34) вираз (3.33) набуде вигляду

$$\cos\varphi' d\varphi' = \frac{a^2(1-e^2)}{\alpha R^2} \frac{\cos\varphi d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}. \tag{3.35}$$

Розклавши в ряд Тейлора праву частину виразу (3.35), одержимо

$$\cos\varphi' d\varphi' = \frac{a^2(1-e^2)}{\alpha R^2}\left(1+2e^2\sin^2\varphi+3e^4\sin^4\varphi+4e^6\sin^6\varphi+\ldots\right)\cos\varphi d\varphi . \qquad (3.36)$$

Після інтегрування виразу (3.36), одержимо

$$\sin\varphi' = \frac{a^2(1-e^2)}{\alpha R^2}\left(1+\frac{2}{3}e^2\sin^2\varphi+\frac{3}{5}e^4\sin^4\varphi+\frac{4}{7}e^6\sin^6\varphi+\ldots\right)\sin\varphi + C . \qquad (3.37)$$

При рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі приймаються такі початкові умови: $\varphi_0' = \varphi_0 = 0°$, $\varphi_{90°}' = \varphi_{90°} = 90°$ і $\lambda' = \lambda$, тоді $C = 0$ і $\alpha = 1$.

Радіус кулі визначається з умови рівності площ поверхонь кулі й еліпсоїда $P_к = P_{ел}$, тобто

$$4\pi R^2 = 4\pi a^2(1-e^2)\left(1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+\ldots\right). \qquad (3.38)$$

Виконавши деякі перетворення, одержимо:

$$R^2 = a^2(1-e^2)\left(1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+\ldots\right), \qquad (3.39)$$

або

$$R = a\left(1-\frac{e^2}{6}-\frac{17}{360}e^4-\ldots\right) = 6371116\,м . \qquad (3.40)$$

Підставивши отриманий вираз (3.39) у (3.37), одержимо

$$\sin\varphi' = \sin\varphi\frac{1+\frac{2}{3}e^2\sin^2\varphi+\frac{3}{5}e^4\sin^4\varphi+\frac{4}{7}e^6\sin^6\varphi+\ldots}{1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+\ldots}. \qquad (3.41)$$

Значення сферичної широти з точністю до 0,1" може бути обчислене за формулою (3.24)

$$\varphi' = \varphi - A\sin 2\varphi + B\sin 4\varphi ,$$

де

$$A = \left(\frac{e^2}{3}+\frac{31}{180}e^4\right)\rho = 461{,}81'' ,$$

$$B = \frac{17}{360}e^4\rho = 0{,}44'' .$$

Для наближених розрахунків сферичної широти можна застосовувати таку формулу

$$\varphi' = \varphi - \frac{e^2}{3}\rho\sin 2\varphi . \qquad (3.42)$$

Наприклад, якщо значення сфероїдичної широти $\varphi \approx 45°$, то максимальна різниця між сфероїдичною і сферичною широтами буде $(\varphi-\varphi')_{\max} \approx 8'$.

Масштаб довжин по паралелях

З урахуванням виразу (3.41) масштаб довжин по паралелях (3.10) обчислюється за формулою

$$n = \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi} \approx 1 - \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi . \tag{3.43}$$

Наприклад, при $\varphi = 0°$: $n_{\min} = 0{,}999$ або $v_{n\,\max} = -0{,}1\%$.

Масштаб довжин по меридіанах

Оскільки $p = m\,n = 1$, то

$$m = \frac{1}{n} \approx 1 + \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi . \tag{3.44}$$

Наприклад, при $\varphi = 0°$: $m_{\max} = 1{,}001$ або $v_{m\,\max} = +0{,}1\%$.

Спотворення кутів

Для визначення спотворення кутів замість формули (1.100) краще використовувати формулу (1.99)

$$tg\left(45° + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{m}{n}} = m \approx 1 + \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi \tag{3.45}$$

або

$$\omega = \frac{e^2}{3}\rho\cos^2\varphi . \tag{3.46}$$

Наприклад, при $\varphi = 0°$ максимальне спотворення кутів $\omega_{\max} \approx 8'$.

Основні формули:

$$\begin{aligned}
&1.\ \varphi' = \varphi - 461{,}81''\sin 2\varphi + 0{,}44''\sin 4\varphi ,\\
&2.\ \lambda' = \lambda ,\\
&3.\ R = a\left(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17}{360}e^4\right) = 6371116\,м ,\\
&4.\ m = 1 + \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi ,\\
&5.\ n = 1 - \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi ,\\
&6.\ p = 1 ,\\
&7.\ \omega = \frac{e^2}{3}\rho\cos^2\varphi .
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Як видно з основних формул (3.47), при рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі масштаби довжин по меридіанах і паралелях та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин та кутів виходять на екваторі і відсутні на полюсах. Ізоколи й ізогони мають вигляд концентричних кіл, що збігаються з паралелями.

3.5. Приклади розрахунків при рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Для наочності теоретичного матеріалу, викладеного в попередньому підрозділі, виконаємо обчислення величин сферичної широти, масштабів та спотворень при рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Розрахунки виконаємо для семи паралелей із значенням сферичної широти φ від 0° до 90° через кожні 15° при $e^2 = 0{,}0066934275$.

Значення сферичної широти φ' обчислюється за формулою (3.24), а саме: $\varphi' = \varphi - 461{,}81'' \sin 2\varphi + 0{,}44'' \sin 4\varphi$. Результати розрахунків наведено у табл. 3.4.

Значення масштабів довжин по меридіанах m та по паралелях n обчислено за формулами (3.44) і (3.43) відповідно. Результати розрахунків наведено у табл. 3.4.

Для порівняння, значень спотворень кутів ω, їх обчислено за трьома формулами (3.46), (1.100) і (3.45). Результати розрахунків наведено у табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Зведена таблиця за результатами обчислень параметрів рівновеликого зображення

φ,°	φ'			$\Delta\varphi$			m	n	ω								
									ρ			sin			tg		
	°	′	″	°	′	″			°	′	″	°	′	″	°	′	″
0	0	0	0	0	0	0	1,00112	0,99888	0	07	40	0	07	40	0	07	39
15	14	56	09	0	03	51	1,00104	0,99896	0	07	9	0	07	09	0	07	09
30	29	53	20	0	06	40	1,00084	0,99916	0	05	45	0	05	45	0	05	45
45	44	52	18	0	07	42	1,00056	0,99944	0	03	50	0	03	50	0	03	50
60	59	53	19	0	06	41	1,00028	0,99972	0	01	55	0	01	55	0	01	55
75	74	56	08	0	03	52	1,00007	0,99993	0	00	30	0	00	30	0	00	30
90	90	0	0	0	0	0	1,00000	1,00000	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Відповідно до результатів, наведених у табл. 3.4, були побудовані три графіки залежності, а саме: графік залежності різниці $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$ (рис. 3.10), графік залежності масштабу довжин по меридіанах m і масштабу довжин по паралелях n (рис. 3.11) та графік залежності спотворень кутів ω (рис. 3.12) від значень сфероїдичної широти φ.

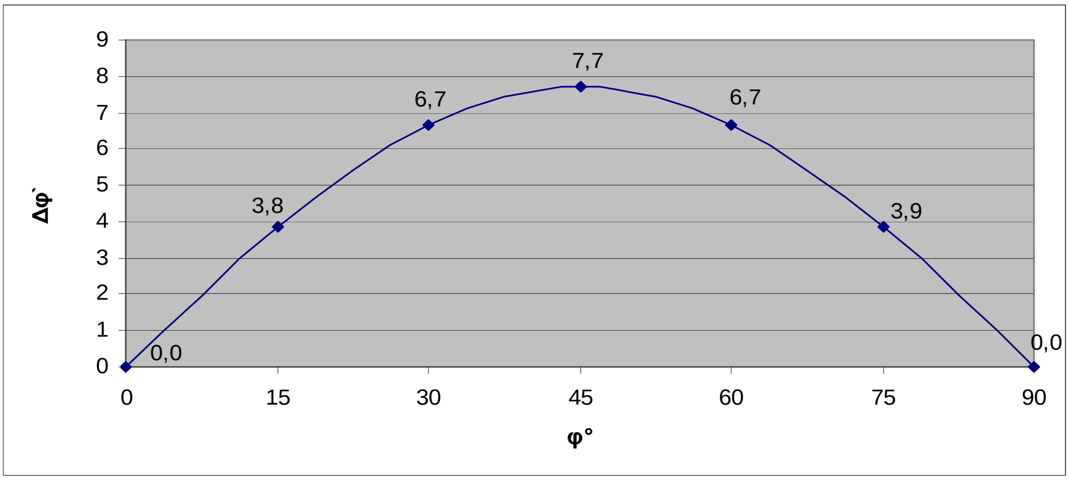


Рис. 3.10. Графік залежності $\Delta\varphi$ від широти φ

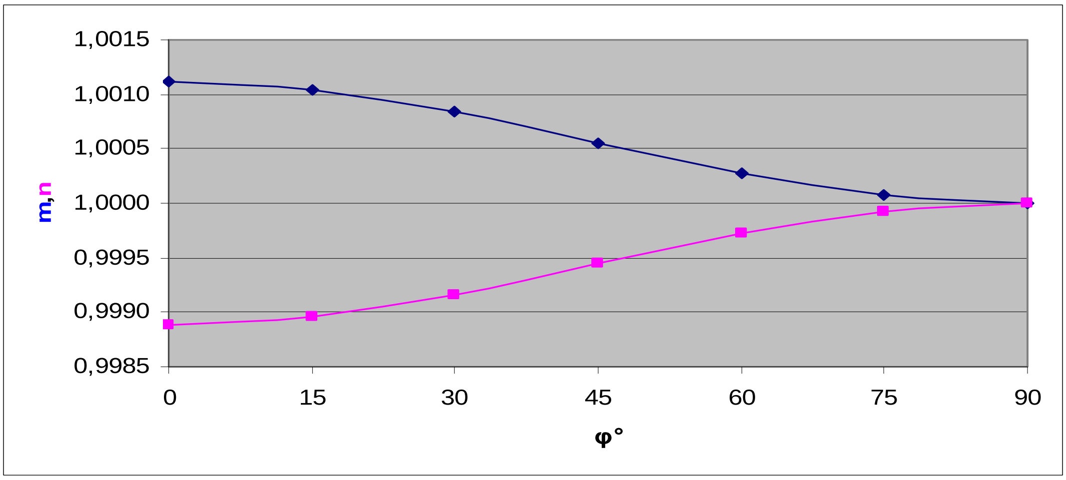


Рис. 3.11. Графік залежності m і n від широти φ

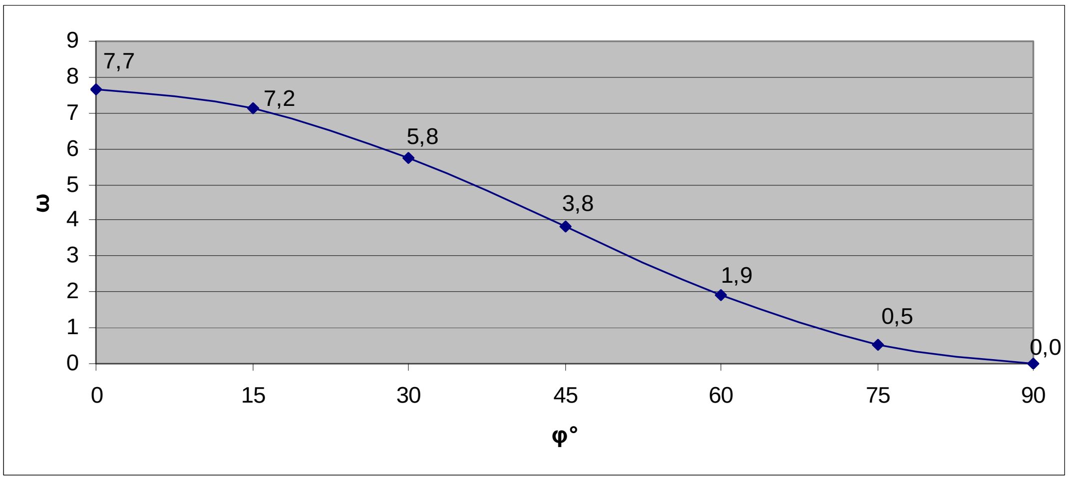


Рис. 3.12. Графік залежності ω від широти φ

Як видно з даних табл. 3.4 і рис. 3.10 – 3.12, висновки попереднього підрозділу збігаються, а саме: при рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальна різниця між сфероїдичною і сферичною широтами буде у середніх широтах; масштаби довжин по меридіанах і паралелях та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин та кутів виходять на екваторі і відсутні на полюсах.

3.6. Рівнопроміжкове по меридіанах зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

При рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі ставиться умова рівності довжин меридіанів еліпсоїда і кулі, тобто масштаб довжин по меридіанах дорівнює одиниці

$$m = \frac{Rd\varphi'}{Md\varphi} = 1. \tag{3.48}$$

Звідки:

$$d\varphi' = \frac{Md\varphi}{R}. \tag{3.49}$$

Після інтегрування виразу (3.49) одержимо

$$\varphi' = \frac{1}{R}\int_0^{\varphi} Md\varphi = \frac{S_\varphi}{R} + C, \tag{3.50}$$

де $S_\varphi = \int_0^{\varphi} Md\varphi$ – довжина дуги меридіана від екватора до паралелі з широтою φ.

При рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі приймаються початкові умови: $\varphi_0{}' = \varphi_0 = 0°$, $\varphi_{90}{}' = \varphi_{90} = 90°$, $\lambda' = \lambda$, тоді $C = 0$ і $\alpha = 1$.

Наприклад, якщо значення сфероїдичної широти $\varphi \approx 45°$, то максимальна різниця між сфероїдичною і сферичною широтами буде $(\varphi - \varphi')_{\max} \approx 9'$.

Радіус кулі

Для визначення радіуса кулі ставиться умова, щоб довжини дуг меридіанів еліпсоїда і кулі від екватора до полюса були між собою рівні, тобто $S_к^{90} = S_{ел}^{90}$ або

$$R\varphi_{90°} = S_{90°}. \tag{3.51}$$

Звідки:

$$R = \frac{S_{90°}}{\varphi_{90°}} = 6367558\,м. \tag{3.52}$$

Масштаб довжин по паралелях

Масштаб довжин по паралелях обчислюється за відомою формулою (3.10)

$$n = \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi}. \qquad (3.53)$$

Наприклад, при $\varphi = 0°$: $n_{\min} = 0{,}998$ або $v_{n\max} = -0{,}2\%$.

Масштаб площі

Масштаб площі обчислюється за аналогічною формулою:

$$p = n = \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi}. \qquad (3.54)$$

Наприклад, при $\varphi = 0°$: $p_{\min} = 0{,}998$ або $v_{p\max} = -0{,}2\%$.

Спотворення кутів

Спотворення кутів обчислюється за формулами

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{1-n}{1+n} = \frac{N\cos\varphi - R\cos\varphi'}{N\cos\varphi + R\cos\varphi'} \qquad (3.55)$$

або

$$\omega = \frac{e^2}{4}\rho\cos^2\varphi. \qquad (3.56)$$

Наприклад, при $\varphi = 0°$ максимальне спотворення кутів $\omega_{\max} \approx 6'$.

Основні формули:

$$\begin{aligned}
&1.\ \varphi' = \frac{S_\varphi}{R},\\
&2.\ \lambda' = \lambda,\\
&3.\ R = \frac{S_{\varphi_{90°}}}{\varphi_{90°}} = 6367558\,м,\\
&4.\ m = 1,\\
&5.\ n = \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi},\\
&6.\ p = n = \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi},\\
&7.\ \omega = \frac{e^2}{4}\rho\cos^2\varphi.
\end{aligned} \qquad (3.57)$$

Як видно з основних формул (3.57), при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі масштаби довжин по паралелях і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин по паралелях, площ та кутів виходять на екваторі і відсутні на полюсах. Ізоколи й ізогони мають вигляд концентричних кіл, що збігаються з паралелями.

3.7. Приклади розрахунків при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Для наочності теоретичного матеріалу, викладеного в попередньому підрозділі, виконаємо обчислення величин сферичної широти, масштабів та спотворень при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Розрахунки виконаємо для семи паралелей зі значенням сферичної широти φ від 0° до 90° через кожні 15° при $e^2 = 0{,}0066934275$.

Значення сферичної широти φ' обчислюється за формулою (3.50), а саме:

$$\varphi' = \frac{S_\varphi}{R}.$$

Результати розрахунків наведено у табл. 3.5.

Значення масштабів довжин по паралелях n та площ p обчислено за формулами (3.53) або (3.54). Результати розрахунків наведено у табл. 3.5.

Для порівняння значень спотворень кутів ω, їх обчислено за двома формулами (3.55) і (3.56). Результати розрахунків наведено у табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Зведена таблиця за результатами обчислень параметрів рівнопроміжкового по меридіанах зображення

φ, °	φ'			$\Delta\varphi$			n, p	ω					
								ρ			sin		
	°	′	″	°	′	″		°	′	″	°	′	″
0	0	0	0	0	0	0	0,998324	0	05	45	0	05	45
15	14	55	41	0	04	19	0,998436	0	05	22	0	05	22
30	29	52	31	0	07	29	0,998741	0	04	18	0	04	19
45	44	51	21	0	08	39	0,999159	0	02	52	0	02	53
60	59	52	30	0	07	30	0,999579	0	01	26	0	01	26
75	74	55	40	0	04	20	0,999886	0	00	23	0	00	23
90	90	0	0	0	0	0	1,00000	0	0	0	0	0	0

Відповідно до результатів, наведених у табл. 3.5, були побудовані три графіки залежності, а саме: графік залежності різниці $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$ (рис. 3.13), графік залежності масштабу довжин по паралелях n і масштабу площ p (рис. 3.14) та графік залежності спотворень кутів ω (рис. 3.15) від сфероїдичної широти φ.

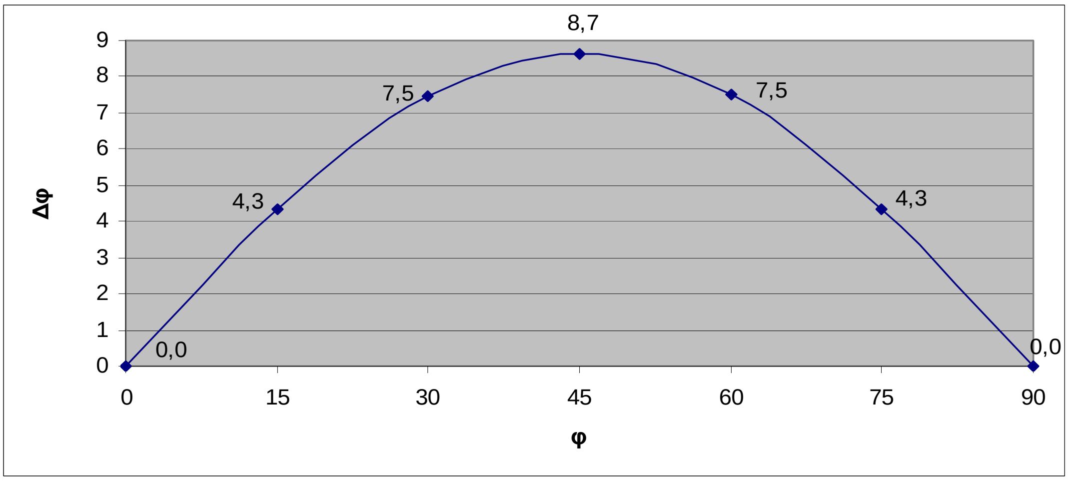


Рис. 3.13. Графік залежності $\Delta\varphi$ від широти φ

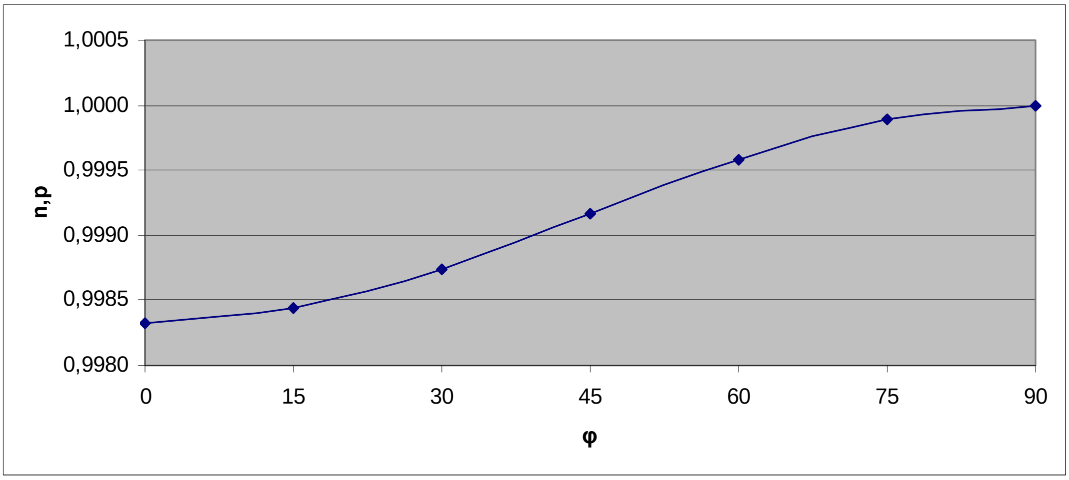


Рис. 3.14. Графік залежності n і p від широти φ

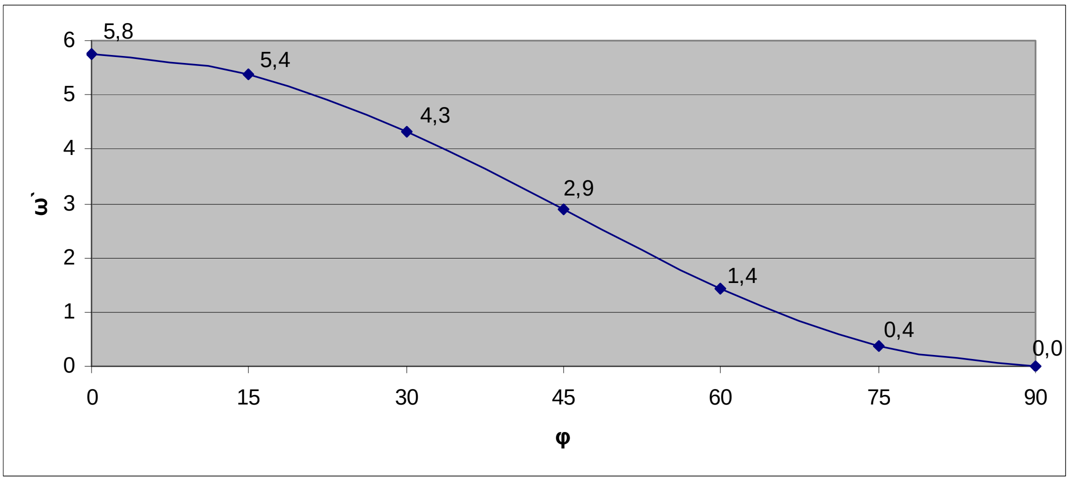


Рис. 3.15. Графік залежності ω від широти φ

Як видно з даних табл. 3.5 і рис. 3.13 – 3.15, висновки попереднього підрозділу збігаються, а саме: при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальна різниця між сфероїдичною і сферичною широтами буде у середніх широтах; масштаби довжин по паралелях і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин по паралелях, площ та кутів виходять на екваторі і відсутні на полюсах.

3.8. Рівнопроміжкове по паралелях зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

При рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі ставиться умова рівності довжин паралелей еліпсоїда і кулі, тобто масштаб довжин по паралелях дорівнює одиниці

$$n = \alpha \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi} = 1. \tag{3.58}$$

Звідки:

$$\cos\varphi' = \frac{N}{\alpha R}\cos\varphi. \tag{3.59}$$

При рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі приймаються початкові умови: $\varphi_0' = \varphi_0 = 0°$, $\varphi_{90}' = \varphi_{90} = 90°$ і $\lambda' = \lambda$, тоді $\alpha = 1$ і $R = a = 6378245\,м$.

З урахуванням (1.6) вираз (3.59) набуде такого вигляду

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}. \tag{3.60}$$

Для одержання більш простої формули обчислення сферичної широти при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі знайдемо $tg\varphi'$

$$tg\varphi' = \frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi'}}{\cos\varphi'} = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}}}{\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - e^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} = \sqrt{1-e^2}\,tg\varphi. \tag{3.61}$$

Наприклад, при значенні сфероїдичної широти $\varphi \approx 45°$ максимальна різниця між сфероїдичною і сферичною широтами буде $(\varphi - \varphi')_{\max} \approx 6'$.

Масштаб довжин по меридіанах

Масштаб довжин по меридіанах з урахуванням (1.5) обчислюється за формулою

$$m = \frac{Rd\varphi'}{Md\varphi} = \frac{\left(\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\right)^3 d\varphi'}{(1-e^2)d\varphi} = \ldots = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{3.62}$$

Наприклад, при $\varphi = 0°$: $m_{\max} = 1{,}003$ або $v_{m\max} = +0{,}3\%$.

Масштаб площі

Масштаб площі обчислюється за аналогічною формулою

$$p = m = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{3.63}$$

Наприклад, при $\varphi = 0°$: $p_{\max} = 1{,}003$ або $v_{p\max} = +0{,}3\%$.

Спотворення кутів

Спотворення кутів обчислюється за такими формулами:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{m-1}{m+1} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} - \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} + \sqrt{1-e^2}} \tag{3.64}$$

або

$$\omega = \frac{e^2}{2}\rho\cos^2\varphi. \tag{3.65}$$

Наприклад, при $\varphi = 0°$ максимальне спотворення кутів $\omega_{\max} \approx 12'$.

Основні формули:

$$\begin{aligned}
&1.\ tg\varphi' = \sqrt{1-e^2}\,tg\varphi,\\
&2.\ \lambda' = \lambda,\\
&3.\ R = a = 6378245 \text{ м},\\
&4.\ m = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-e^2}},\\
&5.\ n = 1,\\
&6.\ p = m = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-e^2}},\\
&7.\ \omega = \frac{e^2}{2}\rho\cos^2\varphi.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Як видно з основних формул (3.66), при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі масштаби довжин по меридіанах і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин по меридіанах, площ та кутів виходять на екваторі і відсутні на полюсах. Ізоколи й ізогони мають вигляд концентричних кіл, що збігаються з паралелями.

3.9. Приклади розрахунків при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Для наочності теоретичного матеріалу, викладеного в попередньому підрозділі, виконаємо обчислення величин сферичної широти, масштабів та спотворень при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі. Розрахунки виконаємо для семи паралелей зі значенням сферичної широти φ від 0° до 90° через кожні 15° при $e^2 = 0,0066934275$.

Значення сферичної широти φ обчислюється за формулою (3.61). Результати розрахунків наведено у табл. 3.6.

Значення масштабів довжин по меридіанах m та площ p обчислено за формулами (3.62) або (3.63). Результати розрахунків наведено у табл. 3.6.

Для порівняння, значення спотворень кутів ω обчислено за двома формулами (3.65) і (3.64). Результати розрахунків наведено у табл. 3.6.

Таблиця 3.6

Зведена таблиця за результатами обчислень параметрів рівнопроміжкового по паралелях зображення

φ, °	φ'			$\Delta\varphi$			m, p	ω					
								ρ			sin		
	°	′	″	°	′	″		°	′	″	°	′	″
0	0	0	0	0	0	0	1,0033636	0	11	30	0	11	30
15	14	57	08	0	02	52	1,0031386	0	10	44	0	10	40
30	29	55	01	0	04	59	1,0025238	0	08	37	0	08	37
45	44	54	14	0	05	46	1,0016832	0	05	45	0	05	45
60	59	55	00	0	05	0	1,0008420	0	02	52	0	02	52
75	74	57	07	0	02	53	1,0002257	0	00	46	0	00	46
90	90	0	0	0	0	0	1,00000	0	0	0	0	0	0

Відповідно до результатів, наведених у табл. 3.6, були побудовані три графіки залежності, а саме: графік залежності різниці $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$ (рис. 3.16), графік залежності масштабу довжин по меридіанах m і масштабу площ p (рис. 3.17) та графік залежності спотворень кутів ω (рис. 3.18) від сфероїдичної широти φ.

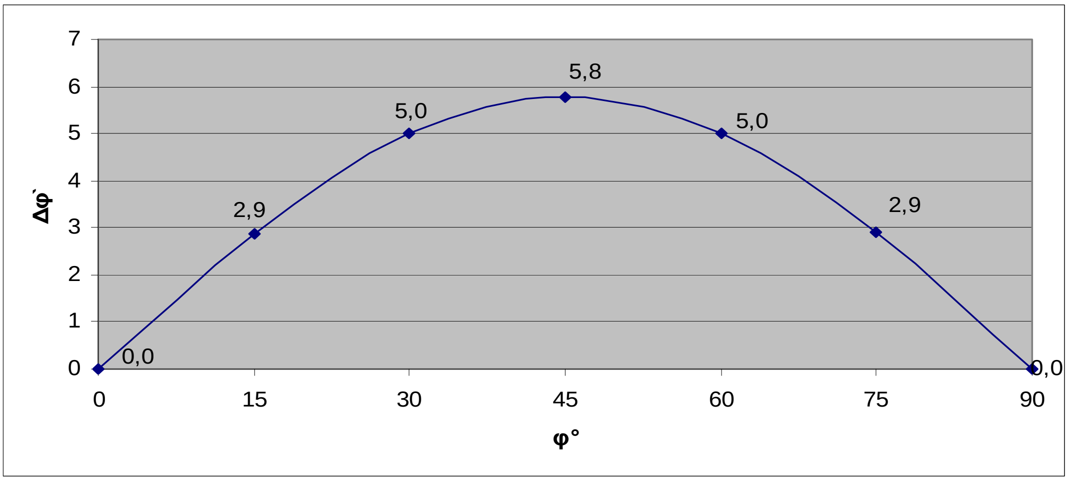


Рис. 3.16. Графік залежності $\Delta\varphi$ від широти φ

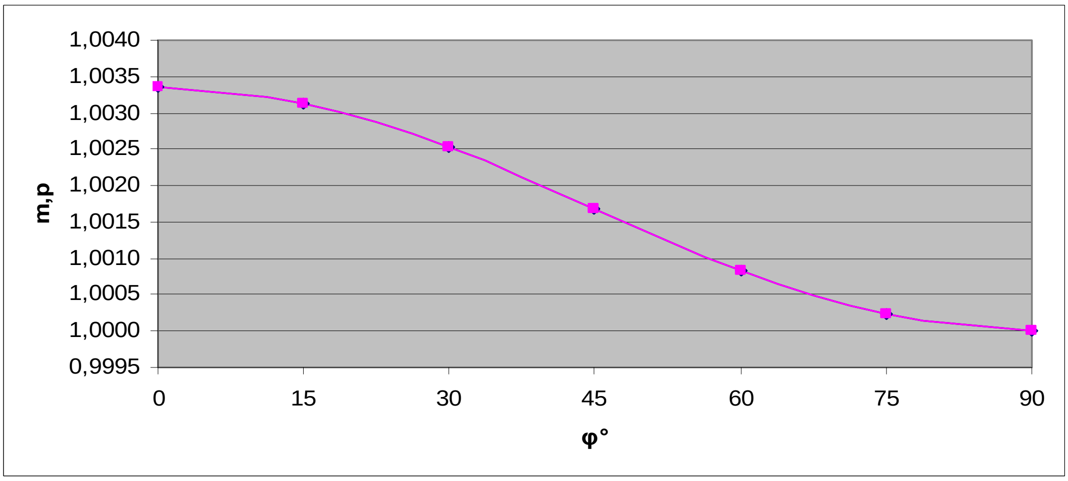


Рис. 3.17. Графік залежності n і p від широти φ

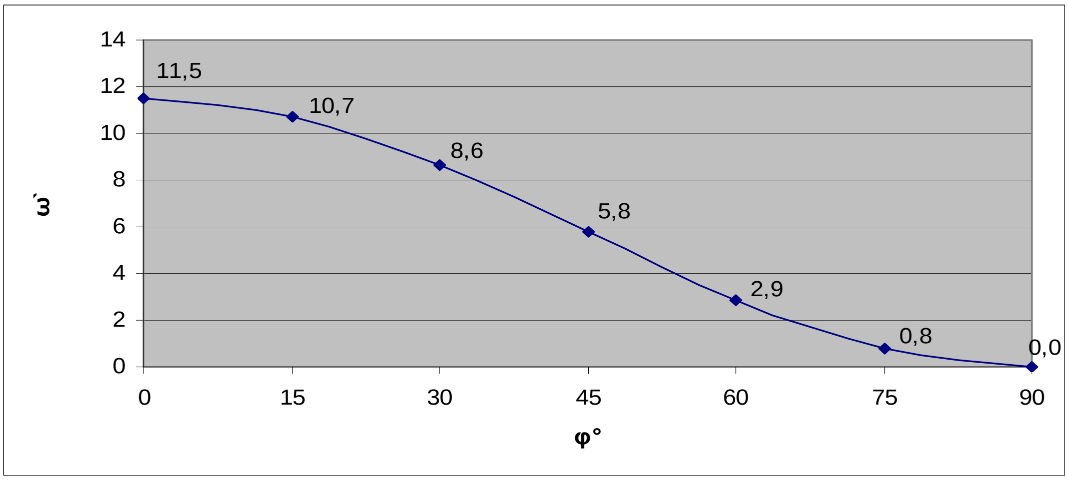


Рис. 3.18. Графік залежності ω від широти φ

Як видно з даних табл. 3.6 і рис. 3.16 – 3.18, висновки попереднього підрозділу збігаються, а саме: при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі максимальна різниця між сфероїдичною і сферичною широтами буде у середніх широтах; масштаби довжин по меридіанах і площ та спотворення кутів залежать тільки від широти. Максимальні значення спотворень довжин по меридіанах і площ та кутів виходять на екваторі і відсутні на полюсах.

3.10. Завдання та методичні пояснення до виконання лабораторної роботи № 2

Тема: Дослідження рівнокутного, рівновеликого, рівнопроміжкового по меридіанах і рівнопроміжкового по паралелях зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

Завдання: По заданій картографічній сітці меридіанів з довготами $\lambda_1 = 30°, \lambda_2 = 33°$, $\lambda_3 = 36°$ і паралелей з широтами $\varphi_S = 5° + 3°n$, $\varphi_0 = 8° + 3°n$, $\varphi_N = 11° + 3°n$ (де *n* – номер студента у списку групи) перейти на поверхню кулі шляхом:

1. рівнокутного зображення поверхні еліпсоїда на кулі;
2. рівновеликого зображення поверхні еліпсоїда на кулі;
3. рівнопроміжкового по меридіанах зображення поверхні еліпсоїда на кулі;
4. рівнопроміжкового по паралелях зображення поверхні еліпсоїда на кулі.

Значення сфероїдичної широти φ, сферичної широти φ', різниці широт $\Delta\varphi$, максимальне спотворення кутів ω обчислити з точністю до $1''$; значення масштабу довжин по меридіанах *m*, масштабу довжин по паралелях *n*, масштабу площі *p* – з точністю до 0,0001; значення радіусу земної кулі *R* – з точністю до 1 м.

Хід роботи

1. *Рівнокутне зображення еліпсоїда на кулі*

1. Значення сферичної широти обчислюються за такою формулою:

$$\varphi' = \varphi - 692{,}23'' \sin 2\varphi + 0{,}96 \sin 4\varphi . \qquad (3.67)$$

2. Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдичної довготи:

$$\lambda' = \lambda . \qquad (3.68)$$

3. Різниці між сфероїдичною та сферичною широтою обчислюються таким чином:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi' . \qquad (3.69)$$

4. Радіус кулі обчислюється за формулою:

$$R = a\left(1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi_0\right), \qquad (3.70)$$

де *a* = 6378245 м – велика піввісь еліпсоїда; e^2=0,00669342 – квадрат ексцентриситету земного еліпсоїда.

5. Масштаби довжин по меридіанах та паралелях рівні між собою і

визначаються за формулою:

$$m = n = \frac{R}{a}(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi). \quad (3.71)$$

6. Значення масштабів площі обчислюються за формулою:

$$p = m^2 = \frac{R^2}{a^2}(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi). \quad (3.72)$$

7. Спотворення кутів відсутнє, тому:

$$\omega = 0.$$

Результати розрахунків вносимо у відповідні графи таблиці 3.7.

2. *Рівновелике зображення еліпсоїда на кулі*

1. Значення сферичної широти обчислюються за такою формулою:

$$\varphi' = \varphi - 461{,}81'' \sin 2\varphi + 0{,}44'' \sin 4\varphi. \quad (3.73)$$

2. Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдичної довготи та обчислюються за формулою (3.68):

$$\lambda' = \lambda.$$

3. Різниці між сфероїдичною та сферичною широтою обчислюються за формулою (3.69):

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi'.$$

4. Радіус земної кулі за умови рівновеликого зображення еліпсоїда на кулі дорівнює:

$$R = 6371116 \text{ м}.$$

5. Масштаби довжин по меридіанах визначаються за формулою:

$$m = 1 + \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi. \quad (3.74)$$

6. Масштаби довжин по паралелях визначаються за формулою:

$$n = 1 - \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi. \quad (3.75)$$

7. Масштаб площі є постійною величиною, тобто:

$$p = 1.$$

8. Максимальні спотворення кутів визначаються за формулою:

$$\omega = \frac{e^2}{3}\rho\cos^2\varphi, \quad (3.76)$$

де $\rho = 206265''$ – радіан у секундах.

Результати розрахунків вносимо у відповідні графи таблиці 3.7.

3. *Рівнопроміжкове по меридіанах зображення еліпсоїда на кулі*

1. Радіус земної кулі за умови рівнопроміжкового по меридіанах зображення еліпсоїда на кулі дорівнює:

$$R = \frac{S_{90^0}}{90^0} = \frac{S_{90^\circ}}{\pi}2 = 6367558 \text{ м}. \quad (3.77)$$

де $S_{90} =$ 10002137 – значення довжини дуги меридіана від екватора до полюса, взяте з додатка Б до лабораторної роботи № 1.

2. Значення сферичної широти обчислюються за формулою:

$$\varphi' = \frac{S_\varphi}{R}, \tag{3.78}$$

де S_φ – довжина дуги меридіана від екватора до паралелі з широтою φ.

3. Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдичної довготи та обчислюються за формулою (3.68):

$$\lambda' = \lambda .$$

4. Різниці між сфероїдичною та сферичною широтою обчислюються за формулою (3.69):

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi' .$$

5. Масштаб довжин по меридіанах при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі величина постійна, тобто:

$$m = 1 .$$

6. Масштаби довжин по паралелях обчислюються за формулою:

$$n = \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi} . \tag{3.79}$$

де $N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$ – радіус кривизни першого вертикала (1.6).

7. Масштаби площі також обчислюються за формулою (3.79).

$$p = n = \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi} .$$

8. Максимальні спотворення кутів визначаються за формулою:

$$\omega = \frac{e^2}{4}\rho\cos 2\varphi . \tag{3.80}$$

Результати розрахунків вносимо у відповідні графи таблиці 3.7.

4. *Рівнопроміжкове по паралелях зображення еліпсоїда на кулі*

1. Значення сферичної широти обчислюються за такою формулою:

$$tg\varphi' = \sqrt{1 - e^2}\, tg\varphi . \tag{3.81}$$

2. Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдичної довготи та обчислюються за формулою (3.68):

$$\lambda' = \lambda .$$

3. Різниці між сфероїдичною та сферичною широтою обчислюються за формулою (3.69):

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi' .$$

4. Радіус земної кулі за умови рівнопроміжкового по паралелях зображення еліпсоїда на кулі дорівнює:

$$R = a = 6378245 \text{ м.}$$

5. Масштаби довжин по меридіанах обчислюються за формулою:

$$m = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - e^2}} . \tag{3.82}$$

6. Масштаб довжин по паралелях при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі величина постійна, тобто:

$$n = 1.$$

7. Значення масштабу площі обчислюються за формулою (3.82):

$$p = m = \frac{\sqrt{1 - e^2\ sin^2\ \varphi}}{\sqrt{1 - e^2}} .$$

8. Максимальні спотворення кутів визначаються за формулою:

$$\omega = \frac{e^2}{2} \rho \cos^2 \varphi. \tag{3.83}$$

Результати розрахунків вносимо у відповідні графи таблиці 3.7.

Таблиця 3.7

Результати розрахунків зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

<table>
<tr><th rowspan="2">Вид зображення</th><th colspan="8">Параметри і значення спотворень</th></tr>
<tr><th>$\varphi,^\circ$</th><th>$\varphi,^{\circ\prime\prime\prime}$</th><th>$\Delta\varphi,''$</th><th>$R$, м</th><th>$m$</th><th>$n$</th><th>$p$</th><th>$\omega,^{\circ\prime\prime\prime}$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">рівнокутне</td><td>φ_N</td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td colspan="2"></td><td></td><td rowspan="3">$0^0 00' 00''$</td></tr>
<tr><td>φ_0</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>φ_S</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">рівновелике</td><td>φ_N</td><td></td><td></td><td rowspan="3">6371116</td><td></td><td></td><td rowspan="3">1,0000</td><td></td></tr>
<tr><td>φ_0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>φ_S</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">рівнопроміжкове по меридіанах</td><td>φ_N</td><td></td><td></td><td rowspan="3">6367558</td><td rowspan="3">1,0000</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>φ_0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>φ_S</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">рівнопроміжкове по паралелях</td><td>φ_N</td><td></td><td></td><td rowspan="3">6378245</td><td></td><td rowspan="3">1,0000</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>φ_0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>φ_S</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Висновки:

Охарактеризувати усі чотири способи зображення поверхні еліпсоїда на кулі за отриманими величинами спотворень.

3.11. Приклад виконання лабораторної роботи № 2

Вихідні дані: $\lambda_1 = 30°$, $\lambda_2 = 33°$, $\lambda_3 = 36°$, $\varphi_S = 5°$, $\varphi_0 = 8°$, $\varphi_N = 11°$

Усі обчислені значення величин у цьому прикладі та інших наведені з округленням, але при розрахунках використовувалися точні значення.

Хід роботи

1. *Рівнокутне зображення еліпсоїда на кулі*

1. Значення сферичної широти обчислюються за формулою (3.67):

$$\varphi'_S = \varphi_S - 692{,}23'' \sin 2\varphi_S + 0{,}96 \sin 4\varphi_S = 4°59'58'',$$

$$\varphi'_0 = \varphi_0 - 692{,}23'' \sin 2\varphi_0 + 0{,}96 \sin 4\varphi_0 = 7°59'57'',$$

$$\varphi'_N = \varphi_N - 692{,}23'' \sin 2\varphi_N + 0{,}96 \sin 4\varphi_N = 10°59'55''.$$

2. Значення сферичної довготи дорівнюють значенням сфероїдичної довготи (3.68):

$$\lambda'_1 = \lambda_1 = 30°,$$

$$\lambda'_2 = \lambda_2 = 33°,$$

$$\lambda'_3 = \lambda_3 = 36°.$$

3. Різниці між сфероїдичною та сферичною широтами обчислюються за формулою (3.69):

$$\Delta\varphi_S = \varphi_S - \varphi'_S = 0°00'02'',$$

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi'_0 = 0°00'03'',$$

$$\Delta\varphi_N = \varphi_N - \varphi'_N = 0°00'05''.$$

4. Радіус кулі обчислюється за формулою (3.70):

$$R_0 = a\left(1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi_0\right) = 6377832 \text{ м.}$$

5. Масштаби довжин по меридіанах та паралелях рівні між собою і визначаються за формулою (3.71):

$$m_0 = n_0 = \frac{R}{a}\left(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi_0\right) = 1{,}0000.$$

6. Масштаб площі обчислюється за формулою (3.72):

$$p_0 = m_S^2 = \frac{R^2}{a^2}\left(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi_S\right) = 1{,}0000.$$

7. Максимальні спотворення кутів відсутні, тому:

$$\omega = 0.$$

Результати розрахунків вносимо у відповідні графи таблиці 3.8.

2. *Рівновелике зображення еліпсоїда на кулі*

1. Значення сферичної широти обчислюються за формулою (3.67):

$$\varphi'_S = \varphi_S - 461{,}81'' \sin 2\varphi_S + 0{,}44'' \sin 4\varphi_S = 4°59'59'',$$
$$\varphi'_0 = \varphi_0 - 461{,}81'' \sin 2\varphi_0 + 0{,}44'' \sin 4\varphi_0 = 7°59'58'',$$
$$\varphi'_S = \varphi_S - 461{,}81'' \sin 2\varphi_S + 0{,}44'' \sin 4\varphi_S = 10°59'57''.$$

2. Значення сферичної довготи дорівнюють значенню сфероїдичної довготи та обчислюються за формулою (3.68):

$$\lambda'_1 = \lambda_1 = 30°,$$
$$\lambda'_2 = \lambda_2 = 33°,$$
$$\lambda'_3 = \lambda_3 = 36°.$$

3. Різниці між сфероїдичною та сферичною широтами обчислюються за формулою (3.69):

$$\Delta\varphi_S = \varphi_S - \varphi'_S = 0°00'01'',$$
$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi'_0 = 0°00'02'',$$
$$\Delta\varphi_N = \varphi_N - \varphi'_N = 0°00'03''.$$

4. Радіус земної кулі за умови рівновеликого зображення еліпсоїда на кулі дорівнює:

$$R = 6371116 \text{ м}.$$

5. Масштаби довжин по меридіанах визначаються за формулою (3.74):

$$m_S = 1 + \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi_S = 1{,}0011,$$
$$m_0 = 1 + \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi_0 = 1{,}0011,$$
$$m_N = 1 + \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi_N = 1{,}0011.$$

6. Масштаби довжин по паралелях визначаються за формулою (3.75):

$$n_S = (1 - \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi_S) = 0{,}9989,$$
$$n_0 = (1 - \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi_0) = 0{,}9989,$$
$$n_N = (1 - \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi_N) = 0{,}9989.$$

7. Масштаб площі є постійною величиною, тобто:

$$p = 1.$$

8. Максимальні спотворення кутів визначаються за формулою (3.76):

$$\omega_S = \frac{e^2}{3}\rho\cos^2\varphi_S = 0°07'37'',$$
$$\omega_0 = \frac{e^2}{3}\rho\cos^2\varphi_0 = 0°07'31'',$$
$$\omega_N = \frac{e^2}{3}\rho\cos^2\varphi_N = 0°07'23''.$$

Результати розрахунків вносимо у відповідні комірки таблиці 3.8.

3. *Рівнопроміжкове по меридіанах зображення еліпсоїда на кулі*

1. Радіус земної кулі за умови рівнопроміжкового по меридіанах зображення еліпсоїда на кулі визначається за формулою (3.77):

$$R = \frac{S_{90^0}}{90^0} = \frac{S_{90}}{\pi} 2 = 6367558 \text{ м.}$$

2. Значення сферичної широти обчислюються за формулою (3.67):

$$\varphi'_S = \frac{S_{\varphi_S}}{R} = 4°58'30'',$$

$$\varphi'_0 = \frac{S_{\varphi_0}}{R} = 7°57'37'',$$

$$\varphi'_N = \frac{S_{\varphi_N}}{R} = 10°56'46''.$$

3. Значення сферичної довготи дорівнюють значенню сфероїдичної довготи та обчислюються за формулою (3.68):

$$\lambda_1' = \lambda_1 = 30°,$$

$$\lambda_2' = \lambda_2 = 33°,$$

$$\lambda_3' = \lambda_3 = 36°.$$

4. Різниці між сфероїдичною та сферичною широтами обчислюються за формулою (3.69):

$$\Delta\varphi_S = \varphi_S - \varphi_S' = 0°01'30'',$$

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi_0' = 0°02'23'',$$

$$\Delta\varphi_N = \varphi_N - \varphi_N' = 0°03'14''.$$

5. Масштаб довжин по меридіанах при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі дорівнює:

$$m = 1.$$

6. Для обчислення масштабу довжин по паралелях необхідно знайти радіуси кривизни першого вертикала *N*:

$$N_S = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_S}} = 6378407 \, м,$$

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} = 6378658 \, м,$$

$$N_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_N}} = 6379022 \, м.$$

Тоді значення масштабів довжин по паралелях обчислюються за формулою (3.79):

$$n_S = \frac{R\cos\varphi'_S}{N_S\cos\varphi_S} = 0{,}9983,$$

$$n_0 = \frac{R\cos\varphi'_0}{N_S\cos\varphi_0} = 0{,}9984,$$

$$n_N = \frac{R\cos\varphi'_N}{N_S\cos\varphi_N} = 0{,}9984.$$

7. Значення масштабу площі також обчислюються за формулою (3.79):

$$p_S = n_S = \frac{R\cos\varphi'_S}{N_S\cos\varphi_S} = 0{,}9983,$$

$$p_0 = n_0 = \frac{R\cos\varphi'_0}{N_S\cos\varphi_0} = 0{,}9984,$$

$$p_N = n_N = \frac{R\cos\varphi'_N}{N_S\cos\varphi_N} = 0{,}9984.$$

8. Максимальні спотворення кутів визначаються за формулою (3.80):

$$\omega_S = \frac{e^2}{4}\rho\cos 2\varphi_S = 0°05'40'',$$

$$\omega_0 = \frac{e^2}{4}\rho\cos 2\varphi_0 = 0°05'32'',$$

$$\omega_N = \frac{e^2}{4}\rho\cos 2\varphi_N = 0°05'20''.$$

Результати розрахунків вносимо у відповідні графи таблиці 3.8.

4. ***Рівнопроміжкове по паралелях зображення еліпсоїда на кулі***

1. Значення сферичної широти обчислюються за формулою (3.67):

$$\varphi'_S = arctg(\sqrt{1-e^2}tg\varphi_S) = 4°58'59'',$$

$$\varphi'_0 = arctg(\sqrt{1-e^2}tg\varphi_0) = 7°58'25'',$$

$$\varphi'_N = arctg(\sqrt{1-e^2}tg\varphi_N) = 10°57'50''.$$

2. Значення сферичної довготи дорівнює значенню сфероїдичної довготи та обчислюються за формулою (3.68):

$$\lambda'_1 = \lambda_1 = 30°,$$

$$\lambda'_2 = \lambda_2 = 33°,$$

$$\lambda'_3 = \lambda_3 = 36°.$$

3. Різниці між сфероїдичною та сферичною широтою обчислюються за формулою (3.69):

$$\Delta\varphi_S = \varphi_S - \varphi'_S = 0°01'01'',$$

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi'_0 = 0°01'35'',$$

$$\Delta\varphi_N = \varphi_N - \varphi'_N = 0°02'10''.$$

4. Радіус земної кулі за умови рівнопроміжкового по паралелях зображення еліпсоїда на кулі дорівнює:

$$R = a = 6378245 \text{ м}.$$

5. Масштаби довжин по меридіанах обчислюються за формулою (3.82):

$$m_S = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_S}}{\sqrt{1-e^2}} = 1{,}0033,$$

$$m_0 = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_0}}{\sqrt{1-e^2}} = 1{,}0033,$$

$$m_N = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_N}}{\sqrt{1-e^2}} = 1{,}0032.$$

6. Масштаб довжин по паралелях при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі дорівнює:

$$n = 1.$$

7. Значення масштабу площі обчислюються за формулою (3.82):

$$p_S = m_S = \frac{\sqrt{1-e^2\, sin^2\varphi_S}}{\sqrt{1-e^2}} = 1{,}0033,$$

$$p_0 = m_0 = \frac{\sqrt{1-e^2\, sin^2\varphi_0}}{\sqrt{1-e^2}} = 1{,}0033,$$

$$p_N = m_N = \frac{\sqrt{1-e^2\, sin^2\varphi_N}}{\sqrt{1-e^2}} = 1{,}0032.$$

8. Максимальні спотворення кутів визначаються за формулою (3.83):

$$\omega_S = \frac{e^2}{2}\rho\cos^2\varphi_S = 0°11'25'',$$

$$\omega_0 = \frac{e^2}{2}\rho\cos^2\varphi_0 = 0°11'17'',$$

$$\omega_N = \frac{e^2}{2}\rho\cos^2\varphi_N = 0°11'05''.$$

Результати розрахунків вносимо у відповідні графи таблиці 3.8.

Таблиця 3.8

Результати розрахунків зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі

Вид зображення	Параметри і значення спотворень							
	φ°	φ',° ′ ″	$\Delta\varphi$,° ′ ″	R, м	m	n	p	ω,° ′ ″
рівнокутне	5	4°59′58″	0°00′05″	6377832	1,0000	1,0000	1,0000	0^0 00′00″
	8	7°59′57″	0°00′03″		1,0000	1,0000	1,0000	
	11	10°59′55″	0°00′02″		1,0000	1,0000	1,0000	
рівновелике	5	4°59′59″	0°00′01″	6371116	1,00111	0,99889	1,0000	0°07′37″
	8	7°59′58″	0°00′02″		1,00109	0,99891		0°07′31″
	11	10°59′57″	0°00′03″		1,00107	0,99893		0°07′23″
рівнопроміжкове по меридіанах	5	4°58′30″	0°01′30″	6367558	1,0000	0,9983	0,9983	0°05′40″
	8	7°57′37″	0°02′23″			0,9984	0,9984	0°05′32″
	11	10°56′46″	0°03′14″			0,9984	0,9984	0°05′20″
рівнопроміжкове по паралелях	5	4°58′59″	0°01′01″	6378245	1,0033	1,0000	1,0000	0°11′25″
	8	7°58′25″	0°01′35″		1,0033		1,0000	0°11′17″
	11	10°57′50″	0°02′10″		1,0032		1,0001	0°11′05″

Висновки:

Як видно з результатів розрахунків і даних таблиці 3.8, по заданій картографічній сітці меридіанів з довготами $\lambda_1 = 30°$, $\lambda_2 = 33°$, $\lambda_3 = 36°$, і паралелей з широтами $\varphi_S = 5°$, $\varphi_0 = 8°$, $\varphi_N = 11°$, рівнокутне зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі характеризується:

- незначною різницею між сфероїдичною та сферичною широтою;
- спотворення довжин по меридіанах m і по паралелях n та спотворення площ p – практично відсутні;
- спотворення кутів дорівнюють нулю, тобто $\omega = 0$.

Рівновелике зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі характеризується:

- різниця між сфероїдичною та сферичною широтами практично відсутня;
- спотворення довжин по меридіанах m і по паралелях n – дуже малі;
- спотворення площ p відсутні, тобто $p = 1$;
- спотворення кутів ω – значні і сягають понад $0°07{,}5'$.

Рівнопроміжкове по меридіанах зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі характеризується:

- значною різницею між сфероїдичною та сферичною широтами, що становить понад $0°03'$;
- спотворення довжин по меридіанах відсутні, тобто $m = 1$;

- спотворення довжин по паралелях n і спотворення площ p – дуже малі;
- спотворення кутів ω – значні і мають значення понад $0°05,5'$.

Рівнопроміжкове по паралелях зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі характеризується:

- значною різницею між сфероїдичною та сферичною широтами, яка становить понад $0°02'$;
- спотворення довжин по меридіанах m і спотворення площ p – практично відсутні;
- спотворення довжин по паралелях відсутні, тобто $n = 1$;
- спотворення кутів ω – дуже значні і сягають значення понад $0°11'$.

3.12. Контрольні питання

1. Якими способами можуть бути отримані картографічні проекції? Який спосіб є найбільш ефективним?
2. У чому полягає сутність способу подвійного відображення.
3. Наведіть найбільш розповсюджені умови визначення радіуса кулі під час зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.
4. Що таке α? Які значення воно може набувати?
5. Назвіть основну умову при рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.
6. Якими початковими умовами характеризується рівнокутне зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
7. При якій умові визначається радіус кулі і чому він дорівнює при рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
8. Від чого залежать значення масштабів і спотворень при рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
9. У яких широтах виходять максимальні значення спотворень довжин і площ при рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?
10. Який вигляд мають ізоколи при рівнокутному зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
11. Яка ставиться основна умова при рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.
12. Якими початковими умовами характеризується рівновелике зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
13. При якій умові визначається радіус кулі і чому він дорівнює при рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
14. Від чого залежать значення масштабів і спотворень при рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?
15. У яких широтах виходять максимальні значення спотворень довжин і кутів при рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?

16. Який вигляд мають ізоколи й ізогони при рівновеликому зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

17. Назвіть основну умову при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

18. Якими початковими умовами характеризується рівнопроміжкове по меридіанах зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

19. При якій умові визначається радіус кулі і чому він дорівнює при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

20. Від чого залежать значення масштабів і спотворень при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

21. У яких широтах виходять максимальні значення спотворень довжин, площ і кутів при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?

22. Який вигляд мають ізоколи й ізогони при рівнопроміжковому по меридіанах зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

23. Назвіть основну умову при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі.

24. Якими початковими умовами характеризується рівнопроміжкове по паралелях зображення поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

25. При якій умові визначається радіус кулі і чому він дорівнює при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

26. Від чого залежать значення масштабів і спотворень при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

27. У яких широтах виходять максимальні значення спотворень довжин, площ і кутів при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі, а в яких – мінімальні?

28. Який вигляд мають ізоколи й ізогони при рівнопроміжковому по паралелях зображенні поверхні еліпсоїда на поверхні кулі?

3.13. Тести для самостійної перевірки рівня знань студентів

Кожне питання має чотири варіанти відповіді, серед яких тільки одна відповідь є вірною.

Для перевірки свого рівня знань вивченого матеріалу студент повинен обрати *одну* правильну відповідь серед чотирьох.

1. Який вигляд мають меридіани земного еліпсоїда?

а) дуги концентричних кіл; б) прямі лінії;
в) криві лінії; г) концентричні кола.

2. Який еліпсоїд використовується на території України?

а) Гаусса; б) Мольвейде;

в) Красовського; г) Лагранжа.

3. Який елемент не відноситься до математичної основи карти?

а) масштаб; б) координатна сітка;

в) номенклатура; г) ексцентриситет.

4. Укажіть умову рівновеликості?

а) $w = 1$; б) $p = const$;

в) $m = 1$; г) $\omega = 0$.

5. Окремий масштаб площі – це:

а) відношення площі елементарної ділянки на площині до площі відповідної ділянки на поверхні еліпсоїда;

б) різниця між площею елементарної ділянки на площині та площею відповідної ділянки на поверхні еліпсоїда;

в) відношення елементарного відрізка на карті до відповідного елементарного відрізка на поверхні еліпсоїда;

г) відношення максимальних і мінімальних масштабів площ елементарних ділянок.

6. Які кутові величини необхідно і достатньо знати для побудови еліпса спотворень?

а) $i,\ \varepsilon$; б) φ, λ;

в) β, ψ; г) $i,\ \beta_0$.

7. Яку величину в математичній картографії позначають символом α?

а) коефіцієнт пропорційності довжин; б) полярний стиск;

в) кут між зображенням меридіанів і паралелей; г) довгота.

8. Якщо коефіцієнт Гауса f дорівнює нулю, то що це значить?

а) картографічна сітка ортогональна;

б) картографічна сітка нормальна;

в) картографічна сітка відсутня;

г) зображення меридіанів і паралелей відсутнє.

9. Яка умова не відноситься до рівнокутного зображення еліпсоїда на площині?

а) $m = n$; б) $w = 1$;

в) $m = 1$; г) $\omega = 0$.

10. Які значення може набувати сфероїдична довгота λ?

а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°;

в) від 0° до 180°. г) від 0° до 360°.

11. Які значення може набувати сфероїдична широта φ?
а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°;
в) від 0° до 180°. г) від 0° до 360°.

12. Які лінійні величини необхідно і достатньо знати для побудови еліпса спотворень?
а) m, n; б) a, b;
в) a, b, m, n; г) $i,\ \beta_0$.

13. Який вигляд має картографічна сітка у рівнокутних проекціях?
а) ортогональний; б) геодезичний;
в) довільний; г) постійний.

14. Як позначаються головні масштаби в математичній картографії?
а) m, n; б) a, b;
в) a, b, m, n; г) $\beta_0,\ \beta_0 + 90°$.

15. За характером спотворень картографічні проекції можуть бути (*вкажіть невірну відповідь*):
а) довільні; б) рівновеликі;
в) рівнокутні; г) поліконічні.

16. До геометричних елементів земного еліпсоїда відносять (*вкажіть невірну відповідь*):
а) меридіан; б) сферична широта;
в) нормаль; г) паралель.

17. Що є основним критерієм оцінки значущості картографічних проекцій?
а) величини спотворень; б) значення коефіцієнтів Гаусса;
в) відхилення кута i від 90°; г) екстремальні значення масштабу довжин.

18. До чого застосовуються положення Аполлонія?
а) референц-еліпсоїд; б) земний еліпсоїд;
в) геоїд; г) еліпс спотворень.

19. За якими величинами визначають максимальне спотворення кутів U в точці?
а) φ, λ; б) a, b;
в) α, β; г) $i,\ \varepsilon$.

20. Символом λ' позначають:

а) сфероїдичну довготу; б) коефіцієнт пропорційності довгот;
в) спотворення кутів; г) сферичну довготу.

21. Що з наведеного нижче не відноситься до геометричних елементів земної кулі?
а) сфероїдична широта; б) сферична широта;
в) екватор; г) нормаль.

22. До видів спотворень під час зображення поверхні еліпсоїда на площині відносять (*вкажіть невірну відповідь*):
а) спотворення кутів; б) кривизна першого вертикала;
в) спотворення площ; г) спотворення довжин.

23. Які значення може набувати зенітна відстань z у полярних сферичних координатах?
а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°;
в) від 0° до 180°. г) від 0° до 360°.

24. Які значення може набувати азимут a в полярних сферичних координатах?
а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°;
в) від 0° до 180°. г) від 0° до 360°.

25. Ізоколи – це:
а) допоміжні лінії паралельні меридіанам еліпсоїда;
б) лінії, що з'єднують точки з однаковими значеннями спотворення кутів;
в) лінії, що з'єднують точки з однаковими значеннями спотворень довжин і площ;
г) допоміжні лінії паралельні паралелям еліпсоїда.

Кожна правильна відповідь оцінюється в чотири бали. Помноживши кількість правильних відповідей на чотири, студент може дізнатися рівень своїх знань за шкалою наведеною у таблиці 3.9.

Таблиця 3.9

Підсумки засвоєних знань за результатами тесту

<table>
<tr><th>Сума балів</th><th>Оцінка ECTS</th><th>Оцінка за національною шкалою</th></tr>
<tr><td>90-100</td><td>A</td><td>відмінно</td></tr>
<tr><td>82-89</td><td>B</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>74-81</td><td>C</td></tr>
<tr><td>64-73</td><td>D</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60-63</td><td>E</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td>FX</td><td rowspan="2">незадовільно</td></tr>
<tr><td>1-34</td><td>F</td></tr>
</table>

ЛІТЕРАТУРА

1. Берлянт А.М. Картография: учебник для вузов / А.М. Берлянт; М-во образования РФ. – М.: Аспект Пресс, 2001. – 336 с.

2. Вахрамеева Л.А. Картография: учебник для вузов / Л.А. Вахрамеева. – М.: Недра, 1981. – 224 с.

3. Вахрамеева Л.А. Математическая картография: Учебник для вузов / Л.А. Вахрамеева, Л.М. Бугаевский, З.Л. Казакова. – М.: Недра, 1986. – 286 с.

4. Каврайский В.В. Общая теория картографических проекцій: Избранные труды: том 2. – М.: Изд. "Гидрограф. служба ВМФ", 1958. – 312 с.

5. Бонч-Бруевич М.Д. Картография: Геодезия: том 6 / М.Д. Бонч-Бруевич. – М.: Изд. Наркомхоза РСФСР, 1939. – 164 с.

6. Мещеряков Г.А. Теоретические основы математической картографии: учебник для вузов / Г.А. Мещеряков. – М.: Недра, 1984. – 248 с.

7. Павлов А.А. Практическое пособие по математической картографии / А.А. Павлов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. – 171 с.

8. Салищев К.А. Картоведение: учебник для ун-тов / К.А. Салищев. – М.: МГУ, 1990. – 400 с.9. Салищев К.А. Картография: учебник для ун-тов / К.А. Салищев. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.

10. Соловьев М.Д. Математическая картография: учебник для ун-тов /М.Д. Соловьев. – М.: Недра, 1969. – 288 с.

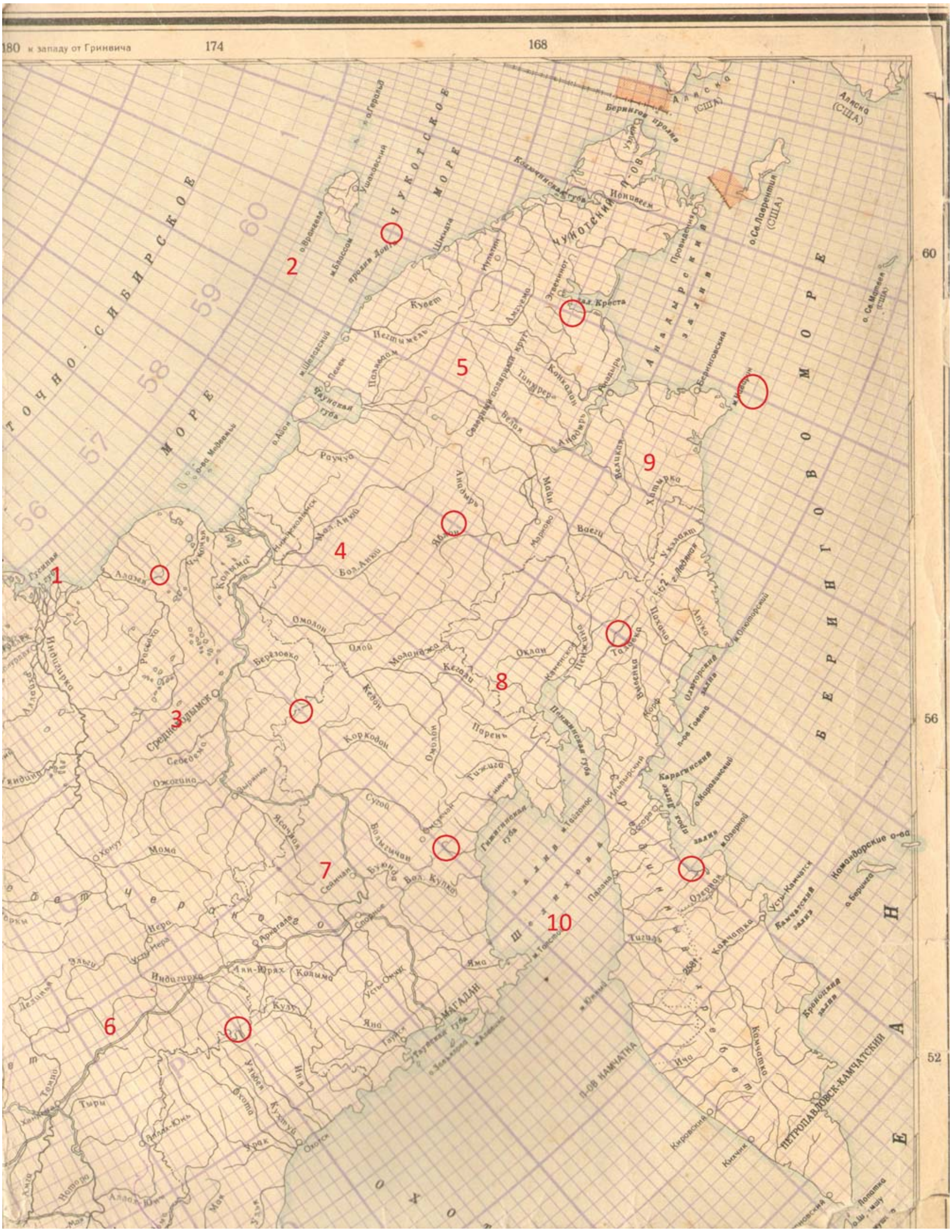
11. Соловьев М.Д. Практическое пособие по математической картографии / М.Д. Соловьев. – М., 1952. – 178 с.

12. Справочник по картографии: Под ред. Е.И. Халугина. – М.: Недра, 1988. – 427 с.

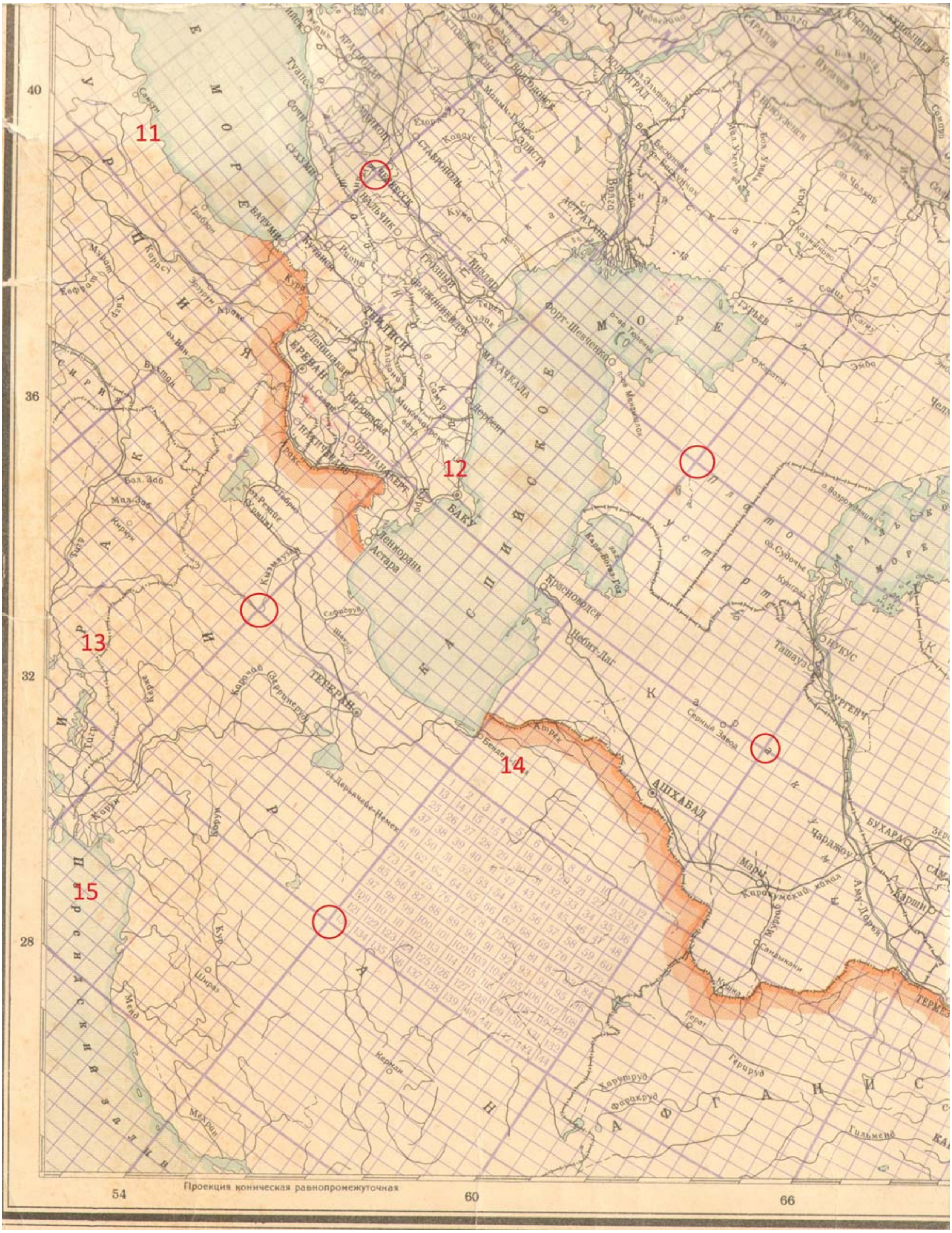
13. Толстоухов А.С. Картография: Конспект лекций / А.С. Толстоухов. – М.: МИИГАиК, 1978. – 66 с.

Додаток А

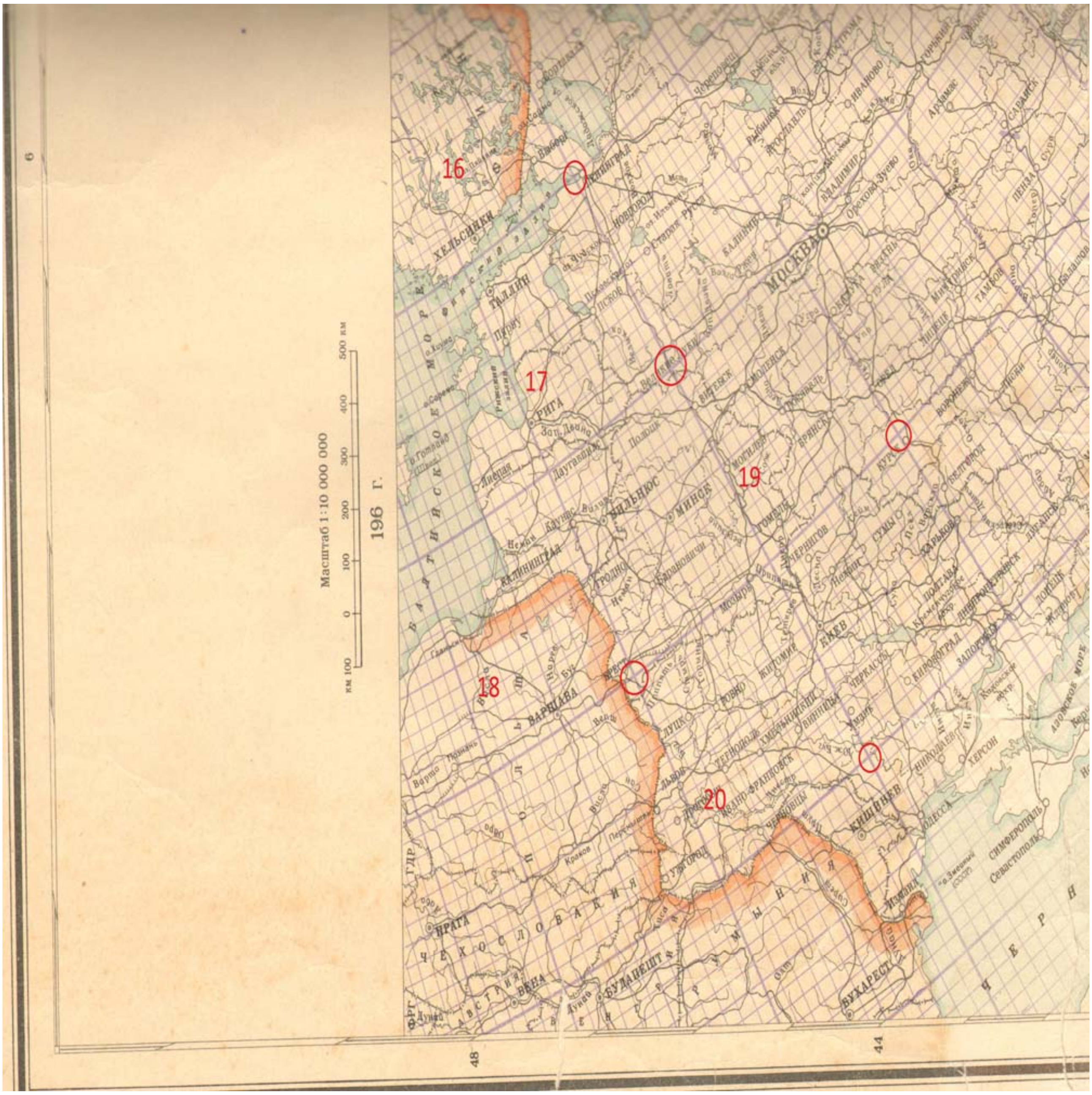
Вихідні дані до розрахунку лабораторної роботи № 1
Варіант № 1-10



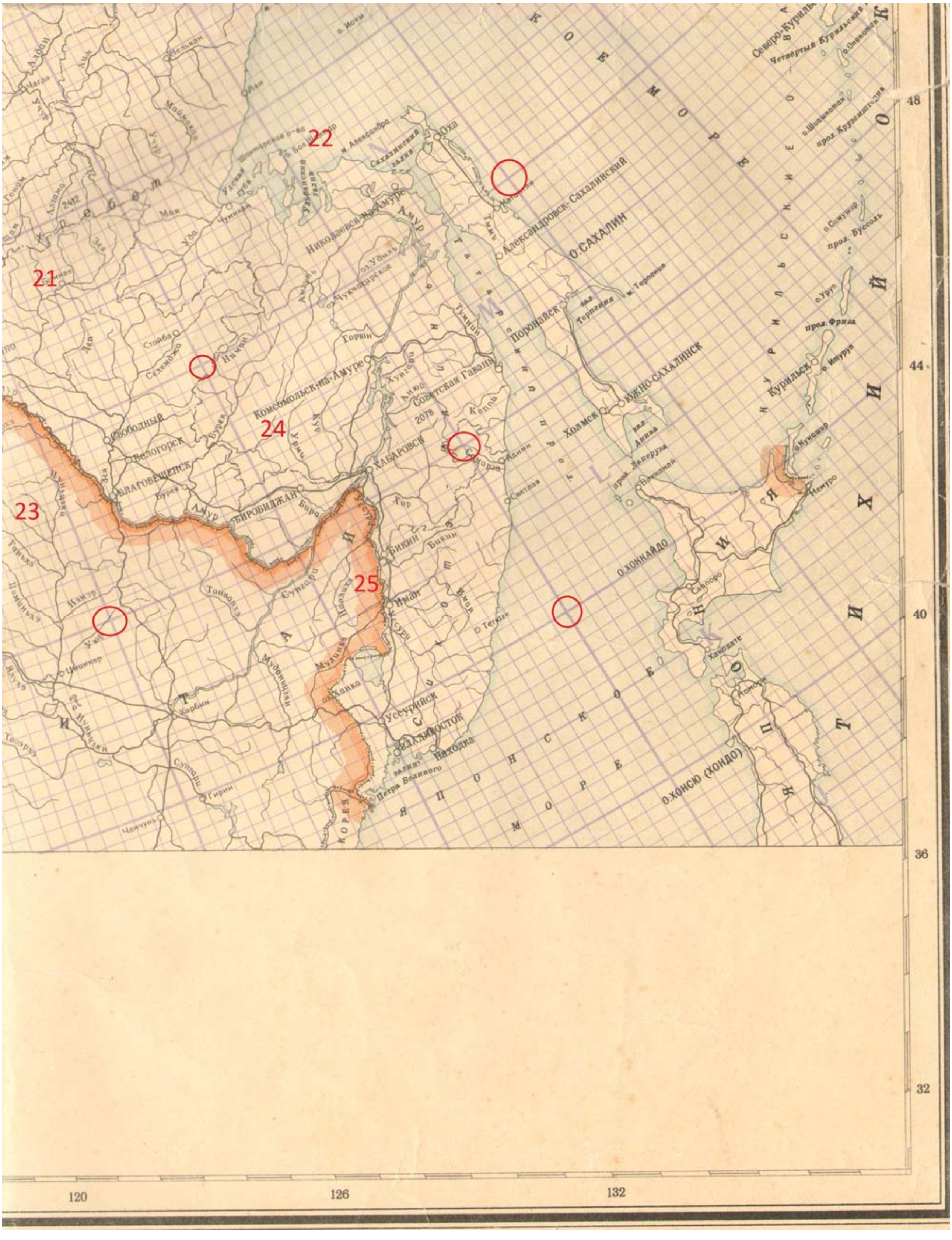
Варіант № 11-15



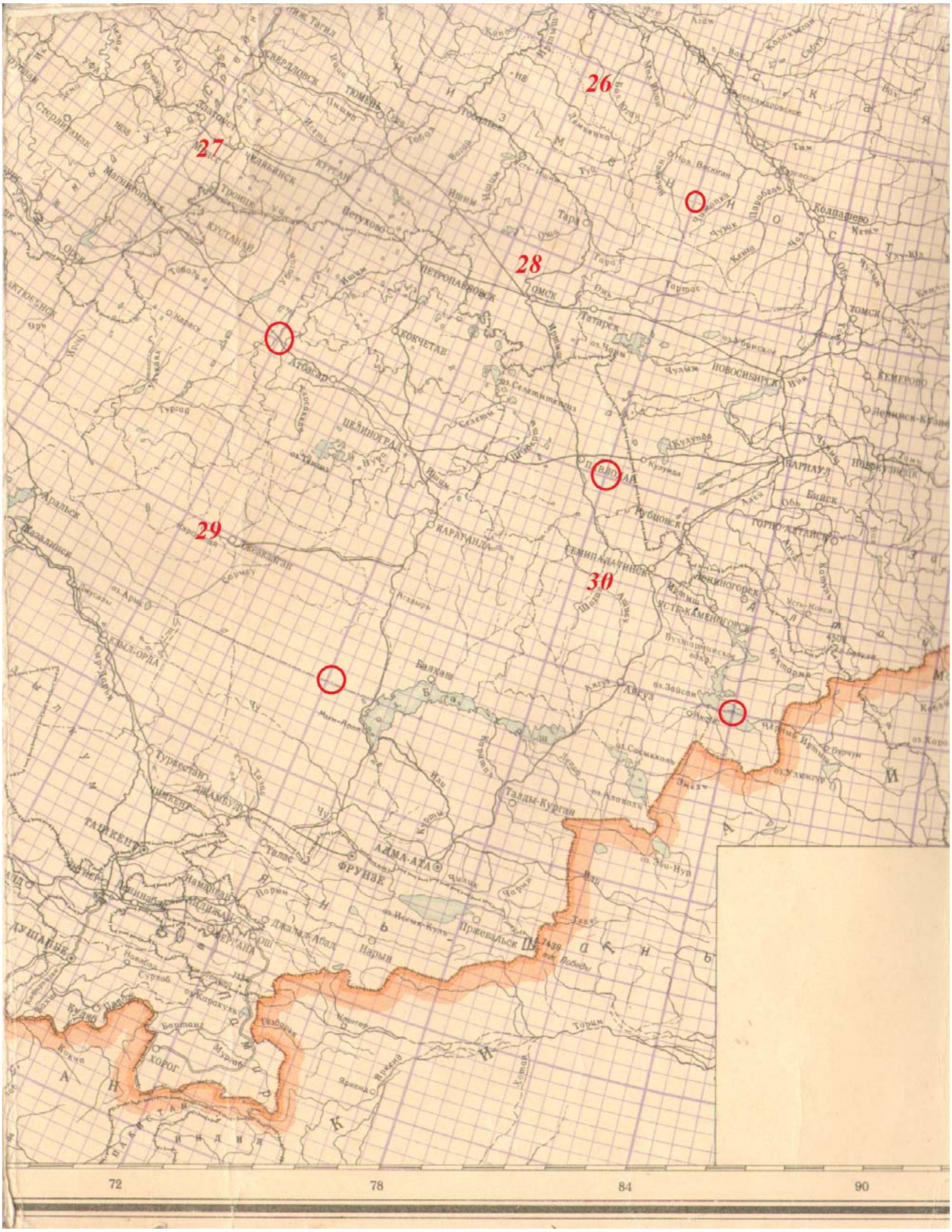
Варіант № 16-20



Варіант № 20-25



Варіант № 25-30



Додаток Б

Табличні значення елементів земного еліпсоїда для розрахунків лабораторної роботи № 1

φ ,°	S_m, *м*	S_n, *м*	φ ,°	S_m, *м*	S_n, *м*
1	110576	111305	46	5096176	77465
2	221153	111254	47	5207339	76057
3	331732	111170	48	5318521	74627
4	442312	111052	49	5429723	73173
5	552895	110901	50	5540944	71697
6	663482	110716	51	5652185	70199
7	774072	110497	52	5763445	68679
8	884668	110245	53	5874723	67138
9	995268	109960	54	5986021	65577
10	1105875	109641	55	6097337	63995
11	1216488	109289	56	6208672	62394
12	1327108	108904	57	6320025	60773
13	1437737	108487	58	6431395	59134
14	1548373	108036	59	6542783	57476
15	1659019	107552	60	6654189	55801
16	1769675	107036	61	6765612	54108
17	1880341	106488	62	6877051	52399
18	1991017	105907	63	698506	50674
19	2101706	105294	64	7099978	48933
20	2212406	104649	65	7211465	47176
21	2323118	103972	66	7322967	45405
22	2433844	103264	67	7434483	43621
23	2544583	102524	68	7546014	41822
24	2655336	101753	69	7657558	40011
25	2766103	100592	70	7769116	38187
26	2876886	100119	71	7880686	36352
27	2987683	99257	72	7992268	34505
28	3098497	98364	73	8103862	32647
29	3209326	97441	74	8215467	30780
30	3320172	96488	75	8327082	28902
31	3431035	95506	76	8438707	27016
32	3541915	94495	77	8550341	25122
33	3650813	93455	78	8664984	23219
34	3763728	92386	79	8773635	21310
35	3874662	91290	80	8885293	19394
36	3985613	90165	81	8996958	17472
37	4096584	89013	82	9108629	15544
38	4207573	87834	83	9220306	13612
39	4318580	86628	84	9331987	11675
40	4429607	85395	85	9443673	9735
41	4540654	84137	86	9555362	7791
42	4651719	82852	87	9667053	5846
43	4762804	81542	88	9778747	3898
44	4873908	80208	89	9890442	1949
45	4985032	78848	90	10002137	0

Навчальне видання

Рябчій Валерій Архипович

Рябчій Владислав Валерійович

Трегуб Юлія Євгенівна

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СПОТВОРЕНЬ

Навчальний посібник

Редактор В.І. Луценко

Підп. до друку 09.01.2014. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 5,6.
Обл.-вид. арк. 7,1. Тираж 50 прим. Зам. № .

Підготовлено до друку та видрукувано

в Національному гірничому університеті.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.

49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.