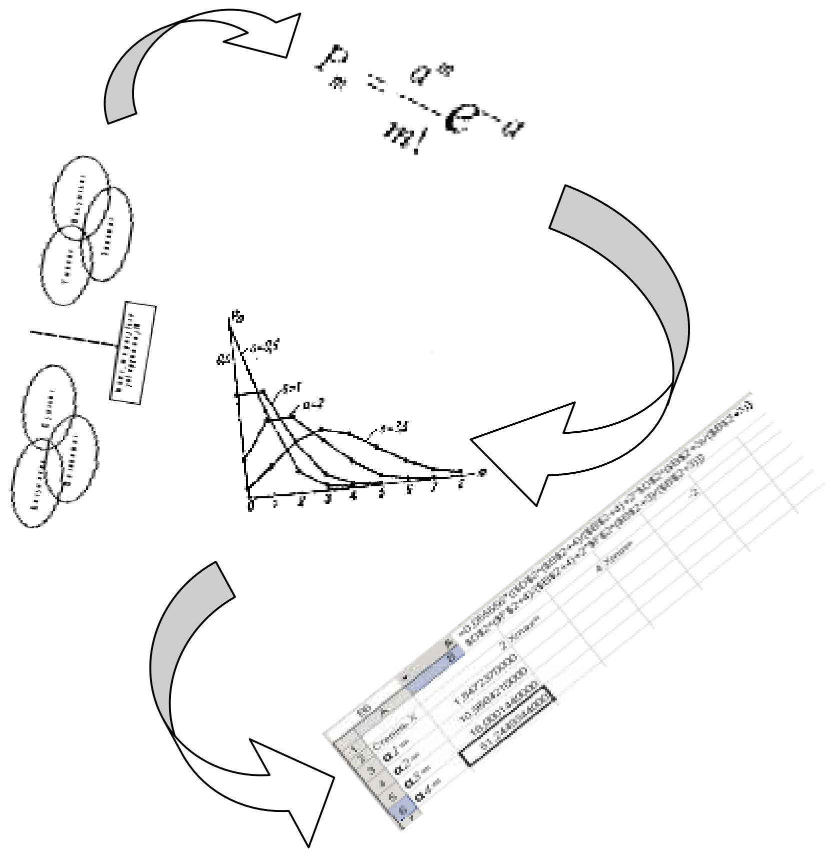
І.М. Пістунов, Н.В. Лобова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ.

З ЕЛЕМЕНТАМИ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ



Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

І.М. Пістунов, Н.В. Лобова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ.
З ЕЛЕМЕНТАМИ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ

(Навчальний посібник)

Дніпропетровськ
НГУ
2005

УДК 519.21:330:004.67(075.8)
БКК 22.171:22.19я73
П34

Затверджено вченою радою університету як навчальний посібник з дисципліни „Теорія ймовірності та математична статистика” для студентів очної та заочної форм навчання в циклі професійної підготовки бакалавра за напрямами підготовки 0501 Економіка і підприємництво та 0502 Менеджмент (протокол № 8 від 10.10.2005 р).

Рецензенти:
О.М.Марюта, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри економічної інформатики і статистики (Дніпропетровський національний університет);
К.Ф. Ковальчук, д-р екон. наук, проф., завідувач кафедри фінансів (Дніпропетровська національна металургійна академія України).

Пістунов І.М., Лобова Н.В.
П34 Теорія ймовірності та математична статистика для економістів. З елементами електронних таблиць: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2005.– 110 с.

Подано теорію та приклади розв’язання задач з розрахунку ймовірностей та числових характеристик дискретних та безперервних випадкових величин. Основи математичної статистики містять визначення числових характеристик та рівень їх достовірності.

Кожен розділ містить теорію, приклади розв’язання та індивідуальні завдання для закріплення отриманих знань. Наведено приклади застосування основних положень теорії ймовірності та математичної статистики в економіці. Розділи закінчуються методичними вказівками по розрахунках на комп’ютері за наведеними формулами.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів і може бути корисним для викладачів, які застосовують теорію ймовірностей та математичну статистику у власних курсах.

Посібник базується на літературних джерелах вітчизняних та зарубіжних авторів, комп’ютерній програмі Excel та на досвіді викладання дисципліни „Теорія ймовірностей та математична статистика” в Національному гірничому університеті.

БКК 22.171:22.19я73

Зміст

ВСТУП

Теорія ймовірностей виникла з практичних потреб необхідності передбачати випадкові події. Подією або випадком ми назвемо явище, яке може відбутися, а може і не відбутися. І хоча свій початок ця теорія бере з необхідності передбачати результати азартних ігор (саме слово “азарт”, з французького “le hasard”, означає “випадок”), подальший її розвиток привів до значних здобутків у теорії вимірювань, масового обслуговування, надійності і т. ін.

Для економістів теорія ймовірності є однією з базових фундаментальних дисциплін тому, що фінансова діяльність у суспільстві з вільною економікою повністю підлягає законам випадку, невизначеності. Уже у XVII сторіччі теорія ймовірностей застосовувалась у діяльності страхових компаній, а в наші дні вона вживається і для розрахунку ризикових фінансових операцій, плануванню банківської діяльності, макроекономічному плануванні. До задач економічного напрямку можна віднести також демографічні, сільськогосподарські, виробничі розрахунки.

У цьому посібнику ви знайдете не тільки теорію, але й багато задач, для яких подані і розв’язання, що дозволить при необхідності застосовувати їх при розв’язанні контрольних робіт і на практиці, для реальних умов. Окрім них, наведено індивідуальні завдання, які кожен студент має виконати на протязі вивчення предмету. Кожне завдання має по декілька груп задач. Із кожної групи студент вибирає одну задачу по останній цифрі номера своєї залікової книжки, а номер варіанта числових значень вибирається з таблиць за номером студента в журналі студентської групи.

Завдання треба здавати у письмовому вигляді оформити таким чином :

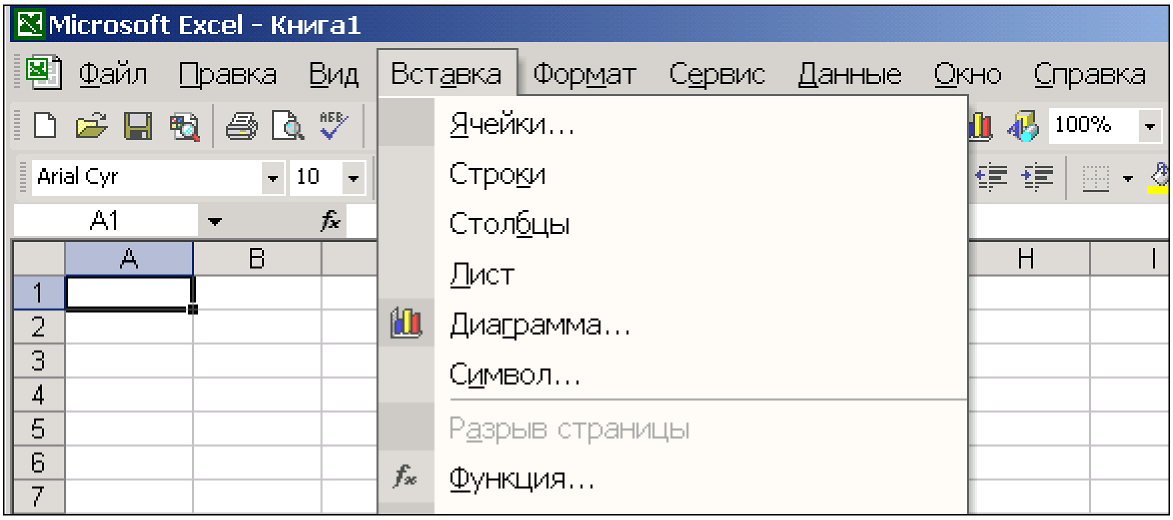
Теорія ймовірностей Індивідуальне завдання № 1 Варіант задач №0, варіант числових даних № 17 Виконав: студент групи ЕЕ-00-1 Петренко Семен

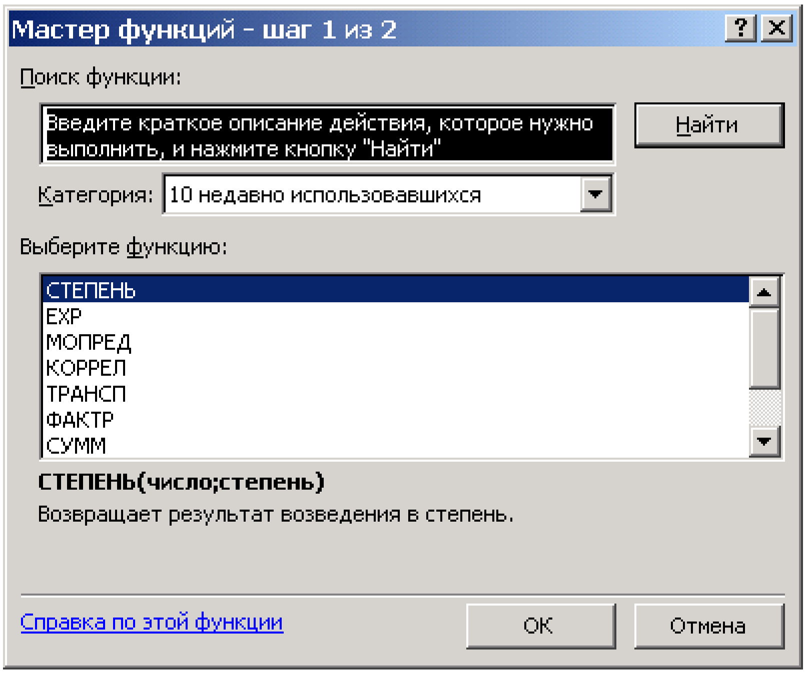
Кожну задачу спочатку треба розв’язати в загальному вигляді з представлення формули рішення, в яку потім підставлені конкретні числові дані для свого варіанта. Відповідь на кожну задачу вміщається в правій частині листа разом з номером групи задач у цьому завданні, наприклад:

№ I. 0,009 № II. 15 № III. 2499 № IV. 2,56

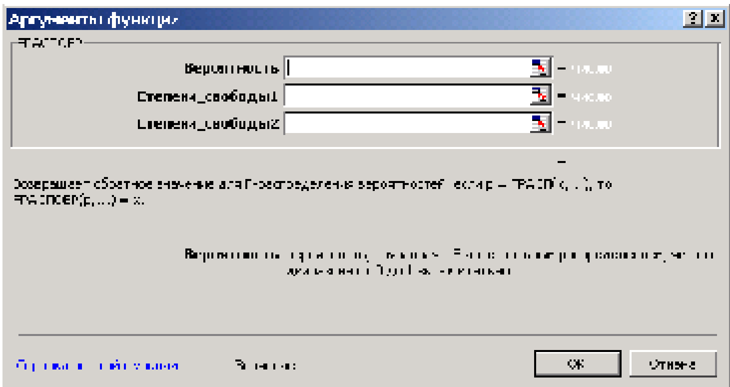
В деяких задачах числові значення потрібно визначити за простою формулою. Наприклад, якщо в таблиці навпроти позначення $\boldsymbol{C}$ стоїть число 17, а числове значення в умові задачі подано як $\mathbf{0{,}01}\cdot\boldsymbol{C}$, то це означає, що потрібно брати число $0{,}01\cdot 17=0{,}17$.

Електронні таблиці Excel дозволяють автоматизувати всі розрахунки ймовірності та статистичні розрахунки.. Для цього потрібно звернутися до функцій, які можна викликати за допомогою кнопки fx або через меню “Вставка-Функции”.



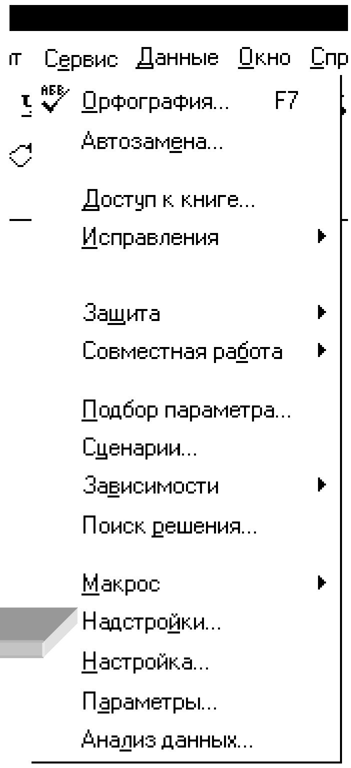


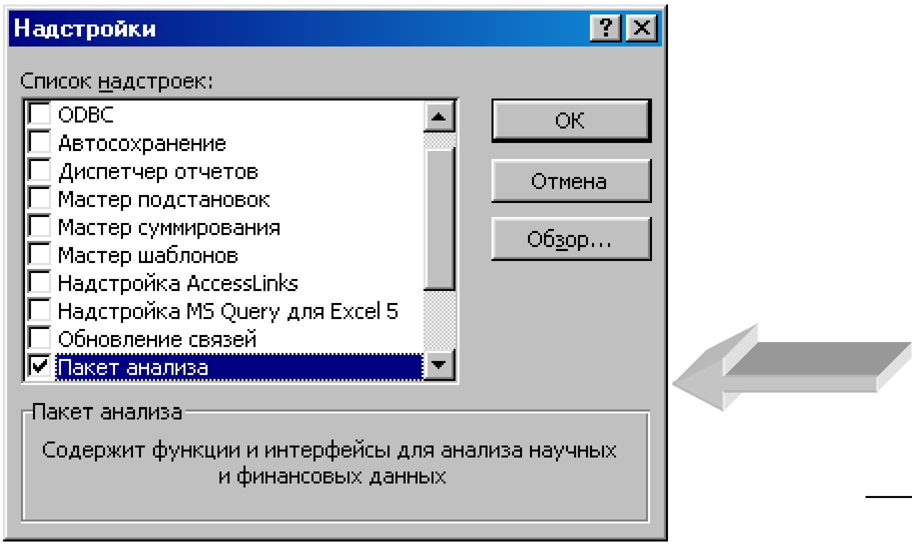
Вікно, що відчиниться, містить перелік усіх функцій Excel. З цього переліку ми можемо обрати потрібну функцію, яка має вигляд вікна з клітинками, у які треба або вписати потрібне число або вказати адресу клітинки чи ряду клітинок, що містять числа, потрібні для розрахунків. Усі функції можуть бути вставлені у формули як звичайна адреса клітинки, оскільки вони повертають значення у вигляді числа. Або логічної змінної.



Розгалужена система надання довідок дозволяє швидко вибрати потрібну функцію та розібратися з її параметрами. Бо кожна з них супроводжується короткою анотацією, а при натисканні кнопки зі знаком питання, з’являється її розширений опис.

Окрім функцій, Excel має ще й програми, які проводять розрахунки за великою кількістю параметрів водночас. Для того, щоб ці програми стали доступними, необхідно спочатку через меню "Сервис-Надстройки" відмітити пункт "Пакет анализа".





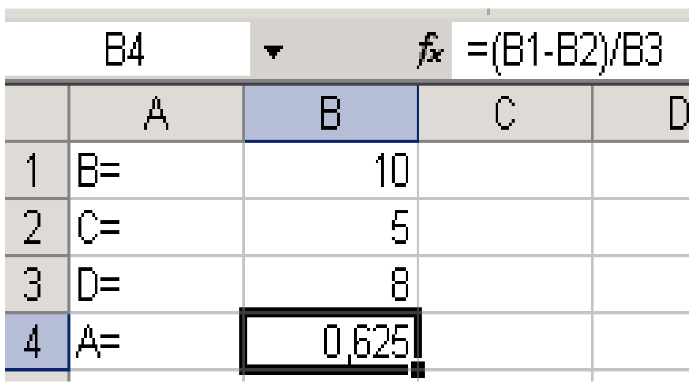
Тоді цей пункт з'явиться в меню "Сервис" як "Анализ данных". Порядок вибору потрібної програми такий самий, як і при виборі функцій.

Довідникова система працює так само. Головною відміною цих програм є те, що вони повертають не одне число, а цілий масив чисел, тому кожна з цих програм вимагає, щоб було визначено клітинку, починаючи з якої праворуч і нижче будуть розташовані результати розрахунку.

Після кожного підрозділу в посібнику подано приклад використання електронних таблиць при розрахунках за формулами, наведеними в цьому підрозділі. Наприклад, якщо потрібно провести розрахунки за формулою

$$A = \frac{B - C}{D},$$

для наступних числових значень параметрів B=10, C=5, D=8, то в підрозділі буде наведено малюнок, в якому видно фрагмент вікна Excel, де колонку A займають тестові визначення невідомих у формулі, колонку B – їх числові значення. Вікно f_x містить саму формулу розрахунку, де вказано адреси клітинок, які містять числові дані.



Додаткових пояснень за такими малюнками надаватися не буде, оскільки студенти повинні знати порядок складання формул в електронних таблицях Excel.

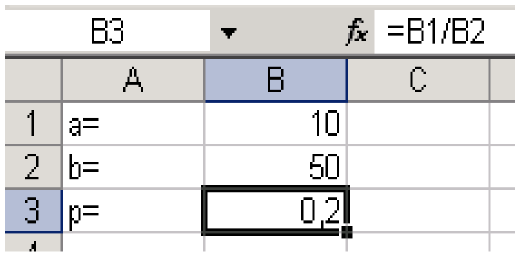
1. ІМОВІРНОСТІ

При вивченні цього розділу студент має опанувати методику розрахунку настання сумісних або незалежних подій та їх протилежностей в різних умовах.

1.1. Поняття ймовірності

В теорії ймовірностей прийнято називати “вдалими” (сприятливими) ті результати, які приводять до здійснення події, що цікавить нас у задачі. Якщо масова операція така, що подія. A спостерігається в середньому a разів серед b випадків, то ймовірність події A в даних умовах складає

$$p = \frac{a}{b} \qquad \text{або} \qquad p = 100\frac{a}{b}\,\% \tag{1.1}$$



Число a називається ще “частотою виникнення” події A. Імовірність – “відносною частотою”.

Імовірність позначається малою або великою літерою “P, p - латинське”. При цьому завжди треба мати на увазі, що питання про ймовірність тієї або іншої події (результату) має значення тільки в точно певних умовах, у яких протікає наша масова операція. Усяка істотна зміна цих умов спричиняє, як правило, зміну цікавлячої нас імовірності.

Формула (1.1) може мати ще дві модифікації залежно від того, які параметри події, що розглядається, нам відомі $a = p \cdot b$ та $b = a/p$.

Подією називається явище, виникнення якого нас цікавить.

Події бувають:

1) сумісними – коли виникнення однієї з них не впливає на виникнення іншої;
2) не сумісними – коли виникнення однієї з них заперечує або виключає можливість виникнення іншої;
3) безумовні – виникнення яких не потребує виконання якихось умов;
4) умовні – виникнення яких може статися тільки при умові виникнення інших подій, з якими вони пов’язані. Інша назва таких подій – залежні;
5) незалежні – на виникнення яких не впливає виникнення інших подій;
6) залежні – на виникнення яких впливає виникнення інших подій.

Ці типи подій утворюють шість різних класів, які можна об’єднати у дві великі групи, що непов’язані одна з одною (рис. 1.1). Як видно з рисунку, безумовні події можуть бути сумісними і незалежними водночас. Або тільки безумовними, тільки сумісними, тільки незалежними. Такіж висновки можна зробити щодо умовних, несумісних і залежних подій. Тому, правильна класифікація подій по їх типу є основою вірного вирішення задач.

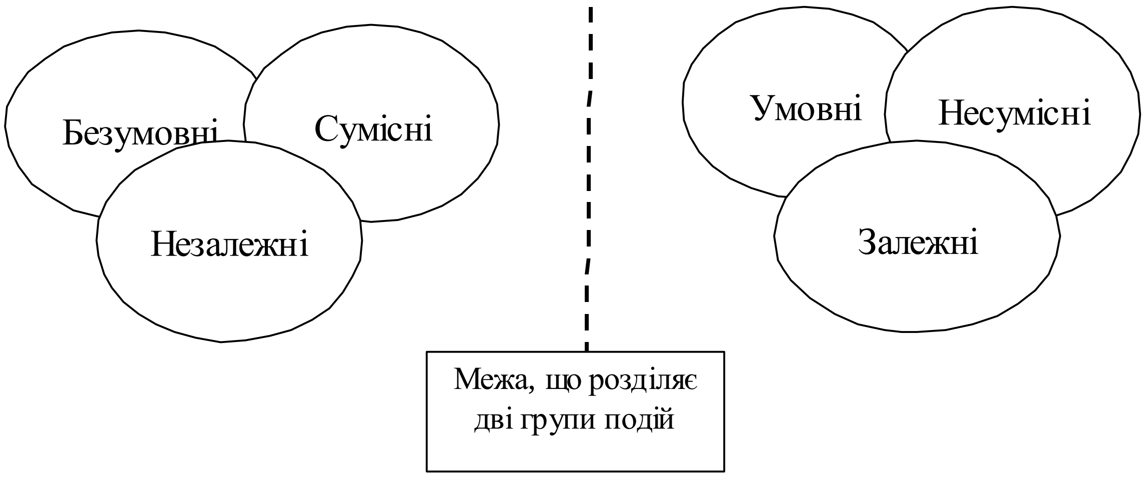


Рис. 1.1. Схема взаємозалежності різних типів подій.

Приклади

Приклад 1. У деякому місті протягом першого кварталу народилися в січні 145 хлопчиків і 135 дівчинок, у лютому 142 хлопчика і 136 дівчинок, у березні - 152 хлопчика і 140 дівчинок. Яка ймовірність народження хлопчика?

Частка народження хлопчиків у січні: 145/280 =0,518 = 51,8%, у лютому: 142/278 =. 0,511 = 51,1%, у березні: 152/292 = 0,521 =52,1%. Ми бачимо, що середнє арифметичне цих часток за окремі місяці близько до числа 0,516=51,6%; знайдена ймовірність у даних умовах становить приблизно 0,516, або 51,6%. Ця цифра добре відома в демографії - науці, що вивчає динаміку населення; виявляється, що частка народження хлопчика в звичайних умовах у різні періоди часу не буде значно відхилятися від цієї цифри..

Приклад 2 Яка ймовірність випадання герба при киданні монети?

Майже напевно (з дуже великою ймовірністю!) ви, не задумуючись, відповісте: 1/2. І це вірна відповідь, якщо вважати, що монета симетрична, правильної форми, а випадок «монета встане на ребро» можна відкинути як практично неможливий.

Приклад 3 Яка ймовірність появи шести очок при киданні гральної кістки?

Напевно, відповідь буде 1/6 (зрозуміло, з тими ж обмовками щодо симетричності кістки і практичної неможливості її зупинки на ребрі або вершині). Як ви цю відповідь отримали? Очевидно, ви підрахували число можливих виходів цього досліду (їх шість). Внаслідок симетрії ці виходи рівноймовірні. Природно кожному з них приписати ймовірність 1/6.

Приклад 4 Яка ймовірність появи більш чотирьох очок у попередньому досліді?

Розміркувавши трохи, ви, можливо, відповісте: 1/3, і знову будете абсолютно праві. Дійсно, з шести рівноможливих виходів досліду два (п'ятірка і шістка) дають більше чотирьох очок (або, як кажуть, «сприятливі» цій події). Розділивши 2 на 6, ви отримали правильну відповідь.

Приклад 5. В аудиторію зайшло 20 дівчат. Імовірність того, що в аудиторію зайдуть хлопці, складає 0,6. Скільки хлопців зайшло в аудиторію?

Згідно (1.1), значення a нам не відоме. Зате ми знаємо значення p та те, що $a+20=b$. Підставимо ці результати в (1.1) і отримаємо, що $0,6 = a/(a+20)$. Звідки маємо $a = (0,6 \cdot 20) / (1 - 0,6) = 30$.

1.2. Неможливі і достовірні події

Імовірність події, очевидно, завжди є позитивним числом, яке знаходиться в межах від нуля до одиниці. Вона не може бути більшою одиниці, тому що у дробу, яким вона визначається, чисельник не може бути більшим знаменника (число «вдалих» операцій не може бути більшим числа всіх зроблених операцій). Умовимося позначати через *P(A)* імовірність події *A*. Якою б не була ця подія,

$$\mathbf{0 \le P(A) \le 1} \qquad (1.2)$$

Чим більше *P(A)*, тим частіше наступає подія *A*. Наприклад, чим більше у банка ймовірність повернення кредитів, тим вдаліше його економічні показники, тим вище його доходи. Якщо *P(A)* близька до одиниці, то у дробі, яким виражається ця ймовірність, чисельник близький до знаменника, тобто переважна більшість операцій «вдала»; така подія наступає в більшості випадків. Якщо ***P(A)* = 1**, то подія *A* наступає завжди або майже завжди, так що практично можна вважати її **достовірною**, а значить. напевно, розраховувати на її настання. Якщо *P(A)*=1/2, то подія *A* наступає приблизно в половині всіх випадків; це означає, що «вдалих» операцій спостерігається приблизно стільки ж, скільки «невдалих». Якщо *P(A)*>1/2, то подія *A* наступає частіше, ніж не наступає, при *P(A)<;*1/2 ми маємо зворотне явище. Якщо ймовірність події дуже мала, то вона наступає рідко; якщо ***P(A)* = 0**, то подія А або ніколи не наступає, або наступає надто рідко, так що практично можна вважати її **неможливою**.

Наскільки малою повинна бути ймовірність події, щоб ми практично могли вважати її неможливою? На це питання не можна дати загальної відповіді, тому що все залежить від того, наскільки важлива подія, про яку йде мова. Так 0,01 – число невелике. Якщо це ймовірність відкликання депозитів з банку, тобто це означає, що на кожні 100 вкладів один забирається назад, З цим можна примиритися. Але якщо 0,01 є ймовірність того, що ваш особистий вклад не буде повернено, то з цим миритися, звичайно, ніяк не можна. Ці приклади показують, що в кожній окремій задачі треба заздалегідь на основі практичних міркувань встановити, наскільки малою повинна бути ймовірність події, щоб ми без збитку для справи могли не рахуватися з його можливістю.

1.3. Правило складання ймовірностей

Імовірність настання в деякій операції якого-небудь одного (байдуже якого саме) з результатів A_1, A_2, ... A_n дорівнює сумі ймовірностей цих результатів, якщо кожні два з них несумісні між собою.

При проведенні деякої масової операції встановлено, що в кожній серії з b

одиничних операцій спостерігається в середньому

a_1 раз деякий результат A_1;
a_2 раз деякий результат A_2;
a_3 раз деякий результат A_3.

Інакше кажучи,

імовірність події $A_1 = a_1/b$;
імовірність події $A_2 = a_2/b$;
імовірність події $A_3 = a_3/b$.

Яка ймовірність того, що в деякій одиничній операції наступить який-небудь один (будь який) з результатів. A_1 , A_2 , A_3..?

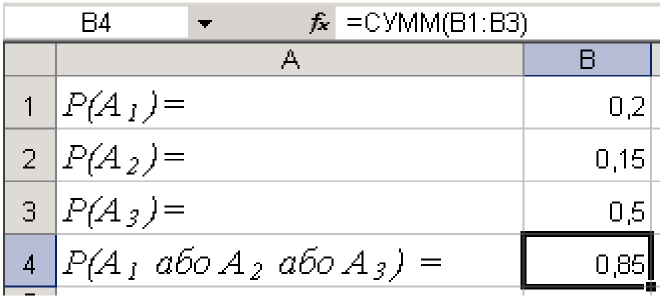
Подію, що нас цікавить, можна назвати (A_1 *або* A_2 *або* A_3...). Багатокрапка тут і в інших подібних випадках означає «і так далі».. Вона в серії з b операцій наступає $a_1 + a_2 + a_3. + ….$ разів; значить, шукана ймовірність

$$p = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \Lambda}{b} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \frac{a_3}{b} + \Lambda \qquad (1.3)$$

це можна записати такою формулою:

$$\boldsymbol{P(A_1 \text{ або } A_2 \text{ або } A_3, \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots} = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \qquad (1.4)$$

де n– загальна кількість подій



	A	B
1	$P(A_1)=$	0,2
2	$P(A_2)=$	0,15
3	$P(A_3)=$	0,5
4	$P(A_1$ *або* A_2 *або* $A_3) =$	0,85

Приклад

У супермаркеті товари на полиці розташовані залежно від ціни так, як зображено на рис. 1.2, дорожчі – ближче до рівня очей, дешевші – ближче до низу полиці.

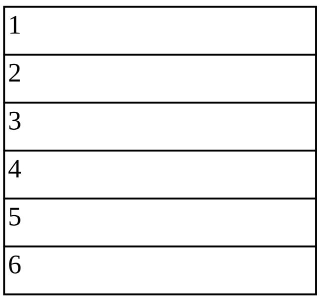


Рис. 1.2

Існує та або інша ймовірність, що клієнт супермаркету візьме товар з кожної полиці № 1, 2, 3, 4, 5, 6. Нехай, в цьому супермаркеті ймовірність взяти товар з полиці 1 становить 0,24, а з полиці 2 - 0,17. Як ми вже знаємо, це означає, що з сотні клієнтів, що зайшли в супермаркет, 24 клієнти візьмуть товар (в середньому) з полиці 1 і 17 клієнтів (в середньому) – з полиці 2. Нехай, у деякому змаганні серед різних змін продавців у цьому супермаркеті, покупка товару з полиці 1 признається "відмінною", а з полиці 2 – "доброю". Яка ймовірність того, що на одній зміні покупка буде "доброю, або "відмінною"?

На це питання легко відповісти. З кожної сотні клієнтів, що зайшли в супермаркет, 24 беруть товар з полиці 1 і 17 – із полиці 2. Значить, з кожної сотні клієнтів буде приблизно 24+17=41 клієнт, які візьмуть товар або з полиці 1, або з полиці 2. Шукана ймовірність дорівнює p = 41/100 = 0,41 = 0,24+0,17.

Імовірність того, що зроблена покупка буде оцінена на відмінно, або добре, дорівнює сумі ймовірностей "відмінної" і "доброї" полиці.

1.4. Повна система подій

Нехай є n (будь-яке число) подій $A_1, A_2, \dots A_n$, таких, що в кожній одиничній операції обов'язково повинно наступити одне і тільки одне з цих подій (тобто, події несумісні). Умовимося таку групу подій називати **повною системою**. Сума ймовірностей подій, що створюють повну систему, дорівнює одиниці. Дійсно, за визначенням повної системи будь-які дві з подій цієї системи несумісні між собою, так що правило складання дає

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n) = P(A_1 \text{ або } A_2 \dots, \text{ або } A_n).$$

Але права частина цієї рівності є ймовірність достовірної події (оскільки хоч якась з них обов'язково виникне) і тому дорівнює одиниці; таким чином, для повної системи подій

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n) = 1. \tag{1.5}$$

Що і потрібно було довести.

Всяка пара протилежних подій, очевидно, утворить повну систему

$$P(A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 1,$$

де A_2.- подія, протилежна A_1.

На визначеній теоремі про повну систему подій часто з успіхом засновують так званий «апріорний», або переддослідний розрахунок імовірностей. Часто в таких випадках кажуть, що дана операція може мати n різних рівноймовірних між собою результатів Імовірність кожного окремого з цих n результатів дорівнює $1/n$.. Важливість такого роду «апріорних» розрахунків полягає в тому, що в багатьох випадках вони дозволяють передбачати ймовірність події в таких умовах, де постановка масових досліджень або зовсім неможлива, або надзвичайно утруднена.

Повну систему подій утворюють тільки ***несумісні*** події.

Приклади

Приклад 1. Статистика показує, що на деякій ткацькій фабриці з кожної сотні зупинок ткацького станка, що вимагають подальшої роботи ткалі, в середньому 22 відбуваються через обрив ниток основи, 31 відбувається через обрив ниток утка, 27 відбуваються через потребу зміни човника, 3 відбуваються через поломку погонялок, а інші зупинки відбуваються через інші причини. Визначити ймовірність зупинки станка від інших причин.

Ми бачимо, що окрім інших причин для зупинок станка є чотири певні причини, імовірності яких відповідно такі: 0,22; 0,31; 0,27; 0,03.Сума цих імовірностей є 0,83. Разом з іншими причинами вказані причини зупинок станка складають повну систему подій. Тому ймовірність зупинки станка від інших причин знайдемо як   1 - 0,83 ==0,17.

Приклад.2. В облігаціях лотереї номера виражені п`ятизначними числами. Знайти ймовірність того, що остання цифра наздогад взятої серії, що виграла, є 7 (як, наприклад, в №59607).

Для цього, згідно з визначенням імовірності необхідно розглянути довгий ряд тиражних таблиць і підрахувати, скільки лотерейних квитків, що виграли мають номери, що закінчуються цифрою 7; відношення цього числа до загального числа квитків, що виграли й буде шуканою ймовірністю. Однак кожна з десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 має стільки ж. основ виявитися на останньому місці в номері серії, що виграла, як і будь-яка інша. Тому без усяких коливань висловлюємо припущення, що шукана ймовірність рівна 0,1. Правильність цього теоретичного «передбачення» легко перевіряється: зробивши всі необхідні підрахунки в межах якої-небудь однієї тиражній таблиці, можна пересвідчитися, що дійсно будь-хто з 10 цифр буде стояти на останньому місці приблизно у 1/10 усіх випадків.

Приклад. 3. Телефонна лінія, що з'єднує два пункти А і В, віддалених один від одного на відстані 2 км, порвалася в невідомому місці. Чому дорівнює ймовірність того, що вона порвалася не далі чим в 450 м від пункту А?

Розклавши уявно всю лінію на окремі метри, ми можемо, внаслідок реальної однорідності всіх цих ділянок, допустити, що ймовірність обриву є однією і тією ж для кожного метра. Звідси, подібно попередньому, легко знаходиться, що шукана ймовірність становить 450/2000 = 0,225.

Приклад 4. Розглянемо дослід «кидання двох монет» і спробуємо перерахувати випадки. Якщо ви легковажні й поквапні, ви поспішите назвати три такі події:
B_1 –випадання двох гербів; B_2 –випадання двох решок;B_3 – випадання одного герба і однієї решки і будете неправі! Ці три події   не випадки, оскільки вони не равноймовірні. Подія B_3 вдвічі більш вірогідна, ніж кожне з інших. Пересвідчитися в цьому можна, перерахувавши дійсні випадки для нашого досліду

A_1 – герб на першій монеті і герб на другій;
A_2 – решка на першій монеті і решка на другій;
A_3 – герб на першій монеті і решка на другій;
A_4 – решка на першій монеті і герб на другій.

Події B_1 і B_2 співпадають з A_1 і A_2. А ось подія B_3 розпадається на два варіанти: A_3 і A_4, тому вона вдвічі ймовірніша за кожну з інших.

Приклад 5. Нехай є урна, у якій лежать сім куль: три білих і чотири чорних. Дослід полягає в тому, що з урни наздогад виймається одна куля. Потрібно перерахувати випадки, що відносяться до даного досліду.

Відповідаючи на це питання, можна помилитися і легковажно назвати дві події: B_1 – поява білої кулі, B_2 – поява чорної кулі. Але, вірніше за все, ви так вже не відповісте: ви вже зрозуміли, що події B_1 і B_2 не рівноможливі, оскільки білих куль в урні три, а чорних – чотири. У даному досліді не два випадки, а сім (за числом куль), які можна визначити, наприклад, так: $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$, $Ч_1$, $Ч_2$, $Ч_3$, $Ч_4$ (білий перший, білий другий і т. д., чорний четвертий). Ці події несумісні, (утворять повну групу і рівно ймовірні) значить, являють собою випадки.

Приклад 6. Дослід складається в киданні двох монет. Знайти ймовірність того, що з'явиться хоч би один герб.

Визначимо A – появу хоч би одного герба. Випадків у даному досліді чотири (як ми вже з'ясували у прикладі 4). Три з них: A_1,, A_3, A_4 сприятливі події

А, це означає, що згідно (1.1) a=3, b=4, і формула (1.1) дає $P(A)$=3/4.

Приклад 7 В урні три білих і чотири чорних кулі. З урни виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла (подія A).

Тут a=3, b=7, тоді $P(A)$=3/7.

Приклад 8. Та ж урна, у якій три білих і чотири чорних кулі, але умови досліду змінені. Ми виймаємо з урни одну кулю і, не дивлячись, ховаємо її в ящик стола. Після цього беремо з урни другу кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою (подія A).

Очевидно що, попереднє виймання якоїсь кулі невідомого кольору ніяк не впливає на ймовірність появи білої кулі при другому вийманні. Вона залишиться тією ж, що в попередньому прикладі: 3/7.

З першого погляду цей результат може показатися невірним. Адже коли ми виймали другу кулю, в урні було не сім куль, а всього шість. Чи не означає це, що і число випадків було таке, що дорівнює 6? Ні, не означає! Доти, поки ми не знаємо, якого кольору була перша куля (для цього ми і сховали її в ящик стола!), число випадків b залишається рівним семи. Щоб в цьому пересвідчитися, уявіть собі такий дослід: в урні 3 білих і 4 чорних кулі. У кімнаті темно. Ми беремо урну і, не дивлячись, розкидаємо кулі по кімнаті: дві кладемо на підвіконня, дві – на шафу, одну – на диван, а інші два розкидаємо по підлозі. Після цього ми йдемо по кімнаті і наступаємо на кулю. Яка ймовірність, що ця куля – біла? Ясно що вона становить 3/7.

1.5. Поняття умовної ймовірності

Коли в основі всіх операцій, що розглядаються в даній задачі, лежить деяка певна сукупність умов K, які передбачаються виконаними для всіх операцій, то така ймовірність називається умовною. Якщо при обчисленні якоїнебудь імовірності ніяких інших умов, крім сукупності K, не накладається, то таку ймовірність ми назвемо безумовною; **умовною** ж буде називатися ймовірність, обчислена в припущенні, що, крім загальної для всіх операцій сукупності умов K, виконуються ще ті або інші, точно обумовлені додаткові умови.

Умовна імовірність записується так : $P_B(A)$ – імовірність виникнення події A при умові, що подія B сталася. Існує ще одна форма запису такої ймовірності: $P(A|B)$, яка означає те ж саме.

Приклади

Приклад 1. Нехай електричні лампочки виробляються на двох заводах, причому перший з них постачає 70%, а другий 30% усієї споживаної продукції. З кожних ста лампочок першого заводу в середньому 83 стандартні. Назвемо лампочку «стандартною» (такою, що задовольняє стандарту), якщо вона здатна прогоріти не менш 1200 годин; в іншому випадку ми назвемо лампочку нестандартною, а зі ста лампочок другого заводу – лише 63 стандартних.

Як легко підрахувати з цих даних, в середньому на кожні 100 електричних лампочок, тих, що придбані споживачем, доводиться 77 стандартних (Дійсно, $0{,}7 \cdot 83 + 0{,}3 \cdot 63 = 77$), і, отже, ймовірність купити стандартну лампочку становить 0,77. Але припустимо тепер, що ми з'ясували, що лампочки, що є в магазині, виготовлені першим заводом. Тоді ймовірність того, що лампочка стандартна зміниться, вона буде 83/100 = 0,83.

Приклад 2. Багаторічні спостереження, що проводилися в деякому районі показали, що зі 100000 дітей, що досягли десятирічного віку, до 40 років доживає в середньому 82 277, а до 70 років - 37 977. Знайти ймовірність того, що коли людина досягне сорокарічного віку, то вона доживе і до 70 років.

Оскільки з 82 277 сорокарічних до 70 років доживає в середньому 37977, то ймовірність сорокарічному дожити до сімдесяти років дорівнює 37977/ 82 277 = 0.46. Якщо через A і B визначити події, що складаються : перше (безумовна подія) - в доживанні десятирічної дитини до 70 років, а друге (умовна подія) – в досягненні ним сорокарічного віку, то, очевидно, ми маємо

$$P\ (A) = 0{,}37\ 977 = 0{,}38; \quad P_B(A) = 0{,}46.$$

1.6. Правило множення ймовірностей умовних подій

Імовірність спільного настання двох подій дорівнює добутку ймовірності першої події на умовну ймовірність другої, обчисленої в припущенні, що перша подія відбулася.

Зрозуміло, ми можемо називати першою будь-яку. з двох даних подій, так що на рівних підставах можемо записати

$$\boldsymbol{P(\ A\ i\ B\ ) = P(B)\ P_B(A) = P(A)\ P_A(B)} \qquad (1.6)$$

Приклади

Приклад 1. На деякому підприємстві 96% виробів визнається придатними (подія A); з кожної сотні придатних виробів у середньому 75 є першого сорту (подія B). Знайти ймовірність того, що виріб, виготовлений на цьому підприємстві, є першого сорту.

B3 =B1*B2

	A	B
1	$P(B)$ =	0,5
2	$P_B(A)$=	0,6
3	$P(A\ i\ B)$ =	0,3

Шукаємо $P(A\ i\ B)$, оскільки для того, щоб виріб був першосортним, треба, щоб він був придатний (подія А) і першого сорту (подія В). Унаслідок умови задачі $P(A)=0{,}96$, $P_A(B)=0{,}75$. Тому на основі формули (1.6) $P(A\ i\ B)=0{,}96*0{,}75= 0{,}72$.

Приклад 2. В урні 3 білих кулі і 4 чорних. З неї виймаються, одна за одною, дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві ці кулі будуть білими.

Розглянемо дві події: A – перша куля біла; B – друга куля біла. Нам треба знайти ймовірність поєднання цих подій (і перша і друга куля – білі). За правилом множення ймовірностей $P\ (A\ i\ B)=P(A)*P(B/A)$, де $P(A)$ – імовірність того, що перша куля біла, $P\ (B/A)$ – умовна ймовірність того, що друга куля біла (обчислена при умові, що перша куля біла). Очевидно, $P(A)=3/7$. Обчислимо $P(B/A)$. Якщо перша куля біла, то друга вибирається з 6 куль, що залишилися в урні. Серед них залишилося і 2 білих кулі. Отже *P(B/A)=2/6=1/3*. Звідси *P(A і B) = (3/7).(1/3)=1/7*.

Приклад 3. Чи зміниться результат прикладу 3, якщо кулі виймаються з урни не послідовно, одна за одною, а відразу?

З першого погляду може здаватися,що так, зміниться. Але варто трохи подумати, і стане ясно – ні, не зміниться! Дійсно, нехай ми виймаємо дві кулі з урни одночасно, але двома руками. Назвемо умовно «першою» ту, яка в правій руці, а «другою» той, яка в лівій. Чи зміниться хід наших міркувань в порівнянні з тим, який ми застосували при рішенні прикладу 3? Ніскільки! Імовірність двох білих куль буде все та ж: 1/7. «Ну, а якщо виймаємо однією рукою?» може присіктися хто-небудь «Ну, тоді назвемо «першим» той, який ближче до великого пальця, а «другим» до мізинця».

Приклад 4. Нехай ми кинули монету 10 разів і. всі 10 разів отримали герб. Що ймовірніше отримати при наступному, 11-м киданні: герб або решку?

Майже напевно ви скажете: "звичайно, решку!”. Адже десять разів герб уже з'являвся; повинно ж це коли-небудь компенсуватися, повинна колись почати з'являтися решка!» Скажете – і будете абсолютно неправими! Тому що ймовірність появи герба при кожному черговому киданні монети абсолютно не залежить від того, скільки разів перед цим з'явився герб. Якщо монета правильна, то при 11-м киданні, як і при першому, імовірність появи герба буде $1/2$. Інша справа, що випадання герба 10 разів підряд може викликати сумнів у правильності монети; тоді ми швидше схильні будемо підозрювати, що ймовірність випадання герба при кожному киданні (і при 11 -м також!) буде більше, а не менше $1/2$.

«Щось не віриться!” – можливо, скажете ви. Якщо 10 разів підряд випав герб, не можливо, щоб на 11-й раз не було вірогіднішим випадання решки!». Але одного разу статистик К. Пірсон, багато років тому, кидаючи монету 24000 разів, отримав в якихось 10 викиданнях 10 гербів підряд. Сьогодні ви пригадали про це і вирішили продовжити його дослід: кинути монету ще один раз. Що ймовірніше: герб або решка? Думаю, ви вже визнали, що вони однаково вірогідні.

1.7. Правило множення ймовірностей незалежних подій

Нехай подія *B* не залежить від *A*, і *A* не залежить від *B*, то для взаємно незалежних події правило множення отримує особливо простий вигляд:

$$\boldsymbol{P(A \text{ і } B)==P(A)P(B).} \qquad (1.7)$$

Подібно тому, як при всякому застосуванні правила складання (1.4) необхідно заздалегідь встановити взаємну несумісність даних подій, так і при всякому застосуванні правила (1.7) необхідно пересвідчитися, що події *A* і *B* взаємно незалежні. Якщо події *A* і *B* взаємно залежні, то формула (1.7) не вірна. Правило (1.7) розповсюджується на випадок, коли шукається ймовірність настання не двох, а трьох або більше взаємно незалежних подій. Імовірність спільного настання будь-якого числа взаємно незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$p(A_1.\ і\ A_2.і...і\ A_n) = p(A_1)\, p(A_2)......p(A_n). \qquad (1.8)$$

B4	f_x =ПРОИЗВЕД(B1:B3)	
	A	Строка формул
1	$p(A_1)=$	0,5
2	$p(A_2)=$	0,7
3	$p(A_3)=$	0,6
4	$p(A_1.\ і\ A_2.і\ A_3) =$	0,21

Імовірність настання щонайменше однієї з декількох взаємно незалежних подій A_1, A_2.., A_n знайдемо, якщо ми визначимо через $\bar{A_i}$ подію, що полягає в тому, що A_I не наступає, отже події A_I і $\bar{A_i}$ взаємно протилежні, так що

$$P(A_I)+P(\bar{A_i}) = 1.$$

$$P(A_1\ або\ A_2,...,\ або\ A_n) = 1\text{-}P(\breve{A}_1\ і\ \breve{A}_2\ і...і\ \breve{A}_n) =$$

$$=1\text{-}[1\text{-}p(A_1)][1\text{-}p(A_2)]...[1\text{-}p(A_n)]=\prod_{i=1}^{n} p(A_i) \qquad (1.9)$$

B4	f_x =1-(1-B1)*(1-B2)*(1-B3)	
	A	B
1	$p(A_1)=$	0,5
2	$p(A_2)=$	0,7
3	$p(A_3)=$	0,6
4	$p(A_1.абоA_2.або\ A_3) =$	0,94

Ця важлива формула, що дозволяє обчислити ймовірність настання щонайменше однієї з подій A_1, A_2,..., A_n, за даними ймовірностями цих подій, вірна тоді і тільки тоді, коли ці події взаємно незалежні. У окремому випадку, коли всі події A_I мають одну і ту ж імовірність p,

$$P\,(A_1\ або\ A_2,...,\ або\ A_n) = 1 - (1\text{-}\ p)^n\ . \qquad (1.10)$$

B3	f_x =1-(1-B1)^B2	
	A	B
1	$p=$	0,0015
2	$n=$	100
3	$P(A_1$ або A_2 або ..., або $A_n) =$	0,1394

Приклади

Приклад 1. При випробуванні на міцність двох мотків пряжі, виготовлених на різних машинах, виявилося, що для першого мотка зразок деякої довжини витримує певне стандартне навантаження з імовірністю 0,84 (Це означає, що із 100 зразків, взятих з першого мотка, в середньому 84 зразки витримують таке навантаження, 16 – не витримують і розриваються.), а для другого з імовірністю 0,78. Знайти ймовірність того, що два зразки пряжі, взятих з двох різних мотків, обидва спроможні витримати стандартне навантаження.

Визначимо через А подію, що полягає в тому, що зразок, взятий з першого мотка, витримує стандартне навантаження, і через В аналогічну подію для зразка з другого мотка. Оскільки шукається $P(A\ і\ B)$, то ми застосовуємо правило множення $P(A\ і\ B)==P(A)\ P_A(B)$. Тут, очевидно, $P(A)$ =0,84. Але що таке $P_A(B)$? Згідно із загальним визначенням умовних імовірностей, це є ймовірність того, що зразок пряжі з другого мотка витримає стандартне навантаження, якщо таке навантаження витримав зразок з першого мотка. Але ймовірність події B не залежить від того, сталася чи ні подія A, хоч би тому, що ці випробування ми можемо проводити одночасно, а зразки пряжі вибираються з абсолютно різних мотків, виготовлених на різних машинах. Практично це означає, що процент випробувань, при яких пряжа з другого мотка витримає стандартне навантаження, не залежить від того, якій міцності виявиться зразок з першого мотка, тобто $P_A(B)$.= $P(B)$ = 0,78, звідси маємо, що $P(A\ i\ B) == P(A)\,P(B) = 0{,}84\ 0{,}78 = 0{,}6552$.

Особливість, що відрізняє цей приклад від усіх попередніх, складається, як ми бачимо, так що тут імовірність результату В не змінюється від того, що до загальних умов ми додаємо вимогу, щоб відбулася подія А. Інакше кажучи, умовна ймовірність $P_A(B)$ дорівнює безумовній імовірності $P(B)$. У цьому випадку ми будемо стисло говорити, що подія В не залежить від події А.

Приклад 2. Робітник обслуговує три станки. Імовірність того, що протягом години станок не потребує уваги робітника, є для першого станка 0,9, для другого 0,8 і для третього 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом деякої години жоден станок не потребуватиме до себе уваги робітника.

Уважаючи, що станки працюють незалежно один від одного, знаходимо за формулою (1.8), що шукана ймовірність дорівнює $0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}85 = 0{,}612$.

Приклад 3. В умовах прикладу 2 знайти ймовірність того, що принаймні один з трьох станків не потребуватиме уваги робітника протягом години.

Мова йде про ймовірність типу $P(A,\ або\ B,\ або\ C)$, і тому наша думка передусім спрямовується, звичайно, до правила складання. Однак ми негайно переконуємося, що це правило в цьому випадку непридатне, оскільки будь-які дві з трьох подій, що розглядаються сумісні одна з одною (ніщо не заважає двом станкам проробити спокійно протягом однієї і тієї ж години); так і незалежно від цього міркування ми відразу бачимо, що сума трьох даних імовірностей значно перевищує одиницю і тому взагалі ніякою ймовірністю бути не може. Для розв’язання поставленої задачі помітимо, що ймовірність того, що станок потребуватиме уваги робітника, є 0,1 для першого станка, 0,2 – для другого і 0,15 – для третього. Оскільки ці три події взаємно незалежні, то ймовірність того, що здійсняться всі ці три події, за правилом (1.12) становить $0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}15 = 0{,}003$. Але події «всі три станки потребуватимуть до себе уваги» і «принаймні один з трьох проробить спокійно», очевидно, є пара протилежних подій. Тому сума їх імовірностей дорівнює одиниці, і, отже, шукана ймовірність становить $1 - 0{,}003 = 0{,}997$. Коли ймовірність події так близька до одиниці, то цю подія можна практично вважати достовірною. Це означає, що майже завжди протягом години щонайменше один з трьох станків буде працювати спокійно.

Приклад 4. На випробувальному стенді випробовуються в певних умовах 250 приладів. Імовірність того, що протягом години відмовить якийсь з цих приладів, є 0,004, і ця ймовірність одна і та ж для всіх приладів. Знайти ймовірність того, що протягом години відмовить хоча б один з приладів, що випробовуються.

Для окремого приладу існує ймовірність $1-0{,}004=0{,}996$ того, що цей прилад не відмовить. Імовірність того, що не відмовить жоден з двохсот п'ятдесяти приладів, що випробовуються, становить за правилом множення для незалежних подій, множенню 250 множників, кожний з яких рівний 0,996, тобто. дорівнює $(0{,}996)^{250}$. А ймовірність того, що відмовить щонайменше один з приладів, 1 - $(0{,}996)^{250}$. Докладний розрахунок, який ми тут приводити не будемо, показує, що це число приблизно рівне ⅝. Таким чином, хоч імовірність відмови кожного з приладів протягом години і не велика, але при випробуванні великого числа приладів імовірність відмови хоч би одного з них стає вже вельми значною.

Приклад 5. Виточується деталь приладу у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Деталь вважається вдалою, якщо довжина кожного з її ребер відхиляється від заданих розмірів не більш ніж на 0,01 мм. Імовірність відхилень, що перевищують 0,01 мм, складає за довжиною $p_1 = 0{,}08$, за шириною $p_2 = 0{,}12$, за висотою $p_3 = 0{,}1$; знайти ймовірність P непридатності деталі.

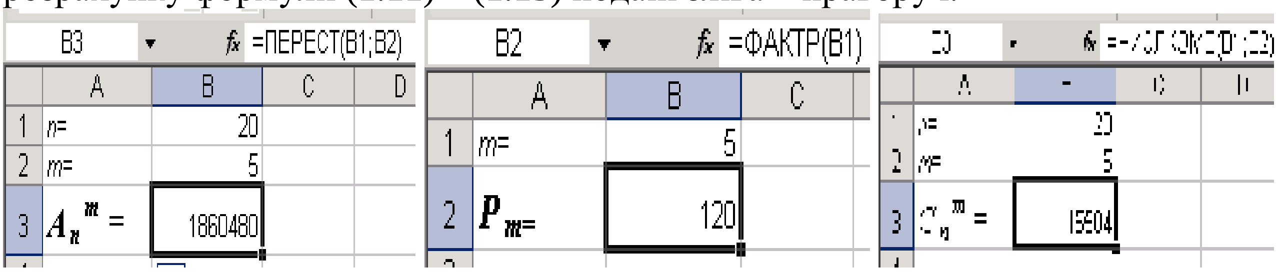
Для того щоб деталь виявилася невдалою, треба принаймні в одному напрямі мати відхиляння від заданого розміру, перевищуюче 0,01 мм; оскільки звичайно ці три події можуть вважатися взаємно незалежними (бо вони в основному викликаються різними причинами), то для розв'язання задачі можна застосувати формулу (1.3). Це дає $P = 1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0{,}27$; отже, вдалими з кожних 100 деталей виявляться в середньому 73.

1.8. Формули комбінаторики

Дуже часто, при розгляді конкретної масової операції буває складно визначити розміри не тільки числа сприятливих, але і числа всіх можливих подій, тому корисним буде використати формули для визначення кількості випадків, якщо має місце :

- перестановки $\quad A_n^m = n(n-1)(n-2)....(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!};$ (1.11)
- розміщення $\quad P_m = m!;$ (1.12)
- сполучення $\quad C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)....(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (1.13)

Число сполучень (1.13) з n елементів по m – це число способів, якими можна вибрати m різних елементів з n (комбінації розрізнюються тільки складом елементів, але не їх порядком). Причому, $m \le n$.. В наведеному нижче прикладі розрахунку формули (1.11) – (1.13) подані зліва – праворуч.



Кожну задачу теорії ймовірностей можна звести до тієї або іншої задачі, де мова йде про виймання куль з урни. «Задачі на урни» є свого роду єдиною мовою, на якій можна викладати найрізноманітніші за зовнішньою формою задачі. Нехай, в урні a білих і b чорних куль; з урни наздогад виймають k куль. Знайти ймовірність того, що серед, них буде l білих, а, значить, $k - l$ чорних

($l \le a$, k- $l \le b$).

Загальне число можливих випадків $n = C_{a+b}^{k}$

Підрахуємо число сприятливих випадків m. Число способів, якими можна вибрати l білих куль з a, дорівнює C_a^l; число способів, якими можна до них «до вибрати» $k - l$ чорних куль, становить C_b^{k-l}. Кожна комбінація білих куль може поєднуватися з кожною комбінацією чорних, тому

$$P(A) = \frac{C_a^l \cdot C_b^{k-l}}{C_{a+b}^k} \qquad (1.14)$$

F1 =ЧИСЛКОМБ(B1;D2)*ЧИСЛКОМБ(B2;D1-D2)/ЧИСЛКОМБ(B1+B2;D1)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a=	2	k=	3	P(A)=	0,571429		
2	b=	5	l=	1				

Формула (1.14) може застосовуватися в різних областях, наприклад, при розв’язанні задач, пов'язаних з вибірковим контролем продукції. Як «урна» в таких задачах фігурує партія виробів, серед яких деяка кількість доброякісних («білі кулі») і деяка кількість дефектних («чорні кулі»), а роль k куль, що виймаються відіграє контрольна партія виробів.

Приклади

Приклад 1. Скількома способами можна посадити 5 студентів, що сидять на першому ряду парт?

За формулою (1.12) це становить 5! = 120 способів.

Приклад 2. В аудиторії знаходиться 30 студентів. За одну парту можна посадити 3 студента. Скільки існує варіантів розміщення цих студентів за однією партою?

За формулою (1.11) цих варіантів є

A_{30}^3 = 30(30-1)(30-2)…..(30-3+1) = 30 29 28 = 24360.

Скільки можливих сполучень можна утворити з цих студентів по 3?

Тут на пригоді стає формула (1.13), згідно з якою

$C_{30}^3 = A_{30}^3 / 3! = 24360 / 6 = 4060$.

Приклад 3. В урні 3 білих і 4 чорних кулі. Дослід полягає в тому, що з урни виймаються відразу дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі – білі (подія A).

Питанням про число комбінацій, якими можна вибирати й переставляти якісь елементи із заданого їх набору вирішується за допомогою формул (1.11)–(1.14). Знайдемо за формулою (1.13) число b всіх можливих випадків у нашому прикладі (число способів, якими можна вибрати дві кулі з семи): $b = C_7^2 = (7*6)/(1*2) = 21$. Тепер підрахуємо число сприятливих випадків a.. Це число способів, якими можна вибрати дві кулі з трьох білих, що знаходяться в урні. $a=m=C_3^2=3$, звідки за формулою (1.1) $P(A)$=3/21=1/7.

Цю задачу можна розв’язати іншим способом, за формулою (1.14) тут a =

3, $b = 4$, $l=k=2$. Отже, ймовірність такої появи є $p = C_3^2 / C_{3+4}^2 = 1/7$.

Приклад 4. Все та ж урна, в якій 3 білих і 4 чорних кулі. Дослід полягає в тому, що з урни беруть відразу три кулі. Знайти ймовірність того, що дві з них будуть чорними, а одна – білою (подія *A*).

Загальне число випадків в даному досліді $b=C_7^3=35$. Підрахуємо число сприятливих випадків *a*. Скількома способами можна вибрати дві з чотирьох чорних куль? Очевидно, $C_4^2 = 6$ способами. Але це ще не все, до кожної комбінації чорних куль можна різними способами приєднати одну білу; її можна вибрати $C_3^1=3$ способами. Кожна комбінація чорних куль може поєднуватися з кожною з білих, тому загальне число сприятливих випадків буде дорівнювати: $a = 3*6 = 18$, звідки за формулою (1.1) $P(A)=18/35$.

Приклад 5. Дехто купив картку Спортлото і наздогад відмітив в ній 6 з 49 номерів. Знайти ймовірність того, що він правильно вгадав 3 з 6 номерів, які будуть опубліковані в списку «що виграли».

Для розв'язання, розглянемо подію: *A* – вгадано 3 номери з 6 (а, значить, інші 3 не вгадані). Ця задача зводиться до попередньої. Дійсно, 49 номерів, в числі яких 6 виграшних, а інші – невиграшні, можна уявити собі як «урну», в якій 6 білих куль і 43 чорних. Треба знайти ймовірність того, що, вибираючи наздогад 6 куль з цієї урни, ми отримаємо 3 білі і 3 чорних. Покладемо в формулі (1.14) $a=6, b=43, k=6, l=3$ і знайдемо:

$$P(A) = \frac{C_6^3 C_{43}^{6-3}}{C_{6+43}^6} \approx 0.0176.$$

Отже, імовірність правильно вгадати три номери з шести дуже невелика – біля 1,8%. Ясно, що ймовірність вгадати чотири номери, п'ять і всі шість – ще менша. Розрахуйте її самостійно.

1.9. Узагальнення правил складення і множення ймовірностей

$$\boldsymbol{P(A \text{ або } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ і } B).} \qquad (1.15)$$

Формула (1.15), дійсна без всяких додаткових припущень для будь-якої пари подій *A* і В. Пересвідчимося, що з формули (1.15), як окремі випадки, легко можуть бути отримані наші колишні формули. Якщо події *A* і *B* несумісні одна з одною, то подія (*A* і *B*) неможлива, $P(A \text{ і } B)=0$, і формула (1.15) приводить до співвідношення $P(A \text{ або } B) = P(A)+ P(B)$, тобто до правила складання. Якщо події *A* і *B* взаємно незалежні, то $P(A \text{ і } B) = P(A)P(B)$, і формула (1.15) дає $P(A \text{ або } B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 1-[1-P(A)][1-P(B)]$,

Оскільки у всіх випадках $P(A \text{ і } B)\geq 0$; тоді з (1.15) у всіх випадках випливає

$$P(A \text{ або } B)\leq P(A) + P(B). \qquad (1.16)$$

Ця нерівність легко може бути поширена на будь-яке число подій. Так, наприклад, у разі трьох подій $P(A \text{ або } B, \text{ або } C) \leq P(A \text{ або } B) + P(C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$. І тим же шляхом, очевидно, можна від трьох подій перейти до чотирьох і т. д. Отримуємо такий загальний висновок: **імовірність настання щонайменше однієї з декількох подій ніколи не перевищує суми ймовірностей цих подій**. При цьому знак рівняння можна стивити тільки в тому випадку, коли будь-які дві з даних подій несумісні між собою.

Приклади

Приклад 1. В урні 5 перенумерованих куль, з неї виймаються одна за одною кулі, що знаходяться в ній. Знайти ймовірність того, що номери куль будуть йти в зростаючому порядку.

За правилом множення ймовірностей

$$P(1,2,3,4,5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{120}.$$

Приклад 2. У ранці школяра лежать 8 букв розрізної азбуки. Дві букви «т», три букви «о» і три букви «с». Ми виймаємо три картки одну за одною і кладемо на стіл у порядку появи. Знайти ймовірність того, що вийде слово «сто».

За правилом множення ймовірностей $P(\text{"}сто\text{"}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{56}$.

А тепер давайте спробуємо розв’язати той же приклад у зміненому вигляді. Умови ті ж, але три картки виймаються відразу. Знайти ймовірність того, що з вийнятих букв можна скласти слово «сто».

Якщо ви подумаєте, що все одно, чи виймати картки разом або окремо, бо ймовірність як і раніше буде 3/56, то ви помиляєтеся. Справа в тому, що змінені не тільки умови виймання букв, але і сама подія, про яку йде мова. У першому варіанті було потрібно, щоб буква «с» стояла саме на першому місці, «т» – на другому, «о» – на третьому. А тепер порядок букв нам байдужий: буде це «сто», або «отс», або ще як-небудь. Подія *A*, про яке йде мова: A_1 – з вийнятих букв можна скласти «сто» розпадається на декілька варіантів: A_2 – («тос» або «тсо» або «отс» або. ..) Скільки буде усього таких варіантів? Очевидно, стільки, скільки є варіантів разміщення (1.12) з трьох елементів: $P_3=1\cdot2\cdot3 = 6$.

Треба обчислити ймовірності всіх цих шести варіантів і згідно з правилом складання скласти їх. Легко пересвідчитися в тому, що ймовірності всіх цих варіантів однакові: $P(\text{"}сто\text{"}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{56}$; $P(\text{"}отс\text{"}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{56}$ і т. д. Складаючи їх, отримаємо $P(A) = \frac{3}{56} \cdot 6 = \frac{9}{28}$.

Приклад 3. Зібралися разом *n* незнайомих один одному людей. Знайти ймовірність того, що хоч би у двох з них співпадають дні народження (тобто доводяться на одне і те ж число одного і того ж місяця).

Будемо виходити з припущення, що всі дні року, як дні народження, рівноймовірні. Визначимо цікавлячу нас подію: *C* – хоч би у двох осіб дні народження співпадають. Формулювання «хоч би» (або рівносильна їй «принаймні») відразу повинне насторожити нас: а чи не краще тут перейти до протилежної події? І справді, подія *C* є дуже складною і розпадається на велике число варіантів. Що стосується протилежної події: $\overline{C}$ – що всі, що зібралися, народилися в різні дні року. Представимо подія $\overline{C}$ як поєднання *n* подій. Виберемо когось одного з тих, що зібралися і умовно назвемо його «першим».

«Першому» можна народитися в будь-який день року. Імовірність цього є одиниця. Виберемо довільно «другого» йому можна народитися в будь-який день, крім того, коли народився перший; імовірність цього рівна 364/365, «третьому» залишається тільки 363 дні, коли йому дозволено народитися, і т. д. Користуючись правилом множення ймовірностей, отримаємо: $P(\overline{C}) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \Lambda \cdot \frac{365 - (n-1)}{365}$, звідки легко знаходиться $P(C) = 1 - P(\overline{C})$.

Відмітимо цікаву особливість цієї задачі: при збільшенні *n* (навіть досить скромному) подія *C* швидко стає практично достовірним. Наприклад, вже при *n = 50* формула дає: *P (C) = 0,03*, *P (C) = 0,97*, тобто подію *C* (з високим рівнем довір'я 0,97) можна вважати практично достовірною.

Приклад 4. Дві фірми – *X* і *Y* – почали працювати разом. У результаті вони отримали прибуток від спільної діяльності у розмірі 50 тис. грн. Відомо, що прибуток отримано внаслідок успіху тільки однієї з цих фірм, але невідомо якої. Відомо також, що менеджери фірми *X* добиваються успіху з імовірністю 0,8, а фірми *Y* –всього з імовірністю 0,4. Як треба по справедливості розділити цю суму між фірмами *X* і *Y*?

Можливо, вам захотілося розділити 50 тис. грн. між *X* і *Y* пропорційно ймовірностям 0,8 і 0,4, тобто *X* дати 2/3 суми (33,3 тис. грн.), а *Y* – інші 16,7 тис. грн. Уявіть собі, ви були неправі. Щоб вас в цьому переконати, змінимо трішки умову задачі: нехай діяльність менеджерів *X,* напевно, і привела до отримання прибутку (з імовірністю 1), а діяльність менеджерів *Y* – тільки з імовірністю 0,5. Але ж у прибутку ми завдячуємо тільки одну фірму. Кому належить прибуток, Зрозуміло, фірмі *X*. Адже вона напевне його й отримала. Невже в цих змінених умовах ви б розділили прибуток у відношенні 2 : 1, тобто як і раніше дали б *X* тільки 2/3, а *Y* – 1/3 суми? Звичайно, ж ні.

Справа в тому, що ви ділили суму пропорційно ймовірностям отримання прибутку при діяльності тільки однієї конкретної фірми, але ж працювали вони разом, і ймовірності треба розраховувати для спільної діяльності. Розглянемо подію *A* – прибуток отримано один раз. Як ця подія могла статися? Очевидно, двома способами: A_1 – прибуток отримали менеджери фірми *X*, прибуток не отримали менеджери фірми *Y*, A_2 – прибуток отримали менеджери фірми *Y*, прибуток не отримали менеджери фірми *X*. Імовірності цих варіантів знайдемо за правилом множення

$$P(A_1) = 0{,}8 \bullet 0{,}6 = 0{,}48;$$
$$P(A_2) = 0{,}4 \bullet 0{,}2 = 0{,}08.$$

Ось пропорційно цим імовірностям і треба розділити по справедливості отримані 50 тис. грн. При цьому частка фірми *X* буде 50 • 0,48/(0,48+ 0,08) ≈ 42,8 тис. грн., а для фірми *Y* тільки 50 • 0,08/(0,48+0,08) ≈ 7,2 тис. грн.

1.10. Формула повної ймовірності

Нехай дана операція, що допускає результати A_1, A_2,., A_n, які створюють повну систему подій (нагадаємо: це означає, що будь-які два з цих подій одна з однією несумісні і що яка-небудь з них обов'язково повинна настати). Тоді для будь-якого можливого результату *К* цієї операції ймовірність її настання буде

$$\boldsymbol{P\ (K) = P(A_1)\ P_{A1}(K) + P(A_2)\ P_{A2}(K) + \dots + P(A_n)\ P_{AN}(K)} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(K) \quad (1.17)$$

H2 | f_x =СУММПРОИЗВ(B2:F2;B3:F3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	***i***	1	2	3	4	5		
2	***P(A*** $_i$ ***)=***	0,18	0,35	0,20	0,12	0,15	***P (K)*** =	0,69
3	***P*** $_{A_i}$ ***(K)=***	0,50	0,80	0,75	0,32	0,88		

<u>Приклади</u>

Приклад 1. Для посіву заготовлене сім'я пшениці сорту I, що містить невелику кількість домішок інших сортів II, III, IV. Візьмемо одне з цих зерен. Подія, яка полягає в тому, що це зерно сорту I, визначимо через A_1 , що воно сорту II через A_2, сорту III через A_3 і, нарешті, сорту IV через A_4. Відомо, що ймовірності того, що наугад взяте зерно виявиться того чи іншого сорту, становлять $P(A_1)==0{,}96;\ P(A_2)=0{,}01;\ P(A_3) = 0{,}02;\ P(A_4) = 0{,}01$.

(Сума цих чотирьох чисел дорівнює одиниці, як це і повинно бути для повної системи подій.) Імовірність того, що із зерна зросте колос, що містить не менше 50 зерен, є:

1) 0,50 із зерна сорту I,
2) 0,15 » » » II,
3) 0,20 » » » III,
4) 0,05 » » » IV.

Потрібно знайти безумовну ймовірність того, що колос буде мати не менше 50 зерен.

Нехай *К*.- це подія, що полягає в тому, що колос буде містити не менше 50 зерен; тоді за умовою задачі $P_{A1}(K)=0{,}50;\ P_{A2}(K)=0{,}15;\ P_{A3}(K)=0{,}15;\ P_{A4}(K) = 0{,}05$. Нашою задачею є визначення $P(K)$. Визначимо через E_1 подію, що полягає в тому, що зерно виявиться I сорту і колос, вирощений з нього, буде містити не менше за 50 зерен, так що E_1 рівносильне події (A і K); таким же чином визначимо через E_2 подію (A_2 і K), E_3 подію (A_3 і K), E_4 подію (A_4 і K). Очевидно, що для настання події K необхідно, щоб наступила одна з подій E_1, E_2, E_3 , E_4, а оскільки будь-які дві з цих подій одна з одною несумісні, то за правилом складання отримуємо $P(K) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4,)$

З іншого боку, за правилом множення

$$P(E_1) = P(A_1\ i\ K) = P(A_1)\ P_{A1}(K),$$
$$P(E_2) = P(A_2\ i\ K) = P(A_2)\ P_{A2}(K),$$
$$P(E_3) = P(A_3\ i\ K) = P(A_3)\ P_{A3}(K),$$
$$P(E_4) = P(A_4\ i\ K) = P(A_4)\ P_{A4}(K),$$

Підставляючи ці вирзи в рівняння (1.17), ми знаходимо

$P\ (K) = P(A_1)\ P_{A1}(K) + P(A_2)\ P_{A2}(K) + P(A_3)\ P_{A3}(K) + P(A_4)\ P_{A4}(K),$

що і розв’язує, очевидно, нашу задачу. Підставляючи числові значення, знаходимо: $P(K)=0{,}486$.

Приклад 2. Волокна бавовни певного сорту в середньому на 75% мають довжину меншу 45 *мм,* і на 25% довжину, більшу (або рівну) 45 мм. Знайти ймовірність того, що серед трьох наздогад узятих волокон два будуть коротшими, а одне довше за 45 мм.

Визначимо подію - вибір волокна з довжиною меншою 45 *мм,* через A, а подія вибір волокна з довжиною, більшою 45 мм, через B. Тоді ясно, що $P(A)=3/4$; $P(B)=1/4$. Умовимося далі, схемою AAB позначати складну подію: два перших вибраних волокна виявилися коротше за 45 *мм,* а третє – довше за 45 *мм.* Ясно, яке значення будуть мати схеми BBA, ABA і т. п. Треба обчислити ймовірність події C, що полягає в тому, що з трьох волокон два виявляться коротшими за 45 *мм,* а одне довше за 45 мм. Очевидно, для цього повинна здійснитися одна з наступних схем: AAB, ABA, BAA. Оскільки будь-які два з цих трьох результатів несумісні між собою, то за правилом складання

$$P(C)=P(AAB)+P(ABA)+P(BAA).$$

Усі три з додатків правої частини рівні між собою, оскільки результати вибору волокон ми можемо вважати взаємно незалежними подіями. Імовірність кожної зі схем за правилом множення ймовірностей для незалежних подій представиться як здобуток трьох множників, з яких два рівні $P(A)=3/4$, а один $P(B)=1/4$. Таким чином, імовірність кожної з трьох схем становить $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$ і, отже, $P(C)=3\cdot\frac{9}{64}=\frac{27}{64}$.

1.11. Формула Байєса

Нехай події $A_1, A_2,., A_n$ являють собою повну систему результатів деякої операції. Якщо тоді K означає довільний результат цієї операції, то ймовірність того, що цей довільний результат стався внаслідок q-ї операції, $(1\le q\le n)$

$$P_K(A_q)=\frac{P(A_q)P_{A_q}(K)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(K)}. \tag{1.18}$$

Наприклад, для операції з номером q=2, ця ймовірність буде дорівнювати

H2 f_x =C2*C3/СУММПРОИЗВ(B2:F2;B3:F3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	1	2	3	4	5		
2	$P(A_i)$=	0,18	0,35	0,20	0,12	0,15	$P_K(A_i)$ =	0,41
3	$P_{Ai}(K)$=	0,50	0,80	0,75	0,32	0,88		i=2

Це формула Байєса, що має багато застосувань у практиці уточнення ймовірностей.

Загальна схема подібного роду положень може бути описана так. Умови операції містять деякий невідомий елемент, відносно якого може бути зроблене n різних гіпотез: $A_1, A_2,\ldots, A_n$, створюючи повну систему подій; з тих або інших причин нам відомі ймовірності $P(A_i)$ цих гіпотез до випробування; відомо також, що гіпотеза A_i, «повідомляє» деякій події K імовірність $P_{Ai}(K)$ $(1\le i \le n)$. ($P_{Ai}(K)$ є ймовірність події K, обчислена при умові, що справедлива гіпотеза A_i). Якщо внаслідок досліду подія K наступила, то це викликає переоцінку ймовірностей гіпотез A_i, і задача полягає в тому, щоб знайти нові ймовірності $P_{Ai}(K)$ цих гіпотез. Відповідь дається формулою Байєса.

Для скорочення запису покладемо в розглянутій нами загальній схемі $P(A_i) = P_i$, $P_{Ai}(K)=p_i$ $(1\leq i \leq n)$, тоді формула Байєса приймає простий вигляд

$$P_K(A_q) = \frac{P_q p_q}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i p_i} .$$

<u>Приклад</u>

Імовірність того, що в деякому виробництві виріб задовольняє стандарту, становить 0,96. Пропонується спрощена система випробувань, яка для виробів, що задовольняють стандарту, дає позитивний результат з імовірністю 0,98, а для виробів, що йому не задовольняють, лише з імовірністю 0,05. Яка ймовірність, що виріб, який двічі витримав спрощене випробування, задовольняє стандарту?

Тут повна система гіпотез складається з двох протилежних подій: 1) виріб задовольняє стандарту; 2) виріб не задовольняє стандарту. Імовірності цих гіпотез до досвіду відповідно є p_1 = 0,96 і p_2 = 0,04. При першій гіпотезі ймовірність того, що виріб витримає випробування, становить p_1 = 0,98, а при другій – p_2 = 0,05. Після двократного досліду ймовірність першої гіпотези на основі формули (1.18) є

$$\frac{P_1 p_1^2}{P_1 p_1^2 + P_2 p_2^2} = \frac{0.96\cdot(0.98)^2}{0.96\cdot(0.98)^2 + 0.04\cdot(0.05)^2} = 0.9999$$

Ми бачимо, що коли виріб витримав указане в умові задачі випробування, то тільки в одному випадку з десяти тисяч ми можемо здійснити помилку, вважаючи його не стандартним. Це, звичайно, цілком задовольняє вимогам практики.

1.12. Формула Бернуллі

Розглянемо послідовність взаємно незалежних випробувань, тобто таких випробувань, що ймовірність того або іншого результату в кожному з них не залежить від того, які результати наступили або наступлять в інших. У кожному з цих випробувань може наступити (або не наступити) деяка подія A з імовірністю p, що не залежить від номера випробування. Описана схема отримала назву схеми Бернуллі. При деяких умовах імовірність появи події A в кожному випробуванні є p; знайти ймовірність того, що серія з n незалежних випробувань дасть k появ і n - k непояв події А.

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad (1.19)$$

D2 fx =ЧИСЛКОМБ(B2;D1)*B1^D1*(1-B1)^(B2-D1)

	A	B	C	D	E
1	***p=***	0,2	***k=***	5	
2	***n=***	10	***$P_n(k)$ =***	0,026424115	

Імовірність того, що в n дослідженнях подія наступить не точно k разів, знаходять за відповідними формулами:

а) менше k разів $\quad P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1)$;

б) більше k разів; $\quad P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n)$;

в) не менше за k разів $\quad P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$;

г) не більше за k разів $\quad P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k)$.

Тут $\boldsymbol{P_n(k)}$ знаходять за формулою Бернуллі.

Застосування формули Бернуллі дає можливість вирішувати більш складні задачі за формулою Байєса.

Допустимо, що зроблено s випробувань, причому результат K настав m разів і не настав $s - m$ разів. Визначимо через K^* отриманий результат серії з s випробувань. Ми можемо допустити, що результати окремих випробувань є взаємно незалежні події. Якщо справедлива гіпотеза A_i, імовірність результату K дорівнює p_i і, значить, імовірність протилежної події (тобто того, що K не наступить) дорівнює $1 - p_i$.

Імовірність того, що результат K наступив при певних m випробуваннях, за правилом множення для незалежних подій є $p_i^m(1-p_i)^{s-m}$. Оскільки ці m випробувань, при яких наступив результат K, можуть виявитися будь-якими з s зроблених, то подія K^* може здійснитися C_n^m несумісними способами. Таким чином, за правилом складання ймовірностей

$$P_{Ai}(K`) = C_n^m\, p_i^m(1-p_i)^{s-m} \qquad (1\le i \le n),$$

і формула Байєса дає

$$P_K(A_q)=\frac{P_q p_q^m(1-p_q)^{s-m}}{\sum_{i=1}^{n} P_i p_i^m(1-p_i)^{s-m}}. \qquad (1\le i \le n). \qquad (1.20)$$

Для розрахунку в Excel'і спочатку знайдемо p_i^m (ліворуч) та $(1-p_i)^{s-m}$ (праворуч), а потім розрахуємо $P_K(A_i)$ за формулою (1.20). Значення s та m мають бути константами.

B5 $\quad$ fx =B4^$D$1

	A	B	C
1	**s=**	10	**m=**
2	***i***	1	2
3	$P(A_i)$=	0,18	0,35
4	$P_{Ai}(K)$=	0,50	0,80
5	p_i^m	0,13	0,51

B6 $\quad$ fx =(1-B4)^($B$1-$D$1)

	A	B	C	D
1	**s=**	10	**m=**	
2	***i***	1	2	
3	$P(A_i)$=	0,18	0,35	0,2
4	$P_{Ai}(K)$=	0,50	0,80	0,7
5	p_i^m	0,13	0,51	0,4
6	$(1-p_i)^{s-m}$	0,00781	0,00001	0,0000

H3 $\quad$ fx =C3*C5*C6/СУММПРОИЗВ(B3:F3;B5:F5;B6:F6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**s=**	10	**m=**	3				
2	***i***	1	2	3	4	5		
3	$P(A_i)$=	0,18	0,35	0,20	0,12	0,15	$P_K(A_i)$ =	0,01
4	$P_{Ai}(K)$=	0,50	0,80	0,75	0,32	0,88		*i=2*
5	p_i^m	0,13	0,51	0,42	0,03	0,68		
6	$(1-p_i)^{s-m}$	0,00781	0,00001	0,00006	0,06723	0,00000		

Приклади

Приклад 1. Імовірність того, що витрата води на деякому підприємстві виявиться нормальною (не більше певного числа літрів за добу), є 3/4. Знайти ймовірності того, що в найближчі 6 днів витрата води буде нормальною протягом 1, 2, 3, 4, 5, 6 днів.

Визначивши через $P_6(k)$ імовірність того, що протягом k днів з шести витрата води буде нормальною, знайдемо за формулою (1.19) (де треба покласти $p=\frac{3}{4}$). $P_6(6)=\left(\frac{3}{4}\right)^6$; $P_6(5)=6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1$; $P_6(4)=C_6^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$; $P_6(3)=C_6^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$; $P_6(2)=C_6^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4$; $P_6(1)=C_6^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5$.

Усі п'ять імовірностей виражаються дробом з одним і тим же знаменником $(1/4)^6=4096$, цим ми, звичайно, користуємося для скорочення розрахунків. Обчислення дають: $P_6(6)=0{,}18$; $P_6(5)=0{,}36$; $P_6(4)=0{,}30$; $P_6(3)=0{,}13$; $P_6(2)=0{,}03$; $P_6(1)=0{,}004$. Ми бачимо, що найбільш вірогідною є перевитрата води протягом 5 днів із шести. Імовірність перевитрати протягом одного або двох днів практично дорівнює нулю.

Приклад 2. Унаслідок спостережень, що продовжувалися багато десятків років, установлено, що на кожну тисячу новонароджених доводиться в середньому 515 хлопчиків і 485 дівчинок. У якійсь сім'ї шестеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед них не більше двох дівчинок.

Для настання події, імовірність якої ми шукаємо, треба, щоб у сім'ї було або 0, або 1, або 2 дівчинки. Імовірності цих часткових подій ми визначимо відповідно через P_0, P_1,P_2. Очевидно, що за правилом складання ймовірностей, шукана ймовірність $P = P_0 + P_1 + P_2$

Для кожної дитини ймовірність того, що це хлопчик, є 0,515 і, значить, імовірність того, що це дівчинка, дорівнює 0,485. Простіше усього знайти P_0. Це ймовірність того, що всі діти в сім'ї виявилися хлопчиками. Оскільки подія народження дитини тієї або іншої статі ми можемо розглядати як незалежне від народження інших дітей, то за правилом множення ймовірність того, що всі шість дітей виявляться хлопчиками, є результат добутку шести множників, що дорівнюють 0,515, $P_0=(0.515)^6=0.018.$

Перейдемо тепер до обчислення P_1, тобто ймовірності того, що серед шести дітей у сім'ї одна дитина виявиться дівчинкою, а інші п'ять – хлопчиками. Ця подія може статися шістьма різними способами, дивлячись по тому, якою дитиною за порядком народжень виявиться дівчинка (першою, другою і т.п.). Розглянемо яку-небудь з різновидів нашої події, наприклад, ту, що дівчинка народилася четвертою дитиною. Імовірність цього різновиду за правилом множення є результатом добутку шести множників, з яких п'ять становлять 0,515, а шостий (що стоїть на четвертому місці) - 0,485, тобто ця ймовірність є $(0{,}515)^5\cdot 0{,}485$. Така ж імовірність і всякої іншої з п'яти можливих різновидів події, що нас цікавить. Тому ймовірність P_1 цієї події за правилом складання дорівнює сумі шести чисел, рівним $(0{,}515)^5\cdot 0{,}485$,

$$P_0=6\cdot(0.515)^5\cdot 0.485=0.105.$$

Звернемося тепер до обчислення P_2 - імовірності того, що дві дитини виявляться дівчинками, а чотири хлопчики. Подібно попередньому, ми відразу помічаємо, що подія ця допускає цілий ряд різновидів (один з різновидів буде, наприклад, таким: друга й п'ята дитина по порядку народжень виявилися дівчинками, а інші хлопчиками). Імовірність різновиду за правилом множення рівна $(0{,}515)^4 \cdot (0{,}485)^2$, а отже, P_2, за правилом складання дорівнює числу $(0{,}515)^4 \cdot (0{,}485)^2$, помноженому на число всіх різновидів типу, що розглядається.

Кожний різновид характеризується тим, що із шести дітей двоє виявляються дівчинками, а інші хлопчиками; число різних різновидів однакове, отже, числу різних способів вибору двох дітей з тих шести, що є. Число таких виборів дорівнює числу сполучень із шести по два,

$$C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 . \qquad \text{Отже, } P_2 = C_6^2 (0.515)^4 \cdot (0.485)^2 = 0.247 .$$

Зіставляючи отримані результати, знаходимо:

$P = P_0 + P_1 + P_2 = 0{,}018+0{,}105+0{,}247=0{,}370$.

Таким чином, трохи рідше, ніж в чотирьох випадках із десяти (з імовірністю $P = 0{,}37$), в таких багатодітних сім'ях буде не більше за третину дівчинок і, значить, не менш двох третин хлопчиків.

Приклад 3. При дослідженні хворого є підозра на одне з трьох захворювань: A_1, A_2, A_3. Їх імовірності в даних умовах становлять відповідно $P_1 = ½$ $P_2 = 1/6$ $P_3 = 1/3$. Для уточнення діагнозу призначений деякий аналіз, що дає позитивний результат з імовірністю 0,1 у разі захворювання A_1 з імовірністю 0,2 у разі захворювання A_2 і з імовірністю 0,9 у разі захворювання A_3. Аналіз був зроблений п'ять разів і дав чотири рази позитивний результат і один раз негативний. Потрібно знайти ймовірність кожного захворювання після аналізу.

У разі захворювання A_1 імовірність указаних виходів аналізів є, за правилом множення, $p_1= C_5^4(0{,}1)^4 0{,}9$. Для другої гіпотези ця ймовірність становить $p_2= C_5^4(0{,}2)^4 0{,}8$ і для третьої $p_3= C_5^4(0{,}9)^4 0{,}1$. За формулою Байєса знаходимо, що після аналізів імовірність захворювання A_1 виявляється такою

$$\frac{P_1 p_1}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3} = \frac{\frac{1}{2}(0.1)^4 0.9}{\frac{1}{2}(0.1)^4 0.9 + \frac{1}{6}(0.2)^4 0.8 + \frac{1}{3}(0.9)^4 0.1} = 0{,}002 ;$$

імовірність захворювання A_2

$$\frac{P_2 p_2}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3} = \frac{\frac{1}{6}(0.2)^4 0.8}{\frac{1}{2}(0.1)^4 0.9 + \frac{1}{6}(0.2)^4 0.8 + \frac{1}{3}(0.9)^4 0.1} = 0{,}01 ;$$

і ймовірність захворювання A_3

$$\frac{P_3 p_3}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3} = \frac{\frac{1}{3}(0.9)^4 0.1}{\frac{1}{2}(0.1)^4 0.9 + \frac{1}{6}(0.2)^4 0.8 + \frac{1}{3}(0.9)^4 0.1} = 0{,}988 .$$

Оскільки ці три події A_1, A_2, A_3 і після досліду утворять, очевидно, повну систему подій, то для контролю зробленого розрахунку можна скласти три отриманих числа і пересвідчитися, що сума їх, як і раніше, дорівнює одиниці.

Приклад 4. Податкова інспекція може перевіряти фірму з причини неправильно складеного балансу у 10% випадків, наявності прихованих доходів – у 40% випадків, із причини отримання інформації від інших юридичних чи фізичних осіб – у решті випадків. При виявленні порушень штраф накладається з імовірністю 0,7 – у першому випадку, з імовірністю 0,4 – у другому випадку, з імовірністю 0,15 – у третьому випадку. За минулий місяць було перевірено 120 фірм, із яких 40 сплатили штраф. Яка найбільш імовірна причина сплатити штраф у цих умовах?

За формулою (1.20) маємо що, s = 120, m = 40, P_1 =0,33, P_2 = 0,1, P_3 = 1-(0,33+0,1) = 0,57. p_1= 0,05, p_2= 0,15 p_3= 0,15.

Підставляємо ці дані в (1.18) для кожної причини перевірки і отримуємо

$$\frac{0,33\cdot 0,05^{40}\cdot(1-0,05)^{120-40}}{0,33\cdot 0,05^{40}\cdot(1-0,05)^{120-40}+0,1\cdot 0,15^{40}\cdot(1-0,15)^{120-40}+0,57\cdot 0,15^{40}\cdot(1-0,15)^{120-40}}\approx 0$$

$$\frac{0,1\cdot 0,15^{40}\cdot(1-0,15)^{120-40}}{0,33\cdot 0,05^{40}\cdot(1-0,05)^{120-40}+0,1\cdot 0,15^{40}\cdot(1-0,15)^{120-40}+0,57\cdot 0,15^{40}\cdot(1-0,15)^{120-40}}=0,15$$

$$\frac{0,57\cdot 0,15^{40}\cdot(1-0,15)^{120-40}}{0,33\cdot 0,05^{40}\cdot(1-0,05)^{120-40}+0,1\cdot 0,15^{40}\cdot(1-0,15)^{120-40}+0,57\cdot 0,15^{40}\cdot(1-0,15)^{120-40}}=0,85$$

Отже, найвірогіднішою причиною сплатити штраф є донос.

1.13. Найвірогідніше число настання події

Зробимо розрахунок за формулою Бернуллі (1.19) для випадку, коли p=l/2, n=15, поступово змінюючи значення k. Результат розрахунків показано на рис. 1.3.

Цей приклад показує, що ймовірність із зростанням числа k спочатку зростає, а потім, досягнувши свого найбільшого значення, починає убувати. Для практики іноді потрібно знати, яке число настань події є найвірогіднішим, тобто при якому числі k імовірність $P_n(k)$ найбільша (при цьому, звичайно, p і n припускаються заданими).

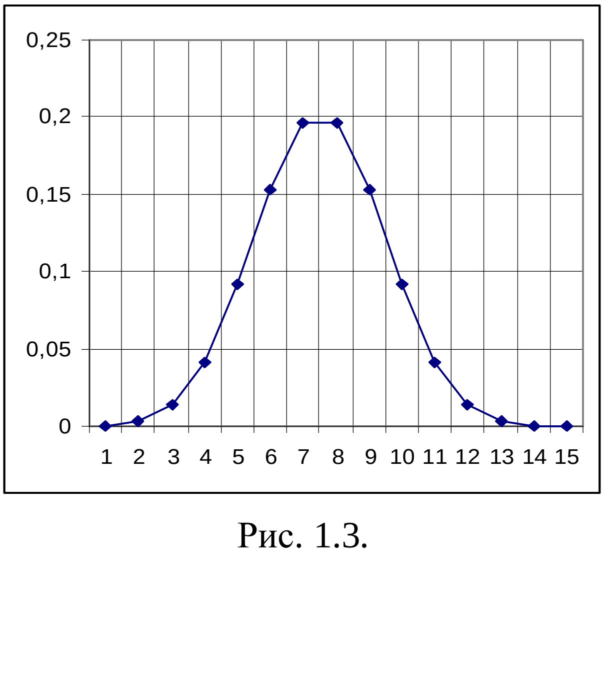


Рис. 1.3.

Найвірогідніше значення k_0 числа k повинно задовольняти подвійній нерівності

$$\boldsymbol{np - (1- p) \le k_0 \le np + p,} \qquad (1.21)$$

причому:

а) якщо число $np - q$ – дробове, то існує одне найвірогідніше число k_0;

б) якщо число $np - q$ – ціле, то існує два найвірогідніших числа, а саме: k_0 і k_{0+1};

в) якщо число np – ціле, то найвірогідніше число $k_0 = np$.

D2 | f_x =B1*B2+B1

	A	B	C	D
1	***p*=**	0,2	$np-(1-p)\le k_0$	1,2000
2	***n*=**	10	$k_0\le np+p$	2,2000

У практиці часто зустрічаються ситуації, коли число *n* дуже велике (реалізація товарів широкого вжитку, масове виробництво і т.ін.) У цьому випадку і добуток np буде дуже великим числом (якщо тільки ймовірність p не надзвичайно мала). А оскільки з виразу $[np-(1-p)]$ і $[np+p]$, між якими укладене найвірогідніше число появ події, другі члени (тобто p і $1-p$) менше одиниці, то обидва ці числа, а значить і укладене між ними найвірогідніше число появ події, близькі до $[np]$.

Приклади

Приклад 1. Імовірність з'єднання абонентів за термін, менший 1 сек. є 0,74. Тоді найвірогідніше число з'єднань абонентів за термін, менший 1 сек., з кожної тисячі викликань, тих, що поступають на телефонну станцію буде дорівнювати $1000\cdot 0{,}74 = 740$.

Приклад 2. Якщо при деяких вимірюваннях імовірність здійснити в окремому зважуванні помилку, укладену між α і β , є 0,84, то при великому числі зважувань товару з найбільшою ймовірністю можна чекати приблизно у 84% випадках помилок, укладених між α і β. Це не значить, звичайно, що ймовірність отримати 84% таких помилок буде велика. Навпаки, сама ця «найбільша ймовірність» при великому числі зважувань буде дуже малою (так, ми бачили на рис. 1.3, що найбільша ймовірність виявилася рівною 0,196. Причому там мова йшла усього про 15 випробувань. При більшому числі випробувань вона значно менше). Ця ймовірність є найбільшою тільки в порівняльному значенні: імовірність отримати 84% зважувань із помилками, укладеними між α і β, більше, за ймовірність отримати 83% або 86% зважувань із помилками, укладеними між α і β.

Приклад 3. Проведено 200 зважувань. У цьому випадку навряд чи доцільно обчислювати ймовірність того, що якраз 137 із них будуть зважені із заданою точністю, оскільки практично байдуже, буде це число дорівнювати 137, 136 або 138 і навіть хоч би 140. Навпаки, питання, наприклад, про ймовірність того, що число зважувань, для яких помилка лежить в даних межах, буде більше за 100 з 200 вироблених зважувань, або що це число буде лежати поміж 100 і 125, або, якщо воно виявиться меншим 50 і т. д., представляє безперечний інтерес для практики. Як виразити такого роду ймовірності?

Нехай ми хочемо, наприклад, знайти ймовірність того, що число зважувань буде лежати між 100 і 120 (включаючи 120). Точніше, будемо шукати ймовірність нерівностей $100 < k \le 120$, де k число зважувань. Для того щоб здійснилися ці нерівності треба, щоб k виявилося рівним одному з двадцяти чисел 101, 102,. .., 120; за правилом складання ця ймовірність є

$$P(100 < k \le 120) = P_{200}(101)+P_{200}(102)+\ldots+P_{200}(120).$$

Для безпосереднього обчислення цієї суми нам довелося б заздалегідь обчислити 20 окремих імовірностей типу $P_n(k)$ за формулою (1.19).

Приклад 4. У наслідок багаторічних спостережень для деякої місцевості було з'ясовано, що ймовірність того, що протягом 1 липня випаде дощ, є 4/17. Знайти найвірогідніше число дощових днів 1 липня за найближчі 50 років.

Тут $n = 50$, $p = 4/17$, $np-(1-p) = 11$. Число це виявилося цілим. Значить, ми маємо справу з винятковим випадком. Найвірогіднішим значенням числа дощових днів будуть рівноймовірні між собою числа 11 і 12.

Приклад 5. В одному банку проводилися спостереження за клієнтами. У першій половині дня за проміжок часу певної довжини в середньому з'являється 60 клієнтів, і кожен із них з імовірністю 0,7 є представником юридичної особи (фірми). У другій половині дня за той же проміжок часу в середньому з'являється лише 50 клієнтів, але для кожного з них імовірність бути представником юридичної особи становить 0,8. Для якої частини дня найвірогідніше число клієнтів, що є представниками юридичної особи?

Для першої половини дня $n. = 60$, $p = 0{,}7$, $np-(1-p) = 41{,}7$, $k_0=42$.

Для другої половини дня $n = 50$, $p = 0{,}8$, $np-(1-p.)= 39{,}8$, $k_0=40$.

Ми бачимо, що найвірогідніше число клієнтів–представників юридичної особи в першій половині дня трохи більше, отже і роботу банку треба організовувати так, щоб зранку обслуговували представників юридичних осіб, а після обіду – приватних клієнтів.

Приклад 6. Відомо, що 10% людей – шульги. В аудиторії знаходиться 52 студента. Яке найвірогідніше число шульг серед них?

Тут, $p = 0{,}1$, $n = 52$.

Тоді, $k_0= np = 0{,}1\cdot 52 \approx 5$.

1.14. Теорема Бернуллі. Перша форма закону великих чисел

Вона пов’язана з формулою Бернуллі (1.19) і визначається так. При великому числі випробувань число k появи події A буде з переважною ймовірністю відрізнятися від найвірогіднішого числа настання подій $k_0= np$ дуже мало, не більше ніж, на яку бажано малу частку числа n (не більше ніж, наприклад, на, $0{,}01n$ або $0{,}001n$, або взагалі, не більш ніж на εn, де ε - яке завгодно мале число)

$$P(|k-np| > \varepsilon n) < \frac{p(1-p)}{e^2 n}. \qquad (1.22)$$

Розташуємо на числовій осі можливі значення k від 0 до n. Тоді, формула (1.22) визначить імовірність відхилення значень k відносно k_0 за межі діапазону $\pm\varepsilon n$. Імовірність попадання значень k у межі діапазону буде визначена як

$$P(|k-np| < \varepsilon n) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{e^2 n}. \qquad (1.23)$$

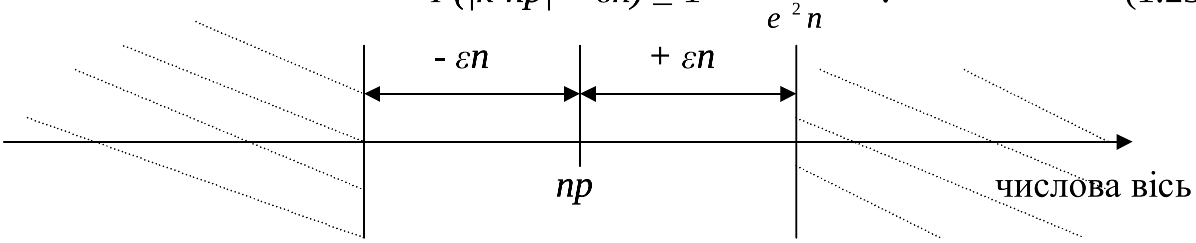


Рис. 1.4. Графічне пояснення дії формул (1.22) – заштрихована зона, та (1.23) – не заштрихована.

Теорема Я. Бернуллі є найважливішою й історично першою формою закону великих чисел (опублікована в 1713 р.). Вона встановлює зв'язок між відносною частотою події і його ймовірністю та формулюється так. Якщо в кожнім з n незалежних випробувань імовірність появи події A постійна і дорівнює p, то відносна частота (відношення сприятливого числа подій m до загального числа подій n, визначені з досліду) сходиться по імовірності до p при $n \to \infty$,

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| \le e \right\} = 1 \qquad (1.24)$$

Таким чином, при досить великих n відносна частота буде як завгодно мало відрізнятися від постійної імовірності. Цю властивість відносної частоти називають **стійкістю**.

Приклади

Приклад 1. Нехай p=0,75, тоді $1 - p = 0{,}25$, і $p(1- p)$=0,1875 < 0,2. Виберемо ε=0,01; тоді нерівність (1.21) дає $P\left(\left[k - \frac{3}{4}n\right] > \frac{1}{100}n\right) < 0.2/(0.0001n) = 2000/n$.
Якщо, наприклад n= 200 000, то $P(|k - 150\,000| > 2000] < 0{,}01$.

Практично це означає, наприклад, наступне: якщо на деякому виробництві при сталому технологічному процесі в середньому 75% виробів мають деяку властивість (наприклад, належать до 1-го сорту), то з 200000 виробів з імовірністю, що перевищує 0,99 (тобто практично майже достовірно), цією властивістю будуть володіти від 148000 до 152000 виробів.

До цього необхідно зробити два зауваження По-перше, нерівність (1.22) дає вельми грубу оцінку для ймовірності $P(|k-np| > \varepsilon n)$. Насправді ця ймовірність, особливо при великих значеннях n, значне менше. По-друге, оцінка, що дається нерівністю (1.22), стає точнішою, коли ймовірність p дуже мала або навпаки, дуже близька до одиниці.

Так, якщо в щойно приведеному прикладі ймовірність того, що виріб має деяку властивість, становить $p = 0{,}95$, то $1 - p = 0{,}05$, $p(1 - p) < 0{,}05$. Тому, вибираючи ε=0,005, n=200000, знаходимо: $\frac{p(1-p)}{e^2 n} < \frac{0.05 \cdot 1000000}{25 \cdot 200000} = 0.01$ так, як і раніше. Але тепер ε/n дорівнює не 2000, а тільки 1000. Звідси (оскільки np = 190000) робимо висновок, що з практичною достовірністю число виробів, які мають властивість, що розглядається, при загальному числі виробів у 200 000 штук, виявляться укладеними між 189000 і 191 000.

Таким чином, при p= 0,95 нерівність (1.22) практично гарантує, що для очікуваного числа виробів із цікавлячою нас властивістю проміжок має вдвічі меншу довжину ніж при p=0,75, бо $P(|k - 190000|) > 1000) < 0{,}01$.

Приклад 2. Відомо, що одна четверта частина робітників деякої галузі промисловості має середню освіту. Для деякого обстеження, наздогад вибрано 200000 робітників. Знайти 1) найвірогідніше значення кількості робітників із середньою освітою серед вибраних 200000 і 2) імовірність того, що фактична кількість таких робітників відхилиться від найвірогіднішого не більш ніж на 1,6%.

При розв'язанні задачі ми виходимо з того факту, що ймовірність мати середню освіту рівна одній чверті для кожного з навмання вибираних 200 000 робітників (у цьому і складається значення слова «навмання»). Таким чином, n=200000, p=1/4, k_0=np=50000, $p(1\text{-}p)$ = 3/16. Треба знайти ймовірність того, що $|k - np| < 0{,}016\, np$ або $|k - np| < 800$, де k число робітників із середньою освітою.

Вибираємо ε так, щоб мати εn = 800. Звідси отримуємо ε = 0,004. Формула (1.22) дає: $P(|k-5000|>800)<\dfrac{3}{16\cdot(0.004)^2\cdot 200000}=0.06$. Звідки

$$P(|k-5000|<800)<0.94.$$

Шукане найвірогідніше значення дорівнює 50000, шукана ймовірність більше ніж 0,94. Насправді шукана ймовірність значно ближче до одиниці.

Приклад 3. Імовірність того, що серед 1000 комерційних фірм кількість фірм-банкрутів коливається в межах [10; 20], перевищує 80%. Яка ймовірність банкрутства для однієї фірми?

Виходячи з умов задачі εn = (20-10)/2 = 5, звідки ε = 5/n = 0,005. Тоді, із теореми Бернуллі маємо, що $\dfrac{p(1-p)}{e^2 n}=\dfrac{p(1-p)}{0.005^2\cdot 1000}=\dfrac{80}{100}=0.8$. Отже

$$p(1\text{-}p)=0{,}8\cdot 0{,}025 = 0{,}02.$$

Звідси ми отримуємо квадратне рівняння $p^2 - p + 0{,}02 = 0$. Один із коренів якого і дає нам рішення p = 0,020202.

1.15. Індивідуальне завдання №1 „Розрахунок імовірностей"

З кожної групи задач студент вирішує одну, вибираючи її за останньою цифрою номеру залікової книжки. Числові дані задач вибираються з таблиць за номером по списку студентської групи.

Задачі на формули комбінаторики

0. У шаховому турнірі беруть участь ***2*×*B*** чоловік, які по долі розподіляються в 2 групи по ***B*** чоловік. Знайти імовірність того, що: а) ***C*** найсильніших гравців гратимуть в одній групі; б) четверо найсильніших потраплять по двоє в різні групи.
1. У кишені знаходиться ***2*×*C*** монет гідністю по 10 копійок і ***B*** монет гідністю по 2 копійки. Яка імовірність того, що наугад узяті ***C*** монети виявляться однієї гідності?
2. На складі зберігається ***A+B*** пар взуття, з них ***A*** першого сорту і ***B*** другого сорту. Яка імовірність, що з ***C*** пар, узятих наугад, одна виявиться другого сорту?
3. З обстежуваних ***2*×*B*** ощадних кас ***B*** розташовані за межею міста. Випадковим чином відібрані ***2*×*C*** кас. Яка імовірність, що серед відібраних виявиться ***C*** каси в межі міста?

4. Є ***4×C*** деталей. Серед них порівну мідних і латунних. Деталі діляться випадковим чином на дві рівні групи. Знайти імовірність того, що в кожній групі однакове число мідних і латунних деталей.
5. Для перевірки магазинів потрібні ***C*** ревізора, кожний з яких повинен перевірити 2 магазини, Чому рівна імовірність того, що при випадковому розподілі об'єктів перший ревізор одержить для перевірки дані два магазини?
6. ***3×C*** пасажирів наугад розсаджуються в трьох вагонах. Знайти імовірність того, що у кожен вагон сяде порівну .
7. У магазині стоять ***B*** телевізорів, з них ***C*** з прихованими дефектами. За день продано ***C+3*** телевізорів. Знайти імовірність того, що з них тільки 3 повністю справних.
8. У студентській групі ***4×C*** людини, порівну хлопців і дівчат. Для проведення практичних занять на ЕОМ група випадковим чином розбивається на дві підгрупи по ***2×C*** чоловік в кожній. Знайти імовірність того, що в кожній підгрупі хлопців і дівчат буде порівну.
9. У партії ***A*** деталей стандартних і ***B*** деталей нестандартних. Для контролю деталі вибираються послідовно. Перші ***2×C*** перевірених деталей виявилися стандартними. Яка імовірність того, що наступні ***C*** деталі будуть стандартними? (Після контролю деталь в партію не повертається).

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
A	28	22	32	38	38	39	20	28	37	23	25	21	21	23	24
B	16	14	16	12	11	13	12	17	10	19	12	15	12	10	14
C	4	5	3	3	4	3	3	3	4	5	4	2	3	3	4
№ п/п	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	36	21	29	30	22	25	33	23	25	27	26	29	37	38	33
B	16	19	18	20	12	13	11	11	12	16	19	13	11	11	12
C	3	2	3	4	2	2	5	4	5	5	4	4	3	3	3

II. Задачі на формули додавання та множення ймовірностей

0. З ***10×A*** студентів англійську мову знають ***3×B*** студентів, німецьку – ***3×B-4***, французьку – ***2×B+7***, англійську і німецьку – ***2×B-3***, англійську і французьку – ***2×C+5***, німецьку і французьку – ***2×C***, всі три мови знають ***C*** студенти. Скільки студентів не знають жодної мови?
1. Для деякої місцевості середнє число похмурих днів в липні становить ***B***. Знайти імовірність того, що першого і другого липня буде ясна погода.
2. Майстер, маючи ***A*** деталей, з яких ***B*** нестандартних, бере і перевіряє деталі одну за іншою, поки йому не попадеться стандартна. Яка імовірність того, що він перевірить: а) рівні ***C*** деталі; б) не менше ***C*** деталей?
3. З ***3×A*** питань студент підготував до іспиту ***3×A-10***. Для здачі іспиту достатньо відповісти на два питання з трьох, що є в квитку. Яка імовірність того, що студент складе іспит?
4. Секретарці доручили відправити ***C*** листи до різних міст. Замість того, щоб відразу надписати конверти, вона спочатку заклеїла конверти з

вкладеними листами і пішла випити каву, а як повернулася, –надписала запечатані конверти (нічим не відмінні один від одного). Знайти імовірність того, що принаймні один лист дійде за правильною адресою.

5. Яка імовірність того, що вибраний наугад виріб виявиться першосортним, якщо відомо, що ***C%*** всієї продукції складають нестандартні вироби, а ***4×A***% стандартних виробів задовольняють вимогам I сорту?
6. Директор підприємства відіслав три листи постійним споживачам своєї продукції про збільшення обсягів виробництва. У листах він запропролнував додатково закупити продукцію підприємства. Імовірність того, що його пропозиція буде прийнята першим підприємством становить ***A%***, другим – (***A+5)%***, третім — ***2×A%***. Вважаючи, що рішення споживачів незалежні, знайти імовірність того, що хоча б один споживач почне закупати додаткові обсяги продукції.
7. На тепловій електростанції ***A*** змінних інженерів, з яких — ***B*** жінки. У зміну зайнято ***C+3*** осіб. Знайти імовірність того, що в зміну чоловіків виявляться не більш ***C***
8. Білет містить 3 питання. Імовірність, що студент знає 1, 2 і 3 питання відповідно становить ***4×A%***; ***3×A%*** і (***4×A+5)%***. Знайти імовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього достатньо знати будь-які два питання.
9. Робітник обслуговує ***3*** верстати. Для першого верстата імовірність того, що він протягом години зажадає увагу робітника, рівна ***10×C%***, для другого — ***10×C%***, для третього — (***10×B-15)%***. Визначити імовірність того, що: а) всі 3 верстати протягом години зажадають увагу робітника; б) жоден верстат не зажадає уваги робітника; в) принаймні, один верстат зажадає увагу робітника.

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
A	16	19	18	20	12	13	11	11	12	16	19	13	11	11	12
B	9	8	8	5	8	8	8	7	10	6	6	6	6	9	8
C	5	4	4	3	4	2	3	2	3	2	3	5	4	3	4
№ п/п	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	10	14	13	12	12	18	16	13	14	19	11	10	17	19	13
B	7	5	5	6	8	8	5	8	9	9	7	9	8	8	6
C	3	5	4	3	5	5	5	4	4	3	3	2	2	4	2

III. **Задачі на формули повної ймовірності та Байєса**

0. На взуттєвій фабриці в окремих цехах виготовляються підметки, каблуки і верхи черевик. Дефектними виявляються ***C%*** каблуків, ***B%*** підметок і ***(B-C)%*** верхів. Виготовлені каблуки, підметки і верхи випадковим чином з'єднуються в цеху, де шиються черевики. Який відсоток пар взуття буде зіпсований?
1. Три екзаменатори приймають екзамен з деякого предмету у групи в ***2×A*** чоловік, причому перший опитує ***A*** студентів, другий – ***A-B*** студенти, а третій - ***B*** студентів (вибір студентів проводиться випадковим чином із списку). Відношення трьох екзаменаторів до студентів, що слабо підготувалися, різне: шанси таких студентів скласти іспит у першого

викладача рівні $(10 \times B)\%$, у другого - тільки $(10 \times C)\%$,, зате у третього – $(15 \times C)\%$. Знайти імовірність того, що студент, що слабо підготувався, складе іспит.

2. Імовірність того, що виготовлений на даному підприємстві виріб задовольняє стандарту, рівна $(10 \times B)\%$,. Пропонується спрощений метод перевірки виробів на стандартність, який дає позитивний результат з імовірністю $(11 \times B)\%$, для виробів дійсно задовольняючих стандарту, але також дає позитивний результат з імовірністю $(10 \times C)\%$, для виробів, що насправді не задовольняють стандарту. Знайти імовірність того, що виріб, визнаний при спрощеній перевірці стандартним, дійсно задовольняє стандарту
3. Електролампи виготовляються на трьох заводах. Перший завод виготовляє $(3 \times A)$ % загальної кількості електроламп, другий — $(3 \times B)$ %, третій— решту. Продукція першого заводу містить $(4 \times A)\%$ стандартних ламп, другого — $(5 \times B)$ %, третього — $(13 \times C)\%$. У магазини поступає продукція всіх трьох заводів. Яка імовірність, що куплена в магазині лампа виявиться стандартною?
4. На збірку поступають деталі з двох автоматів. Перший дає в середньому $(0{,}1 \times C)\%$ браку, другий — $(0{,}01 \times B)\%$. Знайти імовірність попадання на збірку бракованої деталі, якщо з першого автомата поступило $100 \times A$ деталей, а з другого —$200 \times A$.
5. У складальний цех заводу деталі поступають з двох цехів: з першого — $(10 \times B)\%$, з другого.— решта, причому $B\%$ деталей з першого цеху і $(3 \times C)\%$ — з другої, відмінної якості. Визначити імовірність того, що узята наугад деталь не буде відмінної якості.
6. У складальний цех заводу деталі поступають з двох цехів: з першого — $(10 \times B)\%$, з другого.— решта, , причому $B\%$ деталей з першого цеху і $(3 \times C)\%$ — з другої, відмінної якості. Визначити імовірність того, що узята наугад деталь буде відмінної якості.
7. Контрольну роботу перед іспитом C студентів виконали повністю, A - наполовину, а B студентів не змогли зробити нічого. Студенти першої підгрупи (що зробили контрольну повністю) з рівною імовірністю можуть одержати на іспиті "4" або "5", студенти другої підгрупи (що зробили контрольну наполовину) з імовірністю $(0{,}04 \times C)$ одержать "3", з імовірністю $(0{,}12 \times C)$ - "4" і з імовірністю $(1-0{,}16 \times C)$ - "5". Студенти третьої підгрупи з рівною імовірністю можуть одержати "3" і "2". Знайти імовірність того, що наугад вибраний студент одержить: а) "п'ятірку"; б) "четвірку"; у) "трійку".
8. У відділі технічного контролю працюють майстер, що перевіряє $(10 \times B)\%$, виготовлених виробів, і учень, що перевіряє решту виробів. Майстер помічає брак у $(11 \times B)\%$ випадків, тоді як учень - тільки у $(9 \times B)\%$, випадків. Виріб, що пройшов контроль, виявився дефектним і

був повернений покупцем. Яка з подій є вірогіднішою: "даний виріб перевіряв майстер" або "даний виріб перевіряв учень"?

9. Імовірність для виробів деякого виробництва, що вони будуть задовольнити стандарту, рівна ***(11×B)***%. Пропонується спрощена система випробувань (контролю), що дає позитивний результат з імовірністю ***(10×B)***%, для виробів, що задовольняють стандарту, а для виробів, які не задовольняють стандарту — з імовірністю ***(0,01×C)***. Яка імовірність того, що виріб, що витримав це випробування, задовольняє стандарту?

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
A	17	19	15	10	12	11	12	13	13	10	20	18	17	10	11
B	7	9	9	6	7	8	6	7	6	7	6	7	7	8	8
C	4	4	2	4	2	4	4	4	3	4	5	3	2	4	4
№ п/п	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	10	13	13	14	16	13	19	15	16	17	17	10	16	16	18
B	9	6	8	8	7	9	6	7	8	7	7	6	8	8	9
C	3	4	5	3	3	4	3	2	3	4	2	4	4	4	3

IV. Задачі на формули та теорему Бернуллі

0. Припускаючи, що імовірність народження хлопчика і дівчинки однакова, знайти імовірність того, що в сім'ї, що має ***B*** дітей, не менше ***C*** хлопчиків.

1. Припустимо, що імовірність узяття воротарем одинадцятиметрового штрафного удару рівна 1/4. Іноді думають, що це твердження означає, що з чотирьох одинадцятиметрових ударів воротар обов'язково візьме один. Яка насправді імовірність того, що воротар: а) візьме принаймні один м'яч з ***C*** ; б) візьме не менше ***C*** м'ячів з ***B***?

2. У автомобільних перегонах беруть участь ***B*** машин. Для кожної машини імовірність дійти до фінішу складає ***(0,1×B)***. Знайти імовірність того, що більше половини машин дійде до фінішу.

3. Іспит складається з ***B*** питань, які задає машина. На кожне питання машина пропонує 3 варіанти відповіді, з яких треба вибрати один правильний. Яка імовірність того, що, абсолютно не готуючись до іспиту, вдасться вгадати правильні відповіді принаймні на ***C*** питань?

4. З гаманця на стіл висипали ***A*** монет. Яка імовірність того, що число монет, які лежать гербами вгору: а) рівно ***C***; б) укладено між ***B***±2 (включаючи межі).

5. У кімнаті всього ***C*** телефони на ***B*** чоловік. Кожний з них користується телефоном в середньому ***60/B*** хвилин протягом години, а) Знайти імовірність того, що всі телефони виявляться зайняті. б) Як зміниться ця імовірність, якщо кожен стане користуватися телефоном в середньому по ***30/B*** хвилин в годину?

6. Менеджер по мікрокредитам банка з імовірностю ***(0,1×B)*** протягом місяца укладає 10 договорів, а з імовірностю ***(1-0,1×B)*** – 9 договорів..Знайти ймовірність, що протягом 3 місяців укладе не меньше 29 договорів.

7. У деякому місті за добу народилося ***B*** дітей. Знайти імовірність того, що рівно ***C*** з них.- хлопчики (прийнявши імовірність народження хлопчика за 0,5).
8. Проводиться ***B*** незалежних випробувань з імовірністю успіху, рівної ***(0,1×C)***. Знайти найвірогідніше число успіхів.
9. Два рівносильні супротивники грають в шахи. Що вірогідніше: а) виграти одну партію з ***C*** або дві партії з ***B***; б) виграти не менше ***C*** партій з ***B*** (нічия до уваги не береться)?

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
A	14	11	16	19	19	20	10	14	19	11	12	10	10	12	12
B	8	7	9	7	9	8	7	6	7	7	8	7	8	7	7
C	4	3	4	3	5	5	4	4	3	3	4	4	4	3	3
№ п/п	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	10	13	13	16	14	14	14	19	15	14	13	20	18	20	13
B	7	8	9	9	9	6	6	7	6	8	6	8	9	6	6
C	5	3	4	4	5	4	3	4	3	3	4	2	5	2	4

Контрольні запитання

1. Що таке „імовірність настання події”?
2. Чи можна вважати сумісні події незалежними?
3. Для яких типів подій використовується формула Бернуллі?
4. Коли ймовірність називається умовною?
5. Яка формула поєднує правила множення і додавання для незалежних і несумісних подій?
6. Для яких типів подій можна використовувати формули комбінаторики?
7. Чому формула Байєса називається формулою для уточнення ймовірностей?
8. Формула Бернуллі і теорема Бернуллі – це одне і те саме?
9. Про що йдеться в законі великих чисел?

В розділі розглянуто поняття ймовірності, типів подій, умов настання різних типів подій та формули для розрахунку ймовірностей

2. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Наводиться інформація про закон та багатокутник розподілу дискретної випадкової величини. Визначаються її числові характеристики.

2.1. Поняття випадкової величини. Закон і багатокутник розподілу

Раніше ми багато разів уже зустрічалися з такими величинами, кількісне значення яких не може бути раз і назавжди визначене, а міняється під впливом випадкових чинників. Так, кількість хлопчиків, на сотню новонароджених не буде для всіх сотень одним і тим же. Або довжина волокон бавовни певного сорту міняється дуже сильно не тільки для різних районів, де цей сорт виростає, але і навіть для одного куща кожного сорту і в одній коробочці. Вага зерен пшениці, вирощених на деякій дільниці, не рівна деякій певній величині, а міняється від одного зерна до іншого. У наслідок неможливості врахувати вплив всіх чинників (якість дільниці ґрунту, на якій виріс колос з даним зерном, умови освітлення зерна, водний режим і ін.), що визначають зростання зерна, його вага є величиною, що міняється в залежності від випадку.

У кожному з цих прикладів ми маємо справу з величиною, які так чи інакше характеризують собою результат зробленої операції. Кожна з цих величин при різних операціях, якими б однорідними ми не старалися зробити умови їх здійснення, може приймати різні значення, у залежності від випадкових відмінностей, що не підлягають нашому контролю, в обстановці цих операцій. Такого роду величини називаються **випадковими величинами**.

Знати дану випадкову величину - це задавати випадкову величину через таблицю з двох рядків. Верхній рядок містить в якому-небудь порядку можливі значення випадкової величини x_1, x_2, … x_n, а нижня - їх імовірності p_1, p_2, p_3…… p_n, так що під кожним з можливих значень стоїть його ймовірність.

x_1	x_2	…	x_n
p_1	p_2	…	p_n

Задати таку таблицю, тобто задати всі можливі значення випадкової величини разом з їх імовірностями, означає, як кажуть, задати **закон розподілу** цієї випадкової величина. Імовірності для будь-якої випадкової величини мають таку властивість : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$ оскільки вони утворюють повну систему подій. Випадкові величини, які задані законом розподілу у вигляді таблиці, називаються **дискретними**.

Щоб додати закону розподілу більш наочний вигляд, часто вдаються до його графічного зображення. По осі абсцис відкладаються можливі значення випадкової величини, а по осі ординат імовірності цих значень. Отримані точки сполучаються відрізками прямих. Така фігура називається **багатокутником розподілу** (рис. 2.1). Багатокутник розподілу, так само як і закон розподілу, повністю характеризує випадкову величину. Він є однією з форм закону розподілу.

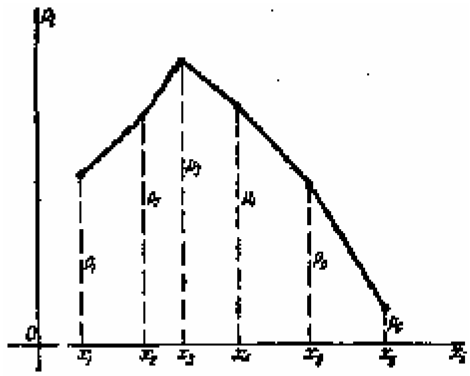


Рис. 2.1. Багатокутник розподілу або розподіл імовірностей

<u>Приклади</u>

Приклад 1. У деякий момент часу визначається ефективність фінансової діяльності 2-х фірм за трибальною системою. Число очок, які може набрати перша фірма при одноразовій перевірці, має такий закон розподілу :

1	2	3
0,2	0,5	0,3

таке ж число очок для іншої фірми, але інший закон розподілу :

1	2	3
0	0,2	0,8

Знайти закон розподілу для випадку, коли фінансові результати обох фірм будуть поєднані. Ясно, що сума, про яку йде мова, – випадкова величина. Наше завдання – скласти таблицю її розподілу. Для цього ми повинні розглянути всі можливі результати спільної діяльності наших двох фірм. Ми розташуємо ці результати в таблицю, де ймовірність кожного результату обчислюється за правилом множення для незалежних подій і, де X означає число очок, що набирає перша фірма, а Y- число очок, що набирає друга фірма.

№ результату	X	Y	$X+Y$	Імовірність результату
1)	1	1	2	$0 \cdot 0{,}2=0$
2)	1	2	3	$0 \cdot 0{,}5=0$
3)	1	3	4	$0 \cdot 0{,}3=0$
4)	2	1	3	$0{,}2 \cdot 0{,}2=0{,}04$
5)	2	2	4	$0{,}2 \cdot 0{,}5=0{,}1$
6)	2	3	5	$0{,}2 \cdot 0{,}3=0{,}06$
7)	3	1	4	$0{,}8 \cdot 0{,}2=0{,}16$
8)	3	2	5	$0{,}8 \cdot 0{,}5=0{,}4$
9)	3	3	6	$0{,}8 \cdot 0{,}3=0{,}24$

Ця таблиця повністю вирішує поставлене завдання.

Сума всіх дев'яти ймовірностей у таблиці дорівнює одиниці. Цією властивістю має, звичайно, володіти кожний закон розподілу, оскільки мова йде про суму ймовірностей усіх можливих значень випадкової величини, тобто про суму ймовірностей деякої повної системи подій. Цією властивістю законів розподілу зручно користуватися як контрольним прийомом для перевірки правильності вироблених обчислень.

Приклад 2. Побудувати багатокутник розподілу для прикладу 1. Для цього складемо результати розрахунку ймовірностей для однакового числа очок. Тоді ми отримаємо такий закон розподілу

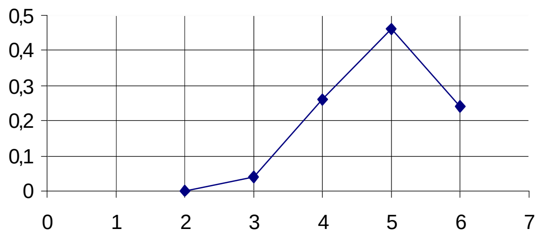


Рис. 2.2.

2	3	4	5	6
0	0,04	0,26	0,46	0,24

Тепер відкладемо по горизонтальній осі значення очок, а по вертикальній – імовірності. Отримаємо результат, показаний на рис. 2.2.

2.2. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Випадкові величини характеризуються так званими моментами :

– початковими, степені *S*, $$\alpha_S[X] = \sum_{i=1}^{n} X_i^S P_i \ ; \qquad (2.1)$$

Спочатку утворюємо рядок значень X^S(ліворуч), а потім знаходимо центральний момент (праворуч), для прикладу S=3.

B3 =B1^$B$4

	A	B	C
1	x_1	2	3
2	p_1	0	0,04
3	X_i^S =	8	27
4	s=	3	

E4 =СУММПРОИЗВ(B3:F3;B2:F2)

	A	B	C	D	E	F
1	x_1	2	3	4	5	6
2	p_1	0	0,04	0,26	0,46	0,24
3	X_i^S =	8	27	64	125	216
4	$(X_i-\alpha_1)^S$	3		$\alpha_S[X]$ =	127,06	

– центральними, степені *S*, $$\mu_S[X] = \sum_{i=1}^{n} (X_i - a_1)^S P_i \qquad (2.2)$$

Спочатку утворюємо рядок значень $(X\text{-}\alpha_1)^S$(ліворуч), а потім знаходимо центральний момент (праворуч), для прикладу S=3.

B4 =(B1-$B$6)^$B$5

	A	B	C
1	x_1	2	3
2	p_1	0	0,04
3	X_i^S =	2	3
4	$(X_i-\alpha_1)^S$ =	-88	-87
5	s=	1	
6	$\alpha_1[X]$ =	90	

E5 =СУММПРОИЗВ(B4:F4;B2:F2)

	A	B	C	D	E	F
1	x_1	2	3	4	5	6
2	p_1	0	0,04	0,26	0,46	0,24
3	X_i^S =	8	27	64	125	216
4	$(X_i-\alpha_1)^S$ =	-7E+05	-7E+05	-636056	-614125	-6E+05
5	s=	3		$\mu_S[X]$ =	-616461	
6	$\alpha_1[X]$ =	90				

Як видно з наведених прикладів розрахунку числових характеристик за допомогою Excel, спочатку розраховується рядок перетворень *X*, а потім і саму числову характеристику, не забуваючи позначати як константи степінь *s* та $\alpha_1[X]$.

Центральні і початкові моменти пов`язані поміж собою співвідношеннями

$$\mu_1 = 0; \qquad \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2;$$

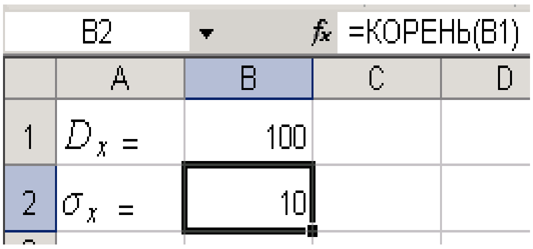
$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3; \qquad \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1^2\alpha_3 + 3\,\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_1^4. \qquad (2.3)$$

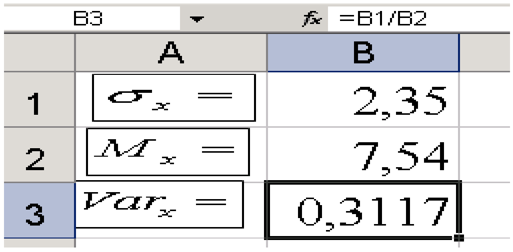
Перший центральний момент α_1 називається ще “математичним сподіванням” або “середнім” і позначається також як m_x, M_x, $M[X]$, $\bar{x}$. Другий центральний момент μ_2 називається ще “дисперсія” і позначається як D_x, $D[X]$, Q_x^2, q^2,

$\sigma_X{}^2$. Спрощена формула для визначення дисперсії має вигляд $D_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 P_i - M^2[X]$. Квадратний корінь із дисперсії називається “середньо-квадратичним відхиленням” або “математичним стандартом” і позначається як $\sqrt{D_x}$, $\sqrt{D[X]}$, Q_x, q, σ_x.

Розмірність у математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення така ж як і у числових значень дискретної випадкової величини.

Варіацією дискретної випадкової величини називається відношення середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання $Var_x = \frac{s_x}{M_x}$.





<u>Приклади</u>

Приклад 1. Визначимо тепер для прикладу 2 попереднього параграфа за вказаним вище правилом середнє значення числа очок для кожної з двох фірм:

Для першої фірми – $1{\cdot}0 + 2{\cdot}0{,}2 + 3{\cdot}0{,}8 = 2{,}8$;

Для другої фірми – $1{\cdot}0{,}2 + 2{\cdot}0{,}5 + 3{\cdot}0{,}3 = 2{,}1$.

Ми бачимо, що у першої фірми в середньому трохи більше середнє число очок, ніж у другої; практично це означає, що при багаторазовому оцінюванні перша фірма буде взагалі давати трохи кращий результат ніж друга.

Приклад 2. При збиранні точного приладу для найбільш точної підгонки деякої деталі може бути, в залежності від успіху, потрібно 1, 2, 3, 4 або 5 проб. Таким чином, кількість проб, необхідних для досягнення задовільного збирання, є випадкова величина з можливими значеннями 1, 2, 3, 4, 5. Нехай імовірності цих значень даються таблицею

1	2	3	4	5
0,07	0,16	0,55	0,21	0,01

Існує завдання забезпечити даного складальника такою кількістю деталей, яка необхідна для 20 приладів. Щоб мати можливість орієнтовно оцінити цю кількість, не можна безпосередньо використати дану таблицю. Вона вчить тільки того, що в різних випадках буває по-різному. Але якщо знайти середнє значення $\overline{x}$ числа x проб, необхідних для одного приладу, і помножити це середнє значення на 20, то буде отримано, очевидно, орієнтовне значення шуканого числа.

Знаходимо $x = 1{\cdot}0{,}07 + 2{\cdot}0{,}16 + 3{\cdot}0{,}55 + 4{\cdot}0{,}21 + 5{\cdot}0{,}01 = 2{,}93$; $20{\cdot}x = 2{,}93{\cdot}20 = 58{,}6 \approx 59$.

Для того щоб складальник мав невеликий запас на випадок, якщо фактична витрата деталей перевершить очікуваний, практично корисно буде дати йому 60-65 деталей.

Приклад 3. Для прикладу 2 із попереднього параграфа знайти 1-й, 2-й, 3-й початкові моменти і 2-й та 3-й центральні. За формулою (2.1), підставляючи замість S конкретні номера моментів, отримаємо

$\alpha_1 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0{,}04 + 4 \cdot 0{,}26 + 5 \cdot 0{,}46 + 6 \cdot 0{,}24 = 4{,}9;$

$\alpha_2 = 2^2 \cdot 0 + 3^2 \cdot 0{,}04 + 4^2 \cdot 0{,}26 + 5^2 \cdot 0{,}46 + 6^2 \cdot 0{,}24 = 24{,}66;$

$\alpha_3 = 2^3 \cdot 0 + 3^3 \cdot 0{,}04 + 4^3 \cdot 0{,}26 + 5^3 \cdot 0{,}46 + 6^3 \cdot 0{,}24 = 127{,}06;$

$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 24{,}66 - 4{,}9^2 = 0{,}65;$

$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 127{,}06 - 3 \cdot 4{,}9 \cdot 24{,}66 + 2 \cdot 4{,}9^3 = -0{,}144.$

Приклад 4. Проводиться ряд випробувань з однією і тією ж імовірністю p появи деякої події A, причому результати окремих випробувань між собою незалежні. Знайти середнє значення числа появ події A в серії з n випробувань.

Число появ події A в серії з n випробувань є випадкова величина з можливими значеннями 0, 1, 2, …, n, причому ймовірність значення k рівна, як ми знаємо з формули Бернуллі (1.19).

Тому шукане середнє значення є $\sum_{k=0}^{n} kp_{\text{n}}(\text{k}). = np.$

У свій час ми пересвідчилися, що найвірогідніше число появ події A при n випробуваннях у випадку великого n близько до np. Тепер ми бачимо, що середнє число появ події A при будь-якому n точно рівним np.

Таким чином у цьому випадку найвірогідніше значення випадкової величини співпадає з її середнім значенням; треба, однак, стерегтися думки, неначе має місце збіг. Для будь-яких випадкових величин узагалі найвірогідніше значення випадкової величини може дуже далеко стояти від її середнього значення. Так, наприклад, для випадкової величини із законом розподілу

0	5	10
0,7	0,1	0,2

найвірогідніше значення є 0, а середнє значення – 2,5.

Приклад 5. Виконуються незалежні випробування, в кожному з яких з імовірністю 0,8 може статися деяка подія A. Випробування проводяться до першої появи події A. Загальна кількість випробувань не перевершує чотирьох. Визначити середню кількість зроблених випробувань.

Число випробувань, яке доведеться зробити, за умовою задачі може дорівнювати 1, 2, 3 або 4. Ми повинні обчислити ймовірності кожного з цих чотирьох значень. Щоб зробити тільки одне випробування, треба, щоб вже при першому випробуванні з'явилося подія A. Імовірність цього є p_1=0,8. Щоб зробити два випробування, треба, щоб при першому випробуванні подія A не з'явилася, а при другому – сталася. Імовірність цього за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій є p_2= (1-0,8) · 0,8=0,16. Щоб зробити три випробування, треба, щоб у перших двох подія A не з'явилося, а при третьому вона сталася. $p_3=(1-0{,}8)^2 \cdot 0{,}8=0{,}032$. Нарешті, потреба в чотирьох випробуваннях виникне при умові, що три перших випробування не приведуть до появи події А (незалежно від того. що дасть четверте випробування), тому

$$p_4=(1-0{,}8)^3=0{,}008$$

Таким чином, число випробувань, що виробляються, як випадкова величина, визначається законом розподілу

1	2	3	4
0,8	0,16	0,032	0,008

Середнє значення для цього закону розподілу становить $1 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}032 + 4 \cdot 0{,}008 = 1{,}248$

Якщо, наприклад, мало бути зроблено 100 подібних спостережень, то можна розраховувати, що при цьому доведеться зробити приблизно $1{,}248 \cdot 100 = 125$ випробувань.

Приклад 6. Для перевірки роботи 2-х продавців, було визначено суму, на яку клієнти магазину купляють у них товар. У результаті дослідження була побудована наступна таблиця. Визначити, який з продавців працює краще?

Сума, на яку куплено товар, грн.		1	5	10	15	20
Кількість клієнтів	I продавець	200	400	1000	200	200
	II продавець	10	200	1500	280	10

Побудуємо закон розподілу. Для цього розділимо на загальну кількість клієнтів значення кількості для кожної суми купівлі. Загальна кількість клієнтів буде дорівнювати для першого продавця 200+400+1000+200+200=2000, а для другого – 10+200+1500+280+10=2000. Отже обидва продавці обслужили однакову кількість клієнтів. Імовірність того, що клієнт придбає товар на суму 1 грн. для першого продавця буде 200/2000=0,1 , а для другого – 10/2000=0,005. І так далі. Зведемо результати в таблицю, де значеннями випадкової величини буде сума, на яку клієнти купляли товар.

Сума, на яку куплено товар, грн.		1	5	10	15	20
Імовірність купівлі товару	I продавець	0,1	0,2	0,5	0,1	0,1
	II продавець	0,005	0,1	0,75	0,14	0,005

Визначимо математичне сподівання для кожного продавця

$$m_1 = 1 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}5 + 15 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}1 = 9{,}6 \text{ грн. };$$

$$m_2 = 1 \cdot 0{,}005 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}75 + 15 \cdot 0{,}14 + 20 \cdot 0{,}005 = 10{,}3 \text{ грн.}$$

Отже в середньому, у другого продавця клієнти купляють товару на більшу суму, отже він працює краще.

Приклад 7. Перевірка роботи двох лікарів показала, що після операцій, проведеної першим лікарем, одужало за 2 дні 40 хворих, за 4 дні – 180, за 6 – 240, за 8 – 75, за 10 – 25. У другого лікаря через 2 дні одужало 15 хворих, через 4 – 55, за 6 – 30, за 8 – 15. Припускаючи, що чим менше хворий проведе у лікарні тим краще лікування, визначити, який з лікарів кращий?

Для цього визначимо повну систему подій. Нею буде кількість днів, проведених у лікарні. Імовірність провести певну кількість днів у лікарні для обох лікарів знайдемо, поділивши кількість хворих для кожного дня на загальну кількість хворих для кожного лікаря.

Проведемо розрахунки математичного стандарту та середнього для кожного з лікарів, а потім розрахуємо відносний стандарт, як співвідношення першого до другого. Для якого лікаря це співвідношення менше, той лікар кращий.

Зведемо розрахунки першого та другого початкових моментів у таблицю.

Отже, середня кількість днів, які хворий проведе у першого лікаря це m_1 = 5,51786, у другого – m_2 =4,782609. Знайдемо дисперсію як різницю поміж другим початковим моментом та першим у квадраті згідно формули (2.3). Отже,

D_1=33,89286 - $5{,}51786^2$ = 3,44611, D_2 = 25,91304– $4{,}782609^2$ = 3,039698. Математичний стандарт буде знайдено як корінь квадратний з дисперсій $s_1 = \sqrt{D_1} = 1{,}85637$, $s_2 = \sqrt{D_2} = 1{,}743473$. Тепер порівняємо варіації для обох лікарів. $\frac{s_1}{m_1} = \frac{1{,}85637}{5{,}51786} = 0{,}33643$, $\frac{s_2}{m_2} = \frac{1{,}743473}{4.782609} = 0{,}364544$. Для першого лікаря ця кількість менша, отже цей лікар лікує в середньому краще.

Кіль-кість днів, X_i	Для першого лікаря				Для другого лікаря			
	Кіль-кість хворих	Імовір-ність, P_i	X_iP_i	X_i^2 P_i	Кіль-кість хворих	Імовір-ність, P_i	X_iP_i	X_i^2 P_i
2	40	0,07143	0,14286	0,285714	15	0,130435	0,26087	0,52173
4	180	0,32143	1,28571	5,142857	55	0,478261	1,913043	7,65217
6	240	0,42857	2,57143	15,42857	30	0,26087	1,565217	9,39130
8	75	0,13393	1,07143	8,571429	15	0,130435	1,043478	8,34782
10	25	0,04464	0,44643	4,464286	0	0	0	0
Сума	560	1	5,51786	33,89286	115	1	4,782609	25,9130

Приклад 8. Хтось купляє лотерейні квитки. Якщо квиток виявиться таким, що не виграв, купляється наступний квиток, і т.д. Імовірність виграшу одного квитка дорівнює p. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення кількості куплених квитків.

Ряд розподілу величини X – кількості куплених квитків має вигляд:

X_i	1	2	3	…..	i	…….
p_i	p	qp	q^2p	…..	$q^{i-1}p$	

Тут $q=1-p$

Математичне сподівання величини X виражається сумою ряду

$$m_x=1p + 2qp + 3\,q^2p + \ldots + i\,q^{i-1}p + \ldots= p(1 + 2q + 3\,q^2 + \ldots + i\,q^{i-1} + \ldots).$$

Неважко побачити, що ряд, який стоїть у дужках, являє собою результат диференціювання геометричної прогресії

$$q + q^2 + q^3 + \ldots + q^i + \ldots=q/(1-q);$$

Отже, $1 + 2q + 3\,q^2 + \ldots + i\,q^{i-1} + \ldots=d/dq\,[q/(1-q)] = 1/(1-q)^2=1/p^2.$

Звідки $m_x=p/p^2 = 1/p$.

Для визначення дисперсії величини X обчислимо спочатку її другий центральний момент

$$\alpha_2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_p = 1^2p + 2^2qp + 3^2q^2p +\ldots+ i^2q^{i-1}p + \ldots=p(1^2 + 2^2q + 3^2q^2 +\ldots+ i^2\,q^{i-1}).$$

Для обчислення ряду, що стоїть в дужках, помножимо на q ряд

$$1 + 2q + 3\,q^2 + \ldots + i\,q^{i-1} + \ldots= 1/(1-q^2.$$

Отримаємо: $q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + i\,q^i + \ldots=q/(1-q^2.$

Диференціюючи цей ряд по q, маємо

$$1^2 + 2^2q + 3^2\,q^2 + \ldots + i^2\,q^{i-1} = (q+1)/(1-q)^2.$$

Множачи на p=1 - q, отримаємо: $\alpha_2= (q+1)/(1-q)^2.$

Тоді, дисперсія: $D_x= \alpha_2 - m_x^2= (q+1)/(1-q)^2-1/(1-q)^2= q/(1-q)^2= q/p^2.$

Звідки $$s_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{(q/p^2)} = \sqrt{q}/p.$$

2.3. Теореми про властивості середнього та дисперсії

Нехай, a – деяка константа, а $X_1, X_2, X_3\ldots$ – незалежні випадкові величини, кожна з яких представлена власним законом розподілу.

Тоді, середнє має такі властивості:

1) $M(a + X) = a + M(X)$.
2) $M(a \cdot X) = a \cdot M(X)$.
3) $M(X_1 + X_2 + X_3\ldots) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) + \ldots$
4) $M(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3\ldots) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot M(X_3) \cdot \ldots$

(2.4)

Дисперсія має такі властивості:

1) $D(a + X) = D(X)$.
2) $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$.
3) $D(X_1 + X_2 + X_3\ldots) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) + \ldots$

(2.5)

Тобто, операції з константами, які додаються до всіх значень закону розподілу випадкової величини чи множаться на ці значення, та сумами випадкових величин зручніше проводити за наступною схемою: спочатку визначаються числові характеристики окремих випадкових величин, а потім визначаються параметри їхньої суми чи добутку.

Приклади

Приклад 1. Два підприємства виготовляють однакову продукцію, причому відомо, що в середньому перше підприємство щодня робить 120 виробів, а друге 180. Чи можемо ми за допомогою цих даних установити середнє значення числа виробів, яке потрібно чекати щодня від обох підприємств разом? Або цих даних недостатньо, і ми, крім середніх значень, повинні знати ще що-небудь про дві випадкові величини, що розглядаються (наприклад, знати повністю їх закони розподілу)? У вищенаведеному прикладі x число виробів одного тільки першого підприємства, y – число виробів другого підприємства, X =120. Y =180, і значить :

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=300.$$

Приклад 2. На деякому підприємстві встановлено n верстатів і з кожного верстата відібрано по одному виробу. Визначити середнє число бракованих виробів, якщо відомо, що ймовірність виготовлення бракованого виробу першим верстатом є p_1, другим верстатом – p_2,. .., n-м верстатом – p_n

Кількість бракованих виробів при аналізі одного виробу є випадкова величина, що здатна приймати тільки два значення: 1, якщо цей виріб бракований, і 0, якщо він годиться. Імовірності цих значень для першого верстата є відповідно p_1 і $1-p_1$, у наслідок чого середня кількість бракованих виробів серед вибраних нами є $1\cdot p_1+0\cdot(1-p_1)=p_1$.

Для другого верстата середня кількість бракованих виробів серед взятих є p_2 і т. д. Загальна кількість бракованих виробів є сума бракованих виробів, що попалися серед виробів, виготовлених на першому, другому і інших верстатах. Тому, в силу щойно встановленого нами правила складання середніх значень, середня кількість бракованих виробів серед вибраних нами дорівнює

$p_1+p_2+\ldots+p_n$, що і вирішує поставлену задачу.

Зокрема, якщо ймовірність виготовлення бракованого виробу одна і та ж для всіх верстатів ($p_1=p_2=\ldots=p_n=p$), то середнє значення загального числа бракованих виробів є np.

Приклад 3. Фірма купляє товари певної кількості для кожної номенклатури, кожен із цих видів товару має свою ціну. Середня ціна одиниці товару складає 10 грн., а середня кількість закуплених товарів – 1000 шт. Тоді, згідно з теоремою про множення добутків, середні витрати на закуплені товари становитимуть 10 ·1000 = 10000 грн.

Приклад 4. Тепер уже можна значно швидше розв'язати задачу прикладу 3 п.2.2. Для визначення середнього суми випадкових величин, якою є результуючий закон розподілу, достатньо тільки скласти середні кожної з цих випадкових величин, щоб отримати той же самий результат

$$M(X_1+X_2)=M(X_1)+M(X_2)=2{,}8+2{,}1=4{,}9.$$

Таку саму операцію можна виконати і з дисперсіями цих випадкових величин – спочатку знайти дисперсії кожної з величин окремо, а потім їх суму – це і буде дисперсія їх суми.

2.4. Теореми про середнє квадратичне відхилення

Нехай ми маємо випадкові величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з середніми квадратичними відхиленнями $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Покладемо, що сума цих випадкових величин $x_1+x_2+\ldots+x_n=X$, і спитаємо себе, як знайти середнє квадратичне відхилення Q величини X, якщо нам дані $q_1, q_2, \ldots, q_n$ і якщо ми припускаємо випадкові величини x_i $(1\le i\le n)$ взаємно незалежними. Його можна знайти за формулою

$$Q^2=\sum_{I=1}^{N} q_i^{\,2}\ , \tag{2.6}$$

тобто дисперсія суми взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій. Для середніх квадратичних відхилень ми отримуємо

$$Q=\sqrt{\sum_{I=1}^{N} q_i^{\,2}}\ , \tag{2.7}$$

Розглянемо тепер середнє арифметичне $x=(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n$ результатів n вимірювань. Це випадкова величина; її середнє значення дорівнює середньому значенню окремого вимірювання, а середнє квадратичне відхилення визначається як :

$$Q=\sqrt{nq^2}=q\sqrt{n}\ , \tag{2.8}$$

а середнє квадратичне відхилення величини x, що складає $1/n$ цієї суми, є $\frac{Q}{n} = \frac{q}{\sqrt{n}}$. Середнє арифметичне n взаємно незалежних і однаково розподілених випадкових величин має: а) середнє значення - те ж саме, що і кожна з величин, що складають суму; б) середнє квадратичне відхилення - в $\sqrt{n}$ разів менше, ніж кожна з n величин, що складають суму.

Приклади

Приклад 1. Якщо на деякому підприємстві кожний виготовлений виріб може виявитися бракованим з імовірністю p, то середня кількість бракованих виробів серед n, що виготовляються (як ми бачили вище) є np. Щоб орієнтовно оцінити, наскільки великим може виявитися ухиляння фактичної кількості бракованих виробів від цього середнього значення, знайдемо середні квадратичні відхилення кількості бракованих виробів від np; простіше усього це зробити із застосуванням формули (2.7).

Кількість бракованих виробів можна розглядати як суму кількості бракованих виробів при виготовленні кожного виробу. А оскільки ці числа ми вважаємо взаємно незалежними випадковими величинами, то за правилом складання дисперсій можна для розрахунку середнього квадратичного відхилення Q загальної кількості бракованих виробів скористатися формулою (2.7), в якій q_1, q_2, $\ldots q_n$ означають середні квадратичні відхилення кількості бракованих виробів при виготовленні кожного виробу. Але кількість бракованих виробів при виготовленні 1-го з них визначається таблицею

1	0
p	$1\text{-}p$

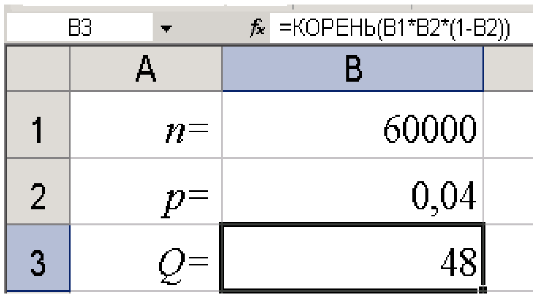
Тому для n виробів $\bar{x} = p$ і

$$Q^2 = (1-p)^2 \cdot p + p^2 \cdot (1-p) - p^2 = p \cdot (1-p)$$

отже,

$$Q = \sqrt{\sum_{I=1}^{N} q_i^{\,2}} = \sqrt{np(1+p)}$$

Зіставляючи середню кількість np бракованих виробів з його середнім квадратичним відхиленням $\sqrt{np(1-p)}$, ми бачимо, що при великих значеннях n останнє значно менше першого і складає лише невелику частку його. Так, при n = 60000, p=0,04 середня кількість бракованих виробів дорівнює 2400, а середнє квадратичне відхилення $Q = \sqrt{60000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} = 48$, так, що фактична кількість бракованих виробів орієнтовно буде відхилятися лише на 5% від свого середнього значення.



Приклад 2. Уявимо собі, що проводиться збирання деякого механізму, що складається з n деталей, що прикладаються впритул одна до іншої вздовж деякої осі і що охоплюються з кінців деякою деталлю (рис. 2.3). Довжина кожної деталі може дещо відрізнятися від відповідного стандарту і тому є випадкова величина. Припустимо ці випадкові величини незалежними. Якщо середні до-

вжини деталей і середні квадратичні відхилення, які фактично є мірою похибки, цих довжин рівні відповідно $a_1, a_2,\ldots,a_n$ і $q_1,q_2,\ldots,q_n$, то середнє значення і дисперсія довжини ланцюга з n деталей є

$$a=\sum_{k=1}^{N} a_k \quad \text{і} \quad q=\sqrt{\sum_{k=1}^{N} q_k^{\,2}}\,.$$

Зокрема, якщо $n=9$, $a_1=a_2=\ldots=a_9$ =10 см і $q_1=q_2....=q_9$= 0,2 см , то a=90 см і $q=\sqrt{9\cdot(0{,}2)^2}$ =0,6 см.

Ми бачимо, що якщо в середньому довжина кожної окремої деталі ухиляється від свого середнього значення на 2%, то довжина ланцюга з цих деталей відрізняється від свого середнього значення приблизно лише на 0,77%. Ця обставина – зменшення відносної помилки при складанні випадкових величин – відіграє значну роль при збиранні точних механізмів. Справді, якби не було взаємної компенсації відхилень розмірів окремих деталей від заданих нормальних розмірів, то при збиранні механізмів постійно зустрічалися б випадки, коли деталі не охоплювали б об’ємного ланцюга або, навпаки, при цьому залишалися б занадто великі зазори.

Рис. 2.3

В обох випадках виходив би явний брак. Боротися з цим браком по шляху зменшення «допусків», тобто шляхом зменшення допустимих відхилень фактичних розмірів деталі від заданих, було б недоцільно, оскільки порівняльне невелике збільшення точності обробки значно підвищує її вартість.

Приклад 3. Нехай у незмінних умовах проводяться n вимірювань деякої величини. Унаслідок цілого ряду обставин (положення приладу, спостерігача, коливання в стані повітря, наявності в ньому пилу і т.ін.) різні вимірювання ~ будуть давати, взагалі, різні результати. Оскільки мають місце випадкові помилки, вимірювань. Будемо означати результати вимірювань $x_1, x_2, \ldots x_n$, приписуючи кожному x як індекс - номер вимірювання. Середнє значення для всіх цих випадкових величин одне і те ж - $\overline{x}=x$. Середнє квадратичне відхилення q, очевидно, також природно припустити одним і тим же для всіх вимірювань, оскільки вони проводяться в незмінних умовах. Нарешті, ми вважаємо, як звичайно, величини $x_1, x_2, \ldots x_n$ взаємно незалежними.

Так, якщо середнє значення величини, що вимірюється дорівнює 200 м, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 5 м, то середнє арифметичне x 100 результатів вимірювань буде, звичайно, мати своїм середнім значенням те ж число 200 м. Але середнє квадратичне відхилення його буде за формулою (2.8) в $\sqrt{100}$ =10 раз менше ніж для окремого вимірювання, тобто буде становити всього 0,5 м. Таким чином, є основи чекати, що середнє арифметичне сотні фактичних результатів вимірювань буде значно ближче до середнього значення 200 м, ніж результат того або іншого окремого вимірювання. Середнє арифметичне великого числа взаємно незалежних величин має у багато разів менше розсіювання, ніж кожна з цих величин нарізно.

2.5. Нерівність Чєбишева

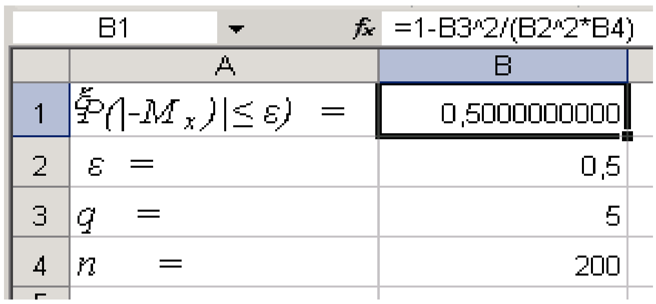
Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її середнього (математичного сподівання) по абсолютній величині менше позитивного числа ε, не менше ніж $1-\dfrac{D(X)}{e^2}$:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < e\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{e^2} \qquad (2.9)$$

де $D(X)$ – дисперсія дискретної випадкової величини.

Нехай ми маємо n взаємно незалежних випадкових величин $x_1, x_2, ..., x_n$, з одним і тим же середнім значенням а і одним і тим же середнім квадратичним відхиленням q; для середнього арифметичного цих величин $x = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, середнє значення дорівнює $M(X)$, а середнє квадратичне відхилення становить $\dfrac{q}{\sqrt{n}}$. Тому нерівність Чєбишева дає при будь-якому позитивному ε

$$P\left(\left|x - M(X)\right| \leq e\right) \geq 1 - \frac{q^2}{e^2 \cdot n}. \qquad (2.10)$$



Якщо випадкові величини x_1, x_2, ..., x_n взаємно незалежні, і якщо всі вони мають одне і те ж середнє значення $\bar{x}$, і одне і те ж середнє квадратичне відхилення q, то величина $x = \dfrac{x_1 + x_2 + \text{K} + x_n}{n}$ при досить великому n буде з імовірністю, наскільки бажано близької до одиниці (практично достовірно), як завгодно мало відрізнятися від ε.

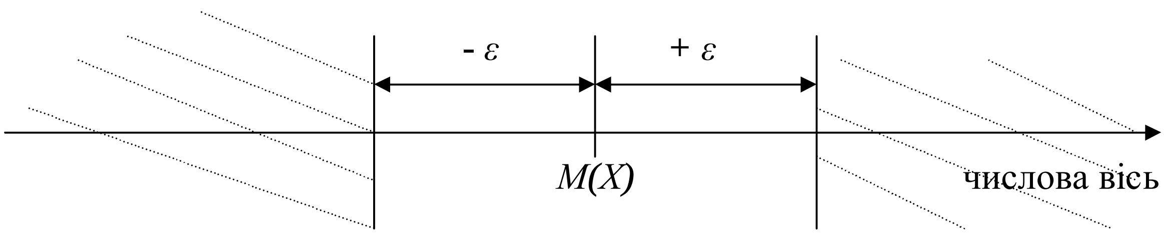


Рис. 2.4. Графічне пояснення дії формул (2.9)– заштрихована, та (2.10) – не заштрихована зона.

Приклади

Приклад 1. У прикладі 3 попереднього пункту ми розглядали таку задачу: середнє значення результатів вимірювань 200 м, середнє квадратичне відхилення - 5 м, при цих умовах імовірність фактично отримати відхилення більше 3 м дуже відчутна (можна думати, що вона більше половини; точне значення її може, звичайно, бути знайдене тільки тоді, коли повністю відомий закон розподілу результатів вимірювань). Але ми бачили, що для середнього арифметичного x сотні результатів вимірювань середнє квадратичне відхилення становить всього 0,5 м. Тому внаслідок нерівності (2.10) $P(|x-200|>3)\approx 0.0278$. Таким чином, для середнього арифметичного зі 100 вимірювань імовірність отримати відхилення точності виміру більше за 3 *м* вже дуже мала (насправді вона ще значно менше отриманої нами межі, так що практично можна зовсім не рахуватися з можливістю такого відхилення).

Приклад 2. У прикладі 1 попереднього параграфа для числа бракованих виробів при перевірці 60000 виробів ми набули середнього значення 2400 і середнє квадратичне відхилення 48. Для ймовірності того, що фактична кількість бракованих виробів буде лежати, наприклад, між 2300 і 2500, тобто $|M(X)-2400|\le 100$, нерівність Чєбишева дає

$$P(|\bar{x}-2400|\le 100)=1-P(|\bar{x}-2400|>100)\ge 1-\frac{48^2}{100^2}\approx 0,77.$$

Насправді ця ймовірність значно більше.

Приклад 3. Нехай, як ми мали раніше, q=5 м, M_x =200 м. Тоді ми отримуємо $P(|x-200|>\varepsilon)<\dfrac{25}{e^2 n}$. Можна вибрати ε дуже невеликим, наприклад, ε =0,5 м, тоді $P(|x-200|\le 0,5)\le\dfrac{100}{n}$. Якщо кількість вимірювань n дуже велика, то права частина цієї нерівності яка завгодно мала. Так, при n=10 000 вона рівна 0,01, і ми маємо для середнього арифметичного 10000 вимірювань $P(|x-200]>0,5)\le 0,01$. Якщо умовитися нехтувати можливістю таких малоймовірних подій, то можна сказати, що при 10000 вимірювань їх середнє арифметичне напевно буде відрізнятися від 200 м в ту або в іншу сторону не більш ніж на 50 см. Якби ми захотіли досягнути ще більшої точності, наприклад, 10 см, то треба було б покласти ε =0,1 м, і тоді $P(|x-200|>0,1)\le\dfrac{25}{0,01n}=\dfrac{2500}{n}$.

Щоб зробити менше за 0,01 праву частину цієї нерівності, ми повинні були б взяти число вимірювань рівним не 10000 (цього тепер недостатньо), а 250000. Очевидно, що взагалі наскільки б малою не було ε, можна зробити праву частину нерівності (2.10) наскільки завгодно малою. Для цього варто тільки взяти n досить великим.

Приклад 4. Точність зважування на терезах становить 50 г. Скільки треба зробити зважувань, щоб помилка вимірювань була не більшою за 25 г?

Вважаючи, що точність вимірювань – це q=50 , помилка вимірювань – ε=25, а ймовірність, яку можна вважати практично достовірною – p=0,05, то за формулою (2.10) маємо $0,05\le 50^2/(25^2 n)$, звідки $n\le 80$.

2.6. Індивідуальне завдання №2. „Дискретні випадкові величини”

З кожної групи задач студент вирішує одну, вибираючи її за останньою цифрою номеру залікової книжки. Числові дані задач вибираються з таблиць за номером по списку студентської групи.

I. Задачі на характеристики дискретної випадкової величини

0. На шляху руху автомобіля ***B*** світлофорів, кожен з яках дозволяє або забороняє рух автомобіля з імовірністю 0.5. Скласти ряд розподілу і побудувати функцію розподілу кількості світлофорів, які автомобіль минув без зупинки. Чому дорівнює математичне сподівання та дисперсія цієї випадкової величини?

1. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини *X*, яка може приймати лише два значення: x_1 з імовірністю ***0,1×B*** та x_2, $(x_1 < x_2)$, якщо *M(X)* = ***0,1×A***; *D(X)* = ***0,04×B***.

2. Технологічний процес є таким, що брак складає ***C%*** усіх виробів. Навмання взято ***A*** виробів. Знайти математичне сподівання та дисперсію кількості бракованих виробів.

3. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини ***X*** - числа появ події *A* в двох незалежних випробуваннях, якщо імовірність появ події у цих випробуваннях однакові і відомо, що M(X) = ***0,2×B***.

4. Монету кидають ***B*** разів. Скласти ряд розподілу і побудувати функцію розподілу відношення частоти появ герба до числа появ надпису.

5. У крамниці в упаковку кожного ***C*** товару вкладено призовий купон. Покупець придбав ***A*** одиниць товарів. Знайти закон розподілу кількості одержаних призових купонів, найвірогідніше число цих купонів та його імовірність.

6. Нехай X - кількість появ числа ***C*** при ***B*** киданнях грального кубика. Знайти закон розподілу величини X та її математичне сподівання.

7. . Серед ***B*** виробів є один бракований. Щоб його знайти, беруть навмання один виріб за іншим і кожен взятий виріб перевіряють. Побудувати ряд розподілу кількості перевірених виробів.

8. По мішені проведено 3 постріли. Імовірність влучення у мішень першого пострілу становить ***0,1×C***, другого - ***0,05×C***, а третього - ***0,15×C***. Знайти ряд розподілу кількості влучень при трьох пострілах.

9. На дискотеці було продано ***10×B*** лотерейних квитків. Розігрувалося два призи ціною у 20 і 50 грн. Студентка придбала один квиток. Побудувати закон розподілу можливого розміру виграшу.

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
A	17	11	13	13	14	17	17	17	17	10	11	17	14	12	14
B	7	8	9	8	6	7	8	7	7	8	8	9	7	9	8
C	3	2	2	3	4	3	5	5	2	4	5	2	4	3	4
№ п/п	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	13	14	15	13	10	10	18	12	10	11	18	13	17	13	11
B	7	9	7	7	8	9	9	6	8	9	7	8	9	8	8
C	4	3	3	2	4	4	5	5	4	3	4	3	3	4	2

II. Задачі на властивості середнього та дисперсії

Дано закони розподілу двох дискретних випадкових величин X та Y.

X	***A***	***B***	***C***
	D	***E***	***1-(D+E)***

Y	***F***	***G***	***H***
	I	***J***	***1-(I+J)***

Знайти:

0. Середнє випадкової величини X при умові що кожне її значення було помножено на N .

1. Середнє випадкової величини Y при умові що кожне її значення було поділене на N .

2. Дисперсію випадкової величини X при умові що кожне її значення було помножено на N .

3. Дисперсію випадкової величини Y при умові що кожне її значення було поділене на N

4. Середнє суми двох випадкових величин X+Y.

5. Середнє добутку двох випадкових величин X*Y.

6. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X при умові що кожне її значення було помножено на N .

7. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини Y при умові що кожне її значення було поділене на N

8. Середнє квадратичне відхилення суми випадкових величин X+Y.

9. Середнє квадратичне відхилення добутку випадкових величин X*Y

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
A	13	14	15	13	10	10	18	12	10	11	18	13	17	13	11
B	7	9	7	7	8	9	9	6	8	9	7	8	9	8	8
C	4	3	3	2	4	4	5	5	4	3	4	3	3	4	2
D	0,21	0,13	0,28	0,37	0,37	0,39	0,1	0,22	0,36	0,14	0,17	0,11	0,11	0,15	0,17
E	0,11	0,19	0,2	0,27	0,21	0,21	0,21	0,37	0,24	0,23	0,19	0,39	0,34	0,4	0,18
F	17	11	13	13	14	17	17	17	17	10	11	17	14	12	14
G	7	8	9	8	6	7	8	7	7	8	8	9	7	9	8
H	3	2	2	3	4	3	5	5	2	4	5	2	4	3	4
I	0,37	0,37	0,39	0,1	0,22	0,36	0,14	0,17	0,11	0,11	0,15	0,17	0,11	0,19	0,2
J	0,11	0,11	0,15	0,17	0,11	0,19	0,2	0,27	0,21	0,21	0,21	0,37	0,24	0,23	0,19
N	133	104	199	81	181	125	125	66	101	109	146	81	126	94	95
№ п/п	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	18	14	19	19	10	12	13	11	14	17	13	12	15	11	11
B	6	7	6	7	8	7	7	7	6	7	9	9	8	8	7
C	4	4	3	3	2	4	5	5	4	4	4	5	3	3	2
D	0,28	0,37	0,37	0,39	0,1	0,22	0,36	0,14	0,17	0,11	0,11	0,15	0,17	0,11	0,19
E	0,21	0,13	0,28	0,37	0,37	0,39	0,1	0,22	0,36	0,14	0,17	0,11	0,11	0,15	0,17
F	12	18	18	12	11	19	13	14	11	10	15	13	15	12	10
G	6	7	8	6	6	8	7	7	9	6	8	6	9	9	7
H	5	3	4	5	4	3	5	5	3	3	2	3	3	3	3
I	0,11	0,11	0,15	0,17	0,11	0,19	0,2	0,27	0,21	0,21	0,21	0,37	0,24	0,23	0,19
J	0,14	0,17	0,11	0,11	0,15	0,17	0,11	0,19	0,2	0,27	0,21	0,21	0,21	0,37	0,24
N	110	149	195	181	194	54	70	122	69	139	69	154	200	68	58

III. Задачі на визначення точності вимірювань та на нерівність Чєбишева

0. При масовому виробництві сірників відомо, що у партії з N^3 пачок знаходиться B бракованих. Знайти ймовірність того, що у партії з K^3 пачок кількість бракованих буде коливатися в межах $\pm\varepsilon$, відносно найбільш вірогіднішого значення.

1. Імовірність того, що в партії відеомагнітофонів кількістю K^2 штук, виявиться дефектних в межах $\pm\varepsilon$ відносно середнього, дорівнює N/100. Знайти величину ε при умові що, ймовірність того, що один відеомагнітофон виявиться дефектним дорівнює K/100

2. Точність вимірювання кількості пального у баку вантажної машини деяким приладом дорівнює K літрів. Вимірювання було проведено N разів. Знайти ймовірність

того, що погрішність середнього арифметичного від результатів вимірювання кількості пального буде не більше ніж 0,8К.

3. Скільки разів потрібно провести вимірювання маси вагона з цукром при довірчий імовірності N/100, якщо точність зважування на вагонних терезах складає K/1000, т., а середня маса вагону дорівнює 30+K/2, т.

4. При масовому виробництві відеокасет відомо, що у партії з N^3 упаковок знаходиться В бракованих. Знайти ймовірність того, що у партії з K^3 упаковок кількість бракованих буде коливатися в межах ±ε.

5. Точність вимірювання рівня води у резервуарі водосховища деяким приладом дорівнює K куболітрів. Вимірювання було проведено N разів. Знайти ймовірність того, що погрішність середнього арифметичного від результатів вимірювання рівня води буде не більше ніж 0,9К.

6. Скільки разів потрібно провести вимірювання маси вантажної машини з зерном при довірчий імовірності 0,9, якщо точність зважування на терезах складає N/100 кг., а середня маса вантажівки дорівнює 0,5·K, центнер.

7. Імовірність того, що в партії моніторів кількістю K штук, виявиться дефектних в межах ±ε відносно середнього, дорівнює N/100.Знайти величину ε при умові що, ймовірність того, що один монітор виявиться дефектним дорівнює K/100.

8. Точність вимірювання кількості зерна у зерносховищі деяким приладом дорівнює K центнер.. Вимірювання було проведено N разів. Знайти ймовірність того, що погрішність середнього арифметичного від результатів вимірювання кількості зерна буде не більше ніж 0,8К

9. При масовому виробництві посуду відомо, що у партії з N^2 штук знаходиться В бракованих. Знайти ймовірність того, що у партії з K^3 штук кількість бракованих буде коливатися в межах ±ε.

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
N	82	81	83	84	84	85	80	82	84	81	81	80	80	81	81
B	153	142	180	133	173	150	150	126	140	144	158	132	151	138	138
K	70	68	71	68	72	72	71	70	69	69	70	70	71	67	68
± ε	0,05	0,04	0,04	0,04	0,08	0,06	0,10	0,10	0,04	0,08	0,09	0,03	0,07	0,04	0,08
№ п/п	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
N	80	81	82	83	82	82	82	85	82	82	82	85	84	85	81
B	144	160	178	172	178	122	128	149	127	156	128	162	180	127	123
K	72	67	71	70	73	70	69	70	69	67	70	65	72	66	69
± ε	0,08	0,06	0,05	0,04	0,07	0,07	0,09	0,09	0,08	0,06	0,08	0,05	0,04	0,07	0,03

Контрольні запитання

1. Чим багатокутник розподілу відрізняється від закону розподілу?
2. Середнє випадкової величини та математичне сподівання випадкової величини це одне і те саме?
3. Яка розмірність у математичного стандарту?
4. Чи може дисперсія мати негативне значення?
5. Як зменшується помилка вимірювання при усередненні результатів багаторазових вимірювань?
6. Чи можна знайти ймовірність відхилення точного значення результатів вимірювань від справжнього значення на наперед задану величину?
7. Як змінюється дисперсія, якщо всі значення випадкової величини помножити на константу?

В розділі розглянуто порядок задавання дискретної випадкової величини, її числові характеристики та розрахунки точності багаторазових вимірювань. *с*

3. БЕЗПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

При вивченні цього розділу студент повинен знати порядок визначення числових характеристик безперервних випадкових величин та вміти користуватися їх теоретичними законами розподілу.

Безперервна випадкова величина має незліченну множину можливих значень, що суцільно заповнюють деякий проміжок. Скласти таблицю, в якій були б перераховані всі можливі значення такої випадкової величини, неможливо. Отже, для безперервної випадкової величини не існує закону розподілу в тому значенні, в якому він існує для дискретної величини. Однак різні області можливих значень випадкової величини все ж не є однаково ймовірними, і для безперервної величини існує «розподіл імовірностей», хоч і не в тому значенні, як для дискретної.

3.1. Функція розподілу

Для кількісної характеристики цього розподілу ймовірностей зручно скористатися не ймовірністю події $X = x$, а ймовірністю події $X < x$, де x - деяка поточна змінна, а X – якесь її конкретне значення. Імовірність цієї події, яка очевидно, залежить від x, є деяка функція від x. Ця функція називається **функцією розподілу** випадкової величини X і позначається $F(x)$:

$$F(x) = P(X<x). \tag{3.1}$$

Функцію розподілу $F(x)$ іноді називають також **інтегральною** функцією розподілу або інтегральним законом розподілу. Вона існує для всіх випадкових величин: як для дискретних, так і для безперервних. Функція розподілу повністю характеризує випадкову величину з точки зору ймовірності, тобто є однією з форм закону розподілу.

Загальні властивості функції розподілу

1. Функція розподілу $F(x)$ є неубуваюча функція свого аргументу, тобто при $x_2 > x_1$, $F(x_2)>F(x_1)$.
2. На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю: $F(-\infty)=0$
3. На плюс нескінченності функція розподілу дорівнює одиниці: $F(+\infty)=1$

Графік функції розподілу $F(x)$ в загальному випадку являє собою графік неубуваючої функції (рис. 3.1), значення якої починаються від 0 і доходять до 1, причому в окремих точках функція може мати стрибки (розриви). Знаючи закон розподілу дискретної випадкової величини, можна легко побудувати функцію розподілу цієї величини.

Дійсно,
$$F(x) = P(X<x) = \sum_{x_i<x} P(X=x_i) \tag{3.2}$$

Нерівність $x_i<x$ під знаком суми вказує, що додавання розповсюджується на всі ті значення x_i, які менше x. Коли поточна змінна x проходить через яке-

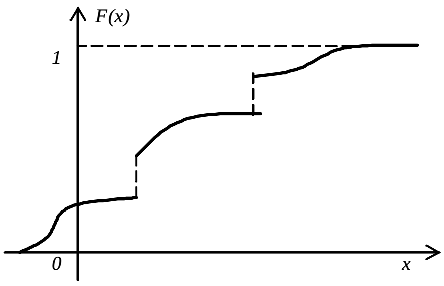


Рис. 3.1. Типовий графік функції розподілу

небудь з можливих значень дискретної величини *X*, функція розподілу міняється стрибкоподібно, причому величина стрибка дорівнює ймовірності цього значення.

Функція розподілу будь-якої дискретної випадкової величини завжди є розривна ступінчаста. У міру збільшення числа можливих значень випадкової величини (зменшення інтервалів між ними) число стрибків стає більше, а самі стрибки – менші. Крива стає більш плавною, випадкова величина наближається до безперервної випадкової величини, а її функція розподілу – до безперервної. У подальшому, ми умовимося називати «безперервними» тільки ті випадкові величини, функція розподілу яких скрізь безперервна.

<u>Приклад</u>

Випадкова величина *X* має закон розподілу

x_i	0	1	3	4	12
p_i	0,2401	0,4116	0,0756	0,0081	0,2646

Побудувати функцію розподілу випадкової величини X.

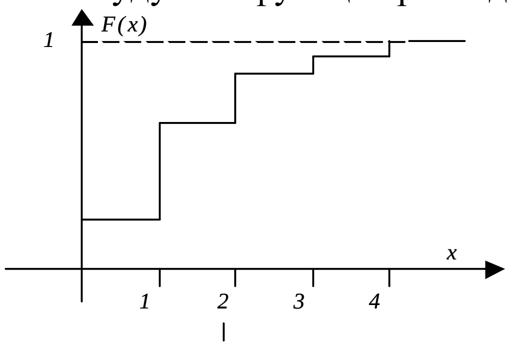


Рис. 3.2

Розв'язання :

1) при $x \le 0$, $F(x) = 0;$
2) при $0 < x \le 1$, $F(x) = 0{,}2401;$
3) при $1 < x \le 2$ $F(x) = 0{,}6517;$
4) при $2 < x \le 3$ $F(x) = 0{,}9163;$
5) при $3 < x \le 4$ $F(x) = 0{,}9919;$
6) при $x > 4$ $F(x) = 1.$

Результати розрахунку представлені на рис. 3.2.

3.2. Щільність розподілу

Нехай є безперервна випадкова величина *X* з функцією розподілу *F(x),* яку ми припустимо безперервною і такою, що диференціюється. Тоді перша похідна

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \tag{3.3}$$

буде називатися **щільністю розподілу** (інакше – «щільністю ймовірності») безперервної випадкової величини *X*. Іноді функцію *f(x)* називають також «диференціальною функцією розподілу» або «диференціальним законом розподілу» величини *X*. Типовий вигляд такої функції наведено на рис. 3.3.

Крива, що зображає щільність розподілу випадкової величини, називається **кривою розподілу** (рис. 3.3).

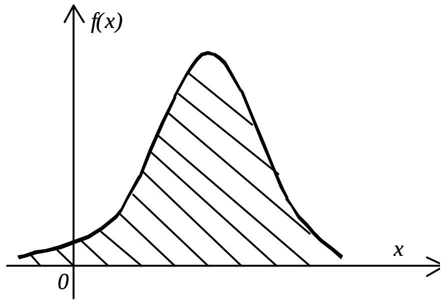


Рис. 3.3.. Щільність розподілу

Щільність розподілу, так само як і функція розподілу, є однією з форм закону розподілу. У протилежність функції розподілу ця форма не є універсальною: вона існує тільки для безперервних випадкових величин,

Виразимо функцію розподілу через щільність

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad . \qquad (3.4)$$

Геометрично $F(x)$ є не що інше, як площа кривої розподілу, що лежить лівіше точки x (рис. 3.4). Укажемо основні властивості щільності розподілу

1. Щільність розподілу є ненегативна функція: $f(x)\geq 0$
2. Інтеграл в нескінченних межах від щільності розподілу рівний одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad (3.5)$$

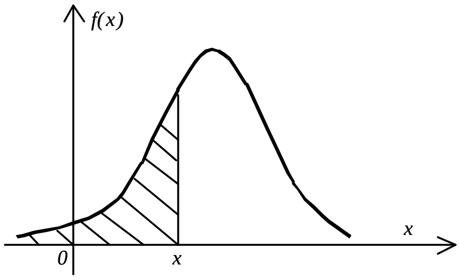


Рис. 3.4

Геометрично основні властивості щільності розподілу означають, що:

1) вся крива розподілу лежить не нижче за вісь абсцис;

2) повна площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці.

Розмірність основних характеристик випадкової величини: функція розподілу $F(x)$, як всяка ймовірність, є величина безрозмірна, щільність розподілу $f(x)$, зворотна розмірності випадкової величини.

<u>Приклади</u>

Приклад 1 Функція розподілу безперервної випадкової величини X задана виразом

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \leq 0 \\ ax^2, & при \quad 0 < x \leq 1 \\ 1, & при \quad x > 1 \end{cases}$$

а) знайти коефіцієнт a.

б) знайти щільність розподілу $f(x)$.

Розв'язання: а) оскільки функція розподілу величини X безперервна, то при $x=1$ $ax^2=1$, звідки $a=1$.

б) щільність розподілу величини X виражається формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \leq 0 \\ 2ax, & при \quad 0 < x \leq 1 \\ 0, & при \quad x > 1 \end{cases}$$

Приклад 2. Випадкова величина *X* підлягає закону розподілу зі щільністю:

$$f(x)=\begin{cases} aCos(x), & при \quad -p/2 \le x \le p/2; \\ 0, & при \quad x > p/2 \quad або \quad x < -p/2. \end{cases}$$

а) знайти коефіцієнт *а*.

б) побудувати графік щільності розподілу *f(x)*.

в) знайти функцію розподілу *F(x)* і побудувати її графік.

Розв'язання:

а) для визначення коефіцієнта *a* скористаємося властивістю щільності розподілу $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-p/2}^{p/2} aCos(x)\,dx = 2a = 1$, звідки $a = 0{,}5$.

б) графік щільності *f(x)* представлений на рис. 3.5.

в) за формулою (3.4) отримуємо вираз функції розподілу. Графік функції *F(x)* зображений на рис. 3.6.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x < -p/2 \\ \frac{1}{2}Sin(x), & при \quad -p/2 \le x \le p/2 \\ 1, & при \quad x > p/2 \end{cases}$$

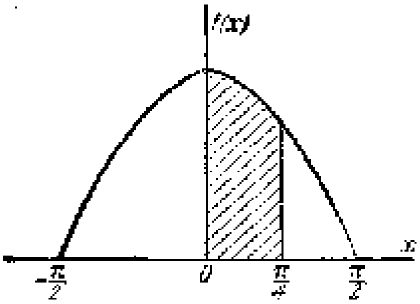


Рис. 3.5

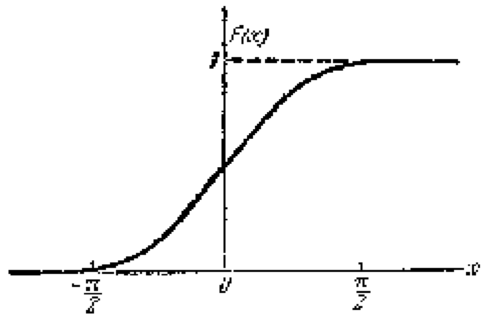


Рис. 3.6

3.3. Імовірність попадання випадкової величини на задану ділянку

При розв'язанні практичних задач, пов'язаних з випадковими величинами, часто виявляється необхідним обчислювати ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, укладене в деяких межах, наприклад від α до β.

Вона може бути знайдена за формулою

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (3.6)$$

Тобто ймовірність попадання випадкової величини на задану ділянку дорівнює приросту функції розподілу на цій ділянці. Будемо необмежено зменшувати ділянку (α, β), вважаючи, що $\beta \to \alpha$.. У граничному випадку замість імовірності попадання на ділянку отримаємо ймовірність того, що величина прийме окремо взяте значення α

$$P(X=\alpha) = 0. \qquad (3.7)$$

Імовірність будь-якого окремого значення безперервної випадкової величини дорівнює нулю. У даному курсі ми вже зустрічалися з подіями, імовірності яких були рівні нулю. Це були неможливі події. Такі події можливі, але з нульовою ймовірністю – з'являються тільки при розгляді дослідів, що не зводять-ся до схеми випадків.

Виразимо ймовірність попадання величини X на відрізок від α до β (рис.3.7) через щільність розподілу. Вона дорівнює сумі елементів імовірності на всій цій ділянці, тобто, інтегралу

$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_a^b f(x)dx \qquad (3.8)$$

Геометрично ймовірність попадання величини X на ділянку (α, β) дорів-нює площі кривої розподілу, що спирається на цю ділянку.

Приклад

За даними прикладів з попереднього параграфа визначити ймовірність попадання випадкової величини :

– для прикладу 1 - на ділянку від 0,25 до 0,5

$P(0{,}25 \le X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1875.$

– для прикладу 2 - на ділянку від 0 до $\pi/4$

$P(0 \le X < \pi/4) = F(\pi/4) - F(0) = (Sin(\pi/4)+1)/2 - (Sin(0)+1)/2 =$
$= 0{,}354$

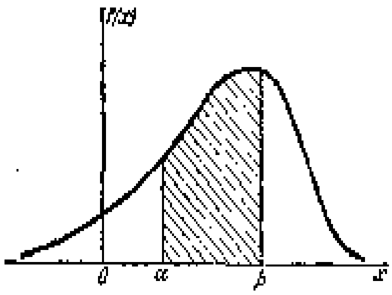
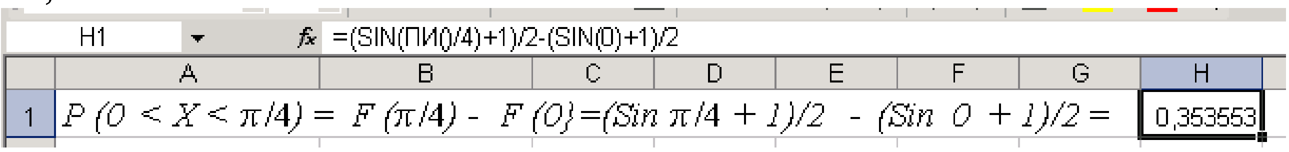


Рис. 3.7



3.4. Числові характеристики безперервних випадкових величин

Як і для дискретної випадкової величини, ці характеристики ті самі, але в формулах сума замінена інтегралом, а замість імовірності стоїть функція щіль-ності розподілу

– початкові моменти
$$a_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^S f(x)dx; \qquad (3.9)$$

– центральні моменти
$$m_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_1)^S f(x)dx. \qquad (3.10)$$

Тут, як і для дискретних випадкових величин перший початковий момент – це математичне сподівання, а другий центральний – дисперсія.

Властивості цих моментів ті самі, що і для дискретних величин.

Якщо величина X належить до величин змішаного типу, то її математичне сподівання виражається формулою вигляду

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (3.11)$$

де сума розповсюджується на всі точки x_i, в яких функція розподілу терпить розрив, а інтеграл - на всі дільниці, на яких функція розподілу безперервна.

Модою випадкової величини називається її найбільш вірогідне значення. Термін «найбільш вірогідне значення» частіше застосовується тільки до дискретних величин;. для безперервної, величини модою є те значення в якому щільність імовірності максимальна. Позначимо її літерою *M*.

На рис. 3.8 і 3.9 показана мода відповідно для дискретної і безперервної випадкових величин. Якщо багатокутник розподілу (крива розподілу) має більше за один максимум, розподіл називається «полімодальним» (Рис. 3.10). Іноді зустрічаються розподіли, що мають посередині не максимум, а мінімумом (рис. 3.11). Такі розподіли називаються «антимодальними. У загальному випадку мода і математичне сподівання випадкової величини не співпадають.

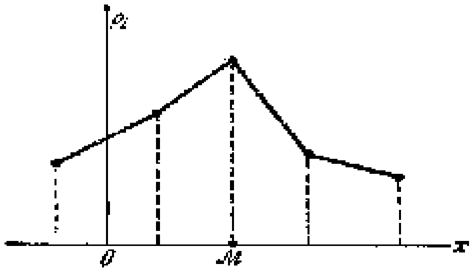


Рис. 3.8

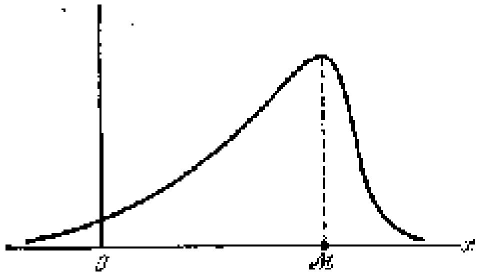


Рис. 3.9

У окремому випадку, коли розподіл є симетричним і модальним (тобто має моду) і існує математичне сподівання, то воно співпадає з модою і центром симетрії розподілу.

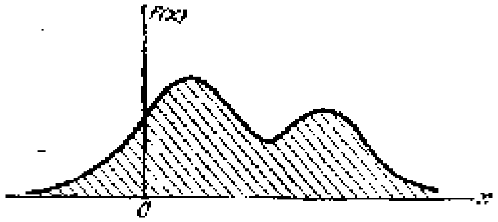


Рис. 3.10

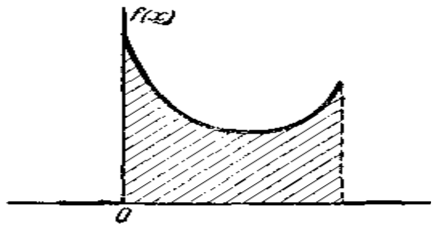


Рис. 3.11

Часто застосовується ще одна характеристика положення - так звана *медіана* випадкової величини. Цією характеристикою користуються звичайно тільки для безперервних випадкових величин, хоч формально можна її визначити і для дискретної величини. Медіаною випадкової величини X називається таке її значення M_e, для якого $P(X < M_e) = P(X > M_e)$ тобто однаково вірогідне, чи виявиться випадкова величина менше або більше M_e. $\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx$ Геометрично медіана - це абсциса точки, в якій площа, обмежена кривою розподілу, ділиться навпіл (рис. 3.12). У разі симетричного модального розподілу медіана співпадає з математичним сподіванням і модою.

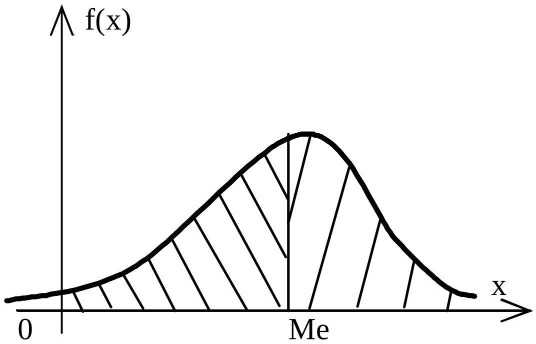


Рис. 3.12. Медіана

Для характеристики асиметрії розподілу вибрано третій центральний момент. Він має розмірність куба випадкової величини. Щоб отримати безрозмірну характеристику, третій момент, ділять на куб середнього квадратичного відхилення. Отримана величина носить назву

«коефіцієнта асиметрії»

$$S_k = \mu_3/\sigma^3 \quad . \qquad (3.12)$$

Або просто «асиметрії».

На рис. 3.13 показано два асиметричних розподіли. Одне з них (крива 1) має позитивну асиметрію (S_k >0). Інший – (крива II) негативну.

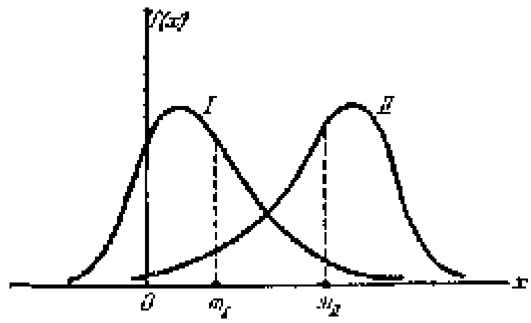


Рис. 3.13. Асиметрія щільності розподілу

Четвертий центральний момент служить для характеристики так званої «крутості», тобто гостровершинності або плосковершинності розподілу. Ці властивості розподілу описуються за допомогою так званого ексцесу.

. Ексцесом випадкової величини X називається величина

$$E_X = {}^{m_4}\!/_{s^4} - 3. \qquad (3.13)$$

Число 3 віднімається з відношення μ_4/σ^4 тому, що для вельми важливого і широко поширеного в природі нормального закону розподілу (з яким ми детально познайомимося далі) $\mu_4/\sigma^4 = 3$. Таким чином, для нормального розподілу ексцес рівний нулю; криві, більші за гостровершинні в порівнянні з нормальною, володіють позитивним ексцесом; криві більші за плосковершинні - негативним ексцесом. На рис. 3.14 представлені: нормальний розподіл (крива I), розподіл з позитивним ексцесом (крива II) і розподіл з негативним ексцесом (крива III).

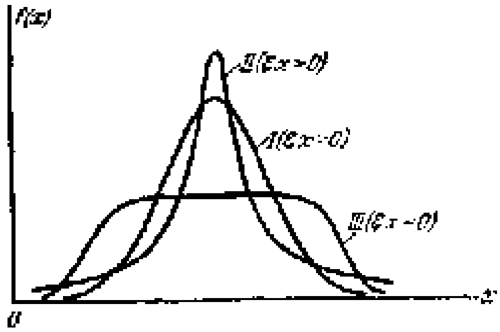


Рис. 3.14. Ілюстрація поняття „ексцес”

<u>Приклад</u>

Щільність розподілу випадкової величини наступна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < -2 \\ a(x+2), & при \quad -2 \le x < 4 \\ 0, & при \quad x \ge 4 \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію, асиметрію та ексцес.

Спочатку знайдемо значення коефіцієнта a. Згідно (3.5) можемо скласти рівняння, з урахуванням того, що щільність розподілу має ненульове значення тільки в діапазоні [-2; 4] $\int_{-2}^{4} a(x+2)dx = 1$.

Звідки $\int_{-2}^{4} a(x+2)dx = a\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{4} + 2ax\left.\right|_{-2}^{4} = a\left(\frac{16-4}{2} + 2(4+2)\right) = 1$.

Тоді a = 1/18 = 0,055556.

Тепер, за формулою (3.4) функція розподілу матиме вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<-2\\ 0{,}055556\cdot\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right), & при \quad -2\le x<4\\ 1, & при \quad x\ge 4\end{cases}$$

Знайдемо початкові моменти перших чотирьох порядків за формулою (3.9)

$$a_1=\int_{-2}^{4}x\cdot 0{,}055556\,(x+2)dx=0{,}055556\,\left(\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{4}=1{,}847237$$

$$a_2=\int_{-2}^{4}x^2\cdot 0{,}055556\,(x+2)dx=0{,}055556\,\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{4}=10{,}95842$$

$$a_3=\int_{-2}^{4}x^3\cdot 0{,}055556\,(x+2)dx=0{,}055556\,\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^4}{4}\right)\Big|_{-2}^{4}=18{,}000144$$

$$a_4=\int_{-2}^{4}x^4\cdot 0{,}055556\,(x+2)dx=0{,}055556\,\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2x^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{4}=61{,}244934$$

B6 fx =0,055556*(($D$2^($B$2+4)/($B$2+4)+2*$D$2^($B$2+3)/($B$2+3))-$D$2^($F$2+4)/($B$2+4)+2*$F$2^($B$2+3)/($B$2+3)))

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Степінь X	2	Xmax=	4	Xmin=	-2
3	α_1=	1,8472370000				
4	α_2=	10,9584210000				
5	α_3=	18,0001440000				
6	α_4=	61,2449344000				

Знайдемо центральні моменти перших чотирьох порядків, враховуючи формулу (3.10)

μ_2= 10,95842-1,84723^2 = 7,5461364658.

μ_3= 18,0001 – 3·1,84723·10,95842 + 2·1,84723^3 = -15,6608884,

μ_4= 360,7432075.

$$s=\sqrt{7{,}5461364658}=2{,}747023$$

Асиметрія S_k=-15,6608884/2,747023^3= -0,755491204.

Ексцес E_x=360,7432075/2,747023^4 – –3 = 3,335033.

D5 fx =B6-4*B3^2*B5+3*B4*B5-4*B3^4

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Степінь X	2	Xmax=	4	Xmin=	-2
3	α_1=	1,8472370000	μ_2 =	7,5461364658	σ=	2,747023
4	α_2=	10,9584210000	μ_3 =	-15,6608884	S_k=	-0,75549
5	α_3=	18,0001440000	μ_4 =	360,7432075	E_x=	3,335033
6	α_4=	61,2449344000				

3.5. Закон рівномірної щільності

У деяких задачах практики зустрічаються безперервні випадкові величини, про які заздалегідь відомо, що їх можливі значення лежать в межах деякого певного інтервалу. Крім того, відомо, що в межах цього інтервалу всі значення випадкової величини однаково вірогідні (точніше, мають одну і ту ж щільність імовірності). Про такі випадкові величини кажуть, що вони розподіляються згідно із законом рівномірної щільності.

Розглянемо випадкову величину *X*, підлеглу закону рівномірної щільності на ділянці від α до β (рис. 3.15), і напишемо для неї вираз щільності розподілу *f(x)*. Щільність *f(x)* постійна і дорівнює *c* на відрізку (α, β); поза цим відрізком вона обертається в нуль:

$$f(x) = c, \quad \text{при } a \le x \le b \;;$$

$$f(x) = 0 \quad \text{при } x < \alpha \text{ або } x > \beta.$$

Оскільки площа, обмежена кривою розподілу, дорівнює одиниці, то $c(\beta - \alpha) = 1$ і $c = 1/(\beta - \alpha)$ і щільність розподілу *f(x)* має вигляд

$$f(x) = 1/(\beta - \alpha), \quad \text{при } a \le x \le b \tag{3.14}$$

$$f(x) = 0 \quad \text{при } x < \alpha \text{ або } x > \beta$$

Ця формула і виражає закон рівномірної щільності на ділянці (α; β).

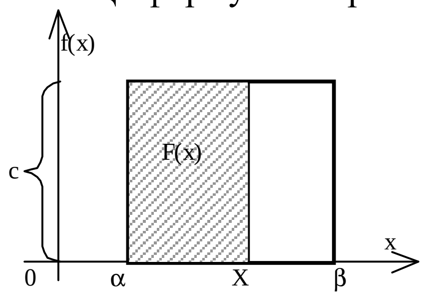


Рис. 3.15

Функція розподілу *F(x)* виражається площею кривої розподілу, що лежить лівіше точки *x*. Отже,

$$F(x) = 0, \quad \text{при } x < \alpha;$$

$$F(x) = (x - \alpha)/(\beta - \alpha), \text{ при } a \le x \le b \;; \tag{3.15}$$

$$F(x) = 1 \quad \text{при } x > \beta;$$

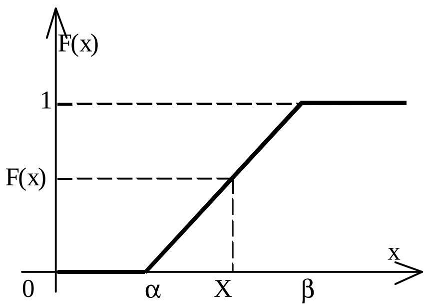


Рис. 3.16

Графік функції *F(x)* приведений на рис. 3.16. Математичне сподівання величини *X* є

$$m_x = \int_a^b \frac{x}{b - a}\, dx = \frac{(a + b)}{2} \tag{3.16}$$

Внаслідок симетричності рівномірного розподілу медіана величини X також дорівнює $M_e = (\alpha + \beta)/2$. Моди закон рівномірної щільності не має.

Дисперсія величини *X*, розподіленої за рівномірним законом

$$D_x = a_2 = \frac{1}{b - a}\int_a^b \left(x - \frac{a + b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b - a)^2}{12} \tag{3.17}$$

Середнє квадратичне відхилення – $s_x = \sqrt{D_x} = \dfrac{b - a}{\sqrt{12}}$. (3.18)

У наслідок симетричності розподілу його асиметрія дорівнює нулю.

Ексцес дорівнює $E_X = {}^{m_4}\!\big/_{s^4} - 3 = -1{,}2$. (3.19)

Імовірність попадання випадкової величини *X*, розподіленої згідно із законом рівномірної щільності, на ділянку (*a*; *b*), що являє собою частину ділянки (α; β) (рис. 3.17). Геометрично ця ймовірність є площа, заштрихована на рис. 3.17. Вона дорівнює $P(a < x < b) = \dfrac{b - a}{b - a}$, тобто. є відношенням довжини ділянки (*a*; *b*) до всієї довжини ділянки (α; β), на якій задано рівномірний розподіл.

B1 fx =(B3-B2)/(D2-D1)

	A	B	C	D
1	$P(a< x< b)=$	0,1	$\alpha=$	0
2	$a=$	1	$\beta=$	10
3	$b=$	2		

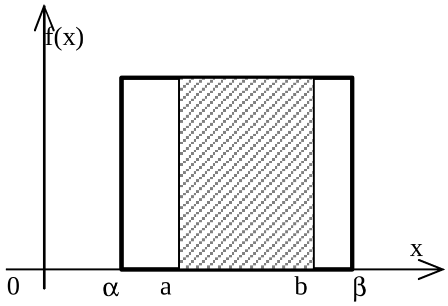


Рис. 3.17. Імовірність попадання на інтервал

<u>Приклади</u>

Приклад 1. Зроблено зважування тіла на точних терезах, але в розпорядженні того, що зважує, є тільки гирі вагою не менше за 1 г; результат зважування показує, що вага тіла укладена між k і $(k+1)$ грамами. Вага тіла прийнята рівною $(k+1)$ грамам. Допущена при цьому помилка X, очевидно, є випадкова величина, розподілена з рівномірною щільністю на ділянці (-0,5; 0,5) г.

Приклад 2. Поїзди метрополітену йдуть з інтервалом 2 хв. Пасажир виходить на платформу в деякий момент часу. Час T, протягом якого йому доведеться чекати поїзда, являє собою випадкову величину, розподілену з рівномірною щільністю на ділянці $(0;\ 2)$ хвилин.

3.6. Експоненціальний закон

Він характеризується щільністю розподілу вигляду

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ l\cdot e^{-lx}, & при \quad x\ge 0\end{cases} \qquad (3.20)$$

Функція розподілу буде знайдена як інтеграл від щільності розподілу, який для першої ділянки дорівнює нулю, а для другої буде знайдений, як

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \int\limits_0^x l\cdot e^{-lx}dx=1-e^{-lx}, & при \quad x\ge 0\end{cases} \qquad (3.21)$$

Експоненціальний закон часто зустрічається в теорії надійності та теорії масового обслуговування, які будуть розглядатися далі.

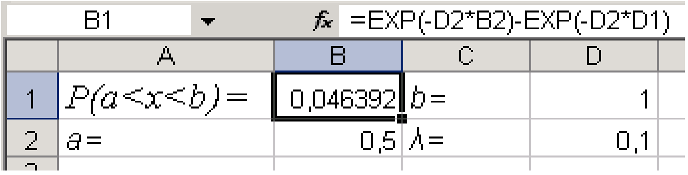
Математичне сподівання дорівнює $\boldsymbol{M(x)}=\int\limits_0^\infty lxe^{-lx}dx=\frac{1}{l}$; (3.22)

Дисперсія $\boldsymbol{D_x}=\int\limits_0^\infty (x-\frac{1}{l})^2\, l\, e^{-lx}dx=\frac{1}{l^2}$; (3.23)

Мода завжди дорівнює нулю, а медіана $M_e=-\ln 0.5/\lambda\approx 0.69/\lambda$ (3.24)

Імовірність попадання в інтервал $[a;\ b]$

$$P(a<x<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$



B1 | f_x =EXP(-D2*B2)-EXP(-D2*D1)

	A	B	C	D
1	P(a<x<b)=	0,046392	b=	1
2	a=	0,5	λ=	0,1

Приклади

Приклад 1. Для визначення графічного вигляду щільності розподілу випадкової величини, яка підлегла експоненціальному закону, задамо значення $\boldsymbol{\lambda=0,5}$, а $\boldsymbol{x}$ в діапазоні 0….10.

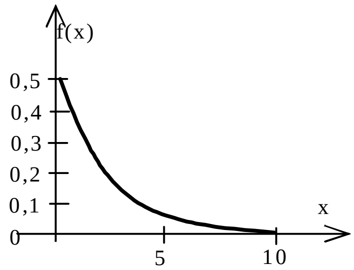


Рис. 3.18

Очевидно, що при $\boldsymbol{x<0}$ ця функція не існує.

Графік цього закону наведений на рис. 3.18. З нього ми бачимо, що при $x=0$, $f(x)=\lambda$, а далі плавно спадає до нуля. Знайдемо числові характеристики для наведеного вище прикладу.

Тут, $M(X)=\dfrac{1}{0,5}=2$, а $D(X)=\dfrac{1}{0,5^2}=4$

Приклад 2. Безперервна випадкова величина X підлегла закону розподілу зі щільністю (рис. 3.19): $f(x)=Ae^{-|x|}$. Знайти коефіцієнт A. Визначити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення. асиметрію, ексцес.

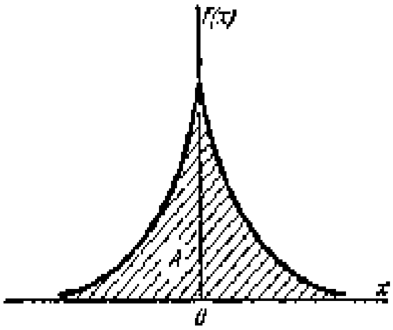


Рис. 3.19

Розв'язання. Для визначення A скористаємося властивістю щільності розподілу:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-|x|}dx=2A\int_0^{\infty} e^{-|x|}dx=2A\int_0^{\infty} e^{-x}dx=2A,$$

звідки $A=0,5$.

Математичне сподівання дорівнює нулю $m_x=\int_{-\infty}^{\infty} 0,5xe^{-|x|}dx=0$.

Тоді дисперсія дорівнює другому початковому моменту

$$D_x=a_2=\int_{-\infty}^{\infty} 0,5x^2e^{-|x|}dx=2\cdot 0,5\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx=2 \qquad s_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{2}.$$

Оскільки розподіл симетричний, то $S_k=0$. Для обчислення ексцесу знаходимо $m_4=2\int_0^{\infty} 0,5x^4e^{-x}dx=24$, звідки $E_x=\dfrac{m_4}{s^4}-3=3.$

Приклад 3. Середні двох випадкових величин дорівнюють, відповідно 1 та 3 а дисперсії – 2 та 9. Яка х них розподілена за експоненціальним законом?

Друга, тому що за властивостями цього закону $m_x=\dfrac{1}{l}=3$, звідки $l=\dfrac{1}{3}3.$

Тоді $D_x=\dfrac{1}{l^2}=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=9$

3.7. Закон Пуассона

Закон Пуассона фігурує ще під назвою «закону рідких явищ». Це тому, що коли розглядати випадкову величину X, яка розподілена згідно з біноміальним законом (законом Бернуллі) $P_n = C_n^m p^n (1\text{-}p)^{n\text{-}m}$, то при умові, що $np = a$ і при $p \to 0$, величина a залишається постійною (отже, $n=a/p \to \infty$), то. лімітом цього розподілу буде розподіл Пуассона.

Якщо потрібно знайти ймовірність P_m того, що на відрізок осі абсцис довжини l попаде саме m точок, то застосовується саме цей закон, імовірність такого випадку дорівнює, тоді

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \qquad (3.25)$$

де, a - константа.

D1	fx =ПУАССОН(B2;B1;ЛОЖЬ)			
	A	B	C	D
1	$a=$	50	$P_m =$	0,0215
2	$m=$	40		

Розподіл дискретної випадкової величини X, що описується формулою (58), і називається розподілом Пуассона. Цей розподіл залежить від одного параметра a. На рис. 3.20 показаний вигляд розподілу Пуассона при різних a.

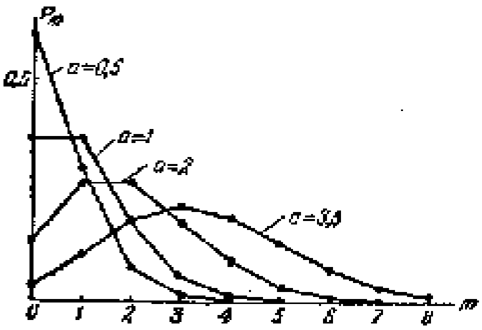


Рис. 3.20. Закон Пуасона для різних значень a

Математичне сподівання для цього закону

$$m_x = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a} = a \qquad (3.26)$$

Дисперсія $$Dx = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{a^m}{m!} e^{-a} - a^2 = a. \qquad (3.27)$$

Ми бачимо, що дисперсія випадкової величини, розподіленої згідно із законом Пуассона, дорівнює її математичному сподіванню і є константою для цього закону розподілу. Отже якщо з досліду статистичні характеристики математичне сподівання і дисперсія близькі за значенням, це може служити доказом на користь правдоподібності гіпотези, що ця випадкова величина розподілена згідно закону Пуассона..

На основі формули (3.25), що характеризує закон розподілу кількості точок, що попадають на ділянку l, легко знайти ймовірність того, що на цю ділянку попаде хоч би одна точка. позначимо цю ймовірність як R_1. Маємо

$$R_1 = 1 - P_m = 1 - e^{-a}. \qquad (3.28)$$

Приклади

Приклад 1. Середні двох випадкових величин дорівнюють, відповідно, 1 та 9, а середні квадратичні відхилення – 2 та 3. Яка з них розподілена за законом Пуассона?

Друга, тому що $3^2=9$, що відповідає властивостям цього закону.

Приклад 2. Автоматична телефонна станція отримує в середньому за годину K викликів від клієнтів. Яка ймовірність того, що за дану хвилину вона отримає точно k викликів?

Оскільки викликання незалежні одне від одного і розподілені рівномірно по осі t, кількість викликань за проміжок часу Δt=1 хвилин розподіляється згідно із законом Пуассона. Математичне сподівання кількості викликань за хвилину є: $a=K/60$, звідки ймовірність якраз m викликань за хвилину за формулою (3.25) є:

$$P_m = (К/60)^m/m! \quad e^{-К/60}.$$

Приклад 3. На виробництві виготовляється K деталей в одиницю часу. Яка ймовірність того, що за проміжок часу T буде виготовлено k деталей?

Число деталей, випущених з заводу, розподіляється згідно із законом Пуассона $$P_m = (КТ)^m/k! \quad e^{-КТ}.$$

Приклад 4. На протязі робочого дня банк відвідають N клієнтів. Знайти ймовірність того, що на протязі півгодини банк відвідають n клієнтів.

Оскільки робочий день 8 годин, то $a=N/16$. Тоді шукана ймовірність буде

$$P_m = (N/16)^n/n! \quad e^{--N/16}.$$

3.8. Нормальний закон і його параметри

Нормальний закон розподілу (часто званий законом Гауса) відіграє виключно важливу роль в теорії ймовірностей і займає серед інших законів розподілу особливе положення. Цей закон розподілу – найчастіше зустрічається на практиці. Головна особливість, що виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу при типових умовах, що дуже часто зустрічаються. Це положення називається *центральною граничною теоремою*.

У багатьох задачах теорії ймовірностей, що виникають при дослідженні ефективності фінансової діяльності, нормальний закон має особливе значення, оскільки згідно з цим законом розподілені точки фінансових результатів діяльності конкретних фірм. Це пояснюється тим, що відхилення точки, що відповідає конкретному фінансовому результату від середнього значення ефективності підприємства викликано спільною дією великої кількості порівняно дрібних, незалежних одне від одного чинників і може бути представлено як сума елементарних відхилень, кожне з яких викликане дією тільки однієї з цих причин.

Центральна гранична теорема доводить, що сума досить великого числа незалежних (або слабо залежних) випадкових величин, що підлягають яким бажано законам розподілу (при дотриманні деяких дуже нежорстких обмежень), приблизно підкоряється нормальному закону, і це виконується тим точніше, чим більша кількість випадкових величин, які додаються. Більшість випадкових величин, що зустрічаються на практикові, таких, наприклад, як помилки вимірювань, помилки зважувань і т. д., можуть бути представлені як суми великої кількості порівняно малих складових – елементарних помилок, кожна з яких викликана дією окремої причини, що не залежить від інших.

Нормальний закон розподілу характеризується щільністю розподілу ймовірності вигляду

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2s^2}} \qquad (3.29)$$

Крива розподілу згідно з нормальним законом має симетричний горбоподібний вигляд (рис. 3.21). Максимальна ордината кривої дорівнює $\frac{1}{s\sqrt{2p}}$ і відповідає точці $x = m_x$; у міру віддалення від точки m_x щільність розподілу падає, і при $x \to \pm\infty$, крива наближається до осі абсцис як асимптота.

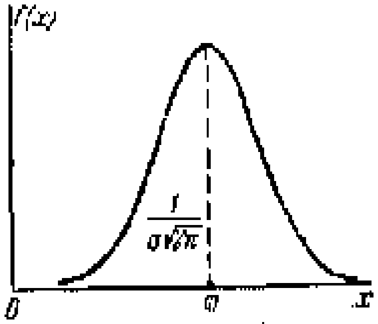


Рис. 3.21

Математичне сподівання

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2s^2}} dx = m_x, \qquad (3.30)$$

тобто параметр m_x являє собою математичне сподівання величини X. Цей параметр часто називають центром розсіювання (або ц.р.).

Дисперсія $$D(X) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2s^2}} dx = s^2 \qquad (3.31)$$

Отже, параметр σ в формулі (3.29) є не що інше, як середнє квадратичне відхилення величини X. З'ясуємо значення параметрів m_x і σ нормального розподілу. З формули (3.29) видно, що центром симетрії розподілу є центр розсіювання m_x. Якщо змінювати центр розсіювання m_x, крива розподілу буде зміщатися вздовж осі абсцис, не змінюючи своєї форми (рис. 3.22). Розмірність центра розсіювання та ж сама, що і розмірність випадкової величини X.

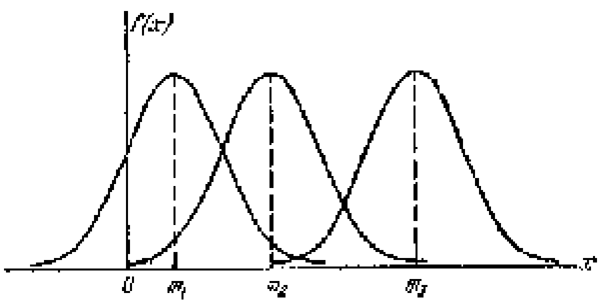


Рис. 3.22

Параметр σ характеризує не положення, а саму форму кривої розподілу. Найбільша ордината кривої розподілу зворотно пропорційна σ; при збільшенні σ максимальна ордината меншає. Оскільки площа під кривою розподілу завжди дорівнює одиниці, то при збільшенні σ крива розподілу стає більш плоскою, розтягуючись вздовж осі абсцис. Навпаки, при зменшенні σ крива розподілу витягується вгору, одночасно стискуючись з боків, і стає більш голкоподібною.

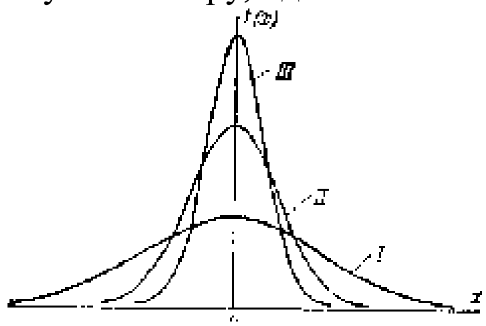


Рис. 3.23

На рис. 3.23 показані три нормальні криві (I, II, III) при $m_x = 0$. З них крива / відповідає самому великому, а крива /// самому малому значенню σ. Зміна параметра σ рівносильне зміні масштабу кривої розподілу – збільшенню масштабу по одній осі і такому ж зменшенню по іншій.

Розмірність параметра σ, природно, співпадає з розмірністю випадкової величини X. У деяких курсах теорії ймовірностей як характеристика розсіювання для нормального закону замість середнього квадратичного відхилення застосовується так звана міра точності. **Мірою точності** називається величина, зворотно пропорційна середньому квадратичному відхиленню σ

$h = \dfrac{1}{s\sqrt{2}}$. Розмірність міри точності зворотна розмірності випадкової величини. Термін «міра точності» запозичений з теорії помилок вимірювань: чим точніше вимірювання, тим більше міра точності. Користуючись мірою точності ***h***, можна записати нормальний закон у вигляді

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{p}} e^{-h^2 (x - m_x)^2} \tag{3.32}$$

Центральні моменти будь-якого порядку розраховуються як

$$m_S(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_1)^S f(x)dx = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^S e^{-\frac{(x - m_{x1})^2}{s^2}} dx, \tag{3.33}$$

але можуть бути знайдені за такою рекурентною формулою що, дозволяє виражати моменти вищих порядків через моменти нижчих порядків

$$m_S(X) = (S - 2)s^2 m_{S-2}(X). \tag{3.34}$$

Користуючись цією формулою і маючи на увазі, що μ_0=1 і μ_1 = 0, можна обчислити центральні моменти всіх порядків. Оскільки μ_1 = 0, то з формули (3.33) випливає, що всі непарні моменти нормального розподілу рівні нулю. Для парних ***S*** з формули (3.33) витікають такі вирази для послідовних моментів

$$m_S(X) = (S - 1)!!s^S, \tag{3.35}$$

де під символом ***(S-1)!!*** розуміється здобуток всіх непарних чисел від 1 до (***S***-1***).*** Асиметрія та ексцес дорівнюють нулю.

Імовірність попадання на ділянку від ***α*** до ***β*** випадкової величини ***X***,

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_a^b e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2s^2}} dx \tag{3.36}$$

Як відомо, невизначений інтеграл $\int e^{-t^2} dt$ не виражається через елементарні функції; тому для обчислення інтеграла (3.36) користуються таблицями спеціальної функції, так званої **функції Лапласа** або інтеграла ймовірностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{3.37}$$

Фрагмент таблиці значень функції *Φ(a)* виду (3.37) для квантиля $z = \dfrac{b - m}{s}$

z	*Φ(z)*	*z*	*Φ(z)*	*z*	*Φ(z)*	*z*	*Φ(z)*	*z*	*Φ(z)*
0	0	0,1	0,08	0,2	0,159	0,3	0,236	0,4	0,311
0,5	0,383	0,6	0,451	0,7	0,516	0,8	0,576	0,9	0,632
1,0	0,683	1,1	0,729	1,2	0,770	1,3	0,806	1,4	0,838
1,5	0,866	1,6	0,890	1,7	0,911	1,8	0,928	1,9	0,943
2,0	0,955	2,5	0,988	3,0	0,997	4,0	0,9999	5,0	≈1

Аргумент цієї функції називається ще “квантилем розподілу” і може мати різний вигляд, як показано в наступній таблиці. Залежно від квантилю та від форми функції Лапласа ймовірність попадання в інтервал може бути знайдена за наступною таблицею, яку позначимо як формулу (3.38):

Таблиця для визначення ймовірності попадання випадкової величини в інтервал *[α ; β]*

Квантиль функції Лапласа, z	Імовірність попадання в інтервал ***P(α< x< β)*** для функції Лапласа вигляду	
	$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{p}}\int_0^x e^{-t^2}dt$	$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{p}}\int_0^x e^{-t^2}dt$
$\frac{x-m}{s\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\left[\Phi(\frac{b-m}{s\sqrt{2}})-\Phi(\frac{a-m}{s\sqrt{2}})\right]$	$\left[\Phi(\frac{b-m}{s\sqrt{2}})-\Phi(\frac{a-m}{s\sqrt{2}})\right]$
$\frac{x-m}{s}$	$\frac{1}{2}\left[\Phi(\frac{b-m}{s})-\Phi(\frac{a-m}{s})\right]$	$\left[\Phi(\frac{b-m}{s})-\Phi(\frac{a-m}{s})\right]$

Функція розподілу для нормального закону визначається як (3.39)

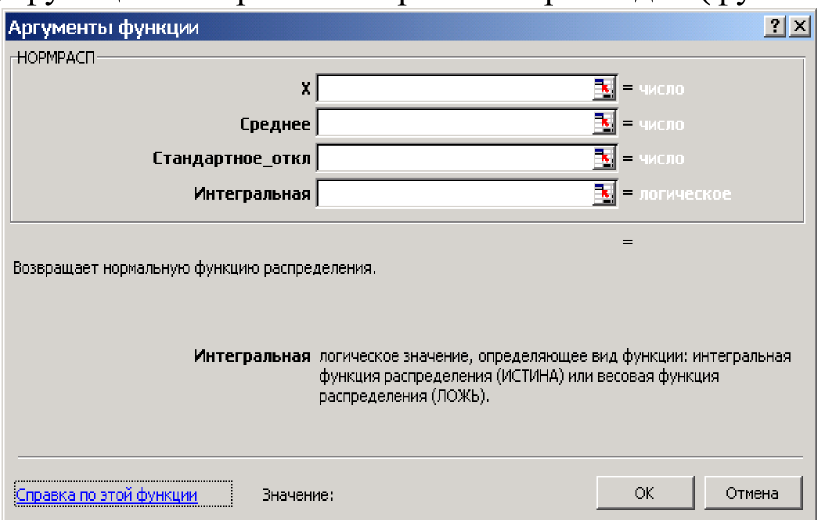
Квантиль функції Лапласа, z	Функція розподілу ***F(x)= P(X< x)= P(-∞< X< x)*** для функції Лапласа вигляду	
	$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{p}}\int_0^x e^{-t^2}dt$	$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{p}}\int_0^x e^{-t^2}dt$
$\frac{x-m}{s\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\left[\Phi(\frac{m-x}{s\sqrt{2}})+1\right]$	$\left[\Phi(\frac{m-x}{s\sqrt{2}})+0.5\right]$
$\frac{x-m}{s}$	$\frac{1}{2}\left[\Phi(\frac{m-x}{s})+1\right]$	$\left[\Phi(\frac{m-x}{s})+0.5\right]$

Тому, перед використанням таблиці значень функції Лапласа, належить точно визначити тип цієї таблиці, щоб застосувати потрібну формулу.

Чисельні значення з таблиці можна отримати за допомогою функції Excel, яка має вигляд

НОРМРАСП(значення *x*;середнє; математичний стандарт; Id)

Якщо параметр Id=ИСТИНА, функція повертає інтегральний розподіл (функцію розподілу) , якщо Id=ЛОЖЬ – диференціальний (щільність). Для такої функції не треба аналізувати тип кванти ля **z**.



Функція Лапласа має наступні очевидні властивості:

1. ***Ф*** (0) = 0.
2. ***Ф*** (∞) = 1.
3. Функція Лапласа є непарна функція *x*:

Ф(- x) = - Ф(x).

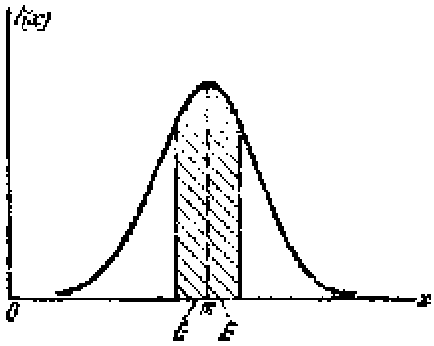


Рис. 3.24

Інколи, замість загальновживаної характеристики розсіювання служить не середнє квадратичне відхилення σ, а інша величина, звана вірогідним відхиленням "в.в." (інакше «серединним відхиленням» або «серединною помилкою»), якою називається половина довжини ділянки, симетричного відносно центра розсіювання, імовірність попадання в яку дорівнює 0,5 (рис. 3.24.)

$$P(|X - m| < E) = \frac{1}{2}$$

Позначимо буквою g корінь рівняння $\Phi(g)$=1/2, тобто такий аргумент функції Лапласа, для якого вона дорівнює 1/2. Значення цього аргументу легко знайти за таблицями функції Лапласа зворотною інтерполяцією. Звідки

$$E = s\sqrt{2}\cdot g \qquad \text{або} \qquad E = s\cdot g, \tag{3.40}$$

залежно від квантилю таблиці. Число $g\sqrt{2}$, часто застосовується при переході від вірогідного відхилення до середнього квадратичного та навпаки, і приблизно дорівнює 0,675.

Ще одна форма нормального закону $$f(x) = \frac{g}{E\sqrt{p}} e^{-\frac{g^2(x-m_x)^2}{E^2}}. \tag{3.41}$$

Для розрахунку ймовірності попадання на задану ділянку використаємо формулу

$$P(a < x < b) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(g\cdot\frac{b-m}{E}\right) - \Phi\left(g\cdot\frac{a-m}{E}\right)\right]. \tag{3.42}$$

Якщо інтервал є симетричним відносно середнього, тобто, нас цікавить ймовірність виду $P(|x - m|<l)$, тоді формула (3.42) може бути спрощена таким чином. Для інтегралу Лапласа виду $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{p}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ та для квантиля таблиці z=$\frac{x-m}{s}$ ця ймовірність буде дорівнювати - $P(|x-m|<l) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{b-m}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{s}\right)\right]$. Але ж, у цьому випадку $a=m-l$, $b=m+l$. Підставимо ці значення в попередню формулу і отримаємо $$P(|x-m|<l) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{m+l-m}{s}\right) - \Phi\left(\frac{m-l-m}{s}\right)\right] = \Phi\left(\frac{l}{s}\right) \tag{3.43}$$

H1 fx =НОРМРАСП(B1+F1;B1;D1;ИСТИНА)-НОРМРАСП(B1-F1;B1;D1;ИСТИНА)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	m=	50	σ=	10	l=	8	P(x - m||<l)=	0,5763

3.8.1. Локальна теорема Лапласа.

Імовірність того, що в *n* незалежних дослідженнях, у кожнім з яких імовірність появи події дорівнює *p* (*0<p<1*), подія наступить рівно *k* раз (байдуже, у якій послідовності), приблизно дорівнює (тим точніше, чим більше *n)*

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot j\,(x).$$

Тут $$j\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

3.8.2. Інтегральна теорема Лапласа.

Імовірність того, що в n незалежних дослідженнях, у кожнім з який імовірність появи події дорівнює p $(0<p< 1)$, подія наступить не менш k_1 разів і не більш k_2 разів, приблизно дорівнює $P(k_1;k_2) = \Phi(k_2) - \Phi(k_1)$.

3.8.3. Відхилення відносної частоти від постійної імовірності в незалежних дослідженнях

Оцінка відхилення відносної частоти від постійної імовірності. Імовірність того, що в n незалежних дослідженнях, у кожнім з який імовірність появи події дорівнює p $(0 < p < 1)$, абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від імовірності появи події не перевищить позитивного числа e приблизно дорівнює подвоєній функції Лапласа при $x = e\sqrt{\frac{n}{pq}}$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le e\right) = 2\Phi\left(e\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

<u>Приклади</u>

Приклад 1. Обчислимо ймовірності попадання випадкової величини X, підлеглої нормальному закону, на послідовні дільниці довжиною Е, відкладені від центра розсіювання.

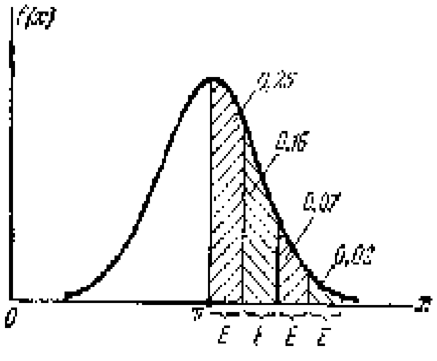


Рис. 3.25

По визначенню вірогідного відхилення, імовірність попадання на дільницю довжини Е, що примикає до центра розподілу (***m***), дорівнює 0,25. Оскільки щільність імовірності по мірі віддалення від ц. р. убуває, то, відкладаючи від центра послідовні дільниці довжиною Е, ми будемо отримувати все меншу і меншу ймовірність попадання (рис. 3.25). Обчислимо ймовірність попадання випадкової величини на ці ділянки за формулою (3.43) з точністю до 0,01

$P(m<x<m+E) = 0{,}25;$ $\quad P(m+E<x<m+2E) = 0{,}16;$

$P(m+2E<x<m+3E) = 0{,}07;$ $\quad P(m+3E<x<m+4E) = 0{,}02.$

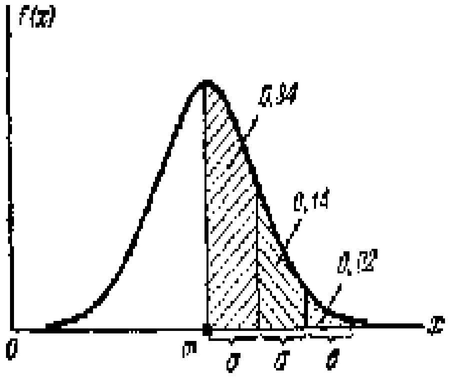


Рис. 3.26

Складаючи ці чотири числа, отримуємо 0,5. З цього робимо висновок, що коли нехтувати ймовірностями менше за 0,01, можна вважати практично достовірним, що випадкова величина, підлегла нормальному закону, відхиляється від центра розсіювання не більше ніж на чотири вірогідних відхилення. Такі відхилення все ж можливі і зустрічаються приблизно у 0,5% всіх випадків (в ту чи іншу сторону).

Аналогічні властивості можна встановити, вимірюючи відстані від ц. р. середніх квадратичних відхилень. Відкладаючи від m_x послідовно дільниці, рівні σ, маємо з точністю до 0,01

$P(m<x<m+\sigma) = 0{,}34$; $P(m+\sigma<x<m+2\sigma) = 0{,}14$; $P(m+2\sigma<x<m+3\sigma) = 0{,}02$.

Тобто все розсіювання практично (з точністю до частки процента) укладається на дільниці 3σ в той та інший бік від центра розсіювання.

Звідси витікає грубий спосіб орієнтовного визначення розподілу середнього квадратичного відхилення σ: беруть максимальне практично можливе відхилення випадкової величини від її середнього значення і ділять це відхилення на три. Цей прийом застосовується тільки у випадку, коли в нашому розпорядженні немає ніяких відомостей про розподіл випадкової величини, крім діапазону її випадкових відхилень.

Приклад 2. Закон розподілу доходів комерційних фірм є нормальний. Знайти ймовірність того, що доход фірми буде коливатися в межах 20 тис. грн. Вірогідне відхилення доходу E = 25 тис. грн.

Рішення знаходимо за формулою (3.43), тут l = 20/2 = 10 тис. грн.; E = 25, тоді шукана ймовірність буде

$$P(|x-m|<l)=\Phi\left(\frac{l}{E}\right)=\Phi\left(\frac{10}{25}\right)=0{,}2127.$$

Приклад 3. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X, що має нормальний розподіл з параметрами m_x і σ: а) відхилиться від свого математичного сподівання не більше ніж на 2σ; б) відхилиться від нього не більше ніж на 3σ.

Користуючись формулою (3.42) і таблицею, знайдемо

$$P(m_x-2s<x<m_x+2s)=\Phi\left(\frac{m_x+2s-m_x}{s\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{m_x-2s-m_x}{s\sqrt{2}}\right)=0{,}95;$$

$$P(m_x-3s<x<m_x+3s)=\Phi\left(\frac{m_x+3s-m_x}{s\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{m_x-3s-m_x}{s\sqrt{2}}\right)=0{,}997.$$

Приклад 4. Поїзд складається з N = 100 вагонів. Вага кожного вагона – випадкова величина з математичним сподіванням 65 т і середнім квадратичним відхиленням σ = 9 т. Локомотив може везти поїзд, якщо його вага не перевищує 6600 т. В іншому випадку доводиться причіпляти другий локомотив, що збільшує витрати перевезень. Знайти ймовірність того, що цього робити не доведеться.

Вагу поїзда X можна представити як суму 100 випадкових величин ваги окремих вагонів, які мають одне і те ж математичне сподівання m_q = 65 і ту ж дисперсію D_q = σ^2_g = 81. За правилом складання математичних сподівань $M(X)=100\,65=6500$. А за правилом складання дисперсій $D(X)=100\cdot 81=8100$. Витягуючи корінь, знайдемо середнє квадратичне відхилення $s_x=\sqrt{D(X)}=90$.

Для того щоб один локомотив міг везти поїзд, треба, щоб вага поїзда X виявилася прийнятною, тобто попала в межі ділянки [0; 6600]. Випадкову величину X , суму 100 доданків, можна вважати розподіленою нормально. За формулою (3.42) маємо

$$P(0;6600)=\Phi\left(\frac{6600-6500}{90\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{0-6500}{90\sqrt{2}}\right)=0{,}887.$$

Як бачимо, імовірність того, що 1 локомотив не зможе потягти поїзд досить велика 1-0,887 = 0,113=11,3%. Відкинемо 2 вагони і зробимо цей розрахунок повторно. Тоді ймовірність того, що вага поїзда не буде перевищувати 6500 т буде 0,99. Отже, майже напевно, причіпляти другий локомотив не треба.

3.9. Гамма-функція і її властивості

Гамма - функцією або інтегралом Ейлера другого роду називається

функція виду
$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \qquad (3.44)$$

Гамма-функція є інтегралом, що залежить від параметра α. Вона задовольняє наступним властивостям:

1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$

2) $\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a) \quad при \quad a>0;$

Якщо a – позитивне ціле число, то $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{p}.$

Якщо α кратне 1/2, то $\Gamma(a)$ може бути легко обчислене за формулами

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{p};$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{p};$$

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)=$$
$$=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\Lambda\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{p}.$$

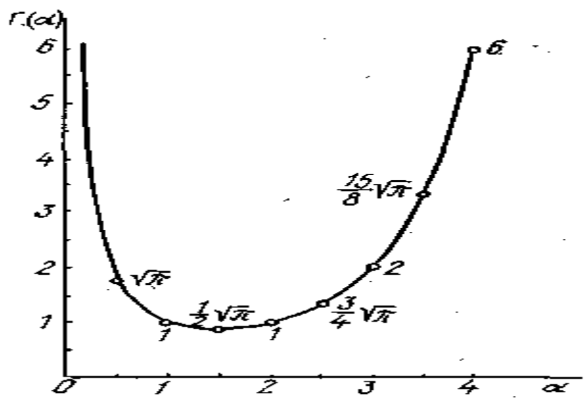


Рис. 3.27

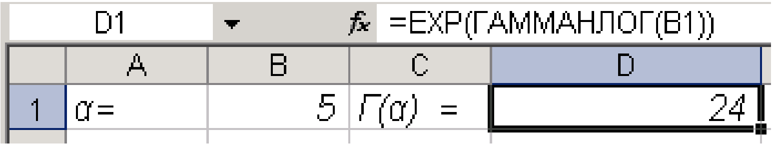
При великих значеннях α гамма-функція обчислюється за формулою

$$\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1)=$$
$$=(a-1)(a-2)\Gamma(a-2)=\Lambda$$

Графік гамма - функції зображений на рис. 3.27

Приклад

Розрахувати гамма-функцію для α=5. Для вирішення, скористаємося функцією Excel’я ГАММАЛОГ, яка повертає натуральний логарифм гамма-функції. Щоби знайти значення самої функції, зведемо число e в степінь, яку повивертає функція ГАММАЛОГ. Результат $\Gamma(5) = 24$.



3.10. Розподіл c^2 (хі-квадрат)

Розглянемо випадкову величину *Y*, розподілену за нормальним законом з математичним сподіванням $M(Y)= a$ і середнім квадратичним відхиленням σ.

Тоді, випадкова величина $u = \dfrac{Y - a}{s}$, називана стандартизованою випадковою величиною, розподілена за нормальним законом з параметрами $M(u) = 0$ та $s = 1$. Квадрат стандартизованої випадкової величини $u^2 = \left(\dfrac{Y - a}{s}\right)^2 = c^2$ називається випадковою величиною (хі-квадрат) з одним ступенем свободи. c^2

Розглянемо n незалежних випадкових величин $Y_1, Y_2, \mathrm{K}, Y_n$, розподілених за нормальним законом з математичними сподіваннями $a_1, a_2, \mathrm{K}, a_n$ і середніми квадратичними відхиленнями $s_1, s_2, \mathrm{K}, s_n$ Утворимо для кожної з цих випадкових величин стандартизовану випадкову величину $u_i = \dfrac{Y_i - a_i}{s_i}, \quad i = 1,2,\mathrm{K}, n.$

Сума квадратів стандартизованих перемінних називається випадковою величиною c^2 з v=n ступенями свободи.

$c^2 = u_1^2 + u_2^2 + \mathrm{K} + u_n^2 = \left(\dfrac{Y_1 - a_1}{s_1}\right)^2 + \left(\dfrac{Y_2 - a_2}{s_2}\right)^2 + \Lambda + \left(\dfrac{Y_n - a_n}{s_n}\right)^2$ У статистичних таблицях число ступенів свободи прийнято позначати буквою v. Щільність розподілу випадкової величини c^2 має вид –

$$f(c^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\dfrac{v}{2}\right)}\left(c^2\right)^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{c^2}{2}}, & \text{якщо} \quad c^2 \geq 0 \\ 0, & \text{якщо} \quad c^2 < 0 \end{cases} \tag{3.45}$$

Таким чином, розподіл c^2 залежить від одного параметра v – числа ступенів свободи.

Функція розподілу c^2 має вид

$$F(c^2)=P(c^2<c_0^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\dfrac{v}{2}\right)}\displaystyle\int_0^{c_0^2}(c^2)^{\frac{v}{2}-1}e^{-\frac{c^2}{2}}d(c^2), & якщо\ c^2\geq 0\\ 0, & якщо\ c^2<0\end{cases} \quad (3.46)$$

На рис. 3.28 зображені графіки щільності і функції c^2 розподілу.

У практиці часто використовуються квантилі c^2 -розподілу – $c^2_{a,v}$ Квантилем $c^2_{a,v}$ який відповідає заданому рівню імовірності α, називається таке значення $c^2 = c^2_{a,v}$ при якому $P(c^2 > c^2_{a,v}) = \int\limits_{c^2_{a,v}}^{\infty} f(c^2)d(c^2) = a$.

З геометричної точки зору, знайдення квантиля $c^2_{a,v}$ полягає в такому виборі значення, при якому площа заштрихованої криволінійної трапеції $c^2 = c^2_{a,v}$ була б рівною a.

Оскільки при $n \to \infty$ розподіл c^2 наближається до нормального, то при досить великому обсязі вибірки $(n \geq 50)$ довірчий інтервал можна знайти за формулою

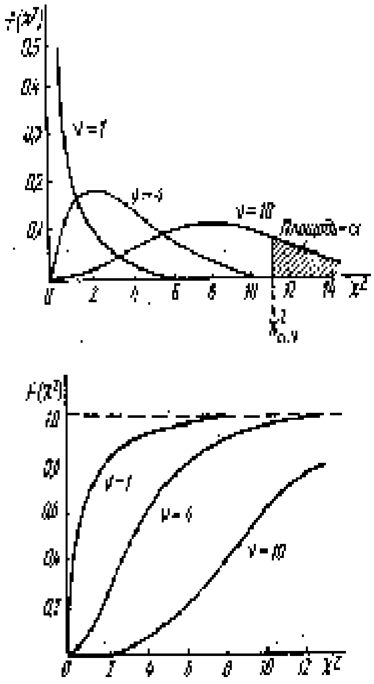


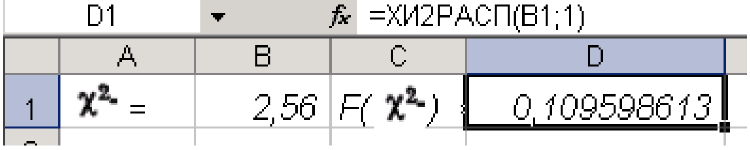
Рис. 3.28

$$P\left(\frac{s}{1+\frac{u_{a/2}}{\sqrt{2n}}} < s < \frac{s}{1-\frac{u_{a/2}}{\sqrt{2n}}}\right) = 1-a,$$

де $u_{a/2}$ – квантиль стандартизованого нормального розподілу, що відповідає довірчій імовірності $1-a$.

<u>Приклад</u>

Знайти значення функції розподілу хі-квадрат (c^2) для Y=2, a=10, σ=5. Скористаємося можливостями електронних таблиць Excel. Спочатку розрахуємо =[(2-10)/5]^2=2,56, а потім використаємо статистичну функцію ХИ2РАСП. Результат – 0,109.



3.11. Розподіл Стьюдента

Нехай $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ – незалежні випадкові величини, що мають нормальний розподіл з параметрами $M(Y) = M(Y_1) = \ldots = M(Y_n) = 0$.і

$s_Y = s_{Y_0} = \mathrm{K} = s_{Y_n} = 1$. Випадкова величина, що є функцією нормально розподілу випадкових величин, називається безрозмірним дробом Стьюдента.

$$t = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}} = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n} c_n^2}} \tag{3.47}$$

Щільність розподілу випадкової величини t має вид

$$f(t) = S(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{pn}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty \tag{3.48}$$

У формулі (3.48) буквою v позначене число доданків у підкореневому виразі дробу Стьюдента, тобто $v=n$.

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини t відповідно рівні: $$M(t) = 0; \quad D(t) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2).$$

З формули (3.48) випливає, що розподіл випадкової величини t залежить тільки від одного параметра — числа ступенів свободи n , рівного числу доданків у підкореневому виразі дробу Стьюдента (3.47).

На рис. 3.29. зображений графік щільності розподілу Стьюдента при різних ступенях свободи.

З аналізу закону розподілу видно, що вже при ν=50 розподіл Стьюдента мало відрізняється від нормального. Так, наприклад, якщо (1-α) = 0.95, те u=1,96 і $t_{50;0.025}$ =2,009, тобто 2,009—1,960 = 0,049. При малих значеннях v t-розподіл помітно відрізняється від нормального. Наприклад, якщо (1-α) =0,95, то u=1,96 і $t_{5;0.025}$ =2,57, тобто 2,57 - 1,96 = 0,61.

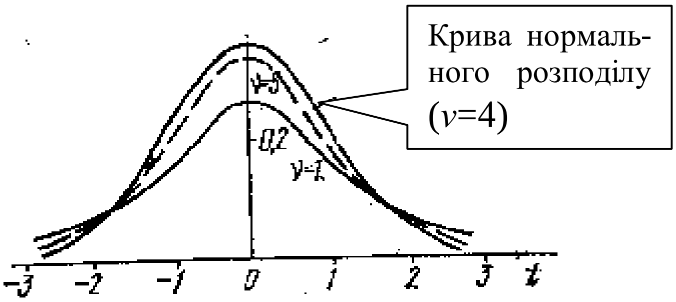


Рис. 3.29

Приклад

Знайти значення функції розподілу Стьюдента для t=10, v=2. Скористаємося функцією СТЬЮДРАСП і отримаємо значення 0,049.

D1 =СТЬЮДРАСП(10;2;1)

	A	B	C	D
1	t=	10	f(t) =	0,004926229
2	v=	2		

3.12. Розподіл Фішера

Розподіл Фішера (F-розподіл) використовується при порівнянні дисперсій нормальних розподілів, обчислених на підставі вибіркових даних.

Нехай випадкової величини $X_1, X_2, \ldots, X_m$; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ незалежні і мають нормальний розподіл з параметрами $M(X_i) = M(Y_j) = 0$; $D(X_i) = D(Y_j) = 1$

*(i =*1, 2, …, *m; j =*1, 2, …, *n).*

Випадкова безрозмірна величина $F = \dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{m} X_i^{\,2}}{m\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j^{\,2}}$ має розподіл Фішера, тобто має щільність розподілу

$$f(F)= \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \dfrac{F^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{\nu_1}{\nu_2}F\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} & F>0 \\ 0 & F\le 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

де ν_1=m – число ступенів свободи чисельника; ν_2=n – число ступенів свободи знаменника.

З формули (3.49) випливає, що розподіл випадкової величини F залежить від двох параметрів — чисел $n_1=m$ і $n_2=n$ ступенів свободи. Графік щільності імовірності F-розподілу зображений на рис. 3.30.

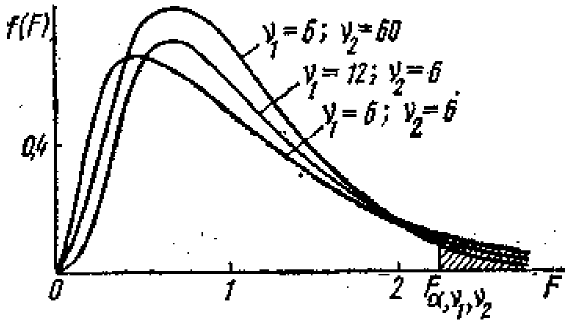


Рис. 3.30

3.13. Поняття про теорію масового обслуговування та теорію надійності

При вивченні явищ природи, процесів техніки, економіки або транспортних систем доводиться часто зустрічатися з таким положенням, що опис цих явищ або процесів проводиться за допомогою випадкових величин, які змінюються у часі.

У багатьох практично важливих або ж цікавих в пізнавальному відношенні ситуаціях доводиться з'ясовувати закономірності появи певного типу подій, який називається потоком подій: прибуття судів в морський порт, відмови в роботі складного пристрою, заміни електричних лампочок, що перегоріли, обривів ниток на ватерній машин і т. д. Розрахунок роботи багатьох підприємств побутового обслуговування - перукарень, кас магазинів, кількості громадського транспорту, необхідної кількості ліжок в лікарнях, пропускної спроможності шлюзів, переїздів, мостів і т. д. тісно пов'язаний з вивченням такого роду потоків. Цим займається теорія масового обслуговування.

Визначимо через t проміжок часу, який нас цікавить, і покладемо, що $P_k(t)$ є ймовірність появи k подій потоку за цей проміжок часу. Тоді за формулою закону розподілу Пуассона, при k=0, 1, 2,. .. з великою точністю виконується рівність

D2	▾	fx =ПУАССОН(D1;B1*B2;ЛОЖЬ)		
	A	B	C	D	E
1	λ=	0,5	k=	1	
2	t=	2	Pk(t)=	0,367879	

$$P_k(t) = \frac{(l\,t)^k}{k!} e^{-l\,t}, \quad (3.50)$$

де l – позитивна постійна, що характеризує «інтенсивність» надходження подій потоку. Зокрема, імовірність того, що за проміжок часу t не поступить жодної події потоку, є

$$P_0(t) = e^{-l\,t}. \quad (3.51)$$

Для задоволення деяких потреб населення організоване відповідне підприємство: перукарня, телефонна станція, лікарня зуболікарська амбулаторія і т. д. Вимоги на обслуговування поступають у випадкові моменти часу і тривалість їх обслуговування також випадкова. Питається, як будуть задоволені потреби клієнтів, якщо обладнані n місць обслуговування?

Уведемо припущення. 1) Потік вимог на обслуговування є найпростішим; 2) Тривалість обслуговування випадкова і ймовірність того, що на обслуговування доведеться затратити час, не менший ніж t, дорівнює e^{-ut}, де u>0 константа; 3) Кожна вимога обслуговується одним приладом; кожний прилад обслуговує тільки одну вимогу в момент, коли він зайнятий; 4) Якщо є черга на обслуговування, то прилад, що звільнився, без втрат часу переходить до обслуговування чергової вимоги черги; 5) Кількість точок обслуговування є n .

Визначимо $P_k(t)$ імовірність того, що в момент t в черзі знаходиться k вимог. У сформульованих нами умовах ці ймовірності можуть бути знайдені при будь-якому k=0, 1, 2,. ..

При $1 \le k \le n$
$$r_k = \frac{r^k}{k!} r_0; \quad (3.52)$$

при $k \ge n$
$$r_k = \frac{r^k}{n!\,n^{n-k}} r_0 \quad (3.53)$$

де
$$r_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} + \frac{r^{n+1}}{n!(n-r)} \right]^{-1} \text{ для } r < n \quad (3.54)$$

$$\rho_0=0 \qquad \text{для} \quad r \ge n .$$

У цих формулах $\rho = l/u$. Звернемо увагу на те, що при $r \ge n$ імовірність r_0=0. На підставі формул (3.50) і (3.51) виявляється, що і при будь-якому $k \ge 1$, P_k=0. Іншими словами, при $\rho \ge n$ в сталому процесі обслуговування застати в системі будь-яке кінцеве число вимог ми можемо лише з імовірністю нуль, тобто з імовірністю одиниця в такій системі буде нескінченно багато вимог, і утвориться нескінченна черга. Це означає наступне: у всіх випадках, коли $r \ge n$, черга на обслуговування необмежено зростає з часом.

Розрахунки в середовищі Excel за формулами (3.52) та (3.54) проводяться послідовно, починаючи з визначення ρ, далі суми у формулі (3.54), далі – ρ_0, далі – ймовірність утворення черги, довжиною *k*.

=C1/C2

	B	C
	λ=	8
	v=	3
	ρ=	2,666667

F2 =$B$3^F1/ФАКТР(F1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	λ=	8	n=	10	kI	0	1
2	v=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667
3	ρ=	2,666667					

D3 =1/(СУММ(F2:K2)+B3^(D1+1)/(ФАКТР(D1)*(D1-B3)))

	A	B	C	D	E	F	G
1	λ=	8	n=	10	kI	0	1
2	v=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667
3	ρ=	2,666667	ρ0 =	0,073447			

F3 =B3^D2*D3/(ФАКТР(D1)*D1^(D1-D2))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	λ=	8	n=	10	kI	0	1	2
2	v=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667	3,555556
3	ρ=	2,666667	ρ0 =	0,073447	ρk =	2,72932E-11		

У останню чверть XIX сторіччя в усьому світі велику увагу стали приділяти новій науковій дисципліні, що отримала назву теорії надійності. Викладемо її основні положення.

Елементом називають деякий пристрій, незалежно від того, „складний” він чи „простий”. Нехай елемент починає роботу в момент часу t_0=0, а в момент t відбувається відмова в його роботі. Позначимо через T безперервну випадкову величину – час безвідмовної роботи елементу, а через l – інтенсивність відмов (середнє число відмов в одиницю часу).

Часто тривалість часу безвідмовної роботи елементу має показовий розподіл, функція розподілу якого $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-lt}$ $(l > 0)$ визначає ймовірність відмови елементу за час тривалістю t.

Функцією надійності *R(t)* називають функцію, яка визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за протягом часу t $P(t) = e^{-lt}$.

Ймовірність безвідмовної роботи елементу в інтервалі часу *t* не залежить від часу попередньої роботи до початку інтервалу, що розглядається, а тільки від інтервалу *t* (при заданій інтенсивності відмовλ).

Щоб довести це, уведемо позначення подій: A — безвідмовна робота елементу в інтервалі (0, t_0) за час t_0, B — безвідмовна робота елементу в інтервалі $t_0, t_0 + t$, за час t. Тоді AB — безвідмовна робота в інтервалі (0, $t_0 + t$) за час ($t_0 + t$) За формулою $P(t) = e^{-lt}$ знайдемо ймовірності цих подій:

$$P(A) = e^{-lt_0},\ P(B) = e^{-lt},\ P(AB) = e^{-l(t_0+t)} = e^{-lt_0}e^{-lt}.$$

Знайдемо умовну ймовірність того, що елемент буде працювати безвідмовно в інтервалі $t_0, t_0 + t$ при умові, що він вже працював безвідмовно у попередньому інтервалі $(0,\ t_0)$: $P_A(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{e^{-lt_0}\cdot e^{-lt}}{e^{-lt_0}}=e^{-lt}$

Оскільки у цій формулі немає t_0, а тільки t, то це і значить, що час роботи у попередньому інтервалі не впливає на величину ймовірності безвідмовної роботи у наступному інтервалі.

Одним з найбільш поширених шляхів підвищення надійності є резервування. Суть резервування полягає в тому, що в систему вводяться надмірні елементи, вузли і навіть цілі агрегати, які включаються в роботу по мірі виходу з робочого стану основних елементів.

Припустимо, що є *n* пристроїв, які повинні працювати одночасно протягом часу *t.* Імовірність того, що яке-небудь з них безвідмовно проробить цей термін, становить *p (*одна і та ж для всіх пристроїв, і пристрої відмовляють незалежно одне від іншого). Відмова хоч би одного з пристроїв приводить до відмови всієї системи (наприклад, прокол одного колеса автомобіля приводить до відмови всього автомобіля). Імовірність того, що наша система відпрацює безвідмовно, на основі формул Бернуллі є $P_n(m)=C_{m+n}^{m}p^m(1-p)^{n-m}$. Як зміниться ймовірність безвідмовної роботи системи, якщо в ній, крім *n* основних пристроїв, є ще *m* резервних, що знаходяться в навантаженому стані (тобто в тому ж режимі, в якому й основні). Відмовою як і раніше вважається перехід системи в такий стан, коли в ній кількість працездатних пристроїв виявляється меншим *n*. Шукана ймовірність є

$$P_n(m)=\sum_{i=0}^{m}C_{m+n}^{n+i}p^{m+i}(1-p)^{m-i}. \qquad (3.55)$$

E3 =ЧИСЛКОМБ($B$2+$B$1;$B$2+E2)*$B$3^($B$2+E2)*(1-$B$3)^($B$2-E2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	n=	5					
2	m=	2		i	0	1	2
3	p=	0,2		Pn(i)	0,5376	0,224	0,056

Як видно з цього прикладу, ймовірність безвідмовної роботи системи з п'ятьма основними і двома резервними агрегатами, при ймовірності безвідмовної роботи кожного з них – 0,2 – складає 0,5376+0,224+0,056=0,818, тобто, достатньо висока.

Приклади

Приклад 1. У банку потік клієнтів має інтенсивність l =5. Знайти ймовірність того, що за робочий день прийде 100 клієнтів або що не прийде жодного клієнта. За формулою (3.50) така ймовірність, для першого випадку, є, $P_k(t)=\dfrac{(5\cdot 8)^{100}}{100!}e^{-5\cdot 8}$=6,0222 10^{-40}, тобто практично це нуль. На друге запитання відповідає формула (3.51) $P_0(t)=e^{-5.100}$ = 7,1246 10^{-40}. Теж практично нуль.

Приклад 2. Електроагрегати мають імовірність відмови *p*=0,9. Нехай *n*=4, *m*=1, Неважко підрахувати, що ймовірність безвідмовної роботи не резервованої системи становить 0,6561. Якщо ж у нас є один резервний елемент, то ця ймовірність безвідмовної роботи чотирьох таких же елементів майже в півтори рази. Якби у нас було два резервних елементи, то ймовірність безвідмовної роботи системи підвищилася б до 0,9841. Ось чому єдиний резервний генератор на електростанції дозволяє майже повністю виключити можливість виходу її їх робочого стану.

Приклад 3. Проводиться випробування двох елементів, які працюють незалежно. Час безвідмовної роботи першого елементу має показовий розподіл $F_1(t)=1-e^{-0.08t}$, другого $F_2(t)=1-e^{-0.05t}$. Знайти ймовірність того, що за час тривалістю t = 6 ч: а) обидва елементи відмовлять; б) обидва елементи не відмовлять; в) тільки один елемент відмовить; г) хоча б один елемент відмовить.

Рішення, а) Ймовірність відмови першого елементу

$P_1 = F_1(6) = 1-e^{-0.08\cdot 6} = 1-0.887 = 0.113$

б) Ймовірність безвідмовної роботи першого елементу

$q_1 = 1-P_1(6) = e^{-0.08\cdot 6} = 0.887$

Ймовірність безвідмовної роботи другого елементу

$q_2 = 1-P_2(6) = e^{-0.05\cdot 6} = 0.741$

Шукана ймовірність безвідмовної роботи обох елементів

$q_1\cdot q_2 == 0.887\cdot 0.741 = 0.66$

в) Ймовірність того, що відмовить тільки один елемент

$P_1q_2 + P_2q_1 = 0.113\cdot 0.741 + 0.259\cdot 0.887 = 0.31$

г) Ймовірність того, що хоча б один елемент відмовить

$P = 1-q_1q_2 = 1-0.66 = 0.34$

Приклад 4. У крамниці працює касир, охоронець та продавець, причому, відсутність одного з них робить неможливим роботу крамниці. Кожен з цих торгових працівників може виконувати функції інших. Відомо, що в зимовий період з кожних 100 працездатних осіб грипом хворіє 8.

Скільки треба мати резервних торгових працівників, щоб забезпечити безперебійну роботу крамниці?

За формулою (3.52) нам треба знати ймовірність безвідмовної роботи. Тут, це 1 – 8/100 = 0,92. Кількість основних пристроїв – n = 3. Визначимося з імовірністю безперебійної роботи, яка б нас задовольняла. Нехай, це буде 0,99. Отже, тепер, ми можемо, підставляючи в (3.52) значення m=1, 2, 3, …., доки отримана ймовірність не буде більшою, або дорівнювати обраній нами.

Провівши розрахунки за (3.52), ми отримуємо $P_3(0)$=0,000399 ; $P_3(1)$=0,00618; $P_3(2)$=0,065518; $P_3(3)$=0,666383; $P_3(4)$=0,9956124.

Отже, в резерві треба тримати чотири продавці.

3.14. Центральна гранична теорема

У теоремах закону великих чисел були розглянуті питання наближення деяких випадкових величин до визначених граничних значень незалежно від їхнього закону розподілу.

У теорії імовірностей існує інша група теорем, що стосуються граничних розподілів випадкової величини $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, коли число складових необмежено зростає. Ця група теорем носить загальну назву центральної граничної теореми. Вона вказує умови, при яких закон розподілу суми великого числа незалежних випадкових величин близький до нормального. Існує багато форм центральної граничної теореми. Ці форми відрізняються між собою умовами, що накладаються на розподіли випадкових величин, які складають суму.

3.14.1 Теорема Ляпунова

Нехай X_n, $n = \overline{1,\infty}$ – послідовність незалежних випадкових величин, для кожної з який існує математичне сподівання $M(X_k) = m_k$, дисперсія $D(X_k) = s_k^{\ 2}$ і третій центральний абсолютний момент $M|X_k - m_k|^3$. Нехай, крім того, виконана умова Ляпунова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} M|X_k - m_k|^3}{\left(\sum_{k=0}^{n} s_k^{\ 2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \cdot \qquad (3.56)$$

Тоді при необмеженому збільшенні n розподіл випадкової величини $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ сходиться по розподілі до нормального розподілу з математичним сподіванням $M(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k)$ і дисперсією $s_{Y_n}^{\ 2} = \sum_{k=1}^{n} s_k^{\ 2}$ тобто, для $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ при $n \to \infty$ виконується співвідношення

$$P(Y_n < y) \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}} \frac{1}{\sqrt{2p} \cdot s_{Y_n}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(Y_n - M(Y_n))^2}{2 s_{Y_n}^2}} dy \qquad (3.57)$$

Маються й інші формулювання центральної граничної теореми. Відрізняються вони тим, що умова Ляпунова замінена іншою вимогою. Якого ж обмеження на випадкову величину $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ накладає умова Ляпунова? З нього, зокрема, випливає, що $\lim_{n\to\infty} \frac{s_k^{\ 2}}{\sum_{k=1}^{n} s_k^{\ 2}} = 0$ тобто, дисперсія кожної випадкової величини X_k, що входить у випадкову величину $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, складає малу частку від загальної дисперсії. Іншими словами, зміст умови Ляпунова полягає в тому, що, незважаючи на різні характеристики розсіювання випадкових величин X_k, $k = \overline{1,n}$ ці характеристики не повинні сильно розрізнятися між собою по характеру впливу на розсіювання суми випадкової величини X_k, $k = \overline{1,n}$. Часто говорять, що жодне з доданків, що входять у $\sum_{k=1}^{n} X_k$, не домінує, тому що його внесок у частку загальної дисперсії не придушує внеску інших доданків. Центральна гранична теорема справедлива не тільки для безперервних, але і для випадкових дискретних величин. Окремий випадок центральної граничної теореми для випадку суми випадкових дискретних величин буде розглянутий у наступному параграфі. Практичне значення теореми Ляпунова величезне. Досвід показує, що розподіл суми незалежних випадкових величин, порівнянних по своєму розсіюванню, уже при числі доданків порядку десяти є приблизно нормальним.

3.14.2. Теорема Муавра-Лапласа

Нехай X_n, $n = \overline{1,\infty}$ – послідовність випадкових величин, що мають біноміальний розподіл $P(Y_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{1,n}$

Позначимо через U_n центровану випадкову величину, що має біноміальний розподіл $U_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$, а через $F_n(u)$ – функцію розподілу випадкової величини U_n: $F_n(u) = P(U_n < u)|$.

Послідовність функції розподілу $F_n(u)$ сходиться по розподілі до функції стандартизованого нормального розподілу $N(0;\,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{3.58}$$

Теорема Муавра - Лапласа дозволяє обчислювати приблизно імовірності попадання випадкової величини, що має біноміальний розподіл, в інтервал [a; b] за допомогою нормального розподілу.

Справді, підрахунок імовірності улучення випадкової величини Y_n в інтервал [a; b] по точній формулі $P(a \le Y_n < b) = \sum_{a \le h < b} C_n^k p^k q^{n-k}$ зв'язаний, при великих n, із громіздкими обчисленнями. Значно простіше скористатися наближеною формулою – наслідком з теореми Муавра - Лапласа. Дійсно, при досить великих n випливає наближена рівність

$$P\left(a \le \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{3.59}$$

Тому для визначення улучення випадкової величини Y_n в інтервал [a; b] справедлива формула

$$P(a \le Y_n \le b) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)\right) \tag{3.60}$$

де $\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{2p}} \int_{0}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ — функція Лапласа.

Помітимо, що теорему Муавра — Лапласа (3.58) так само, як і наслідок з цієї теореми, що задається формулою (3.60), іноді називають інтегральною теоремою Муавра – Лапласа.

На практиці часто необхідно обчислити наближену імовірність того, що в n незалежних дослідженнях подія A відбудеться рівно k раз. При великих значеннях n цю імовірність можна обчислити на підставі локальної теореми Лапласа, відповідно до якого

$$P(Y_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} j\,(x)$$

при $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$. Маються таблиці, що відповідають позитивним значенням x. Для негативних значень аргументу x користаються тими ж таблицями, тому що функція $j\,(x)$ парна, тобто $j\,(-x) = j\,(x)$.

<u>Приклад.</u>

Імовірність виходу з ладу виробу за час випробувань на надійність p=0,05. Яка імовірність того, що за час іспитів 100 виробів вийдуть з ладу: а) не менш 4 виробів; б) менш 4 виробів; в) від 10 до 20 виробів; г) рівно 5 виробів?

Рішення. За умовою задачі n=100; p=0,05; q=l—p=0,95.

а) Імовірність виходу з ладу не менш 4 виробів:

$$P(4 \le k) = P(4 \le k \le 100) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{100 - 5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}}\right) - \Phi\left(\frac{4 - 5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\Phi(43{,}60) - \Phi(-0{,}46)) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}3545) \approx 0{,}68.$$

б) Обчислимо імовірність виходу з ладу менш 4 виробів. Тобто,

$$P(k < 4) = P(0 < k < 4) = 1 - P(k > 4) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32.$$

в) Імовірність виходу з ладу від 10 до 20 виробів:

$$P(10 \le k \le 20) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{20 - 5}{\sqrt{4{,}75}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 5}{\sqrt{4{,}75}}\right)\right) = \frac{1}{2}(\Phi(6{,}88) - \Phi(2{,}29)) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}978) = 0{,}011.$$

г) Скористаємося локальною теоремою Лапласа: $P_n(k) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot j\,(x)$,

де – $j\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$

Обчислимо значення $x = \dfrac{5 - 100 \cdot 0{,}05}{\sqrt{100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}} = 0$.

По таблиці знайдемо $j\,(0) = 0{,}399$ Отже, шукана імовірність $P_{100}(5) \approx \dfrac{1}{\sqrt{4{,}75}} \cdot 0{,}399 = 0{,}183.$

3.15. Індивідуальне завдання №3. „Безперервні випадкові величини”

З кожної групи задач студент вирішує одну, вибираючи її за останньою цифрою номеру залікової книжки. Числові дані задач вибираються з таблиць за номером по списку студентської групи.

I. Задачі на розрахунок функції розподілу та ймовірності попадання в заданий інтервал.

0. Задана щільність імовірності величини X $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{A}SinAx, & при\ \ x\in(0;\dfrac{p}{A})\\ 0, & при\ \ x\notin(0;\dfrac{p}{A})\end{cases}$

Знайти імовірність того, що X прийме значення із діапазону $[\dfrac{p}{A+1};\dfrac{p}{A-1}]$.

1. Задано щільність розподілу кількості прибутку X $f(x)=ae^{-|x|}$ Знайти коефіцієнт a та імовірність одержання величини прибутку X із відрізка **[$0{,}1 \times A$; C]** мл. гривень.

2. Випадкова величина доходу підприємства X має диференціальну функцію розподілу $f(x)=\begin{cases}0.2^{\text{ч}}, & при\ \ x\in(-A;B)\\ 0, & при\ \ x\notin(-A;B)\end{cases}$

Знайти імовірність одержання доходу в межах **[$0{,}3 \times A$; $0{,}4 \times B$].**

3. Диференціальна функція розподілу прибутку X підприємства відома

$$f(x)=\begin{cases}A\cdot x, & при\ \ x\in(-A;\ B)\\ 0, & при\ \ x\notin(-A;\ B)\end{cases}.$$

Знайти імовірність одержання прибутку в межах **[$0{,}5 \times A$; $0{,}75 \times B$].**.

4. Випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le-\dfrac{B}{A}\\ Ax+B, & при\ \ -\dfrac{B}{A}<x\le\dfrac{10-B}{A}\\ 1, & при\ \ x<\dfrac{10-B}{A}\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що X прийме значення з проміжку $\left[-\dfrac{B}{A+5};\dfrac{10-B}{A+2}\right]$.

5. Безперервна випадкова величина X розподілена за законом, заданим диференціальною функцією $f(x)=\begin{cases}Ae^{-Ax}, & при\ \ x\ge0\\ 0, & при\ \ x<0\end{cases}$

Знайти імовірність того, що X потрапить в інтервал **[$0{,}1 \times A$; $0{,}5 \times A$].**

6. Випадкова величина X – коливання курсу валют відносно деякого середнього значення, задана інтегральною функцією:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le-\arcsin(\dfrac{A}{B})\\ A+B\sin x, & при\ \ -\arcsin(\dfrac{A}{B})<x\le\arcsin(\dfrac{1-A}{B})\\ 1, & при\ \ x>\arcsin(\dfrac{1-A}{B})\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що величина X прийме значення, укладене в інтервалі $[-0.5\arcsin(\dfrac{A}{B});0.7\arcsin(\dfrac{1-A}{B})]$.

7. Випадкова величина Х задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le -\dfrac{B}{A}\\ Bx+Ax^2, & при \quad -\dfrac{B}{A}<x\le\dfrac{B+\sqrt{B^2+4\cdot A}}{2\cdot A}\\ 1, & при \quad x>\dfrac{B+\sqrt{B^2+4\cdot A}}{2\cdot A}\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що Х прийме значення з проміжку $\left[-\dfrac{B}{A+5}<x\le\dfrac{B+\sqrt{B^2+4\cdot A}}{2\cdot A+5}\right]$.

8. Випадкова величина *X* задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le -\dfrac{A}{B}\\ \dfrac{A}{x}+B, & при \quad -\dfrac{A}{B}<x\le\dfrac{A}{1-B}\\ 1, & при \quad x>\dfrac{A}{1-B}\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що *X* прийме значення з проміжку $\left[-\dfrac{A}{B+1{,}5};\dfrac{A}{1{,}5-B}\right]$.

9. Випадкова величина *X* задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le \exp(-\dfrac{A}{B})\\ A+B\ln x, & при \quad \exp(-\dfrac{A}{B})<x\le\exp(\dfrac{1-A}{B})\\ 1, & при \quad x>\exp(\dfrac{1-A}{B})\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що *X* прийме значення з проміжку $\left[\exp(-\dfrac{A}{B+0{,}5});\exp(\dfrac{1-A}{B-0{,}5})\right]$

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	4	3	5	6	6	7	2	4	6	3	3	2	2	3	3
B	6	9	8	7	7	11	9	8	8	11	7	6	10	12	8
C	1,05	0,99	1,18	1,20	0,94	0,95	1,49	1,34	1,46	1,46	1,35	1,35	1,12	1,03	1,17
№ п/п	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	5	4	5	3	3	4	3	6	2	7	3	5	3	2	4
B	9	6	7	12	9	9	11	10	7	10	7	10	9	7	7
C	1,38	0,93	1,17	1,19	0,96	1,06	1,30	0,98	1,05	1,11	1,09	1,18	1,41	1,43	1,29

II. Задачі на числові характеристики безперервних випадкових величин (задано формули щільності або функції розподілу, знайти формулу функції або щільності розподілу та основні числові характеристики: математичне сподівання, дисперсію, стандарт, моду, медіану, ексцес, асиметрію.

0. Щільність імовірності випадкової величини *X* задана виразенням

$$f(x)=\begin{cases}a\,Cosx, & при \quad 0\le x\le\dfrac{p}{B}.\\ 0, & при \quad x<0,\ x>\dfrac{p}{B}\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт *A* та основні числові характеристики.

1. Знайти основні числові характеристики випадкової величини *X*,

заданою функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le -\dfrac{B}{2}\\ \dfrac{x}{B}+\dfrac{1}{2}, & при \quad -\dfrac{B}{2}<x\le\dfrac{B}{2}\\ 1, & при \quad x>\dfrac{B}{2}\end{cases}$

2. Знайти коефіцієнт A та основні числові характеристики випадкової величини X, заданою щільністю розподілу . $f(x)=\begin{cases} A(x^2+\frac{2}{3}x), & B\le x\le C \\ 0, & x<B,\ x>C \end{cases}$

3. Знайти основні числові характеристики випадкової величини X, заданою функцією розподілу $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le -\frac{C}{B} \\ \frac{x}{C}+\frac{1}{B}, & \text{при} \quad -\frac{C}{B}<x\le (1-\frac{1}{B})\cdot C \\ 1, & \text{при} \quad x>(1-\frac{1}{B})\cdot C \end{cases}$

4. Знайти коефіцієнт A та основні числові характеристики випадкової величини X, заданою щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases} A(x^3+5x^2), & B\le x\le C \\ 0, & x<B,\ x>C \end{cases}$

5. Знайти основні числові характеристики випадкової величини X, заданою функцією розподілу $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le \exp(-\frac{3C}{4}) \\ \frac{\ln x}{C}+\frac{3}{4}, & \text{при} \quad \exp(-\frac{3C}{4})<x\le \exp(\frac{C}{4}) \\ 1, & \text{при} \quad x>\exp(\frac{C}{4}) \end{cases}$

6. Знайти коефіцієнт A та основні числові характеристики випадкової величини X, заданою щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases} A(5x^2+\frac{2}{7}x), & B\le x\le C \\ 0, & x<B,\ x>C \end{cases}$

7. Знайти основні числові характеристики випадкової величини X, заданою функцією розподілу $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le B^2 \\ \sqrt{x}-B, & \text{при} \quad B^2<x\le (1+B)^2 \\ 1, & \text{при} \quad x>(1+B)^2 \end{cases}$

8. Знайти коефіцієнт A та основні числові характеристики випадкової величини X, заданою щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases} A(\sqrt{x}+4x), & B\le x\le C \\ 0, & x<B,\ x>C \end{cases}$

9. Знайти основні числові характеристики випадкової величини X, заданою функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le \left(\frac{C}{B}\right)^2 \\ B\sqrt{x}-C, & \text{при} \quad \left(\frac{C}{B}\right)^2<x\le \left(\frac{1+C}{B}\right)^2 \\ 1, & \text{при} \quad x>\left(\frac{1+C}{B}\right)^2 \end{cases}$$

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	2,5	2,5	4,1	2,4	3,4	3,1	2,7	2,9	4,4	2,3	4,6	4,6	4,0	4,0	3,9
C	6,0	8,6	8,3	7,3	8,0	8,5	6,3	8,4	7,1	6,5	8,0	8,9	7,8	6,1	7,3
№ п/п	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	4,5	3,5	2,8	2,7	2,1	3,6	3,9	2,1	3,9	2,9	4,7	2,4	3,4	3,6	3,0
C	7,7	8,7	8,8	6,6	6,3	6,9	7,7	8,6	8,9	7,0	8,3	6,8	6,1	7,4	8,0

III. Задачі на такі закони розподілу: рівномірний, експоненціальний, Пуассона.

0. Випадкова величина X розподілена рівномірно в діапазоні **[*A;B*].** Знайти її функції щільності та розподілу імовірності, знайти математичне сподівання та дисперсію.

1. Випадкова величина X розподілена за законом Пуассона з параметром ***A***, випадкова величина Y розподілена за тим же законом з параметром ***B***. Ці випадкові величини незалежні. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію їх суми.

2. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі **[*A;B*].** Знайти щільність імовірності випадкової величини $Y = X^2$

3. Випадкова величина X розподілена за експоненційним законом з параметром ***0,1·A***, випадкова величина Y розподілена за тим же законом з параметром ***0,05·B.*** Ці випадкові величини незалежні. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію їх добутку.

4. Випадкова величина X розподілена за експоненційним законом з параметром l***=0,05·A***, випадкова величина Y розподілена за законом Пуассона з параметром ***B***. Ці випадкові величини незалежні. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію їх суми.

5. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі **[*A;B*],** випадкова величина Y розподілена за законом Пуассона з параметром ***B*** Ці випадкові величини незалежні. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію їх різниці.

6. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі ***[A;B].*** Знайти щільність імовірності випадкової величини $Y = 5 \cdot X^2$.

7. Випадкова величина X розподілена рівномірно в **[*A, B*].**Знайти функції щільності та розподілу імовірності, знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y = 2 \cdot X$.

8. Випадкова величина X розподілена за законом Пуасона з параметром ***A***, випадкова величина Y розподілена за експоненційним законом з параметром l***=0,05·B.*** Ці випадкові величини незалежні. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію їх добутку.

9. Знайти: дисперсію та середнє квадратичне відхилення, функцію щільності випадкової величини ***X,*** розподіленої за експоненційним законом з параметром l***=0,05·A***

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	16	17	13	13	14	17	18	16	16	14	16	15	17	12	15
B	7	7	6	9	7	6	6	6	9	9	7	9	6	7	8
C	4	5	2	5	3	4	2	2	5	4	5	3	5	4	4
№ п/п	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	13	16	15	11	19	19	15	20	14	16	20	19	11	11	15
B	8	7	7	8	6	6	9	8	9	8	7	6	8	8	8
C	3	5	4	2	4	4	5	5	3	2	5	2	4	2	5

IV. Задачі на нормальний закон розподілу

0. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормальне розподіленої випадкової величини Х відповідно рівні ***B*** і ***A***. Знайти імовірність

того, що в результаті досліду X прийме значення, укладене в інтервалі $[2\times A; 4\times A]$ та дисперсію.

1. Випадкові помилки виміру підлеглі нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = C$ мм і математичним сподіванням, $m = 0$. Знайти імовірність того, що з трьох незалежних вимірів помилка хоча б одного не перевершить по абсолютній величині A мм

2. Для нормально розподіленої випадкової величини X знайти математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення та ймовірність попадання в інтервал $P(1,5\times A<X<3\times A)$, якщо $M(X)=B$, $D(X)=A$

3. Для нормально розподіленої випадкової величини X знайти математичне сподівання, дисперсію та ймовірність попадання в інтервал $P(2\times A <X<3\times A)$, якщо $M(X)=B$, $s(X)=A$

4. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, яка розподілена нормально з математичним сподіванням, рівним $5\times C$ мм. Фактично довжина виготовлених деталей не менше $5\times C - 3\times B$ і не більш $5\times C + 3\times B$ мм. Знайти імовірність того, що довжина наугад узятої деталі: а) більше $6\times C$ мм; б)менше $9\times A$ мм.

5. Проводиться вимірювання діаметру валу без систематичних (одного знаку) помилок. Випадкові помилки вимірювання X підлягають нормальному закону розподілу з середнім квадратичним відхиленням $s=B$ мм. Знайти імовірність того, що вимірювання буде зроблено з помилкою, що не перевершує по абсолютній величині C мм.

6. Проводиться зважування деякої речовини без систематичних помилок. Випадкові помилки зважування підлягають нормальному закону розподілу з середнім квадратичним відхиленням $s=C$. Знайти імовірність того, що зважування буде зроблено з помилкою, що не перевершує по абсолютній величині B.

7. Автомат виготовляє кульки. Кулька вважається годною, якщо відхилення X діаметру кульки від проектного розміру по абсолютній величині менше $0,1\times B$ мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням $s=0,1\times A$ мм, знайти скільки в середньому буде годних кульок серед ста виготовлених.

8. Деталь, виготовлена автоматом, вважається годною, якщо відхилення її контрольованого розміру від проектного не перевищує C мм. Випадкові відхилення контрольованого розміру від проектного підлягають нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $s=A$ мм і математичним сподіванням $M(X)=0$. Скільки відсотків годних деталей виготовляє автомат?

9. Верстат–автомат виготовляє вали, причому контролюється їх діаметр X. Вважаючи, що X – нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $M(X)=C$ мм і середнім квадратичним відхиленням $s=0,1\times B$ мм, знайти інтервал, симетричний щодо математичного сподівання, в якому з імовірністю 0,9973 будуть укладені діаметри виготовлених валів.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	4	3	3	2	4	5	5	4	4	4	5	3	3	2	4

B	**7**	**8**	**6**	**6**	**8**	**7**	**7**	**9**	**6**	**8**	**6**	**9**	**9**	**7**	**8**
C	**18**	**14**	**19**	**19**	**10**	**12**	**13**	**11**	**14**	**17**	**13**	**12**	**15**	**11**	**11**
№ п/п	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	**5**	**3**	**4**	**5**	**4**	**3**	**5**	**5**	**3**	**3**	**2**	**3**	**3**	**3**	**3**
B	**6**	**7**	**6**	**7**	**8**	**7**	**7**	**7**	**6**	**7**	**9**	**9**	**8**	**8**	**7**
C	**12**	**18**	**18**	**12**	**11**	**19**	**13**	**14**	**11**	**10**	**15**	**13**	**15**	**12**	**10**

Контрольні запитання

1. Чим відрізняється щільність розподілу від диференціальної функції розподілу безперервної випадкової величини?
2. Покажіть, в чім можна вбачати подібність формул для визначення числових характеристик дискретних та безперервних випадкових величин.
3. Який закон розподілу є найбільш уживаним?
4. Чому закон Пуассона називають „законом низької ймовірності”?
5. Який зв’язок нормального закону розподілу та закону розподілу χ^2 (хі-квадрат)?
6. Як збільшується надійність агрегату, якщо він має резервні елементи у своїй конструкції?
7. Сформулюйте центральну граничну теорему. Покажіть її зв’язок із законом великих чисел.

В розділі розглянуто найбільш уживані закони розподілу безперервних випадкових величин, подано їх числові характеристики, подано основи теорій черг та надійності.

4. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Засвоївши основні поняття математичної статистики студент набуде знань по розрахунку оцінок числових характеристик випадкової величини, яка представлено вибіркою значень, та зуміє оцінити точність цих оцінок.

4.1. Основи вибіркового методу. Гістограми

До цього ми розглядали всі задачі про випадкові величини при умові, що закон їхнього розподілу відомий. Але на практиці, спостерігаючи за зміною значень випадкової величини, практично неможливо визначити ані закон розподілу, ані основні числові характеристики, бо невідомі ймовірності появи, того чи іншого значення. А для того, щоб їх визначити, треба проводити дуже великі спостереження, що пов`язано зі значними матеріальними затратами. Тому, замість нескінченних спостережень за випадковою величиною використовується якась відносно невелика їх кількість, яка називається “**вибіркою**”.

Нехай ми маємо вибірку значень випадкової величини $X = x_1, x_2, \ldots x_n$, з кількістю спостережень – N. Розіб`ємо весь діапазон можливих значень спостережень випадкової величини на d однакових ділянок. Знайдемо значення випадкової величини на правій межі кожної ділянки як

$$d_{\max}(i) = x_{\min} + \frac{(x_{\max} - x_{\min}) \cdot i}{d}, \qquad (4.1)$$

де, i – номер ділянки [1; d]; x_{max}, x_{min} – відповідно найбільше та найменше значення випадкової величини у вибірці. Права межа i-ї ділянки водночас є лівою межею $i+1$ ділянки. Ліва межа для 1-ї ділянки – це x_{min}. А права межа останньої ділянки – це x_{max}.

Орієнтовно, кількість цих ділянок може бути визначена як

$$d_{op} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}332 \cdot \ln N}, \qquad (4.2)$$

але ця формула не є обов’язковою для використання. Дослідник може прийняти рішення про розбиття діапазону на довільну кількість ділянок.

Визначимо кількість значень випадкової величини, що попали в ту чи іншу ділянку як K_i. Це число називається “**частотою**”. “**Відносною частотою**” називається число

$$k_i = \frac{K_i}{N}. \qquad (4.3)$$

Відкладемо по осі абсцис значення випадкової величини X, розділивши ці значення на діапазони згідно (4.1). По осі ординат відкладемо для кожного діапазону значення частоти або відносної частоти у вигляді горизонтальної лінії для кожного діапазону. Ми отримаємо графік, який містить набір прямокутників і називається “**гістограма**” (рис. 4.1). Цей графік має широке застосування в математичній статистиці і частково заміняє собою функцію щільності розподілу, але не є її повним еквівалентом. Якщо середини цих вершин прямокутників поєднати ламаною лінією, то утвориться крива, що називається „**полігон**”.

Побудуємо нову таблицю, в якій кожному діапазону значень випадкової величини поставимо у відповідність свою відносну частоту. На підставі цієї таблиці знайдемо емпіричну функцію розподілу або **кумуляту** за формулою:

$$F(d_i)=\sum_{l=0}^{i-1} k_l \tag{4.4}$$

де, k_l –відносна частота; i – номер діапазону для якого знаходиться значення кумулянти ($1 \le i \le d_i$).

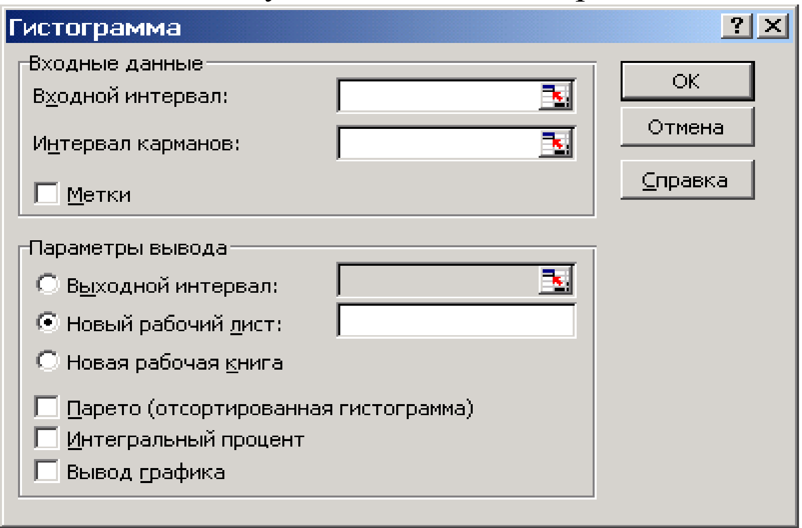
Приклад

На протязі декількох днів інкасатор отримував такі суми (наведені в таблиці у гривнях) з каси кіоску. Позначимо цю вибірку як X (тут N=28):

929	179	400	120	778	309	586	890	942	226	441	200	371	537
45	806	694	879	674	418	829	835	164	339	755	355	268	795

Знайдемо найбільше і найменше значення виручки, це – 942 і 45 грн. Розрахуємо орієнтовне значення за (4.2) $d = (942 - 45)/(1 + 3.32\ ln28) = 7,436$. Приймемо кількість діапазонів $d=8$. Знайдемо значення випадкової величини на межах діапазонів (ділянок) за (4.1).

Подальші розрахунки проведемо із застосуванням меню „Сервис-Анализ данных-Гистограмма”. Отриману таблицю частот доповнимо розрахунками відносних частот за (4.3), які і є основою для побудови гістограми і полігону, а також визначимо значення кумуляти за (4.4). Результати розрахунків зведемо у таблицю і побудуємо відповідні графіки.



Права межа ділянки	157,13	269,25	381,38	493,50	605,63	717,75	829,88	942,00
Частота	2	5	4	3	2	2	5	5
Відносна частота	0,0714	0,1786	0,1429	0,1071	0,0714	0,0714	0,1786	0,1786
Середина діапазонів для полігону	101,06	213,19	325,31	437,44	549,56	661,69	773,81	885,94
Кумулята	0,0000	0,0714	0,2500	0,3929	0,5000	0,5714	0,6429	0,8214

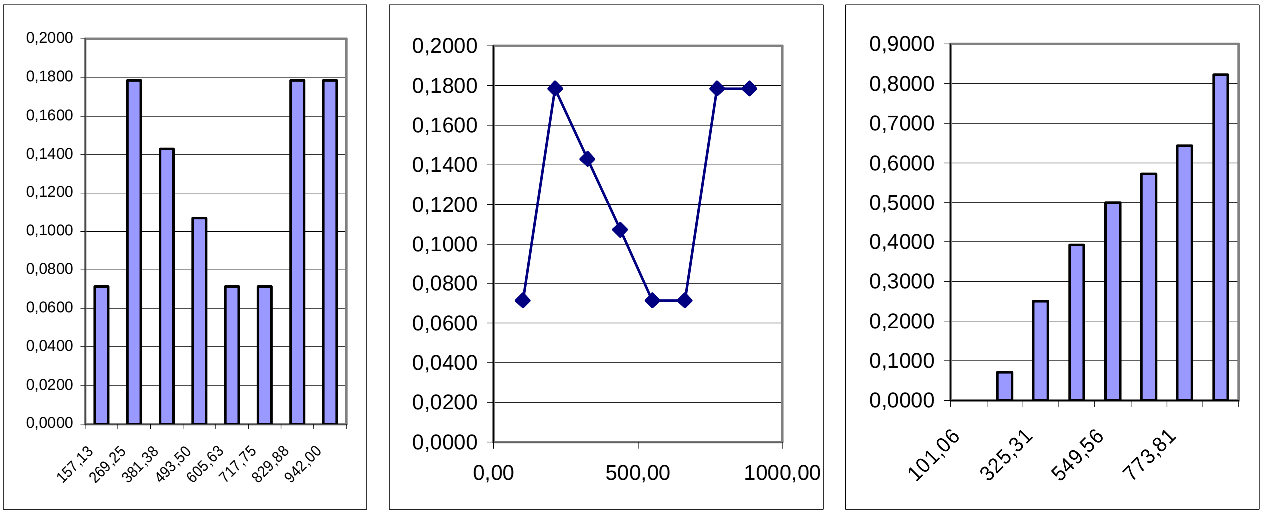


Рис. 4.1. Гістограма, полігон та кумулята.

4.2. Оцінки числових характеристик випадкової величини

Це, як і раніше, моменти, випадкової величини і їхні співвідношення такі самі, але оскільки ми розраховуємо їх не по великим вибіркам, а по відносно невеликим, з кількістю значень випадкової величини *N*, то ці моменти називаються «вибірковими оцінками» моментів випадкової величини. Справжні моменти можна визначити тільки провівши визначення тисяч і тисяч значень випадкової величини.

Тому знак моменту записується з крапками згори, щоб підкреслити, що це не його точне значення, а тільки статистична (вибіркова) оцінка

– Оцінки початкових моментів порядку *S* $\dot{\alpha}_S[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^S$. (4.5)

– Оцінки центральних моментів порядку *S* $\dot{m}_S[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \dot{\alpha}_1)^S$. (4.6)

Як і для дискретних випадкових величин, математичне сподівання – це початковий момент першого порядку, а дисперсія – центральний момент другого порядку. Це вибіркові параметри. Для дисперсії уводиться та поправка

$$\dot{M}[X] = \dot{\alpha}_1, \quad \dot{D}[X] = \frac{N}{N-1}\dot{m}_2, \tag{4.7}$$

після чого дисперсія вже називається нормованою.

Спрощена формула для визначення центрального моменту другого порядку має вигляд $m_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \dot{\alpha}_1^2$

Мірою відносного відхилення значень випадкової величини відносно оцінки його середнього служить варіація та коефіцієнт варіації

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\dot{D}(x)}{\dot{M}(X)}; \qquad K\mathrm{var}(X) = \frac{\dot{\sigma}(x)}{\dot{M}(X)}.$$

До звичних вже нам числових характеристик додається ще кореляційний момент (в англомовній літературі цей параметр називається ко-варіація), яка розраховується за вибірками двох різних випадкових величин. Це дозволяє визначити міру взаємного зв`язку цих величин

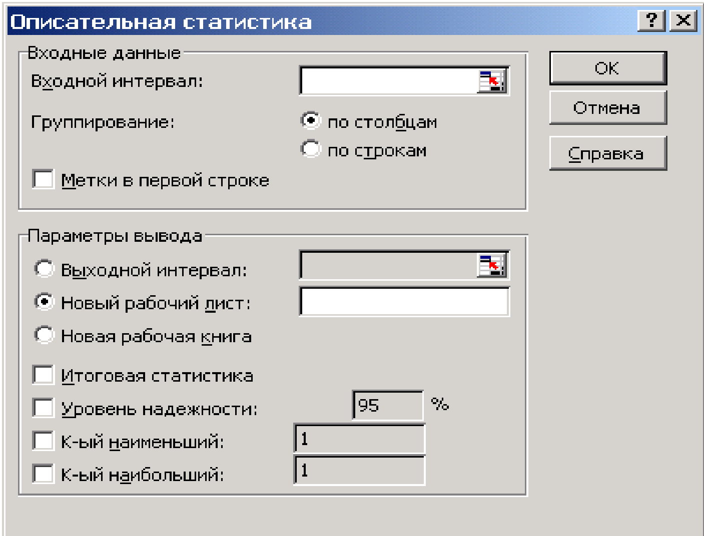
$$\mathrm{cov}(X,Y) = R_{XY} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{m}_x)(y_i - \hat{m}_y)\,. \tag{4.8}$$

Тут X, Y – відповідно перша і друга випадкові величини, а m_x, m_y – оцінка їх математичних сподівань. Чим більший кореляційний момент – тим більший зв`язок цих випадкових величин між собою.

Для приведення кореляційних моментів різних пар випадкових величин до одного масштабу, знаходиться коефіцієнт кореляції (в англомовній літературі цей параметр інколи називається кореляція)

$$cor(X,Y) = r_{XY} = \frac{R_{XY}}{\hat{\sigma}_X \cdot \hat{\sigma}_Y}, \tag{4.9}$$

де $\hat{\sigma}_X$, $\hat{\sigma}_Y$ – оцінки середніх квадратичних відхилень для випадкових величин X та Y. Завдяки такому перетворенню коефіцієнт кореляції змінюється в діапазоні [±1]. Коли він дорівнює нулю, це означає, що зв`язку між цими випадковими величинами немає, а коли його значення близьку до 1, це означає що ці випадкові величини пов'язані між собою лінійним співвідношенням виду $x = ay + b$. Тут a та b – константи співвідношення.



В електронних таблицях Excel розрахунки оцінок числових характеристик виконує програма "Описательная статистика", до якої можна звернутися через меню „Сервис-Анализ данных-Описательная статистика”.

Розташувавши числові дані у стовпчик, викликаємо цю програму. Там, де написано "Входной интервал" ми вказуємо адреси всіх клітинок, де знаходяться дані вибірки значень випадкової величини. Показавши "Группирование" – "По столбцам", ми визначаємо порядок розташування даних. Якщо наша таблиця даних має заголовок, можна відмітити і його, але треба відмітити параметр "Метки в первой строке". У "Параметрах

Стовпець1	
Середнє	**168,3125**
Стандартна помилка	**59,42437**
Медіана	**54**
Мода	**54**
Стандартне відхилення	**237,6975**
Дисперсія вибірки	**56500,1**
Ексцес	**1,781498**
Асиметрія	**1,662938**
Інтервал	**777**
Мінімум	**12**
Максимум	**789**
Сума	**2693**
Рахунок	**16**

вывода" визначаємо, куди буде вміщено результати розрахунку. Нижче помічаємо обсяг розрахунків, який треба зробити і натискаємо Enter.

Отримані нами результати мають вигляд, наведений нижче. Оскільки наш стовпець не мав заголовку, то програма його поіменувала як "Стовпець".

Розрахунок кореляції та коваріації можна провести із застосуванням функцій **КОВАР** та **КОРЕЛ**.

<u>Приклад</u>

Розрахувати оцінки числових характеристик випадкової величини з попереднього параграфа. Оцінка математичного сподівання, це просто середнє арифметичне випадкової величини $\tilde{m}[X] = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 527$, а оцінку дисперсії знайдемо, з урахуванням (4.6) і (.47), як $\tilde{D}[X] = \dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - 527)^2 = 80775{,}8$. Оцінка середнього квадратичного відхилення, як і раніше буде дорівнювати $\tilde{\sigma} = \sqrt{D} = \sqrt{80775.8} = 284{,}21$.

Визначимо кореляційний момент розглянутої вибірки з іншою вибіркою – кількістю товарів, що були придбані у ті ж дні, яку позначимо як Y

38	63	29	36	45	62	23	48	34	27	32	73	47	76
36	63	61	37	45	23	39	24	39	20	73	32	36	28

Для цього спочатку знайдемо оцінку математичного сподівання для цієї вибірки $M[X]$ =42,464, та оцінку середнього квадратичного відхилення (математичний стандарт) $\tilde{\sigma}$=16,494.

Розрахунок кореляційного моменту будемо робити згідно (4.8)

$$R_{XY} = \frac{1}{28-1}\sum_{i=1}^{28}(x_i - 527{,}286)(y_i - 42{,}464) = 79{,}3\,.$$

Оскільки ця цифра нам мало що говорить про рівень зв`язку суми продажу і кількості проданих товарів, знайдемо коефіцієнт кореляції

$r_{XY} = \dfrac{79{,}3}{284{,}211 \cdot 16{,}494} = 0{,}01693$. Оскільки цей коефіцієнт близький до нуля, то можемо зробити висновок, що зв`язок між сумою реалізації та кількістю проданих товарів практично відсутній.

4.3. Закон великих чисел. Теорема Чєбишева

Якщо послідовність попарно незалежних випадкових величин. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ має кінцеві математичні сподівання і дисперсії цих величин рівномірно обмежені (не перевищують постійного числа *e* *)*, то середнє арифметичне випадкових величин сходиться по ймовірності до середніх арифметичних їхніх математичних сподівань, тобто якщо *e* – будь-яке позитивне число, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{M}(x_i)\right| < e\right) = 1 \qquad (4.10)$$

Зокрема, середнє арифметичне послідовності попарно незалежних величин, дисперсії яких рівномірно обмежені і котрі мають те саме математичне сподівання $\hat{M}(X)$, сходиться по імовірності до математичного сподівання $\hat{M}(X)$, тобто якщо e – будь-яке позитивне число, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{M}(X)\right| < e\right) = 1$$

тобто, чим більше значень дискретної випадкової величини ми маємо, тим точнішим є визначення його середнього

4.4. Довірчий інтервал

Оскільки числові характеристики випадкової величини ми не можемо визначити точно, а знаходимо тільки їх оцінку, виникає питання, а на скільки ж воно відрізняється від справжнього?

Нехай нас цікавить величина інтервалу ε на який відхилиться від справжньої оцінки числової характеристики, розрахована за результатами статистичної вибірки. При цьому ми повинні наперед задати ймовірність β, значення якої викликало б у нас довіру до цього інтервалу (тобто високу ймовірність – 0.8, 0.9, 0.95). Цей інтервал так і називається – “довірчим”.

Отже нам треба зробити дію, зворотну визначенню ймовірності

$$\boldsymbol{P(|\hat{\Theta}[X] - \Theta[X]| < \varepsilon) = \beta,} \tag{4.11}$$

Де – $\Theta[X]$ справжнє значення числової характеристики випадкової величини, $\hat{\Theta}[X]$ **–** оцінка цього значення. Коли буде знайдено $\boldsymbol{\varepsilon}$, то справжнє значення числової характеристики буде знаходитися в межах

$$\hat{\Theta}[X] - e < \Theta[X] < \hat{\Theta}[X] + e\ .$$

Розмір довірчого інтервалу для кожної числової характеристики можна знайти із застосуванням функції Лапласа (тут наведено варіант формули для квантиля таблиці $z=\dfrac{x-m_x}{s_x}$):

– для математичного сподівання або середнього

$$e_m = \hat{s}_x\, Л(b)\,;$$

– для дисперсії

$$e_D = \hat{D}_x\, Л(b)\sqrt{\frac{0,8N+1,2}{N(N-1)}}\ ; \qquad (4.12)$$

– для відносної частоти в інтервалі гістограми

$$e_{p_i} = Л(b)\sqrt{\frac{k_i(1-k_i)}{N}}\ ,$$

де, $\hat{s}_m = \sqrt{\dfrac{D_x}{N}}$, а *Л(β)*– зворотне значення функції Лапласа, тобто таке значення аргументу (квантиля z), при якому функція Лапласа дорівнює β.

В електронних таблицях Excel цю операцію виконує функція

НОРМСТОБР(імовірність).

Покажемо на прикладі, порядок її застосування при визначенні ε за кожною з трьох формул (4.12).

D2 f_x =B3*НОРМСТОБР(B6)

	A	B	C	D	E	F
1			Довірчій інтервал		min	max
2	D_x =	25,46	ε_m =	1,423367	451,8266	454,6734
3	σ_x =	0,865346	ε_D =	6,662671	18,79733	32,12267
4	N=	34				
5	k_i =	0,28	ε_k =	0,126658	0,153342	0,406658
6	β=	0,95				

D3 f_x =B2*НОРМСТОБР(B6)*КОРЕНЬ((0,8*B4+1,2)/(B4*(B4-1)))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Довірчій інтервал		min	max		
2	D_x =	25,46	ε_m =	1,423367	451,8266	454,6734		
3	σ_x =	0,865346	ε_D =	6,662671	18,79733	32,12267		
4	N=	34						
5	k_i =	0,28	ε_k =	0,126658	0,153342	0,406658		
6	β=	0,95						

D5 f_x =НОРМСТОБР(B6)*КОРЕНЬ((B5*(1-B5))/B4)

	A	B	C	D	E	F
1			Довірчій інтервал		min	max
2	D_x =	25,46	ε_m =	1,423367	451,8266	454,6734
3	σ_x =	0,865346	ε_D =	6,662671	18,79733	32,12267
4	N=	34				
5	k_i =	0,28	ε_k =	0,126658	0,153342	0,406658
6	β=	0,95				

Отже, розрахунок показує, що з довірчою ймовірністю β =0,95:

– для оцінки середнього m_x= 453.25, справжнє його значення, становить [453.25-1,423367; 453,25+1,423367] або [451,8266; 454,6734];

– для оцінки дисперсії $\boxed{D}_x$=25,46 справжнє його значення становить **[**25,46-6,662671; 25,46+6,662671] або [18.79733; 32,12267];

– для оцінки відносної частоти $\boxed{k_i}_x$=0,28, справжнє його значення, становить [0,28-0,126658; 0,28+0,126658] або [0,153342; 0,406658].

<u>Приклад</u>

Знайдемо за прикладом з п.4.2. розмір довірчого інтервалу при визначенні математичного сподівання, дисперсії та ймовірності попадання в інтервал гістограми.

Виберемо довірчу ймовірність β =0,95. За таблицею значень функції Лапласа визначимо, що коли Φ=0,95, то аргумент дорівнює 1,96. Знайдемо приведений розмір математичного стандарту $\sigma_m = \sqrt{\frac{D_x}{N}} = \sqrt{\frac{80775{,}8}{28}} = 53{,}7108$. Тоді довірчий інтервал $e_b = 53{,}7108 \cdot 1{,}96 = 105{,}273$. Отже, справжнє значення випадкової величини *X*, представленої в прикладі з п.4.2 знаходиться з імовірністю 0,95 в межах ±105,273 відносно оцінки середнього значення, знайденої з вибірки, тобто з імовірністю 0,95 можна бути впевненим, що справжнє значення випадкової величини лежіть в межах [421,727; 632,273].

Довірчий інтервал для дисперсії $e_D = 80775{,}8 \cdot 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 28 + 1{,}2}{28 \cdot 27}} = 27972{,}58$.

Тепер визначимо довірчий інтервал для ймовірності попадання на ділянку гістограми

Номер ділянки	Значення на межі ділянки	Частоти попадання випадкової величини на ділянку	Відносні частоти попадання випадкової величини на ділянку	Довірчий інтервал для ймовірності попадання на ділянку
1	157,13	2	0,071429	0,09539
2	269,25	5	0,178571	0,14186
3	381,38	4	0,142857	0,12961
4	493,50	3	0,107143	0,11456
5	605,63	2	0,071429	0,09539
6	717,75	2	0,071429	0,09539
7	829,88	5	0,178571	0,14186
8	942,00	5	0,178571	0,14186

4.5. Віднесення випадкової величини до певного закону розподілу

Знати закон розподілу випадкової величини потрібно, щоб скористатися всіма вже раніше зробленими висновками щодо можливих характеристик цієї випадкової величини,

Для визначення того, якому закону підлягає випадкова величина, необхідно вибрати цей закон (чи рівномірний, чи експоненціальний, чи нормальний, чи ще який) і висунути так звану «**нуль-гіпотезу**» про те, що математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення (чи дисперсія) для цього закону дорівнюють оцінкам цих величин, отриманих з результатів розрахунку за вибіркою випадкової величини (4.5)-(4.7) з певною довірчою ймовірністю *p*.

Далі, розбиваємо область існування випадкової величини на діапазони з урахуванням (4.2) і знаходимо відносні частоти k_i. Для кожного діапазону знаходимо ймовірності попадання випадкової величини в конкретний діапазон за відомою вже формулою

$$\boldsymbol{P(x_i<x<x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i)}, \tag{4.13}$$

де x_i, x_{i+1} – значення випадкової величини на верхній і нижній межах *i*-го діапазону, *F(x)* – прийнята ними як нуль-гіпотеза, функція розподілу, у якій параметрами математичного сподівання та дисперсії використовуються їхні оцінки, розраховані з експериментальної вибірки.

Нуль-гіпотеза приймається, якщо критерій узгодження Пірсона (або «хі-квадрат»)

$$c^2 = n\sum_{i=1}^{d} \frac{(p_i - k_i)^2}{p_i}, \tag{4.14}$$

буде менший або дорівнювати табличному значенню цього критерію при достатньо великому значенні довірчої ймовірності.. Тут n – розмір вибірки, k_i – частоти на відповідних діапазонах; p_i – імовірності попадання випадкової величини в той же діапазон, по якому розраховані і відносні частоти, розраховані за формулою (4.13): d – загальна кількість діапазонів, на які розбита область існування випадкової величини. $r= d – s$ - 1 – число ступенів свободи, де s – число параметрів закону розподілу випадкової величини. Так, для рівномірного, експоненціального закону і закону Пуассона s=1, бо для цих законів треба знати тільки математичне сподівання (дисперсія жорстко пов`язана з математичним сподіванням простою формулою), а для нормального s=2, тому що для визначення цього закону потрібно знати вже два параметри m та σ.

Фрагмент таблиці критерію Пірсона $\chi 2(r, p)$ поданий у Додатку Б. Можна скористатися також функцією Excel

ХИ2ОБР(довірча ймовірність;число степенів свободи)

B18 fx =ХИ2ОБР(B17;B16)

	A	B	C	D	E	F
7	мін=	9	мах=	43		
8	k=	4	del=	8,5		
9	Діапазони		К	k	P	(k-P)^2 /P
10	мін	мах				
11	9	17,5	3	0,3	0,1866	0,0689
12	17,5	26	1	0,1	0,1391	0,011
13	26	34,5	1	0,1	0,1036	0,0001
14	34,5	43	5	0,5	0,0772	2,3144
15					Хі-кв.=	23,944
16	r=	2				
17	P=	0,95				
18	Хі таб=	0,10259				

Інколи цю задачу вирішують через визначення рівня довірчої ймовірності. Тобто, за розрахованим значенням $\chi 2$ та за числом степенів свободи знаходять, якій імовірності вони відповідають. А потім приймають рішення, чи можна довіряти отриманим результатам з такою ймовірністю. Для таких розрахунків існує функція Excel

ХИ2РАСП(розраховане значення $\chi 2$;число степенів свободи)

Приклад

Висунемо нуль-гіпотезу про те, що дані прикладу з п.4.2 розподілені згідно експоненціального закону з довірчою ймовірністю 0,95.

Оскільки математичне сподівання для цього закону дорівнює $M[X]=1/\lambda$, де λ – константа закону, то λ=1/527= 0,0018975.

Маючи значення λ, ми можемо визначити ймовірності для кожного інтервалу в діапазоні існування випадкової величини (4.13). Для цього, користуючись значенням функції розподілу для експоненціального закону $F(x)=1\text{-}e^{-\lambda x}$, підставляємо значення x, які відповідають межам кожної ділянки, на які розбитий діапазон існування випадкової величини. Тоді, знайдені ймовірності будуть дорівнювати для відповідних ділянок 0,11; 0,15; 0,13; 0,1; 0,08; 0,07; 0,05; 0,01.

Розрахуємо тепер значення критерію узгодження Пірсона (4.14). $\chi 2$= 11,341. Тепер звернемося до таблиці теоретичного розподілу $\chi 2(r, p)$. Тут r=8-1-1=6, а p=0,95. Табличне значення хі–квадрату 2,04. Отже: нуль-гіпотеза про те, що випадкова величина розподілена згідно експоненціального закону, відкидається

4.6. Індивідуальне завдання №4. „Розрахунки оцінок числових характеристик випадкових величин за їх вибіркою”

А. За вибірковими даними валюти річного балансу підприємства за 40 декад (у сотнях тисяч грн.) розрахувати перші чотири початкові та центральні моменти, асиметрію та ексцес, виправлені оцінки математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення та довірчі інтервали для них, використовуючи задану довірчу ймовірність. Визначити, якому з законів розподілу підлягає розподіл валюти балансу: рівномірному, експоненціальному чи нормальному, використовуючи задану довірчу ймовірність. Побудувати гістограму та кумуляту.

Б. Використовуючи вибіркові дані з другого рядка вашого варіанта, знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції поміж першим і другим рядками даних.

Для отримання числових значень треба скористатися електронними таблицями Excel у наступному порядку:

1. Створити допоміжний рядок даних, розміром у 40 клітинок, які містять наступну формулу

=СЛУЧМЕЖДУ((номер вашої залікової книжки – 50)*(ваш номер за списком групи); (номер вашої залікової книжки)*(ваш номер за списком групи+30))/100.

2. Відмітити цей допоміжний рядок і занести в пам’ять комп’ютера, натиснувши кнопку „Копировать” або сполучення кнопок “CTRL”+”C”.

3. Перенести курсор на вільний рядок і через головне меню „Правка-Специальная вставка-Только значения” занести туди числові значення, які і будуть першим основним рядком даних для розрахунку за завданням А.
4. Перенести курсор на другий вільний рядок і повторити пп. 2-3 для створення другого допоміжного рядка, потрібного для виконання завдання Б.
5. Створити ще допоміжну клітинку, яка містить формулу =

   =СЛУЧМЕЖДУ((остання цифра номеру вашої залікової книжки+1)*(ваш номер по списку групи); (номер вашої залікової книжки+2)*(ваш номер по списку групи+1))/341.

   Якщо отриманий результат буде менше 0,5 до нього треба додати 0,5.
6. Відмітити і скопіювавши цю клітинку, через головне меню „Правка-Специальная вставка-Только значения” занести це значення в чисту клітинку. Це і буде розмір довірчої ймовірності, який треба використовувати для розрахунків по завданням А та Б.

Числові значення нормального закону розподілу та хі-квадрат можна взяти в додатку до цього навчального посібника, або використати відповідні функції Excel.

Контрольні запитання

1. Чому не можна отримати точних значень числових характеристик випадкової величини, значення якої представлені вибіркою?
2. Що таке „виправлена оцінка числової характеристики випадкової величини”, отриманою методами математичної статистики?
3. В чому суть теореми Чєбишева?
4. Поясніть зміст поняття „довірчий інтервал”.
5. Що таке „довірча ймовірність”?
6. Для чого потрібно віднесення розподілу випадкової величини до відомого закону розподілу?
7. Що таке гістограма, полігон та кумулята?

Розглянуто основи вибіркового методу, порядок розрахунку незміщених оцінок випадкової величини, визначення довірчого інтервалу цих оцінок та метод Пірсона по віднесенню випадкової величини до певного закону розподілу.

ПІДСУМКИ

Наш світ пронизано загальною невпевненістю можливих наслідків тих чи інших фінансових операцій. В цій ситуації у пригоді стає теорія ймовірностей та математична статистика, яка за 300 років свого існування як науки, напрацювала багато схем для розрахунку тих або інших параметрів цієї невпевненості.

В цьому навчальному посібнику ви змогли вивчити і опанувати типи подій, які носять випадковий характер, набути поняття ймовірності настання таких подій, вияснити порядок застосування правил складання та множення ймовірностей для окремих подій, коли вони розглядаються в єдиному комплексі.

В розділі „Імовірності" введено поняття того, що більш прийнятним в економіці є розрахунок імовірності виникнення не точної кількості сприятливих подій, як це робиться за формулою Бернуллі, а ймовірності виникнення подій у деякому діапазону згідно теореми Бернуллі. А формула Байєса дозволяє уточнити ймовірності настання же яки подій на підставі апостеріорної інформації.

В розділах про дискретні та безперервні випадкові величини ви могли вивчити схему розрахунку числових характеристик цих величин, отримали поняття про закон та щільність розподілу, ознайомилися з найбільш часто вживаними законами розподілу, такими як експоненціальний закон, закон Пуассона, нормальний закон, гамма-функція, розподіл χ^2 (хі-квадрат), розподіл Стьюдента, розподіл Фішера та навчилися визначати їх параметри та числові характеристики.

Окремий підрозділ познайомив вас з теорією масового обслуговування та теорією надійності. Тепер ваші економічні розрахунки можуть збагатитися точними прогнозами про можливі витрати внаслідок регулювання величини черги на обслуговування та на закупівлю резервних агрегатів для торгового устаткування.

Розділ, що містить основні поняття математичної статистики, завершив навчальний посібник. В ньому ви остаточно пересвідчилися, що в реальних умовах економічної діяльності можна говорити про числові характеристики випадкових величин, які представлені тільки своїми вибірковими значеннями, тільки з певною довірчою ймовірністю. Те саме стосується і віднесення розподілу цих випадкових величин до якогось вже відомого теоретичного закону.

Тому в цьому розділі ви навчилися розраховувати довірчий інтервал, в межах якого і лежить справжнє значення цих числових характеристик.

Для засвоєння поданого матеріалу ви вирішували задачі, подані в індивідуальних завданнях після кожного розділу.

І ось тепер ви дивитися на світ, сповнений випадковості очима впевненої в силу науки людиною, адже тепер ви вмієте знаходити закономірності і користатися ними для своєї практичної діяльності.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Булдык Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика. – Минск: Вышейная школа. – 1989. – 286 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятнойстей (первые шаги). – М.:Знание, 1977. – 64 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.:Наука, 1962. – 564 с.
4. Волощенко А.Б. Теория вероятностей и математическая статистика для инженеров-экономистов. – Киев: Ин-т народного хозяйства. – 1972. – 120 с.
5. Герасимович. А.И. Математическая статистика. – М.: Высшая школа. – 1983. –279 с.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М .: Высшая школа. – 1998. – 400 с.
7. Гнеденко Б.В., Хинчмн А.Я. Элементароное введение в теорию вероятности. – М.:Наука, 1976. – 168 с.
8. Жолдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю. Теорія ймовірностей та математична статистика з елементами інформаційних технологій. – Київ: Вища школа. – 1995. – 351 с.
9. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.В. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа. – 2001. – 400 с.
10. Секей Г. Парадоксы теории вероятностей и математической статистики. – М.: Мир. – 1990. – М.: Мир. – 1990. – 240 с.
11. Справочник по теории вероятностей и математической статистике/ В.С. Королюк, Н.И. Портненко, А.В.Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука. – 1985. –640 с.
12. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами /А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, А.Н. Сиротин. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с.

<u>ДОДАТКИ</u>

Додаток А

Фрагмент таблиці значень функції $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{p}}\int_0^x e^{-t^2}dt$

для квантиля $z=\frac{b-m}{s}$

x	F**(x)**	**x**	F**(x)**	**x**	F**(x)**
0,00	0,0000	0,95	0,8209	1,90	0,9928
0,05	0,0564	1,00	0,8427	1,95	0,9942
0,10	0,1125	1,05	0,8624	2,00	0,9953
0,15	0,1680	1,10	0,8802	2,05	0,9936
0,20	0,2227	1,15	0,8961	2,10	0,9970
0,25	0,2763	1,20	0,9103	2,15	0,9976
0,30	0,3286	1,25	0,9229	2,20	0,9981
0,35	0,3794	1,30	0,9340	2,25	0,9985
0,40	0,4284	1,35	0,9438	2,30	0,9988
0,45	0,4755	1,40	0,9523	2,35	0,9991
0,50	0,5205	1,45	0,9597	2,40	0,9993
0,55	0,5633	1,50	0,9661	2,45	0,9995
0,60	0,6069	1,55	0,9716	2,50	0,9996
0,65	0,6420	1,60	0,9736	2,55	0,9997
0,70	0,6778	1,65	0,9804	2,60	0,9998
0,75	0,7112	1,70	0,9838	2,65	0,9998
0,80	0,7421	1,75	0,9867	2,70	0,9999
0,85	0,7707	1,80	0,9891	2,75	0,9999
0,90	0,7969	1,85	0,9911	2,80	0,9999
0,95	0,8209	1,90	0,9928	3,00	1,0000

Фрагмент таблиці значень $\chi2(r,p)$

r / p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0,99	0	0,02	0,115	0,297	0,55	0,87	1,24	1,65	2,09	2,56	3,053	3,571	4,107
0,98	0	0,04	0,185	0,429	0,75	1,13	1,56	2,03	2,53	3,06	3,609	4,178	4,765
0,97	0,001	0,061	0,245	0,535	0,9	1,33	1,8	2,31	2,85	3,41	3,997	4,601	5,221
0,96	0,003	0,082	0,3	0,627	1,03	1,49	2	2,54	3,1	3,7	4,309	4,939	5,584
0,95	0,004	0,103	0,352	0,711	1,15	1,64	2,17	2,73	3,33	3,94	4,575	5,226	5,892
0,94	0,006	0,124	0,401	0,788	1,25	1,76	2,32	2,91	3,52	4,16	4,81	5,48	6,163
0,93	0,008	0,145	0,449	0,862	1,35	1,88	2,46	3,07	3,7	4,35	5,024	5,71	6,409
0,92	0,01	0,167	0,495	0,931	1,44	2	2,59	3,22	3,87	4,54	5,221	5,921	6,634
0,91	0,013	0,189	0,54	0,999	1,53	2,1	2,72	3,36	4,02	4,7	5,405	6,118	6,844
0,9	0,016	0,211	0,584	1,064	1,61	2,2	2,83	3,49	4,17	4,87	5,578	6,304	7,041
0,89	0,019	0,233	0,628	1,127	1,69	2,3	2,95	3,62	4,31	5,02	5,742	6,48	7,228
0,88	0,023	0,256	0,671	1,188	1,77	2,4	3,05	3,74	4,44	5,16	5,899	6,648	7,407
0,87	0,027	0,279	0,714	1,249	1,85	2,49	3,16	3,85	4,57	5,3	6,05	6,809	7,577
0,86	0,031	0,302	0,756	1,308	1,92	2,57	3,26	3,97	4,7	5,44	6,196	6,964	7,742
0,85	0,036	0,325	0,798	1,366	1,99	2,66	3,36	4,08	4,82	5,57	6,336	7,114	7,901
0,84	0,041	0,349	0,839	1,424	2,07	2,75	3,45	4,19	4,93	5,7	6,473	7,259	8,055
0,83	0,046	0,373	0,881	1,481	2,14	2,83	3,55	4,29	5,05	5,82	6,606	7,401	8,205
0,82	0,052	0,397	0,922	1,537	2,21	2,91	3,64	4,39	5,16	5,94	6,737	7,54	8,351
0,81	0,058	0,421	0,964	1,593	2,27	2,99	3,73	4,49	5,27	6,06	6,864	7,675	8,494
0,8	0,064	0,446	1,005	1,649	2,34	3,07	3,82	4,59	5,38	6,18	6,989	7,807	8,634

Навчальне видання

Пістунов Ігор Миколайович
Лобова Надія Володимирівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ.

З елементами електронних таблиць

(Навчальний посібник)

Редакційно-видавничий комплекс

У редакції авторів

Підписано до друку 2005 . Формат 30 х 42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Умов. друк. арк. 6,86.
Обліково-видавн. арк. 6,92. Тираж 500 прим. Зам. №

Підготовлено до друку та надруковано
у Національному гірничому університеті.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №1842.
49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.