

Е. М. Киселева  
Л. С. Коряшкина

**МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО  
РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ:**

*линейные, нелинейные, динамические задачи*

Е. М. Киселева  
Л. С. Коряшкина

---

---

**МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ  
ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ  
МНОЖЕСТВ:**

*линейные  
нелинейные  
динамические задачи*

---

---

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Министерство образования и науки Украины  
Днепропетровский национальный университет  
имени Олеся Гончара

---

---

Е. М. Киселева, Л.С. Коряшкина

**МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ  
ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ  
МНОЖЕСТВ:**

*линейные, нелинейные, динамические задачи*

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 2013

**Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкіна**

**К44** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи: монография. – К.: Наукова думка, 2013. – с.

Излагается математическая теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств  $n$ -мерного евклидова пространства, являющихся неклассическими задачами бесконечномерного математического программирования. Особое внимание уделяется наиболее сложным задачам, характеризующимся нелинейностью критериев оптимальности разбиения, наличием дополнительных ограничений, динамическим характером параметров. Рассматриваются также модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств, возникающих при управлении распределенными системами, в частности, системами параболического типа. Приводится широкий спектр практических приложений непрерывных задач оптимального разбиения множеств и родственных с ними задач оптимального покрытия, геометрического проектирования. Описываются некоторые направления дальнейшего развития теории и методов решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств.

Для специалистов в области вычислительной и прикладной математики, научных работников, аспирантов и студентов, интересующихся современными проблемами теории оптимизации, в том числе недифференцируемой, математическим моделированием, проблемами территориального планирования, оптимального размещения объектов различной природы в заданной области, других задач, сводящихся к моделям оптимального разбиения множеств.

Викладається математична теорія неперервних задач оптимального розбиття множин  $n$ -вимірного евклідового простору, які є некласичними задачами нескінченновимірного математичного програмування. Особлива увага приділяється найбільш складним задачам, що характеризуються нелінійністю критеріїв оптимальності розбиття, наявністю додаткових обмежень, динамічним характером деяких параметрів. Розглядаються також моделі і методи розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин, що виникають у випадку керування розподіленими системами, зокрема, системами, поведінка яких описується диференціальними рівняннями параболічного типу. Наводиться широкий спектр практичних застосувань неперервних задач оптимального розбиття множин та споріднених із ними задач оптимального покриття, геометричного проектування. Описуються деякі напрями подальшого розвитку теорії і методів розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин.

Для фахівців у галузі обчислювальної та прикладної математики, науковців, аспірантів та студентів, які цікавляться сучасними проблемами теорії оптимізації, в тому числі недиференційованої, математичним моделюванням, проблемами територіального планування, оптимального розміщення об'єктів різної природи в заданій області, інших завдань, що зводяться до моделей оптимального розбиття множин.

*Печатается по решению ученого совета  
Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара  
(протокол № 14 от 01 июля 2013 г.)*

**Рецензенты:**

академик НАН Украины **И. В. Сергиенко**,  
член-корреспондент НАН Украины **Ю. Г. Стоян**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	8
<b>ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ</b> .....	12
1.1. Математические модели непрерывных задач оптимального разбиения множеств $n$ -мерного евклидова пространства $E_n$ на подмножества.....	12
1.1.1. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств.....	12
1.1.2. Непрерывные линейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств.....	17
1.1.3. Непрерывные нелинейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств.....	26
1.1.4. Непрерывные нелинейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств.....	27
1.1.5. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств в условиях неопределённости.....	29
1.1.6. Динамические задачи оптимального разбиения множеств.....	52
1.2. Общая постановка непрерывных задач оптимального разбиения множеств $n$ -мерного евклидова пространства $E_n$ на подмножества. Классификация задач.....	74
1.3. Методы и алгоритмы решения непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств из $E_n$ на подмножества.....	78
1.3.1. Многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств как с заданным положением центров подмножеств, так и с неизвестными заранее координатами этих центров.....	79
1.3.2. Однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств при ограничениях как с заданным положением центров подмножеств, так и с неизвестными заранее координатами этих центров.....	101
1.3.3. Методы и алгоритмы решения непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств из $E_n$ с дополнительными ограничениями.....	110
1.3.4. Решение модельных задач.....	141
<b>ГЛАВА 2. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ <math>n</math>-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА <math>E_n</math> НА ПОДМНОЖЕСТВА</b> .....	160
2.1. Нелинейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств для случая выпуклого целевого функционала.....	160
2.1.1. Постановка задачи.....	161

2.1.2.	Обоснование метода решения задачи	165
2.1.3.	Алгоритм решения задачи	173
2.1.4.	Решение модельных задач	176
2.2.	Нелинейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств	181
2.2.1.	Постановка задачи	181
2.2.2.	Описание метода решения задачи	183
2.2.3.	Алгоритм решения задачи	189
2.2.4.	Результаты решения модельных задач	193
<b>ГЛАВА 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С ФУНКЦИОНАЛОМ, ЛИНЕЙНЫМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕННОЙ СОСТОЯНИЯ</b>		<b>200</b>
3.1.	Простейшая динамическая задача оптимального разбиения множеств	200
3.1.1.	Математическая модель простейшей динамической задачи оптимального разбиения	200
3.1.2.	Обоснование метода решения задачи. Исследование свойств ее решений	202
3.1.3.	Численные алгоритмы решения задачи	222
3.1.4.	Анализ результатов вычислительных экспериментов	225
3.1.5.	Обобщение задачи на случай наличия фазовых ограничений	229
3.1.6.	Обобщение задачи на случай наличия интегральных ограничений на фазовую переменную	247
3.2.	Динамическая задача оптимального разбиения множества с размещением центров подмножеств	270
3.2.1.	Математическая постановка задачи	270
3.2.2.	Метод решения задачи	271
3.2.3.	Численный алгоритм решения задачи. Анализ результатов вычислительных экспериментов	279
3.3.	Динамическая задача оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами	285
3.3.1.	Постановка задачи	285
3.3.2.	Сведение динамической задачи оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами к семейству задач оптимального управления	286
3.3.3.	Необходимые и достаточные условия оптимальности. Обоснование метода решения	289
3.3.4.	Численный алгоритм решения задачи	295
3.3.5.	Особенности вычислительной реализации алгоритма. Анализ результатов решения модельных задач	297
3.3.6.	Динамическая задача оптимального разбиения множеств с управляемыми центрами подмножеств. Необходимые условия оптимальности	302
<b>ГЛАВА 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ</b>		<b>308</b>

4.1. Математическая модель и метод решения динамической задачи оптимального разбиения множеств с квадратичным критерием качества. Статическое разбиение	308
4.1.1. Постановка задачи	308
4.1.2. Метод и алгоритм решения задачи	312
4.1.3. Исследование свойств решений	318
4.2. Математическая модель и метод решения динамической задачи с квадратичным функционалом. Динамическое разбиение	322
4.2.1. Постановка задачи и ее эквивалент в терминах характеристических функций подмножеств	322
4.2.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности	324
4.2.3. Алгоритм решения задачи	326
4.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности для непрерывной динамической задачи оптимального разбиения множеств без ограничений	328
4.3.1. Постановка задачи	329
4.3.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности	330
4.4. Динамическая задача оптимального разбиения множества с недифференцируемым целевым функционалом	338
4.4.1. Постановка задачи и метод ее решения	339
4.4.2. Построение дифференциала Гато функционала задачи	341
4.4.3. Замечания относительно численной реализации алгоритма решения задачи	343
4.5. Непрерывная нелинейная динамическая задача оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств при ограничениях	344
4.5.1. Постановка задачи	344
4.5.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности	347
4.5.3. Численный алгоритм решения задачи	354
<b>ГЛАВА 5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ УПРАВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ</b>	<b>358</b>
5.1. Задача стартового управления параболической системой с линейным функционалом	358
5.1.1. Постановка задачи управления и ее эквивалент в терминах динамических задач оптимального разбиения множеств. Понятие решения задачи	358
5.1.2. Условия существования решения динамической задачи оптимального разбиения множеств	361
5.1.3. Описание метода решения задачи. Численный алгоритм	362
5.1.4. Оценка сходимости конечномерной аппроксимации задачи оптимального разбиения множества	367
5.1.5. Результаты решения задач управления с помощью алгоритма, основанного на функциях Грина	373

5.2. Динамические задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств, к которым сводятся некоторые задачи управления параболическими системами.....	377
5.2.1. Постановка задачи распределенного управления параболической системой и ее аналог в терминах теории непрерывных задач оптимального разбиения множества.....	377
5.2.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности. Метод решения задачи. Численный алгоритм.....	379
5.2.3. Анализ результатов вычислительных экспериментов.....	387
5.3. Применение аппарата сопряженных уравнений для сведения задач управления параболическими системами к динамическим задачам оптимального разбиения множеств.....	390
5.3.1. Постановка задачи стартового управления и ее эквивалент в терминах теории оптимального разбиения множеств.....	391
5.3.2. Совокупность соотношений, характеризующих оптимальное разбиение.....	393
5.3.3. Численный алгоритм решения задачи.....	396
5.3.4. Результаты решения модельных задач. Сравнительная характеристика двух подходов к сведению задач управления к динамическим задачам оптимального разбиения множеств.....	397
5.4. Непрерывные нелинейные динамические задачи оптимального разбиения множеств как модели некоторых обратных задач математической физики.....	402
5.4.1. Постановка модельной задачи восстановления разрывных начальных условий для параболического уравнения.....	402
5.4.2. Сведение обратной задачи к непрерывной задаче оптимального разбиения множества.....	403
5.4.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности редуцированной задачи оптимального разбиения множества.....	405
5.4.4. Конечномерная аппроксимация задачи оптимального разбиения множества и алгоритм ее решения.....	413
5.4.5. Сходимость и оценка погрешности конечномерной аппроксимации задачи.....	416
5.4.6. Анализ результатов вычислительных экспериментов по восстановлению разрывной правой части параболического уравнения и начальных условий.....	422
5.5. Специфика решения динамических задач оптимального разбиения множеств с недифференцируемым функционалом, к которым сводятся некоторые задачи управления параболическими системами.....	427
5.5.1. Постановка задачи оптимального управления и схема метода ее решения.....	427
5.5.2. Дифференциал Гато функционала вспомогательной задачи.....	429
5.5.3. Элементы вычислительной технологии. Результаты численного решения модельных задач.....	431
<b>ГЛАВА 6. ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ.....</b>	<b>437</b>

6.1. Диаграмма Вороного как решение задачи оптимального разбиения множества из $E^n$ без ограничений.....	437
6.2. Применение методов оптимального разбиения множеств к решению некоторых задач охраны окружающей среды.....	456
6.2.1. Задача формирования экологической структуры вокруг промышленных объектов.....	457
6.2.2. Задача одновременного планирования размещения промышленных объектов и экологически значимых зон.....	464
6.2.3. Результаты решения модельных задач.....	471
6.3. Построение оптимальных квадратур с помощью метода оптимального разбиения множеств.....	476
6.3.1. Сведение задачи построения оптимальных квадратур к задаче оптимального разбиения множества $\Omega$ .....	478
6.3.2. Алгоритм отыскания узлов оптимальной квадратурной формулы.....	481
6.3.3. Алгоритмы отыскания коэффициентов оптимальной квадратурной формулы.....	483
6.4. Решение непрерывных задач оптимального покрытия множеств.....	489
6.4.1. Свойства непрерывной задачи об оптимальном покрытии.....	494
6.4.2. Алгоритм оптимального покрытия множества шарами минимального радиуса, основанный на использовании методов оптимального разбиения множеств.....	497
6.4.3. Исследование эффективности алгоритма оптимального с-покрытия.....	502
6.4.4. Выводы к разделу 6.4.....	517
6.5. Решение задач глобальной оптимизации с применением методов оптимального разбиения множеств.....	518
6.5.1. Сведение задачи глобальной оптимизации к задаче оптимального разбиения множеств.....	521
6.5.2. Алгоритмы решения задачи глобальной оптимизации, сведенной к задаче оптимального разбиения.....	525
<b>ГЛАВА 7. ДАЛЬНЕЙШИЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ И МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ.....</b>	<b>534</b>
7.1. Методы оптимального разбиения множеств в задачах идентификации динамических систем.....	534
7.2. Применение методов оптимального разбиения множеств для решения геометрических обратных задач математической физики.....	556
7.3. Применение методов оптимального разбиения множеств к задачам $k$ -кратного покрытия.....	557
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ.....</b>	<b>574</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ.....</b>	<b>592</b>



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств (ОРМ) представляет собой активно развивающееся направление современной теории оптимизации. Интерес к непрерывным моделям оптимального разбиения множеств, с одной стороны, вызван тем, что к указанным моделям сводится в математической постановке достаточно широкий класс как теоретических, так и практических задач оптимизации. Типичными представителями непрерывных задач ОРМ являются бесконечномерные транспортные задачи, или более общие – бесконечномерные задачи размещения предприятий с одновременным разбиением данного региона, непрерывно заполненного потребителями, на области потребителей, каждая из которых обслуживается одним предприятием, с целью минимизации транспортных и производственных затрат. В роли потребителей здесь могут выступать также телефонные абоненты, школьники, избиратели, точки орошаемой территории, пациенты для диагностики заболеваний и т. д.

Необходимость в рассмотрении бесконечномерных задач размещения возникает тогда, когда потребителей «очень много», например, в задачах о телефонных, радио-, телеабонентах, о школьных регионах, об избирательных округах и т. п., и формулировка задачи размещения как дискретной математической модели становится нецелесообразной из-за трудностей, связанных с решением задач чрезмерно большой размерности.

Кроме того, встречаются задачи, сводящиеся к задачам оптимального разбиения, у которых множество, разбиваемое на подмножества, уже изначально континуально по своей структуре. Это, например, задача отыскания областей притяжения локальных минимумов некоторой многоэкстремальной функции; непрерывные задачи о шаровом покрытии; задачи отыскания узлов оптимальных кубатурных формул для вычисления интегралов; при вычислении решающих правил в нелинейных задачах целочисленного стохастического программирования; в теории статистических решений при разбиении пространства признаков на непересекающиеся классы; задачи, в которых размещаемый объект рассматривается не как точечный, а как протяженный (так называемые задачи планировки).

С другой стороны, интерес к непрерывным моделям оптимального разбиения множеств обусловлен тем, что эти модели являются еще одним источником, порождающим негладкие задачи.

Основы математической теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств  $n$ -мерного евклидова пространства на подмножества, являющихся неклассическими задачами бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными, заложены в работе [65]. Здесь же приведена обширная библиография, а также широкий спектр практических приложений непрерывных задач оптимального разбиения множеств и родственных с ними задач: оптимального покрытия, геометрического проектирования, классификации и кластеризации.

В теории непрерывных задач ОРМ, см. [65] сформировался ряд направле-

ний, обусловленных как различными сферами ее приложений, так и типами математических постановок задач разбиения. Это:

- детерминированные линейные и нелинейные, однопродуктовые и многопродуктовые задачи ОРМ при ограничениях, как с заданным положением центров подмножеств, так и с отысканием оптимального варианта их расположения;

- задачи оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности, для снятия неопределенности в которых предлагается применять либо математический аппарат стохастического бесконечномерного математического программирования (если часть исходной информации имеет вероятностный характер), либо аппараты нечетких множеств и нечеткой логики (если параметры, входящие в описание моделей, являются нечеткими, неточными, недостоверными и т. д.);

- динамические задачи оптимального разбиения с критерием оптимальности, зависящим от фазовых траекторий и управления некоторой заданной управляемой системы;

- непрерывные задачи о шаровом покрытии, сводящиеся к задачам ОРМ.

Для решения приведенных классов задач оптимального разбиения множеств предложен единый подход, в основе которого лежит следующая идея. Исходные задачи ОРМ, которые математически сформулированы как бесконечномерные задачи оптимизации, сводятся определенным образом (например, через функционал Лагранжа) к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина, для численного решения которых применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации, а именно различные модификации  $g$ -алгоритма Н. З. Шора. Особенностью такого подхода для линейных задач ОРМ является тот факт, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удастся получить аналитически в явном виде, причем в аналитическое выражение могут входить параметры, отыскиваемые как оптимальное решение вышеназванных вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями.

Центральным этапом в математическом обосновании предложенных методов ОРМ является формулирование необходимых условий оптимальности, на которых основывается разработка численных алгоритмов решения задач ОРМ. В каждом из рассмотренных типов задач ОРМ такие условия получены с использованием своего теоретического аппарата, в зависимости от специфики данной конкретной задачи. В настоящее время ведутся исследования, направленные на создание единой теоретической базы для построения общих необходимых и достаточных условий оптимальности для широкого класса задач ОРМ, на основе аппарата теории функций множеств [46, 49, 50].

Изложенный в данной монографии теоретический материал представляет собой результат последовательного продолжения научных исследований для нелинейных и динамических задач ОРМ, проводимых в рамках научной школы доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки и техники Украины Е. М. Киселевой при Днепропетровском нацио-

нальном университете имени Олесь Гончара.

Первая глава монографии имеет вводный характер, содержит ряд математических моделей непрерывных задач оптимального разбиения множеств, их классификацию, а также алгоритмы решения линейных однопродуктовых и многопродуктовых непрерывных задач ОРМ как с заданным положением центров подмножеств, так и с отысканием неизвестных заранее координат этих центров. Такие задачи наиболее изучены на сегодняшний день. Методы и алгоритмы их решения представляют собой основу для разработки математического аппарата решения более сложных задач ОРМ, характеризующихся, например, нелинейностью критериев оптимальности разбиения, наличием дополнительных ограничений в задаче, динамическим или стохастическим характером некоторых параметров задачи.

Вторая глава посвящена методам решения нелинейных задач оптимального разбиения множеств, как однопродуктовых, так и многопродуктовых, с различными дополнительными ограничениями на разбиение, как с заданными, так и с неизвестными заранее координатами центров подмножеств, составляющих оптимальное разбиение множества. В отличие от линейных задач ОРМ, подробно рассмотренных в [65], для которых оптимальное решение исходной бесконечномерной задачи удается найти в явном виде, в нелинейном случае отыскание оптимального решения исходной бесконечномерной задачи сводится к отысканию решения некоторого вспомогательного операторного уравнения с параметрами.

В третьей главе рассматриваются динамические задачи оптимального разбиения множеств с функционалом, линейным относительно переменной состояния. Приведены методы решения динамических задач ОРМ, в которых само разбиение может носить как статический, так и динамический характер, то есть границы между подмножествами в течение рассматриваемого периода времени могут либо оставаться неизменными, либо быть подвижными.

В четвертой главе речь идёт о разработке методов решения динамических задач оптимального разбиения множеств, в которых либо функционал качества разбиения, либо дифференциальное уравнение, описывающее изменение состояния рассматриваемой системы, обладают свойством нелинейности.

Пятая глава содержит описание моделей и методов решения динамических задач оптимального разбиения множеств, возникающих при управлении распределенными системами, в частности, такими, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями параболического типа.

В шестой главе приведены различные приложения моделей и методов теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Продемонстрирована возможность применения математического и алгоритмического аппарата решения непрерывных задач ОРМ для: построения диаграммы Вороного и различных ее вариаций, имеющих широкий спектр практических приложений; построения оптимальных квадратур; поиска глобального оптимума в задачах многомерной оптимизации; решения непрерывных задач оптимального шарового покрытия; решения некоторых задач охраны окружающей среды.

В седьмой главе представлены некоторые направления дальнейшего развития теории и методов решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств.

Предложенные в монографии методы решения задач ОРМ теоретически обоснованы, и на их основе разработаны алгоритмы, составной частью которых, как правило, является  $g$ -алгоритм Н. З. Шора или его модификации. Все алгоритмы программно реализованы и протестированы на модельных задачах.

Использованные в настоящей монографии программные реализации различных вариантов  $g$ -алгоритма разработаны в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова под руководством академика НАН Украины, доктора физико-математических наук, профессора Н. З. Шора и его учениками.

Монография написана по совместным результатам исследований авторов с представителями научной школы доктора физико-математических наук Е. М. Киселевой кандидатами физико-математических наук: С. А. Ус, Л. И. Лозовской, Т. Ф. Степанчук, М. С. Дунайчук, Я. Е. Кадочниковой, В. А. Строевой, а также младшими научными сотрудниками Т. А. Шевченко, аспиранткой А. А. Жильцовой.

Авторы искренне признательны Н.В. Балейко за оформление рукописи.

Надеемся, что монография будет интересна и полезна как начинающим, так и опытным исследователям в области бесконечномерного математического программирования, а также для практиков, которые занимаются решением проблем территориального планирования, оптимального размещения объектов различной природы в заданной области, других задач, сводящихся к моделям оптимального разбиения множеств.

# Глава 1

## СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

### *1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ N-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА $E_n$ НА ПОДМНОЖЕСТВА*

#### **1.1.1. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств**

##### *1.1.1.1. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств из $E_n$ без ограничений как с заданным положением центров подмножеств, так и с неизвестными заранее координатами этих центров*

Сформулируем сначала самую простую непрерывную линейную задачу оптимального разбиения множеств (ОРМ), а именно однопродуктовую задачу ОРМ без ограничений с заданными координатами некоторых, характерных для каждого подмножества, точек, назовем их "центрами" подмножеств, см. [65].

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ .

Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  из  $\Omega \subset E_n$  назовем **возможным разбиением множества  $\Omega$**  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , если

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N,$$

где  $\text{mes}(\cdot)$  означает меру Лебега.

Обозначим класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , через  $\Sigma_{\Omega}^N$ , т. е.

$$\Sigma_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N\}.$$

Введем функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

где функции  $c(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega$   $x \in \Omega$ , измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ;  $\rho(x)$  – ограниченная, измеримая, неотрицательная на  $\Omega$  функция;  $a_1, \dots, a_N$  – заданные неотрицательные числа.

Здесь и в дальнейшем интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем считать, что мера множества граничных точек  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , равна нулю.

Тогда под **непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) без ограничений с заданными координатами центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , соответственно**, будем понимать следующую задачу.

**Задача А1.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}),$$

где

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx;$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ ;  $a_1, \dots, a_N$

– заданные неотрицательные числа.

Разбиение  $\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\}$ , являющееся решением задачи **А1**, назовем оптимальным.

На рис. 1.1 изображено разбиение множества  $\Omega \subset E_2$  на три подмножества  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  с центрами  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  этих подмножеств, соответственно.

Введем характеристическую функцию

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} i = 1, \dots, N,$$

подмножества  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , и перепишем задачу **А1** в следующем виде.

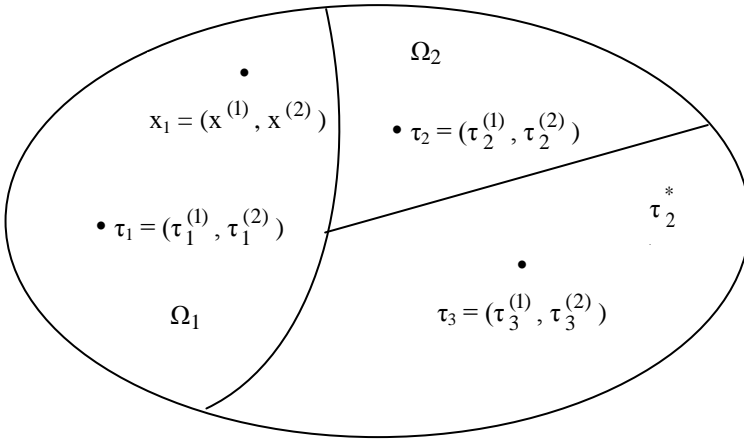


Рис. 1.1. Разбиение множества  $\Omega$  на три подмножества

**Задача В1.** Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) :$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ почти всюду (п. в.) для } x \in \Omega,$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N;$$

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  – заданный вектор из  $\Omega^N$ .

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) без ограничений с отысканием координат центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  соответственно, будем понимать следующую задачу.

**Задача А2.** Найти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega.$$

Перепишем задачу **A2** в терминах характеристических функций  $\lambda_i(x)$  подмножеств  $\Omega_i, i=1, \dots, N$ , в следующем виде.

**Задача B2.** Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) :$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega,$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

*1.1.1.2. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств из  $E_n$  при ограничениях как с заданным положением центров подмножеств, так и с неизвестными заранее координатами этих центров*

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданными координатами центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , соответственно, будем понимать следующую задачу.

**Задача A3.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N,$$



где  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Перепишем задачу **A3** в терминах характеристических функций  $\lambda_i(x)$  подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в следующем виде.

**Задача В3.** Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x): \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  – заданный вектор из  $\Omega^N$ .

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  этих подмножеств, соответственно, будем понимать следующую задачу.

**Задача А4.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, 0 < b_i \leq S, i = 1, \dots, N.$$

Перепишем задачу **A4** в терминах характеристических функций  $\lambda_i(x)$  подмножеств  $\Omega_i, i=1, \dots, N$ , в следующем виде.

**Задача B4.** Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x): \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

### 1.1.2. Непрерывные линейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств

В данном разделе приведем математические постановки так называемых "многопродуктовых" задач оптимального разбиения, являющихся обобщением задач из пункта 1.1.1 на случай, когда (например, в терминах бесконечномерной задачи размещения) каждый  $i$ -й производитель с координатой  $\tau_i, i = 1, \dots, N$ , производит продукцию нескольких видов.

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ .

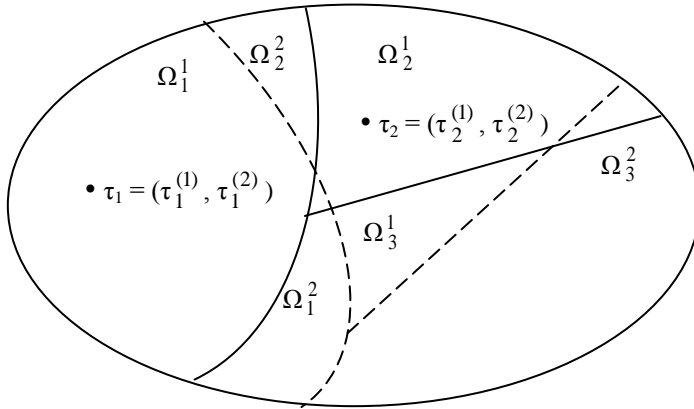
Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1, \dots, \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j, \dots, \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M$  множества  $\Omega$  назовем возможным

разбиением множества  $\Omega \subset E_n$  на  $N$  подмножеств по каждому из  $M$  продуктов, если

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i^j = \Omega, j=1, \dots, M, \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \\ i \neq k, i, k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

причем  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ ,  $i = 1, \dots, N$  – общий центр для подмножеств  $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$ , принадлежащий  $\Omega$ .

На рис. 1.2 изображено возможное разбиение множества  $\Omega \subset E_2$  на три подмножества  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  по каждому из двух "продуктов" ( $M = 2$ ). Сплошной линией обозначена граница по 1-му продукту, пунктирной линией – граница по 2-му продукту,  $\tau_i$  – общий центр для подмножеств  $\Omega_i^1, \Omega_i^2$ ,  $i=1, 2, 3$ .



**Рис. 1.2. Возможное разбиение двухпродуктовой задачи на три подмножества:**  
 сплошные линии – граница по 1-му продукту;  
 пунктирные линии – граница по 2-му продукту;  
 $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – общий центр для подмножеств  $\Omega_i^1, \Omega_i^2$

Обозначим совокупность всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств по  $M$  продуктам через  $\sum_{\Omega}^{NM}$ , т. е.

$$\sum_{\Omega}^{NM} = (\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\} : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i^j = \Omega, \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \\ i \neq k, i, k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M).$$

Под непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на его подмножества  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M$  (среди которых могут быть пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданным положением центров подмножеств будем понимать следующую задачу.

**Задача А5.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\}} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) dx$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM},$$

где  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ ;  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ .

Здесь функции  $c^j(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ ; функции  $\rho^j(x)$  – ограниченные, измеримые на  $\Omega$  для всех  $j = 1, \dots, M$ ;  $a_1^1, \dots, a_N^M, b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Точка  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ , соответствующая подмножеству  $\Omega_i^j$ , одна и та же для всех  $j = 1, \dots, M$ , является общим центром подмножеств  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^M$ .

Будем считать, что мера множества граничных точек  $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , равна нулю.

Введём характеристическую функцию

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^j, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i^j, \end{cases}$$

подмножества  $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ .

Перепишем задачу **A5** в терминах характеристических функций  $\lambda_i^j(x)$  подмножеств  $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , в следующем виде.

**Задача B5.** Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_4} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где

$$\Gamma_4 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_3 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) :$$

$$\lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) - \text{заданный вектор из } \Omega^N.$$

Под непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на его подмножества  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_2^j, \dots, \Omega_N^M$  (среди которых могут быть пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств будем понимать следующую задачу.

**Задача A6.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_2^j, \dots, \Omega_N^M\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) dx,$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $a_1^1, \dots, a_N^M, b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Перепишем задачу **A6** в терминах характеристических функций  $\lambda_i^j(x)$  подмножеств  $\Omega_i^j$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ , в следующем виде.

**Задача B6.** Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_4 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где

$$\Gamma_4 = \{\lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N\};$$

$$\Gamma_3 = \{\lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_1^M(x); \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)):$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega\};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

В следующей постановке многопродуктовой задачи ОРМ кроме ограничений в форме равенств и неравенств из задачи **A6** присутствуют дополнительные ограничения, которые, например, для бесконечномерной транспортной задачи представляют собой ограничения на суммарные транспортные издержки по доставке продукции от  $i$ -го,  $i = 1, \dots, N$ , производителя к потребителям его сферы обслуживания.

Таким образом, под **непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества**  $\Omega \subset E_n$  на его подмножест-

ва  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M$  (среди которых могут быть пустые) при дополнительных ограничениях с заданным положением центров подмножеств будем понимать следующую задачу.

**Задача А7.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M\}} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) dx$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) dx \leq l_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM},$$

где  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  – заданный вектор из  $\Omega^N$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $a_1^1, \dots, a_N^M, b_1, \dots, b_N, l_1, \dots, l_N$  – заданные действительные неотрицательные числа, такие, что выполняются условия разрешимости задачи.

Перепишем задачу **А7** в терминах характеристических функций  $\lambda_i^j$  х подмножеств  $\Omega_i, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , в следующем виде.

**Задача В7.** Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где

$$\Gamma_5 = \{\lambda(x): \lambda(x) \in \Gamma_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx \leq l_i, i = 1, \dots, N};$$

$$\Gamma_3 = \{\lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)):$$

$$\lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) - \text{заданный вектор из } \Omega^N.$$

Под непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на его подмножества  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M$  (среди которых могут быть пустые) при дополнительных ограничениях с отысканием координат центров подмножеств будем понимать следующую задачу.

**Задача А8.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) dx$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) dx \leq l_i, i = 1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $a_1^1, \dots, a_N^M, b_1, \dots, b_N, l_1, \dots, l_N$  – заданные действительные неотрицательные числа, такие, что выполняются условия разрешимости задачи.

Перепишем задачу **А8** в терминах характеристических функций  $\lambda_i^j(x)$  подмножеств  $\Omega_i, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , в следующем виде.



**Задача В8.** Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_5 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где

$$\Gamma_5 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx \leq l_i, \quad i = 1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_3 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) :$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

**Непрерывная линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на его подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть пустые) при дополнительных ограничениях с отысканием координат центров подмножеств** является частным случаем задачи **A8** и имеет следующий вид.

**Задача A9.** Найти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, (\tau_1, \dots, \tau_N))} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1.1.1)$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N, \quad (1.1.2)$$

$$\int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx \leq l_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1.3)$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N,$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $b_1, \dots, b_N, l_1, \dots, l_N$  – заданные действительные числа, удовлетворяющие условиям непустоты множества допустимых решений задачи **A9**, которые будут сформулированы ниже.

Отметим, что задача **A9** является бесконечномерным аналогом транспортной задачи (или непрерывной моделью задачи размещения-распределения с ограничениями), где каждый потребитель  $x \in \Omega$  связан только с одним производителем  $\tau_i, i = 1, \dots, N$ . В такой интерпретации функция  $\rho(x)$  определяет спрос на производимый продукт в точках множества  $\Omega$ , функции  $c(x, \tau_i)$  характеризуют стоимости транспортировки единицы продукта от  $i$ -го производителя в любую точку  $x$  множества  $\Omega$ .

Условия (1.1.3), которые называются дополнительными ограничениями, представляют собой ограничения на суммарные издержки по транспортировке продукции из  $i$ -го,  $i = 1, \dots, N$ , пункта производства в пункты потребления его сферы обслуживания, т. е. ограничивают коммуникационные возможности соответствующих производителей.

Условия же (1.1.1) – (1.1.2) можно рассматривать как ограничения на производственные мощности производителей.

Перепишем задачу **A9** в терминах характеристических функций  $\lambda_i(x)$  подмножеств  $\Omega_i, i = 1, \dots, N$ , в следующем виде.

**Задача В9.** Найти

$$\min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Gamma_6 \times \Omega^N} \int \sum_{i=1}^N c(x, \tau_i) + a_i \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где

$$\Gamma_6 = \{ \lambda(x): \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п.в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p + 1, \dots, N,$$

$$\int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq l_i, i = 1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega\}; \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

### 1.1.3. Непрерывные нелинейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств

Приведём математическую постановку непрерывной нелинейной однопродуктовой задачи оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  этих подмножеств соответственно, см. [47].

**Задача А10.**

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i \left( \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \right) + \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx \right]$$

при условиях

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \rho(x) dx &= b_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega_i} \rho(x) dx &\leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N, \\ \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} &\in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N, \end{aligned}$$

где  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ .

Здесь функции  $c(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ;  $\rho(x)$  – ограниченная, измеримая, неотрицательная на  $\Omega$  функция;  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$  – действительные, ограниченные, **выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента**;  $b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Перепишем задачу **A10** в терминах характеристических функций  $\lambda_i(x)$  подмножеств  $\Omega_i, i=1, \dots, N$ , в следующем виде.

**Задача В10.** Найти

$$\min_{\lambda, \tau \in \Gamma_2 \times \Omega^N} \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right],$$

где  $\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N; \tau \in \Omega^N,$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i=1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}.$$

### 1.1.4. Непрерывные нелинейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств

Под непрерывной нелинейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \in E_n$  на его подмножества  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M$  (среди которых могут быть и пустые) с отысканием координат центров подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств будем понимать следующую задачу, см. [62].

**Задача A11.** Найти

$$\min_{\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^M, \tau_1, \dots, \tau_N} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\varphi_i^j \left( \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \right) + \int_{\Omega_i^j} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) dx].$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N,$$

$$\{ \Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M \} \in \sum_{\Omega}^{NM}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, при этом выполняются условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Введём характеристическую функцию

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^j, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i^j, \end{cases}$$

подмножества  $\Omega_i^j$ ,  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ .

Перепишем задачу A10 в терминах характеристических функций  $\lambda_i^j(x)$  подмножеств  $\Omega_i^j$ ,  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , в следующем виде.

**Задача В11.** Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_4 \times \Omega^N} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\varphi_i^j (\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx) + \int_{\Omega} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx],$$

где

$$\Gamma_4 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_3 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \dots; \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) :$$

$$\lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

### 1.1.5. Непрерывные задачи ОРМ в условиях неопределённости

Сформулированные в предыдущих разделах модели оптимального разбиения множеств строго математически формализованы. Это так называемые детерминированные задачи бесконечномерного математического программирования. Однако реальные ситуации, для которых создаются модели оптимального разбиения множеств, чаще всего характеризуются некоторой степенью неопределенности, и качество принятых решений в таких оптимизационных задачах находится в прямой зависимости от полноты учета всех неопределенных факторов, существенных для последствий от принятых решений.

Неопределенность в принятии решений обусловлена недостаточной надежностью и количеством информации, на основе которой осуществляется выбор решения. Существуют различные виды неопределенности. Следуя, в основном, [17, 103] и не претендуя на полноту, приведем наиболее часто встречающиеся виды неопределенности: 1) принципиальная неопределенность, например, в известных ситуациях квантовой механики; 2) неопределенность, генерированная общим числом объектов или элементов, включенных в ситуацию, например, для числа элементов порядка большего, чем  $10^9$ ; 3) неопределенность, порожденная слишком высокой или недоступной платой за определенность; 4) неопределенность, вызванная недостатком исходной и текущей информации о происходящих процессах (противоречивость, неопределенность, неточность, нечеткость, неоднозначность и др.) или ее недостоверностью в силу технических, социальных и других причин; 5) неопределенность, связанная с ограничениями в ситуации принятия решений (ограничения по времени и элементам пространства параметров, характеризующих факторы принятия решений); 6) неопределенность, вызванная поведением среды или противника, влияющего на процесс принятия решения; 7) неопределенность, возникающая в силу недостатка опыта лица, принимающего решение, и знаний факторов, влияющих на принятие решения.

Таким образом, в процессах принятия решений имеется ряд ситуаций, обладающих той или иной степенью неопределенности и требующих для своего описания с целью получения решения такого математического аппарата, который бы априори включал в себя возможность появления неопределенности, и тем или иным методом позволял учесть эту неопределенность.

Исторически первым [103] таким аппаратом был аппарат теории вероятностей, в соответствии с которым неопределенность ситуации описыва-

ется некоторой нормированной мерой, характеризующей возможность появления наперед заданных случайных исходов (элементов или подмножеств некоторого множества).

К естественному продолжению вероятностных методов описания неопределенных ситуаций можно отнести теорию игр и теорию статистических решений. В теории игр неопределенность порождается конфликтом и антагонистическими интересами игроков, связанных между собой определенными правилами ведения игры. В теории же статистических решений в качестве одного из игроков выбирается пассивная среда или "природа", поведение которой характеризуется заданными законами распределения вероятностей. В принципе эти теории можно считать крайними случаями различных степеней градации неопределенности.

Оптимизационные задачи разбиения множеств в условиях неопределенности в исходной информации рассматриваются в рамках теории бесконечномерного математического программирования при неопределенности или неполной информации об исходных данных. В свою очередь, модели и методы решения задач бесконечномерного математического программирования в условиях неполной информации о параметрах условий задачи являются предметом развивающейся дисциплины – стохастического бесконечномерного математического программирования. Причем [114], если известны те или иные вероятностно-статистические параметры условий задачи, то говорят о **принятии решений в условиях риска**. В случаях, когда нет оснований для каких-либо суждений о статистических особенностях явлений, способных изменить предполагаемые значения параметров условий задачи, говорят о **принятии решений в условиях неопределенности**.

Далее приведём постановки задач двух типов: сформулируем вначале задачи оптимального разбиения множеств в условиях неполной информации об исходных данных, так называемые стохастические задачи ОРМ, и нечёткие задачи ОРМ. Задачи первого типа более интересны, чем детерминированные, с точки зрения практических приложений в смысле адекватности реальным процессам. К задачам оптимального разбиения в условиях неполной информации приводят, например, задачи размещения предприятий, обеспечивающих удовлетворение непрерывно распределенного спроса, в случае, когда спрос на продукцию и стоимость транспортировки продукции зависят от случайных факторов. Для учета влияния неопределенности в этих задачах будет применяться метод, использующий лишь некоторые субъективные вероятностные характеристики параметров задачи. Такие задачи относятся к классу задач стохастического бесконечномерного математического программирования.

Класс так называемых нечётких задач оптимального разбиения множеств связан с необходимостью учета факторов неопределенности, имеющих не вероятностно-статистическую природу. Это задачи ОРМ, в которых либо отдельные параметры, входящие в описание модели, являются нечеткими, неточными, недоопределенными; либо имеется недостоверное математическое описание некоторых зависимостей в модели (например, функций спроса и стоимости транспортировки единицы продукции в бесконечномерных транспортных задачах); либо нечетко сформулированы сами критерии и (или) системы ограничений; либо на модель оптимизации влияют внешние неконтролируемые возмущения различного рода и т. д. Для "снятия" неопределенности в таких задачах (т. е. для формализации неопределенной информации) применяется аппарат теории нечетких множеств, который базируется на понятии нечеткого множества, введенного Л. А. Заде [35], а также аппарат нечеткой логики.

### 1.1.5.1. Стохастические задачи оптимального разбиения множеств

Сформулируем стохастическую многопродуктовую задачу ОРМ при ограничении с отысканием координат центров подмножеств, являющаяся стохастическим аналогом детерминированной задачи оптимального разбиения А6 из п. 1.1.2.

Под **одноэтапной стохастической многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M$  при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств** будем понимать следующую задачу, которую будем еще называть MD-моделью многопродуктовой задачи ОРМ.

**Задача А6'.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} M \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega^j} [c^j(x, \tau_i, \xi_i^j) + a_i^j] \rho^j(x, \xi_0^j) dx$$

при условиях

$$M \sum_{j=1}^M \int_{\Omega^j} \rho^j(x, \xi_0^j) dx = b_i, \quad i=1, \dots, p,$$



$$M \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, \xi_0^j) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\{ \Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M \} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $a_1^1, \dots, a_N^M, b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем выполняется условие разрешимости задачи

$$S = M \int \sum_{j=1}^M \rho^j(x, \xi_0^j) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i=1, \dots, N;$$

$\xi_i^j = \xi_i^j(\theta) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ ) – случайные величины на вероятностном пространстве  $\Theta, \mathfrak{Z}, P$  с заданными конечными математическими ожиданиями  $\bar{\xi}_0^1, \dots, \bar{\xi}_N^1, \bar{\xi}_0^2, \dots, \bar{\xi}_N^2, \dots, \bar{\xi}_0^M, \dots, \bar{\xi}_N^M$  и дисперсиями  $\overset{\vee}{\xi}_0^1, \dots, \overset{\vee}{\xi}_N^M$ . Здесь и далее через  $M \bullet$  обозначено математическое ожидание случайной величины  $\bullet$ .

Функции  $c^j(x, \tau_i, y_i^j)$  действительные, ограниченные, измеримые по аргументу  $x$  на некотором открытом, ограниченном, выпуклом множестве  $W \supset \Omega$ , выпуклые по  $\tau_i$  на  $W$  и борелевские по  $y_i^j$  на множестве значений случайной величины  $\xi_0^j(\theta)$  для всех  $j = 1, \dots, M$ .

Заметим, что каждый из стохастических аналогов всех детерминированных задач ОРМ от **A1** до **A8** является частным случаем сформулированной задачи **A6**'.

MD-моделью стохастической многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств назовем следующую задачу.

**Задача A10.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} M \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} [c^j(x, \tau_i, \xi_i^j) + a_i^j] \rho^j(x, \xi_0^j) dx + \frac{1}{2} r(Mf^0)D \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} [c^j(x, \tau_i, \xi_i^j) + a_i^j] \rho^j(x, \xi_0^j) dx$$

при условиях

$$M \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, \xi_0^j) dx + \frac{1}{2} r(Mr^0) D \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, \xi_0^j) dx = b_i, i=1, \dots, p,$$

$$M \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, \xi_0^j) dx + \frac{1}{2} r(Mr^0) D \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, \xi_0^j) dx \leq b_i, i=p+1, \dots, N,$$

$$\{ \Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M \} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где

$$f^0(\{ \Omega_1^1, \dots, \Omega_N^M \}, \tau, \xi) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} [c^j(x, \tau_i, \xi_i^j) + a_i^j] \rho^j(x, \xi_0^j) dx,$$

$\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа;  $r(\cdot)$  – весовой коэффициент, называемый мерой неприятия риска.

### 1.1.5.2. Нечеткие задачи оптимального разбиения множеств

Прежде чем приступить к математической постановке нечетких задач ОРМ, изложим некоторые понятия нечеткой математики, используемые в настоящей работе, опираясь главным образом на работы [73, 84].

**Основные понятия теории нечетких множеств.** Пусть  $X = \{x\}$  – универсальное множество, т. е. полное множество, охватывающее всю проблемную область.

*Нечетким множеством*  $C$  на множестве  $X$  называется множество вида

$$C = \{ (x, \mu_C(x)), x \in X \},$$

где  $\mu_C: X \rightarrow [0,1]$  называется *функцией принадлежности нечеткого множества*  $C$ .

Значение функции принадлежности  $\mu_C(x)$  для конкретного  $x \in X$  называется *степенью принадлежности* этого элемента нечеткому множеству  $C$ .

Если множество  $[0,1]$  заменить на  $\{0,1\}$ , то функция принадлежности будет представлять собой характеристическую функцию обыкновенного (не нечеткого множества). То есть обычные множества составляют подкласс нечетких множеств.

Нечеткое множество  $C$  называется *пустым*, если его функция принадлежности равна нулю на всем множестве  $X$ , т. е.

$$\mu_C(x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Универсальное множество  $X$  описывается функцией принадлежности вида

$$\mu_X(x) = 1 \quad \forall x \in X.$$

Носителем нечеткого множества  $\mathcal{A}$  (обозначается  $\text{supp } \mathcal{A}$ ) с функцией принадлежности  $\mu_{\mathcal{A}}(x)$  называется множество (в обычном смысле) вида  $\text{supp } \mathcal{A} = \{x: x \in X, \mu_{\mathcal{A}}(x) > 0\}$ .

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что  $A = \text{supp } \mathcal{A}$ .

Нечеткое множество  $\mathcal{A}$  называется *нормальным*, если  $\sup_{x \in X} \mu_{\mathcal{A}}(x) = 1$ . В противном случае нечеткое множество называется *субнормальным*.

Величина  $h_{\mathcal{A}} = \sup_{x \in X} \mu_{\mathcal{A}}(x)$  называется *высотой нечеткого множества*.

Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – нечеткие множества в  $X$ . Говорят, что нечеткое множество  $\mathcal{A}$  *включает в себя (доминирует)* нечеткое множество  $\mathcal{B}$  (т. е.  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ), если  $\mu_{\mathcal{B}}(x) \leq \mu_{\mathcal{A}}(x) \quad \forall x \in X$ .

Множества  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  *эквивалентны*, т. е.  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , если  $\mu_{\mathcal{B}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(x) \quad \forall x \in X$ . Если  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , то и  $\text{supp } \mathcal{B} \subseteq \text{supp } \mathcal{A}$ .

*Множеством уровня  $\alpha$  ( $\alpha$ -срезом)* нечеткого множества  $\mathcal{A}$  в  $X$  называется (четкое) множество  $A_{\alpha} \subseteq X$ , такое, что

$$A_{\alpha} = \{x: x \subseteq X, \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Множество

$$C^+ = \{x: x \subseteq X, \mu_C(x) = 1\}$$

называется *ядром нечеткого множества  $C$* .

Интеграл от функции  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  на нечетком множестве  $\mathcal{A} \subseteq X$  по мере  $\rho$  определяется следующим образом:

$$\int_{\mathcal{A}} f(x) d\rho = \int_A f(x) \mu_{\mathcal{A}}(x) d\rho;$$

здесь интеграл в правой части есть интеграл Лебега по обычному множеству.

*Границами нечеткого множества  $\mathcal{A}$*  называются такие элементы универсального множества  $X$ , для которых значения функции принадлежности отличны от 0 и 1. Другими словами, границы нечеткого множества  $\mathcal{A} = \{x, \mu_{\mathcal{A}}(x)\}$  включают те и только те элементы  $x \in X$ , для которых  $0 < \mu_{\mathcal{A}}(x) < 1$ .

Элементы нечеткого множества  $x \in \mathcal{A}$ , для которых  $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 0,5$ , называются *точками перехода* этого нечеткого множества  $\mathcal{A}$ .

*Ближайшим четким множеством  $A$*  к нечеткому множеству  $\mathcal{A}$  называется множество, характеристическая функция которого определена следующим выражением:

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(x) < 0,5, \\ 1, & \text{если } \mu_A(x) > 0,5, \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_A(x) = 0,5. \end{cases}$$

**Операции над нечеткими множествами.** Объединением нечетких множеств  $A$  и  $B$  в  $X$  называется нечеткое множество  $A \cup B$ . Для  $A \cup B$  существует несколько вариантов задания функций принадлежности. Наиболее распространенными являются следующие:

$$\mu_{A \cup B}^1(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \quad x \in X,$$

$$\mu_{A \cup B}^2(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \quad x \in X,$$

$$\mu_{A \cup B}^3(x) = \min \{ 1, \mu_A(x) + \mu_B(x) \}, \quad x \in X.$$

Объединением нечетких множеств  $A_i, i = 1, \dots, n$ , в  $X$  называется нечеткое множество  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  с функцией принадлежности

$$\mu_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(x) = \max \{ \mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_i}(x), \dots, \mu_{A_n}(x) \}, \quad x \in X.$$

Если  $\{A_y\}$  – конечное или бесконечное семейство нечетких множеств с функциями принадлежности  $\mu_{A_y}(x, y)$ , где  $y \in Y$  – параметр семейства, то объединением  $C = \bigcup_Y A_y$  множеств этого семейства является нечеткое множество с функцией принадлежности  $\mu_C(x) = \sup_{y \in Y} \mu_{A_y}(x, y), \quad x \in X.$

Пересечением нечетких множеств  $A$  и  $B$  в  $X$  называется нечеткое множество  $A \cap B$ . Для  $A \cap B$  существует несколько способов задания функций принадлежности. Наиболее распространенными являются следующие:

$$\mu_{A \cap B}^1(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \quad x \in X,$$

$$\mu_{A \cap B}^2(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad x \in X,$$

$$\mu_{A \cap B}^3(x) = \max \{ 0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1 \}, \quad x \in X.$$

Пересечением нечетких множеств  $A_i, i = 1, \dots, n$ , в  $X$  называется нечеткое множество  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  с функциями принадлежности:

либо

$$\mu_{\bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}_i}(x) = \min \{ \mu_{\mathcal{A}_1}(x), \dots, \mu_{\mathcal{A}_1}(x), \dots, \mu_{\mathcal{A}_n}(x) \}, \quad x \in X,$$

либо

$$\mu_{\bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}_i}(x) = \mu_{\mathcal{A}_1}(x) \cdot \dots \cdot \mu_{\mathcal{A}_1}(x) \cdot \dots \cdot \mu_{\mathcal{A}_n}(x) = \prod_{i=1}^n \mu_{\mathcal{A}_i}(x), \quad x \in X.$$

Если  $\{\mathcal{A}_y\}$  – бесконечное или конечное семейство нечетких множеств с функциями принадлежности  $\mu_{\mathcal{A}_y}(x, y)$ , где  $y \in Y$  – параметр семейства, то *пересечением*  $C = \bigcap_Y \mathcal{A}_y$  множеств этого семейства является нечеткое множество с функцией принадлежности вида

$$\mu_C(x) = \inf_{y \in Y} \mu_{\mathcal{A}_y}(x, y), \quad x \in X.$$

Для *носителей нечетких множеств*  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  имеют место следующие свойства:

$$\text{supp}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\text{supp } \mathcal{A}) \cup (\text{supp } \mathcal{B}), \quad \text{supp}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = (\text{supp } \mathcal{A}) \cap (\text{supp } \mathcal{B}).$$

*Дополнением* нечеткого множества  $\mathcal{A}$  называется нечеткое множество  $\overline{\mathcal{A}}$  с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\overline{\mathcal{A}}}(x) = 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x), \quad x \in X.$$

Очевидно, выполняется  $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$ . Однако, в отличие от обычных (четких) множеств, вообще говоря,  $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ .

*Разность* множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  в  $X$  определяется как нечеткое множество  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$  с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}}(x) = \begin{cases} \mu_{\mathcal{A}}(x) - \mu_{\mathcal{B}}(x) & \text{при } \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \mu_{\mathcal{B}}(x), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(или  $\mu_{\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}}(x) = \max \{0, \mu_{\mathcal{A}}(x) - \mu_{\mathcal{B}}(x)\}$ ).

Следует заметить, что операция разности двух нечетких множеств не является коммутативной, т. е. в общем случае  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ .

По аналогии с обычными множествами иногда оказывается полезной операция *симметрической разности* двух нечетких множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$ ):

$$\mu_{\mathcal{A} \ominus \mathcal{B}}(x) = | \mu_{\mathcal{A}}(x) - \mu_{\mathcal{B}}(x) |, \quad x \in X.$$

При этом оказывается справедливым следующее утверждение:

$$\mathcal{A} \ominus \mathcal{B} = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}).$$

Для операций объединения и пересечения, заданных первым способом, справедливы следующие свойства:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} \cap \mathcal{B} &= \mathcal{B} \cap \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \cup \mathcal{B} &= \mathcal{B} \cup \mathcal{A} \end{aligned} \right\} \text{ коммутативность;}$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} &= \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \\ (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} &= \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \end{aligned} \right\} \text{ ассоциативность;}$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} &= (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \\ (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} &= (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \end{aligned} \right\} \text{ дистрибутивность;}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} &= \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}} \\ \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} &= \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}} \end{aligned} \right\} \text{ законы де Моргана.}$$

Декартово произведение  $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$  нечетких множеств  $\mathcal{A}_i$  в  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , определяется как нечеткое множество  $\mathcal{A}$  в декартовом произведении  $X = X_1 \times \dots \times X_n$  с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \min \{ \mu_{\mathcal{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\mathcal{A}_n}(x_n) \},$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X.$$

Выпуклой комбинацией нечетких множеств  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  в  $X$  называется нечеткое множество  $\mathcal{A}$  с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mu_i(x), \quad x \in X,$$

где  $\beta_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ .

Разложением нечеткого множества по его множествам уровня называется представление этого нечеткого множества в виде

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \mathcal{A}_{\alpha},$$

где  $\mu_{\alpha \mathcal{A}_{\alpha}}(x) = \alpha \mu_{\mathcal{A}_{\alpha}}(x)$ , а умножение  $\mathcal{A}_{\alpha}$  на  $\alpha \in [0,1]$  – это есть:  $\alpha \mathcal{A}_{\alpha} \Leftrightarrow \mu_{\alpha \mathcal{A}_{\alpha}}(x) = \alpha (\mu_{\mathcal{A}_{\alpha}}(x))$ ,  $x \in X$ , что эквивалентно

$$\mu_{\alpha \mathcal{A}_{\alpha}}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in \mathcal{A}_{\alpha}, \\ 0, & x \in \overline{\mathcal{A}_{\alpha}}. \end{cases}$$

Возведение  $\mathcal{A}$  в степень  $\alpha > 0$  – это есть:  $\mathcal{A}^{\alpha} \Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}^{\alpha}}(x) = (\mu_{\mathcal{A}}(x))^{\alpha}$ ,  $x \in X$ .

Операции концентрирования (CON) и растяжения (DIL) нечеткого множества  $\mathcal{A}$  определяются следующим образом:

$$\text{CON } \mathcal{A} = \mathcal{A}^2, \quad \text{DIL } \mathcal{A} = \mathcal{A}^{0.5},$$

где

$$\mu_{\mathcal{A}^\alpha}(x) = \mu_{\mathcal{A}}^\alpha(x), \quad x \in X, \quad \alpha \geq 0.$$

**Нечеткие отношения.** Пусть нечеткие множества  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  заданы в виде

$$\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)), x \in X\}; \quad \mathcal{B} = \{(y, \mu_{\mathcal{B}}(y)), y \in Y\}.$$

*Нечетким отношением*  $\mathcal{R}$ , заданным на множествах  $X, Y$ , называется нечеткое подмножество их декартова произведения  $X \times Y$  вида

$$\mathcal{A}\mathcal{R}\mathcal{B} = \{(x, y), \mu_{\mathcal{R}}(x, y)\}, \quad x \in X, y \in Y\}.$$

*Нечетким отношением*  $\mathcal{R}$  на множестве  $X$  называется нечеткое подмножество декартова произведения  $X \times X$ , характеризующееся функцией принадлежности  $\mu_{\mathcal{R}}: X \times X \rightarrow [0, 1]$ . Значение  $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$  этой функции понимается как субъективная мера или степень выполнения отношения  $x\mathcal{R}y$ .

*Носителем нечеткого отношения*  $\mathcal{R}$  на множестве  $X$  называется подмножество декартова произведения  $X \times X$  вида

$$\text{supp } \mathcal{R} = \{(x, y): (x, y) \in X \times X, \mu_{\mathcal{R}}(x, y) > 0\}.$$

*Множеством уровня*  $\alpha$  нечеткого отношения  $\mathcal{R}$  на  $X$  называется (четкое) множество  $R_\alpha$ , такое, что

$$R_\alpha = \{(x, y): (x, y) \in X \times X, \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha\}.$$

*Разложением нечеткого отношения по его множествам уровня* называется представление этого нечеткого отношения в виде

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \alpha R_\alpha,$$

где  $R_\alpha$  состоит из тех пар  $(x, y)$ , для которых  $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha$ .

**Операции над нечеткими отношениями.** Пусть на множестве  $X \times X$  заданы два нечетких отношения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , т. е. в декартовом произведении  $X \times X$  заданы два нечетких множества  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Нечеткое множество  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  – это *объединение* нечетких отношений  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  на множестве  $X$ , если его функция принадлежности определяется следующим образом:

$$\mu_{\mathcal{C}}(x, y) = \max \{\mu_{\mathcal{A}}(x, y), \mu_{\mathcal{B}}(x, y)\}, \quad x, y \in X.$$

Аналогично множество  $\mathcal{D}$  – *пересечение* нечетких множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ), если

$$\mu_{\mathcal{D}}(x, y) = \min \{\mu_{\mathcal{A}}(x, y), \mu_{\mathcal{B}}(x, y)\}, \quad x, y \in X.$$

Нечеткое отношение  $\mathcal{B}$  включает в себя нечеткое отношение  $\mathcal{A}$ , если для нечетких множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  выполнено  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ . В этом случае

$$\mu_{\mathcal{A}}(x, y) \leq \mu_{\mathcal{B}}(y, x), \quad x, y \in X.$$

*Дополнением* нечеткого отношения  $\mathcal{R}$  с функцией принадлежности  $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$  называется отношение  $\overline{\mathcal{R}}$ , характеризующееся функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}}^{-1}(x, y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(y, x), \quad x, y \in X.$$

Обратное к  $\mathcal{R}$  нечеткое отношение  $\mathcal{R}^{-1}$  на множестве  $X$  определяется следующим образом:

$$x \mathcal{R}^{-1} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x, \quad x, y \in X,$$

или с помощью функций принадлежности:

$$\mu_{\mathcal{R}^{-1}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(x, y), \quad x, y \in X.$$

Максиминное произведение  $\mathcal{R}_2^2$  (max-min композиция)  $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  нечетких отношений  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  на множестве  $X$  характеризуется функцией принадлежности вида

$$\mu_{\mathcal{A} \circ \mathcal{B}}(x, y) = \sup_{z \in X} \min \{ \mu_{\mathcal{A}}(x, z), \mu_{\mathcal{B}}(z, y) \}.$$

Минимаксное произведение  $\mathcal{R}_2^2$  (min-max композиция) нечетких отношений  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  на  $X$  определяется функцией принадлежности вида

$$\mu_{\mathcal{A} \circ \mathcal{B}}(x, y) = \inf_{z \in X} \max \{ \mu_{\mathcal{A}}(x, z), \mu_{\mathcal{B}}(z, y) \}.$$

Максимумпликативное произведение  $\mathcal{R}_3^2$  нечетких отношений  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  определяется функцией принадлежности вида

$$\mu_{\mathcal{A} \circ \mathcal{B}}(x, y) = \sup_{z \in X} \min \{ \mu_{\mathcal{A}}(x, z) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(z, y) \}.$$

**Принцип обобщения.** Изложим здесь принцип обобщения, который был предложен Л. Заде в [35] (см. также [84]). В его основе лежит определение образа нечеткого множества при обычном (т. е. четком) отображении. Пусть  $\varphi: X \rightarrow Y$  – заданное отображение и пусть  $\mathcal{A}$  – некоторое нечеткое подмножество множества  $X$  с функцией принадлежности  $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ . В соответствии с принципом обобщения образ  $\mathcal{A}$  при отображении  $\varphi$  определяется как нечеткое подмножество множества  $Y$ , представляющее собой совокупность пар вида

$$(y, \mu_{\mathcal{B}}(y)) = (\varphi(x), \mu_{\mathcal{A}}(x)), \quad x \in X, \quad (1.1.4)$$

где  $\mu_{\mathcal{B}}(y): Y \rightarrow [0, 1]$  – функция принадлежности образа. Нетрудно понять, что функцию принадлежности  $\mu_{\mathcal{B}}$  можно записать в виде

$$\mu_{\mathcal{B}}(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_{\mathcal{A}}(x), \quad y \in Y, \quad (1.1.5)$$

где множество  $\varphi^{-1}(y)$  для любого фиксированного  $y \in Y$  имеет вид

$$\varphi^{-1}(y) = \{x: \varphi(x) = y, \quad x \in X\},$$

т. е. представляет собой множество всех элементов  $x \in X$ , образом каждого из которых при отображении  $\varphi$  является элемент  $y$ .



Применим теперь принцип обобщения в форме (1.1.4) для расширения области нечеткого отображения [84]. В его основе лежит следующее определение образа нечеткого множества при нечетком отображении.

**Определение.** *Образом*  $\mathcal{B}$  нечеткого множества  $\mathcal{A}$  в  $X$  при нечетком отображении  $\mu_\varphi: X \times Y \rightarrow [0, 1]$  называется нечеткое множество ( $\mathcal{B}$ ) с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\mathcal{B}}(y) = \sup_{x \in X} \min \{ \mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_\varphi(x, y) \}. \quad (1.1.6)$$

Легко заметить, что в основе этого определения образа лежит максимальное произведение (композиция) нечетких отношений  $\mu_{\mathcal{A}}$  и  $\mu_\varphi$ .

Можно легко проверить, что в частном случае, когда  $\mu_\varphi$  – обычное (четкое) отображение вида  $\varphi: X \rightarrow Y$ , т.е.  $\mu_\varphi(x, y) = 1$  при  $y = \varphi(x)$  и  $\mu_\varphi(x, y) = 0$  для остальных пар  $(x, y)$ , определение дает

$$\mu_{\mathcal{B}}(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_{\mathcal{A}}(x), \quad (1.1.7)$$

что соответствует приведенному определению образа при обычном отображении, лежащему в основе принципа обобщения Заде.

Во многих случаях заданное нечеткое отображение  $\mu_\varphi$  может зависеть от  $n$  переменных, т. е. иметь вид

$$\mu_\varphi: X \times Y \rightarrow [0, 1],$$

где  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  – декартово произведение соответствующих множеств.

Пусть во множестве  $X$  задано нечеткое подмножество  $\mu_{\mathcal{A}}$ . В общем случае его функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min \{ \mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n), v(x_1, x_2, \dots, x_n) \}, \quad (1.1.8)$$

где  $\mu_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и  $v$  – заданные нечеткие подмножества соответствующих множеств  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и  $X$ . Применив в этом случае принцип обобщения в форме (1.1.6), получим следующее выражение для функции принадлежности образа нечеткого множества:

$$\mu_{\mathcal{B}}(y) = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X} \min \{ \mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n), v(x_1, x_2, \dots, x_n), \mu_\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \}. \quad (1.1.9)$$

При преобразованиях аналитических моделей, когда в качестве их параметров используются нечеткие числа (т. е. нечеткие подмножества числовой оси), удобно использовать *принцип обобщения в следующем виде*.

Пусть задана функция  $n$  переменных  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , аргументы  $x_i$  – суть нечеткие числа  $\tilde{x}_i$  с носителями  $\text{supp } \tilde{x}_i = [\underline{X}_i, \overline{X}_i]$ ,  $i=1, \dots, n$ , тогда нечеткое число  $y = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  определяется следующим образом:

$$\mu_y(y^*) = \sup_{f(x_1^*, \dots, x_n^*) = y^*} \min(\mu_{x_1}(x_1^*), \mu_{x_2}(x_2^*), \dots, \mu_{x_n}(x_n^*)),$$

$$x_i^* \in \text{supp } x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $\mu_y(y^*)$  – степень принадлежности элемента  $y^*$  нечеткому числу  $y$ ,  $\mu_{x_i}(x_i^*)$  – степень принадлежности элемента  $x_i^*$  нечеткому числу  $x_i$ , носитель которого  $\text{supp } x_i = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ .

### Математические постановки нечетких задач ОРМ

Как уже отмечалось, требование нахождения однозначного (четкого) разбиения элементов множества  $\Omega$  из  $E_n$  может оказаться достаточно грубым и жестким при решении задач с плохо или слабо структурированной исходной информацией, т. е. задач, в которых неопределенность имеет нечетко-возможностную природу. Ослабление этого требования осуществляется за счет введения в рассмотрение нечетких подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , множества  $\Omega$  и соответствующих им функций принадлежности, принимающих значение из отрезка  $[0, 1]$ .

Тогда одним из вариантов нечеткой задачи ОРМ становится задача нахождения такого нечеткого разбиения множества  $\Omega$  на его нечеткие подмножества, которое в некотором смысле "минимизирует" некоторый целевой функционал. Эта задача будет сведена к нахождению степеней принадлежности элементов множества  $\Omega$  искомым нечетким подмножествам  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , которые в совокупности и определяют нечеткое разбиение (нечеткое покрытие) множества  $\Omega$ .

Для формальной (математической) постановки нечетких задач оптимального разбиения необходимо ввести ряд дополнительных понятий.

**Определение 1.1.** *Нечетким разбиением четкого множества  $\Omega$  из  $E_n$ , где  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу, выпуклое множество, назовем систему нечетких подмножеств  $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i, i = \overline{1, N}\}$ , для которых выполняются три условия:*

$$1) \Omega_i \subseteq \Omega \quad \forall i = \overline{1, N},$$

где  $\Omega = (\Omega, \mu_\Omega(x))$ ,  $\mu_\Omega(x) = 1, x \in \Omega$ , т. е. это четкое множество  $\Omega$ , рассмотренное как частный случай нечеткого;

$$2) \sum_{k=1}^N \mu_{\Omega_k}(x) = \mu_\Omega(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega;$$

$$3) h_C < 1, \quad C = \Omega_i \cap \Omega_k \quad \forall i \neq k, i, k = \overline{1, N},$$

где  $h_C = \sup_{x \in \Omega} \mu_C(x)$  – высота нечеткого множества  $C = \Omega_i \cap \Omega_j \quad \forall \Omega_i, \Omega_j \in \Omega$ ,

$i \neq j, i, j = 1, \dots, N$ , а  $\mu_C(x)$  – функция принадлежности:  $\mu_C : \Omega \rightarrow 0, 1$ .

В дальнейшем для упрощения записи будем полагать  $\mu_{\Omega_i}(x) \equiv \mu_i(x)$ .

Проанализируем данное определение.

**Лемма.** В определении 1.1 условие 3 является следствием условий 1 и 2.

**Доказательство.** Пусть для некоторой системы нечетких множеств  $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i : \Omega_i \subseteq \Omega \quad \forall i = \overline{1, N}\}$  выполняется

$$\sum_{k=1}^N \mu_{\Omega_k}(x) = \mu_{\Omega}(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.1.10)$$

Покажем, что для этой системы выполнено  $h_C < 1, C = \Omega_i \cap \Omega_k \quad \forall i \neq k, i, k = \overline{1, N}$ .

Исходя из определения высоты нечеткого множества, а также свойств функции принадлежности, имеем  $h_C = \sup_{x \in \Omega} (\mu_C(x)) \leq 1$ . Предположим про-

тивное: пусть  $\exists i, k: i \neq k : h_C = 1, C = \Omega_i \cap \Omega_k$ . Предположим далее, что

$h_C = \sup_{x \in \Omega} (\mu_C(x)) = \max_{x \in \Omega} (\mu_C(x))$ . Обозначим  $\bar{x}$  точку, в которой достигается

последний максимум  $1 = h_C = \mu_C(\bar{x})$ .

Поскольку  $C = \Omega_i \cap \Omega_k$ , то  $1 = \mu_C(\bar{x}) = \min\{\mu_i(\bar{x}), \mu_k(\bar{x})\}$ . Исходя из того, что  $\mu_i(\bar{x}) \leq 1, \mu_k(\bar{x}) \leq 1$  и (1) имеем  $\mu_i(\bar{x}) = 1, \mu_k(\bar{x}) = 1$ .

Запишем сумму (1.1.10) для  $\bar{x} \in X$ :

$\mu_1(\bar{x}) + \dots + \mu_i(\bar{x}) + \dots + \mu_k(\bar{x}) + \dots + \mu_N(\bar{x}) \geq 2$ , что противоречит (1.1.10).

*Лемма доказана.*

В соответствии с леммой определение 1.1 эквивалентно следующему определению.

**Определение 1.2.** *Нечетким разбиением четкого множества  $\Omega$  из  $E_n$ , где  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу, выпуклое множество, назовем систему нечетких подмножеств  $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i : \Omega_i \subseteq \Omega \quad \forall i = \overline{1, N}\}$ , где  $\Omega = (\Omega, \mu_{\Omega}(x)), \mu_{\Omega}(x) = 1, x \in \Omega$ , для которых выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^N \mu_k(x) = \mu_{\Omega}(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega.$$

Отметим, что указанное выше условие в терминах бесконечномерной транспортной задачи может пониматься как требование того, чтобы все потребности каждого потребителя были полностью и без излишков удовлетворены за счет одного или нескольких производителей в нечетком варианте задачи, в отличие от одного производителя – в четком варианте.

*Нечетким покрытием* множества  $\Omega$  из  $E_n$  назовем совокупность нечетких подмножеств множества  $\Omega$ , если

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Обозначим класс всех возможных нечетких разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  нечетких подмножеств через  $\mathfrak{R}_\Omega^N$ , т. е.

$$\mathfrak{R}_\Omega^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \sum_{k=1}^N \mu_k(x) = \mu_\Omega(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega\}. \quad (1.1.11)$$

Заметим, что класс четких возможных разбиений  $\Sigma_\Omega^N$  из п. 1.1.1 является подклассом класса  $\mathfrak{R}_\Omega^N$ .

В свою очередь, поскольку элемент множества  $\mathfrak{R}_\Omega^N$  представляет собой совокупность подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , каждое из которых принадлежит  $\Omega$ , то нечеткое множество  $\mathfrak{R}_\Omega^N$  является нечетким подмножеством множества  $X = \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N$ .

Перейдем к описанию формальных постановок нечетких задач ОРМ.

Введем на множестве возможных нечетких разбиений  $\mathfrak{R}_\Omega^N$  целевой функционал  $(F: \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow \mathbb{R}^1)$  в виде

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx, \quad (1.1.12)$$

где, как и в четкой задаче **A1**, функции  $c(x, \tau_i)$  – заданные, действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ;  $\rho(x)$  – заданная, ограниченная, измеримая на  $\Omega$  функция;  $a_1, \dots, a_N$  – заданные неотрицательные числа.

В отличие от четкой задачи **A1**, здесь, во-первых,  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , нечеткие подмножества множества  $\Omega$  с заданными координатами типичных представителей (или центров)  $\tau_i$ , причем каждый центр  $\tau_i$  принадлежит  $\Omega$ ; во-вторых, мера множества граничных точек  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , не обязательно равна нулю.

Тогда *нечетким аналогом* задачи **A1** будет следующая задача.

**Задача Я1.** Найти такое нечеткое разбиение множества  $\Omega$  на  $N$  нечетких подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые), которое удовлетворяет условиям

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

и в некотором смысле "минимизирует" целевой функционал (1.1.12).

Здесь под "минимизацией" можно понимать выбор нечеткого разбиения, которому соответствует в некотором смысле наилучшее нечеткое значение целевого функционала. Если лицо, принимающее решение (ЛПР), не приемлет нечеткого описания решения задачи, то под "минимизацией" целевого функционала следует понимать рациональный выбор конкретной альтернативы или множества альтернатив. Рациональность при этом понимается в том смысле, что при выборе конкретной альтернативы ЛПР должно исходить из необходимости компромисса между желанием получить по возможности меньшее значение целевого функционала и желанием выбрать по возможности более доступную альтернативу (т. е. желанием получить по возможности большее значение функции принадлежности нечеткого множества допустимых альтернатив).

Если провести аналогию с классификацией задач нечеткого математического программирования [84], то сформулированную задачу **Я1** можно отнести к типу I, а именно к задачам оптимизации заданного обычного функционала  $F: \Omega \times \dots \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$  на заданном нечетком множестве допустимых решений (альтернатив)

$$\mathfrak{R}_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \mu_{\mathfrak{R}_{\Omega}^N}(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \quad \Omega_i \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N\},$$

определяемом функцией принадлежности  $\mu_{\mathfrak{R}_{\Omega}^N} : \Omega \times \dots \times \Omega \rightarrow [0, 1]$ , имеющем для задачи **Я1** вид (1.1.12).

В свою очередь, элемент множества  $\mathfrak{R}_{\Omega}^N$  допустимых альтернатив – нечеткое разбиение  $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  – это совокупность нечетких подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , составленных из точек, принадлежащих множеству  $\Omega$ . Как известно, каждое нечеткое множество  $\Omega_i$  (как совокупность точек  $x$  из  $\Omega$ ) определяется своей функцией принадлежности  $\mu_{\Omega_i}(x)$ , т. е.  $\mu_{\Omega_i} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , при этом значение  $\mu_{\Omega_i}(x) = 1$  для  $x \in \Omega$  означает, что элемент  $x$  из  $\Omega$  определенно принадлежит нечеткому множеству  $\Omega_i$ , что совпадает со значением характеристической функции  $\lambda_{\Omega_i^+}(x)$  для точек ядра  $\Omega_i^+$  нечеткого

множества  $\Omega_i$ . Значение  $\mu_{\Omega_i}(x) = 0$  означает, что элемент  $x$  определенно не принадлежит нечеткому множеству  $\Omega_i$ , что соответствует значению характеристической функции  $\lambda_{\Omega_i^+}(x) = 0$  для точек ядра  $\Omega_i^+$  нечеткого множества  $\Omega_i$ . Если  $0 < \mu_{\Omega_i}(x) < 1$ , то это означает, что элемент  $x$  принадлежит нечеткому множеству  $\Omega_i$  со степенью принадлежности  $\mu_{\Omega_i}$ , причем точки  $x$ , для которых  $0 < \mu_{\Omega_i} < 1$ , будут составлять границу *нечеткого подмножества*  $\Omega_i$ .

Таким образом, для того чтобы иметь возможность идентифицировать нечеткое разбиение  $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  множества  $\Omega$ , надо знать для каждой точки  $x$  из  $\Omega$  степень ее принадлежности к каждому из подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Из всего сказанного выше следует, что нечеткое разбиение  $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  полностью определяется своей вектор-функцией принадлежностей вида

$$\mu(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)), \quad x \in \Omega.$$

Также известно, что характеристическая функция  $\lambda_{\Omega_i}(\cdot)$  обычного четкого множества  $\Omega_i$  является частным случаем функции принадлежности  $\mu_{\Omega_i}(\cdot)$ . Тогда понятие нечеткого множества  $\Omega_i$  можно рассматривать как обобщение понятия "обычного множества"  $\Omega_i$ , а, в свою очередь, четкое множество  $\Omega_i$  – как частный случай (сужение) соответствующего понятия «нечеткое множество»  $\Omega_i$ .

Перепишем задачу **A1** в терминах функций принадлежности  $\mu_{\Omega_i}(\cdot)$  как расширение задачи **B1** на нечеткий случай (нечеткий аналог задачи **B1**) следующим образом.

**Задача B1** (нечеткого разбиения множества  $\Omega$  без ограничений с фиксированными центрами подмножеств).

Найти вектор-функцию  $\mu^*(\cdot) = (\mu_{\Omega_1}(\cdot), \dots, \mu_{\Omega_N}(\cdot)) \in \mathfrak{F}$ , такую, что

$$I(\mu^*(\cdot)) = \min_{\mu \cdot \in \mathfrak{F}} I(\mu(\cdot)),$$

где

$$I(\mu(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \cdot (\mu_{\Omega_i}(x))^m dx,$$

$$\mathfrak{F} = \{ \mu^*(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)) : \}$$

$$\sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1, \quad x \in \Omega, \quad (1.1.13)$$

$$0 \leq \mu_{\Omega_i}(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega \},$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  – заданный вектор из  $\Omega^N$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ ;  $a_1, \dots, a_N$  – заданные неотрицательные числа;  $m$  – параметр, называемый экспоненциальным весом [73].

Здесь под обозначением "min" понимается, что  $\mu^*(\cdot)$  в некотором смысле "минимизирует" целевой функционал  $I(\mu(\cdot))$ . В дальнейшем мы подробнее остановимся на смысле этого обозначения.

Требование в условии (1.1.13) выполнения равенства обусловлено тем обстоятельством, что искомое нечеткое разбиение  $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  должно "покрывать" обычное четкое разбиение  $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ , являющееся в то же время элементом нечеткого множества допустимых решений, для которого значения функций принадлежности каждого из элементов равны 1.

Заметим, что если необходимо исключить появление пустых подмножеств в искомом нечетком разбиении, то к ограничениям задачи **B1** следует добавить условие

$$\int_{\Omega} \mu_{\Omega_i}(x) dx > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Заметим также, что в задаче **B1** условием

$$\sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

учитывается тот факт, что  $\sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1$  и поэтому задача **B1** – это

задача нечеткого разбиения, если же не требовать выполнения условия  $\sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1$ , то мы приходим к задаче *нечеткого покрытия*.

Аналогично изложенному выше могут быть расширены постановки задач **B2, B3, B4, B5, B6, B7**. Сформулируем некоторые из них.

**Задача B2** (нечеткого разбиения множества  $\Omega$  без ограничений с отысканием координат центров подмножеств). Найти

$$\min_{(\mu(\cdot), \tau) \in \mathfrak{T} \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \cdot (\mu_{\Omega_i}(x))^m dx,$$

где

$$\mathfrak{T} = \{ \mu(x) = \mu_{\Omega_1}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x) \}$$

$$\sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

$$0 \leq \mu_{\Omega_i}(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

**Задача В4** (нечеткого разбиения множества  $\Omega$  при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств). Найти

$$\min_{(\mu(\cdot), \tau) \in \mathfrak{T}_1 \times \Omega^N} \int \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \cdot (\mu_{\Omega_i}(x))^m dx,$$

где

$$\mathfrak{T}_1 = \{ \mu(x) = \mu_{\Omega_1}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x) \in \mathfrak{T}, \quad x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \mu_{\Omega_i}(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N \};$$

$$\mathfrak{T} = \{ \mu(x) = \mu_{\Omega_1}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x):$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_{\Omega_i}(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

$$0 \leq \mu_{\Omega_i}(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \Omega^N.$$

Если в задаче **В4** будем считать  $\tau$  заданным вектором из  $\Omega^N$ , то придем к задаче **В3**, являющейся расширением на нечеткий случай соответствующей четкой задачи **В3**.

Еще один класс нечетких задач ОРМ, соответствующий типу II по классификации из [84], возникает, если в соответствующей четкой задаче ОРМ "смягчить" функциональные ограничения, т. е. допустить возможность их нарушения в той или иной степени. Кроме того, вместо минимизации целевого функционала можно стремиться к достижению некоторого заданного значения этого функционала, причем различным отклонениям значения  $F(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  от этой величины приписывать различные степени допустимости (например, чем больше отклонение, тем меньше степень его допустимости).

Сформулируем задачу ОРМ с заданными центрами подмножеств при нечетких ограничениях в форме неравенств в следующем виде.

**Задача С3.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} F(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$$



при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1.14)$$

где

$$\Sigma_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N\}; \quad (1.1.15)$$

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx; \quad (1.1.16)$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega; b_1, \dots, b_N$  – заданные положительные числа.

Здесь остаются справедливыми все условия, при которых была сформулирована задача **A3**, а знак  $\sim$  в неравенстве (1.1.14) означает нечеткое его выполнение соответствующих неравенств.

Один из возможных подходов к формализации и использованию нечеткой информации в сформулированной задаче **С3** состоит в следующем.

Пусть заданы пороговые значения  $d_1, \dots, d_N$ , такие, что условия  $\int_{\Omega_i} \rho(x) dx - b_i > d_i, i = 1, \dots, N$ , означают сильное нарушение соответствующих неравенств  $\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i$ . Тогда функции принадлежности для нечетких множеств ограничений можно ввести для  $i = 1, \dots, N$  в следующем виде:

$$\mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \begin{cases} 0, & \int_{\Omega_i} \rho(x) dx - b_i \geq d_i \\ v_i & \Omega_1, \dots, \Omega_N, d_i, \quad 0 < \int_{\Omega_i} \rho(x) dx - b_i < d_i, \\ 1, & \int_{\Omega_i} \rho(x) dx - b_i \leq d_i. \end{cases} \quad (1.1.17)$$

где  $v_i$  – некоторые функции принадлежности, которые описывают степень выполнения соответствующих неравенств с точки зрения ЛПР;  $G_i$  – нечеткие множества, порожденные условиями (1.1.14).

Очевидно, что условия (1.1.14) эквивалентны условиям

$$\mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) > 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1.18)$$

Предлагаемый подход для решения задачи **С3** состоит в том, что задача минимизации функционала на нечетком множестве заменяется задачей минимизации этого функционала на множестве, представляющем собой

некоторое множество уровня исходного нечеткого множества. Заметим, что, согласно этому подходу [84], любое нечеткое множество представимо в виде разложения этого нечеткого множества по его множествам уровня. Однако на практике ЛПР достаточно рассмотреть разложение по конечному числу множеств уровня с некоторым шагом.

Для решения задачи **С3** необходимо найти разбиение, доставляющее минимальное значение функционалу (1.1.16) и принадлежащее нечеткому множеству допустимых разбиений с возможно большей степенью принадлежности. Поэтому условия (1.1.18) можно заменить следующим образом:

$$\mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.1.19)$$

а условия (1.1.14) заменить следующими условиями:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i + d_i', \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1.20)$$

где  $d_i'$  выбраны таким образом, чтобы при выполнении  $i$ -го условия из (1.1.20) обеспечивалось выполнение  $i$ -го условия из (1.1.19), что означает замену нечеткого множества с функцией принадлежности  $\mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  его множеством уровня  $\varepsilon$ .

Тогда задача **С3** может быть переформулирована следующим образом.

**Задача С'3.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$$

при условиях

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx \leq b_i + d_i', \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $\Sigma_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N\}$ ;

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $b_1, \dots, b_N$  – заданные положительные числа.

Задача **С'3** – это четкая задача ОРМ (см. задачу **А3**). Полученное решение этой задачи будет принадлежать множеству допустимых разбиений со степенью принадлежности, равной

$$\mu(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) = \min_{i=1, \dots, N} \mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \geq \varepsilon.$$

Перебирая все возможные  $\varepsilon \geq 0$  и решая соответствующие четкие задачи, мы можем получить описание нечеткого решения задачи **С3**.

Пусть теперь вместо минимизации заданного функционала (1.1.16) будем стремиться к достижению заданного значения  $z_0$  этого функционала, причем достижение этого значения будет достаточным для выполнения цели. Тогда для задачи **С3** достижение заданного значения  $z_0$  можно записать в виде

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \lesseqgtr z_0, \quad (1.1.21)$$

где волнистая линия свидетельствует о нечеткости соответствующего неравенства.

Введем пороговое значение  $\mathbf{a}$ , такое, что неравенство

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) > z_0 + \mathbf{a}$$

означает сильное нарушение неравенства

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \leq z_0.$$

Тогда функцию принадлежности для нечеткого функционала цели можно определить следующим образом:

$$\mu_{F, \Omega_1, \dots, \Omega_N} = \begin{cases} 0, & F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) > z_0 + \mathbf{a}, \\ \mu_{\Omega_1, \dots, \Omega_N, \mathbf{a}}, & z_0 < F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) < z_0 + \mathbf{a}, \\ 1, & F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \leq z_0. \end{cases} \quad (1.1.22)$$

где  $\mu((\Omega_1, \dots, \Omega_N), \mathbf{a})$  – функция принадлежности, описывающая степени выполнения соответствующего неравенства с точки зрения ЛПР,  $F$  – нечеткое множество, порожденное нечетким функционалом цели.

В результате задача (1.1.21) достижения заданного значения  $z_0$  при условиях (1.1.14) и (1.1.15) оказывается сформулированной в форме задачи выполнения нечетко определенной цели, к которой применим подход Белмана – Заде [84].

Согласно подходу Белмана – Заде нечетким решением задачи достижения нечеткой цели будет пересечение нечетких множеств цели (1.1.17) и ограничений (1.1.22), т. е. функция принадлежности решения  $\mu(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  имеет вид

$$\mu(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \min \{ \mu_{F, \Omega_1, \dots, \Omega_N}(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \mu_{G_1, \Omega_1, \dots, \Omega_N}(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \dots, \mu_{G_N, \Omega_1, \dots, \Omega_N}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \}.$$

Определенное таким образом решение можно рассматривать как нечетко сформулированную инструкцию, выполнение которой обеспечивает достижение нечетко поставленной цели. При таком представлении решения остается неопределенность, связанная с тем, какую альтернативу выбрать.

Одним из наиболее распространенных способов выбора альтернативы является способ, состоящий в выборе альтернативы, имеющей макси-

мальную степень принадлежности к нечеткому решению, т. е. альтернативы, реализующей

$$\max_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} \mu(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \max_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} \min \{ \mu_F(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \mu_{G_1}(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \dots, \mu_{G_N}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \}.$$

Такие альтернативы называют *максимизирующими решениями* [84].

Еще один вариант нечеткой постановки задач ОРМ может возникнуть в случае, если в четкой (жесткой) модели ОРМ невозможно (или сложно) учесть в явном виде влияние некоторых реальных факторов (не статистической неопределенности). Это могут быть, например, такие факторы, как колебания цен на бензин, стихийные явления природы, влияющие на стоимость транспортировки единицы продукции, входящую в постановку бесконечномерной задачи размещения, или нестабильность политической обстановки, влияющая на колебание спроса потребителей и т. п.

Сформулируем одну из таких задач ОРМ с нечетко описанными параметрами целевого функционала и (или) с нечетко описанными параметрами функций, определяющих ограничения, которая более адекватна реальности, чем обычная четкая задача ОРМ.

**Задача ДЗ** (с нечетко описанными параметрами в целевом функционале и ограничениях). Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + \theta_i) \rho(x, \theta_0) dx$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x, \theta_0) dx \leq b_i \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $\Sigma_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N\}$ ;  $x = (x^{(1)}, \dots,$

$x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $b_1, \dots, b_N$  – заданные положительные числа.

Здесь  $c(x, \tau_i, \theta_i)$  – функции, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega \times R^1$ , измеримые по  $x$  на  $\Omega$  при любых фиксированных  $\tau_i \in \Omega$  и  $\theta_i \in R^1$ ;  $\rho(x, \theta_0)$  – неотрицательная, ограниченная, измеримая по  $x$  на  $\Omega$  функция при любом фиксированном  $\theta_0$  из  $R^1$ ;  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N$  – параметры, значения которых описаны нечетко в форме нечетких подмножеств универсального множества  $R^1$ , имеющих следующий вид:

$$\theta_i = \{(\theta_i, \mu_i(\theta_i)), \theta_i \in R^1, \mu_i: R^1 \rightarrow [0, 1]\}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Обозначение "*min*" имеет смысл осуществления рационального выбора разбиения  $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ , которое в некотором смысле "минимизирует" заданный целевой функционал.

### 1.1.6. Динамические задачи оптимального разбиения множеств

Иногда при математическом описании практических задач оптимального разбиения множеств необходимо учитывать состояние некоторого объекта или процесса, которое может изменяться со временем и/или в пространстве. Так, например, в задачах **A1** – **A6**, рассматриваемых как бесконечномерные аналоги транспортной задачи, функции спроса и стоимости перевозки единицы продукции от производителей к потребителям могут изменяться в течение некоторого промежутка времени в силу действия определенных экономических факторов (управляемых и обусловленных внешними условиями функционирования рассматриваемой системы). Математическая постановка задачи формирования структуры промышленного региона с учетом экологического аспекта [13, 38, 68, 77, 85, 86] содержит краевую задачу, описывающую процесс распространения загрязняющей примеси в атмосфере. В задаче рационального использования нефтяных месторождений, состоящей в наилучшем размещении нефтеносных скважин с целью получения максимального дебита нефти, функция распределения давления в пласте удовлетворяет краевой задаче для уравнения параболического типа [13, 85]. В данном пункте представим различные математические модели динамических задач оптимального разбиения множеств, методам и алгоритмам решения которых посвящены главы 3 – 5 настоящей монографии.

Под **непрерывной динамической нелинейной задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \in E_n$  на  $N$  подмножеств с размещением центров этих подмножеств** будем понимать следующую задачу [65].

**Задача A12.** Требуется найти такое разбиение ограниченного, измеримого по Лебегу множества  $\Omega \subset E_n$  на  $N$  измеримых по Лебегу подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть пустые), разместить центры  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  этих подмножеств в области  $\Omega$ , а также найти управление  $u(x, t)$  и соответствующий ему фазовый вектор  $z(x, \tau, t) = (\rho(x, t), c(x, \tau_1, t), \dots, c(x, \tau_N, t))$ , чтобы

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes } \Omega_i \cap \Omega_j = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N},$$

$$\dot{\rho}(x, t) = \Phi_0(t, x, \int_{\Omega} f_0(t, \xi, z(\xi, \tau, t)) d\xi, u(x, t)),$$

$$\dot{c}(x, \tau_1, t) = \Phi_1(t, x, \int_{\Omega} f_1(t, \xi, z(\xi, \tau, t)) d\xi, u(x, t)), \quad (1.1.23)$$

.....

$$\dot{c}(x, \tau_N, t) = \Phi_N(t, x, \int_{\Omega} f_N(t, \xi, z(\xi, \tau, t)) d\xi, u(x, t)), \quad t \in [0, T];$$

$$z(x, 0) = z_0(x); \quad (1.1.24)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1.25)$$

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_{\Omega^N} = \Omega^N, \quad u(\cdot, \cdot) \in U \subseteq L_2\{ \Omega \times [0, T] \},$$

где функция  $z^0(x) \forall x \in \Omega$ , время  $T$  – заданы, и при этом функционал  $F((\Omega_1, \dots, \Omega_N), \tau, z(\cdot, \tau, \cdot), u(\cdot, \cdot)) =$

$$= \int_0^T \{ \beta_1 \sum_{i=1}^N [\varphi_i(\int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx) + \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i, t) \rho(x, t) dx] + \beta_2 \int_{\Omega} g(u(x, t)) dx \} dt$$

достигал минимального значения.

Здесь  $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ ,  $\beta_1, \beta_2$  – коэффициенты, определяющие приоритет соответствующего слагаемого в критерии;  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_N, f_0, f_1, \dots, f_N, g$  – известные функции своих аргументов. Условия, которым должны удовлетворять эти функции, будут приведены ниже при изучении частных случаев задачи **A12**.

Как и в любой задаче оптимального управления непрерывной системой с сосредоточенными параметрами, в задаче **A12** допустимые управления  $u(x, t)$  в каждой точке  $x \in \Omega$  (или п. в. для  $x \in \Omega$ ) определяются требованиями предметной постановки задачи и математическим аппаратом, используемым при исследовании таких динамических систем. Допустимые управления  $u(x, t)$  п. в. для  $x \in \Omega$  характеризуются тем, что они должны принимать значения из некоторой заранее указанной области  $U \subseteq E_r$ , которая часто может быть замкнутой и ограниченной. Они могут быть кусочно-непрерывными функциями с конечным или счетным числом точек разрыва первого рода. Как отмечено в [30], в каждой задаче все допустимые управления следует выбирать так, чтобы они образовывали замкнутый (по некоторой метрике) класс.

К задаче типа **A12** может быть сведена, например, бесконечномерная динамическая задача размещения производства, в которой функции спроса  $\rho(x, t)$  и стоимости транспортировки единицы продукции  $c(x, \tau_i, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , не известны заранее, а являются фазовыми траекториями заданного управляемого процесса, описываемого системой дифференциальных уравнений (1.1.23) с начальными условиями (1.1.24). Нелинейные функции  $\varphi_i(\cdot)$  могут представлять зависимость стоимости производства продукции на  $i$ -м предприятии от его мощности в каждый фиксированный момент времени  $t$ . Ограничения (1.1.25) – это ограничения на мощность  $i$ -го,  $i = 1, \dots, N$ , пункта производства за весь рассматриваемый период  $T$  функционирования производственной системы.

Далее для упрощения записи функционалов задач будем обозначать через  $\bar{\omega}$  элемент  $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  класса всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств

$$\Sigma_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N\}.$$

Рассмотрим частный случай функционала  $F((\Omega_1, \dots, \Omega_N), \tau, z(\cdot, \tau, \cdot), u(\cdot, \cdot))$ :

$$F(\gamma) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i, t) + a_i \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt, \quad (1.1.26)$$

где

$$\gamma = \bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot), \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T]),$$

$\rho(\cdot, \cdot) \in C^1(\Omega \times [0, T])$ ,  $T > 0$  – заданный момент времени;  $\beta_0, \beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$  – коэффициенты, определяющие приоритет слагаемых в функционале и содержащие величины, с помощью которых соответствующие слагаемые становятся безразмерными. Функции  $c(x, \tau_i, t)$  – заданные действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega \times 0, T$ , измеримые по  $x$  и  $t$  при произвольных фиксированных параметрах  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ . Величины  $a_1, \dots, a_N$  также известны. Функция  $\rho(x, t)$  для каждого  $x \in \Omega$  является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= u(x, t), \quad t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x); \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Здесь  $\rho_0(x)$  – известная, как правило, неотрицательная, определенная на множестве  $\Omega$  функция. Точки  $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \Omega, i = \overline{1, N}$  – так называемые «центры» подмножеств – считаются заданными.

Под **простейшей динамической задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$**  (среди которых могут быть и пустые) будем понимать следующую задачу [53, 71].

**Задача А13.** Необходимо найти разбиение  $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Sigma_{\Omega}^N$ , управление  $u^*(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  и соответствующую фазовую траекторию  $\rho^*(x, t)$  (удовлетворяющую задаче (1.1.27)), при которых функционал (1.1.26) достигал бы минимального значения.

*Оптимальным решением задачи А13* будем называть допустимую тройку  $\gamma^* = (\bar{\omega}^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ , которая доставляет минимальное значение функционалу  $F$ .

Задача А13 представляет, прежде всего, теоретический интерес, связанный, во-первых, с разработкой методов решения динамических задач оптимального разбиения, синтезируя основные положения теории оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами и теории непрерывных задач ОРМ, во-вторых, с исследованием свойств оптимальных решений таких задач. С практической же точки зрения, задаче А13 можно дать следующую экономическую интерпретацию. Пусть  $\Omega$  – множество потребителей одного и того же вида продукции, выпускаемой  $N$  производителями, расположенными в пунктах  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ . Стоимость перевозки продукции (в расчете на одну единицу товара) от  $i$ -го производителя к каждому потребителю  $x$  задается функцией  $c(x, \tau_i, t)$  в каждый момент времени  $t \in [0, T]$ ,  $a_1 \geq 0, \dots, a_N \geq 0$  – дополнительные фиксированные затраты. Функция  $\rho(x, t)$  – спрос потребителя  $x$  на продукцию (считается, что потребности могут меняться со временем). В начальный момент времени спрос известен и задается функцией  $\rho_0(x)$ . Необходимо так разбить множество потребителей на сферы обслуживания соответствующими предприятиями и так влиять на скорость изменения спроса, чтобы суммарные затраты на перевозку товара на протяжении определенного отрезка времени были минимальными, а изменение спроса в этот период было как можно меньшим.



В задаче **A13** предполагается, что область изменения фазовой координаты не ограничена. Однако на практике чаще всего встречаются ситуации, в которых на допустимые состояния системы накладываются некоторые условия. Особенно это актуально при описании экономических объектов или процессов, когда необходимо учитывать ограничения, например, на объем выпуска продукции, спрос, производственные мощности предприятий и т. п. Приведенные ниже две постановки динамических задач ОРМ являются обобщениями задачи **A13** на случай наличия интегральных и точечных фазовых ограничений.

Под динамической задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  с интегральными ограничениями будем понимать следующую задачу [56].

**Задача A14.** Требуется найти разбиение  $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Sigma_{\Omega}^N$ , управление  $u^*(x, t) \in L_2 \Omega \times [0, T]$  и функцию  $\rho^*(x, t)$ , удовлетворяющую задаче Коши (1.1.27) и условиям

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.1.28)$$

при которых функционал

$$F(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) = \\ = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt$$

достигал бы своего минимального значения.

Здесь

$$\beta_0, \beta_1 \geq 0, \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0, \quad a_i \geq 0, \dots, a_N \geq 0, \\ T > 0, \quad \tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \Omega, \quad i = \overline{1, N},$$

$\rho_0(x)$  – те же, что и в задаче **A13**;  $u(x, t) \in L_2 \Omega \times [0, T]$  – функция управления. Величины  $b_i; i = \overline{1, N}$ , – заданы. Дополнительные условия на эти переменные, при которых задача **A14** разрешима, получим в главе 3 в процессе исследования свойств задачи.

Коротко задача **A14** записывается следующим образом:

$$F(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in \Phi}, \quad (1.1.29)$$

$\Phi = (\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) : \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times 0, T); \dot{\rho}(x, t) = u(x, t), t \in 0, T,$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x); \int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}.$$

Оптимальным решением задачи (1.1.29) будем называть допустимую тройку  $\gamma^* = (\bar{\omega}^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ , которая доставляет минимальное значение функционалу  $F$ .

С помощью характеристических функций  $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Gamma_1$  подмножеств  $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  функционал и интегральные ограничения задачи **A14** записываются так:

$$I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) = \\ = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i, t) + a_i \rho(x, t) \lambda_i(x)] + \beta_1 u^2(x, t) \right) dx dt, \\ \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Напомним, что

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \}.$$

И, таким образом, динамическая задача оптимального разбиения множества с интегральными ограничениями (1.1.29) может быть сформулирована как задача бесконечномерного программирования с булевыми переменными:

**Задача В14:**

$$I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_0},$$

где

$$V_0 = \{ (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Gamma_1, u(x, t) \in L_2 \Omega \times 0, T,$$

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in 0, T, \rho(x, 0) = \rho_0(x) \forall x \in \Omega;$$

$$\left. \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \right\}.$$

Предположим теперь, что в задаче **A14** наряду с разбиением множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств  $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$  (среди которых могут быть и пустые), требуется найти и центры  $\tau_1, \dots, \tau_N$  этих подмножеств. Кроме того, будем считать, что на состояние управляемой системы влияют некоторые внешние факторы, которые можно описать известной функцией  $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ .

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\gamma) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i, t) + a_i \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt, \quad (1.1.30)$$

где  $\gamma = \{\bar{\omega}, \tau, u, \dots, \rho, \dots\}$ ,  $\bar{\omega} \in P_N(\Omega)$ ,  $\tau \in \Omega^N$ ,  $u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ,  $\rho(\cdot, \cdot) \in C^1(\Omega \times [0, T])$ ; параметры  $T > 0$ ,  $\beta_0, \beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$ ,  $a_i, i = \overline{1, N}$ , заданы; функции  $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)q(t)$ ,  $q(t) \in L_2(0, T)$ ,  $c(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$  функции, измеримые по переменной  $x$  при произвольном фиксированном векторе параметров  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ ; функция  $\rho(x, t)$  для каждого  $x \in \Omega$  является решением задачи Коши

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) + f(x, t), \quad t \in [0, T], \quad (1.1.31)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad (1.1.32)$$

и удовлетворяет условиям

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1.33)$$

Функции  $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  и  $\rho_0(x)$  в задаче (1.1.31), (1.1.32) считаются известными.

**Под динамической задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subset R^n$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  с размещением центров этих подмножеств будем понимать следующую задачу.**

**Задача А15.** Необходимо найти разбиение  $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in P_N(\Omega)$ , набор точек  $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N$ , управление  $u^*(x, t) \in L_2 \Omega \times [0, T]$  и соответствующую фазовую траекторию  $\rho^*(x, t)$  (удовлетворяющую условиям (1.1.31) – (1.1.33)), при которых функционал (1.1.30) достигал бы минимального значения.

*Оптимальным решением задачи А15* будем называть допустимую четверку  $\gamma^* = \{\bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)\}$ , которая доставляет минимальное значение функционалу  $J$ .

В терминах характеристических функций подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , составляющих допустимое разбиение множества  $\Omega$ , задача А15 формулируется так:

**Задача В15:** необходимо найти такие вектор-функцию  $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Gamma_1$ , набор  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ , управляющую функцию  $u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  и соответствующую фазовую переменную  $\rho(\cdot, \cdot)$ , что функционал

$$I(\lambda(\cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \beta_0 c(x, \tau_i, t) + a_i \rho(x, t) + \beta_1 u^2(x, t) \lambda_i(x) dx dt$$

достигал минимального значения при условиях

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= u(x, t) + f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = 1..N.$$

Как уже отмечалось, в простейшей динамической задаче ОРМ (задаче А13) область изменения фазовой координаты  $\rho(x, t)$  не ограничена и совпадает со всем пространством  $R$ . В задаче А14 на фазовую переменную накладываются лишь интегральные ограничения. Характерной особенностью многих задач оптимального управления динамическими системами, встречающимися на практике, является наличие точечных ограничений на фазовые координаты. Такие ограничения порождают существенные трудности как при разработке необходимых и достаточных условий оптимальности, так и при решении задач. В работе [82] указано, что когда фа-

зовые переменные и управления связаны общей принадлежностью к некоторому множеству, возникает определенная патология. Оптимальные управления выражаются в терминах меры, то есть оказывается, что в этих сложных ситуациях оптимальные управления не только нельзя реализовать, но и нельзя вычислить... Нужно выделять специальные классы задач, решаемых относительно просто, а для общих случаев строить теорию аппроксимаций оптимальных управлений.

Под **непрерывной динамической задачей оптимального разбиения множеств с фазовыми ограничениями** будем понимать следующую задачу.

**Задача A16.** Требуется найти разбиение  $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Sigma_{\Omega}^N$ , управление  $u^*(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  и фазовую траекторию  $\rho^*(\cdot, \cdot)$ , при которых функционал

$$F(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt,$$

достигает своего минимального значения, и выполняются ограничения

$$\dot{\rho}(x, t) = f(\rho(x, t), u(x, t), t), \quad t \in [0, T] \tag{1.1.34}$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad \forall x \in \Omega$$

$$g(t, \rho(x, t)) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.1.35}$$

Здесь  $\beta_0, \beta_1 \geq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0; T > 0, a_i, \tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^n \in \Omega,$

$i = \overline{1, N}$ , – те же, что и в задаче **A14**; функция  $f(\rho, u, t)$  – известная функция своих аргументов, которая описывает внутренние связи управляемой динамической системы или внешние факторы;  $\rho_0(x)$  – заданная неотрицательная функция, определенная на  $\Omega$ ; функция  $g(t, y)$  – непрерывная по  $t$  и непрерывно дифференцируемая по  $y$ . Точки  $\tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^n \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , считаются заданными.

В терминах характеристических функций подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , составляющих разбиение множества  $\Omega$  задача **A16** запишется так:

**Задача В16:**

$$I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V},$$

где

$$V = (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Gamma_1, u(x, t) \in L_2 \Omega \times 0, T,$$

$$\dot{\rho}(x, t) = f(\rho(x, t), u(x, t), t), \quad t \in 0, T, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

$$g(t, \rho(x, t)) \leq 0, \quad t \in 0, T, \quad \forall x \in \Omega.$$

Таким образом, сформулированная задача **A16** отличается от задачи **A13** как общей формой записи уравнения дифференциальной связи, так и наличием фазовых ограничений (1.1.35), задаваемых в каждой точке.

Во всех представленных выше математических постановках непрерывных динамических задач оптимального разбиения множеств предполагается, что разбиение множества  $\Omega$  статическое, то есть не меняется со временем. Далее приведем постановки динамических задач ОРМ, в которых границы между подмножествами, составляющими разбиение множества  $\Omega$ , могут изменяться с течением времени. Факт зависимости разбиения множества  $\Omega$  от временной переменной будем отмечать следующим образом:  $\bar{\omega}(t) = (\Omega_1(t), \dots, \Omega_N(t))$ ,  $t \in [0, T]$ .

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества, в которых разбиение может меняться со временем, будем называть **непрерывными динамическими задачами оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами**.

Примером одной из таких задач является следующая задача.

**Задача A17.** Пусть задан набор функций  $u_i(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Состояние некоторого управляемого объекта описывается функцией  $\rho(x, t)$ , удовлетворяющей задаче Коши:

$$\dot{\rho}(x, t) = -\alpha\rho(x, t) + u_i(x, t) + f(x, t), \quad x \in \Omega_i(t),$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x).$$

Требуется найти такое разбиение  $\bar{\omega}^*(t) = (\Omega_1^*(t), \dots, \Omega_N^*(t)) \in \Sigma_\Omega^N$  для каждого  $t \in [0, T]$ , при котором функционал

$$J(\bar{\omega}(\cdot)) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i(t)} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i(t)} u_i^2(x, t) dx dt$$

достигал бы своего минимального значения.

Здесь  $\beta_0, \beta_1 \geq 0, T > 0, a_i \geq 0, i = \overline{1, N}$ , – заданные величины;

$\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , – заданные центры подмножеств;

функции  $c(x, \tau_i, t) \equiv c_i(x, t) \in L_2 \Omega \times 0, T$ ,  $f(x, t) \in L_2 \Omega \times 0, T$ ,  $\rho_0(x) \in L_2(\Omega)$  – известные функции своих аргументов.

Характерной особенностью задачи **A17** является тот факт, что скорость изменения функции  $\rho(x, t)$  в каждой точке  $x \in \Omega$  зависит от принадлежности этой точки текущему подмножеству  $\Omega_i(t)$ . В силу этого, разбиения множества  $\Omega$  в разные моменты времени могут отличаться друг от друга, а значит, и границы между подмножествами могут быть подвижными.

Динамическая задача оптимального разбиения множества с подвижными границами между подмножествами **A17** может служить математическим описанием следующей экономической ситуации. Пусть  $\Omega \subset E_2$  – множество потребителей одного и того же вида продукции, которая выпускается  $N$  производителями, расположенными в точках  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ . Речь идет о товаре первой необходимости, который потребляется часто и его нужно приобретать почти каждый день. Пусть  $\rho(x, t)$  – спрос потребителя  $x \in \Omega$  на товар в момент времени  $t$ ;  $c(x, \tau_i, t) = c(x, \tau_i)$  – функция, описывающая время (рассчитанное на единицу товара), необходимое потребителю  $x$ , чтобы добраться до  $i$ -го производителя (пункта продажи) товара. Очевидно, чем дальше потребитель находится от производителя, тем меньше вероятность того, что этот потребитель будет пользоваться услугами именно этого производителя. Предполагается, что скорость изменения спроса потребителя  $x$ :

а) пропорциональна самому спросу в данный момент времени с коэффициентом потребления  $\alpha$ ;

б) определяется внешними обстоятельствами, например такими как общая тенденция снижения или повышения спроса на товар, инфляция и т. п., влияние этих факторов описывается функцией  $f(x, t)$ ;

в) может увеличиваться за счет некоторых маркетинговых действий (проведение акций, рекламных кампаний и т. п.). Обозначим через  $u_i(x, t)$  величину, на которую в единицу времени может изменяться спрос потребителя за счет указанных действий одного  $i$ -го производителя. Считается, что функция  $u_i(x, t)$  для каждого  $i$ -го производителя определяется политикой предприятия и может быть заранее предсказуема.

Поскольку рассматривается сосуществование производителей продукции на рынке, нет необходимости каждому производителю вкладывать средства в повышение спроса каждого потребителя. Достаточно распределить все множество потребителей на сферы влияния производителей на определенный период времени с учетом того факта, что потребитель стремится минимизировать суммарное время, потраченное на приобретение товара за этот период. Можно также потребовать, чтобы суммарный вклад производителей в повышение спроса на всей территории  $\Omega$  был как можно меньшим (за что отвечает второе слагаемое в функционале задачи А17). В результате действий каждого производителя на рынке, а также внешних процессов за определенный промежуток времени, границы между сферами влияния могут меняться со временем, так как, во-первых, потребители могут менять свои приоритеты относительно выбора производителя, во-вторых, производители, в силу своих изменяющихся возможностей, могут поддерживать спрос на товар лишь на ограниченной территории.

Следует отметить, что границы между подмножествами могут иметь динамический характер и за счет изменяющихся координат центров подмножеств. Далее будем предполагать, что точки  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , могут менять свое месторасположение в области  $\Omega$  под влиянием некоторых внешних управляющих воздействий.

**Под динамической задачей оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами и управляемыми центрами** будем понимать следующую задачу [70, 165].

**Задача А18.** Пусть задан набор функций  $u_i(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T]), i = \overline{1, N}$ . Состояние некоторого управляемого объекта описывается функцией  $\rho(x, t)$ , удовлетворяющей  $\forall x \in \Omega_i(t)$  следующей задаче Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= f(\rho(x, t), u(x, t; \bar{\omega}(t)), x, t), \quad u \in U(t), \quad \forall t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

$$\begin{aligned} U(t) &= \{u(x, t; \bar{\omega}(t)) : u(x, t; \bar{\omega}(t)) = u_i(x, t) \text{ п.в. для } x \in \Omega_i(t), i = \overline{1, N}; \\ \bar{\omega}(t) &= (\Omega_1(t), \dots, \Omega_N(t)) \in \Sigma_{\Omega}^N\}, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Пусть с каждым подмножеством  $\Omega_i(\cdot)$  «связана» точка (центр)  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , координатами которой можно управлять с помощью некоторых параметров



$$v_i(t) = v_i^1(t), \dots, v_i^r(t), v_i^1 \in L_2(0, T), l = \overline{1, r}, i = \overline{1, N}, t \in [0, T].$$

Изменение координат центра со временем описывается следующим векторным дифференциальным уравнением:

$$\dot{\tau}_i(t) = \phi_i \tau_i(t), v_i(t), t, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, N}.$$

Функции  $f, \phi_i = \phi_i^1, \dots, \phi_i^n$ ,  $i = \overline{1, N}$  – известные функции своих аргументов.

Требуется найти разбиение  $\bar{\omega}^*(t) = (\Omega_1^*(t), \dots, \Omega_N^*(t)) \in \Sigma_{\Omega}^N$ ,  $t \in [0, T]$ , соответствующую функцию  $\rho^*(\cdot, \cdot) = \rho^*(\cdot, \cdot; \bar{\omega}^*(\cdot))$  (удовлетворяющую (1.1.36)), управляющие вектор-функции

$$v_i^*(\cdot) = v_i^{1*}(\cdot), \dots, v_i^{r*}(\cdot), v_i^{1*}(\cdot) \in V \subseteq L_2(0, T), \quad l = \overline{1, r}, i = \overline{1, N},$$

и соответствующие им фазовые траектории  $\tau_i^*(\cdot) \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, N}$ , при которых каждый центр  $\tau_i \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, N}$ , переходил бы из заданного начального состояния,  $\tau_i(0) = \hat{\tau}_{i0}$ ,  $i = \overline{1, N}$  в заданное конечное состояние  $\tau_i(T) = \hat{\tau}_{iT}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , а некоторый функционал

$$F(\bar{\omega}(\cdot), \tau(\cdot), \rho(\cdot, \cdot; \bar{\omega}(\cdot)), v(\cdot))$$

достигал бы своего минимального значения.

Частным случаем задачи **A18** является задача управления движением  $N$  объектов  $\tau_i \in \bar{\Omega}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , по холмистой местности  $\bar{\Omega}$ , рельеф которой может быть описан определенной функцией  $z = \mu(x^1, x^2)$ ,  $(x^1, x^2) \in \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , с одновременным отысканием «областей наблюдения»  $\bar{\Omega}_1(t), \dots, \bar{\Omega}_N(t)$  объектов  $\tau_i \in \bar{\Omega}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , так чтобы «суммарные затраты на наблюдение» за каждой точкой множества  $\bar{\Omega}$ , а также траектории, по которым совершается перемещение объектов  $\tau_i \in \bar{\Omega}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , были минимальными.

Математически сформулированная задача записывается так.

**Задача A19.** Требуется

$$J(\bar{\omega}(\cdot), \tau(\cdot), \rho(\cdot, \cdot; \bar{\omega}(\cdot)), a(\cdot), \phi(\cdot)) \rightarrow \min,$$

где

$$J(\bar{\omega}(\cdot), \tau(\cdot), \rho(\cdot, \cdot; \bar{\omega}(\cdot)), a(\cdot), \phi(\cdot)) =$$

$$= \gamma_0 \int \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i(t)} \left[ c(x, \tau_i(t), t) + A_i \rho(x, t; \bar{\omega}(t)) + u_i^2(x, t) \right] dx dt + \\ + \gamma_1 \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\tau_i(0)}^{\tau_i(T)} dL_i + \int \sum_{i=1}^N a_i^2(t) dt \right\},$$

при ограничениях

$$\dot{\rho}(x, t) = \rho(x, t) + u_i(x, t) + f(x, t), \quad x \in \Omega_i(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad i = \overline{1, N}, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x);$$

$$\ddot{\tau}_{1i}(t) = a_i(t) \cos \phi_i(t), \\ \ddot{\tau}_{2i}(t) = a_i(t) \sin \phi_i(t), \tag{1.1.37}$$

$$\tau_i(0) = \tau_{1i}^0, \tau_{2i}^0, \quad \dot{\tau}_i(0) = v_{1i}^0, v_{2i}^0, \quad i = \overline{1, N}. \\ \tau_i(T) = \tau_{1i}^T, \tau_{2i}^T, \quad \dot{\tau}_i(T) = 0, 0,$$

Здесь  $u_i(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – заданный набор функций, определяющих величину воздействий центра на некоторую наблюдаемую и управляемую величину  $\rho(x, t)$ ;  $f(x, t), \rho_0(x)$  – известные функции своих аргументов. Точка  $\tau_i$  на рассматриваемой поверхности имеет координаты  $(\tau_{1i}, \tau_{2i}, \tau_{3i})$ , где первые две изменяются по закону (1.1.37) под воздействием управляющих параметров  $a_i(t) \in KC(0, T)$ ,  $\phi_i(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , и могут принимать значение в области  $\Omega \subset R^2$ , третья координата –  $\tau_{3i} = \mu(\tau_{1i}, \tau_{2i})$ ,  $i = \overline{1, N}$ . В функционале  $L_i$  – длина  $i$ -й кривой (траектории движения  $i$ -й «управляемой точки» по поверхности  $z = \mu(x^1, x^2)$ ), соединяющей точки  $\tau_i^0$  и  $\tau_i^T$ ; криволинейный интеграл вычисляется по формуле:

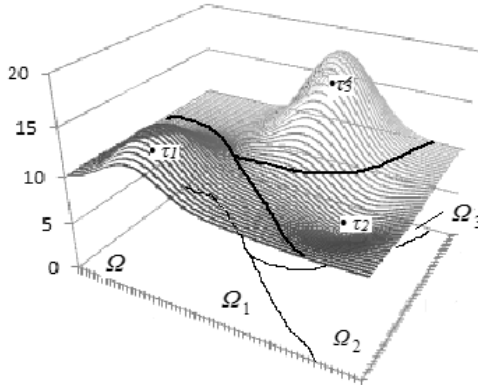
$$\sum_{i=1}^N \int_{\tau_i(0)}^{\tau_i(T)} dL_i = \sum_{i=1}^N \int_0^T \sqrt{\dot{\tau}_{1i}^2(t) + \dot{\tau}_{2i}^2(t) + \dot{\tau}_{3i}^2(t)} dt.$$

Константы  $\gamma_0, \gamma_1 \geq 0$  заданы и определяют приоритет слагаемого;  $A_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – фиксированные величины;  $c(x, y, t)$  – заданная функция,  $T > 0$  – фиксированная продолжительность управляемого процесса.

Таким образом, в задаче **A19** управление совершается проекциями на плоскость  $x^1 O x^2$  точек  $(\tau_{1i}, \tau_{2i}, \tau_{3i})$ , а множество  $\Omega$ , являющееся проекцией  $\bar{\Omega}$  на эту же плоскость, и подлжит разбиению (рис. 1.3).

Еще раз отметим, что в задаче **A19** границы между подмножествами могут изменяться не только из-за того, что скорость изменения функции  $\rho(x, t)$  определяется принадлежностью точки  $x$  к тому или иному подмножеству, но и в силу того, что «центры» подмножеств, меняя свое место расположения, могут «тянуть» за собой границы между зонами своего наблюдения.

Как нетрудно заметить, в функционалы приведенных выше динамических задач оптимального разбиения множеств **A13** – **A19** фазовая переменная  $\rho(x, t)$  входит линейно, что существенно облегчает решение этих задач.



**Рис. 1.3.** Разбиение поверхности  $z = \mu(x^1, x^2)$ ,  $(x^1, x^2) \in \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , на три «зоны наблюдения», соответствующие точкам  $\tau_i \in \bar{\Omega}$ ,  $i = \overline{1,3}$

Далее представлены математические формулировки нелинейных динамических задач оптимального разбиения континуальных множеств, в которых функции, описывающие состояние системы, меняются так, что скорость их изменения в каждой точке рассматриваемого множества зависит от принадлежности этой точки к определенному подмножеству исходного множества. Задача состоит в отыскании разбиения множества на заданное число подмножеств, обеспечивающего минимальное значение некоторого критерия качества. Нелинейность задач связана, прежде всего, с видом функционала (например, это может быть среднеквадратическое отклонение изменяющегося во времени состояния системы от желаемого,

или функционал, содержащий функции модуля, максимума и другие). Кроме того, нелинейной может быть и дифференциальная связь, задающая изменение состояния рассматриваемого управляемого объекта или процесса.

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество из  $E_n$ ,  $\Sigma_{\Omega}^N$  – класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств. Пусть  $u_i(x, t; \tau)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – заданные действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega \times 0, T$ , измеримые по  $x$  и  $t$  при произвольных фиксированных векторах параметров

$$\tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^K \in \Xi_i, \Xi_i \subseteq R^K, i = \overline{1, N}.$$

Далее, пользуясь терминологией теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств, векторы  $\tau_i, i = \overline{1, N}$ , будем называть «центрами подмножеств». Действительно интерпретировать эти точки как центры подмножеств, составляющих разбиение множества  $\Omega$ , можно лишь в частном случае, когда  $K = n, \Xi_i \equiv \Omega, i = \overline{1, N}$ .

Введем в рассмотрение класс функций:

$$U = (u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) : u(x, t; \bar{\omega}, \tau) = u_i(x, t; \tau_i),$$

$$\text{п. в. для } x \in \Omega_i, \tau_i \in \Xi_i, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, t \in 0, T$$

и функционал

$$F(\gamma) = \int \int_{\Omega} \int_0^T \rho(x, t; u(x, t; \bar{\omega}, \tau)) - \hat{\rho}(x, t)^2 dt dx, \quad (1.1.38)$$

где  $\gamma = \bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot)$ ,  $u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U$ ,  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$ ,  $\tau \in \Xi$ ,  $\Xi = \Xi_1 \times \Xi_2 \times \dots \times \Xi_N$ ;  $T > 0$  – заданный момент времени; функция  $\rho(x, \cdot) \in C([0, T])$  для каждого  $x \in \Omega$  является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \quad t \in 0, T, \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

причем

$$\int \int_{\Omega} \int_0^T g(\rho(x, t), u_i(x, t; \tau_i)) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.1.40)$$

где  $\alpha, b_1, \dots, b_N$  – заданные величины; функция  $g(y, z)$  – некоторая заданная функция.

**Замечание 1.1.** Каждое допустимое разбиение  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$  и вектор  $\tau \in \Xi$  определяет функцию  $u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U$  такую, что соответствующая задача Коши (1.1.39) имеет единственное решение  $\rho(x, t)$  в следующем смысле:

$\forall x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}$  функция  $\rho(x, t)$  – непрерывна по временной переменной  $t \in 0, T$  и удовлетворяет равенству

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t \alpha \rho(x, t) + u_1(x, \tau_i, \theta) \, d\theta, \quad t \in 0, T.$$

Под **нелинейной динамической задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на его подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$**  (среди которых могут быть и пустые) **с размещением центров подмножеств** будем понимать следующую задачу.

**Задача A20.**

$$F \bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot) \rightarrow \min_{u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot) \in \Phi},$$

$$\Phi = \bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot) : \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau \in \Xi, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U;$$

$$\dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \quad t \in 0, T,$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x); \int_0^T \int_{\Omega_i} g(\rho(x, t), u_1(x, t; \tau_i)) \, dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}.$$

*Оптимальным решением задачи A20* будем называть допустимую четверку  $\gamma^* = \bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)$ , которая доставляет минимальное значение функционалу  $F$ .

В случае, когда в задаче **A20** векторы параметров  $\tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^K \in \Xi_i, \Xi_i \subseteq R^K, i = \overline{1, N}$ , известны заранее, получим задачу, которую будем называть **динамической задачей оптимального разбиения множества с функционалом, нелинейным относительно фазовой переменной**:

**Задача A21.**

$$F \bar{\omega}, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}), \rho(\cdot, \cdot) \rightarrow \min_{u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}), \rho(\cdot, \cdot) \in \Phi_1},$$

$$\Phi_1 = \{ \bar{\omega}, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}), \rho(\cdot, \cdot) : \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}) \in U_1 \};$$

$$\dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}), \quad t \in [0, T],$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x); \int_0^T \int_{\Omega_i} g(\rho(x, t), u_i(x, t; \tau_i)) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N},$$

$$U_1 = \{ u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}) : u(x, t; \bar{\omega}) = u_i(x, t; \tau_i), \text{ п. в. для } x \in \Omega_i, i = \overline{1, N},$$

$$\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, t \in [0, T] \}.$$

**Замечание 1.2.** Задаче **A21** (в случае, когда

$$F = \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) - \hat{\rho}(x, t)^2 dx dt)$$

можно дать следующую экономическую интерпретацию. Пусть рассматривается сосуществование производителей однотипных товаров (сходных по цене и качеству), потребителем которых является определенный слой общества с примерно одинаковым уровнем накоплений (доходов), которые живут в одинаковых условиях и имеют одинаковую шкалу пожеланий. Производители товаров другого качества сосуществуют в другой рыночной нише. Общим интересом для фирм-производителей однотипного товара является удержание спроса  $\rho(x, t)$  на данный товар на определенном уровне  $\hat{\rho}(x, t)$ , который возможно лишь несколько увеличивать или уменьшать со временем, сохраняя при этом главную тенденцию колебания в области оптимального для производителей спроса, при условии учета предельной границы потребления данного товара и производственных мощностей предприятия. Будем считать, что динамика спроса прямо пропорционально самому спросу. Кроме того, повышение спроса на продукцию может осуществляться за счет проведения субъектами производства определенных действий, оживляющих спрос. Например, это может быть незначительное сокращение стоимости товара за счет модернизации производства, рекламные акции и т. д. Сила влияния таких действий  $i$ -го производителя описывается функцией  $u_i(x, \tau_i, t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Поскольку производители сосуществуют, нет смысла каждому из них «вкладывать средства» в каждого потребителя. Нужно только распределить потребителей на зоны влияния производителей с учетом их общих интересов. Ограничения (1.1.40) учитывают возможности самих производителей.

Для корректности поставленной задачи должны быть наложены некоторые ограничения на правые части неравенств (1.1.40), при которых задача всегда была бы разрешима. Эти условия получим в процессе разра-

ботки и обоснования метода решения задачи (1.1.38) – (1.1.40) или задачи **A21**.

**Замечание 1.3.** Функционал задачи (1.1.38) – (1.1.40) может быть задан в виде

$$F(\gamma) = \int_{\Omega} \int_0^T |\rho(x, t; u(x, t; \bar{\omega}, \tau)) - \bar{\rho}(x, t)| dt dx . \quad (1.1.41)$$

Тогда задачу **A20** с функционалом вида (1.1.41) будем называть **динамической задачей оптимального разбиения множества с недифференцируемым функционалом**.

Если предположить, что динамика спроса прямо пропорционально зависит от количества населения рассматриваемого слоя общества, потребляющего товар, то изменение спроса со временем в каждой точке региона будет описываться дифференциальным уравнением, аналогичным логистическому уравнению, которое описывает динамику численности населения [30].

Как уже отмечалось, нелинейность в динамических задачах ОРМ может быть обусловлена не только видом функционала качества, но и способом задания дифференциального уравнения, описывающего изменение состояния управляемого объекта или процесса. Приведем математическую постановку задачи, которую будем называть **динамической задачей оптимального разбиения с квадратичным функционалом и нелинейной дифференциальной связью**.

### Задача A22.

$$F(\bar{\omega}) \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N} ,$$

$$F(\bar{\omega}) = \int_{\Omega} \int_0^T \rho(x, t; \bar{\omega}) - \bar{\rho}(x, t) \quad ^2 dt dx ,$$

где функция  $\rho(x, \cdot; \bar{\omega})$  для каждого разбиения  $\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Sigma_{\Omega}^N$  и для каждого  $x \in \Omega_i$  является решением задачи Коши

$$\dot{\rho}(x, t) = \varphi(\rho(x, t)) + u_i(x, t), \quad t \in 0, T ,$$

$$\rho(x, t) = \rho_0(x),$$

причем

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} .$$

Здесь  $T > 0$  – фиксированный момент времени; функции  $u_i(x, t) \in L_2(\Omega \times 0, T)$ ,  $i = \overline{1, N}$  известны заранее;  $\varphi(\cdot)$  – заданная нелинейная функция одного аргумента;  $\rho_0(x) \in L_2(\Omega)$ ,  $\hat{\rho}(x, t) \in L_2(\Omega \times 0, T)$  – также заданные функции.

Рассматриваемые динамические задачи оптимального разбиения множеств могут служить математическими моделями некоторых обратных задач для дифференциальных уравнений с переключаемой правой частью, т. е. таких задач, в которых состояние некоторого процесса или объекта изменяется во времени, причем поведение исследуемого объекта описывается обыкновенным дифференциальным уравнением или системой уравнений с разрывной правой частью. К таким задачам относятся задачи идентификации «многозонных» или «многостадийных» моделей динамики, состоящие в определении по некоторой входной апостериорной информации неизвестных границ между зонами функционирования того или иного объекта, так, что в пределах одной зоны динамический режим объекта может быть описан линейным дифференциальным уравнением (в общем случае векторным) [78, 83]. Неизвестными в задаче также могут быть и некоторые коэффициенты дифференциального оператора. Тогда задача сводится к так называемой нелинейной динамической задаче ОРМ с размещением «центров» подмножеств. Такие задачи идентификации многозонных моделей динамики будут представлены в главе 7. Как и многие обратные задачи, возникающие при обработке экспериментов, эти задачи характеризуются некорректностью постановки, что обуславливает проведение дополнительного анализа вопросов, связанных с существованием и единственностью решения таких задач, а также непрерывной зависимостью решения от начальных данных.

Приведенные выше постановки динамических задач ОРМ характеризуются наличием обыкновенного дифференциального уравнения или систем таких уравнений.

Если поведение изучаемого управляемого объекта описывается уравнениями в частных производных, то возникают задачи оптимального управления распределенными системами [11, 19, 20, 21, 29, 31, 32, 37, 74, 95 и др.]. Представим далее в качестве примера одну задачу стартового управления параболической системой, которая в своей математической постановке может быть сведена к непрерывной задаче оптимального разбиения множеств.

**Задача стартового управления с линейным критерием качества, сводящаяся к непрерывной задаче оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_2$  на подмножества.**



**Задача А23.** Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество из  $E_2$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ . Введем в рассмотрение класс  $\Sigma_{\Omega}^N$  всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \Omega_i \subseteq \Omega, i = \overline{1, N}; \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega; \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = \emptyset, i \neq j; i, j = \overline{1, N}.$$

Пусть состояние управляемого объекта описывается функцией  $c(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega \times 0, T)$ , удовлетворяющей краевой задаче

$$\partial c / \partial t = \Delta c + f(x, t), \tag{1.1.42}$$

$$c(x, 0) = u(x; \bar{\omega}); u \in U, \tag{1.1.43}$$

$$U = \{u(x; \bar{\omega}) : u(x; \bar{\omega}) = u_i(x) \text{ п. в. для } x \in \Omega_i, i = 1, \dots, N,$$

$$\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Sigma_{\Omega}^N \}, \tag{1.1.44}$$

$$c(x, t) = g(x, t) \forall x \in \partial\Omega, t \in 0, T, \tag{1.1.45}$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – оператор Лапласа;

функции  $g(x, t) \in L_2(\partial\Omega \times 0, T)$  и  $f(x, t) \in L_2(\Omega \times 0, T)$  известны заранее;  $u_i(x) \in L_2(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – заданный на  $\Omega \subset E_2$  набор функций.

Как нетрудно заметить, в качестве управления  $u(x; \bar{\omega})$  выступает функция начальных условий, зависящая от разбиений  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$  множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ . Множество допустимых управлений  $U$  представляет собой класс кусочно-непрерывных на  $\Omega$  функций, определяемых разбиением  $\bar{\omega}$  множества  $\Omega$  таким образом, что для точек  $x$  каждого из подмножеств  $\Omega_i \in \bar{\omega}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , функция управления  $u(x; \bar{\omega})$  совпадает с соответствующей подмножеству функцией  $u_i(x)$ . Кроме того, на разбиение множества  $\Omega$  могут накладываться интегральные ограничения типа

$$\hat{\Sigma}_{\Omega}^N = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Sigma_{\Omega}^N : \int_{\Omega_i} u_i(x) dx \leq b_i; i = \overline{1, N} \right\}, \tag{1.1.46}$$

где  $b_1, b_2, \dots, b_N$  – заданные, как правило, неотрицательные числа.

Каждое допустимое разбиение  $\bar{\omega} \in \hat{\Sigma}_{\Omega}^N$  определяет начальную функцию  $u(x; \bar{\omega})$  такую, что соответствующая ей краевая задача (1.1.42) – (1.1.45) имеет единственное обобщенное решение

$c(x, t) \in W_2^{1,0} \Omega \times 0, T$  , где  $W_2^{1,0} \Omega \times 0, T$  – пространство Соболева [32].

Условимся решение краевой задачи (1.1.42)–(1.1.45), соответствующее функции  $u(x, \bar{\omega})$ ,  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$ , обозначать  $c(x, t; u(x, \bar{\omega}))$  .

Требуется определить такое разбиение  $\bar{\omega}^* \in \Sigma_{\Omega}^N$ , для которого функция  $u(\cdot, \bar{\omega}^*)$  доставляла бы минимальное значение функционалу

$$V(u(\cdot, \bar{\omega})) = \int_{\Omega} c(x, T; u(x, \bar{\omega})) dx , \quad (1.1.47)$$

где  $T > 0$  – фиксированная длительность управляемого процесса.

**Замечание 1.4.** В [80] указано, что функция  $c(x, t)$  , рассматриваемая как отображение отрезка  $[0, T]$  в пространство  $L_2(\Omega)$  , является непрерывной по переменной  $t$  в том смысле, что функция  $\zeta(x) = \|c(x, t)\|_{L_2(\Omega)}$  непрерывна при  $t \in 0, T$  , следовательно, интеграл в (1.1.47) существует.

**Замечание 1.5.** Интегральные ограничения в (1.1.46) могут быть заданы в более общем виде, например,

$$\int_{\Omega_i} \xi(x) dx \leq b_i ; \quad i = \overline{1, N} , \quad (1.1.48)$$

где  $\xi(\cdot)$  – некоторая заданная функция пространства  $L_2(\Omega)$  .

Особенностями сформулированной задачи является, во-первых, то, что начальное состояние процесса, которым мы управляем, определяется разбиением  $\bar{\omega}$  множества  $\Omega$ ; во-вторых, наличие ограничений типа (1.1.46), в которых неизвестный параметр  $\Omega_i$  входит в пределы интегрирования.

**Замечание 1.6.** Задачи управления, имеющие математические модели, подобные сформулированной задаче, ставятся во многих областях науки и техники, таких как металлургия, энергетика, геология, почвоведение, экология и т. д. В случае управления процессами диффузии функция  $c(x, t)$  представляет собой концентрацию некоторого вещества; процессы фильтрации жидкости в пористых средах описываются скалярной функцией напора; если же имеют дело с распространением тепла, то функция  $c(x, t)$  представляет собой температуру в каждой точке заданного пространства и в каждый момент времени.

Другие примеры задач оптимального разбиения множеств, которые возникают при управлении распределенными системами, подробное изучение свойств таких задач, а также методы их решения описаны в главе 5.

*1.2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА НЕПРЕРЫВНЫХ  
ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ  
МНОЖЕСТВ  $n$ -МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА  
ПРОСТРАНСТВА  $E_n$  НА ПОДМНОЖЕСТВА.  
КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ*

В данном разделе приведем, следуя [49, 51], наиболее общую постановку непрерывной задачи оптимального разбиения множества и укажем основные принципы (признаки) классификации таких задач.

Пусть  $\Omega$  – непрерывное, ограниченное, измеримое по Лебегу множество из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ ,  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  – измеримое пространство,  $\Sigma$  – алгебра множества  $\Omega$ . В качестве меры  $\mu$  будем рассматривать меру Лебега.

**Определение 1.1.** Разбиением множества  $\Omega \subset E_n$  на  $N$  подмножеств назовём систему его подмножеств  $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$ , для которых выполняются три условия:

- 1)  $\Omega \subseteq \overline{\Omega_i}, \forall i=1, \overline{N}$ ;
- 2)  $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$ ;
- 3)  $\mu \Omega_i \cap \Omega_j = 0, i \neq j, i, j=1, \overline{N}$ .

Обозначим через  $\mathfrak{R}_\Omega^N$  пространство всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств:

$$\mathfrak{R}_\Omega^N = \left\{ \overline{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \mu \Omega_i \cap \Omega_j = 0, i \neq j, i, j=1, \overline{N} \right\}.$$

При этом разбиения, отличающиеся только множествами нулевой меры, будем считать равными элементами пространства  $\mathfrak{R}_\Omega^N$ .

Очевидно  $\mathfrak{R}_\Omega^N \subset \Sigma^N$ . Для элементов пространства  $\Sigma^N = \underbrace{\Sigma \times \Sigma \times \dots \times \Sigma}_N$  – декартова произведения  $N$  алгебр множества  $\Omega$ , а значит и для элементов  $\mathfrak{R}_\Omega^N$ , введём метрику

$$\rho(\{(\Omega_1, \dots, \Omega_N)\}, \{(\overline{\Omega}_1, \dots, \overline{\Omega}_N)\}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \mu^2(\Omega_i \Delta \overline{\Omega}_i)},$$

где под обозначением  $\Omega_i \Delta \bar{\Omega}_i$  понимается симметрическая разность множеств.

Метрическое пространство, построенное на базе  $\mathfrak{R}_\Omega^N \subset \Sigma^N$ , ограничено, плотно в себе, хаусдорфово, замкнуто [48, 51].

**Постановка задачи ОРМ.** Пусть функции  $F^j, G_1^j, \dots, G_m^j : \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow \mathbb{R}^1, j = 1, \dots, M$  – псевдонепрерывные функции разбиения;

$$F(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = \sum_{j=1}^M F^j(\Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j);$$

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = \sum_{j=1}^M G_i^j(\Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j), i = 1, \dots, m.$$

Требуется найти набор подмножеств

$$(\Omega_1^{1*}, \dots, \Omega_N^{1*}; \dots; \Omega_1^{M*}, \dots, \Omega_N^{M*}) \in (\mathfrak{R}_\Omega^N)^M,$$

при котором функция разбиения  $F$  достигает своего минимального значения и выполняются условия

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) \leq 0, i = 1, \dots, p,$$

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = 0, i = p + 1, \dots, m.$$

Введем следующие обозначения:

$$(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) = (\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) \in (\mathfrak{R}_\Omega^N)^M;$$

$$U = \{(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \in (\mathfrak{R}_\Omega^N)^M : G_i(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \leq 0, i = \overline{1, p};$$

$$G_i(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) = 0, i = \overline{p+1, m}\}.$$

Тогда коротко задачу оптимального разбиения множеств можно записать так:

$$F(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \rightarrow \min_{\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)} \in U}. \quad (1.2.1)$$

Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств классифицируют по различным признакам.

По значению параметра  $M$  различают:

*однопродуктовые* задачи ОРМ:  $M = 1$ ;

*многопродуктовые* задачи ОРМ:  $M \geq 2$ .

На рис. 1.2 изображено возможное разбиение множества  $\Omega \subset E_2$  на три подмножества  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  по каждому из двух "продуктов" ( $M = 2$ ).

По способу задания функций разбиения  $F^j, G_1^j, \dots, G_m^j : \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow \mathbf{R}^1, j = \overline{1, m}$ , задачи ОРМ делятся на:

– *линейные непрерывные задачи оптимального разбиения множеств*: все указанные функции линейны относительно величин  $\int_{\Omega_i} \xi \cdot x \, dx$ ,

$i = \overline{1, N}$ , где  $\xi \cdot$  – некоторая определенная на  $\Omega$  функция;

– *нелинейные непрерывные задачи оптимального разбиения множеств*: хотя бы одна из указанных функций нелинейна относительно величины  $\int_{\Omega_i} \xi \cdot x \, dx, i = \overline{1, N}$ .

По характеру параметров, входящих в функции  $F^j, G_1^j, \dots, G_m^j, j = \overline{1, m}$ , различают детерминированные и стохастические задачи ОРМ. Задача ОРМ называется *детерминированной*, если все параметры, входящие в целевую функцию и ограничения, являются детерминированными (например, задачи **A1 – A8, A13 – A21** подраздела 1.1), и *стохастической*, если хотя бы один параметр является случайным (например, задачи **A6', A8'**). Кроме того, выделяют класс *задач оптимального разбиения множеств в условиях неполной информации об исходных данных*.

По полноте и определенности исходной информации о параметрах, участвующих в формулировке задачи, выделяют также задачи однозначного (четкого) и нечеткого разбиения (см. п. 1.1.5, задачи **A1, C3**). Если входные данные в задаче хорошо структурированы, задача оптимального разбиения носит четкий характер. В случае плохо или слабо структурированных исходных данных требование нахождения однозначного (четкого) разбиения элементов множества  $\Omega$  из  $E_n$  может оказаться достаточно грубым и жестким. Тогда ослабление этого требования осуществляется за счет введения в рассмотрение нечетких подмножеств  $\Omega_i, i = \overline{1, \dots, N}$ , множества  $\Omega$  и соответствующих им функций принадлежности, принимающих значение из отрезка  $[0, 1]$ , и формулировки нечеткой задачи ОРМ – задачи нахождения такого нечеткого разбиения множества  $\Omega$  на его нечеткие подмножества, которое в некотором смысле «минимизирует» некоторый целевой функционал. Напомним, что определение нечеткого разбиения четкого множества  $\Omega$  было введено в пункте 1.1.5.

По наличию в задаче входных характеристик, изменяющихся во времени, выделяют:

– *статические задачи ОРМ*: все параметры задачи не зависят от времени;

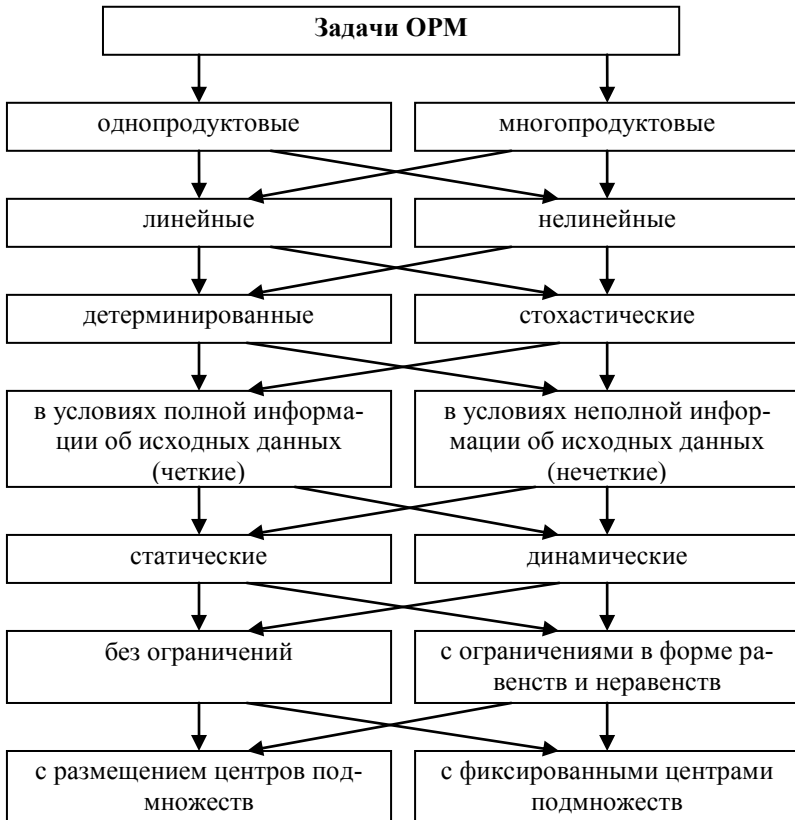
– *динамические задачи ОРМ*: хотя бы одна из входных характеристик зависит от времени, и в структуру задачи входит дифференциальное уравнение, описывающее динамику этой характеристики.

По наличию ограничений на разбиения различают задачи ОРМ:

– *без ограничений*:  $U \equiv (\mathfrak{R}_{\Omega}^N)^M$ ;

– *с ограничениями в форме равенств и неравенств*:  $U \subset (\mathfrak{R}_{\Omega}^N)^M$ .

**Схема классификации задач оптимального разбиения множеств**



Как правило, в задачах оптимального разбиения множеств с подмножествами  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ , составляющими разбиение множества  $\Omega$ , связаны параметры  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  – так называемые «центры» этих подмножеств. Если эти параметры заранее известны, то задачи ОРМ называются *задачами оптимального разбиения с заданными координатами центров подмножеств*. Если же указанные параметры подлежат определению наряду с разбиением, такие задачи ОРМ называются *задачами оптимального разбиения множества с размещением центров подмножеств (или с отысканием координат центров подмножеств)*.

Как следует из п.1.1, математические модели непрерывных задач оптимального разбиения множеств, вытекающих из конкретных приложений, могут одновременно принадлежать нескольким классам задач ОРМ.

Далее представим численные алгоритмы решения непрерывных линейных детерминированных задач оптимального разбиения множеств, являющихся наиболее изученными задачами ОРМ. Обоснование методов решения таких задач на основе конструктивных необходимых условий оптимальности приведены в [65].

### 1.3. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ ИЗ $E_n$ НА ПОДМНОЖЕСТВА

Все методы решения непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств, рассматриваемые в настоящем разделе, основаны на едином подходе, в основе которого лежит следующая идея. Исходные задачи ОРМ, которые математически сформулированы как бесконечномерные задачи оптимизации, сводятся определенным образом (например, через функционал Лагранжа) к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина, для численного решения которых применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации, а именно, различные модификации  $g$ -алгоритма Н. З. Шора. Особенностью такого подхода для линейных задач ОРМ является тот факт, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить аналитически в явном виде, причем в аналитическое выражение могут входить параметры, отыскиваемые как оптимальное решение вышеназванных вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями.

Приведем сначала метод и алгоритм решения непрерывной линейной

многoproдуктовой задачи **A5** оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданным положением центров подмножеств. Затем сформулируем алгоритм решения задачи **A6** с отысканием координат центров подмножеств, которая является обобщением задачи **A5**. Алгоритмы решения для всех частных случаев задачи **A6**, т. е. для линейных однопродуктовых как с фиксированными центрами подмножеств, так и с неизвестными заранее координатами этих центров, как с ограничениями, так и без ограничений, построенные на основе алгоритма решения задачи **A6**, рассмотрим в п.1.3.2.

**1.3.1. Многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств как с заданным положением центров подмножеств, так и с неизвестными заранее координатами этих центров**

*1.3.1.1. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с заданным положением центров подмножеств*

Непрерывную линейную многопродуктовую задачу оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на его подмножества  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M$  (среди которых могут быть пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданным положением центров подмножеств рассмотрим в виде **B5** (см. раздел 1.1.2), удобном для дальнейших исследований.

**Задача B5.** Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_4} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где

$$\Gamma_4 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_3 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)):$$



$$\lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M \};$$

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  – заданный вектор из  $\Omega^N$ .

Здесь функции  $c^j(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ ; функции  $\rho^j(x)$  – ограниченные, измеримые на  $\Omega$  для всех  $j = 1, \dots, M$ ;  $a_1^1, \dots, a_N^M, b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи:

$$S = \int \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, 0 \leq b_i \leq S, i = 1, \dots, N.$$

Точка  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ , принадлежащая подмножеству  $\Omega_i^j$ , одна и та же для всех  $j = 1, \dots, M$ , является общим центром подмножеств  $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$ .

Будем считать, что мера множества граничных точек  $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , равна нулю.

Характеристическая функция  $\lambda_i^j$  х подмножества  $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , имеет вид:

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^j, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i^j. \end{cases}$$

От задачи **B5** бесконечномерного математического программирования с булевыми значениями переменных  $\lambda_i^j(\cdot), i=1, \dots, N, j=1, \dots, M$ , перейдем к соответствующей задаче со значениями  $\lambda_i^j(\cdot), i=1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , из отрезка  $[0, 1]$ , т. е. рассмотрим следующую задачу.

**Задача B5.1.** Найти вектор-функцию  $\lambda_*(\cdot) = (\lambda_*^1(\cdot), \dots, \lambda_*^M(\cdot))$ , такую, что

$$I(\lambda_*(\cdot)) = \min_{\lambda \in \Gamma_2} I(\lambda(\cdot)),$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x): \lambda(x) \in \Gamma \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N\}.$$

Здесь

$$I(\lambda) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + \alpha_i^j] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

$$\Gamma = \{ \lambda(x): \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M,$$

$$0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1, x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M\}.$$

Как следует из [65]  $\Gamma_2$  – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства  $L_2^{MN}(\Omega)$  с нормой

$$\|\lambda(\cdot)\| = \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\lambda_i^j(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Согласно [22],  $L_2^{MN}(\Omega)$  рефлексивно.

При каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  функционал  $I(\lambda(\cdot))$  линеен, непрерывен относительно  $\lambda(\cdot)$  на  $\Gamma_2$ .

Имеют место три следующие утверждения, доказанные в [65].

**Утверждение 1.1.** При каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  ограниченное, замкнутое, выпуклое множество  $\Gamma_2$  гильбертова пространства  $L_2^{MN}(\Omega)$  слабо компактно и (согласно теореме Крейна – Мильмана [42]) содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

**Утверждение 1.2.** Среди множества точек  $\Gamma_2^*$ , в которых линейный относительно  $\lambda(\cdot)$  функционал  $I(\lambda(\cdot))$  достигает при фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  минимального по  $\lambda(\cdot)$  значения на множестве  $\Gamma_2$ , найдется хотя бы одна крайняя точка множества  $\Gamma_2$ .

**Утверждение 1.3.** Крайние точки множества  $\Gamma_2$  представляют собой характеристические функции некоторых подмножеств  $\Omega_i^j$ , образующих разбиение множества  $\Omega$  при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$ .

Отметим, что задача **B5** имеет решение. Действительно, так как  $\Gamma_2$  – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства  $L_2^{MN}(\Omega)$ , а функционал  $I(\lambda(\cdot))$  линеен (а значит, выпуклый) и непрерывен относительно  $\lambda(\cdot)$  на  $\Gamma_2$ , тогда в силу обобщенной теоремы Вейерштрасса [22] выпуклый непрерывный функционал  $I(\lambda(\cdot))$  на замкнутом, ограничен-

ном, выпуклом множестве  $\Gamma_2$  гильбертова пространства  $L_2^{MN}(\Omega)$  достигает своей нижней грани.

Заметим также, что, как следует из утверждения 1.2, среди множества оптимальных решений задачи **B5**, т. е. среди множества точек  $\Gamma_2^*$ , в которых линейный относительно  $\lambda(\cdot)$  функционал  $I(\lambda(\cdot))$  достигает минимального значения на множестве  $\Gamma_2$ , найдется хотя бы одна крайняя точка множества  $\Gamma_2$ . А, как следует из утверждения 1.3, крайние точки множества  $\Gamma_2$  представляют собой характеристические функции подмножеств  $\Omega_1^j$ , образующих разбиение множества  $\Omega$ . Отсюда следует, что среди множества оптимальных решений задачи **B5.1** содержатся оптимальные решения задачи **B5**. Приведенные утверждения сводят задачу **B5.1** к задаче **B5**.

### Описание метода решения задачи A5

Под функционалом Лагранжа для задачи **B5.1** будем понимать функционал

$$h(\lambda, \psi) = I(\lambda(\cdot)) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right), \quad (1.3.1)$$

где  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$  есть  $N$ -мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты  $\psi_1, \dots, \psi_p$  произвольны по знаку, а  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  — неотрицательны;  $\lambda(x) \in \Gamma$  для  $x \in \Omega$ .

Пару  $(\lambda^*(\cdot), \psi^*)$  назовем седловой точкой функционала (1.3.1) на множестве  $\Gamma \times \Lambda$ , где

$$\Lambda = \{ \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N: \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N \},$$

если  $h(\lambda^*(\cdot), \psi) \leq h(\lambda^*(\cdot), \psi^*) \leq h(\lambda(\cdot), \psi^*)$  для всех  $\lambda \in \Gamma, \psi \in \Lambda$ , или

$$h(\lambda^*(\cdot), \psi^*) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sup_{\psi \in \Lambda} h(\lambda(\cdot), \psi) = \max_{\psi \in \Lambda} \inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\lambda(\cdot), \psi).$$

Введем функционалы

$$\chi(\lambda(\cdot)) = \sup_{\psi \in \Lambda} h(\lambda, \psi), \quad \lambda \in \Gamma,$$

$$G(\psi) = \inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\lambda, \psi), \quad \psi \in \Lambda.$$

Рассмотрим задачи

$$\chi(\lambda) \rightarrow \min, \lambda \in \Gamma. \quad (1.3.2)$$

$$G(\psi) \rightarrow \max, \psi \in \Lambda. \quad (1.3.3)$$

Задачу (1.3.2) назовем прямой, задачу (1.3.3) — двойственной к (1.3.2).

В [65] установлено, что решение пары двойственных задач (1.3.2), а значит **В5.1**, и (1.3.3) (каждая из которых разрешима) эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа (1.3.1) на множестве  $\Gamma \times \Lambda$ .

Для отыскания седловой точки функционала Лагранжа (1.3.1) конкретизируем двойственную задачу (1.3.3). Для этого, подставляя в выражение вида

$$G(\psi) = \min_{\lambda \in \Gamma} h(\lambda, \psi), \quad \psi \in \Lambda,$$

выражение для  $h(\lambda(\cdot), \psi)$  из (1.3.1), получаем:

$$G(\psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\lambda(\cdot), \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \{ [c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) \} dx, \quad \psi \in \Lambda. \quad (1.3.4)$$

Покажем, что минимальное значение функционала  $h(\lambda(\cdot), \psi)$  из (1.3.4) для каждого  $\psi \in \Lambda$  достигается на вектор-функции  $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}^1(x), \dots, \lambda_{*i}^j(x), \dots, \lambda_{*N}^M(x))$ ,  $i$ -я компонента которой имеет вид:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Для этого рассмотрим задачу

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i] \cdot \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \rightarrow \min, \quad \psi \in \Lambda,$$

при условиях

$$0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M.$$

Составим функционал Лагранжа для этой задачи, включая в него ограничение вида  $\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1$ :

$$L(\lambda(\cdot), \psi_0(\cdot)) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i] \cdot \rho^j(x) \lambda_i^j(x) + \sum_{j=1}^M \psi_0^j(x) \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) - 1 \right) \right\} dx =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i] \cdot \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \lambda_i^j(x) dx - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \psi_0^j(x) dx$$

при

$$0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1, \dots, 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1, \dots, 0 \leq \lambda_N^M(x) \leq 1, \psi_0^j(\cdot) \in L_2(\Omega), j = 1, \dots, M.$$

Так как функционал  $L(\lambda, \psi_0)$  линейный сепарабельный по  $\lambda$  на допустимом множестве, которое может быть представлено декартовым произведением

$$0 \leq \lambda_1^1 \leq 1 \times \dots \times 0 \leq \lambda_1^j \leq 1 \times \dots \times 0 \leq \lambda_N^M \leq 1, \text{ то выполняется}$$

следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \min_{0 \leq \lambda_i^j \leq 1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x)] \lambda_i^j(x) dx = \\ & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \min_{0 \leq \lambda_i^j \leq 1} \{[(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x)] \lambda_i^j(x)\} dx. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Отсюда уже очевидно, что в (1.3.5) минимальное значение  $i, j$ -го выражения,  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , стоящего в фигурных скобках, для каждого  $\psi_0^j(\cdot) \in \Lambda$  достигается при  $\lambda_i^j(x) = \lambda_{*i}^j(x)$ , где

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \leq 0, \\ 0, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \psi_0^j(x) > 0. \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Если учесть, что формула (1.3.7) получена для всех  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , то легко увидеть, что каждая точка  $x$  из  $\Omega$  будет принадлежать тому из его подмножеств, для которых соответствующая сумма  $(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x)$  будет наименьшей, т. е.  $x \in \Omega_{*i}^j$ , если

$$(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x) = \min_{k=1, \dots, N} (c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k) \rho^j(x) + \psi_0^j(x), j =$$

$1, \dots, M$ , или (запишем по-другому):

$$(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \leq (c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k) \rho^j(x) + \psi_0^j(x),$$

$k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ .

Исключая из предыдущего неравенства  $\psi_0^j(x)$ , перепишем (1.3.7) (пока еще не окончательно) для  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , и при условии, что  $\rho^j(x) \geq 0$  для  $x \in \Omega$ , в виде

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Пусть теперь точка  $x$  принадлежит оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*i}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ ,  $i \neq k$ . Так как точка  $x$  в то же время принадлежит  $\Omega_{*i}^j$ , то

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k.$$

С другой стороны, так как  $x \in \Omega_{*k}^j$ , то

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \geq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k.$$

Отсюда  $c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i = c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k$  в точках оптимальной границы подмножеств  $\Omega_{*i}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ . Таким образом, в формуле (1.3.8) знак равенства может иметь место и в случаях, когда  $i \neq k$ , но, как предполагалось, лебегова мера таких точек равна нулю. Поэтому можно записать  $c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k$  для  $k = 1, \dots, N$  и  $i \neq k$  для всех точек  $x \in \Omega$ , кроме множества точек меры нуль (т. е. точек границы подмножеств  $\Omega_{*i}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ ) или более кратко:  $i \neq k$  почти всюду для  $x \in \Omega$ . Итак, выражение для  $\lambda_{*i}^j(x)$  из (1.3.8) можно теперь представить в виде

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ & k = 1, \dots, N, i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}^j, \\ 0, & \text{в остальных случаях, тогда } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

т. е. получили формулу (1.3.5).

Подставляя в (1.3.4) вместо  $\lambda_{*i}^j(x)$  выражение из (1.3.5), получаем:

$$G(\psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k] \cdot \rho^j(x) dx. \quad (1.3.9)$$

Из вида оптимального решения (1.3.5) (в предположении, что выполняются условия  $\rho^j(x) \geq 0$  для  $x \in \Omega$ ,  $j=1, \dots, M$ ) следует теорема 1.1.

**Теорема 1.1.** Если возможное разбиение  $(\Omega_{*1}^1, \dots, \Omega_{*1}^j, \dots, \Omega_{*N}^M)$  является оптимальным для задачи **A5**, то существуют действительные константы  $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  (среди которых  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  неотрицательны), такие, что

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \quad i \neq k, \quad (1.3.10)$$

п. в. для  $x \in \Omega_{*i}^j$ ,  $i, k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ .

**Замечание к теореме 1.1.** Ввиду линейности функционала  $I(\lambda(\cdot))$  необходимое условие (1.3.10) является и достаточным условием оптимальности для задачи **A5**.

**Следствие из теоремы 1.1.** В точках  $x$ , принадлежащих оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*i}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ , в неравенстве (1.3.10) достигается знак равенства.

Сформулируем теорему, подводящую итог нашим рассуждениям.

**Теорема 1.2.** Седловая точка  $(\lambda_{*}(\cdot), \psi^{*})$  (где первая компонента  $\lambda_{*}(\cdot)$  является оптимальным решением задачи **B5**) функционала (1.3.1) на множестве  $\Gamma \times \Lambda$  определяется для  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$  и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega_{*i}^j, \\ 0, & \text{при } x \in \Omega_{*k}^j, \end{cases}$$

где

$$\Omega_{*i}^j = \{x \in \Omega: c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i^* = \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k^*], \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M\},$$

в качестве  $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (1.3.3), приведенной к виду:

$$G(\psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k] \cdot \rho^j(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \rightarrow \max \quad (1.3.11)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N. \quad (1.3.12)$$

### Алгоритм решения задачи **A5**

Для решения задачи (1.3.11), (1.3.12) максимизации вогнутой недифференцируемой функции  $G(\psi)$  при условиях (1.3.12) будем использовать метод обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов ( $\gamma$ -алгоритм) [109].

От задачи (1.3.11), (1.3.12) перейдем к задаче безусловной максимизации с помощью введения в целевую функцию (1.3.11) негладкой штрафной функции множества  $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$ :

$$P(\psi) = G(\psi) - S \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) \rightarrow \max, \psi \in E_N, \quad (1.3.13)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число (значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (1.3.11)).

Определим  $i$ -ю компоненту вектора обобщенного градиента  $g_p(\psi) = (g_p^{\psi_1}(\psi), \dots, g_p^{\psi_N}(\psi))$  функции (1.3.13) в точке  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$  следующим образом:

$$g_p^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1.3.14)$$

$$g_p^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S \cdot \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), \quad (1.3.15)$$

$$i = p+1, \dots, N,$$

где

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k], \\ & i \neq j \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.3.16)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Опишем алгоритм решения задачи **A5** на координатной сетке.

### Алгоритм 1.1

Область  $\Omega$  заключаем в параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем  $\rho^j(x) = 0$  для  $x \in \Pi \setminus \Omega$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $\psi = \psi^{(0)}$ . Вычисляем значения  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.16) при  $\psi = \psi^{(0)}$ . Вычисляем значение  $g_p^{\psi}(\psi^{(0)})$  по узлам сетки по формулам (1.3.14) и (1.3.15) при  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\psi = \psi^{(0)}$ , выбираем начальный пробный шаг  $h_0 > 0$   $r$ -алгоритма и находим

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_p^{\psi}(\psi^{(0)}).$$

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , шагов алгоритма получены определенные значения  $\psi^{(k)}$ ,  $\lambda^{(k-1)}(x)$ , в узлах сетки. Опишем  $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значение  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.16) при  $\psi = \psi^{(k)}$ .



2. Вычисляем значение  $g_p^\Psi(\psi)$  по формулам (1.3.14), (1.3.15) при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ ,  $\psi = \psi^{(k)}$ .

3. Проводим  $(k+1)$ -й шаг  $r$ -алгоритма для максимизации функции (1.3.13) относительно  $\psi$  на  $E_N$ , краткая схема которого имеет вид:

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^\Psi \tilde{g}_p^\Psi,$$

где  $B_{k+1}^\Psi$  – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E_N$ , причем  $B_0^\Psi = I_N$  (единичная матрица);  $\tilde{g}_p = B_{k+1}^* g_p(\psi^{(k)})$ ;  $h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если условие

$$\|\psi^{(k)} - \psi^{(k+1)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.3.17)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняется – то к п. 5.

5. Полагаем  $\psi^* = \psi^{(l)}$ ,  $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.3.17).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (1.3.9) при  $\psi = \psi^*$  и, для контроля правильности счета, по формуле

$$I(\lambda_*(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c_i^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho_i^j(x) \lambda_i^j(x) dx. \quad (1.3.18)$$

Алгоритм описан.

**Замечание к алгоритму 1.1.** В результате работы алгоритма оптимальное разбиение для задачи **A5** получается для каждого продукта  $j$ ,  $j = 1, \dots, M$ , в виде значений характеристических функций  $\lambda_i^j(x)$  для каждого из подмножеств  $\Omega_i^j$ ,  $i = 1, \dots, N$ , вычисленных в точках  $x$ , являющихся узлами прямоугольной сетки, покрывающей параллелепипед  $\Pi$ , в который заключена область  $\Omega$ .

### 1.3.1.2. Уточнение оптимального разбиения, полученного на сетке

Из теоремы 1.1 и следствия из неё вытекает, что для каждого фиксированного вектора  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Omega^N$  и каждого индекса  $j = 1, \dots, M$ , гипер-

поверхность, разделяющая подмножества  $\Omega_i^j$  и  $\Omega_k^j$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, N, i \neq k$ , определяется неявным уравнением вида

$$F_{ik}^j x = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.3.19)$$

где

$$F_{ik}^j x = c^j x, \tau_i - c^j x, \tau_k + a_i^j - a_k^j + \psi_i - \psi_k \quad (1.3.20)$$

Очевидно, что форма и свойства разделяющей гиперповерхности (1.3.20) определяются свойствами функций  $c^j x, \tau_i$ . В некоторых простых случаях удаётся аналитически решить уравнение (1.3.19), (1.3.20) и в явном виде найти аналитическое представление для разделяющей гиперповерхности.

Для тех случаев, когда в явном виде не удастся получить аналитическое выражение для оптимальной разделяющей гиперповерхности (1.3.19), (1.3.20) предложим численные методы отыскания точек, принадлежащих оптимальным разделяющим гиперповерхностям.

Напомним, что результатом работы алгоритма 1.1 для решения задачи А5 являются значения характеристической вектор-функции

$$\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}^1(x), \dots, \lambda_{*N}^1(x); \dots; \lambda_{*1}^M(x), \dots, \lambda_{*N}^M(x)),$$

где

$$\lambda_{*i}^j x = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j x, \tau_i^* + a_i^j + \psi_i^* \leq c^j x, \tau_k^* + a_k^j + \psi_k^*, \\ & i \neq k \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}^j, \\ 0, & \text{в остальных случаях, тогда } x \notin \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

полученные в точках  $x \in \Omega$ , являющихся узлами прямоугольной сетки  $(i, j)$ , покрывающей область  $\Omega$ , предварительно заключенную в параллелепипед  $\Pi$  со сторонами, параллельными осям декартовой системы координат.

Так, например, оптимальное разбиение области  $\Omega$  на три подмножества  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  (см. рис. 1.4) с помощью алгоритма 1.1 будет получено в виде значения трех характеристических функций  $\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y), \lambda_3(x, y)$  в узлах сетки  $(i, j)$  (см. рис. 1.5), т. е. если точка  $(x, y) \in \Omega_{*1}$ , то в узле сетки, соответствующем этой точке, проставлено значение характеристической функции  $\lambda_{*1}(x, y)$ , равное 1, если  $(x, y) \notin \Omega_{*1}$ , – равное 0.

В дальнейшем вместо громоздкого изображения будем представлять оптимальное разбиение множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  с помощью одного рисунка (см. рис. 1.6.), где в каждом узле сетки проставлено

одно из чисел  $1, \dots, N$ , указывающее на принадлежность точки (соответствующей узлу) подмножеству с данным номером (ср. с рис. 1.4).

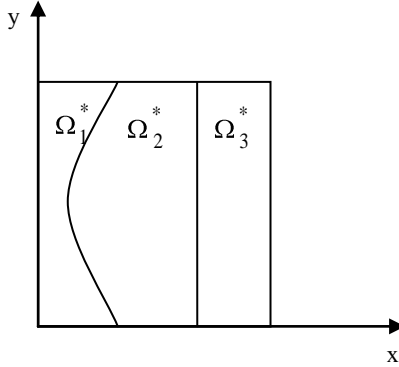


Рис. 1.4. Оптимальное разбиение множества  $\Omega$  на три подмножества

11100000000	00011110000	00000001111
11000000000	00111110000	00000001111
11000000000	00111110000	00000001111
11000000000	00111110000	00000001111
11000000000	00111110000	00000001111
11100000000	00011110000	00000001111

Рис. 1.5. Оптимальное разбиение  $\Omega$ , представленное в виде значений трех характеристических функций

11122223333
11222223333
11222223333
11222223333
11222223333
11122223333

Рис. 1.6. Оптимальное разбиение  $\Omega$  с указанием принадлежности узла сетки подмножеству с соответствующим номером

1 1 (1) (2) 2 2
1 1 1 (1) (2) 2
1 1 1 (1) (2) 2
1 1 1 (1) (2) 2
1 1 (1) (2) 2 2

Рис. 1.7. Разбиение с выделенными приграничными узлами

Если решается многопродуктовая задача, то для каждого продукта будет изображена своя таблица. Очевидно, чем с большей степенью точности требуется отыскать оптимальное разбиение, тем меньше должен быть

шаг сетки, покрывающей область  $\Omega$ . Но тогда при решении задач оптимального разбиения больших размерностей на ЭВМ могут возникнуть трудности, связанные с увеличением времени счета и требуемого объема оперативной памяти ЭВМ.

На теореме 1.1 и следствии из нее основан излагаемый ниже алгоритм уточнения оптимального разбиения, полученного на грубой сетке с помощью алгоритма 1.1, не требующий для своей реализации покрытия области  $\Omega$  сеткой с достаточно мелким шагом.

Алгоритм уточнения оптимального разбиения, т. е. алгоритм отыскания тех точек из  $\Omega$ , которые принадлежат оптимальным границам между подмножествами  $\Omega_i^j$  и  $\Omega_k^j$ ,  $i \neq k$ ,  $k, i = 1, \dots, N$ , для каждого  $j = 1, \dots, M$ , опишем для функций  $c^j(x, \tau_i)$ , непрерывно дифференцируемых по  $x$  почти всюду на  $\Omega$ .

### Алгоритм 1.2

Пусть точки множества  $X = \{x_1, \dots, x_p, \dots, x_q\}$  – это те узлы, которые определяют оптимальные границы между подмножествами, полученные на сетке с помощью алгоритма 1.1. Назовем их приграничными узлами. На рис. 1.7 узлы множества  $X$  обозначены цифрой в скобках. Полагаем  $p = 1$ .

1. Для точки  $x_p \in X$  проводим следующие вычисления.

2.1. Вычисляем значение сумм  $c^j(x_p, \tau_i^*) + a_i^j + \psi_i^*$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Если существуют такие индексы  $l, k \in \{1, \dots, N\}$ , что

$$c^j(x_p, \tau_{*l}) + a_l^j + \psi_l^* = c^j(x_p, \tau_{*k}) + a_k^j + \psi_k^*, \quad (1.3.20)$$

где  $c^j(x_p, \tau_{*k}) + a_k^j + \psi_k^* = \min_{i=1, \dots, N} c^j(x_p, \tau_{*i}) + a_i^j + \psi_i^*$  (в этом случае, со-

гласно следствию из теоремы 1.1, точка  $x_p$  будет принадлежать оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*l}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ ), то полагаем  $p = p+1$  и переходим к п. 2. Если же

$$c^j(x_p, \tau_{*l}) + a_l^j + \psi_l^* < c^j(x_p, \tau_{*k}) + a_k^j + \psi_k^*$$

(в этом случае, согласно теореме 1.1, точка  $x_p$  – внутренняя для подмножества  $\Omega_{*l}^j$ ), то переходим к п. 3.

2. Из точки  $x_p$  переходим в точку  $x_p^*$ , обращающую в нуль значение функции

$$F_{lk}^j(x) = (c^j(x, \tau_{*l}) + a_l^j + \psi_l^*) - (c^j(x, \tau_{*k}) + a_k^j + \psi_k^*), \quad (1.3.21)$$

а значит, согласно следствию из теоремы 1.1, принадлежащую оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*1}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ . Для этого поступаем следующим образом.

3.1. Вычисляем в точке  $x_p$  координаты вектора градиента

$$\left( \frac{\partial F_{lk}^j(x)}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F_{lk}^j(x)}{\partial x^n} \right) \quad (1.3.22)$$

функции  $F_{lk}^j(x)$  из (1.3.21), определенной на  $\Omega$ . Составляем параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку  $x_p$  в направлении градиента (1.3.22),

$$\bar{x}^i = x_p^i + t \cdot \frac{\partial F_{lk}^j(x_p)}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3.23)$$

3.2. Полагая  $t = t_0$ , где  $t_0$  – заданное положительное число, определяем по формулам (1.3.23) координаты точки  $\bar{x}$  и вычисляем значение  $F_{lk}^j(x)$  по формуле (1.3.21).

3.3. Если выполняется условие  $|F_{lk}^j(x)| \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – достаточно малое положительное число), то полагаем  $x_p^* = \bar{x}$  и переходим к п. 3.4; если же  $F_{lk}^j(x) < -\varepsilon$ , то переходим к п. 3.2, выбирая в качестве точки  $x_p$  точку  $\bar{x}$ ; если  $F_{lk}^j(x) > \varepsilon$ , то переходим к п. 3.4, полагая  $t = t/2$ .

3.4. По формуле (1.3.23) находим координаты новой точки  $\bar{x}$  и вычисляем значение  $F_{lk}^j(\bar{x})$  по формуле (1.3.21), переходим к п. 3.3.

Алгоритм описан.

**Замечание 1.7.** Если в (1.3.20) минимум суммы  $(c^j(x_p, \tau_{*i}) + a_i^j + \psi_i)$  достигается не на одном индексе  $i = k$ , а на нескольких, то точка  $x_p$  принадлежит одновременно оптимальной границе тех подмножеств, на чьих индексах достигается в (1.3.20) минимум суммы.

**Замечание 1.8.** Иллюстрацию к процессу перехода из приграничного узла сетки на оптимальную границу см. на рис. 1.8.

**Замечание 1.9.** Для недифференцируемой функции  $c^j(x, \tau_i)$  алгоритм 1.2 может оказаться непригодным, т. к. может не существовать градиент (1.3.22) функции  $F_{lk}^j(x)$ . В этом случае для отыскания точек оптимальной границы можно решать трансцендентное уравнение  $F_{lk}^j(x) = 0$  на отрезке,

соединяющем два соседних приграничных узла подмножеств  $\Omega_{*1}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ , например, методом половинного деления. Его применение оказывается оправданным, так как в случае непрерывности функции  $c^j(x, \tau_i)$  функция  $F_{lk}^j(x)$  из (1.3.21) обладает следующими свойствами на отрезке  $[x_l, x_k]$ , где  $x_l$  и  $x_k$  – соседние приграничные узлы подмножеств  $\Omega_{*1}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ :

- а)  $F_{lk}^j(x)$  непрерывна на  $[x_l, x_k]$ ;
- б)  $F_{lk}^j(x_l) \leq 0, F_{lk}^j(x_k) \geq 0$ .

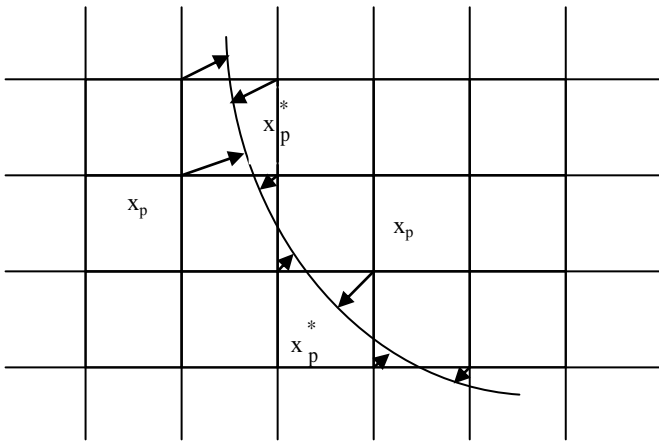


Рис. 1.8. Изображение процесса перехода из приграничного узла на оптимальную границу

*1.3.1.3. Линейная многопродуктовая задача А6 оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств*

Под непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  на подмножества с отысканием координат центров (с размещением центров) подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств будем понимать задачу А6, сформулированную в разделе 1.1. Перепишем ее формулировку в виде В6, удобном для дальнейших исследований.

**Задача В6.** Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_4 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$\Gamma_4 = \{\lambda(x): \lambda(x) \in \Gamma'_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega;\}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N;\}$$

$$\Gamma'_3 = \{\lambda(x): \lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,\}$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M\}.$$

Функции  $c^j(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по аргументу  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ; функции  $\rho^j(x)$  – действительные, ограниченные, измеримые и неотрицательные на  $\Omega$  для всех  $j = 1, \dots, M$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  – заданная точка подмножества  $\Omega$ , одна и та же для всех  $j = 1, \dots, M$ , называемая общим центром подмножеств  $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$ , не обязана принадлежать каждому из подмножеств  $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$ ;  $\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^M, \dots, \alpha_N^1, \dots, \alpha_N^M, b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + \alpha_i^j] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

Задача **В6** является задачей бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными  $\lambda(\cdot)$ .

Будем так же рассматривать следующую задачу.

**Задача В6.1.** Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_4 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_4 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma \text{ п.в. для } x \in \Omega; \\ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma = \{ \lambda(x) : \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M; \\ 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1, x \in \Omega, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, \dots, M \}. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$I(\lambda^*(\cdot), \tau_*) = \min_{\tau \in \Omega^N} [ \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_4} I(\lambda(\cdot), \tau) ]. \quad (1.3.24)$$

Как следует из [65], при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  внутренняя задача (1.3.24) линейна относительно  $\lambda(\cdot)$  на  $\Gamma_2$  и глобально разрешима. Кроме того, при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  во множестве оптимальных решений задачи **В6.1** содержатся оптимальные решения задачи **В6**.

### Описание метода решения задачи А6

Введем функционал Лагранжа для задачи **В6.1** следующим образом:

$$\begin{aligned} h(\{ \lambda(\cdot), \tau \}, \psi) = I(\lambda(\cdot), \tau) + \sum_{i=1}^N \psi_i [ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i ] = \\ = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [ c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i ] \cdot \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i, \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

где  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$  – N-мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты  $\psi_1, \dots, \psi_p$  произвольны по знаку, а  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  – неотрицательны;  $\lambda(x) \in \Gamma$  для  $x \in \Omega$ ;  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ .

Пару элементов  $(\{ \lambda^*(\cdot), \tau_* \}, \psi^*)$  назовем седловой точкой функционала (1.3.25) на множестве  $\{ \Gamma \times \Omega^N \} \times \Lambda$ , где

$$\Lambda = \{ \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N : \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N \},$$

если

$$h(\{ \lambda^*(\cdot), \tau_* \}, \psi) \leq h(\{ \lambda^*(\cdot), \tau_* \}, \psi^*) \leq h(\{ \lambda(\cdot), \tau \}, \psi^*)$$

для всех  $\lambda \in \Gamma, \psi \in \Lambda$ , или

$$h(\{ \lambda^*(\cdot), \tau_* \}, \psi) \leq h(\{ \lambda^*(\cdot), \tau_* \}, \psi^*) =$$



$$= \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \max_{\psi \in \Lambda} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) = \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi).$$

Перейдем к решению задачи:

$$h(\{\lambda^*(\cdot), \tau^*\}, \psi^*) = \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \quad \psi \in \Lambda.$$

Обозначим

$$G(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \quad \psi \in \Lambda.$$

Задача, двойственная к задаче **В6.1**, имеет вид:

$$G(\psi) \rightarrow \max, \quad \psi \in \Lambda. \quad (1.3.26)$$

От задачи отыскания  $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$  можно перейти к сле-

дующей задаче:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) \quad \text{при } \psi \in \Lambda. \quad (1.3.27)$$

Обозначим в (1.3.27)

$$G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi). \quad (1.3.28)$$

Подставляя в (1.3.28) выражение для  $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$  из (1.3.25), получаем:

$$\begin{aligned} G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) = & - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ & + \min_{\substack{0 \leq \lambda_i^j \leq 1, \\ i=1, \dots, N, j=1, \dots, M}} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \\ & + \psi_i] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx, \quad \tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda. \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Как следует из [65], минимальное значение по  $\lambda$  функционала  $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$  в (1.3.29) достигается для каждого  $\tau \in \Omega^N$  и  $\psi \in \Lambda$  при

$$(\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_1^j(x), \dots, \lambda_N^M(x)) = (\lambda_{*1}^1(x), \dots, \lambda_{*1}^j(x), \dots, \lambda_{*N}^M(x)),$$

где

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega = x \in \Omega: c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq \\ & \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ & i \neq k \quad \text{п. в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.3.30)$$

и функционал  $G_1(\tau, \psi)$  принимает вид:

$$G_1(\tau, \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k] \rho^j(x) dx. \quad (1.3.31)$$

Из вида оптимального решения (1.3.30) задачи (1.3.29) для каждого фиксированного  $\tau \in \Omega^N$  (в предположении, что выполняются условия  $\rho^j(x) \geq 0$  п. в. для  $x \in \Omega$ ,  $j = 1, \dots, M$ ) следует теорема 1.3.

**Теорема 1.3.** Для того чтобы возможное разбиение  $\Omega_{*1}^1, \dots, \Omega_{*j}^j, \dots, \Omega_{*N}^M$  являлось оптимальным для задачи **A6**, необходимо и достаточно существование действительных констант  $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  (среди которых  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  неотрицательны), таких, что

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ i \neq k, \text{ п. в. для } x \in \Omega_{*i}^j, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \quad (1.3.32)$$

**Следствие из теоремы 1.3.** В точках  $x$ , принадлежащих оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*i}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ , в неравенстве (1.3.32) достигается знак равенства.

Сформулируем теорему, подводящую итог вышеизложенным рассуждениям.

**Теорема 1.4.** Седловая точка  $(\{\lambda_{*}(\cdot), \tau_{*}\}, \psi^{*})$  (где первая компонента  $\{\lambda_{*}(\cdot), \tau_{*}\}$  является оптимальным решением задачи **B7**) функционала (1.3.25) на множестве  $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times \Lambda$  определяется для  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ , и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega_{*i}^j \text{ и } x \notin \Omega_{*q}^j, \quad q \leq i, \\ 0, & \text{при } x \notin \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

где  $\Omega_{*i}^j = \{x \in \Omega: c^j(x, \tau_{*i}) + a_i^j + \psi_i^{*} = \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_{*k}) + a_k^j + \psi_k^{*} ],$

$$i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad j=1, \dots, M\},$$

в качестве  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$ ,  $\psi_1^{*}, \dots, \psi_N^{*}$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (1.3.26), приведенной к виду:

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{i=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i] \rho^j(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max \quad (1.3.33)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N. \quad (1.3.34)$$

*Алгоритм решения задачи А6*

Прежде чем сформулировать алгоритм решения задачи **В6**, основанный на теореме 1.4, остановимся на некоторых свойствах задачи (1.3.33), (1.3.34).

Очевидно, что по переменной  $\psi$  функция  $G_1(\tau, \psi)$  из (1.3.31) является выпуклой недифференцируемой на множестве

$$\Lambda = \{\psi \in E_n: \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}.$$

При каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  функция  $G_1(\tau, \psi)$  по переменной  $\tau$  на  $\Omega^N$  обладает свойствами, установленными в [65] для задачи ОРМ без ограничений с отысканием координат центров подмножеств. То есть, вообще говоря, функция  $G_1(\tau, \psi)$  из (1.3.31) при каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  является по  $\tau \in \Omega^N$  многоэкстремальной.

Однако в некоторых частных случаях, описанных в [65], задача отыскания  $\min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi)$ , при каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$ , одноэкстремальна.

Для отыскания решения задачи (1.3.33), (1.3.34) будем использовать алгоритм обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, близкий к  $\gamma$ -алгоритму Н. З. Шора. Для этого от задачи (1.3.33), (1.3.34) перейдем к задаче безусловной максимизации по  $\psi$  с помощью введения в целевую функцию (1.3.31) негладкой штрафной функции множества  $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$  найти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \psi), \tag{1.3.35}$$

где

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i).$$

Здесь  $S$  – достаточно большое положительное число (значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (1.3.31)). О возможности перехода от задачи (1.3.33), (1.3.34) к (1.3.35) см. в [65].

Определим  $i$ -ю компоненту  $2N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$\begin{aligned} g_p(\tau, \psi) &= (g_p^\psi(\tau, \psi), g_p^\tau(\tau, \psi)) = \\ &= (g_p^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, g_p^{\psi_N}(\tau, \psi), g_p^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(\tau, \psi)) \end{aligned}$$

функции (1.3.35) в точке  $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$  следующим образом:

$$g_p^{\psi_i} \tau, \psi = \begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, i = 1, \dots, p \\ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S \cdot \max[0, \text{sign} -\psi_i], \\ i = p + 1, \dots, N \end{cases} \quad (1.3.36)$$

$$g_p^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) g_{c_j}^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i^j(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3.37)$$

где  $g_{c_j}^{\tau_i}(\tau, x)$  есть  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_{c_j}^{\tau}(\tau, x)$  функции  $c^j(x, \tau_i)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ ;

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k^*], \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M, \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \quad (1.3.38)$$

### Алгоритм 1.3

Область  $\Omega$  заключаем в параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем  $\rho^j(x) = 0$ , при  $x \in \Pi \setminus \Omega$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ . Вычисляем значения  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.38) при  $\psi = \psi^{(0)}$ ,  $\tau = \tau^{(0)}$ . Вычисляем значения  $(g_p^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}), g_p^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}))$  в узлах сетки по формулам (1.3.36), (1.3.37) при  $\psi = \psi^{(0)}$ ,  $\tau = \tau^{(0)}$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ . Выбираем начальный пробный шаг  $h_0 > 0$   $r$ -алгоритма и находим:

$$\tau^{(1)} = P_{\Pi}(\tau^{(0)} - h_0 g_p^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})),$$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_p^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}),$$

где  $P_{\Pi}$  – оператор проектирования на  $\Pi$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) шагов алгоритма получены определенные значения  $\psi^{(k)}$ ,  $\tau^{(k)}$ ,  $\lambda^{(k-1)}(x)$  в узлах сетки.

Опишем  $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.38) при  $\tau = \tau^{(k)}$ ,  $\psi = \psi^{(k)}$ .

2. Вычисляем значения  $g_p(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$  по формулам (1.3.36), (1.3.37) при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(k)}$ ,  $\psi = \psi^{(k)}$ .

3. Проводим  $(k+1)$ -й шаг  $\Gamma$ -алгоритма обобщенных почти - градиентов с растяжением пространства, близкого к  $\Gamma$ -алгоритму [109], краткая схема которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Pi}(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_p^{\tau}),$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_p^{\psi},$$

где  $B_{k+1}^{\psi}$ ,  $B_{k+1}^{\tau}$  – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E_N$ , причем  $B_0^{\psi} = I_N$ ,  $B_0^{\tau} = I_N$ ,  $I_N$  – единичная матрица;  $\tilde{g}_p^{\tau} = B_{k+1}^{\tau*} g_p(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ ;  $h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если условие

$$\|(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.3.39)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняются, то к п. 5.

5. Полагаем  $\psi^* = \psi^{(l)}$ ,  $\tau_* = \tau^{(l)}$ ,  $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.3.39).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (1.3.31) при  $\tau = \tau_*$ ,  $\psi = \psi^*$ , и, для контроля правильности счета, по формуле:

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + a_i^j] \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx. \quad (1.3.40)$$

Алгоритм 1.3 описан.

**Замечание 1.5.** В результате работы алгоритма оптимальное разбиение для задачи **A6** получается в виде значений характеристических функций  $\lambda_i^j(x)$  для каждого из подмножеств  $\Omega_i^j$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $j=1, \dots, M$ , вычисленных в точках  $x$ , являющихся узлами прямоугольной сетки, покрывающей параллелепипед  $\Pi$ , в который заключена область  $\Omega$ .

### 1.3.2. Однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств при ограничениях как с заданным положением центров подмножеств, так и с неизвестными заранее координатами этих центров

#### 1.3.2.1. Линейная однопродуктовая задача АЗ оптимального разбиения множеств при ограничениях с заданным положением центров подмножеств

Рассмотрим непрерывную линейную однопродуктовую задачу АЗ оптимального разбиения множества из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  на подмножества с заданным положением «центров» подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств, сформулированную в подразделе 1.1. Перепишем ее формулировку в виде ВЗ, удобном для дальнейших исследований.

**Задача ВЗ.** Найти

$$\min_{\lambda \cdot \in \Gamma_2} I(\lambda(\cdot)),$$

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \},$$

где  $\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)):$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}.$$

Функции  $c(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по аргументу  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ; функции  $\rho(x)$  – ограниченные, измеримые на  $\Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  – заданная фиксированная точка подмножества  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, 0 \leq b_i \leq S, i = 1, \dots, N,$$

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx.$$

Погружаем задачу **В3** с булевыми переменными  $\lambda(\cdot)$  в соответствующую задачу с непрерывными переменными  $\lambda(\cdot)$ , т. е. рассмотрим следующую задачу.

**Задача В3.1.** Найти

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda \in \Gamma_2} I(\lambda(\cdot)), \\ \Gamma_2 = \{ & \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \lambda(x) \in \Gamma' \text{ п. в. для } x \in \Omega; \\ & \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p, \\ & \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N\}, \end{aligned}$$

где  $\Gamma' = \{ \lambda(x): 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ для } x \in \Omega, i=1, \dots, N, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}$ .

Задача **В3.1** имеет решение.

Действительно, так как  $\Gamma_2$  – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства  $L_2^N(\Omega)$ , а функционал  $I(\lambda(\cdot))$  линейный (а значит выпуклый) и непрерывный относительно  $\lambda(\cdot)$  на  $\Gamma_2$ , то, в силу обобщенной теоремы Вейерштрасса, выпуклый непрерывный функционал  $I(\lambda(\cdot))$  на замкнутом, ограниченном, выпуклом множестве  $\Gamma_2$  гильбертова пространства  $L_2^N(\Omega)$  достигает своей нижней грани.

Так же, как и для аналогичной многопродуктовой задачи ОРМ среди множества оптимальных решений задачи **В3.1**, т. е. среди множества точек  $\Gamma_{*2}$ , в которых линейный относительно  $\lambda(\cdot)$  функционал  $I(\lambda(\cdot))$  достигает минимального значения на множестве  $\Gamma_2$ , найдется хотя бы одна крайняя точка множества  $\Gamma_2$ . Но крайние точки множества  $\Gamma_2$  представляют собой характеристические функции подмножеств  $\Omega_i$ , образующих разбиение множества  $\Omega$ . Отсюда следует, что среди множества оптимальных решений задачи **В3.1** содержатся оптимальные решения задачи **В3**.

Рассматриваемая в этом подпункте задача является частным случаем многопродуктовой задачи ОРМ **А5** при ограничениях с известными координатами центров подмножеств, метод решения которой описан в разделе 1.3.1.

Как следует из [65], решение задачи **В3** эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа.

Введем функционал Лагранжа для задачи **В3** следующим образом:

$$h(\lambda(\cdot), \psi) = I(\lambda(\cdot)) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i \right), \quad (1.3.41)$$

где  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$  есть  $N$ -мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты  $\psi_1, \dots, \psi_p$  произвольны по знаку,  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  — неотрицательны;  $\lambda(x) \in \Gamma$  для  $x \in \Omega$ .

Пару  $(\lambda_*(\cdot), \psi^*)$  назовем седловой точкой функционала (1.3.41) на множестве  $\Gamma \times \Lambda$ , где

$$\Lambda = \{ \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N: \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N \},$$

если

$$h(\lambda_*(\cdot), \psi) \leq h(\lambda_*(\cdot), \psi^*) \leq h(\lambda(\cdot), \psi^*)$$

для всех  $\lambda \in \Gamma'$ ,  $\psi \in \Lambda$ , или

$$h(\lambda_*(\cdot), \psi^*) = \min_{\lambda \in \Gamma'} \sup_{\psi \in \Lambda} h(\lambda(\cdot), \psi) = \max_{\psi \in \Lambda} \inf_{\lambda \in \Gamma'} h(\lambda(\cdot), \psi).$$

Обозначим

$$G(\psi) = \inf_{\lambda \in \Gamma'} h(\lambda, \psi), \psi \in \Lambda. \quad (1.3.42)$$

Задача, двойственная к задаче **В3.1**, имеет вид

$$G(\psi) \rightarrow \max, \psi \in \Lambda. \quad (1.3.43)$$

Для отыскания седловой точки функционала Лагранжа (1.3.41) конкретизируем двойственную задачу (1.3.43). Подставляя в (1.3.42) выражение для  $h(\lambda(\cdot), \psi)$  из (1.3.41), получаем:

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\lambda \in \Gamma'} h(\lambda(\cdot), \psi) = \\ &= \min_{\lambda \in \Gamma'} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i, \psi \in \Lambda. \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Как следует из [65], минимальное значение функционала  $h(\lambda(\cdot), \psi)$  из (1.3.44) для каждого  $\psi \in \Lambda$  достигается на вектор-функции  $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$ ,  $i$ -я компонента которой имеет вид:

$$\lambda_{*i} x = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k, \\ & i \neq k, \text{ п. в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0, & \text{в остальных случаях, тогда } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}. \end{cases} \quad (1.3.45)$$

Подставляя в (1.3.44) вместо  $\lambda_i(x)$  выражение из (1.3.45) и учитывая, что  $\lambda_{*i}(x)$  удовлетворяет условию  $\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1$  п. в. для  $x \in \Omega$ , получаем:



$$G(\psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} (c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k) \rho(x) dx. \quad (1.3.46)$$

Из вида оптимального решения (1.3.45), в предположении, что выполняются условия  $\rho(x) \geq 0$  для  $x \in \Omega$ , следует такая теорема.

**Теорема 1.5.** Для того чтобы возможное разбиение  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N})$  являлось оптимальным для задачи **A3**, необходимо и достаточно существование действительных констант  $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  (среди которых  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  неотрицательны) таких, что

$$c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k, \quad (1.3.47) \\ i \neq k, \text{ п. в. для } x \in \Omega_{*i}, i, k = 1, \dots, N.$$

**Следствие из теоремы 1.5.** В точках  $x$ , принадлежащих оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*i}$  и  $\Omega_{*k}$  в неравенстве (1.3.47), достигается знак равенства.

Сформулируем теорему, представляющую решение задачи отыскания седловой точки функционала (1.3.41).

**Теорема 1.6.** Седловая точка  $(\lambda_{*}(\cdot), \psi^{*})$  (где первая компонента  $\lambda_{*}(\cdot)$  является оптимальным решением задачи **B3**) функционала (1.3.41) на множестве  $\Gamma' \times \Lambda$ , определяется для  $i = 1, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega_{*i}, \quad 1 < i, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.3.48)$$

где

$$\Omega_{*i} = \{x \in \Omega: c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i^{*} = \min_{k=1, \dots, N} (c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k^{*}), \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega\},$$

в качестве  $\psi_1^{*}, \dots, \psi_N^{*}$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (1.3.43), приведенной к виду

$$G(\psi) = \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} (c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k) \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \rightarrow \max, \quad (1.3.49)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N. \quad (1.3.50)$$

Для решения задачи (1.3.49), (1.3.50) применим г-алгоритм. От задачи (1.3.49), (1.3.50) перейдем к задаче безусловной максимизации с помощью

введения в целевую функцию (1.3.49) негладкой штрафной функции множества  $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$ :

$$P(\psi) = G(\psi) - S \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) \rightarrow \max, \psi \in E_N, \quad (1.3.51)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число (значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (1.3.49)).

Определим  $i$ -ю компоненту вектора обобщенного градиента  $g_p(\psi) = (g_p^{\psi_1}(\psi), \dots, g_p^{\psi_N}(\psi))$  функции (1.3.51) в точке  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$  следующим образом:

$$g_p^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1.3.52)$$

$$g_p^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \cdot \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), \quad i = p+1, \dots, N, \quad (1.3.53)$$

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c_x \tau_i + a_i + \psi_i \leq c_x \tau_k + a_k + \psi_k, \\ & i \neq k, \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3.54)$$

Опишем алгоритм решения задачи **A3**.

**Алгоритм 1.4**

Область  $\Omega$  заключаем в параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем  $\rho(x) = 0$  для  $x \in \Pi \setminus \Omega$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $\psi = \psi^{(0)}$ . Вычисляем значения  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.48) при  $\psi = \psi^{(0)}$ . Вычисляем значение  $g_p^{\psi}(\psi)$  по узлам сетки по формулам (1.3.52) и (1.3.53) при  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\psi = \psi^{(0)}$ , выбираем начальный пробный шаг  $h_0 > 0$  г-алгоритма и находим:

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_p^{\psi}(\psi^{(0)}).$$

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k, k = 1, \dots, N$ , шагов алгоритма получены определенные значения  $\psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ , в узлах сетки. Опишем  $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значение  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.54) при  $\psi = \psi^{(k)}$ .

2. Вычисляем значение  $g_p^{\psi}(\psi)$  по формулам (1.3.52), (1.3.53) при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x), \psi = \psi^{(k)}$ .

3. Проводим  $(k+1)$ -й шаг  $\gamma$ -алгоритма для максимизации функции (1.3.51) относительно  $\psi$  на  $E_N$ , краткая схема которого имеет вид:

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_p^{\psi},$$

где  $B_{k+1}^{\psi}$  – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E_N$ , причем  $B_0^{\psi} = I_N$  ( $I_N$  – единичная матрица);  $\tilde{g}_p = B_{k+1}^* g_p(\psi^{(k)})$ ;  $h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если условие

$$\|\psi^{(k)} - \psi^{(k+1)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.3.55)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняется – то к п. 5.

5. Полагаем  $\psi^* = \psi^{(l)}$ ,  $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.3.55).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (1.3.49) при  $\psi = \psi^*$  и, для контроля правильности счета, по формуле:

$$I(\lambda_*(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (1.3.56)$$

Алгоритм описан.

**Замечание к алгоритму 1.4.** Оптимальное разбиение, полученное с помощью алгоритма 1.4 на координатной сетке, можно уточнять с помощью алгоритмов, предложенных в предыдущих пунктах данной главы.

*1.3.2.2. Линейная однопродуктовая задача А4  
оптимального разбиения множества при ограничениях  
в форме равенств и неравенств с отысканием координат  
центров подмножеств*

**Математическая формулировка линейной однопродуктовой задачи А4 оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств** приведена в подразделе 1.1.3. Перепишем ее в виде задачи В4, удобном для дальнейших исследований.

**Задача В4.** Найти

$$\min_{\lambda \cdot \in \Gamma_2} I(\lambda(\cdot)),$$

где

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x): \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

Функции  $c(x, \tau_i)$  – ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по аргументу  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ; координаты  $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$  центра  $\tau_i, i = 1, \dots, N$ , неизвестны;  $\rho(x)$  – ограниченные, измеримые, неотрицательные на  $\Omega$  функции;  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, 0 \leq b_i \leq S, i = 1, \dots, N. \\ I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

Задача **В4** является частным случаем многопродуктовой задачи **А6** оптимального разбиения множеств при ограничениях с отысканием координат центров подмножеств, метод решения которой приведен в подразделе 1.3.1. А значит, как следует из полученных результатов, оптимальное решение задачи **В4** имеет вид для почти всех  $x \in \Omega, i = 1, \dots, N$ ,

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega_{*i} \text{ и } x \notin \Omega_{*l}, l < i, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.3.57)$$

где

$$\Omega_{*i} = \{ x \in \Omega: c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* = \min_{k=1, \dots, N} [c(x, \tau_{*k}) + a_k + \psi_k^*], \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \},$$

в качестве  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + \right.$$

$$+a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \} \rightarrow \max \quad (1.3.58)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad (1.3.59)$$

где

$$G_1(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (1.3.60)$$

Для решения задачи (1.3.58), (1.3.59) применим алгоритм псевдоградиентов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов, близкий к г-алгоритму. Для этого от задачи (1.3.58), (1.3.59) перейдем к задаче безусловной максимизации по  $\psi$  с помощью введения в целевую функцию (1.3.60) негладкой штрафной функции множества  $\{\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \}$ . Найти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \psi), \quad (1.3.61)$$

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i),$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число (значительно большее максимального из множителей Лагранжа для функции (1.3.60)).

Определим  $i$ -ю,  $i = 1, \dots, N$ , компоненту  $2N$ -мерного вектора обобщенного почтиградиента

$$\begin{aligned} g_p(\tau, \psi) &= (g_p^{\psi}(\tau, \psi), g_p^{\tau}(\tau, \psi)) = \\ &= (g_p^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, g_p^{\psi_N}(\tau, \psi), g_p^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(\tau, \psi)) \end{aligned}$$

функции (1.3.61) в точке  $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$  следующим образом:

$$g_p^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = p+1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.3.62)$$

$$g_p^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3.63)$$

где  $g_c^{\tau_i}(\tau, x)$  – есть  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_c^{\tau}(\tau, x)$  функции  $c(x, \tau_i)$  в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ ;

$$\lambda_i \ x = \begin{cases} 1, & \text{при } c \ x, \tau_i + a_i + \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} [c \ x, \tau_k + a_k + \psi_k^*], \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3.64)$$

Опишем алгоритм решения задачи **B4**.

### Алгоритм 1.5

Область  $\Omega$  заключаем в параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем  $\rho(x) = 0$  для  $x \in \Pi \setminus \Omega$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ . Вычисляем значения  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.64) при  $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$ . Вычисляем значение  $g_p^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ ,  $g_p^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$  в узлах сетки по формулам (1.3.62) и (1.3.63) при  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x), \tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$ , выбираем начальный пробный шаг  $h_0 > 0$   $g$ -алгоритма и находим:

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= P_{\Pi}(\tau^{(0)} - h_0 g_p^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} + h_0 g_p^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}), \end{aligned}$$

где  $P_{\Pi}$  – оператор проектирования на  $\Pi$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k, k = 1, \dots$ , шагов алгоритма получены определенные значения  $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ , в узлах сетки.

Опишем  $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значение  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.64) при  $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$ .

2. Вычисляем значение  $g_p(\tau, \psi)$  по формулам (1.3.62), (1.3.63) при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x), \tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$ .

3. Проводим  $(k+1)$ -й шаг алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к  $g$ -алгоритму [109], краткая схема которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Pi}(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}^{\tau}),$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^\Psi \tilde{g}_p^\Psi,$$

где  $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\Psi$  – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E_N$ , причем  $B_0^\tau = I_N, B_0^\Psi = I_N$  ( $I_N$  – единичная матрица);  $\tilde{g}_p = B_{k+1}^* g_p(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ ;  $h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если условие

$$\|(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.3.65)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняется – то к п. 5.

5. Полагаем  $\psi^* = \psi^{(l)}, \tau_* = \tau^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.3.65).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (1.3.60) при  $\tau = \tau_*, \psi = \psi^*$  и, для контроля правильности счета, по формуле

$$I(\lambda(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_{*i}) + a_i) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx. \quad (1.3.66)$$

Алгоритм описан.

**Замечание к алгоритму 1.5.** Оптимальное разбиение, полученное с помощью алгоритма 1.5 на координатной сетке, можно уточнять с помощью алгоритмов, предложенных в предыдущих пунктах.

### 1.3.3. Методы и алгоритмы решения непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств из $E_n$ с дополнительными ограничениями

#### 1.3.3.1. Линейная однопродуктовая задача **A9** оптимального разбиения множеств с дополнительными ограничениями

**Непрерывная линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на его подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть пустые) с размещением их центров при ограничениях в форме равенств и неравенств и дополнительных ограничениях типа ограничений на пропускные способности коммуникаций** приведена в подразделе 1.1.1. Перепишем её в виде **B9**, удобном для дальнейших исследований.

**Задача В9.** Найти

$$\min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Gamma_6 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c(x, \tau_i) + a_i \rho(x) \lambda_i(x) dx ,$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_6 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N, \\ \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq l_i, \quad i = 1, \dots, N \}; \end{aligned}$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}; \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Функции  $c(x, \tau_i)$  – ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по аргументу  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ; координаты  $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$  центра  $\tau_i, i = 1, \dots, N$ , неизвестны;  $\rho(x)$  – ограниченные, измеримые, неотрицательные на  $\Omega$  функции;  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N, l_1, \dots, l_N$  – заданные неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям разрешимости, приведенным в следующей теореме.

**Теорема 1.7.** Для того чтобы множество допустимых решений задачи В9 было непустым, необходимо выполнение следующих условий:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq S, \quad \sum_{i=1}^p b_i \leq S, \quad \sum_{i=1}^N l_i \geq \min_{\tau \in \Omega^N} \int_{\Omega} \rho(x) \min_{1 \leq i \leq N} c(x, \tau_i) dx ,$$

где  $S = \int_{\Omega} \rho(x) dx, \rho(x) \geq 0, c(x, \tau_i) \geq 0$  для всех  $x \in \Omega, i = 1, \dots, N$ .

Задача В9 является задачей бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными  $\lambda(\cdot)$ .

Будем так же рассматривать следующую задачу.

**Задача В9.1.** Найти

$$\min_{\lambda(\cdot), \tau} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c(x, \tau_i) + a_i \rho(x) \lambda_i(x) dx$$

при условиях



$$\begin{aligned}
 A_i \lambda(\cdot) &= \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, p, \\
 A_i \lambda(\cdot) &= \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i \leq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \\
 \Phi_i \lambda(\cdot), \tau &= \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx - l_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, N, \\
 \lambda(\cdot) &\in \Gamma', \quad \tau \in \Omega^N,
 \end{aligned}$$

где  $\Gamma' = \{ \lambda(x) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}$ .

Доказано в [41], что задачи **B9** и **B9.1** при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  имеют решения, и при этом среди множества оптимальных решений задачи **B9.1** содержатся оптимальные решения задачи **B9**, что позволяет в дальнейшем перейти к рассмотрению задачи **B9.1**.

Получены необходимые условия оптимальности для задачи **B9.1** в рамках общей схемы Дубовицкого – Милютинина [52] в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.8.** Пусть  $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$  – оптимальное решение задачи **B9.1**. Тогда найдутся числа  $\psi_i, i = 0, 1, \dots, N$ , не все равные нулю,

$$\begin{aligned}
 \psi_i &\geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \\
 \psi_i A_i(\lambda_*(\cdot)) &= 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad \xi_i \Phi_i(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = 0, \quad i = 1, \dots, N,
 \end{aligned}$$

такие, что

$$\begin{aligned}
 &\psi_0 \left[ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) \lambda_i(x) - \lambda_{*i}(x) dx + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \tau_i^{(k)} - \tau_{*i}^{(k)} \int_{\Omega} g_c^{\tau_i^{(k)}}(x, \tau_{*i}) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \right] + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) - \lambda_{*i}(x) dx \right) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \xi_i \left[ \int_{\Omega} [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) \lambda_i(x) - \lambda_{*i}(x) dx + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \tau_i^{(k)} - \tau_{*i}^{(k)} \int_{\Omega} g_c^{\tau_i^{(k)}}(x, \tau_{*i}) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \right] \geq 0 \text{ для всех } (\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N,
 \end{aligned}$$

где  $g_c^{\tau_i^{(k)}}(x, \tau_{*i})$  –  $(i-1)n + k$ -я компонента вектора обобщённого градиента функции  $c(x, \tau_i)$  по  $\tau$  в точке  $\tau_* = (\tau_{1*}, \dots, \tau_{N*})$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, n$ , который имеет следующий вид:

$$g_c^\tau(x, \tau) = \left( g_c^{\tau_1^{(1)}}(x, \tau), \dots, g_c^{\tau_1^{(n)}}(x, \tau), \dots, g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau), \dots, g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau), \dots, \dots, g_c^{\tau_N^{(1)}}(x, \tau), \dots, g_c^{\tau_N^{(n)}}(x, \tau) \right).$$

### Обоснование метода решения задачи A9

Предлагаемый метод решения основывается на сведениях исходной бесконечномерной задачи оптимизации через функционал Лагранжа, с применением основной теоремы антагонистических игр, к двойственной конечномерной задаче с негладкой целевой функцией, для решения которой применяется одна из модификаций  $\gamma$ -алгоритма Шора.

Введём функционал Лагранжа для задачи **B9.1** следующим образом:

$$h\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c(x, \tau_i) + a_i \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \xi_i \cdot \Phi_i \lambda(\cdot), \tau + \sum_{i=1}^N \psi_i \cdot A_i \lambda(\cdot), \text{ для всех } \lambda(x) \in \Gamma', \tau \in \Omega^N, \quad (1.3.67)$$

где  $\Psi = (\xi, \psi)$ , а  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$  –  $N$ -мерный вектор, компоненты которого неотрицательны,  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p, \dots, \psi_N)$  –  $N$ -мерный вектор, у которого компоненты  $\psi_1, \dots, \psi_p$  произвольны по знаку, а  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  – неотрицательны.

Пару элементов  $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*$  назовём седловой точкой функционала Лагранжа (1.3.67) на множестве  $\{\Gamma' \times \Omega^N\} \times \Lambda$ , где

$$\Lambda = \{(\xi, \psi) \in E_N \times E_N : \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N, \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\},$$

если

$$h\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi \leq h\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^* \leq h\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi^*$$

для всех  $\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N, \Psi \in \Lambda$ , или

$$h\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^* = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} \max_{\Psi \in \Lambda} h\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi =$$

$$= \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi .$$

Обозначим

$$G(\Psi) = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi , \quad \Psi \in \Lambda . \quad (1.3.68)$$

Задача, двойственная к задаче **B9.1**, имеет вид:

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \quad \Psi \in \Lambda .$$

Далее нас интересует, при каких условиях имеет место соотношение двойственности

$$\min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} \max_{\Psi \in \Lambda} h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi = \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi \quad (1.3.69)$$

Покажем, что имеет место один из вариантов основной теоремы антагонистических игр, принадлежащий Г. Кнезеру [41, 115].

**Теорема 1.9.** Если множество  $\Gamma' \times \Omega^N$  – компактно,  $\Lambda$  – произвольное выпуклое множество в линейном пространстве, а функционал  $h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi$  – выпуклый и полунепрерывный снизу (в частности, непрерывный) по  $\lambda(\cdot), \tau$  на  $\Gamma' \times \Omega^N$ , вогнутый по  $\Psi \in \Lambda$ , то имеет место соотношение двойственности (1.3.69).

Действительно, в предположении, что множество  $\Omega$  – выпуклое, замкнутое, ограниченное, в работе [115] доказано, что множество  $\Gamma' \times \Omega^N$  – также выпуклое, замкнутое, ограниченное. По аналогии с [65] можно показать, что функционал  $h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi$  из (1.3.67) при каждом фиксированном  $\Psi \in \Lambda$  выпуклый и непрерывный по совокупности переменных  $\lambda(\cdot), \tau$  на  $\Gamma' \times \Omega^N$ . Легко видеть, что функционал  $h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi$  – линейный по  $\Psi \in \Lambda$ , а значит и выпуклый. Тогда имеет место соотношение двойственности (1.3.69).

Далее из теоремы 1.9 следует, что решение пары двойственных задач эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа (1.3.67) на  $\Gamma' \times \Omega^N \times \Lambda$ . Для отыскания седловой точки поступим следующим образом.

Для отыскания  $\min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Gamma' \times \Omega^N} h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi$  из (1.3.68) перейдем сначала к следующей задаче: найти

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi \quad \text{при } \Psi \in \Lambda . \quad (1.3.70)$$

Отметим, что внутренняя задача в (1.3.70) глобально разрешима по  $\lambda \cdot$  на  $\Gamma'$ .

Действительно, при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\Psi \in \Lambda$  функционал  $h \lambda \cdot, \tau, \Psi$  из (1.3.70), определяемый по формуле (1.3.67), будет выпуклым по  $\lambda \cdot$  на  $L_2^N \Omega$ . Тогда из обобщённой теоремы Вейерштрасса следует, что при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\Psi \in \Lambda$  минимум по  $\lambda \cdot$  функционала  $h \lambda \cdot, \tau, \Psi$  достигается на симплексе  $\Gamma'$ .

Рассмотрим локальную задачу из (1.3.70): найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} h \{ \lambda(\cdot), \tau, \Psi \}, \quad \tau \in \Omega^N, \Psi \in \Lambda, \quad (1.3.71)$$

$$\text{где } \Gamma' = \{ \lambda(x) \in L_2^N \Omega : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i=1, \dots, N, \quad (1.3.72)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}.$$

При фиксированных  $\tau = \bar{\tau}$  и  $\Psi = \bar{\Psi}$  введём функционал Лагранжа локальной задачи (1.3.71)-(1.3.72) следующим образом:

$$L_{\bar{\tau}}^* \{ \lambda(\cdot), \bar{\tau}, \bar{\Psi} \} = h \{ \lambda(\cdot), \bar{\tau}, \bar{\Psi} \} + \int_{\Omega} \psi_{0\bar{\tau}}^*(x) \cdot \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1 \right] dx, \quad (1.3.73)$$

где  $\lambda(\cdot) \in \Gamma_0 = \{ \lambda(\cdot) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \psi_{0\bar{\tau}}^*(x) \in L_2 \Omega$  – оптимальный обобщённый множитель Лагранжа задачи (1.3.71)-(1.3.72), существование которого вытекает из [44, 65].

Обозначим в (1.3.71)

$$G_1(\tau, \Psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} h \{ \lambda(\cdot), \tau, \Psi \}, \quad \tau \in \Omega^N, \Psi \in \Lambda. \quad (1.3.74)$$

Изучим свойства функции  $G_1(\tau, \Psi)$  при  $\tau \in \Omega^N, \Psi \in \Lambda$  из (1.3.74).

Имеет место

**Теорема 1.10.** Для каждого фиксированного  $\Psi = \bar{\Psi}$  из  $\Lambda$  функция  $G_1 \tau, \bar{\Psi}$ , заданная соотношением (1.3.74), выпукла по  $\tau$  на открытом множестве  $W^N \supset \Omega^N$ , где  $W^N = \underbrace{W \times \dots \times W}_N$ .

**Доказательство.** При каждом фиксированном  $\bar{\Psi} \in \Lambda$ , функционал  $h_{\lambda \cdot, \tau, \bar{\Psi}}$  из (1.3.74) выпуклый по совокупности переменных  $\lambda \cdot, \tau$  на множестве  $\Gamma \times W^N$ , где  $\Gamma'$  – выпуклое множество,  $W^N$  – выпуклое множество из  $\underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N$ , а функция  $G_1 \tau, \bar{\Psi}$  конечна на  $W^N$ .

Тогда, согласно [27], функция  $G_1 \tau, \bar{\Psi}$ , заданная соотношением (1.3.74), выпукла по  $\tau$  на  $W^N$ .

Теорема 1.10 доказана.

Как следует из [109], в каждой внутренней точке  $\tau$  области определения  $W^N$  выпуклая функция  $G_1 \tau, \bar{\Psi}$ , определённая соотношением (1.3.74), имеет непустое субградиентное множество. Имеет место

**Теорема 1.11.** Пусть  $\lambda_{\bar{\tau}} \cdot$  – оптимальное решение локальной задачи (1.3.71)–(1.3.72). Тогда обобщённый градиент функции  $G_1 \tau, \bar{\Psi}$  в точке  $\tau = \bar{\tau}$  может быть вычислен по формуле:

$$g_{G_1 \tau, \bar{\Psi}}^{\bar{\tau}} = g_{L_{\bar{\tau}}}^{\bar{\tau}} h_{\lambda_{\bar{\tau}}(\cdot), \bar{\tau}, \bar{\Psi}},$$

где  $g_{L_{\bar{\tau}}}^{\bar{\tau}} h_{\lambda_{\bar{\tau}}(\cdot), \bar{\tau}, \bar{\Psi}}$  есть  $N$ -мерная составляющая обобщённого градиента функционала Лагранжа (1.3.73) для задачи (1.3.71)–(1.3.72), взятого в точке  $\lambda_{\bar{\tau}}(\cdot), \bar{\tau}$ .

**Доказательство.** При каждом  $\tau = \bar{\tau}$  функционал Лагранжа (1.3.73) локальной задачи из (1.3.74) имеет седловую точку

$\lambda_{\bar{\tau}} x, \psi_{0\bar{\tau}}^* x$  на множестве  $\Gamma_0 \times L_2 \Omega$ , где  $\lambda_{\bar{\tau}} x$  – оптимальное решение задачи (1.3.74). Тогда, в силу принципа дополняющей нежёсткости,

$$h_{\lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}} = h_{\lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}} + \int_{\Omega} \psi_{0\bar{\tau}}^*(x) \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_{\bar{\tau}_i}(x) - 1 \right] dx \quad (1.3.75)$$

Пусть  $\omega$  – произвольная точка из  $S_{\bar{\tau}}$ , где  $S_{\bar{\tau}}$  – окрестность  $\bar{\tau}$ , принадлежащая выпуклому множеству  $\Omega^N$ . С учётом соотношения (1.3.75) получаем:

$$G_1 \omega, \bar{\Psi} - G_1 \bar{\tau}, \bar{\Psi} = h_{\lambda_{\omega}, \omega, \bar{\Psi}} - h_{\lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}} =$$

$$= h_{\lambda_{\omega}, \omega, \bar{\Psi}} + \int_{\Omega} \psi_{0\omega}^*(x) \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_{\omega i}(x) - 1 \right] dx - \\ - \left\{ h_{\lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}} + \int_{\Omega} \psi_{0\bar{\tau}}^*(x) \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_{\bar{\tau} i}(x) - 1 \right] dx \right\}.$$

Поскольку  $\psi_{0\omega}^*(x)$  максимизирует выражение

$$h_{\lambda_{\omega}, \omega, \bar{\Psi}} + \int_{\Omega} \psi_0(x) \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_{\omega i}(x) - 1 \right] dx$$

по всем  $\psi_0(x) \in L_2(\Omega)$ , то

$$G_1 \omega, \bar{\Psi} - G_1 \bar{\tau}, \bar{\Psi} \geq h_{\lambda_{\omega}, \omega, \bar{\Psi}} + \int_{\Omega} \psi_{0\bar{\tau}}^*(x) \cdot \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_{\omega i}(x) - 1 \right] dx - \\ - \left\{ h_{\lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}} + \int_{\Omega} \psi_{0\bar{\tau}}^*(x) \cdot \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_{\bar{\tau} i}(x) - 1 \right] dx \right\} = \\ = h_{\lambda_{\omega}, \omega, \bar{\Psi}} - h_{\lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}} + \int_{\Omega} \psi_{0\bar{\tau}}^*(x) \cdot \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_{\omega i}(x) - \sum_{i=1}^N \lambda_{\bar{\tau} i}(x) \right] dx.$$

Как уже отмечалось, функционал  $h_{\lambda \cdot, \tau, \bar{\Psi}}$  выпуклый по совокупности переменных  $\lambda \cdot, \tau$  на  $\Gamma \times W^N$ . А значит, в каждой внутренней точке  $\lambda \cdot, \tau$  множества  $\Gamma \times W^N$  существует непустое субградиентное множество, т. е.

$$G_1 \omega, \bar{\Psi} - G_1 \bar{\tau}, \bar{\Psi} \geq h_{\bar{\tau}} \lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}, \omega - \bar{\tau} + \\ + \int_{\Omega} h_{\lambda_{\bar{\tau}}} \lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}, \lambda_{\omega}(x) - \lambda_{\bar{\tau}}(x) dx + \\ + \int_{\Omega} \psi_{0\bar{\tau}}^*(x), \lambda_{\omega}(x) - \lambda_{\bar{\tau}}(x) dx = h_{\bar{\tau}} \lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}, \omega - \bar{\tau} + \\ + \int_{\Omega} h_{\lambda_{\bar{\tau}}} \lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi} + \psi_{0\bar{\tau}}^*(x), \lambda_{\omega}(x) - \lambda_{\bar{\tau}}(x) dx.$$

Из того, что  $\lambda_{\bar{\tau}}(\cdot)$  – оптимальное решение задачи (1.3.74), следует, что

$$\int_{\Omega} h_{\lambda_{\bar{\tau}}} \lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi} + \psi_{0\bar{\tau}}^*(x), \lambda_{\omega}(x) - \lambda_{\bar{\tau}}(x) dx \geq 0 \quad \forall \lambda(\cdot) \in \Gamma_0. \quad (1.3.76)$$

С учётом (1.3.76) получаем:

$$G_1 \omega, \bar{\Psi} - G_1 \bar{\tau}, \bar{\Psi} \geq h_{\bar{\tau}} \lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}, \omega - \bar{\tau} \quad \forall \omega \in S(\bar{\tau}),$$

откуда следует, что  $g_{L_{\bar{\tau}}}^{\tau} h \lambda_{\bar{\tau}}(\cdot), \bar{\tau}, \bar{\Psi} = h_{\bar{\tau}} \lambda_{\bar{\tau}}, \bar{\tau}, \bar{\Psi}$  является субградиентом функции  $G_1 \tau, \bar{\Psi}$  в точке  $\bar{\tau}$ .

Теорема 1.11 доказана.

**Следствие 1 из теоремы 1.11.** Обобщённый градиент функции  $G_1 \tau, \bar{\Psi}$  по  $\tau$  при фиксированном  $\Psi = \bar{\Psi}, \bar{\Psi} \in \Lambda$  имеет вид  $g_{G_1}^{\tau} \tau, \bar{\Psi} = g_{G_1}^{\tau_1} \tau, \bar{\Psi}, \dots, g_{G_1}^{\tau_N} \tau, \bar{\Psi}$ , где

$$g_{G_1}^{\tau_i} \tau, \bar{\Psi} = \int_{\Omega} (1 + \xi_i) \rho(x) g_c^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

причём  $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$  есть  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщённого градиента  $g_c^{\tau}(x, \tau_i)$  функции  $c(x, \tau_i)$  в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ .

**Следствие 2 из теоремы 1.11.** Нетрудно показать, по аналогии с теоремой 1.11, что компоненты обобщённого градиента  $g_{G_1}^{\Psi}(\bar{\tau}, \xi, \Psi) = g_{G_1}^{\xi}(\bar{\tau}, \xi, \Psi), g_{G_1}^{\Psi}(\bar{\tau}, \xi, \Psi)$  функции  $G_1 \bar{\tau}, \Psi$  по  $\Psi = (\xi, \Psi)$  при фиксированном  $\tau = \bar{\tau}, \bar{\tau} \in W^N$  будут иметь вид:

$$g_{G_1}^{\xi_i}(\bar{\tau}, \xi, \Psi) = \int_{\Omega} (1 + \xi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx - l_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$g_{G_1}^{\Psi_i}(\bar{\tau}, \xi, \Psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Далее вместо двойственной задачи к задаче **B9.1**, учитывая (1.3.70) и (1.3.74), перейдем к решению следующей задачи отыскания

$$\max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \Psi).$$

Для этого сначала конкретизируем выражение  $G_1 \tau, \Psi$  из (1.3.74). Подставляя в (1.3.74) выражение для функционала  $h \lambda(\cdot), \tau, \Psi$  из (1.3.67) и учитывая, что  $h \lambda(\cdot), \tau, \Psi$  является линейным сепарабельным относительно  $\lambda(\cdot)$  функционалом, получаем:

$$G_1 \tau, \Psi = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \left[ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c(x, \tau_i) + a_i \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \xi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) c(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx - l_i \right) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \min_{\lambda_i(\cdot) \in \Gamma} \left[ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [(1 + \xi_i)c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right] = \\
 &= - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\
 &+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{0 \leq \lambda_i(\cdot) \leq 1, \sum_{i=1}^N \lambda_i(\cdot) = 1} (1 + \xi_i)c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad (1.3.77)
 \end{aligned}$$

$$\tau \in \Omega^N, \Psi = (\xi, \psi) \in \Lambda.$$

Легко показать, что в (1.3.77) минимальное значение  $i$ -го выражения (из фигурных скобок) для каждого  $\tau \in \Omega^N, \Psi \in \Lambda$  достигается при  $\lambda_i(x) = \lambda_{*i}(x)$ , где

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.3.78)$$

$$\Omega_{*i} = \{x \in \Omega : (1 + \xi_i)c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k, \\ \text{для } i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N\},$$

и тогда функцию  $G_1 \tau, \Psi$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 G_1 \tau, \Psi = \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k)c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k] \rho(x) dx - \\
 - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (1.3.79)
 \end{aligned}$$

Из теоремы 1.8 и из вида оптимального решения (1.3.78) для задачи (1.3.77) при фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  (в предположении, что выполняются условия  $\rho(x) \geq 0$  п. в. для  $x \in \Omega$ ) следует теорема 1.12.

**Теорема 1.12.** Для того чтобы возможное разбиение  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N})$  являлось оптимальным для задачи **В9.1**, необходимо и достаточно существования действительных констант  $\xi_1, \dots, \xi_N, \psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  (среди которых  $\xi_1, \dots, \xi_N, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  – неотрицательные) таких, что

$$(1 + \xi_i)c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k, \quad i \neq k, \quad (1.3.80)$$

п. в. для  $x \in \Omega_{*i}, i, k = 1, \dots, N.$

Сформулируем итоговую теорему.



**Теорема 1.13.** Седловая точка  $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*)$  (где первая компонента  $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}$  является оптимальным решением задачи **B9.1** функционала (1.3.67) на множестве  $\{\Gamma' \times \Omega^N\} \times \Lambda$  определяется для  $i = 1, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{*i} &= \{x \in \Omega : (1 + \xi_i^*)c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* = \\ &= \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k^*)c(x, \tau_{*k}) + a_k + \psi_k^*], i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega\}, \end{aligned}$$

в качестве  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \xi_1^*, \dots, \xi_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи к задаче **B9.1**, приведённой к виду

$$\begin{aligned} G \Psi &= \min_{\tau \in \Omega^N} G_1 \quad \tau, \Psi = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} (1 + \xi_k)c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k \rho(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (1.3.81)$$

при условиях

$$\xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N, \quad \psi_i \geq 0, i = p + 1, \dots, N. \quad (1.3.82)$$

### Алгоритм решения задачи A9

Приведём алгоритм решения задачи **A9**, основанный на теореме 1.13.

Для отыскания оптимального решения задачи (1.3.81) – (1.3.82) будем использовать эвристический алгоритм обобщённых псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к  $g$ -алгоритму Шора.

Для этого от задачи (1.3.81)–(1.3.82) введением в целевую функцию (1.3.81) негладких штрафных функции множеств  $\{\xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}, \{\psi_i \geq 0, i = p + 1, \dots, N\}$  перейдём к задаче:

$$\text{найти} \quad \max_{\xi \in E_N} \max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P \quad \tau, \Psi, \quad (1.3.83)$$

где

$$P \tau, \Psi = G_1 \tau, \Psi - S_1 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i) - S_2 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i), \quad (1.3.84)$$

для всех  $\xi \in E_N, \psi \in E_N, \tau \in \Omega^N$ .

Здесь  $S_1, S_2$  – достаточно большие положительные числа (значительно большие максимального из множителей Лагранжа для функции (1.3.79)).

(О возможности перехода от задачи (1.3.81)–(1.3.82) к задаче (1.3.83)–(1.3.84) см. в [65, 109].)

Определим, на основании следствий 1, 2 из теоремы 1.11  $i$ -ю компоненту  $3 \cdot N$ -мерного вектора обобщённого псевдоградиента

$$\begin{aligned} g(\tau, \xi, \psi) &= g_P^\tau(\tau, \xi, \psi), -g_P^\xi(\tau, \xi, \psi), -g_P^\psi(\tau, \xi, \psi) = \\ &= g_P^{\tau_1}(\tau, \xi, \psi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \xi, \psi); \\ &-g_P^{\xi_1}(\tau, \xi, \psi), \dots, -g_P^{\xi_N}(\tau, \xi, \psi); -g_P^{\psi_1}(\tau, \xi, \psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\tau, \xi, \psi) \end{aligned}$$

функции (1.3.84) в точке  $(\tau, \xi, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \xi_1, \dots, \xi_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$  следующим образом:

$$g_P^{\xi_i}(\tau, \xi, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) c(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx - l_i + S_1 \max 0, \text{sign}(-\xi_i), \quad (1.3.85)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

$$g_P^{\psi_i}(\tau, \xi, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1.3.86)$$

$$g_P^{\psi_i}(\tau, \xi, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S_2 \max 0, \text{sign}(-\psi_i), \quad (1.3.87)$$

$$i = p + 1, \dots, N,$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau, \xi, \psi) = \int_{\Omega} (1 + \xi_i) \rho(x) g_c^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3.88)$$

где  $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$  –  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщённого градиента  $g_c^{\tau}(x, \tau_i)$  функции  $c(x, \tau_i)$ , в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$  при фиксированном  $x$ , имеющая вид:

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

В формулах (1.3.85)–(1.3.88)  $\lambda_i(x)$ ,  $i=1, \dots, N$ , определяется следующим образом:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i)c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i = \\ & = \min_{k=1, \dots, N} (1 + \xi_k)c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k, \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i=1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3.89)$$

**Замечание 1.10.** В случае, когда  $c(x, \tau_i)$  эвклидова метрика,  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщённого градиента  $g_c^\tau(x, \tau_i)$  функции

$c(x, \tau_i)_E = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2}$ , в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$  при фиксированном  $x$ , имеет следующий вид:

$$g_{c_E}^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} (\tau_i^{(1)} - x^{(1)}) / \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2} \\ \dots\dots\dots \\ (\tau_i^{(n)} - x^{(n)}) / \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что вектор обобщённых псевдоградиентов функции  $P \tau, \psi, \xi$  представляет собой сумму вектора обобщённых псевдоградиентов функции  $G_1 \tau, \psi, \xi$  и вектора градиентов штрафной части

$$\begin{aligned} -S_1 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) - S_2 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i) + S_3 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\} + \\ + S_4 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\} \end{aligned} \quad (1.3.90)$$

функции  $P \tau, \psi, \xi$ .

Рассмотрим подробнее определение градиента штрафной части функции  $P \tau, \psi, \xi$ , которая определяется формулой (1.3.90):

1)  $i$ -я,  $i=1, \dots, N$ , компонента градиента по  $\tau$  штрафной части

$$\left[ S_3 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\} \right] \quad \text{и} \quad \left[ S_4 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\} \right] \quad \text{функции}$$

$P \tau, \psi, \xi$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (S_3 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\})'_{\tau_i^k} &= (S_3 \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\})'_{\tau_i^k} = \\
 &= S_3 \cdot \left( \begin{cases} 0, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k < 0, \\ x_{\min}^k - \tau_i^k, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k \geq 0 \end{cases} \right)'_{\tau_i^k} = \\
 &= S_3 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k < 0, \\ -1, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k \geq 0 \end{cases} = \\
 = -S_3 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k < 0, \\ 1, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k \geq 0 \end{cases} = -S_3 \max\{0, \text{sign}(x_{\min}^k - \tau_i^k)\}; \quad (1.3.91)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (S_4 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\})'_{\tau_i^k} &= (S_4 \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\})'_{\tau_i^k} = \\
 &= S_4 \cdot \left( \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_i^k - x_{\max}^k < 0, \\ \tau_i^k - x_{\max}^k, & \text{если } \tau_i^k - x_{\max}^k \geq 0 \end{cases} \right)'_{\tau_i^k} = \\
 &= S_4 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_i^k - x_{\max}^k < 0, \\ 1, & \text{если } \tau_i^k - x_{\max}^k \geq 0 \end{cases} = \\
 &= S_4 \max\{0, \text{sign}(\tau_i^k - x_{\max}^k)\}; \quad (1.3.92)
 \end{aligned}$$

2)  $i$ -я,  $i = p+1, \dots, N$ , компонента градиента по  $\Psi$  штрафной части

$\left[ -S_1 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) \right]$  функции  $P \tau, \psi, \xi$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (-S_2 \sum_{i=1}^N \max\{0, -\psi_i\})'_{\psi_i} &= (-S_2 \max\{0, -\psi_i\})'_{\psi_i} = \\
 = -S_2 \cdot \left( \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_i > 0, \\ -\psi_i, & \text{если } \psi_i \leq 0 \end{cases} \right)'_{\psi_i} &= -S_2 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_i > 0, \\ -1, & \text{если } \psi_i \leq 0 \end{cases} = \\
 = S_2 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_i > 0, \\ 1, & \text{если } \psi_i \leq 0 \end{cases} = S_2 \max\{0, \text{sign}(-\psi_i)\}; \quad (1.3.93)
 \end{aligned}$$

при  $i = 1, \dots, p$  градиент по  $\psi$  штрафной части  $\left[ -S_2 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) \right]$

функции  $P$   $\tau, \xi, \psi$  равен нулю;

3)  $i$ -я,  $i = 1, \dots, N$ , компонента градиента по  $\xi$  штрафной части

$-S_2 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i)$  функции  $P$   $\tau, \psi, \xi$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left( -S_1 \sum_{i=1}^N \max\{0, -\xi_i\} \right)'_{\xi_i} = \left( -S_1 \max\{0, -\xi_i\} \right)'_{\xi_i} = \\ & = -S_1 \cdot \left( \begin{array}{l} 0, \text{ если } \xi_i > 0, \\ -\xi_i, \text{ если } \xi_i \leq 0 \end{array} \right)'_{\xi_i} = -S_1 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_i > 0, \\ -1, & \text{если } \xi_i \leq 0 \end{cases} = \\ & = S_1 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_i > 0, \\ 1, & \text{если } \xi_i \leq 0 \end{cases} = S_1 \max\{0, \text{sign}(-\xi_i)\}, \end{aligned} \quad (1.3.94)$$

Опишем алгоритм решения задачи **A9**, составной частью которого является так называемый  $r(\alpha)$ -алгоритм с постоянным коэффициентом растяжения пространства  $\alpha$  и адаптивным способом регулировки шагового множителя [111, 112], являющейся модификацией известного  $r$ -алгоритма Шора [109].

### Алгоритм 1.6

**0-й шаг.** Область  $\Omega$  заключаем в прямоугольный параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем  $\rho(x) = 0$ , при  $x \in \Pi \setminus \Omega$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаём начальное приближение  $(\tau, \psi, \xi) = \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}$ . Задаём параметры  $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$  модификации  $r(\alpha)$ -алгоритма.

**1-й шаг.** Вычисляем значения  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.89) при  $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}$ . Вычисляем значения функции  $G_1 \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}$  и вектора  $g_p \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}$  в узлах сетки по формулам (1.3.85)–(1.3.88) при  $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}, \lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ .

Выбираем начальный пробный шаг  $h_0 > 0$ , полагаем  $B_0^\tau = I_{nN}$ ,  $B_0^\psi = I_N$ ,  $B_0^\xi = I_N$  – квадратные матрицы размерностей  $nN \times nN$ ,  $N \times N$  и  $N \times N$  соответственно, параметры  $q_1, q_2, n_h, \varepsilon$   $r$ -алгоритма Шора и находим:

$$\begin{aligned}\tau^{(1)} &= \tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau \tau^{(0)}, \xi^{(0)}, \psi^{(0)}, \\ \xi^{(1)} &= \xi^{(0)} - h_0 g_P^\xi \tau^{(0)}, \xi^{(0)}, \psi^{(0)}, \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 g_P^\psi \tau^{(0)}, \xi^{(0)}, \psi^{(0)}.\end{aligned}$$

**2-й шаг.** Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  шагов алгоритма получены величины  $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}$ ,  $\lambda^{(k-1)}(x)$  в узлах сетки, матрицы  $B_k^\tau, B_k^\psi, B_k^\xi$ .

Опишем  $(k + 1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.89) при  $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \xi = \xi^{(k)}$ .

2. Вычисляем значения  $g_P \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}$  в узлах сетки по формулам (1.3.85)–(1.3.88) при  $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \xi = \xi^{(k)}$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ .

3. Проводим  $(k + 1)$ -й шаг  $r(\alpha)$ -алгоритма обобщённых псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к  $r$ -алгоритму Шора, итерационная формула которого имеет вид:

$$\begin{aligned}\tau^{(k+1)} &= \tau^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T g_P^\tau \tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)}}{\|B_{k+1}^T g_P^\tau \tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)}\|}, \\ \xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T g_P^\xi \tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)}}{\|B_{k+1}^T g_P^\xi \tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)}\|}, \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T g_P^\psi \tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)}}{\|B_{k+1}^T g_P^\psi \tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)}\|}.\end{aligned}$$

Здесь  $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi, B_{k+1}^\xi$  – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство с коэффициентом растяжения  $\alpha$ , которые имеют вид:

$$B_{k+1}^w = B_k^w \left( I + \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \theta_k^w (\theta_k^w)^T \right), \quad (1.3.95)$$

где  $w$  обозначает переменную  $\tau, \psi$  или  $\xi$ ,  $I$  – единичная матрица соответствующей размерности,  $\theta_k^w$  – соответствует нормированному вектору разности двух последовательных псевдоградиентов в преобразованном пространстве, т. е.:

$$\theta_k^w = \frac{(B_{k+1}^w)^T g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)})}{\left\| (B_{k+1}^w)^T g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}) \right\|},$$

при условии, что

$$\left\| (B_{k+1}^w)^T g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}) \right\| \geq \varepsilon_0, \text{ и } \theta_k^w = 0$$

в остальных случаях, здесь  $\varepsilon_0$  – точность представления нуля ЭВМ.

Длина шагового множителя  $h_k$  регулируется адаптивным способом с параметрами  $h_0, q_1, q_2, n_h$ , сообразно которому шаговый множитель выбирается из условия минимума разности

$$\left[ G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}) \right]$$

по направлению обобщённого антипсевдоградиента  $-g_P(\tau, \psi, \xi)$  в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$\left\| \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)} - \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)} \right\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad (1.3.96)$$

не выполняется, переходим к  $(k + 2)$ -му шагу алгоритма с новыми значениями величин  $\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}$ ,  $\lambda^{(k)}(x)$ , в узлах сетки, и матриц

$B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi, B_{k+1}^\xi$ , если выполняется, то переходим на п. 5.

Здесь  $\varepsilon$  – параметр, задающий условие останова алгоритма по отклонению аргумента.

5. Полагаем  $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi^* = \psi^{(l)}, \xi^* = \xi^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.3.96).

6. Вычисляем оптимальное значение двойственного функционала по формуле (1.3.79) при  $\tau = \tau_*$ ,  $\psi = \psi^*$ ,  $\xi = \xi^*$ , и для контроля правильности счёта, по формуле:

$$I \lambda_*(\cdot), \tau_* = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c(x, \tau_{*i}) + a_i \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx .$$

Алгоритм 1.6 описан.

Отметим, что вычислительная эффективность описанного алгоритма в первую очередь зависит от коэффициента растяжения пространства  $\alpha$  и параметров адаптивной регулировки шага  $q_1, q_2, n_h$  из  $r(\alpha)$ -алгоритма. Согласно [110], параметры необходимо выбирать таким образом, чтобы адаптивный способ регулировки шагового множителя позволял увеличивать точность поиска минимума функции по направлению в процессе счёта и при этом не делал большого количества шагов в этом направлении. Для негладких функций этого можно добиться следующим выбором параметров:  $\alpha = 2 \div 3$ ,  $h_0 = 1$ ,  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 1.1 \div 1.2$ ,  $n_h = 2 \div 3$ , где  $q_1$  коэффициент уменьшения шага, если условие спуска по направлению выполняется за один шаг,  $q_2$  – коэффициент увеличения шага, при этом натуральное число  $n_h$  ( $n_h > 1$ ) задаёт количество шагов одномерного спуска, после которых шаг будет увеличиваться в  $q_2$  раз.

### 1.3.3.2. Линейная многопродуктовая задача А8 оптимального разбиения множеств с дополнительными ограничениями

**Непрерывная линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на его подмножества  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M$  (среди которых могут быть пустые) с размещением их центров при ограничениях в форме равенств и неравенств и дополнительных ограничениях типа ограничений на пропускные способности коммуникаций** приведена в пункте 1.1.1. Перепишем её в виде В8, удобном для дальнейших исследований.

**Задача В8.** Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_5 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx ,$$

где

$$\Gamma_5 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \}$$



$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx \leq l_i, \quad i=1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_3 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x));$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Здесь  $c^j(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные функции измеримого по аргументу  $x$  на некотором открытом, ограниченном, выпуклом множестве  $W \subset E_n$ , которое содержит  $\Omega$ , и выпуклые по  $\tau_i$  на  $W$  для всех  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ ;

$\rho^j(x), j = 1, \dots, M$ , – действительные, ограниченные, измеримые и неотрицательные на  $\Omega$  функции;

$\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  – некоторая заранее неизвестная точка подмножества  $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , одна и та же для всех  $j = 1, \dots, M$ , которая называется общим центром подмножества  $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$ ;  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  – любая точка множества  $\Omega$ ;  $a_1^1, \dots, a_N^1; \dots; a_1^M, \dots, a_N^M$  – заданные действительные неотрицательные числа.

Будем также рассматривать следующую задачу.

**Задача В8.1.** Найти

$$\min_{\lambda(\cdot), \tau} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

при ограничениях

$$A_i \lambda(\cdot) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$A_i \lambda(\cdot) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \leq 0, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\Phi_i \lambda(\cdot), \tau = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - l_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma, \quad \tau \in \Omega^N,$$

где  $\Gamma = \{ \lambda(x) : 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M \}.$$

Доказано в [41], что задачи **B8** и **B8.1** при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  имеют решения, и при этом среди множества оптимальных решений задачи **B8.1** содержатся оптимальные решения задачи **B8**, что позволяет в дальнейшем перейти к рассмотрению задачи **B8.1**.

Сформулируем необходимое условие минимума, полученное в рамках теории Дубовицкого – Милютина, для задачи **B8.1** в следующей теореме, которая является обобщением теоремы 1.8 на случай многопродуктовой задачи.

**Теорема 1.14.** Пусть  $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$  – оптимальное решение задачи. Тогда найдутся числа

$$\psi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{не все равные нулю } \psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\psi_i A_i(\lambda_*(\cdot)) = 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad \xi_i \Phi_i(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

такие, что

$$\begin{aligned} & \psi_0 \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \left[ c^j(x, \tau_{*i}) + a_i^j \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) - \lambda_{*i}^j(x) \, dx + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \tau_i^k - \tau_{*i}^k \int_{\Omega} g_{c^j}^{\tau_i^{(k)}}(x, \tau_{*i}) \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx \right] + \\ & + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) - \lambda_{*i}^j(x) \, dx \right) + \\ & + \sum_{i=1}^N \xi_i \left[ \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \left[ c^j(x, \tau_{*i}) + a_i^j \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) - \lambda_{*i}^j(x) \, dx + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n \tau_i^k - \tau_{*i}^k \int_{\Omega} g_{c^j}^{\tau_i^{(k)}}(x, \tau_{*i}) \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx \right] \geq 0 \text{ для всех } (\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N. \end{aligned}$$

**Обоснование метода решения задачи A8**

Введём в рассмотрение функционал Лагранжа для задачи **B8.1**:

$$\begin{aligned} h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \Psi = & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ c^j(x, \tau_i) + a_i^j \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx + \\ & + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right) + \\ & + \sum_{i=1}^N \xi_i \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx - l_i \right). \end{aligned} \quad (1.3.97)$$

Здесь  $\lambda(x) \in \Gamma$  п. в. для  $x \in \Omega$ ,  $\tau \in \Omega^N$ , а переменные

$$\Psi = (\psi^1, \psi^2, \xi) \in K^*, \quad K^* = K_1^* \times K_2^* \times K_3^*,$$

где  $\psi^1 = (\psi_1^1, \dots, \psi_p^1) \in K_1^*$ ,  $\psi^2 = (\psi_1^2, \dots, \psi_{N-p}^2) \in K_2^*$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in K_3^*$

называются множителями Лагранжа.

Для удобства пользования обозначим  $\psi = (\psi^1, \psi^2) = (\psi_1^1, \dots, \psi_p^1, \psi_1^2, \dots, \psi_{N-p}^2) \in K_1^* \times K_2^*$ , тогда  $\Psi = (\psi, \xi)$ ;

$$K_1^* = \psi^1 = (\psi_1^1, \dots, \psi_p^1) \in E_p : -\infty < \psi_i^1 < \infty, \quad i = 1, \dots, p, \quad ,$$

$$K_2^* = \psi^2 = (\psi_1^2, \dots, \psi_{N-p}^2) \in E_{N-p} : 0 \leq \psi_i^2 < \infty, \quad i = 1, \dots, N-p, \quad ,$$

$$K_3^* = \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in E_N : 0 \leq \xi_i < \infty, \quad i = 1, \dots, N. \quad .$$

Пусть

$$G(\Psi) = \min_{\{ \lambda(\cdot), \tau \} \in \Gamma \times \Omega^N} h \{ \lambda(\cdot), \tau \}, \psi, \xi, \quad (1.3.98)$$

$$\psi^1 \in K_1^*, \quad \psi^2 \in K_2^*, \quad \xi \in K_3^*.$$

Определим задачу, двойственную к задаче **A8.1**, следующим образом:

$$G(\Psi) \rightarrow \sup, \quad (1.3.99)$$

при условиях

$$\psi^1 \in K_1^*, \quad \psi^2 \in K_2^*, \quad \xi \in K_3^*. \quad (1.3.100)$$

Далее, как известно, решение пары двойственных задач (задачи **A8.1** и двойственной задачи (1.3.99)–(1.3.100)) эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа (1.3.97) на множестве  $\{ \Gamma \times \Omega^N \} \times K^*$ .

Чтобы найти седловую точку функционала Лагранжа (1.3.97) задачи **A8.1**, конкретизируем двойственную задачу (1.3.99)–(1.3.100).

Для отыскания  $\min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Gamma \times \Omega^N} h \lambda(\cdot), \tau, \Psi$  из (1.3.98) перейдем к сле-

дующей задаче: при каждом фиксированном  $\Psi \in K^*$  найти:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h \lambda(\cdot), \tau, \Psi. \quad (1.3.101)$$

Обозначим в (1.3.101):

$$G_1(\tau, \Psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h \lambda(\cdot), \tau, \Psi, \quad \tau \in \Omega^N, \Psi \in K^*. \quad (1.3.102)$$

Учитывая (1.3.101) и (1.3.102), перепишем двойственную задачу (1.3.99)–(1.3.100) в следующем виде:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \Psi) \rightarrow \max_{\Psi \in K^*}, \quad (1.3.103)$$

где  $G_1(\tau, \Psi)$  задаётся формулой (1.3.102).

Чтобы решить двойственную задачу (1.3.103), конкретизируем выражение  $G_1 \tau, \Psi$  из (1.3.102).

Подставляя в (1.3.102) выражение для функционала  $h \lambda(\cdot), \tau, \Psi$  из (1.3.97) получаем:

$$\begin{aligned} G_1 \tau, \Psi &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h \{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi = \\ &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \left[ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ c^j(x, \tau_i) + a_i^j \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right) + \sum_{i=1}^N \xi_i \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx - l_i \right) \right] = \\ &= - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i + \\ &+ \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx, \quad (1.3.104) \\ &\tau \in \Omega^N, \Psi = (\psi, \xi) \in K^*. \end{aligned}$$

Покажем, что минимальное значение функционала  $h \lambda(\cdot), \tau, \Psi$  из (1.3.104) для каждого  $\tau \in \Omega^N$  и каждого  $\Psi = (\psi, \xi) \in K^*$  достигается на

вектор-функции  $\lambda_{*i}^j(x) = (\lambda_{*1}^1(x), \dots, \lambda_{*N}^M(x))$ ,  $(i, j)$ -я компонента которой имеет вид:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ & k = 1, \dots, N, i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3.105)$$

Для этого рассмотрим задачу: найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_0} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx, \quad (1.3.106)$$

$$\text{для всех } \tau \in \Omega^N, \Psi \in K^*,$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M, \quad (1.3.107)$$

где  $\Gamma_0 = \{\lambda(\cdot) : 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M\}$ .

Для фиксированного  $\tau \in \Omega^N$  и фиксированного  $\Psi \in K^*$  составим функционал Лагранжа задачи (1.3.106) – (1.3.107):

$$\begin{aligned} L_{\Psi_0}(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) \lambda_i^j(x) + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^M \psi_0^j(x) \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) - 1 \right) \Big\} dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[ (1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \right. \\ &\left. + \psi_0^j(x) \right] \lambda_i^j(x) dx - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \psi_0^j(x) dx, \end{aligned}$$

при  $\lambda(\cdot) \in \Gamma_0, \psi_0^j(x) \in L_2(\Omega)$ .

Так как функционал  $L_{\Psi_0}(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$  линейный сепарабельный по  $\lambda(\cdot)$  на допустимом множестве  $\Gamma_0$ , которое может быть представлено декартовым произведением  $0 \leq \lambda_1^1(x) \leq 1 \times \dots \times 0 \leq \lambda_N^M(x) \leq 1$ , тогда имеет место:

$$\int_{\Omega} \min_{\substack{0 \leq \lambda_1^j(x) \leq 1 \\ \dots \\ 0 \leq \lambda_N^M(x) \leq 1}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[ (1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \right] \lambda_1^j(x) dx =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \min \left[ (1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \right] \lambda_1^j(x) dx .$$

(1.3.108)

Очевидно, что в (1.3.108) минимальное значение  $i, j$ -го выражения,  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , стоящего в фигурных скобках, для каждого  $\psi_0^j(\cdot) \in L_2(\Omega)$  достигается при  $\lambda_1^j(x) = \lambda_{*i}^j(x)$ , где

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \leq 0, \\ 0, & \text{если } (1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \psi_0^j(x) > 0. \end{cases} \quad (1.3.109)$$

Учитывая, что формула (1.3.109) получена для всех  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , легко увидеть, что каждая точка  $x$  из  $\Omega$  будет принадлежать тому из его подмножеств, для которых соответствующая сумма  $(1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \psi_0^j(x)$  будет наименьшей, т. е.  $x \in \Omega_{*i}^j$ , если

$$(1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \psi_0^j(x) =$$

$$= \min_{k=1, \dots, N} (1 + \xi_k) c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k \rho^j(x) + \psi_0^j(x),$$

или в другой записи:

$$(1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \leq$$

$$\leq (1 + \xi_k) c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k \rho^j(x) + \psi_0^j(x),$$

$$k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M .$$

Исключая из предыдущего неравенства  $\psi_0^j(x)$ , перепишем (1.3.109) для  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , и при условии, что  $\rho^j(x) \geq 0$  для  $x \in \Omega$ , в виде:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ & k = \overline{1, N}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3.110)$$

Пусть теперь точка  $x$  принадлежит оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*i}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ ,  $i \neq k$ . Так как точка  $x$  в то же время принадлежит  $\Omega_{*i}^j$ , то

$$(1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k.$$

С другой стороны, так как  $x \in \Omega_{*k}^j$ , то

$$(1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \geq (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k.$$

Отсюда  $(1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i = (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k$  в точках оптимальной границы подмножеств  $\Omega_{*i}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ . Таким образом, в формуле (1.3.110) знак равенства может иметь место и в случаях, когда  $i \neq k$ , но, как предполагалось, лебегова мера таких точек равна нулю. Поэтому можно записать:

$$(1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k,$$

для  $k = 1, \dots, N$  и  $i \neq k$  п. в. для  $x \in \Omega$ . Итак, выражение для  $\lambda_{*i}^j(x)$  из (1.3.110) можно представить в виде:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ & k = 1, \dots, N, i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}^j, \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

т. е. получили формулу (1.3.105).

Подставляя в (1.3.104) вместо  $\lambda_{*i}^j(x)$  выражение из (1.3.105), получаем:

$$G_1 \tau, \Psi = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} \left[ (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k \right] \rho^j(x) dx. \quad (1.3.111)$$

Из вида оптимального решения (1.3.105) (в предположении, что выполняются условия  $\rho^j(x) \geq 0$  для  $x \in \Omega$ ) при фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  следует

**Теорема 1.15.** Для того чтобы возможное разбиение  $(\Omega_{*1}^1, \dots, \Omega_{*j}^j, \dots, \Omega_{*N}^M)$  являлось оптимальным для задачи А8, необходимо и достаточно существования действительных констант  $\Psi_1, \dots, \Psi_p, \Psi_{p+1}, \dots, \Psi_N, \xi_1, \dots, \xi_N$  (среди которых  $\Psi_{p+1}, \dots, \Psi_N, \xi_1, \dots, \xi_N$  — неотрицательные) таких, что

$$(1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \quad i \neq k, \quad (1.3.112)$$

п. в. для  $x \in \Omega_{*i}^j, \quad i, k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M.$

**Следствие из теоремы 1.15.** В точках  $x$ , принадлежащих оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*i}^j$  и  $\Omega_{*k}^j$ , в неравенстве (1.3.112) достигается знак равенства.

Сформулируем итоговую теорему.

**Теорема 1.16.** Седловая точка  $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*)$  (где первая компонента  $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}$  является оптимальным решением задачи В9.1) функционала (1.3.97) на множестве  $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times K^*$  определяется для  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$  и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{*i}^j, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

где  $\Omega_{*i}^j = \{x \in \Omega : (1 + \xi_i^*)c^j(x, \tau_{*i}^*) + a_i^j + \psi_i^* =$

$$= \min_{k=1, \dots, N} \left[ (1 + \xi_k^*)c^j(x, \tau_{*k}^*) + a_k^j + \psi_k^* \right], i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M\},$$

в качестве  $\tau_{*1}^*, \dots, \tau_{*N}^*, \Psi_1^*, \dots, \Psi_N^*, \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (1.3.99)–(1.3.100), приведённой к виду:

$$\begin{aligned} G \Psi &= \min_{\tau \in \Omega^N} G_1 \tau, \Psi = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} \left[ (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k \right] \rho^j(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i \right\} \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (1.3.113)$$



при условиях

$$\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N, \quad \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N. \quad (1.3.114)$$

*Алгоритм решения задачи А8*

Приведём алгоритм решения задачи **А8**, основанный на теореме 1.16.

Для решения задачи (1.3.113)–(1.3.114) условной оптимизации функционала  $G \Psi$  из (1.3.113) при условиях (1.3.114) перейдём к задаче безусловной оптимизации путём введения в целевую функцию (1.3.113) негладких штрафных функции множеств  $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$ ,  $\{\xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$  и множества

$$\begin{aligned} & \{ \tau = (\tau_1^1, \dots, \tau_1^{(n)}, \dots, \tau_N^1, \dots, \tau_N^{(n)}) , \\ & \tau \in E_N^n : x_{\min}^k \leq \tau_i^k \leq x_{\max}^k, i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n \} \end{aligned}$$

Здесь  $x_{\min}^k = \min_{x \in \Omega} x^k, x_{\max}^k = \max_{x \in \Omega} x^k, k = 1, \dots, n$ .

Получаем следующую задачу: найти

$$\max_{\psi \in E_N} \max_{\xi \in E_N} \min_{\tau \in E_N^n} P \tau, \psi, \xi, \quad (1.3.115)$$

где

$$\begin{aligned} P \tau, \psi, \xi = & G_1 \tau, \psi, \xi - S_1 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) - S_2 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i) + \\ & + S_3 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\} + S_4 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\}, \end{aligned} \quad (1.3.116)$$

для всех  $\psi \in E_N, \xi \in E_N, \tau \in E_N^n, \tau_i \in E^n, S_1, S_2, S_3, S_4$  – достаточно большие положительные числа (значительно большие максимального из множителей Лагранжа для функции (1.3.113)).

Очевидно, что задача (1.3.115) – (1.3.116) аналогична задаче (1.3.83) – (1.3.84), и отличаются они только видом функции  $G_1 \tau, \psi, \xi$ . Соответственно, при решении задачи (1.3.115) – (1.3.116) необходимо учесть замечание 1.8.

Как уже отмечалось, вектор обобщённых псевдоградиентов функции  $P \tau, \Psi$  представляет собой сумму вектора обобщённых псевдоградиентов функции  $G_1 \tau, \Psi$  и вектора градиента штрафной части функции

$P \tau, \Psi$ . Вывод формул для градиентов штрафной части абсолютно аналогичен соответствующим выводам из п. 1.3.3.1.

Можно показать (см. теорему 1.11), что обобщённый градиент функции  $G_1 \tau, \bar{\Psi}$  по  $\tau$  при фиксированном  $\Psi = \bar{\Psi}$ ,  $\bar{\Psi} \in K^*$  имеет вид

$$g_{G_1}^{\tau} \tau, \bar{\Psi} = g_{G_1}^{\tau_1} \tau, \bar{\Psi}, \dots, g_{G_1}^{\tau_N} \tau, \bar{\Psi}, \text{ где}$$

$$g_{G_1}^{\tau_i} \tau, \bar{\Psi} = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M (1 + \xi_j) \rho^j(x) g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

причём  $g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau_i)$  есть  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщённого градиента  $g_{c^j}^{\tau}(x, \tau_i)$  функции  $c^j(x, \tau_i)$ , в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ .

Компоненты обобщённого градиента

$$g_{G_1}^{\Psi}(\bar{\tau}, \psi, \xi) = g_{G_1}^{\Psi}(\bar{\tau}, \psi, \xi), g_{G_1}^{\xi}(\bar{\tau}, \psi, \xi) = g_{G_1}^{\Psi_1}(\bar{\tau}, \psi, \xi), \dots, g_{G_1}^{\Psi_N}(\bar{\tau}, \psi, \xi), \\ g_{G_1}^{\xi_1}(\bar{\tau}, \psi, \xi), \dots, g_{G_1}^{\xi_N}(\bar{\tau}, \psi, \xi)$$

функции  $G_1 \bar{\tau}, \Psi$  по  $\Psi = (\psi, \xi)$  при фиксированном  $\tau = \bar{\tau}$ ,  $\bar{\tau} \in W^N$  будут иметь вид:

$$g_{G_1}^{\Psi_i}(\bar{\tau}, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$g_{G_1}^{\xi_i}(\bar{\tau}, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - l_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда вектор обобщённых псевдоградиентов функции  $P \tau, \psi, \xi$ , которая задана формулой (1.3.116), в точке

$$(\tau, \psi, \xi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N, \xi_1, \dots, \xi_N),$$

можно записать в виде:

$$g_P(\tau, \psi, \xi) = g_P^{\tau}(\tau, \psi, \xi), -g_P^{\Psi}(\tau, \psi, \xi), -g_P^{\xi}(\tau, \psi, \xi) = \\ = g_P^{\tau_1}(\tau, \psi, \xi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \psi, \xi);$$

$$-g_P^{\Psi_1}(\tau, \psi, \xi), \dots, -g_P^{\Psi_N}(\tau, \psi, \xi); -g_P^{\xi_1}(\tau, \psi, \xi), \dots, -g_P^{\xi_N}(\tau, \psi, \xi),$$

где  $i$ -е компоненты  $(nN + N + N)$ -мерного вектора обобщённых псевдоградиентов функции  $P \tau, \psi, \xi$  определяются следующим образом:

$$g_p^{\tau_i}(\tau, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M (1 + \xi_i) g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx -$$

$$- S_3 \max\{0, \text{sign}(x_{\min}^k - \tau_i^k)\} -$$

$$- S_4 \max\{0, \text{sign}(\tau_i^k - x_{\max}^k)\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3.117)$$

$$g_p^{\psi_i}(\tau, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1.3.118)$$

$$g_p^{\xi_i}(\tau, \xi, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S_1 \max\{0, \text{sign}(-\psi_i)\}, \quad (1.3.119)$$

$$i = p + 1, \dots, N,$$

$$g_p^{\xi_i}(\tau, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - l_i +$$

$$+ S_2 \max\{0, \text{sign}(-\xi_i)\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3.120)$$

где  $g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau_i)$  есть  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщённого градиента  $g_{c^j}^{\tau}(x, \tau_i)$  функции  $c^j(x, \tau_i)$ , в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$  при фиксированном  $x$ , имеющая вид:

$$g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_{c^j}^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots\dots\dots \\ g_{c^j}^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

В формулах (1.3.117)–(1.3.120)  $\lambda_i^j(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ , определяются следующим образом:

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i = \\ & = \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k) c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k], \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3.121)$$

Опишем алгоритм решения задачи **A8**, который является обобщением алгоритма 1.6 на случай многопродуктовости задачи ОРМ на подмножестве с размещением их центров при дополнительных ограничениях.

**Алгоритм 1.7**

**0-й шаг.** Область  $\Omega$  заключаем в прямоугольный параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем  $\rho^j(x) = 0$ , при  $x \in \Pi \setminus \Omega$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаём начальное приближение  $(\tau, \psi, \xi) = \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}$ . Задаём параметры  $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$  модификации  $r(\alpha)$ -алгоритма.

**1-й шаг.** Вычисляем значения  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.121) при  $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}$ . Вычисляем значения функции  $G_1 \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}$  и вектора  $g_P \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}$  в узлах сетки по формулам (1.3.117)–(1.3.120) при  $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}, \lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ .

Выбираем начальный пробный шаг  $h_0 > 0$ , полагаем  $B_0^\tau = I_{nN}$ ,  $B_0^\psi = I_N$ ,  $B_0^\xi = I_N$  – квадратные матрицы размерностей  $nN \times nN$ ,  $N \times N$  и  $N \times N$  соответственно. Находим:

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= \tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}, \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 g_P^\psi \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}, \\ \xi^{(1)} &= \xi^{(0)} - h_0 g_P^\xi \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}. \end{aligned}$$

**2-й шаг.** Пусть в результате вычислений после  $k, k = 1, 2, \dots$  шагов алгоритма получены величины  $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$  в узлах сетки, матрицы  $B_k^\tau, B_k^\psi, B_k^\xi$ .

Опишем  $(k + 1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (1.3.121) при  $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \xi = \xi^{(k)}$ .

2. Вычисляем значения  $g_P \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}$  в узлах сетки по формулам (1.3.117)–(1.3.120) при  $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \xi = \xi^{(k)}, \lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ .

3. Проводим  $(k + 1)$ -й шаг  $r(\alpha)$ -алгоритма обобщённых псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к  $r$ -алгоритму Шора, итерационная формула которого имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau^{(k+1)} &= \tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^\tau \frac{(B_{k+1}^\tau)^T g_P^\tau \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}}{\left\| (B_{k+1}^\tau)^T g_P^\tau \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)} \right\|}, \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^\psi \frac{(B_{k+1}^\psi)^T g_P^\psi \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}}{\left\| (B_{k+1}^\psi)^T g_P^\psi \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)} \right\|}, \\ \xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} - h_k B_{k+1}^\xi \frac{(B_{k+1}^\xi)^T g_P^\xi \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}}{\left\| (B_{k+1}^\xi)^T g_P^\xi \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)} \right\|}. \end{aligned}$$

Здесь  $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi, B_{k+1}^\xi$  – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство с коэффициентом растяжения  $\alpha$ , которые задаются формулами (1.3.95).

Длина шагового множителя  $h_k$  регулируется адаптивным способом с параметрами  $r(\alpha)$ -алгоритма  $h_0, q_1, q_2, n_h$ , приемлемые значения которых:  $\alpha = 2 \div 3$ ,  $h_0 = 1$ ,  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 1.1 \div 1.2$ ,  $n_h = 2 \div 3$ .

4. Если условие

$$\left\| \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)} - \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)} \right\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad (1.3.122)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма с новыми значениями величин  $\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}$ ,  $\lambda^{(k)}(x)$ , в узлах сетки, и матриц  $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi, B_{k+1}^\xi$ , если выполняется, то переходим на п. 5.

5. Полагаем  $\tau_* = \tau^{(l)}$ ,  $\psi^* = \psi^{(l)}$ ,  $\xi^* = \xi^{(l)}$ ,  $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.3.122).

6. Вычисляем оптимальное значение двойственного функционала по формуле (1.3.111) при  $\tau = \tau_*$ ,  $\psi = \psi^*$ ,  $\xi = \xi^*$ , и для контроля правильности счёта, по формуле:

$$I \lambda_*(\cdot), \tau_* = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ c^j(x, \tau_{*i}^j) + a_i^j \right] \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx.$$

Алгоритм 1.7 описан.

### 1.3.4. Решение модельных задач

Приведём здесь примеры реализации алгоритмов, рассмотренных в разделе 1.3 главы 1, для некоторых модельных задач.

#### 1.3.4.1. Решение модельных линейных задач оптимального разбиения множеств при ограничениях с заданным положением центров подмножеств

**Модельная задача 1.1 к п. 1.3.1.1** (иллюстрация работы алгоритма 1.1 решения линейной многопродуктовой задачи **A5** оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданным положением центров подмножеств).

Задано множество  $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 12, 0 \leq y \leq 36\}$  потребителей продукции трех видов, которая может производиться тридцатью пунктами производства. Заданы координаты возможного расположения пунктов производства  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ ,

$i = \overline{1,30}$ :  $\tau_1 = (2;1)$ ,  $\tau_2 = (6;2)$ ,  $\tau_3 = (10;2)$ ,  $\tau_4 = (4;5)$ ,  $\tau_5 = (8;5)$ ,  $\tau_6 = (2;8)$ ,  
 $\tau_7 = (6;8)$ ,  $\tau_8 = (10;8)$ ,  $\tau_9 = (4;11)$ ,  $\tau_{10} = (8;11)$ ,  $\tau_{11} = (2;14)$ ,  $\tau_{12} = (6;14)$ ,  
 $\tau_{13} = (10;14)$ ,  $\tau_{14} = (4;17)$ ,  $\tau_{15} = (8;17)$ ,  $\tau_{16} = (2;20)$ ,  $\tau_{17} = (6;20)$ ,  
 $\tau_{18} = (10;20)$ ,  $\tau_{19} = (4;23)$ ,  $\tau_{20} = (8;23)$ ,  $\tau_{21} = (2;26)$ ,  $\tau_{22} = (6;26)$ ,  
 $\tau_{23} = (10;26)$ ,  $\tau_{24} = (4;29)$ ,  $\tau_{25} = (8;29)$ ,  $\tau_{26} = (2;32)$ ,  $\tau_{27} = (6;32)$ ,  
 $\tau_{28} = (10;32)$ ,  $\tau_{29} = (4;35)$ ,  $\tau_{30} = (8;35)$ .

Для каждого  $i$ -го пункта производства,  $i = \overline{1,30}$ , задана функция

$$c^j(x, y, \tau_i) = \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2},$$

одна и та же для всех  $j = \overline{1,3}$ , которая описывает стоимость транспортировки единицы продукции  $j$ -го вида из  $i$ -го пункта производства в пункт потребления с координатами  $(x, y)$ . Известен спрос  $\rho^j(x, y)$  на продукцию  $j$ -го вида для каждого пункта потребления с координатами  $(x, y)$ . Для простоты полагается  $\rho^j(x, y) = 1$  для всех  $(x, y) \in \Omega$  и всех  $j = \overline{1,3}$ .

Функции  $\varphi_i^j(Y_i^j)$ , описывающие зависимость стоимости производства продукции  $j$ -го вида на  $i$ -м предприятии от его мощности  $Y_i^j$  по  $j$ -му продукту, имеют вид  $\varphi_i^j(Y_i^j) = a_i^j \cdot Y_i^j$ ,  $i = \overline{1,30}$ ,  $j = \overline{1,3}$ , где мощность  $i$ -го предприятия по  $j$ -му продукту определяется по формуле:

$$Y_i^j = \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy,$$

величины  $a_i^j \geq 0$  можно рассматривать как затраты на производство единицы продукции  $j$ -го вида на  $i$ -м предприятии,

$$a_i^1 = 0, i = \overline{1, 30}; \quad a_i^2 = 100, i = \overline{1, 30}, i \neq 5, 20, 30;$$

$$a_i^2 = 0, i = 5, 20, 30; \quad a_i^3 = 0, i = \overline{1, 30}, i \neq 5; \quad a_5^3 = 100.$$

Множество  $\Omega$  можно разбивать на сферы обслуживания  $\Omega_i^j$  потребителей  $i$ -м пунктом производства по  $j$ -му продукту так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^{30} \Omega_i^j = \Omega, j = \overline{1, 3}, \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, i \neq k, i = \overline{1, 30}, j = \overline{1, 3}, \quad (1.3.123)$$

причем мощность  $i$ -го пункта производства,  $i = \overline{1, 30}$ , по всем видам продукции определяется суммарным спросом потребителей, принадлежащих  $\Omega_i^j, j = \overline{1, 3}$ , и для пунктов производства с номерами  $i = 5, 20, 30$  должна быть равна заданным объемам, а для пунктов с номерами  $i = 1, \dots, 4, 6, \dots, 19, 20, \dots, 29$  не должна превышать заданных объемов:

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, \quad (1.3.124)$$

$$i = 5, 20, 30, b_5 = 600, b_{20} = 300, b_{30} = 396,$$

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \leq 28, 8, \quad i = 1, \dots, 4, 6, \dots, 19, 21, \dots, 29.$$

Не исключается тот случай, когда некоторые из подмножеств  $\Omega_i^j, i = \overline{1, 30}, j = \overline{1, 3}$ , могут оказаться пустыми.

Требуется разбить множество потребителей  $\Omega$  на сферы обслуживания их тридцатью пунктами производства по каждому  $j$ -му,  $j = \overline{1, 3}$ , виду продукции, т. е. на подмножества  $\Omega_i^j, i = \overline{1, 30}, j = \overline{1, 3}$ , так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее к потребителям:

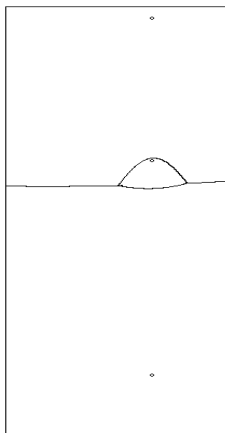
$$\begin{aligned} & F(\Omega_1^1, \dots, \Omega_{30}^1; \dots; \Omega_1^3, \dots, \Omega_{30}^3) = \\ & = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{30} \iint_{\Omega_i^j} (c^j(x, y, \tau_i) + a_i^j) \cdot \rho^j(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (1.3.125)$$

при условиях (1.3.123), (1.3.124).

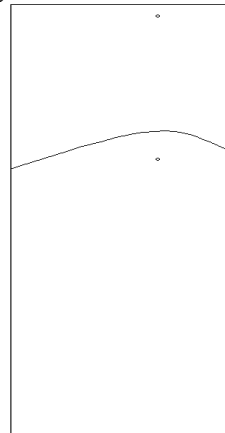
Для решения сформулированной задачи область  $\Omega$  покрывалась прямоугольной сеткой с узлами  $(i, j)$ ,  $i = 1, \dots, 120$ ,  $j = 1, \dots, 360$ . В качестве начальных данных взяты  $\psi_i^{(0)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, 30$ . Начальный пробный шаг  $g$ -алгоритма равен 1. Условием прекращения счета являлось выполнение неравенства:  $\|\psi^{(k)} - \psi^{(k-1)}\| \leq 10^{-4}$ , где  $k$  – номер итерации, на которой произошел останов.

В результате работы алгоритма решения задачи **A5** за 142 итераций получены:

- оптимальное разбиение множества  $\Omega$  по каждому из продуктов. Разбиения по 1-му и 2-му совпадают и изображены на рис. 1.9. Разбиение по 3-му продукту изображено на рис. 1.10;
- минимальное значение прямого функционала (4.3) прямой задачи  $I_* \sim 11789,7$ ;
- максимальное значение двойственного функционала  $G^* \sim 11797,6$ .



**Рис. 1.9.** Оптимальное разбиение множества  $\Omega$  по 1-му и 2-му продуктам для модельной задачи 1.1



**Рис. 1.10.** Оптимальное разбиение множества  $\Omega$  по 3-му продукту для модельной задачи 1.1

**Модельная задача 1.2** (иллюстрация работы алгоритма 1.7 решения линейной многопродуктовой задачи **A7** оптимального разбиения множества на подмножества с ограничениями в форме равенств и неравенств и при дополнительных ограничениях с заданным положением центров подмножеств).

Алгоритм 1.7 реализован для модельной бесконечномерной задачи разбиения области на зоны обслуживания 5 предприятий, производящих продукцию 2 видов с ограничениями на объемы производства и суммарную стоимость транспортировки каждого вида продукции.



Задано множество  $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 10\}$  потребителей продукции 2 видов, которая может производиться 5 пунктами производства. Заданы координаты возможного положения пунктов производства  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ :

$$\tau_1 = (1; 9,5), \quad \tau_2 = (2; 5), \quad \tau_3 = (3; 4), \quad \tau_4 = (4; 9), \quad \tau_5 = (4; 2).$$

Для каждого  $i$ -го пункта,  $i = 1, \dots, 5$ , задана функция

$$c^j(x, y, \tau_i) = \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2},$$

одна и та же для всех  $j = 1, 2$ , которая описывает стоимость транспортировки единицы продукции  $j$ -го вида из  $i$ -го пункта производства в пункт потребления с координатами  $(x, y)$ . Функция спроса на продукцию для простоты полагается  $\rho^j(x, y) \equiv 1$  для всех  $j = 1, 2$ . Стоимости  $\alpha_i^j$  производства единицы продукции  $j$ -го вида на  $i$ -м предприятии соответственно равны:

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 = 1, \quad \alpha_2^1 = 100, \quad \alpha_3^1 = 1, \quad \alpha_4^1 = 100, \quad \alpha_5^1 = 100, \\ \alpha_1^2 = 100, \quad \alpha_2^2 = 1, \quad \alpha_3^2 = 100, \quad \alpha_4^2 = 10, \quad \alpha_5^2 = 1. \end{aligned}$$

Множество  $\Omega$  необходимо разбить на сферы обслуживания  $\Omega_i^j$  потребителей  $i$ -м пунктом производства по  $j$ -му виду продукции так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^5 \Omega_i^j = \Omega, \quad j=1, 2, \quad \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad j=1, 2, \quad (1.3.126)$$

причем мощность  $i$ -го пункта производства  $i = 1, \dots, 5$ , определяется суммарным спросом потребителей, принадлежащих  $\Omega_i^j$ ,  $j = 1, 2$ , и для пунктов производства с номерами 1, 2 должна быть равна заданным объемам, а для пунктов производства с номерами 3, 4, 5 не должна превышать заданных объемов:

$$\sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, \quad i = 1, 2, \quad b_1 = 10, \quad b_2 = 20, \quad (1.3.127)$$

$$\sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, \quad i = 3, 4, 5, \quad b_3 = 500, \quad b_4 = 500, \quad b_5 = 900. \quad (1.3.128)$$

Ограничены также суммарные стоимости доставки продукции из  $i$ -го предприятия:

$$\sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) c^j(x, y, \tau_i) dx dy \leq l_i, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (1.3.129)$$

$$l_1 = 2000, \quad l_2 = 2000, \quad l_3 = 200, \quad l_4 = 100, \quad l_5 = 6.$$

Требуется разбить  $\Omega$  на  $\Omega_i^j$  так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее потребителям:

$$F(\Omega_1^1, \dots, \Omega_5^2) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^5 \iint_{\Omega_i^j} (c^j(x, y, \tau_i) + a_i^j) \cdot p^j(x, y) dx dy \quad (1.3.130)$$

при условиях (1.3.126)–(1.3.129). Не исключается и тот случай, когда некоторые из подмножеств  $\Omega_i^j$  могут оказаться пустыми.

Для отыскания оптимального разбиения множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_i^j$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ,  $j = 1, 2$ , с помощью алгоритма 1.7, область  $\Omega$  покрывалась прямоугольной сеткой с узлами  $(i, j)$ ,  $i = \overline{1, 501}$ ,  $j = \overline{1, 1001}$ . В качестве начальных данных были выбраны  $\psi_i^{(0)} = 0$ ,  $\xi_i^{(0)} = 0$ . Начальный шаг  $\gamma$ -алгоритма равен 1. Условием прекращения счета являлось выполнение неравенства

$$\|(\psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - (\psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)})\| \leq 10^{-6},$$

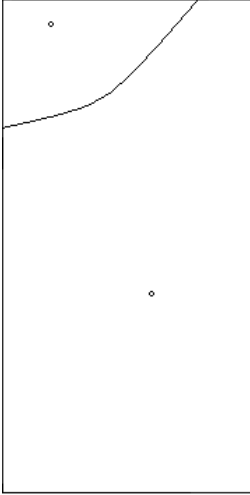
где  $k$  – номер итерации, на которой произошел останов.

В результате работы алгоритма за 81 итерацию получены следующие результаты:

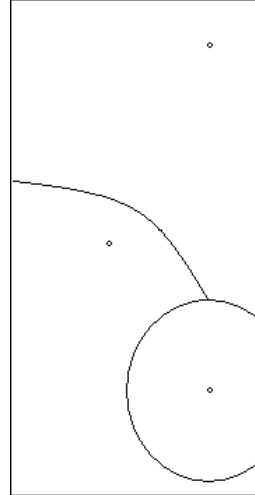
- оптимальное разбиение множества  $\Omega$ : по первому продукту – рис. 1.11, по второму продукту – рис. 1.12;
- минимальное значение прямого функционала  $\sim 551,03$ ;
- максимальное значение двойственного функционала  $\sim 550,54$ .

Для сравнения эта же задача была решена без дополнительных ограничений (1.3.129). Получено оптимальное разбиение, изображенное на рис. 1.13 и 1.14 по первому и второму продуктам, соответственно.

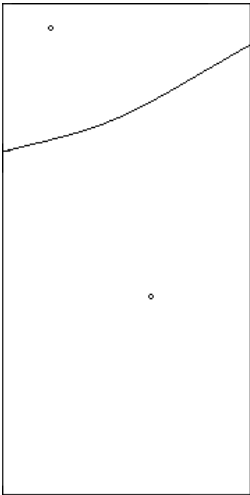
Оптимальное значение целевого функционала (1.3.130)  $\sim 361,64$ . Существенно изменилось разбиение по второму продукту (ср. рис. 1.12 и 1.14). Исчезло 4-е подмножество, так как  $\alpha_2^2 = 1$ ,  $\alpha_5^2 = 1$ , что существенно меньше  $\alpha_4^2 = 10$ . При сравнении рис. 1.12 и 1.14 хорошо видно, как учитывается дополнительное ограничение (1.3.129) на пропускные способности коммуникаций пятого пункта при решении модельной задачи 1.2: здесь сравнительно малы  $l_5, l_6 = 6$ , поэтому площадь  $\Omega_5^2$  в оптимальном решении задачи 1.2 значительно меньше площади  $\Omega_5^2$  в оптимальном решении этой же задачи, в которой дополнительные ограничения отсутствуют.



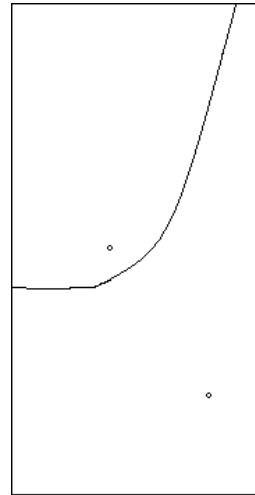
**Рис. 1.11.** Оптимальное разбиение  $\Omega$  по 1-му продукту для модельной задачи 1.2



**Рис. 1.12.** Оптимальное разбиение  $\Omega$  по 2-му продукту для модельной задачи 1.2



**Рис. 1.13.** Оптимальное разбиение по 1-му продукту для задачи ОРМ без дополнительных ограничений для модельной задачи 1.2



**Рис. 1.14.** Оптимальное разбиение по 2-му продукту для задачи ОРМ без дополнительных ограничений для модельной задачи 1.2

*1.3.4.2. Решение модельных линейных задач оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств*

В отличие от модельной задачи 1.1 к п. 1.3.1.1, координаты 30 предприятий, производящих продукцию трех видов, здесь заранее неизвестны, их требуется определить.

**Модельная задача 1.3 к п. 1.3.1.3** (иллюстрация работы алгоритма 1.3 решения задачи А6).

Потребитель некоторой продукции трех видов, производимой 30 предприятиями, распределен в области  $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 12, 0 \leq y \leq 36\}$ . Заданы начальные координаты расположения предприятий:  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ ,

$i = \overline{1,30}$ :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (2;1), & \tau_2 &= (6;2), & \tau_3 &= (10;2), & \tau_4 &= (4;5), \\ \tau_5 &= (8;5), & \tau_6 &= (2;8), & \tau_7 &= (6;8), & \tau_8 &= (10;8), \\ \tau_9 &= (4;11), & \tau_{10} &= (8;11), & \tau_{11} &= (2;14), & \tau_{12} &= (6;14), \\ \tau_{13} &= (10;14), & \tau_{14} &= (4;17), & \tau_{15} &= (8;17), & \tau_{16} &= (2;20), \\ \tau_{17} &= (6;20), & \tau_{19} &= (10;20), & \tau_{19} &= (4;23), & \tau_{20} &= (8;23), \\ \tau_{21} &= (2;26), & \tau_{22} &= (6;26), & \tau_{23} &= (10;26), & \tau_{24} &= (4;29), \\ \tau_{25} &= (8;29), & \tau_{26} &= (2;32), & \tau_{27} &= (6;32), & \tau_{28} &= (10;32), \\ \tau_{29} &= (4;35), & \tau_{30} &= (8;35). \end{aligned}$$

Для каждого  $i$ -го предприятия,  $i = \overline{1,30}$ , задана функция

$$c^j(x, y, \tau_i) = c(x, y, \tau_i) = \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2},$$

одна и та же для всех  $j = \overline{1,3}$ , которая описывает стоимость транспортировки единицы продукции  $j$ -го вида из  $i$ -го предприятия потребителю с координатами  $(x, y)$ . Спрос на продукцию каждого вида является распределенным по области  $\Omega$  с плотностью  $\rho^j(x, y)$ . Для простоты полагаем  $\rho^j(x, y) = 1$  для всех  $(x, y) \in \Omega$  и всех  $j = \overline{1,3}$ ;

Функции  $\varphi_i^j(Y_i^j)$ , описывающие зависимость стоимости производства продукции  $j$ -го вида на  $i$ -м предприятии от его мощности  $Y_i^j$  по  $j$ -му продукту, имеют вид:

$$\varphi_i^j(Y_i^j) = T_i + a_i^j Y_i^j, \quad i = \overline{1,30}, \quad j = \overline{1,3},$$

где мощность  $i$ -го предприятия по  $j$ -му продукту определяется по форму-

ле:

$$Y_i^j = \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy;$$

величины  $a_i^j \geq 0$  – затраты на производство единицы продукции  $j$ -го вида на  $i$ -м предприятии:

$$a_i^1 = 0, i = \overline{1,30}; a_i^2 = 100, i = \overline{1,30}, i \neq 5,20,30; a_i^2 = 0, i = 5,20,30;$$

$$a_i^3 = 0, i = \overline{1,30}; i \neq 5; a_5^3 = 100;$$

$T_i$  – капитальные затраты на строительство  $i$ -го предприятия. Для простоты положим  $T_i = 0, i = 1, \dots, 30$ .

Множество  $\Omega$  можно разбивать на зоны обслуживания  $\Omega_i^j$  потребителей  $i$ -м пунктом производства по  $j$ -му продукту так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^{30} \Omega_i^j = \Omega, j = \overline{1,3},$$

$$\text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, i \neq k, i, k = \overline{1,30}, j = \overline{1,3}, \quad (1.3.131)$$

причем мощность  $i$ -го предприятия,  $i = \overline{1,30}$ , по всем видам продукции определяется суммарным спросом потребителей, принадлежащих  $\Omega_i^j$ ,  $i = \overline{1,30}$ , и для пунктов производства с номерами  $i = 5, 20, 30$  должна быть равна заданным объемам, а для пунктов с номерами  $i = 1, \dots, 4, 6, \dots, 19, 20, \dots, 29$  не должна превышать заданных объемов:

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy = b_i,$$

$$i = 5, 20, 30, b_5 = 600, b_{20} = 300, b_{30} = 396, \quad (1.3.132)$$

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \leq 28,8, i = 1, \dots, 4, 6, \dots, 19, 21, \dots, 29.$$

Не исключается тот случай, когда некоторые из подмножеств  $\Omega_i^j, i = \overline{1,30}, j = \overline{1,3}$ , могут оказаться пустыми.

Требуется разбить множество потребителей  $\Omega$  на зоны обслуживания их 30 пунктами производства по каждому  $j$ -му,  $j = \overline{1,3}$ , виду продукции, т. е. на подмножества  $\Omega_i^j, i = \overline{1,30}, j = \overline{1,3}$ , и разместить эти предприятия так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее к потребителям:

$$F(\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_{30}^1; \dots; \Omega_1^3, \dots, \Omega_{30}^3\}, \{\tau_1, \dots, \tau_{30}\}) = \sum_{i=1}^{30} T_i + \sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} (c^j(x, y, \tau_i) + a_i^j) \rho(x, y) dx dy \quad (1.3.133)$$

при условиях (1.3.131), (1.3.132).

Для решения сформулированной задачи алгоритмом 1.3 область  $\Omega$  покрывалась прямоугольной сеткой с узлами  $(i, j)$ ,  $i = \overline{1, 601}$ ,  $j = \overline{1, 1801}$ . В качестве начальных данных были взяты  $\psi_i^{(0)} = 0$ ,  $i = \overline{1, 30}$ ;  $\tau_i^{(0)}$  – начальные координаты расположения предприятий, приведенные ранее при описании модельной задачи. Условием прекращения счета являлось выполнение неравенства:

$$\|(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)})\| \leq 10^{-5},$$

где  $k$  – номер итерации, на которой произошел останов. В процессе решения модельной задачи с помощью  $\Gamma$ -алгоритма максимизировалась недифференцируемая функция 90 переменных. Двойные интегралы, входящие в формулы (1.3.132), (1.3.133), вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций по узлам сетки.

В результате работы алгоритма 1.3 за 216 итераций получены следующие результаты:

- оптимальное разбиение множества  $\Omega$  по каждому продукту в виде таблицы, соответствующей прямоугольной сетке. Разбиения по 1-му и 2-му совпадают и изображены на рис. 1.15, по 3-му продукту – на рис. 1.16 число, проставленное в узле сетки  $(i, j)$ , соответствует номеру предприятия, зоне обслуживания которого по данному продукту потребитель  $(i, j)$  принадлежит. В случае если из рисунка очевидно, каким предприятием обслуживается потребитель  $(i, j)$ , номер этого предприятия не обозначен;

- оптимальные координаты размещенных предприятий:

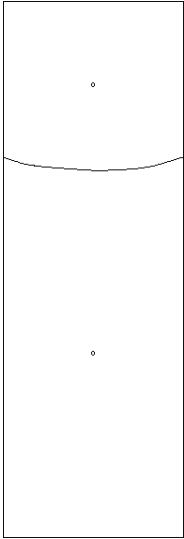
$$\tau_5^* = (6,0; 12,34), \quad \tau_{20}^* = (6,0; 12,33), \quad \tau_{30}^* = (6,0; 30,41);$$

они обозначены на рисунках –  $\tau_i^*$ ,  $i = 5, 20, 30$ ;

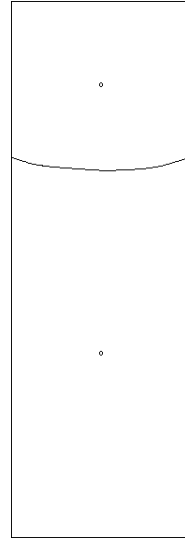
- оптимальные границы между соответствующими подмножествами по каждому продукту, полученные с помощью алгоритма 1.3, указаны на рисунках 1.15, 1.16 сплошными линиями;

- минимальное значение прямого функционала прямой задачи  $I^* \sim 8354,37$ ;

- максимальное значение двойственного функционала  $G^* \sim 8353,52$ .



**Рис. 1.15. Оптимальное разбиение по 1-му и 2-му продуктам с размещением центров для модельной задачи 1.3**



**Рис. 1.16. Оптимальное разбиение по 3-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.3**

Сравнивая оптимальные значения функционалов в модельных задачах 1.1 и 1.3, приходим к выводу, что меньшее значение целевого функционала (т. е. лучшие результаты) получаем в случае, когда расположение предприятий заранее не фиксируется, а допускается их размещение в области  $\Omega$ .

**Модельные задачи 1.4 к разделу 1.3.1.3.**

Проиллюстрируем работу алгоритма 1.3 решения линейных многопродуктовых задач оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с размещением центров подмножеств (задача **A6**) для различных метрик  $c(x, y, \tau_i)$ .

**Модельная задача 1.4а** ( $c(x, y, \tau_i)$  – евклидова метрика).

Опишем постановку модельной задачи размещения 9 предприятий, производящих продукцию 3 видов, с заданными объемами производства для первых 2 предприятий и ограниченными сверху объемами для остальных предприятий.

Приведем исходные данные. Область  $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 20\}$ . Стоимость транспортировки единицы продукции любого вида из  $i$ -го предприятия к потребителю с координатами  $(x, y)$  имеет вид

$$c(x, y, \tau_i) = \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}.$$

Спрос на продукцию каждого вида положим:  $\rho(x, y) \equiv 1$ . Векторы весовых коэффициентов  $A^j$  по каждому продукту равны, соответственно:

$$A^1 = (0; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 0),$$

$$A^2 = (0; 100; 100; 100; 0; 100; 100; 0; 100),$$

$$A^3 = (0; 0; 100; 100; 100; 0; 100; 100; 100).$$

На мощности предприятий наложены следующие ограничения:

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_j^1} \rho(x, y) dx dy = 200, \quad \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_j^2} \rho(x, y) dx dy = 50,$$

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_j^i} \rho(x, y) dx dy \leq 20, \quad i = 3, 4, 6, 7, 8,$$

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_j^3} \rho(x, y) dx dy \leq 60, \quad \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_j^4} \rho(x, y) dx dy \leq 120.$$

Для решения задачи область  $\Omega$  покрывалась прямоугольной сеткой ( $i, j$ )  $i = 1, \dots, 60, j = 1, \dots, 200$ .

В качестве начальных данных выбраны:

$$\psi^{(0)} = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0); \quad SX = 0,0001;$$

$$\tau^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,2; 1,6; 2,9; 4,4; 5,1; 5,6; 1,0; 1,5; 3,5 \\ 0,1; 1,3; 2,1; 5,7; 10; 11,5; 12,9; 13,9; 19,0 \end{pmatrix}.$$

За 103 итерации получены:

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\tau_1^* = (3,0; 10,2), \tau_2^* = (3,0; 4,1), \tau_5^* = (3,0; 2,8);$$

$$\tau_6^* = (2,9; 18,2), \tau_8^* = (3,0; 18,2), \tau_9^* = (3,0; 17,1);$$

– оптимальное разбиение множества  $\Omega$ : по 1-му продукту см. рис. 1.17, по 2-му – рис. 1.18, по 3-му – рис. 1.19;

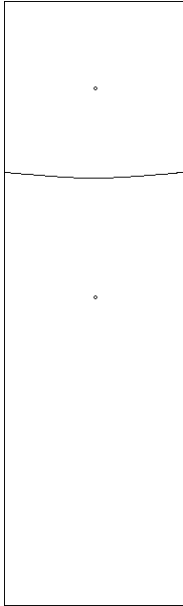
– минимальное значение прямого функционала  $I^* \sim 1103,6$ ;

– максимальное значение двойственного функционала  $G^* \sim 1103,2$ .

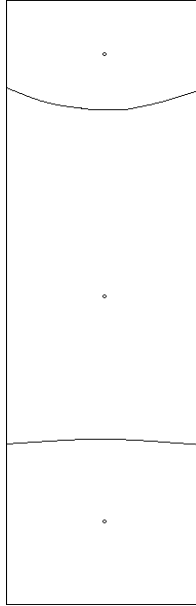
**Модельная задача 1.4б** ( $c(x, y, \tau_i)$  – манхэттенская метрика).

Рассмотрим задачу с такими же исходными данными, как модельная задача 1.4а, за исключением вида функции  $c(x, y, \tau_i)$ . Стоимость транспортировки единицы продукции каждого вида из  $i$ -го предприятия к потребителю с координатами  $(x, y)$  в задаче 1.4б возьмем в виде  $c(x, y, \tau_i) = |x - \tau_i^{(1)}| + |y - \tau_i^{(2)}|$ .

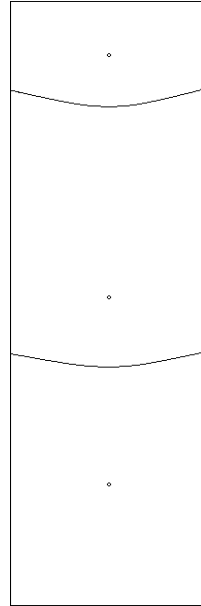




**Рис. 1.17. Оптимальное разбиение по 1-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.4а**



**Рис. 1.18. Оптимальное разбиение по 2-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.4а**



**Рис. 1.19. Оптимальное разбиение по 3-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.4а**

При решении задачи 1.4б алгоритмом 1.3 за 141 итерацию получено глобальное оптимальное решение в виде:

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\tau_1^* = (3,0; 10,1), \tau_2^* = (3,0; 4,0), \tau_5^* = (3,0; 3,0);$$

$$\tau_6^* = (2,0; 18,2), \tau_8^* = (2,9; 18,0), \tau_9^* = (3,1; 17,0);$$

– оптимальное разбиение множества  $\Omega$ : по 1-му продукту см. рис. 1.20, по 2-му – рис. 1.21, по 3-му – рис. 1.22;

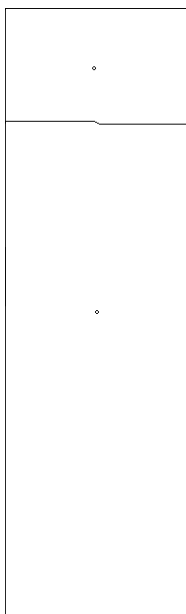
– минимальное значение прямого функционала  $I^* \sim 1436,05$ ;

– максимальное значение двойственного функционала  $G^* \sim 1432,35$ .

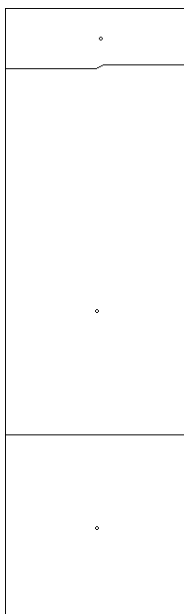
**Модельная задача 1.4в** ( $c(x, y, \tau_i)$  – метрика Чебышева).

Рассмотрим задачу с такими же исходными данными, как модельная задача 1.4а, за исключением вида функции  $c(x, y, \tau_i)$ . Стоимость транспортировки единицы продукции каждого вида из  $i$ -го предприятия к потреби-

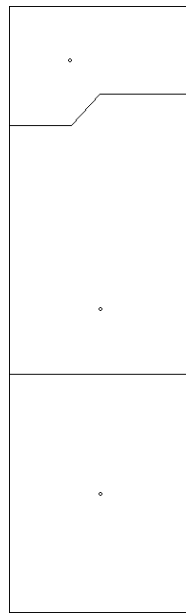
телю с координатами  $(x, y)$  в задаче 1.4в – в виде  $c(x, y, \tau_i) = \max \{|x - \tau_i^{(1)}|, |y - \tau_i^{(2)}|\}$ .



**Рис. 1.20. Оптимальное разбиение по 1-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.4б**



**Рис. 1.21. Оптимальное разбиение по 2-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.4б**



**Рис. 1.22. Оптимальное разбиение по 3-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.4б**

При решении задачи 1.4в алгоритмом 1.3 за 162 итерации получено глобальное оптимальное решение в виде:

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

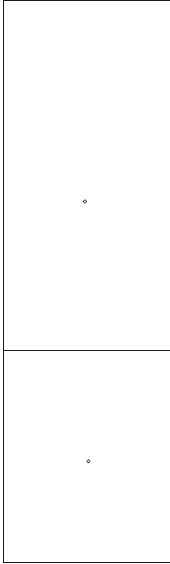
$$\tau_1^* = (2,9; 12,9), \tau_2^* = (3,1; 4,2), \tau_5^* = (3,0; 3,8);$$

$$\tau_6^* = (2,5; 18,5), \tau_8^* = (3,0; 19,1), \tau_9^* = (2,8; 3,7);$$

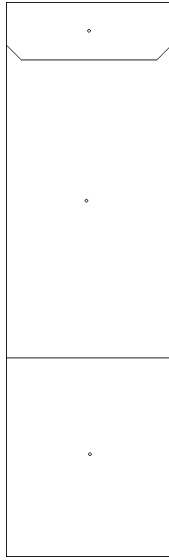
– оптимальное разбиение множества  $\Omega$ : по 1-му продукту см. рис. 1.23, по 2-му – рис. 1.24, по 3-му – рис. 1.25;

– минимальное значение прямого функционала  $I^* \sim 795,32$ ;

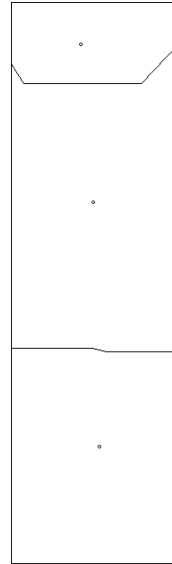
– максимальное значение двойственного функционала  $G^* \sim 793,8$ .



**Рис. 1.23. Оптимальное разбиение по 1-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.4в**



**Рис. 1.24. Оптимальное разбиение по 2-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.4в**



**Рис. 1.25. Оптимальное разбиение по 3-му продукту с размещением центров для модельной задачи 1.4в**

**Модельная задача 1.5 к п. 1.3.3.1** (иллюстрация работы алгоритма 1.7 решения линейной многопродуктовой задачи **A8** оптимального разбиения множества на подмножества с размещением их центров при ограничениях в форме равенств и неравенств, а также дополнительных ограничений).

Потребитель некоторой продукции 2 видов, производимой 5 предприятиями, непрерывно распределен в области

$$\Omega = (x, y) : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 10 .$$

Для каждого  $i$ -го предприятия,  $i = \overline{1, 5}$ , задана функция  $c(x, y, \tau_i) = \sqrt{x - \tau_i^{(1)} \quad ^2 + y - \tau_i^{(2)} \quad ^2}$ , одна и та же для всех  $j = 1, 2$ , описывающая стоимость транспортировки единицы продукции  $j$ -го вида из  $i$ -го предприятия к потребителю с координатами  $(x, y)$ . Известен спрос  $\rho^j(x, y)$  на продукцию  $j$ -го вида для каждого пункта потребления с координатами  $(x, y)$ . Полагается  $\rho^j(x, y) \equiv 1, j = 1, 2, \forall x \in \Omega$ .

Стоимости  $a_1^j$  производства единицы  $j$ -го вида продукции на  $i$ -м предприятии соответственно равны:

$$\begin{aligned} a_1^1 = 100, a_2^1 = 100, a_3^1 = 100, a_4^1 = 1, a_5^1 = 1; \\ a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, a_3^2 = 1, a_4^2 = 100, a_5^2 = 100. \end{aligned}$$

Множество потребителей  $\Omega$  нужно разбить на зоны обслуживания  $\Omega_i^j$  потребителей  $i$ -м пунктом производства по  $j$ -му продукту так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^5 \Omega_i^j = \Omega, \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j)_{i \neq k} = 0, i = 1, \dots, 5, j = 1, 2, \quad (1.3.134)$$

причем мощность  $i$ -го предприятия,  $i = 1, \dots, 5$ , по всем видам продукции определяется суммарным спросом потребителей, принадлежащих  $\Omega_i^j$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , и для пунктов с номерами 1, 2, 4 и 5 не должна превышать заданных объемов, а для пункта 3 должна быть равна заданному объёму:

$$\sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, i = 1, 2, 4, 5, b_1 = b_2 = b_4 = 50, b_5 = 20, \quad (1.3.135)$$

$$\sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, i = 3, b_3 = 20. \quad (1.3.136)$$

Ограничены также суммарные транспортные расходы на доставку продукции из  $i$ -го предприятия:

$$\sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) c^j(x, y, \tau_i) dx dy \leq l_i, i = 1, \dots, 5,$$

$$l_1 = 25, l_2 = 140, l_3 = 50, l_4 = 80, l_5 = 25. \quad (1.3.137)$$

Требуется разбить множество потребителей  $\Omega$  на зоны обслуживания  $\Omega_i^j$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ,  $j = 1, 2, 5$  предприятиями, и разместить эти предприятия в области  $\Omega$  так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее к потребителю:

$$F \{ \Omega_1^1, \dots, \Omega_5^2 \}, \{ \tau_1, \dots, \tau_5 \} = \sum_{j=1}^5 \iint_{\Omega_i^j} c^j(x, y, \tau_i) + a_i^j \rho^j(x, y) dx dy \quad (1.3.138)$$

при условиях (1.3.134)–(1.3.138).

Для решения сформулированной задачи с помощью описанного выше алгоритма область  $\Omega$  покрывалась прямоугольной сеткой с узлами  $(i, j)$ ,  $i = 1, \dots, 50$ ,  $j = 1, \dots, 50$ . В качестве начальных данных были выбраны начальные значения двойственных переменных:  $\psi_i^{(0)} = 0$ ,  $\xi_i^{(0)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .

Заданы начальные значения координат расположения предприятий

$$\tau_i = \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)} = (0; 0), i = 1, \dots, 5.$$

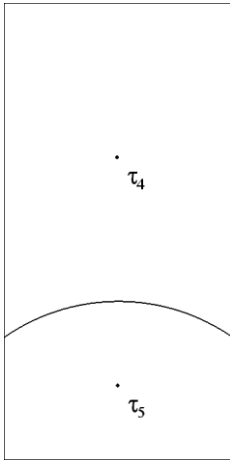
Условием прекращения счета являлось выполнение неравенства:

$$\left\| \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)} - \tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

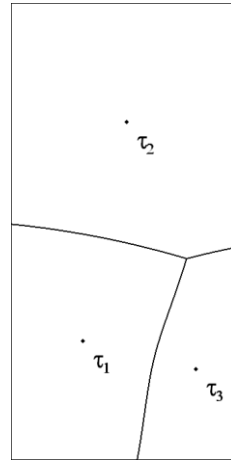
где  $k$  – номер итерации алгоритма, на которой произошел останов,  $\varepsilon = 10^{-4}$  – точность вычислений  $r$ -алгоритмом Шора.

В результате работы алгоритма за 186 итераций получено:

– оптимальное разбиение множества  $\Omega$  для задачи 1.5, см. рис. 1.26, 1.27;



**Рис. 1.26. Оптимальное разбиение по 1-му продукту с размещением центров при дополнительных ограничениях для модельной задачи 1.5**



**Рис. 1.27. Оптимальное разбиение по 2-му продукту с размещением центров при дополнительных ограничениях для модельной задачи 1.5**

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\tau_1^{(0)} = (1.59, 2.59), \tau_2^{(0)} = (2.55, 7.37),$$

$$\tau_3^{(0)} = (4.07, 1.98), \tau_4^{(0)} = (2.50, 6.61), \tau_5^{(0)} = (2.51, 1.63);$$

– минимальное значение прямого функционала:  $F_* \approx 289.02$ ;

– максимальное значение двойственного функционала  $G^* \approx 289.14$ .

Чтобы показать влияние на получаемый результат дополнительных ограничений, приведём решение модельной задачи 1.5, но без учёта ограничений на пропускные способности коммуникации.

Получены следующие результаты за 253 итерации:

– оптимальное разбиение, изображенное на рис. 1.28, 1.29 по первому и второму продуктам соответственно;

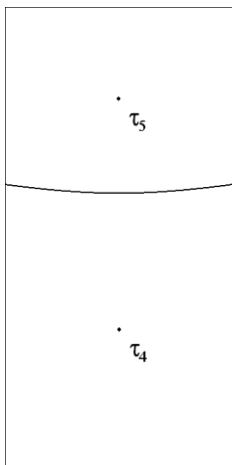


Рис. 1.28. Оптимальное разбиение по 1-му продукту с размещением центров без дополнительных ограничений для модельной задачи 1.5

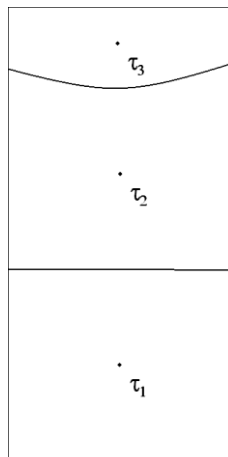


Рис. 1.29. Оптимальное разбиение по 2-му продукту с размещением центров без дополнительных ограничений для модельной задачи 1.5

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\tau_1^{(0)} = (2.50, 2.11), \quad \tau_2^{(0)} = (2.51, 6.30),$$

$$\tau_3^{(0)} = (2.45, 9.18), \quad \tau_4^{(0)} = (2.50, 3.00), \quad \tau_5^{(0)} = (2.50, 8.00);$$

– минимальное значение прямого функционала:  $F_* \approx 282.72$ ;

– максимальное значение двойственного функционала  $G^* \approx 282.73$ .

### 1.3.4.3. Решение модельных линейных однопродуктовых задач оптимального разбиения множеств без ограничений с отысканием координат центров подмножеств

**Модельная задача 1.6** (иллюстрация алгоритма решения линейной однопродуктовой задачи **A1** оптимального разбиения множеств без ограничений с отысканием координат центров подмножеств).

Приведём здесь иллюстрацию алгоритма 1.5, адаптированного для задачи **A1**, являющейся частным случаем задачи **A4** из п. 1.3.2.2.

На рис. 1.30 изображены глобальные оптимальные разбиения единичного квадрата из  $E_2$  при  $s(x, y, \tau_i)$  – евклидовой метрикой,  $\rho(x) \equiv \text{const}, \forall x \in \Omega$ .

Численные эксперименты проводились либо из начала координат, либо из случайного начального расположения центров подмножеств.

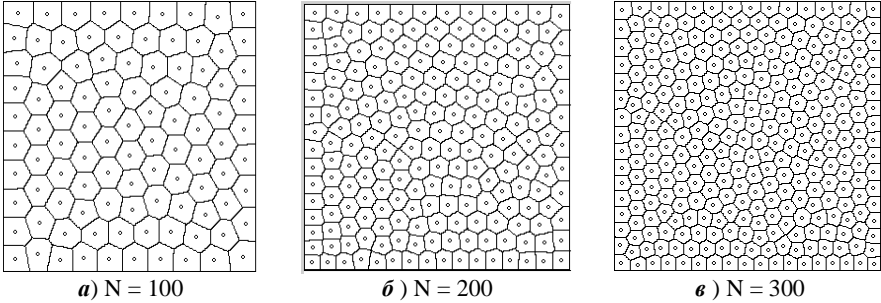


Рис. 1.30. Оптимальное разбиение для евклидовой метрики, полученное алгоритмом 1.5

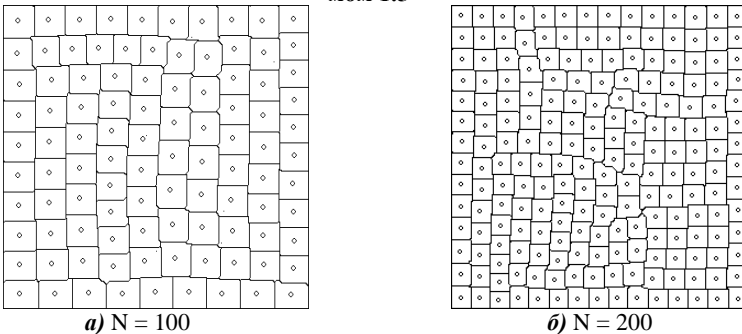
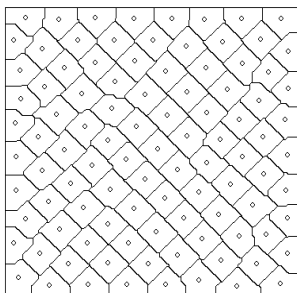


Рис. 1.31. Оптимальные разбиения в случае метрики Чебышева, полученные алгоритмом 1.5

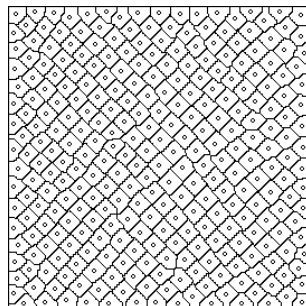
Заметим, что задачу **A1** можно решать алгоритмом, описанным для самой общей линейной задачи **A8** при ограничениях с размещением произведя предварительно некоторые упрощения.

На рис. 1.31 изображены глобальные оптимальные разбиения единичного квадрата из  $E_2$  при  $s(x, y, \tau_i)$  – метрика Чебышева, для  $N = 100, N = 200$ .

На рис. 1.32 изображены глобальные оптимальные разбиения единичного квадрата из  $E_2$  при  $s(x, y, \tau_i)$  – манхэттенская метрика, для  $N = 100, N = 300$ .



а)  $N = 100$



б)  $N = 300$

Рис. 1.32. Оптимальное разбиение для манхэттенской метрики, полученные алгоритмом 1.5

**Замечание 1.9.** Заметим, что алгоритмы решения непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств, описанные в разделе 1.3 главы 1:

- не зависят от размерности пространства  $E_n$  (вопрос сводится лишь к вычислению многомерных интегралов);
- независят от геометрии разбиваемых множеств;
- благодаря высокому быстродействию  $r$ -алгоритма Н.З. Шора применимы для задач оптимального разбиения множеств больших размерностей ( $N=100, 200, 300$  и т.д.).



# Глава 2

## МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ $n$ -МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА $E_n$ НА ПОДМНОЖЕСТВА

В отличие от линейных задач ОРМ, рассмотренных в разделе 1.3, для которых оптимальное решение исходной бесконечномерной задачи удастся найти в явном виде, в нелинейном случае отыскание оптимального решения исходной бесконечномерной задачи сводится к отысканию решения некоторого вспомогательного операторного уравнения с параметрами.

В данной главе приведено теоретическое обоснование методов решения нелинейных задач ОРМ с неизвестным заранее расположением центров подмножеств, координаты которых отыскиваются в процессе решения исходной задачи [47, 62].

На основе предложенных методов разработаны алгоритмы, составной частью которых является модификация  $g$ -алгоритма Н. З. Шора. Приведены результаты реализации разработанного алгоритма для некоторых модельных задач.

### *2.1. НЕЛИНЕЙНАЯ ОДНОПРОДУКТОВАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С РАЗМЕЩЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ПОДМНОЖЕСТВ ДЛЯ СЛУЧАЯ ВЫПУКЛОГО ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА*

Данный раздел посвящен дальнейшему развитию теории непрерывных задач ОРМ для случая непрерывных нелинейных однопродуктовых задач оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств при ограничениях в виде равенств и неравенств с выпуклым целевым функционалом.

### 2.1.1. Постановка задачи

Приведём математическую постановку непрерывной нелинейной однопродуктовой задачи оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  этих подмножеств соответственно.

#### Задача А10

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i \left( \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \right) + \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx \right]$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ .

Здесь функции  $c(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ;  $\rho(x)$  – ограниченная, измеримая, неотрицательная на  $\Omega$  функция;  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i=1, \dots, N$  – действительные, ограниченные, выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента;  $b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Перепишем задачу А10 в терминах характеристических функций  $\lambda_i(x)$  подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , в следующем виде.

#### Задача В10. Найти

$$\min_{\lambda, \tau \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I \lambda, \tau,$$

где  $\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}$

$$\int_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N; \tau \in \Omega^N,$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}.$$

Здесь

$$I(\lambda, \tau) = \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x)\lambda_i(x)dx \right]. \quad (2.1.1)$$

От задачи **В10** с булевыми значениями переменных  $\lambda_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , перейдём к соответствующей задаче со значениями  $\lambda_i(\cdot)$  из отрезка  $[0,1]$ , т. е. рассмотрим следующую задачу.

**Задача В10.1.** Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma' \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma' = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Как доказано в [65],  $\Gamma_2$  – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства  $L_2^N(\Omega)$  с нормой

$$\| \lambda(\cdot) \| = \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [\lambda_i(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Тогда, согласно [22], множество  $\Gamma_2$  слабо компактно в гильбертовом пространстве  $L_2^N(\Omega)$ .

Очевидно,

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \min_{(\lambda, \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left( \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2} I(\lambda(\cdot), \tau) \right). \quad (2.1.2)$$

Изучим сначала свойства функционала  $I(\lambda(\cdot), \tau)$  из (2.1.1).

Обозначая  $f_i(\lambda_i(\cdot)) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx$ , перепишем функционал (2.1.1) в

виде:

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \sum_{i=1}^N [\varphi_i(f_i(\lambda_i(\cdot))) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx]. \quad (2.1.3)$$

Имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 2.1.** Если функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , выпуклые функции своего аргумента, то при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  функционал  $I(\lambda(\cdot), \tau)$  из (4) выпуклый по  $\lambda(\cdot)$  на  $L_2^N(\Omega)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из выпуклости функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в области определения, линейности функционалов  $f_i(\lambda_i(\cdot)) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx$ ,  $i = 1, \dots, N$ , на  $L_2(\Omega)$  и свойств сложных функций следует, что функционалы  $\varphi_i f_i(\lambda_i(\cdot))$ ,  $i = 1, \dots, N$ , будут выпуклы по  $\lambda_i(\cdot)$  на  $L_2(\Omega)$ .

Пусть  $\lambda^1(x)$ ,  $\lambda^2(x) \in L_2^N(\Omega)$  п. в. для  $x \in \Omega$ . Возьмем  $\lambda^\alpha(x) = \alpha \lambda^1(x) + (1-\alpha) \lambda^2(x)$  п. в. для  $x \in \Omega$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Очевидно, что  $\lambda^\alpha(\cdot) \in L_2^N(\Omega)$ . Для функционала  $I \lambda^\alpha(\cdot), \tau$  при фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  имеем:

$$\begin{aligned} I \lambda^\alpha(\cdot), \tau &= \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i f_i(\lambda_i^\alpha(\cdot)) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^\alpha(x) dx \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i f_i(\alpha \lambda_i^1(\cdot) + (1-\alpha) \lambda_i^2(\cdot)) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) (\alpha \lambda_i^1(x) + (1-\alpha) \lambda_i^2(x)) dx \right] \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left[ \alpha \varphi_i f_i(\lambda_i^1(\cdot)) + (1-\alpha) \varphi_i f_i(\lambda_i^2(\cdot)) + \alpha \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^1(x) dx + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + (1 - \alpha) \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^2(x) dx \right] = \\
 & = \alpha \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i f_i(\lambda_i^1(\cdot)) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^1(x) dx \right] + \\
 & + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i f_i(\lambda_i^2(\cdot)) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^2(x) dx \right] = \\
 & = \alpha \cdot I \lambda^1(\cdot), \tau + (1 - \alpha) \cdot I \lambda^2(\cdot), \tau .
 \end{aligned}$$

Утверждение 2.1 доказано.

**Замечание 2.1.** Из выпуклости функционала  $I \lambda(\cdot), \tau$  по  $\lambda(\cdot)$  на  $L_2^N(\Omega)$  следует его непрерывность по  $\lambda(\cdot)$  на  $L_2^N(\Omega)$ , [40].

**Теорема 2.1.** Внутренняя задача из (2.1.2) имеет решение при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$ .

**Доказательство.** Действительно, из обобщенной теоремы Вейерштрасса [22] следует, что непрерывный выпуклый по  $\lambda(\cdot)$  функционал  $I \lambda(\cdot), \tau$  из (2.1.2), определенный на гильбертовом пространстве  $L_2^N(\Omega)$ , достигает при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  своего минимума по  $\lambda(\cdot)$  на любом выпуклом, замкнутом, ограниченном множестве (в нашем случае на множестве  $\Gamma_2$ ).

Теорема 2.1 доказана.

Таким образом, как следует из утверждения 2.1 и теоремы 2.1, при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  внутренняя задача из (2.1.2) глобально разрешима относительно  $\lambda(\cdot)$  на множестве  $\Gamma_2$ .

**Замечание 2.2.** Условия теоремы 2.1 могут быть ослаблены, т. к. не только выпуклые непрерывные функционалы будут достигать на  $\Gamma_2$  своей нижней грани. Таким же свойством обладают непрерывные снизу (слабо полунепрерывные снизу) функционалы.

Действительно, как уже отмечалось выше, ограниченное, замкнутое, выпуклое множество в гильбертовом пространстве  $L_2^N(\Omega)$  слабо компактно. По обобщенной теореме Вейерштрасса [22] полунепрерывный снизу по  $\lambda(\cdot)$  (слабо полунепрерывный снизу по  $\lambda(\cdot)$ ) функционал  $I \lambda(\cdot), \tau$  на слабо компактном множестве  $\Gamma_2$  гильбертова пространства

$L_2^N(\Omega)$  ограничен снизу и достигает на этом множестве своей нижней грани по  $\lambda(\cdot)$  при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$ .

### 2.1.2. Обоснование метода решения задачи

Введем для задачи **V10.1** функционал Лагранжа следующим образом:

$$\begin{aligned}
 h \lambda(\cdot), \tau, \psi &= I \lambda(\cdot), \tau + \sum_{i=1}^N \psi_i \left[ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) + \psi_i \rho(x) \lambda_i(x) dx \right] - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i, \quad (2.1.4)
 \end{aligned}$$

где  $\psi = (\psi_1 \dots \psi_N)$  – N-мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты  $\psi_1 \dots \psi_p$  произвольны по знаку, а  $\psi_{p+1} \dots \psi_N$  – неотрицательны;  $\lambda(x) \in \Gamma'$  для  $x \in \Omega$ ;  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Omega^N$ .

Пару элементов  $\lambda_*(\cdot), \tau_*, \psi^*$  назовем седловой точкой функционала (2.1.4) на множестве  $\Gamma' \times \Omega^N \times \Lambda$ , где

$$\Lambda = \psi = \psi_1 \dots \psi_N \in E_N : \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N,$$

если

$$h \lambda_*(\cdot), \tau_*, \psi \leq h \lambda_*(\cdot), \tau_*, \psi^* \leq h \lambda(\cdot), \tau, \psi^*$$

$$\text{для всех } \lambda(x) \in \Gamma', \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda,$$

или

$$h \lambda_*(\cdot), \tau_*, \psi^* =$$

$$= \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} h \lambda(\cdot), \tau, \psi = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} \max_{\psi \in \Lambda} h \lambda(\cdot), \tau, \psi.$$

Не останавливаясь пока на исследовании вопроса о существовании седловой точки, перейдем к решению задачи:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} h \lambda(\cdot), \tau, \psi.$$

Обозначим

$$G(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} h \lambda(\cdot), \tau, \psi, \psi \in \Lambda.$$

Задача двойственная к задаче С имеет вид:

$$G(\psi) \rightarrow \max, \psi \in \Lambda. \quad (2.1.5)$$

Для отыскания  $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} h \lambda(\cdot), \tau, \psi$  перейдем к следующей задаче:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} h \lambda(\cdot), \tau, \psi \text{ при } \psi \in \Lambda. \quad (2.1.6)$$

**Утверждение 2.2.** При каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  функционал  $h \lambda(\cdot), \tau, \psi$  из (2.1.6), определяемый по формуле (2.1.4), будет выпуклым по  $\lambda(\cdot)$  на  $L_2^N(\Omega)$ , если  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – выпуклые функции своего аргумента.

Доказательство утверждения 2.2 аналогично доказательству утверждения 2.1.

**Утверждение 2.3.** По аналогии с теоремой 2.1, легко доказать, что при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  минимум по  $\lambda(\cdot)$  функционала  $h \lambda(\cdot), \tau, \psi$  достигается на симплексе  $\Gamma'$ .

Таким образом, внутренняя задача в (2.1.6) глобально разрешима по  $\lambda(\cdot)$  на  $\Gamma'$ .

Обозначим в (2.1.6)

$$G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda \in \Gamma'} h \lambda \cdot, \tau, \psi, \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda. \quad (2.1.7)$$

То есть дальше вместо двойственной задачи (2.1.5), учитывая (2.1.6), (2.1.7), перейдем к решению следующей задачи:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi).$$

Для этого сначала конкретизируем выражение  $G_1(\tau, \psi)$  из (2.1.7).

Подставляя в (2.1.7) выражение для  $h \lambda(\cdot), \tau, \psi$  из (2.1.4), получаем:

$$G_1(\tau, \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) + \psi_i \rho(x) \lambda_i(x) dx \right], \quad (2.1.8)$$

$$\tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda.$$

Обозначим в (2.1.8)

$$\Phi_i \lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i = \varphi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) + \psi_i \rho(x) \lambda_i(x) dx$$

и рассмотрим задачу

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi, \quad \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda,$$

где

$$\Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i \lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i. \quad (2.1.9)$$

Очевидно, что при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  для функционала  $\Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi$  из (2.1.9) имеют место утверждения, аналогичные утверждениям 2.2 и 2.3, т. е. функционал  $\Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi$  из (2.1.9), будет выпуклым по  $\lambda(\cdot)$  на  $L_2^N(\Omega)$ , если  $\phi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – выпуклые функции своего аргумента, и минимум по  $\lambda(\cdot)$  функционала  $\Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi$  достигается на множестве  $\Gamma'$ .

Обозначим через  $\text{sgrad}_\lambda \Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi$  субградиент по  $\lambda(\cdot)$  выпуклого по  $\lambda(\cdot)$  при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  функционала  $\Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi$ .

Можно показать, что  $\text{sgrad}_\lambda \Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi$  при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \text{sgrad}_\lambda \Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi = \\ & = \Phi'_{\lambda_1} \lambda_1(\cdot), \tau_1, \psi_1, \dots, \Phi'_{\lambda_i} \lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i, \dots, \Phi'_{\lambda_N} \lambda_N(\cdot), \tau_N, \psi_N, \end{aligned}$$

где

$$\Phi'_{\lambda_i} \lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i = \phi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) \cdot \rho(x) + c(x, \tau_i) + \psi_i \rho(x),$$

$$i = 1, \dots, N,$$

здесь

$$Y_i = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (2.1.10)$$

Согласно [104], при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  необходимое и достаточное условие минимума по  $\lambda(\cdot)$  выпуклого по  $\lambda(\cdot)$  функционала  $\Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi$  на симплексе  $\Gamma'$  имеет вид:

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \int_{\Omega} \text{sgrad}_\lambda \Phi \lambda^*(\cdot), \tau, \psi, \lambda(x) - \lambda^*(x) dx = 0.$$

Перепишем полученное равенство в виде:



$$\int_{\Omega} \text{sgrad}_{\lambda} \Phi \lambda^*(\cdot), \tau, \psi, \lambda^*(x) dx = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \int_{\Omega} \text{sgrad}_{\lambda} \Phi \lambda^*(\cdot), \tau, \psi, \lambda(x) dx. \quad (2.1.11)$$

Предположим, что при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  для функционала  $\Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi$  из (2.1.9) по переменной  $\lambda(\cdot)$  выполняется условие, которое мы назовем, следуя [104], условием сильной регулярности, если

$$\Phi'_{\lambda_i} \lambda_i^*(\cdot), \tau_i, \psi_i = \varphi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \cdot \rho(x) + c(x, \tau_i) + \psi_i \rho(x) \neq 0,$$

$i = 1, \dots, N$ , за исключением множества точек  $x \in \Omega$  нулевой меры, или, в другой записи,

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : \left( c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) = 0 \right\} = 0, \quad (2.1.12)$$

где  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , имеет вид (2.1.10).

Условие сильной регулярности означает, что для оптимальной вектор-функции  $\lambda^*(x)$  ни на одном множестве точек  $x \in \Omega$  ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений Эйлера

$$\Phi'_{\lambda_i} \lambda_i^*(\cdot), \tau_i, \psi_i = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

для задачи минимизации без ограничений функционала  $\Phi \lambda(\cdot), \tau, \psi$  из (2.1.9).

Как следует из [65, 104], в случае выполнения условия сильной регулярности (2.1.12) вектор-функция  $\lambda^*(x)$ , доставляющая минимум линейному функционалу из правой части формулы (2.1.11), определяется при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  очевидным образом из следующего операторного уравнения:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \left( c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) > 0, \\ 1, & \text{если} \left( c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) < 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ [0, 1], & \text{если} \left( c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) = 0, \end{cases}$$

или с учетом (2.1.12) и того, что мера множества граничных точек подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , равна нулю, имеем:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_i) + \psi_i + \phi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \leq \\ & \leq c(x, \tau_k) + \psi_k + \phi'_{kY_k} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_k^*(x) dx \right), \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \text{ (другими словами,} \\ i = k \text{ только на множестве меры ноль,} & (2.1.13) \\ \text{т. е. в точках границы между} \\ \text{подмножествами } \Omega_i \text{ и } \Omega_k), i, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Учитывая обозначения (2.1.10), прибавляя и вычитая под знаком суммы в (2.1.8) выражение  $\phi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right)$ , перепишем  $G_1(\tau, \psi)$  из (2.1.8) в виде:

$$G_1(\tau, \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sum_{i=1}^N \left[ \left( \phi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx_i \right) - \phi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx_i \right) \cdot \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} \left( c(x, \tau_i) + \psi_i + \phi'_{iY_i} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) \right) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right] \quad (2.1.14)$$

$$\tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda.$$

Подставляя выражение для  $\lambda_i^*(x)$  из (2.1.13) в ту часть формулы (2.1.14), которая линейно зависит от  $\lambda(\cdot)$  и оставляя пока переменной величину  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , связанную с  $\lambda(\cdot)$  зависимостью (2.1.10), получаем (с учетом ограничений задачи В10.1) выражение для  $G_1(\tau, \psi)$  в следующем виде:

$$G_2(Y, \tau, \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{i=1}^N \left[ \phi_i Y_i - \phi'_{iY_i}(Y_i) \cdot Y_i + \right]$$

$$\left. + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} c(x, \tau_k) + \psi_k + \phi'_{kY_k}(Y_k) \rho(x) dx \right], \quad (2.1.15)$$

$$\tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda, Y \in U = Y = Y_1, \dots, Y_N \in E_N : 0 \leq Y_i \leq b_i, i=1, \dots, N .$$

Таким образом, конкретизируя выражение для  $G_1(\tau, \psi)$  из (2.1.7), мы двойственную задачу (2.1.5) привели к виду:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi). \quad (2.1.16)$$

Прежде чем сформулировать алгоритм решения задачи (2.1.16), остановимся на некоторых свойствах функции  $G_2(Y, \tau, \psi)$ , определяемой по формуле (2.1.15).

При каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  и каждом фиксированном  $Y \in U$  функция переменной  $\tau$  на  $\Omega^N$  обладает свойствами, установленными в [65]. То есть, вообще говоря, функция  $G_2(Y, \tau, \psi)$  из (2.1.15) при каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  и каждом фиксированном  $Y \in U$  является по  $\tau \in \Omega^N$  недифференцируемой, многоэкстремальной. Однако в некоторых частных случаях (см. [65]), вводя на множестве  $\Omega \subset E_n$  определенные отношения порядка между координатами точек  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , можно тем самым множество  $\Omega^N$  представить в виде объединения таких выпуклых подмножеств, каждое из которых будет определяться своим отношением порядка между координатами точек  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , и на каждом из таких выпуклых подмножеств множества  $\Omega^N$  функция  $G_2(Y, \tau, \psi)$  из (2.1.15) будет выпуклой по  $\tau$  и иметь по  $\tau$  точку локального минимума. Причем значения функции  $G_2(Y, \tau, \psi)$  при каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  и каждом фиксированном  $Y \in U$  в этих точках локальных минимумов будут совпадать. Следовательно, в этом случае задача отыскания  $\min_{\tau \in \Omega^N} G_2(Y, \tau, \psi)$  при каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  и каждом фиксированном  $Y \in U$  будет одноэкстремальной.

При каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  функция  $G_2(Y, \tau, \psi)$  из (2.1.15) по переменной  $Y$  будет вогнутой на выпуклом множестве  $U$ , если функции  $\phi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – выпуклые функции своего аргумента [105].

И, наконец, при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $Y \in U$  функция  $G_2(Y, \tau, \psi)$  из (2.1.15) по переменной  $\psi$  будет вогнутой недифференцируемой на множестве  $\Lambda$  [65].

Учитывая вышеизложенное и обобщая на случай задачи **V10.1** результаты, полученные в [65] для аналогичной непрерывной линейной однопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств, можно сделать вывод, что для задачи **V10.1** имеет место теорема Куна – Таккера в двойственной форме, т. е.  $I \lambda_*(\cdot), \tau_* = G(\psi^*)$ , где  $\lambda_*(\cdot), \tau_*$  – оптимальное решение задачи  $C$ ,  $\psi^*$  – оптимальное решение двойственной задачи (2.1.16), причем максимум в двойственной задаче (2.1.16) достигается.

Сформулируем теорему, подводящую итог вышеизложенным рассуждениям и обуславливающую переход от бесконечномерной задачи **V10.1** к поиску седловой точки функционала (2.1.4) посредством решения негладкой конечномерной задачи (2.1.16), к которой сведена двойственная задача (2.1.5).

**Теорема 2.2.** Пусть

- 1)  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента;
- 2) при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  имеет место условие сильной регулярности (2.1.12):

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : \left( c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_i Y_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) = 0 \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

тогда седловая точка  $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*$ , (где первая компонента  $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}$  является оптимальным решением задачи V10.1) функционала (2.1.4) на множестве  $\Gamma \times T_{\langle \tau_1, \dots, \tau_N \rangle}^j \times \Lambda$  (здесь  $T_{\langle \tau_1, \dots, \tau_N \rangle}^j$  – выпуклые подмножества множества  $\Omega^N$ , определяемые своим отношением порядка между координатами точек  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , на которых функция  $G_2(Y, \tau, \psi)$  из (2.1.15) – выпукла, и объединение которых составляет множество  $\Omega^N$ ) определяется для  $i = 1, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{*i} \text{ и } x \notin \Omega_{*q}, \quad q \leq i, \\ 0 & \text{при } x \notin \Omega_{*i}, \end{cases}$$

где

$$\Omega_{*i} = \left. \begin{aligned} & x \in \Omega : c(x, \tau_i^*) + \psi_i^* + \phi'_{iY_i}(Y_i^*) = \\ & = \min_{k=1, \dots, N} c(x, \tau_k^*) + \psi_k^* + \phi'_{kY_k}(Y_k^*) \text{ , } i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \end{aligned} \right\},$$

в качестве  $Y_1^*, \dots, Y_N^*$ ,  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ ,  $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (2.1.5), приведенной к виду

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi) = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} \left\{ - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \sum_{i=1}^N \left[ \phi_i(Y_i) - \phi'_{iY_i}(Y_i) \cdot Y_i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} c(x, \tau_k) + \psi_k + \phi'_{kY_k}(Y_k) \rho(x) dx \right] \right\} \rightarrow \max, \end{aligned}$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N.$$

**Утверждение 2.4.** При выполнении условия сильной регулярности (2.1.12) множества оптимальных решений задач **B10** и **B10.1** совпадают.

Доказательство утверждения 2.4 основано на справедливости следующих трёх утверждений 2.5–2.7.

**Утверждение 2.5.** При каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество  $\Gamma'$  гильбертова пространства  $L_2^N(\Omega)$  слабо компактно и (согласно теореме Крейна – Мильмана [40]) содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

**Утверждение 2.6.** Среди множества точек, в которых линейный относительно  $\lambda(\cdot)$  функционал

$$R(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \int_{\Omega} \text{sgrad}_{\lambda} \Phi \lambda^*(\cdot), \tau, \psi, \lambda(x) dx \quad (2.1.17)$$

достигает при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и каждом фиксированном  $\psi \in \Lambda$  минимума по  $\lambda(\cdot)$  на  $\Gamma'$ , найдется хотя бы одна крайняя точка симплекса  $\Gamma'$ .

**Утверждение 2.7.** Крайние точки симплекса  $\Gamma'$  представляют собой характеристические функции некоторых подмножеств  $\Omega_i$ , образующих при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и  $\psi \in \Lambda$  разбиение множества  $\Omega$ .

Таким образом, множества оптимальных решений задач **B10** и **B10.1** совпадают.

### 2.1.3. Алгоритм решения задачи

Приведем здесь алгоритм решения задачи **A10**, основанный на теореме 2.2.

Для отыскания оптимального решения задачи (2.1.16) будем использовать эвристический алгоритм обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к  $r$ -алгоритму Шора.

Для этого от задачи (2.1.16) введением в целевую функцию (2.1.15) негладких штрафных функций множеств  $\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N$ ,

$Y_i \geq 0, i = 1, \dots, N$ ,  $Y_i \leq b_i, i = 1, \dots, N$  перейдем к следующей задаче: найти

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in E^N} P(Y, \tau, \psi), \quad (2.1.18)$$

где

$$P(Y, \tau, \psi) = G_2(Y, \tau, \psi) - S_1 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\psi_i) - S_2 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, Y_i) - S_3 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, Y_i - b_i). \quad (2.1.19)$$

Здесь  $S_1, S_2, S_3$  – достаточно большие положительные числа, значительно большие максимальных из множителей Лагранжа для функции (2.1.15).

О возможности перехода от задачи (2.1.16) к задаче (2.1.18), (2.1.19) см. в [104, 107, 109].

Определим  $i$ -ю компоненту  $3 \cdot N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$g(Y, \tau, \psi) = \left( -g_p^Y(Y, \tau, \psi), g_p^\tau(Y, \tau, \psi), -g_p^\psi(Y, \tau, \psi) = \begin{pmatrix} -g_p^{Y_1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{Y_N}(Y, \tau, \psi); \\ g_p^{\tau_1}(Y, \tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(Y, \tau, \psi); -g_p^{\psi_1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{\psi_N}(Y, \tau, \psi) \end{pmatrix} \right)$$

функции (2.1.19) в точке  $Y, \tau, \psi = Y_1, \dots, Y_N; \tau_1, \dots, \tau_N; \psi_1, \dots, \psi_N$  следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} g_p^{Y_i}(Y, \tau, \psi) &= -\phi''_{iY_i Y_i}(Y_i) \cdot Y_i + S_2 \max 0, \text{sign}(-Y_i) - \\ &\quad - S_3 \max 0, \text{sign}(Y_i - b_i) , \\ &\text{если } i \neq k, \text{ где } k : \left[ c(x, \tau_k) + \psi_k + \phi'_{kY_k}(Y_k) \right] = \\ &\quad = \min_{l=1, N} \left[ c(x, \tau_l) + \psi_l + \phi'_{lY_l}(Y_l) \right], \\ g_p^{Y_k}(Y, \tau, \psi) &= -\phi''_{kY_k Y_k}(Y_k) \cdot Y_k + \phi''_{kY_k Y_k}(Y_k) \cdot \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_k(x) dx + \\ &\quad + S_2 \max \left[ \text{sign}(-Y_k) \right] S_3 \max \left[ \text{sign}(Y_k - b_k) \right] ; \\ &\quad i = 1, \dots, N; \end{aligned} \right. \quad (2.1.20)$$

$$g_c^{\tau_i}(Y, \tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \cdot g_c^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1.21)$$

где  $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$  –  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$  функции  $c(x, \tau_i)$ , в точке  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N$  при фиксированном  $x$ , имеющая вид:

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \text{-----} \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix};$$

$$g_p^{\psi_i}(Y, \tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S_1 \max 0, \text{sign}(-\psi_i) , \quad (2.1.22)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

В формулах (2.1.20)–(2.1.22)  $\lambda_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , определяется следующим образом:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_i) + \psi_i + \phi'_{iY_i}(Y_i) = \\ & = \min_{k=1, N} \left[ c(x, \tau_k) + \psi_k + \phi'_{kY_k}(Y_k) \right], \\ & i \neq k \quad \text{п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.1.23)$$

Опишем алгоритм решения задачи **A10**.

**Алгоритм 2.1**

**Предварительный этап.** Область  $\Omega$  заключаем в  $n$ -мерный параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем  $\rho(x) = 0$  при  $x \in \Pi \setminus \Omega$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение

$Y, \tau, \psi = Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}$ . Вычисляем значение  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (2.1.23) при  $Y = Y^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$ . Вычисляем значение

$$g_p^Y Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \quad g_p^\tau Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \quad g_p^\psi Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}$$

в узлах сетки по формулам (2.1.20)-(2.1.22) при  $Y = Y^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ . Выбираем начальный пробный шаг  $h_0 > 0$  г-алгоритма Н. З. Шора.

**Первый шаг** алгоритма проводим по формулам

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= Y^{(0)} - h_0 g_p^Y Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \\ \tau^{(1)} &= P_{\Pi} \tau^{(0)} - h_0 g_p^\tau Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 g_p^\psi Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \end{aligned}$$

где  $P_{\Pi}$  – оператор проектирования на  $\Pi$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k, k = 1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получены определенные значения  $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$  в узлах сетки.

Опишем **(k+1)-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (2.1.23) при  $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}$ .

2. Вычисляем значения  $g_p Y, \tau, \psi$  по формулам (2.1.20)–(2.1.22) при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x), Y = Y^{(k)}, \tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$ .

3. Проводим (k+1)-й шаг г-алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к г-алгоритму Шора в Н-форме [81], итерационная формула которого имеет вид:

$$\begin{aligned} Y^{(k+1)} &= Y^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_p^Y Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}}{\sqrt{H_{k+1} g_p^Y Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, g_p^Y Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}}}, \\ \tau^{(k+1)} &= P_{\Pi} \left( \tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_p^\tau Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}}{\sqrt{H_{k+1} g_p^\tau Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, g_p^\tau Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}}} \right), \end{aligned}$$



$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_p^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{H_{k+1} g_p^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) \cdot g_p^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}},$$

где  $H_{k+1}$  – матрица растяжения пространства с коэффициентом  $\alpha$  (его целесообразно брать равным 3) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$$H_{k+1} = H_k + \left( \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{H_k \Delta_k \Delta_k},$$

$$\Delta_k = g_p^T(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_p^T(Y^{(k-1)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}),$$

(здесь  $T$  – одна из переменных  $Y, \tau$  или  $\psi$ ).

Если из-за округлений счета  $H_{k+1}$  перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаговый множитель  $h_k$  выбираем из условия минимума разности

$$[G_2(Y^{(k)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_2(Y^{(k-1)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k-1)})]$$

по направлению антипсевдоградиента  $-g(Y, \tau, \psi)$  в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$\| Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} - Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.1.24)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем  $Y_* = Y^{(l)}, \tau_* = \tau^{(l)}, \psi_* = \psi^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (2.1.24).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (2.1.19) при  $Y = Y^*, \tau = \tau^*, \psi = \psi^*$  и, для контроля правильности счета, по формуле:

$$I \lambda_*(\cdot), \tau_* = \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_{*i}) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \right].$$

Алгоритм 2.1 описан.

### 2.1.4. Решение модельных задач

Описанный алгоритм реализован для модельных бесконечномерных задач размещения в заданной области трех предприятий, производящих однородную продукцию для распределенного в этой области с заданной

плотностью потребителя, с ограничениями на мощности предприятий в виде равенств и неравенств.

### Модельная задача 2.1

Потребитель некоторой однородной продукции, производимой тремя предприятиями, непрерывно распределен в области  $\Omega = (x, y): 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$ . Заданы начальные координаты расположения предприятий  $\tau_i = \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)} = (0; 0)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Для каждого  $i$ -го предприятия,  $i = \overline{1, 3}$ , задана функция

$$c(x, y, \tau_i) = \sqrt{x - \tau_i^{(1)}{}^2 + y - \tau_i^{(2)}{}^2},$$

описывающая стоимость транспортировки единицы продукции из  $i$ -го предприятия к потребителю с координатами  $(x, y)$ . Известен спрос  $\rho(x, y)$  на продукцию для каждого пункта потребления с координатами  $(x, y)$ . Для простоты полагается  $\rho(x, y) \equiv 1, \forall x \in \Omega$ . Функции  $\varphi_i(Y_i)$ , описывающие зависимость стоимости производства продукции на  $i$ -м предприятии от его мощности, имеют вид:

$$\varphi_i(Y_i) = Y_i^3, \quad i = 1, 2, 3,$$

где мощность  $Y_i$   $i$ -го предприятия определяется по формуле:

$$Y_i = \iint_{\Omega_i} \rho(x, y) dx dy. \quad (2.1.25)$$

Множество потребителей  $\Omega$  можно разбивать на зоны обслуживания  $\Omega_i$  потребителей  $i$ -м пунктом производства так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^3 \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_k)_{i \neq k} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1.26)$$

причем мощность  $i$ -го предприятия,  $i = 1, 2, 3$ , определяется суммарным спросом потребителей, принадлежащих  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и не должна превышать заданных объемов:

$$0 \leq \iint_{\Omega_i} \rho(x, y) dx dy \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1.27)$$

$$b_1 = 90, \quad b_2 = 50, \quad b_3 = 35.$$

Требуется разбить множество потребителей  $\Omega$  на зоны обслуживания их тремя предприятиями, т. е. на подмножества  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и разместить эти предприятия в области  $\Omega$  так, чтобы минимизировать функционал

суммарных затрат на производство продукции и доставку ее к потребителю:

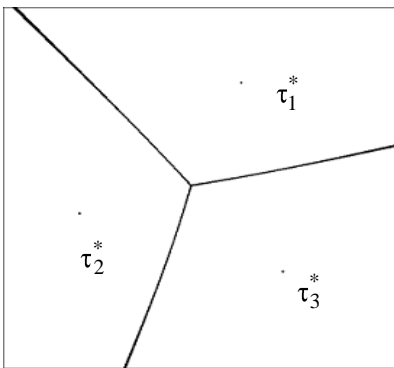
$$F \{ \Omega_1, \dots, \Omega_N \}, \{ \tau_1, \dots, \tau_N \} = \sum_{i=1}^3 \left[ \varphi_i \left( \iint_{\Omega_i} \rho(x, y) dx dy \right) + \iint_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x, y) dx dy \right] \quad (2.1.28)$$

при условиях (2.1.26)–(2.1.27).

Для решения сформулированной задачи с помощью описанного выше алгоритма область  $\Omega$  покрывалась прямоугольной сеткой с узлами  $(i, j)$ ,  $i = 1, \dots, 21$ ,  $j = 1, \dots, 21$ . В качестве начальных данных были выбраны начальные значения двойственных переменных:  $\psi_i^{(0)} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; начальные значения мощностей –  $Y_1^{(0)} = 1$ ,  $Y_2^{(0)} = 1$ ,  $Y_3^{(0)} = 10$ ; начальные координаты расположения предприятий –  $\tau_i^{(0)} = (0; 0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Условием прекращения счета являлось выполнение неравенства:

$$\left\| Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} - Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

где  $k$  – номер итерации алгоритма, на которой произошел останов,  $\varepsilon = 10^{-5}$  – точность вычислений г-алгоритмом Шора. Двойные интегралы, входящие в формулы (2.1.25), (2.1.26), (2.1.27), вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций.



**Рис. 2.1.** Оптимальное разбиение множества потребителей  $\Omega$  на зоны обслуживания каждым из трех предприятий с размещением центров подмножеств для модельной задачи 2.1

В результате работы описанным выше алгоритмом за 106 итераций получены следующие результаты:

– оптимальное разбиение множества потребителей  $\Omega$  на зоны обслуживания  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  каждым из трех предприятий соответственно, см. рис. 21.

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\tau_1^* = (6,05; 7,91), \quad \tau_2^* = (1,94; 4,29), \quad \tau_3^* = (7,11; 2,68);$$

– оптимальные мощности каждого из предприятий:

$$Y_1^* = 33,33; \quad Y_2^* = 33,34; \quad Y_3^* = 33,33;$$

- минимальное значение прямого функционала (2.1.28):  $F_* \approx 111\,363,8$ ;
- максимальное значение функционала двойственной задачи  $G^* \approx 111348,5$ .

### Модельная задача 2.2

Исходные данные те же, что и в модельной задаче 2.1, за исключением ограничений на мощности предприятий. Мощность первого предприятия должна быть равна заданному объему, а мощности второго и третьего предприятия не должны превышать заданных объемов:

$$Y_1 = 90, \quad 0 \leq Y_2 \leq 50, \quad 0 \leq Y_3 \leq 35.$$

В результате работы алгоритма за 461 итерацию с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$  получены следующие результаты:

- оптимальное разбиение множества потребителей  $\Omega$  на три зоны обслуживания каждым из трех предприятий соответственно, см. рис. 2.2;

- оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\tau_1^* = (5,00; 5,00),$$

$$\tau_2^* = (1,10; 8,92),$$

$$\tau_3^* = (8,98; 1,07);$$

- оптимальные мощности каждого из трех предприятий:

$$Y_1^* = 90,00; \quad Y_2^* = 4,99; \quad Y_3^* = 4,99;$$

- минимальное значение прямого функционала (2.1.28):

$$F_* \approx 729\,571,1;$$

- максимальное значение функционала двойственной задачи  $G^* \approx 729\,585,9$ .

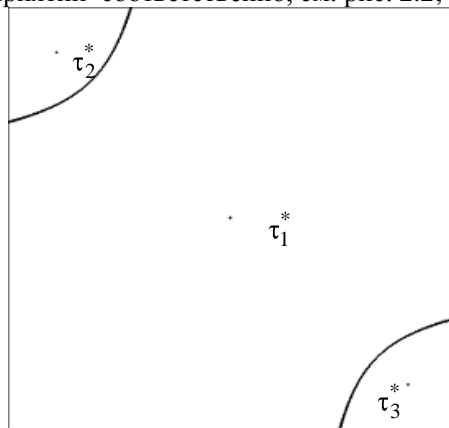


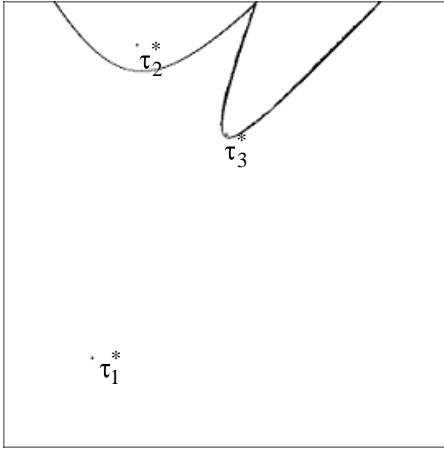
Рис. 2.2. Оптимальное разбиение множества потребителей  $\Omega$  на зоны обслуживания каждым из трех предприятий с размещением центров подмножеств для модельной задачи 2.2

### Модельная задача 2.3

Для сравнения с модельной задачей 2.2 решена задача с теми же данными, только при заданных заранее, фиксированных координатах предприятий:

$$\tau_1^{(0)} = (2; 2), \quad \tau_2^{(0)} = (3; 9), \quad \tau_3^{(0)} = (5; 7);$$

Получены следующие результаты за 136 итераций:



**Рис. 2.3.** Оптимальное разбиение множества потребителей  $\Omega$  на зоны обслуживания каждым из трех предприятий без размещения центров подмножеств для модельной задачи 2.3

- оптимальное разбиение множества потребителей  $\Omega$  на три зоны обслуживания каждым из трех предприятий соответственно, см. рис. 2.3;
- оптимальные мощности каждого из трех предприятий:

$$Y_1^* = 90,00;$$

$$Y_2^* = 5,00;$$

$$Y_3^* = 5,00;$$

- минимальное значение прямого функционала (2.1.28):  
 $F_* \approx 729720,8;$
- максимальное значение функционала двойственной задачи  
 $G^* \approx 729723,2.$

Как видно из результатов решений модельных задач 2.1–2.3:

- 1) суммы оптимальных мощностей предприятий в каждой из задач равны суммарной мощности  $S = 100$  (см. постановку задачи **A10**, условия разрешимости);
- 2) оптимальная мощность первого предприятия в модельных задачах 2.2–2.3 соответствует ограничению в форме равенства и равна  $\approx 90$ ;
- 3) оптимальное значение целевого функционала прямой задачи при оптимальном размещении предприятий (модельная задача 2.2) меньше (что естественно), чем в случае, когда координаты предприятий фиксированы (модельная задача 2.3).

Численные эксперименты проводились так же для следующих ограниченных, выпуклых на  $[0; 100]$  функций  $\varphi_i(Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ :

– монотонно возрастающих на  $[0; 100]$ :

$$\varphi_1(Y_1) = Y_1^2; \quad \varphi_2(Y_1) = 0,5 \cdot Y_1^{3/2}; \quad \varphi_3(Y_1) = e^{(0,1 \cdot Y_1)}; \quad \varphi_4(Y_1) = Y_1^4;$$

– монотонно убывающей на  $[0; 100]$ :

$$\varphi_5(Y_1) = (Y_1 - 100)^2.$$

**Замечание 2.3.** По результатам многочисленных вычислительных экспериментов авторы пришли к выводу, что описанный алгоритм работает и

для случая, когда  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i=1, \dots, N$ , – ограниченные вогнутые функции своего аргумента. Для этого случая двойственная задача (2.1.5) приводится вместо вида (2.1.16) к следующему:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} \min_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi).$$

Численные эксперименты проводились, в частности, для таких ограниченных вогнутых на  $[0;100]$  функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i=1, \dots, 3$ :

– монотонно возрастающих на  $[0;100]$ :

$$\varphi_i(Y_i) = Y_i^{1/2}; \quad \varphi_i(Y_i) = Y_i^{3/2};$$

– монотонно убывающей на  $[0;100]$ :

$$\varphi_i(Y_i) = \cos\left(\frac{\pi \cdot Y_i}{200}\right).$$

## 2.2. НЕЛИНЕЙНАЯ МНОГОПРОДУКТОВАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С РАЗМЕЩЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ПОДМНОЖЕСТВ

В настоящем разделе рассматривается нелинейная непрерывная многопродуктовая задача ОРМ с размещением центров при ограничениях в виде равенств и неравенств, постановка которой, в сравнении с задачей из раздела 2.1, усложнена тем, что функции спроса и стоимости транспортировки единицы продукции от предприятия к потребителю задаются разными для разных видов продукции. Целью раздела является приведение и теоретическое обоснование метода решения поставленной задачи, разработка алгоритма решения и его программная реализация, а также иллюстрация этого алгоритма на нескольких модельных задачах.

### 2.2.1. Постановка задачи

**Задача А11.** Найти

$$\min_{\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^M, \tau_1, \dots, \tau_N} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\varphi_i^j(\int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx) + \int_{\Omega_i^j} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) dx].$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^M\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Здесь функции  $c^j(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по аргументу  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$ ,  $i = 1, \dots, N$ ; функции  $\rho^j(x)$  – действительные, ограниченные, измеримые и неотрицательные на  $\Omega$  для всех  $j = 1, \dots, M$ ; точка  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$  – центр, общий для подмножеств  $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$ ,  $i = 1, \dots, N$ , один и тот же для всех  $j = 1, \dots, M$ ;  $\varphi_i^j(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$  – действительные, ограниченные, выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента,  $b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2.1)$$

Введем характеристическую функцию подмножества  $\Omega_i^j$ :

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^j, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i^j, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

и рассмотрим функционал

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i^j \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right], \quad (2.2.2)$$

где вектор-функция  $\lambda(x)$  имеет вид:

$$\lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \dots; \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)).$$

Перепишем задачу **A11** в следующем виде.

**Задача В11.** Найти пару элементов  $(\lambda_*(x), \tau_*)$  ( $\lambda_*(x) \in \Gamma_1$  почти всюду (п. в.) для  $x \in \Omega$ ,  $\tau_* \in \Omega^N$ ), такую, что

$$I(\lambda_*(x), \tau_*) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

$\Gamma_1 = \lambda(x) : \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \dots; \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) \in \Gamma'_1$  п. в. для  $x \in \Omega$ ,

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

Где  $\Gamma'_1 = \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \dots; \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : \lambda_i^j(x) = 0 \vee 1$  п.в. для  $x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ ,

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M; \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

От бесконечномерной задачи **В11** с булевыми значениями переменных  $\lambda_i^j(\cdot), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , перейдем к соответствующей задаче со значениями  $\lambda_i^j(\cdot), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , из отрезка  $0, 1$ .

**Задача В11.1.** Найти пару элементов  $(\lambda_*(x), \tau_*)$ , где  $\lambda_*(x) \in \Gamma_2$ ,  $\tau_* \in \Omega^N$ , такую, что

$$I(\lambda_*(x), \tau_*) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

$\Gamma_2 = \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma$  п. в. для  $x \in \Omega$ ;

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

Тут

$\Gamma = \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \dots; \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1$   $x \in \Omega$ ,

$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ ,

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M.$$

### 2.2.2. Описание метода решения задачи

Для задачи **В11.1** введем функционал Лагранжа следующим образом:



$$h((\lambda(\cdot), \tau), \psi) = I(\lambda(\cdot), \tau) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i^j \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c^j(x, \tau_i) + \psi_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right], \quad (2.2.3)$$

где  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \Lambda$  – N-мерный вектор с действительными компонентами, причем  $\psi_1, \dots, \psi_p$  произвольны по знаку, а  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  – неотрицательны;  $\lambda(x) \in \Gamma$  для  $x \in \Omega$ ;  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ .

Пару элементов  $((\lambda_*(\cdot), \tau_*)^*)$  – назовем седловой точкой функционала (2.2.3) на множестве  $(\Gamma \times \Omega^N) \times \Lambda$ , где  $\Lambda = \{\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N : \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$ , если

$$h((\lambda_*(\cdot), \tau_*)^*) \leq h((\lambda_*(\cdot), \tau_*)^*) \leq h((\lambda(\cdot), \tau), \psi^*) \quad (2.2.4)$$

для всех  $\lambda \in \Gamma, \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda$ ,

или 
$$h((\lambda_*(\cdot), \tau_*)^*) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \max_{\psi \in \Lambda} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi) = \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi) \quad (2.2.5)$$

Перейдем к решению задачи:

$$h((\lambda_*(\cdot), \tau_*)^*) = \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\lambda(\cdot), \tau), \psi \quad (2.2.6)$$

Обозначим  $G(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi), \psi \in \Lambda$ , тогда двойственной к задаче С будет задача

$$G \psi \rightarrow \max, \psi \in \Lambda. \quad (2.2.7)$$

По аналогии с работой [47], для нахождения  $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\lambda(\cdot), \tau), \psi$ , перейдем к следующей задаче:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi), \text{ при } \psi \in \Lambda. \quad (2.2.8)$$

Обозначим в (2.2.8)

$$G_1(\psi, \tau) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi), \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda, \quad (2.2.9)$$

тогда, учитывая в (2.2.9) выражение для  $h((\lambda(\cdot), \tau), \psi)$  из (2.2.3), получим:

$$G_1(\psi, \tau) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i +$$

$$+ \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \Phi_i^j \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c^j(x, \tau_i) + \psi_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right], \quad (2.2.10)$$

$$\tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda.$$

Обозначим в (2.2.10)

$$\Phi_i^j(\lambda_i^j(\cdot), \tau_i, \psi_i) = \Phi_i^j \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c^j(x, \tau_i) + \psi_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx$$

и рассмотрим задачу

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \Phi_i^j(\lambda_i^j(\cdot), \tau_i, \psi_i), \quad (2.2.11)$$

$$\tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda.$$

Согласно [47], функционал  $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$  – выпуклый по  $\lambda(\cdot)$  на  $L_2^{N \times M}(\Omega)$ , если  $\Phi_i^j(\cdot)$ ,  $i=1, \dots, N, j=1, \dots, M$  – выпуклые функции своего аргумента, и минимум по  $\lambda(\cdot)$  функционала  $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$  достигается на множестве  $\Gamma$ . В свою очередь, субградиент такого функционала при ка-ждых фиксированных  $\tau \in \Omega^N$  и  $\psi \in \Lambda$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{sgrad}_{\lambda} \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \\ = (\Phi'_{\lambda_1^1}(\lambda_1^1(\cdot), \tau_1, \psi_1), \dots, \Phi'_{\lambda_N^1}(\lambda_N^1(\cdot), \tau_N, \psi_N)); \dots; \\ \Phi'_{\lambda_1^M}(\lambda_1^M(\cdot), \tau_1, \psi_1), \dots, \Phi'_{\lambda_N^M}(\lambda_N^M(\cdot), \tau_N, \psi_N)), \end{aligned}$$

где

$$\Phi'_{\lambda_i^j}(\lambda_i^j(\cdot), \tau_i, \psi_i) = \Phi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) \cdot \rho^j(x) + (c^j(x, \tau_i) + \psi_i) \rho^j(x),$$

$$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M.$$

Для упрощения записи введем обозначение:

$$Y_i^j = \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M. \quad (2.2.12)$$

Согласно [104], необходимым и достаточным условием минимума по  $\lambda(\cdot)$  выпуклого по  $\lambda(\cdot)$  функционала  $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$  на  $\Gamma$  является условие

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int (\text{sgrad}_{\lambda} \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), (\lambda(x) - \lambda^*(x))) dx = 0,$$

которое еще можно записать в виде:

$$\int_{\Omega} (\text{sgrad}_{\lambda} \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), \lambda^*(x)) dx =$$

$$= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_{\Omega}} \int (\text{sgrad}_{\lambda} \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), \lambda(x)) dx. \quad (2.2.13)$$

Из [104] также известно, что если для оптимальной вектор-функции  $\lambda^*(\cdot)$  (задачи минимизации без ограничений функционала  $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$  из (2.2.11)) ни на одном множестве точек  $x \in \Omega$  ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений Эйлера

$$\Phi'_{\lambda_i^j}(\lambda_i^{*j}(\cdot), \tau_i, \psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

то для функционала  $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$  по переменной  $\lambda(\cdot)$ , при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и  $\psi \in \Lambda$ , выполняется условие сильной регулярности, которое еще можно записать так:

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : \left( c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^{*j}(x) dx \right) \right) \rho^j(x) = 0 \right\} = 0, \quad (2.2.14)$$

где  $Y_i^j$ , имеет вид (2.2.12).

Следуя [22, 65, 104], если условие сильной регулярности (2.2.14) выполняется, тогда вектор-функция  $\lambda^*(\cdot)$ , которая доставляет минимум линейному функционалу с правой части формулы (2.2.13), определяется при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и  $\psi \in \Lambda$  из следующего операторного уравнения:

$$\lambda_i^{*j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \left( c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^{*j}(x) dx \right) \right) \rho^j(x) > 0, \\ 1, & \text{если} \left( c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^{*j}(x) dx \right) \right) \rho^j(x) < 0, \\ [0, 1], & \text{если} \left( c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^{*j}(x) dx \right) \right) \rho^j(x) = 0, \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

а так как мера множества граничных точек подмножеств  $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , равна нулю, и учитывая (2.2.14), имеем:

$$\lambda_i^{*j}(x) = \begin{cases} 1, & c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^{*j}(x) dx \right) \leq \\ & \leq c^j(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_k^{*j}(x) dx \right), \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \text{ (другими словами,} & (2.2.15) \\ i = k \text{ только на множестве меры ноль,} & \\ \text{т. е. в точках границы между} & \\ \text{подмножествами } \Omega_i^j \text{ и } \Omega_k^j), i, k = 1, \dots, N, & \\ 0, \text{ в остальных случаях,} & \\ & j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

В выражении (2.2.10), под знаком суммы, прибавим и отнимем  $\varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right)$ , после чего получим:

$$\begin{aligned} G_1(\psi, \tau) = & - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i^j \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) - \right. \\ & \left. - \varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) \cdot \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx + \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} \left( c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) \right) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right] \\ & \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Учитывая выражение (2.2.15), перепишем выражение (2.2.16) в части, которая линейно зависит от  $\lambda_i^j(\cdot)$ , согласно ограничениям задачи **B11.1**, в виде:

$$\begin{aligned} G_2(\psi, \tau) = & - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i^j(Y_i^j) - \varphi'_{iY_i^j}(Y_i^j) \cdot Y_i^j + \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c^j(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k^j}(Y_k^j)) \rho^j(x) dx \right] \\ & \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda, \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

$$Y \in U = \left\{ Y = (Y_1^1, \dots, Y_N^1; \dots; Y_1^M, \dots, Y_N^M) \in E_{N \times M} : 0 \leq \sum_{j=1}^M Y_i^j \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Итак, задачу (2.2.7), двойственную к задаче **B11.1**, приведем к виду:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} \left( -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i^j(Y_i^j) - \varphi_{iY_i^j}^j(Y_i^j) \cdot Y_i^j + \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} (c^j(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k^j}(Y_k^j)) \rho^j(x) dx \right] \right) \rightarrow \max, \\ \psi \in \Lambda, \quad (2.2.18)$$

$$Y \in U = \left\{ Y = (Y_1^1, \dots, Y_N^1; \dots; Y_1^M, \dots, Y_N^M) \in E_{N \times M} : 0 \leq \sum_{j=1}^M Y_i^j \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Таким образом, если  $\varphi_i^j(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$  – выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента, и при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  и  $\psi \in \Lambda$  имеет место условие сильной регулярности:

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : \left( c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_{i}^{*j}(x) dx \right) \right) \rho^j(x) = 0 \right\} = 0,$$

$$\text{где } Y_i^j = \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_{i}^{*j}(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

тогда седловая точка  $((\lambda_{*}(\cdot), \tau_{*}), \psi^{*})$  (где первая компонента является оптимальным решением задачи **B11.1**) функционала (2.2.3) на множестве  $(\Gamma \times \Omega^N) \times \Lambda$  определяется для  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_{i}^{*j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega_{*i}^j \text{ и } x \notin \Omega_{*q}^j, \quad q \leq i, \\ 0, & \text{при } x \notin \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

где

$$\Omega_{*i}^j = \left\{ \begin{array}{l} x \in \Omega : c^j(x, \tau_i^{*}) + \psi_i^{*} + \varphi'_{iY_i^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_{i}^{*j}(x) dx \right) = \\ = \min_{k=1, \dots, N} (c^j(x, \tau_k^{*}) + \psi_k^{*} + \varphi'_{kY_k^j} \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_{k}^{*j}(x) dx \right)), \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M, \end{array} \right\} \quad (2.2.19)$$

а в качестве  $Y_1^*, \dots, Y_N^*, \tau_1^*, \dots, \tau_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (2.2.7), которая приведена к виду:

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} \left( -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \begin{aligned} &\phi_i^j(Y_i^j) - \phi'_{iY_i^j}(\cdot)(Y_i^j) \cdot Y_i^j + \\ &+ \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c^j(x, \tau_k) + \psi_k + \\ &+ \phi'_{kY_k^j}(\cdot)(Y_k^j)) \rho^j(x) dx \end{aligned} \right] \right) \rightarrow \max, \quad \psi \in \Lambda, \quad (2.2.20)$$

$$Y \in U = \left\{ Y = (Y_1^1, \dots, Y_N^1; \dots; Y_1^M, \dots, Y_N^M) \in E_{N \times M} : 0 \leq \sum_{j=1}^M Y_i^j \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

при условиях  $\psi_i \geq 0, i = p + 1, \dots, N.$  (2.2.21)

Поскольку, согласно [47], множества оптимальных решений задач **V11** и **V11.1** совпадают, перейдем к формулированию алгоритма решения задачи **V11**, используя формулы (2.2.19)–(2.2.21).

### 2.2.3. Алгоритм решения задачи

Для решения задачи (2.2.20), (2.2.21) используем эвристический алгоритм обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к  $g$ -алгоритму Шора [109]. Этот алгоритм описан в [47] для однопродуктовой задачи, а здесь он обобщен и применен для случая многопродуктовой задачи, см. [62].

От задачи (2.2.20), (2.2.21) перейдем к задаче безусловной оптимизации по  $\psi$  с помощью введения в целевую функцию (2.2.17) негладких штрафных функций множеств

$$\begin{aligned} &(\psi_i \geq 0, i = p + 1, \dots, N), \\ &(Y_i^j \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M), \\ &\left( \sum_{j=1}^M Y_i^j \leq b_i, i = 1, \dots, N \right): \end{aligned}$$

найти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in E_{N \times M}} P(Y, \tau, \psi), \quad (2.2.22)$$

где

$$\begin{aligned}
 P(Y, \tau, \psi) = & G_2(Y, \tau, \psi) - \\
 & -S_1 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) - S_2 \cdot \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \max(0, -Y_i^j) - \\
 & -S_3 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, \sum_{j=1}^M Y_i^j - b_i). \quad (2.2.23)
 \end{aligned}$$

Здесь  $S_1, S_2, S_3$  – достаточно большие положительные числа, значительно большие максимальных значений множителей Лагранжа для функции (2.2.17). Возможность перехода от задачи (2.2.20), (2.2.21) к (2.2.22), (2.2.23) рассматривается в [65, 107, 109].

Обобщенный псевдоградиент функции (2.2.23) в точке

$$(Y, \tau, \psi) = (Y_1^1, \dots, Y_N^1; \dots, Y_1^M, \dots, Y_N^M; \tau_1, \dots, \tau_N; \psi_1, \dots, \psi_N)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned}
 g_p(Y, \tau, \psi) = & (-g_p^Y(Y, \tau, \psi), g_p^\tau(Y, \tau, \psi), -g_p^\psi(Y, \tau, \psi)) = \\
 = & (-g_p^{Y_1^1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{Y_N^1}(Y, \tau, \psi); \dots; -g_p^{Y_1^M}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{Y_N^M}(Y, \tau, \psi); \\
 & g_p^{\tau_1}(Y, \tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(Y, \tau, \psi); -g_p^{\psi_1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{\psi_N}(Y, \tau, \psi)),
 \end{aligned}$$

а его компоненты определяются следующим образом:

– по  $Y_i^j$ :

$$\begin{aligned}
 g_p^{Y_i^j}(Y, \tau, \psi) = & -\varphi_{iY_i^j Y_i^j}^j(Y_i^j) \cdot Y_i^j + \varphi_{iY_i^j Y_i^j}^j(Y_i^j) \cdot \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx + \\
 & + S_2 \cdot \max(0, \text{sign}(-Y_i^j)) - S_3 \cdot \max(0, \text{sign}\left(\sum_{j=1}^M Y_i^j - b_i\right)), \quad (2.2.24)
 \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M;$$

– по  $\tau_i$ :

$$g_p^{\tau_i}(Y, \tau, \psi) = \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \rho^j(x) g_{c_j}^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2.25)$$

где  $g_{c_j}^{\tau_i}(x, \tau)$  –  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_{c_j}(x, \tau)$  функции  $c^j(x, \tau_i)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ , где  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  при фиксированном  $x$  имеет вид:

$$g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_{c^j}^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots\dots\dots \\ g_{c^j}^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}, j=1, \dots, M;$$

- по  $\Psi_i$ :

$$g_p^{\Psi_i}(Y, \tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, & i=1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S_1 \cdot \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i=p+1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.2.26)$$

В формулах (2.2.24) – (2.2.26)  $\lambda_i^j(x)$ ,  $i=1, \dots, N, j=1, \dots, M$  определяются следующим образом:

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \phi'_{iY_i^j}(Y_i^j) = \\ = \min_{k=1, N} (c^j(x, \tau_k) + \psi_k + \phi'_{kY_k^j}(Y_k^j)), & \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, & \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.2.27)$$

**Алгоритм 2.2.** Область  $\Omega$  заключаем в n-мерный параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат. Положим  $\rho^j(x) = 0$  при  $x \in \Pi \setminus \Omega$ ,  $j=1, \dots, M$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $(Y, \tau, \psi) = (Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ . Вычисляем значение  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (2.2.27) при  $Y = Y^{(0)}$ ,  $\tau = \tau^{(0)}$ ,  $\psi = \psi^{(0)}$ , а значение  $g_p^Y(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ ,  $g_p^\tau(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ ,  $g_p^\psi(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$  в узлах сетки по формулам (2.2.24)–(2.2.26) при  $Y = Y^{(0)}$ ,  $\tau = \tau^{(0)}$ ,  $\psi = \psi^{(0)}$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ . Выбираем начальный шаг  $h_0 > 0$  r-алгоритма.

**Первый шаг** алгоритма выполняем по формулам:

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} - h_0 g_p^Y(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}), \quad \tau^{(1)} = P_\Pi(\tau^{(0)} - h_0 g_p^\tau(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})), \\ \psi^{(1)} = \psi^{(0)} - h_0 g_p^\psi(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}),$$



где  $P_{\Pi}$  – оператор проектирования на  $\Pi$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , шагов алгоритма в узлах сетки получены значения  $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ .

Опишем **( $k+1$ )-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (2.2.27) при  $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}$ .

2. Вычисляем значения  $g_p(Y, \tau, \psi)$  по формулам (2.2.24)–(2.2.26) при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ ,  $Y = Y^{(k)}$ ,  $\tau = \tau^{(k)}$ ,  $\psi = \psi^{(k)}$ .

3. Проводим  $(k+1)$ -й шаг  $r$ -алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к  $r$ -алгоритму Шора в  $H$ -форме [81], короткая схема которого имеет вид:

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_p^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_p^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), g_p^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}))}},$$

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Pi} \left( \tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_p^{\tau}(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_p^{\tau}(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), g_p^{\tau}(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}))}} \right),$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_p^{\psi}(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_p^{\psi}(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), g_p^{\psi}(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}))}},$$

где  $H_{k+1}$  – матрица растяжения пространства с коэффициентом  $\alpha$  в направлении разницы двух последовательных обобщенных градиентов, которая определяется следующим образом:

$$H_{k+1} = H_k + \left( \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)},$$

$$\Delta_k = g_p^T(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_p^T(Y^{(k-1)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}),$$

(здесь  $T$  – одна из переменных  $Y$ ,  $\tau$  или  $\psi$ ).

Шаговый множитель  $h_k$  выбираем из условия минимума разницы

$$G_2(Y^{(k)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_2(Y^{(k-1)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k-1)})$$

по направлению антипсевдоградиента  $-g_p(Y, \tau, \psi)$  в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$\left\| (Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.2.28)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем  $Y^* = Y^{(l)}$ ,  $\tau_* = \tau^{(l)}$ ,  $\psi^* = \psi^{(l)}$ ,  $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (2.2.28).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (2.2.23) при  $Y = Y^*$ ,  $\tau = \tau_*$ ,  $\psi = \psi^*$  и, для контроля правильности вычислений, по формуле

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \varphi_i^j \left( \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} c^j(x, \tau_{*i}) \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx \right].$$

Алгоритм 2.2 описан.

#### 2.2.4. Результаты решения модельных задач

Приведенный алгоритм реализован для модельных бесконечномерных задач размещения предприятий. В заданной области 9 предприятий производят продукцию 3 видов для размещенного в этой области с заданной плотностью потребителя, с ограничениями на мощность предприятий в виде равенств и неравенств. Следует заметить, что стоимость транспортировки единицы продукции к потребителю задается в виде евклидовой метрики, метрики Чебышева или манхэттенской, в зависимости от вида продукции. В *модельной задаче 2.4* функция спроса  $\rho^j(x)$  на продукцию задается аналитически для каждого  $j$ -го,  $j = \overline{1, M}$ , вида продукции, а в *модельной задаче 2.5* равна единице в каждой точке  $x \in \Omega$ .

**Модельная задача 2.4.** Задано множество  $\Omega$  потребителей продукции 3 видов, которая может производиться 9 пунктами производства. Граница области потребителей определена:

$$\Omega = (x, y) : 0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 10.$$

Стоимость транспортировки единицы продукции с  $i$ -го,  $i = \overline{1, 9}$ , предприятия к потребителю  $(x, y)$  для каждого  $j$ -го,  $j = \overline{1, 3}$ , вида продукции задается следующим образом:

$$c^j(x, y, \tau_i) = \begin{cases} \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}, & \text{если } j = 1, \\ \max \left| x - \tau_i^{(1)} \right|, \left| y - \tau_i^{(2)} \right|, & \text{если } j = 2, \\ \left| x - \tau_i^{(1)} \right| + \left| y - \tau_i^{(2)} \right|, & \text{если } j = 3. \end{cases}$$

Спрос  $\rho^j(x, y)$  на продукцию  $j$ -го вида распределен по области  $\Omega$  с плотностью

$$\rho^j(x, y) = \frac{1}{\ln \left| (x - y)^j - 110.003 \right|}, j = \overline{1, 3}.$$

Графическое изображение функции спроса для каждого из трех видов продукции представлено на рис. 2.4.

Функции  $\varphi_i^j(Y_i^j)$ , описывающие зависимость стоимости производства продукции  $j$ -го вида на  $i$ -м предприятии от его мощности  $Y_i^j$ , имеют вид:

$$\varphi_i^j(Y_i^j) = (Y_i^j)^2, i = \overline{1, 9},$$

где мощность  $Y_i^j$   $i$ -го предприятия по производству  $j$ -го вида продукции определяется по формуле

$$Y_i^j = \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy.$$

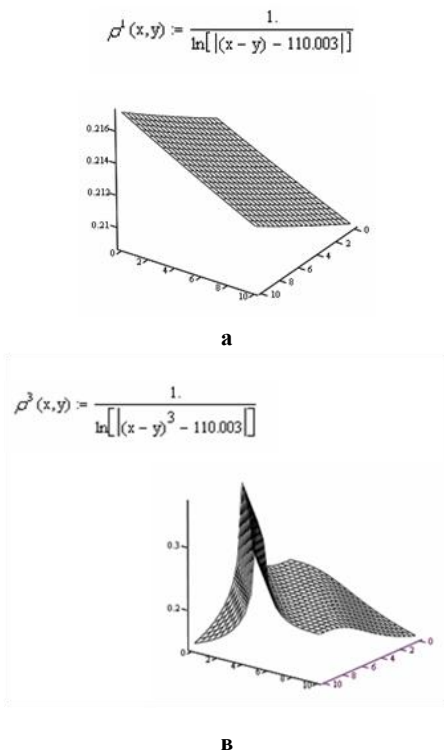
Мощность  $i$ -го,  $i = \overline{1, 9}$ , пункта производства по всем видам продукции определяется суммарным спросом потребителей, которые принадлежат  $\Omega_i^j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , и для пунктов производства с номерами 3, 6, 8 должна быть равна заданным объемам, а для пунктов производства с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 9 не должна превышать заданных объемов:

$$0 \leq \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, i = 1, 2, 4, 5, 7, 9,$$

$$b_{1,7} = 100, b_2 = 86, b_4 = 80, b_5 = 17, b_9 = 25,$$

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, i = 3, 6, 8,$$

$$b_3 = 36, b_6 = 5, b_8 = 15.$$



**Рис. 2.4. Графическое изображение функции спроса для каждого из 3 видов продукции:**  
**а – для I вида продукции; б – для II вида продукции;**  
**в – для III вида продукции**

Требуется разбить множество потребителей  $\Omega$  на их зоны обслуживания  $\Omega_i^j$  9 предприятиями по каждому виду продукции при условии, что

$$\bigcup_{i=1}^9 \Omega_i^j = \Omega, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = \overline{1, 9}, \quad j = \overline{1, 3},$$

и разместить эти предприятия в области  $\Omega$  так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее к потребителю:

$$F \quad \Omega_1^1, \dots, \Omega_9^1; \quad \Omega_1^2, \dots, \Omega_9^2; \quad \Omega_1^3, \dots, \Omega_9^3, \quad \tau_1, \dots, \tau_9 =$$

$$= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^9 \left[ \varphi_i^j \left( \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \right) + \iint_{\Omega_i^j} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x, y) dx dy \right].$$

Не исключается и тот случай, когда некоторые из подмножеств  $\Omega_i^j$ ,  $i = \overline{1, 9}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , окажутся пустыми.

Множество  $\Omega$  покрывалась сеткой с узлами  $(i, j)$ ,  $i = 1, \dots, 21$ ,  $j = 1, \dots, 21$ .

В качестве начальных значений двойственных переменных заданы  $\psi_i^{(0)} = 0$ ,  $i = \overline{1, 9}$ ; начальные значения мощностей предприятий:

$$\begin{aligned} Y_1^{(0)} &= 10, \quad Y_2^{(0)} = 100, \quad Y_3^{(0)} = 10, \\ Y_4^{(0)} &= 10, \quad Y_5^{(0)} = 100, \quad Y_6^{(0)} = 10, \\ Y_7^{(0)} &= 10, \quad Y_8^{(0)} = 100, \quad Y_9^{(0)} = 10; \end{aligned}$$

начальные координаты размещения предприятий  $\tau_i^{(0)} = (0; 0)$ ,  $i = \overline{1, 9}$ .

Условием прекращения вычислений является выполнение неравенства:

$$\left\| (Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

В результате работы алгоритма за 131 итерацию получены:

- максимальное значение функционала двойственной задачи  $G^* \approx 1\,754,92$ ;
- минимальное значение функционала прямой задачи  $F_* \approx 1\,745,89$ ;
- оптимальные мощности каждого из девяти предприятий:

$$\begin{aligned} Y_1^* &= 1.95, \quad Y_2^* = 0.54, \quad Y_3^* = 35.65, \\ Y_4^* &= 1.73, \quad Y_5^* = 1.85, \quad Y_6^* = 4.96, \\ Y_7^* &= 1.71, \quad Y_8^* = 14.98, \quad Y_9^* = 1.98; \end{aligned}$$

- оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= (8.93; 3.07), \quad \tau_2^* = (4.83; 6.60), \quad \tau_3^* = (5.32; 4.61), \\ \tau_4^* &= (9.20; 6.42), \quad \tau_5^* = (7.78; 0.79), \quad \tau_6^* = (4.78; 1.99), \\ \tau_7^* &= (1.05; 0.97), \quad \tau_8^* = (3.67; 7.53), \quad \tau_9^* = (9.26; 9.07). \end{aligned}$$

Оптимальное разбиение множества потребителей  $\Omega$  на 9 зон обслуживания каждым из 9 предприятий по 3 видам продукции представлено на рис. 2.5.

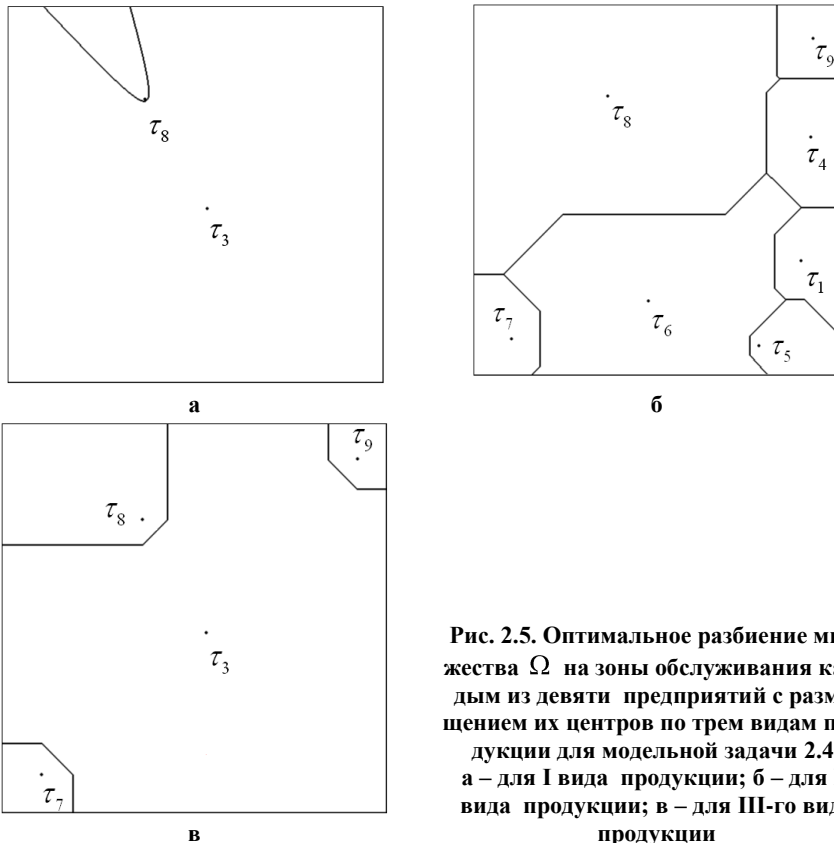


Рис. 2.5. Оптимальное разбиение множества  $\Omega$  на зоны обслуживания каждым из девяти предприятий с размещением их центров по трем видам продукции для модельной задачи 2.4: а – для I вида продукции; б – для II вида продукции; в – для III-го вида продукции

**Модельная задача 2.5.** В постановке первой модельной задачи зададим функцию спроса  $\rho^j(x, y) = 1, j = \overline{1, 3}$ . При таких условиях после 227 итерации получим следующие результаты:

- максимальное значение функционала двойственной задачи  $G^* \approx 13\,226,77$ ;
- минимальное значение функционала прямой задачи  $F_* \approx 13\,226,41$ ;
- оптимальные мощности каждого из 9 предприятий:

$$Y_1^* = 50.89, \quad Y_2^* = 49.57, \quad Y_3^* = 35.87,$$

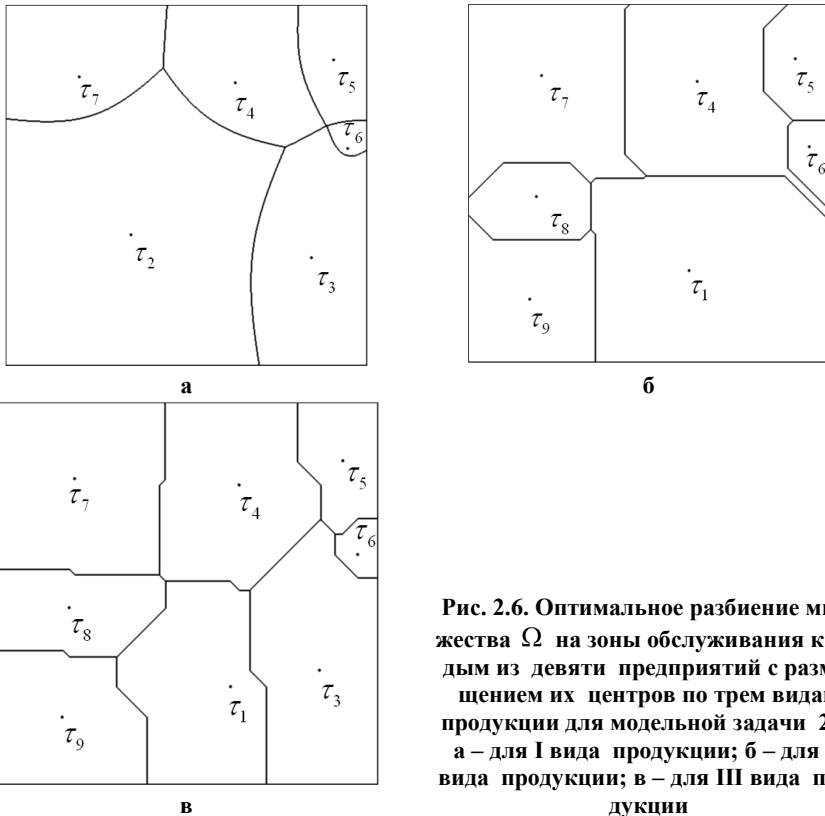
$$Y_4^* = 50.91, \quad Y_5^* = 16.99, \quad Y_6^* = 4.99,$$

$$Y_7^* = 50.77, \quad Y_8^* = 14.89, \quad Y_9^* = 24.97;$$

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= (6.14; 2.55), \quad \tau_2^* = (3.49; 3.62), \quad \tau_3^* = (8.49; 2.98), \\ \tau_4^* &= (6.37; 7.82), \quad \tau_5^* = (9.09; 8.45), \quad \tau_6^* = (9.49; 6.00), \\ \tau_7^* &= (2.06; 7.98), \quad \tau_8^* = (1.91; 4.61), \quad \tau_9^* = (1.73; 1.75). \end{aligned}$$

Оптимальное разбиение множества потребителей  $\Omega$  на девять зон обслуживания каждым из девяти предприятий по трем видам продукции представлено на рис. 2.6.



**Рис. 2.6.** Оптимальное разбиение множества  $\Omega$  на зоны обслуживания каждым из девяти предприятий с размещением их центров для модельной задачи 2.5: а – для I вида продукции; б – для II вида продукции; в – для III вида продукции

Из результатов рассмотренных модельных задач можно заключить, что:

- 1) для каждой из задач выполняются условия разрешимости (2.2.1) задачи А11, т. е. общая оптимальная мощность девяти предприятий, полученная по алгоритму решения (для модельной задачи 2.4 это 65,35, а для модельной задачи 2.5 это 299,85), не превышает

- $S=464$  – суммы заданных ограничений на объемы мощностей предприятий;
- 2) полученные оптимальные мощности 3-го, 6-го и 8-го предприятия в каждой из задач отвечают ограничениям в виде равенств, т. е. равны заданным значениям, а именно  $Y_3^* \approx 36$ ,  $Y_6^* \approx 5$ ,  $Y_8^* \approx 15$ ;
  - 3) в задаче 1, для  $\rho^j(x, y) \neq 1$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , некоторые из подмножеств, за счет вида функции  $\rho^j(x, y)$ , оказались пустыми, что не противоречит постановке исходной задачи. Так, например, на рисунке 2.5-а пустыми оказались подмножества с номерами 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 и т. п.

### Выводы

Сформулирована нелинейная непрерывная многопродуктовая задача оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $n$ -мерного евклидова пространства на его непересекающиеся подмножества с размещением их центров при ограничениях в форме равенств и неравенств. В отличие от ранее рассмотренных задач, функции спроса и стоимости транспортировки единицы продукции от предприятия до потребителя заданы разными для каждого вида продукции. На основе приведенного метода решения поставленной задачи разработан алгоритм, который является эвристическим алгоритмом обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к  $g$ -алгоритму Н. З. Шора. Результат программной реализации алгоритма проиллюстрирован на модельных задачах.



# Глава 3

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С ФУНКЦИОНАЛОМ, ЛИНЕЙНЫМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕННОЙ СОСТОЯНИЯ

### 3.1. ПРОСТЕЙШАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

#### 3.1.1. Математическая модель простейшей динамической задачи оптимального разбиения

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество из  $E_n$ ,  $\Sigma_{\Omega}^N$  класс всевозможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes } \Omega_i \cap \Omega_j = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\}.$$

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\gamma) = \beta_0 \int \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt \quad (3.1.1)$$

где  $\gamma = \bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)$ ,  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$ ,  $u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ,  $T > 0$  – заданный момент времени;  $\beta_0, \beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$  – коэффициенты, определяющие приоритет слагаемых в функционале и содержащие величины, с помощью которых слагаемые становятся безразмерными; функции  $c(x, \tau_i, t)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega \times [0, T]$ , измеримые по  $x$  и  $t$  при произвольном фиксированном векторе параметров  $\tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^n \in \Omega, i = \overline{1, N}$ ;  $a_i, i = \overline{1, N}$  – заданные, как правило, неотрицательные величины; функция  $\rho(x, t)$  для каждого  $x \in \Omega$  непрерывна по переменной  $t$  и является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= u(x, t), \quad t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Здесь  $\rho_0(\cdot)$  – известная, как правило, неотрицательная определенная на множестве  $\Omega$  функция. Точки  $\tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^n \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , – так называемые «центры» подмножеств – считаются заданными.

**Определение 3.1.** Для каждого фиксированного  $x \in \Omega$  непрерывную функцию  $\rho(x) = \rho(x, \cdot) = \rho(x, t), t \in [0, T]$ , удовлетворяющую равенству

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t u(x, \sigma) d\sigma, \quad t \in [0, T],$$

будем называть *решением* или *траекторией задачи* (3.1.2), соответствующей начальному условию  $\rho_0(x)$  и управлению  $u(x, \cdot)$ , и будем обозначать  $\rho(x, \cdot) = \rho(x, \cdot; \rho_0(x), u(x, \cdot))$  или  $\rho(x, t) = \rho(x, t; \rho_0(x), u(x, t))$ ,  $t \in [0, T]$ .

В тех случаях, когда очевидно, какому именно управлению  $u(x, \cdot)$  и начальному условию  $\rho_0(x)$  соответствует траектория, в обозначении  $\rho(x, \cdot) = \rho(x, \cdot; u(x, \cdot))$  функции  $\rho_0(x)$  и  $u(x, \cdot)$  будем опускать.

Существование и единственность решения задачи (3.1.2) п. в. для  $x \in \Omega$  при произвольном управлении  $u(x, \cdot) \in L_2(0, T)$  и начальном условии  $\rho_0(x)$  вытекает из следующей теоремы.

**Теорема** [22, стр. 382]. Пусть в задаче Коши

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \quad t \in [0, T], \tag{3.1.3}$$

$$y(0) = y_0 \tag{3.1.4}$$

функция  $f(y, u, t)$  определена и непрерывна по совокупности переменных при всех  $(y, u, t) \in E^n \times E^r \times [0, T]$ , и пусть для любых  $(y, u, t), (z, u, t) \in E^n \times E^r \times [0, T]$  выполняется неравенство

$$|f(y, u, t) - f(z, u, t)| \leq L(t)|y - z|,$$

где  $L(t) \in L_1[0, T]$  – неотрицательная функция. Кроме того,

$$|f(z, u, t)| \leq C_0(|z| + |u|^2) + C_1(t)$$

для всех  $(z, u, t) \in E^n \times E^r \times [0, T]$ , где  $C_0 = \text{const} \geq 0, C_1(t) \geq 0$ ,

$C_1(t) \in L_1[0, T]$ . Тогда для произвольного управления  $u(t) \in L_2^r[0, T]$  и начального условия  $y_0$  существует, и притом единственное, решение  $y = y(t)$  задачи (3.1.3), (3.1.4), определенное на всем отрезке  $t \in [0, T]$ . Это решение имеет производную  $\dot{y}(t)$  почти всюду на  $[0, T]$ , такую что  $\dot{y}(t) \in L_\infty^n[0, T]$ , и удовлетворяет уравнению (3.1.3) при почти всех  $t \in [0, T]$ .

*Простейшей динамической задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) называют следующую задачу:*

**Задача А13.** Необходимо отыскать такое разбиение  $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Sigma_\Omega^N$  и такое управление  $u^*(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  и соответствующую фазовую траекторию  $\rho^*(x, t)$  (удовлетворяющую задаче (3.1.2)), при которых функционал (3.1.1) достигал бы минимального значения.

*Оптимальным решением задачи 1* будем называть допустимую тройку  $\gamma^* = \{\bar{\omega}^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)\}$ , при которой достигается минимальное значение функционала  $J$ .

### 3.1.2. Обоснование метода решения задачи. Исследование свойств ее решений

Задача **А13** является частным случаем динамической задачи **ОРМ А12**. Согласно теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств [111], для ее решения сначала вводятся характеристические функции  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , и от задачи **А13** осуществляется переход к задаче бесконечномерной оптимизации с булевыми переменными: найти вектор-функцию  $\lambda^*(\cdot) = (\lambda_1^*(\cdot), \dots, \lambda_N^*(\cdot)) \in \Lambda$ , а также управление  $u^*(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  и соответствующую фазовую траекторию  $\rho^*(x, t)$ , которые минимизируют функционал

$$I(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega} \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dx dt, \quad (3.1.5)$$

где

$$\Lambda = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, \text{ почти всюду для } x \in \Omega \right\}.$$

Осуществим детальный анализ этой задачи. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\lambda^*(\cdot) \in \Lambda$ ,  $u^*(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ , почти для всех  $x \in \Omega$  функция  $\rho^*(x, \cdot) \in C[0, T]$  – решение задачи Коши (3.1.2), соответствующее управлению  $u^*(x, \cdot)$ . Для того чтобы допустимый процесс  $\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)$  доставлял минимальное значение функционалу (3.1.5), необходимо и достаточно, чтобы почти всюду для  $x \in \Omega$  выполнялось равенство

$$\int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N \left[ c(x, \tau_i, t) + a_i \rho^*(x, t) \lambda_i^*(x) \right] + \beta_1 u^*(x, t)^2 \right) dt = \quad (3.1.6)$$

$$= \min_{\substack{\lambda(x) \in \Lambda_0 \\ u(x, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])}} \int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N \left[ c(x, \tau_i, t) + a_i \rho(x, t) \lambda_i(x) \right] + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt,$$

где функция  $\rho(x, \cdot)$  – решение задачи Коши (3.1.2), соответствующее функции управления  $u(x, \cdot)$ , о множество  $\Lambda_0$  имеет вид:

$$\Lambda_0 = \left\{ v = (v_1, \dots, v_N) : v_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N v_i = 1 \right\}.$$

**Доказательство.** Учитывая тот факт, что, согласно условиям (3.1.2), функция  $\rho(x, t)$  для каждого  $x \in \Omega$  изменяется только по времени, поменяем порядок интегрирования в функционале (3.1.5):

$$I(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) = \int_{\Omega} \int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt dx$$

и введем обозначения:

$$B(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) = \int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt,$$

$$V^x = (\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) : \lambda(x) \in \Lambda_0, u(x, \cdot) \in L_2 \quad 0, T \quad ,$$

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in [0, T], \rho(x, 0) = \rho_0(x), \forall x \in \Omega, V = \bigcup_{x \in \Omega} V^x$$

Тогда задачу (3.1.5), (3.1.2) можно записать следующим образом:

$$\int_{\Omega} B(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) dx \rightarrow \min_{\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V} .$$

*Необходимость.* Пусть  $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  – оптимальное решение задачи

$$I(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)) \leq I(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \quad \forall \lambda(\cdot) \in \Lambda, u(\cdot, \cdot) \in L_2 \quad \Omega \times [0, T] \quad ,$$

$\rho(\cdot, \cdot)$  – решение (3.1.2), соответствующее функции управления  $u(\cdot, \cdot)$ . Покажем, что этот процесс почти всюду для  $x \in \Omega$  удовлетворяет условию (3.1.6). Предположим противное: существует подмножество  $\tilde{\Omega}$  множества  $\Omega$  :  $\text{mes}(\tilde{\Omega}) > 0$ , такое что  $\forall x \in \tilde{\Omega}$  условие (3.1.6) не выполняется, то есть  $\forall x \in \tilde{\Omega}$  существует процесс  $(\tilde{\lambda}(x), \tilde{u}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)) \in V^x$ , для которого справедливо неравенство

$$\int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N \left[ (c(x, \tau_i, t) + a_i) \tilde{\rho}(x, t) \tilde{\lambda}_i(x) \right] + \beta_1 \tilde{u}^2(x, t) \right) dt < \\ < \int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N \left[ (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) \lambda_i^*(x) \right] + \beta_1 u^{*2}(x, t) \right) dt,$$

или, используя введенные обозначения:

$$B(\tilde{\lambda}(x), \tilde{u}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)) < B(\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)).$$

Составим новый процесс:

$$(\bar{\lambda}(x), \bar{u}(x, \cdot), \bar{\rho}(x, \cdot)) = \begin{cases} (\tilde{\lambda}(x), \tilde{u}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)) \in V^x, & \forall x \in \tilde{\Omega} \\ (\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) \in V^x, & \forall x \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

Вычислим значение функционала задачи (3.1.5) на этом процессе:

$$\int_{\Omega} B(\bar{\lambda}(\cdot), \bar{u}(\cdot, \cdot), \bar{\rho}(\cdot, \cdot)) dx =$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} B(\tilde{\lambda}(x), \tilde{u}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)) dx + \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} B(\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) dx$$

Разбивая выражение функционала  $I(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot))$  при наборе  $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  аналогичным образом, и сопоставляя правые части полученных соотношений, придем к выводу:

$$I(\bar{\lambda}(\cdot), \bar{u}(\cdot, \cdot), \bar{\rho}(\cdot, \cdot)) < I(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)),$$

что противоречит условию оптимальности процесса  $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ .

*Достаточность.* Пусть процесс  $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  удовлетворяет условию (3.1.6) почти всюду для  $x \in \Omega$ . Покажем, что тройка  $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  является оптимальным решением задачи (3.1.5), (3.1.2). Пусть для всех  $x \in \Omega$   $(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \in V^x$  – произвольный допустимый процесс. Тогда почти всюду для  $x \in \Omega$

$$B(\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) \geq B(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)).$$

Интегрируя это неравенство по всем  $x \in \Omega$  и учитывая тот факт, что неравенство может не выполняться на множестве точек из множества  $\Omega$ , значение подынтегральной функции в которых не влияет на величину интеграла, получим:

$$\int_{\Omega} B(\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) dx \leq \int_{\Omega} B(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) dx,$$

что указывает на оптимальность допустимого процесса  $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ .

Теорема доказана.

И, таким образом, теорема 3.1 сводит решение задачи (3.1.5), (3.1.2) к решению семейства задач оптимального управления: почти всюду для  $x \in \Omega$

$$I_1(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \in V^x}, \quad (3.1.7)$$

где

$$I_1(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) = \int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N \left[ c(x, \tau_i, t) + a_i \rho(x, t) \lambda_i(x) \right] + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt, \text{ а}$$

функция  $\rho(x, \cdot)$  – решение задачи (3.1.2) п. в. для  $x \in \Omega$ .

Для решения задачи оптимального управления (3.1.7) будем применять необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума

Понтрягина. Исследуем свойства решения отдельных случаев задачи, связанных с выбором коэффициентов приоритета слагаемых функционала [53].

1. Пусть  $\beta_0 = 0, \beta_1 > 0$ . Тогда задача теряет смысл задачи оптимального разбиения множества и имеет тривиальное решение по функции управления:  $u^*(x, t) \equiv 0 \forall x \in \Omega, t \in [0, T]$ .

2. Пусть  $\beta_1 = 0, \beta_0 = 1$ . Задача (3.1.7), (3.1.2) становится линейной по управляющей функции и фазовой переменной, поэтому в ее постановку необходимо включить ограничения на функцию управления, например:

$$|u(x, t)| \leq u_{\max}, \quad \forall x \in \Omega, t \in [0, T]. \quad (3.1.8)$$

Будем рассматривать задачу (3.1.7), (3.1.2) как задачу оптимального управления, где  $\lambda(x) \in \Lambda_0$  выступает в качестве параметра. Учитывая свойства функционала и правой части дифференциальной связи задачи (3.1.7), (3.1.2), (3.1.8), принцип максимума Понтрягина определяет не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности при каждом фиксированном векторе  $\lambda(x) \in \Lambda_0$ . Критерий оптимальности формулируется следующим образом: для того, чтобы  $\forall x \in \Omega$  процесс  $(\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) \in V^x$  доставлял минимальное значение функционалу задачи (3.1.7), (3.1.2), (3.1.8), необходимо и достаточно существование такого значения  $\psi_0 \geq 0$  и функции  $\Psi_x(t)$ , одновременно не обращающихся в нуль ни при каком значении  $t \in [0, T]$ , что выполнялись бы:

а) условия стационарности по  $\rho(x, \cdot)$ :

$$\frac{d\Psi_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \rho},$$

где функция Понтрягина имеет вид:

$$H(\lambda(x, \cdot), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \Psi_x(\cdot), \psi_0) = u(x, t)\Psi_x(t) - \psi_0 \left( \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i)\rho(x, t)\lambda_i(x) \right)$$

то есть

$$\dot{\Psi}_x(t) = \psi_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i)\lambda_i(x). \quad (3.1.9)$$

б) условия трансверсальности по  $\rho(x, \cdot)$ :

$$\Psi_x(T) = 0; \quad (3.1.10)$$

в) условия оптимальности по  $u(x, \cdot)$  :

$$u^*(x, t) : \max_{|u| \leq u_{\max}} H(\lambda(x, \cdot), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \Psi_x(\cdot), \psi_0). \quad (3.1.11)$$

Решение задачи Коши (3.1.9), (3.1.10) записывается так:

$$\Psi_x(t) = -\psi_0 \sum_{i=1}^N \int_t^T (c(x, \tau_i, \theta) + a_i) \lambda_i(x) d\theta, \quad (3.1.12)$$

а функция управления, которая максимизирует функцию Понтрягина, имеет следующий вид:

$$u^*(x, t) = \begin{cases} -u_{\max}, & \Psi_x(t) < 0, \\ \forall u \in [-u_{\max}, u_{\max}], & \Psi_x(t) = 0, \\ u_{\max}, & \Psi_x(t) > 0. \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Очевидно, что в случае, когда  $\psi_0 = 0$ , сопряженная функция  $\Psi_x(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T]$ , и задача (3.1.7), (3.1.2), (3.1.8) не имеет решения.

Предположим  $\psi_0 = 1$ . При условиях исходной динамической задачи оптимального разбиения множества **A13** подынтегральная функция в выражении (3.1.12) неотрицательна, и поэтому  $\Psi_x(t) < 0$  почти для всех  $t \in [0, T]$ , за исключением, возможно, момента  $t = T$  или тех точек  $x \in \Omega$  и  $t \in [0, T]$ , в которых  $c(x, \tau_i, t) + a_i = 0$ . И, таким образом, функция спроса  $\rho(x, \cdot)$  соответствующая оптимальному управлению  $u^*(x, t)$ , неуклонно убывает на всем промежутке  $t \in [0, T] : \rho^*(x, t) = \rho_0(x) - u_{\max} t$ .

Для того чтобы избежать падения значения функции  $\rho(x, \cdot)$  ниже определенного уровня, необходимо дополнить постановку задачи (3.1.7), (3.1.2), (3.1.8) условием ограниченности снизу на функцию  $\rho(x, \cdot)$  :

$$\rho(x, t) \geq \rho_{\min}, \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T]. \quad (3.1.14)$$

При наличии фазовых ограничений условия принципа максимума несколько изменятся, а именно: для того чтобы  $\forall x \in \Omega$  процесс  $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)) \in V^X$  доставлял минимальное значение функционалу (3.1.7) при условиях (3.1.2), (3.1.8), (3.1.14), необходимо и достаточно существование наряду со значением параметра  $\psi_0 \geq 0$  и функцией  $\Psi_x(t)$ , одновременно не обращающихся в нуль ни при каком значении



$t \in [0, T]$ , такой функции  $\mu_x(t) \geq 0 \quad \forall t \in 0, T$ , что выполнялись бы соотношения:

а) условия стационарности по  $\rho(x, \cdot)$ :

$$\frac{d\Psi_x}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial \rho},$$

где лагранжиан  $L$  имеет вид:

$$\begin{aligned} L(\lambda(x, t), u(x, t), \rho(x, t), \Psi_x(t), \psi_0, \mu_x(t)) &= \\ &= H(\lambda(x, t), u(x, t), \rho(x, t), \Psi_x(t), \psi_0) - \\ &\quad - \mu_x(t) \cdot \rho(x, t) - \rho_{\min} \end{aligned}$$

то есть

$$\dot{\Psi}_x(t) = \psi_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \lambda_i(x) + \mu_x(t); \quad (3.1.15)$$

б) условия трансверсальности по переменной  $\rho(x, \cdot)$ :

$$\Psi_x(T) = 0; \quad (3.1.16)$$

в) условия оптимальности по управляющей переменной  $u(x, \cdot)$ :

$$u^*(x, t) = \text{Arg} \max_{|u| \leq u_{\max}} H(\lambda(x, \cdot), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \Psi_x(\cdot), \psi_0); \quad (3.1.17)$$

г) условия дополняющей нежесткости:

$$\mu_x(t) \cdot \rho(x, t) - \rho_{\min} = 0 \quad \forall t \in 0, T. \quad (3.1.18)$$

Как и в предыдущем случае, при  $\psi_0 = 0$  сопряженная функция  $\Psi_x(t) \equiv 0 \quad \forall t \in 0, T$ , и задача не имеет решения. Поэтому предположим  $\psi_0 = 1$ .

Как было отмечено выше, при отсутствии фазового ограничения (3.1.14)  $u^*(x, t) = -u_{\max}, \forall t \in 0, T$ , и функция  $\rho(x, \cdot)$  убывает на всем промежутке  $t \in 0, T$ :

$$\rho^*(x, t) = \rho_0(x) - u_{\max} t. \quad (3.1.19)$$

Очевидно, что при  $\rho_0(x) - u_{\max} T \geq \rho_{\min}$  решение задачи (3.1.7), (3.1.2), (3.1.8) с фазовым ограничением (3.1.14) будет совпадать с (3.1.19).

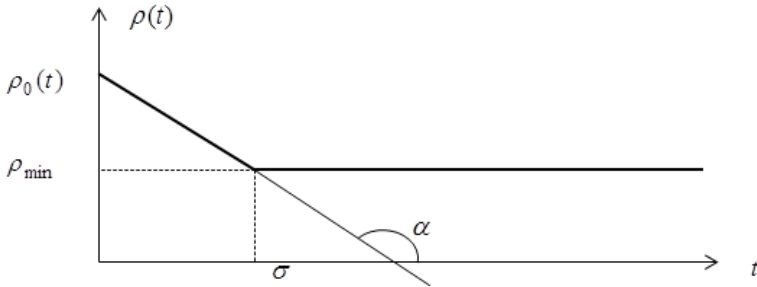
Предположим, что  $\rho_0(x) - u_{\max} T < \rho_{\min}$ . Из условий дополняющей нежесткости вытекает, что при  $\rho(x, t) > \rho_{\min}$ :  $\mu_x(t) \equiv 0$ , а следовательно,

$$\Psi_x(t) = -\sum_{i=1}^N \int_t^T (c(x, \tau_i, \theta) + a_i) \lambda_i(x) d\theta, \quad u^*(x, t) = -u_{\max},$$

и  $\rho^*(x, t) = \rho_0(x) - u_{\max} t$ .

Далее, в силу непрерывности сопряженной функции  $\Psi_x(t)$ , в первой точке контакта траектории  $\rho(x, t)$  с фазовым ограничением  $t = \sigma$  (рис. 3.1) выполняется условие:

$$\Psi_x(\sigma^-) = \Psi_x(\sigma^+) \quad (3.1.20)$$



**Рис. 3.1. Выход фазовой траектории на ограничение**

Начальное условие выхода на фазовое ограничение:  
 $\rho_0(x) - u_{\max} \sigma = \rho_{\min}$ , откуда:

$$\sigma = \frac{\rho_0(x) - \rho_{\min}}{u_{\max}}.$$

Очевидно, что коснувшись ограничения  $\rho(x, t) = \rho_{\min}$ , фазовая траектория на нем и остается. Покажем это. Предположим, что траектория сошла с ограничения. Тогда дальше на некотором отрезке времени при  $t > \sigma$   $\rho(x, t) > \rho_{\min}$ , то есть функция  $\rho(x, \cdot)$  должна расти. Функция управления, удовлетворяющая условиям (3.1.17), имеет вид (3.1.13), из чего следует, что на указанном отрезке времени  $\Psi_x(t) > 0$ . Учитывая (3.1.20), приходим к выводу, что  $\Psi_x(\sigma) = 0$ . Правый конец фазовой траектории остается свободным, поэтому выполняются условия трансверсальности (3.1.16). И таким образом, имеем  $\Psi_x(T) = \Psi_x(\sigma) = 0$ , тогда как функция  $\Psi_x(t)$  строго убывает вне фазового ограничения. Полученное противоречие доказывает, что предположение о сходе оптимальной тра-

ектории с фазового ограничения не является верным.

Итак, решение задачи оптимального управления (3.1.7), (3.1.2) при дополнительных условиях (3.1.8) и (3.1.14) записывается следующим образом:

А) если  $\rho_0(x) - u_{\max} T \geq \rho_{\min}$ , то

$$u^*(x, t) = -u_{\max}, \quad \rho^*(x, t) = \rho_0(x) - u_{\max} t \quad \text{для всех } t \in [0, T];$$

Б) если  $\rho_0(x) - u_{\max} T < \rho_{\min}$ , то

$$u^*(x, t) = \begin{cases} -u_{\max}, & t \in [0, \sigma], \\ 0, & t \in (\sigma, T]; \end{cases} \quad \rho^*(x, t) = \begin{cases} \rho_0(x) - u_{\max} t, & t \in [0, \sigma] \\ \rho_{\min}, & t \in (\sigma, T]. \end{cases}$$

Перейдем к решению задачи оптимального разбиения (3.1.5), (3.1.2). Подставим найденные выражения функции  $\rho^*(x, t)$  в функционал (3.1.5), помня что  $\beta_0 = 1; \beta_1 = 0$ :

$$I(\lambda(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^N [(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) \lambda_i(x)] \right] dx dt \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda} \quad (3.1.21)$$

Очевидно, оптимальным решением задачи (3.1.21) является вектор-функция, компоненты которой удовлетворяют условиям:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^T (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) dt = \\ = \min_{k=1, N} \left( \int_0^T (c(x, \tau_k, t) + a_k) \rho^*(x, t) dt \right); \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

почти всюду для  $x \in \Omega, i = \overline{1, N}$ .

3. Будем теперь считать, что  $\beta_0, \beta_1 > 0$  и решим для каждого  $x \in \Omega$  задачу оптимального управления (3.1.7), (3.1.2) при произвольном, но фиксированном векторе  $\lambda(x) \in \Lambda_0$  без каких-либо дополнительных условий на управляющую функцию или фазовую переменную. Представим два подхода к решению данной задачи.

**Подход 1.** Сначала заметим, что первое слагаемое функционала является линейным по управляющей переменной, а второе – сильно выпуклое. Отсюда следует, что функционал задачи (3.1.7) является сильно выпуклым и существует единственное оптимальное управление [22].

Применяя принцип максимума Понтрягина, решение указанной задачи удается найти в аналитической форме:

$$u^*(x, t) = \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_{T=1}^t \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, \xi) + a_i) \lambda_i(x) d\xi; \quad (3.1.22)$$

$$\rho^*(x, t) = \rho_0(x) + \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_0^t \int_{T=1}^{\theta} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, \xi) + a_i) \lambda_i(x) d\xi d\theta. \quad (3.1.23)$$

Подставив найденные выражения для функций  $u^*(x, t)$  и  $\rho^*(x, t)$  в функционал (3.1.7), получим задачу оптимального разбиения множества в терминах характеристических функций подмножеств: для каждого  $x \in \Omega$  найти вектор  $\lambda(x) \in \Lambda_0$ , такой что

$$\bar{J}(\lambda(x)) \rightarrow \min_{\lambda(x) \in \Lambda_0}, \quad (3.1.24)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{J}(\lambda(x)) = & \\ = & \beta_0 \int_0^T \sum_{j=1}^N (c(x, \tau_j, t) + a_j) \left( \rho_0(x) + \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_0^t \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, \xi) + a_i) \lambda_i(x) d\xi d\theta \right) dt + \\ & + \beta_1 \int_0^T \left( \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_{T=1}^t \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, \xi) + a_i) \lambda_i(x) d\xi \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что функционал задачи (3.1.24) – нелинейный, и поэтому процесс решения задачи несколько усложняется по сравнению с предыдущим случаем. Исследуем другие свойства функционала задачи (3.1.24) и ее решения.

Введем обозначения:  $Q_i(x, t) = c(x, \tau_i, t) + a_i$ . В отличие от традиционного подхода к решению непрерывных задач оптимального разбиения множеств, не станем погружать множество  $\Lambda$  в симплекс  $\Lambda_1$ :

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \lambda_i(x) \in [0, 1], i = \overline{1, N}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, \text{ почти для всех } x \in \Omega \right\},$$

и осуществлять переход от задачи нелинейного программирования (НЛП) с булевыми переменными к минимизации функционала (3.1.24) на мно-

жестве  $\Lambda_1$ . Отметим лишь специфику множества  $\Lambda$  и используем его свойства для упрощения функционала задачи (3.1.24). Структура множества  $\Lambda$  такая, что имеют место равенства:

$$\lambda_i^2(x) = \lambda_i(x), \quad \lambda_i(x)\lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i(x), & i = j \end{cases}, \quad \forall x \in \Omega, i, j = \overline{1, N}.$$

Пользуясь этими равенствами и введенными обозначениями, целевой функционал перепишем в виде:

$$\begin{aligned} J(\lambda(x)) = & \sum_{j=1}^N \beta_0 \left( \int_0^T Q_j(x, t) p_0(x) \lambda_j(x) dt - \right. \\ & \left. - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_0^T Q_j(x, t) \int_0^t \sum_{\zeta=1}^N Q_i(x, \theta) \lambda_i(x) \lambda_j(x) d\theta d\zeta dt \right) + \\ & + \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T \sum_{i=1}^N Q_i(x, \theta) \lambda_i(x) d\theta \right\}^2 dt. \end{aligned}$$

Упростим второе слагаемое следующим образом:

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^t \sum_{\zeta=1}^N Q_i(x, \theta) Q_j(x, t) \lambda_i(x) \lambda_j(x) d\theta d\zeta dt = \\ = & \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \sum_{j=1}^N \int_0^T \int_0^t Q_j(x, \theta) Q_j(x, t) d\theta d\zeta dt \lambda_j(x). \end{aligned}$$

Третье слагаемое после определенных преобразований записывается так:

$$I_3 = \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T \sum_{i=1}^N Q_i(x, \theta) \lambda_i(x) d\theta \right\}^2 dt = \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \int_0^T \sum_{j=1}^N \left( \int_t^T Q_j(x, \theta) d\theta \right)^2 \lambda_j(x) dt.$$

Учитывая приведенные выкладки и структуру множества  $\Lambda$ , можно выписать аналитическое решение задачи (3.1.24):

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x) = \min_{k=1, N} B_k(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

где величина  $B_i(x)$  определяется по следующей формуле:

$$B_i(x) = \beta_0 \int_0^T Q_i(x, t) p_0(x) dt - \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \sum_{\zeta=1}^N Q_i(x, t) Q_i(x, \theta) d\theta d\zeta dt +$$

$$+ \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \left\{ \int_t^T \int Q_j(x, \theta) d\theta \right\}^2 dt.$$

Оказывается, что второе и третье слагаемые в этом выражении схожи между собой. Продемонстрируем это, представив второе слагаемое следующим образом:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int Q_j(x, \theta) Q_j(x, t) d\theta d\zeta dt = \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \int_0^T \int \left( \int_{\zeta}^T Q_j(x, \theta) d\theta \right) Q_j(x, t) d\zeta dt = \\ &= \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \int_0^T Q_j(x, t) \left( \int_0^t Q_j(x, \theta) d\theta \right) d\zeta dt. \end{aligned}$$

Введем обозначения:  $G_j(x, t) = \int_0^t Q_j(x, \theta) d\theta$ . Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \int_0^T Q_j(x, t) \int_0^t G_j(x, T) - G_j(x, \xi) d\xi dt = \\ &= \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \left[ G_j(x, T) \int_0^T t \cdot Q_j(x, t) dt - \int_0^T Q_j(x, t) \left( \int_0^t G_j(x, \xi) d\xi \right) dt \right] = \\ &= \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \left[ T \cdot G_j^2(x, T) - G_j(x, T) \cdot \int_0^T G_j(x, t) dt - \int_0^T Q_j(x, t) \left( \int_0^t G_j(x, \xi) d\xi \right) dt \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \left\{ \int_t^T \int Q_j(x, \theta) d\theta \right\}^2 dt = \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \int G_j(x, T) - G_j(x, t) \quad ^2 dt = \\ &= \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \int G_j^2(x, T) - 2G_j(x, T)G_j(x, t) + G_j^2(x, t) dt = \\ &= \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \left( T \cdot G_j^2(x, T) - 2G_j(x, T) \int_0^T G_j(x, t) dt + \int_0^T G_j^2(x, t) dt \right). \end{aligned}$$

После подстановки приведенных соотношений в выражение для  $V_i(x)$  и приведения подобных слагаемых получим:

$$\begin{aligned}
 B_j(x) &= \beta_0 \int_0^T Q_j(x, t) \rho_0(x) dt - \\
 &- \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \left[ T \cdot G_j^2(x, T) - G_j(x, T) \cdot \int_0^T G_j(x, t) dt - \int_0^T Q_j(x, t) \left( \int_0^t G_j(x, \xi) d\xi \right) dt \right] + \\
 &+ \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \left( T \cdot G_j^2(x, T) - 2G_j(x, T) \int_0^T G_j(x, t) dt + \int_0^T G_j^2(x, t) dt \right) = \\
 &= \beta_0 \int_0^T Q_j(x, t) \rho_0(x) dt - \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} T \cdot G_j^2(x, T) + \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \int_0^T Q_j(x, t) \left( \int_0^t G_j(x, \xi) d\xi \right) dt + \\
 &+ \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \int_0^T G_j^2(x, t) dt.
 \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальное решение задачи (3.1.3) записывается следующим образом: п. в. для  $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{B}_i(x) = \min_{k=1, N} \bar{B}_k(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (3.1.25)$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_j(x) &= \int_0^T Q_j(x, t) \rho_0(x) dt - \\
 &- \frac{\beta_0}{4\beta_1} \left( T \cdot G_j^2(x, T) - 2 \int_0^T Q_j(x, t) \left( \int_0^t G_j(x, \xi) d\xi \right) dt - \int_0^T G_j^2(x, t) dt \right), \\
 Q_j(x, t) &= c(x, \tau_j, t) + a_j, \quad G_j(x, t) = \int_0^t Q_j(x, \theta) d\theta, \quad j = \overline{1, N}.
 \end{aligned}$$

Оптимальное значение целевого функционала (3.1.3) равно:

$$I_* = \beta_0 \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \bar{B}_j(x) dx.$$

В случае, когда функция стоимости не зависит от времени, то есть

$$c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i), \quad Q_j(x) = c(x, \tau_j) + a_j, \quad G_j(x, t) = \int_0^t Q_j(x) d\theta = t \cdot Q_j(x),$$

$j = \overline{1, N}$ , выражения для  $\bar{B}_i(x)$  и  $I_*$  упрощаются:

$$\bar{V}_j(x) = TQ_j(x)\rho_0(x) - \frac{\beta_0}{12\beta_1} T^3 Q_j^2(x), \quad (3.1.26)$$

$$I_* = \beta_0 \int \min_{\Omega, j=1, N} \left\{ TQ_j(x)\rho_0(x) - \frac{\beta_0}{12\beta_1} T^3 Q_j^2(x) \right\} dx \quad (3.1.27)$$

Формулы (3.1.26) и (3.1.27) можно получить и другим путем. Действительно, уточним (3.1.23) при условии  $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ :

$$\begin{aligned} \rho^*(x, t) &= \rho_0(x) - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \lambda_i(x) d\xi d\theta = \\ &= \rho_0(x) - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \lambda_i(x) \int_0^t T - \theta d\theta = \\ &= \rho_0(x) + \frac{\beta_0}{2\beta_1} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \lambda_i(x) \left\{ \frac{t}{2} t - 2T \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Подставим (3.1.28) в целевой функционал задачи (3.1.3) и определим, при каком значении параметра  $\lambda(x) \in \Lambda$  функционал принимает минимальное значение:

$$J(\lambda(\cdot)) =$$

$$\begin{aligned} &= \beta_0 \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \lambda_i(x) \left[ \rho_0(x) + \frac{\beta_0}{2\beta_1} \sum_{k=1}^N (c(x, \tau_k) + a_k) \lambda_k(x) \frac{t}{2} t - 2T \right] dx dt + \\ &+ \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \int_{\theta=1}^N \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \lambda_i(x) d\theta \right\}^2 dx dt = \\ &= \beta_0 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \lambda_i(x) \left\{ T\rho_0(x) - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \sum_{k=1}^N (c(x, \tau_k) + a_k) \lambda_k(x) \frac{T^3}{6} \right\} + \\ &+ \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \lambda_i(x) \right)^2 (T - \theta)^2 dx dt. \end{aligned}$$

Введем обозначения:  $Q(x) = \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \lambda_i(x)$ . Учитывая условия на вектор-функцию  $\lambda(x)$ , отметим, что для каждого  $x \in \Omega$  величина  $Q(x)$  может принимать значения из конечного множества, содержащего не более  $N$  элементов, которые равны  $(c(x, \tau_k) + a_k)$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Обозначим



это множество через  $V(x)$ , и пусть  $\bar{V} = \bigcup_{x \in \Omega} V(x)$ . Тогда функционал

$I(\lambda(\cdot))$  переписывается в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(Q(\cdot)) &= \int_{\Omega} \beta_0 Q(x) \left\{ T \rho_0(x) - \frac{\beta_0}{4\beta_1} Q(x) \frac{T^3}{6} \right\} dx - \frac{\beta_0^2}{4\beta_1} \int_{\Omega} Q^2(x) dx \frac{(T-\theta)^3}{3} \Bigg|_0^T = \\ &= \int_{\Omega} \beta_0 Q(x) \left\{ T \rho_0(x) - \frac{\beta_0}{4\beta_1} Q(x) \frac{T^3}{6} \right\} dx + \frac{\beta_0^2 T^3}{12\beta_1} \int_{\Omega} Q^2(x) dx = \\ &= T\beta_0 \int_{\Omega} \left\{ \rho_0(x) Q(x) - \frac{T^2 \beta_0}{12\beta_1} Q^2(x) \right\} dx, \end{aligned}$$

а задача (3.1.5), (3.1.2) будет эквивалентна следующей задаче:

$$\tilde{J}(Q(\cdot)) \rightarrow \min_{Q(x) \in \bar{V}} \quad (3.1.29)$$

Далее исследуем свойства функционала задачи (3.1.29) и ее решений. Функционал (3.1.29) является квадратичным относительно  $Q(x)$ , выпуклым вверх (рис. 3.2). Из вида функции  $Q(x)$  и множества значений функций  $\lambda_i(x)$  следует, что имеет место такое двойное неравенство:

$$\min_{k=1, N} (c(x, \tau_k) + a_k) \leq Q(x) \leq \max_{k=1, N} (c(x, \tau_k) + a_k). \quad (3.1.30)$$

Исследуем функционал  $\tilde{J}$  на минимальное значение, опираясь на теорему 3.1, а также учитывая условие (3.1.30). Пусть  $x$  – произвольная, но фиксированная точка из множества  $\Omega$ . Введем такие обозначения:

$$\bar{a}(x) = \min_{k=1, N} (c(x, \tau_k) + a_k), \quad \bar{b}(x) = \max_{k=1, N} (c(x, \tau_k) + a_k).$$

Свое максимальное значение подынтегральная функция в (3.1.29) достигает в точке  $Q_0(x) = \frac{6\beta_1 \rho_0(x)}{T^2 \beta_0}$ .

Если выполняется неравенство  $\bar{b}(x) - \frac{6\beta_1 \rho_0(x)}{T^2 \beta_0} \leq \frac{6\beta_1 \rho_0(x)}{T^2 \beta_0} - \bar{a}(x)$  (см.

рис. 3.2), то  $\tilde{J}(Q(x))$  достигает минимума в точке  $\bar{a}(x)$ , а это означает, что  $Q^*(x) = \min_{k=1, N} (c(x, \tau_k) + a_k)$ , то есть

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) + a_i = \min_{k=1, N} c(x, \tau_k) + a_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

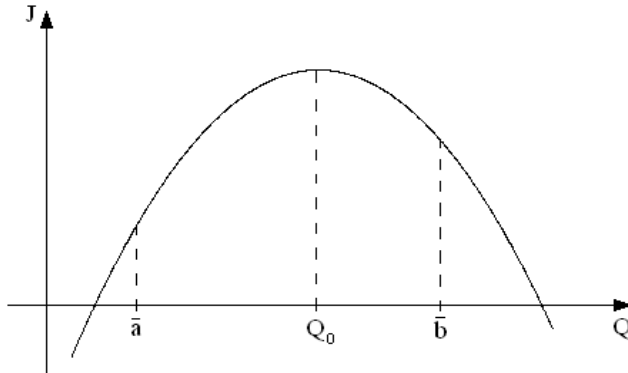


Рис. 3.2. Зависимость функционала (3.1.29) от величины  $Q(x)$

Если же  $\bar{b}(x) - \frac{6\beta_1\rho_0(x)}{T^2\beta_0} \geq \frac{6\beta_1\rho_0(x)}{T^2\beta_0} - \bar{a}(x)$ , то  $\tilde{J}(Q(x))$  достигает ми-

нимума в точке  $\bar{b}(x)$  а это значит, что  $Q^*(x) = \max_{i=1, N} (c(x, \tau_i) + a_i)$ , то есть

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) + a_i = \max_{k=1, N} c(x, \tau_k) + a_k, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, в некоторых частных случаях можно предусмотреть вид оптимального разбиения множества  $\Omega$ , оценивая лишь функцию начальных условий  $\rho_0(x)$ . Так, например, в случае, когда функция  $c(x, \tau_k)$  является евклидовой метрикой, и  $a_k = 0, k = \overline{1, N}$ , обнаруживается следующее:

1) если  $\rho_0(x) \geq \max_{x \in \Omega} \frac{T^2 \bar{a}(x) + \bar{b}(x)}{12}$  для каждого  $x \in \Omega$ , то опти-

мальным разбиением множества  $\Omega$  будет известная диаграмма Дирихле – Вороного [149]. В этом случае на всем промежутке времени  $\rho(x, t)$  неотрицательна. Подробно о диаграмме Дирихле – Вороного и ее вариациях см. п. 6.1;

2) если  $\rho_0(x) \leq \min_{x \in \Omega} \frac{T^2 \bar{a}(x) + \bar{b}(x)}{12}$  для каждого  $x \in \Omega$ , оптималь-

ным является разбиение, которое в научной литературе называется «диаграммой Вороного самой отдаленной точки» (farthest – point Voronoi diagram, [89,125,126,140]), т. е. разбиения, определяемого следующими формулами:

$$\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N): \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes } \Omega_i \cap \Omega_j = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N};$$

$$c(x, \tau_i) = \max_{k=1, N} c(x, \tau_k) \text{ при } x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

В этом случае  $\rho(x, t)$  неположительна для всех  $t \in [0, T]$ ;

3) если же существуют такие точки  $x \in \Omega$ , для которых  $\rho_0(x) \in \left( \min_{x \in \Omega} \frac{T^2 \bar{a}(x) + \bar{b}(x)}{12}, \max_{x \in \Omega} \frac{T^2 \bar{a}(x) + \bar{b}(x)}{12} \right)$ , имеет место наиболее

интересный случай, поскольку функция  $\rho(x, t)$  в указанных точках

такая, что величина  $\sum_{i=1}^N \int_0^T (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dt$  меняет свой знак на мно-

жестве  $\Omega$ . Как только этот интеграл меняет знак, в оптимальном разбиении диаграмма Вороного сменяется диаграммой самой отдаленной точки и наоборот. Имеют ли смысл подобные разбиения, или носят лишь декоративный характер? Если с практической точки зрения такие чередования диаграмм не реализуемы, то следует либо искать оптимальное разбиение в каждый момент времени, а значит, функции  $\lambda(\cdot)$  должны зависеть еще и от временной переменной, либо задача (3.1.5), (3.1.2) должна быть дополнена фазовым ограничением в виде условия (3.1.14).

Далее будут приведены результаты вычислительных экспериментов, которые демонстрируют полученные теоретически свойства решений динамических задач оптимального разбиения множеств.

Рассмотрим еще один подход к решению задачи (3.1.5) при условии (3.1.2).

**Подход 2.** Существование решения задачи типа (3.1.5), (3.1.2) по переменной  $\lambda(\cdot)$  при фиксированных  $\rho(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot) \in L_2 \Omega \times [0, T]$  доказано в [65]. Там же показано, что среди множества точек, в которых линейный относительно  $\lambda(\cdot)$  функционал (3.1.3) достигает на множестве  $\Lambda$  минимального значения, найдется хотя бы одна крайняя точка симплекса

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{array}{l} \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \lambda_i(x) \in [0, 1], i = \overline{1, N}, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, \text{ почти всюду для } x \in \Omega \end{array} \right\},$$

а крайние точки симплекса  $\Lambda_1$  являются характеристическими функциями некоторых подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , образующих разбиение множества  $\Omega$ . Следовательно, множество оптимальных по переменной  $\lambda(\cdot)$  решений задачи минимизации функционала  $I(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot))$  на множестве  $\Lambda_1$  содержит оптимальные решения задачи (3.1.5), (3.1.2). И, поэтому, множество  $\Lambda$  погружается в симплекс  $\Lambda_1$  и далее решается задача

$$I(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda_1 \\ u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times 0, T)}} \quad (3.1.31)$$

где

$$I(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dx dt,$$

а функция  $\rho(\cdot, \cdot)$  удовлетворяет условиям (3.1.2).

Решение задачи (3.1.31) в соответствии с теоремой 3.1 сводится к решению семейства задач оптимального управления вида (3.1.7). Каждую из задач этого семейства сводим, применяя необходимые условия оптимальности Эйлера – Лагранжа, к задаче минимизации функционала

$$\begin{aligned} \bar{J}(\lambda(x)) = & \beta_0 \int_0^T \sum_{j=1}^N (c(x, \tau_j, t) + a_j) \lambda_j(x) \left( \rho_0(x) + \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, \xi) + a_i) \lambda_i(x) d\xi d\theta \right) dt + \\ & + \beta_1 \int_0^T \left( \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, \xi) + a_i) \lambda_i(x) d\xi \right)^2 dt \end{aligned}$$

на сечении  $\Lambda_{1x}$  множества  $\Lambda_1$  соответствующей плоскостью  $x \in \Omega$ , в отличие от подхода 1.

Таким образом, приходим к семейству задач: п. в. для  $x \in \Omega$

$$\bar{J}(\lambda(x)) \rightarrow \min_{\lambda(x) \in \Lambda_{1x}} . \quad (3.1.32)$$

Для решения каждой из задач конечномерной условной минимизации (3.1.32) воспользуемся необходимым и достаточным условием оптимальности, которое дает следующая теорема.

**Теорема 3.2** [22]. Для того чтобы  $\lambda^*(x) \in \Lambda_{1x}$  была решением задачи (3.1.32), необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda^*(x)$  удовлетворяла условию

$$H^{\lambda^*} x, \lambda^*(x), \lambda(x) - \lambda^*(x) \geq 0 \quad \forall \lambda(x) \in \Lambda_{1x}, \quad (3.1.33)$$

где  $H^{\lambda^*} x, \lambda(x)$  – градиент функционала  $\bar{J}(\lambda(x))$  по переменной  $\lambda(x)$ ,  $k$ -я компонента которого вычисляется по формуле:  $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned} H_k^{\lambda^*} x, \lambda(x) = & \beta_0 \rho_0(x) \int_0^T Q_k(t) dt - \\ & - \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^T \sum_{i=1}^N Q_i(t) Q_k(\theta) + Q_k(t) Q_i(\theta) \lambda_i(x) d\theta d\zeta dt + \\ & + \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^T Q_k(\theta) d\theta \left\{ \sum_{i=1}^N \left( \int_t^T Q_i(\theta) d\theta \right) \lambda_i(x) \right\} dt, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

$$Q_i(t) = c(x, \tau_i, t) + a_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Далее, на основе условий оптимальности (3.1.33) получим операторное уравнение для оптимальной вектор-функции  $\lambda^*(x)$ ,  $x \in \Omega$ . В соответствии с приведенной теоремой, если  $\lambda^0(x) \in \Lambda_0$  – решение задачи (3.1.32), то имеет место равенство

$$\min_{\lambda(x) \in \Lambda_{1x}} H^{\lambda^0} x, \lambda^0(x), \lambda(x) - \lambda^0(x) = 0. \quad (3.1.34)$$

**Определение.** Будем говорить, что семейство функций  $\bar{J}(\lambda(x))$  для всех  $x \in \Omega$ , удовлетворяет **условию сильной регулярности**, если

$$H_j^{\lambda^0} x, \lambda^0(x) \neq 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad \text{для всех } x \in \Omega,$$

за исключением множества точек  $x \in \Omega$  нулевой меры.

Это условие означает, что для оптимальной вектор-функции ни на одном множестве точек  $x \in \Omega$  ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений  $H_j^{\lambda^0} x, \lambda^0(x) = 0$  для задачи минимизации по  $\lambda(\cdot)$  функцио-

нала  $\bar{J}(\lambda(\cdot))$  без ограничений.

Запишем условие (3.1.34) в виде

$$\min_{\lambda(x) \in \Lambda_{1x}} \sum_{i=1}^N H_i^\lambda(x, \lambda^0(x)) \lambda_i(x) = \sum_{i=1}^N H_i^\lambda(x, \lambda^0(x)) \lambda_i^0(x). \quad (3.1.35)$$

Вектор-функция  $\lambda^*(x)$ , удовлетворяющая равенству (3.1.35), такова, что имеет место

$$H_i^\lambda(x, \lambda^0(x)) \lambda_i^*(x) = \min_{0 \leq z_i \leq 1} H_i^\lambda(x, \lambda^0(x)) z_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega$$

Отсюда получим, что при выполнении условия

$$\text{mes } x \in \Omega: H_i^\lambda(x, \lambda(x)) = H_j^\lambda(x, \lambda(x)), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N} = 0 \quad (3.1.36)$$

вектор  $\lambda^*(x)$  определяется очевидным образом:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } H_i^\lambda(x, \lambda^{(0)}(x)) = \min_{j=1, N} H_j^\lambda(x, \lambda^{(0)}(x)), \\ \forall \alpha \in [0, 1], & \text{если } H_i^\lambda(x, \lambda^{(0)}(x)) = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При выполнении условия сильной регулярности  $H_i^\lambda(x, \lambda(x)) = 0$  лишь на множестве точек  $x \in \Omega$  нулевой меры, следовательно, вектор-функция  $\lambda^*(\cdot)$ , являющаяся решением семейства задач (3.1.32), определяется единственным образом по формуле : п.в. для  $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & H_i^\lambda(x, \lambda^0(x)) = \min_{j=1, N} H_j^\lambda(x, \lambda^0(x)), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.1.37)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.3.** Для того, чтобы было выполнено условие оптимальности (3.1.33), необходимо при выполнении условий сильной регулярности и условия (3.1.36), чтобы выполнялось равенство  $\lambda^0(x) = \lambda^*(x)$  (в смысле равенства нулю нормы разности этих вектор-функций), где вектор-функция  $\lambda^*(x)$  определяется по формуле (3.1.37).

**Замечание.** Если условие оптимальности (3.1.33) является и достаточным, например, в случае выпуклости функции  $\bar{J}(\lambda(x))$ , а также выполнены условие сильной регулярности и условие (3.1.35), то вектор-

функция  $\lambda^0(x)$ , определяемая из условия  $\lambda^0(x) = \lambda^*(x)$ , является оптимальной для семейства задач (3.1.32), где  $\lambda^*(x)$  определяется по формуле (3.1.36).

Таким образом, переходя от задачи (3.1.5), (3.1.2) к задаче бесконечномерного программирования (3.1.31), (3.1.2) и применяя к последней необходимые условия оптимальности Эйлера – Лагранжа, решение задачи (3.1.5), (3.1.2) удается записать в виде следующего операторного уравнения:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } H_1^\lambda x, \lambda^*(x) = \min_{k=1, N} H_k^\lambda x, \lambda^*(x); \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \text{п. в. для } x \in \Omega. \quad (3.1.38)$$

где

$$H_k^\lambda x, \lambda^*(x) = \beta_0 \rho_0(x) \int_0^T Q_k(t) dt - \frac{\beta_0^2}{2\beta_1} \sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) \int_0^T \left( \int_0^t \int_0^T Q_i(t) Q_k(\theta) + Q_k(t) Q_i(\theta) d\theta d\zeta - \int_t^T Q_k(\theta) d\theta \left( \int_t^T Q_i(\theta) d\theta \right) \right) dt, \\ k = \overline{1, N},$$

функции  $\rho(x, t; \lambda^*(x))$  и  $u^*(x, t; \lambda^*(x))$  вычисляются по формуле (3.1.23), (3.1.22) при  $\lambda(x) = \lambda^*(x)$ .

Еще раз отметим, что формула (3.1.38) справедлива лишь при дополнительных условиях сильной регулярности и (3.1.36) для семейства задач (3.1.32). И, таким образом, погружение множества  $\Lambda$  в симплекс  $\Lambda_1$ , традиционно применяемое при решении непрерывных задач оптимального разбиения множеств, лишь усложняет процесс решения рассматриваемой простейшей динамической задачи ОРМ.

На основе описанных выше двух подходов к решению простейшей динамической задачи оптимального разбиения множеств А13 предложены численные алгоритмы ее решения.

### 3.1.3. Численные алгоритмы решения задачи

Как нетрудно заметить, подход, основанный на теореме 3.1.1, позволяет найти оптимальное решение простейшей динамической задачи оптимального разбиения множества А13 в аналитическом виде. И для получения численных результатов необходимо лишь осуществить конечномер-

ную аппроксимацию функционала (3.1.5), заменяя интегралы их конечномерными аналогами, и записать соответствующие формулы (3.1.25), (3.1.23), (3.1.22) для вычисления характеристических функций подмножеств, фазовой траектории и управляющей функции.

Применяя подход 2, основанный на переходе к задаче бесконечномерного программирования (3.1.31) и необходимых условиях оптимальности в форме принципа Эйлера – Лагранжа, решение динамической задачи ОРМ получают в виде операторного уравнения относительно характеристических функций подмножеств (3.1.39).

Очевидно, численный алгоритм решения задачи (3.1.5), (3.1.2), реализующий подход 2, приобретает итерационный характер.

Не теряя общности, приведем алгоритмы решения задачи (3.1.5), (3.1.2) для случая, когда  $\Omega = \{x, y : x \in [0, 1]; y \in [0, 1], \beta_0, \beta_1 > 0\}$ .

#### **Алгоритм, реализующий *подход 1***

1. Множество  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  покрываем квадратной сеткой  $n \times n$  с шагом  $h$  и задаем значение функции начальных условий  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  в узлах сетки  $\rho((i, j), 0)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

2. Покрываем отрезок  $[0, T]$  сеткой с шагом  $h_t$ . Далее, для удобства, будем обозначать узел интегрирования по временной переменной через  $t$ .

3. Вычисляем характеристическую функцию  $\lambda^*((i, j))$  в узлах сетки по формуле (3.1.25).

4. Находим значение функции управления  $u^*((i, j), t)$  по формуле (3.1.22) при  $\lambda((i, j)) = \lambda^*((i, j))$ .

5. Находим фазовую траекторию  $\rho^*((i, j), t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $0 < t \leq T$ , по формуле (3.1.23) при  $\lambda((i, j)) = \lambda^*((i, j))$ .

6. Находим минимальное значение целевого функционала (3.1.5) при  $\lambda = \lambda^*$ ,  $u = u^*$ ,  $\rho = \rho^*$ .

Конец работы алгоритма.

#### **Итерационный алгоритм, реализующий *подход 2***

1. Область  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  покрываем квадратной сеткой  $n \times n$  с шагом  $h$  и задаем значение функции начальных условий  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  в узлах сетки  $\rho((i, j), 0)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

2. Задаем начальное приближение характеристической функции  $\lambda(\cdot)$



в узлах сетки:  $\lambda^{(0)}(i, j)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , например,  $\lambda_1^{(0)}(i, j) = 1$ ,  $\lambda_p^{(0)}(i, j) = 0$ ,  $p = \overline{2, N}$ .

3. Покрываем отрезок  $[0, T]$  сеткой с шагом  $h_t$ .

4. Проинициализируем параметр  $k$ :  $k := 0$ .

5.  $k$ -ый шаг. В каждом узле  $(i, j)$  пространственной сетки:

а) находим значение функции управления  $u^{(k)}((i, j), t)$  по формуле (3.1.22) при  $\lambda((i, j)) = \lambda^{(k)}((i, j))$ ;

б) находим фазовую траекторию  $\rho^{(k)}((i, j), t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $0 < t \leq T$ , по формуле (3.1.23) при  $\lambda((i, j)) = \lambda^{(k)}((i, j))$ ;

в) находим следующее приближение характеристической функции  $\lambda_r^{(k+1)}(\cdot)$  по формуле (3.1.38) в каждом узле пространственной сетки.

6. Если выполняется условие

$$\left\| \lambda^{k+1}(\cdot) - \lambda^k(\cdot) \right\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon, \quad (3.1.39)$$

где  $\varepsilon$  – заранее заданная точность, то оптимальное решение задачи (3.1.5), (3.1.2) найдено и осуществляем переход на шаг 7. Если – нет, то  $k := k + 1$ , и переходим на шаг 5.

7. Вычисляем приближенное оптимальное значение целевого функционала (3.1.5) при  $\rho((i, j), t) = \rho^{(l)}((i, j), t)$ ,  $u((i, j), t) = u^{(l)}((i, j), t)$ ,  $\lambda((i, j)) = \lambda^{(l)}((i, j))$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $0 \leq t < T$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполняется неравенство (3.1.39).

Конец работы алгоритма.

**Замечание.** Минимум выражений справа в расчетных формулах (3.1.25) и (3.1.38) может достигаться на нескольких индексах. Это означает, что оптимальное разбиение в задаче определяется не единственным образом, и можно по указанным формулам получить различные разбиения множества  $\Omega$ , на которых целевой функционал приобретает одно и то же минимальное значение. Определенность в выборе крайней точки симплекса  $\Lambda_1$  (в подходе 2), то есть характеристических функций некоторых подмножеств  $\Omega_i^*$ ,  $i = \overline{1, N}$ , образующих разбиение, важна для наглядной интерпретации решения (3.1.25) или (3.1.37) и при программной реализации метода. Что касается применения формул (3.1.25) или (3.1.37) при программной реализации алгоритмов, то неоднозначность в выборе край-

ней точки устраняется с помощью общепринятого приема: из нескольких индексов, на которых достигается минимум справа в выражениях (3.1.25) или (3.1.37), выбирается наименьший.

### 3.1.4. Анализ результатов вычислительных экспериментов

Работа приведенных выше алгоритмов решения динамической задачи ОРМ (3.1.5), (3.1.2) проверена на многих тестовых примерах. Исследование проводилось в направлениях:

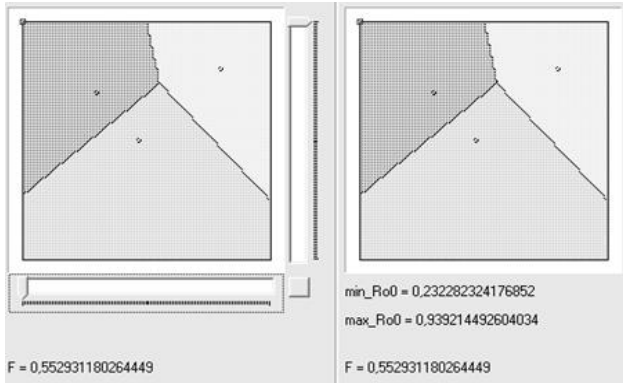
- выявления влияния исходных данных (количества узлов интегрирования по временной и пространственным координатам, вида функции начальных условий  $\rho_0(x)$  и функции стоимости  $c(x, \tau_1, t)$ ) на точность вычисления функционала задачи, а также на вид оптимального разбиения;
- проверки сходимости итерационного алгоритма, в основе которого лежит решение операторного уравнения (3.1.39);
- подтверждения свойства неустойчивого характера оптимального разбиения, что является следствием изменения знака функции  $\rho(x, t)$  на множестве  $\Omega \times [0, T]$ .

Приведем результаты некоторых интересных модельных задач и детально их проанализируем.

**Пример 3.1.** Исходные данные:  $\Omega = (x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1$ ,  $N = 3$ ,  $c(x, \tau_i) = x_1 - \tau_{1i}^2 + x_2 - \tau_{2i}^2$ ,  $i = \overline{1, N}$ , где  $\tau_1 = (0.3; 0.3)$ ,  $\tau_2 = (0.8; 0.2)$ ,  $\tau_3 = (0.47; 0.5)$ . Функция начальных условий  $\rho_0(x)$  в задаче (3.1.2) выбиралась константной, но различной в разных экспериментах.

Для численного решения задачи множество  $\Omega$  покрывалось сеткой с шагом  $h = 0.01$ . Двойные интегралы, входящие в функционал и расчетные формулы для  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\rho(x, t)$  и  $u(x, t)$ , вычислялись с помощью обобщенной формулы трапеций. Функция начального приближения  $\lambda^{(0)}(\cdot)$  выбиралась так, что  $\lambda_1^{(0)}(i, j) = 1$ ,  $\lambda_p^{(0)}(i, j) = 0$ ,  $p \neq 1$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ .

На рис. 3.3 – 3.6 изображены оптимальные разбиения множества  $\Omega$ , соответствующие разному выбору функции  $\rho_0(x)$ . Для сравнения результатов работы двух алгоритмов здесь приведены также и оптимальные значения целевого функционала.



**Рис. 3.3. Оптимальное разбиение – диаграмма Вороного.  $\rho_0(x) = 1$**



**Рис. 3.4. Оптимальное разбиение – диаграмма Вороного самой отдаленной точки.  $\rho_0(x) = -0.3$**

На рисунках 3.3 и 3.4 приведены случаи, когда оптимальное разбиение, полученное с помощью обоих алгоритмов, является диаграммой Вороного и диаграммой Вороного самой отдаленной точки.

На рис. 3.5 можно проследить чередование этих диаграмм. Рис. 3.6 содержит разбиения, соответствующие случаю, когда функция  $\rho_0(x)$ , взята из так называемого «интервала неустойчивости». Эта функция не является константой, а зависит от пространственных координат так, что соответствующая ей поверхность  $\rho(x,t)$  может быть расположена как в положительной, так и в отрицательной полуплоскостях. Этот факт определенным образом отражается на разбиении множества  $\Omega$ .

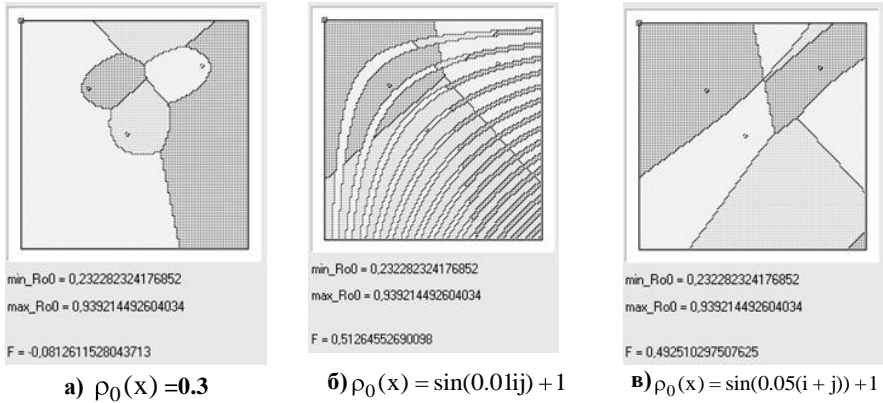


Рис. 3.5. Чередование диаграммы Дирихле – Вороного и диаграммы Вороного самой отдаленной точки

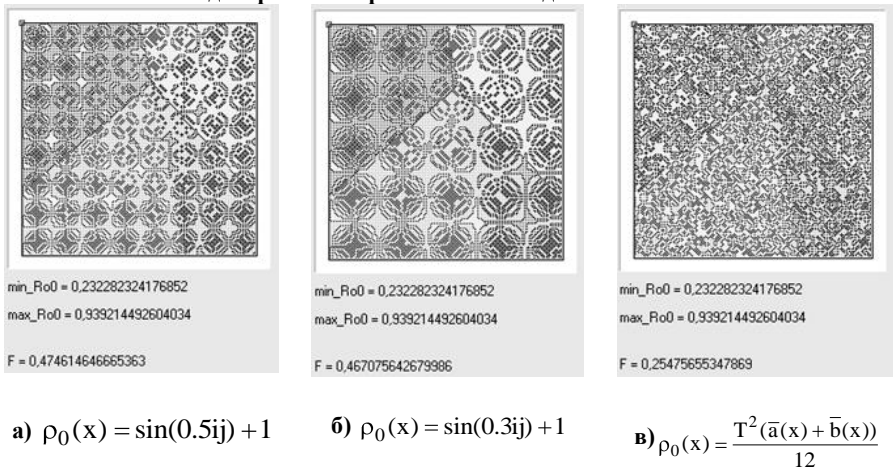


Рис. 3.6. Влияние выбора функции на устойчивость оптимального разбиения

На рис. 3.6, в) показан результат работы программы в случае, когда вершина параболы  $Q_0(x)$  лежит на середине промежутка  $[\bar{a}(x), \bar{b}(x)]$ , где величины  $\bar{a}(x), \bar{b}(x)$  определены в пункте 3.1.2. Функционал  $\tilde{J}(Q(x))$  при этом достигает своего минимального значения как в точке  $\bar{a}(x)$ , так и в точке  $\bar{b}(x)$ . Сквозь хаос разбиения, полученный в результате, можно рассмотреть и диаграмму Вороного, и диаграмму самой отдаленной точки. С одной стороны, каждая из этих диаграмм в этом случае может быть оптимальным разбиением, однако одновременно это невозможно.

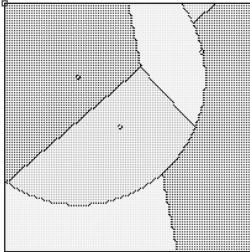
Итак,  $\rho_0(x) = \frac{T^2(\bar{a}(x) + \bar{b}(x))}{12}$  – это некая «поверхность равновесия»;

если немного сойти с нее вверх  $\left( \rho_0(x) = \frac{T^2(\bar{a}(x) + \bar{b}(x))}{12} + \varepsilon \right)$ , то в качестве

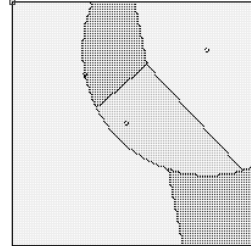
оптимального разбиения можно получить диаграмму Вороного, если

вниз  $\left( \rho_0(x) = \frac{T^2(\bar{a}(x) + \bar{b}(x))}{12} - \varepsilon \right)$  – в качестве оптимального разбиения

выступит диаграмма Вороного самой отдаленной точки ( $\varepsilon$  – малое положительное число).



а)  $\lambda_1^{(0)}(i, j) = 1, i, j = \overline{1, m}$ ;



б)  $\lambda_2^{(0)}(i, j) = 1, i, j = \overline{1, m}$ .

**Рис. 3.7. Влияние начального приближения  $\lambda^{(0)}(\cdot)$  на оптимальное разбиение, полученное при помощи итерационного алгоритма**

Следует отметить, что при решении динамической задачи ОРМ А13 с помощью итерационного алгоритма в случае, когда функция  $\rho_0(x)$  задается из интервала неустойчивости оптимального разбиения, вид оптимального разбиения зависит от выбора начального приближения функции  $\lambda^{(0)}(\cdot)$ , это можно проследить на рис. 3.7.

Анализ результатов вычислительных экспериментов позволил сделать следующие выводы относительно сравнения двух алгоритмов решения простейшей динамической задачи ОРМ:

- 1) если исходные данные в задаче такие, что

$$\rho_0(x) \geq \frac{T^2}{12} \max_{x \in \Omega} \left( \min_{k=1, N} c(x, \tau_k) + \max_{k=1, N} c(x, \tau_k) \right) \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.1.40)$$

а функция  $c(x, \tau_k)$  – евклидова метрика, то оптимальное разбиение оба подхода дают в виде диаграммы Дирихле – Вороного при любом началь-

ном приближении функции  $\lambda^{(0)}(\cdot)$  в итерационном алгоритме;

2) если

$$\rho_0(x) \leq \frac{T^2}{12} \min_{x \in \Omega} \left( \min_{k=1, N} c(x, \tau_k) + \max_{k=1, N} c(x, \tau_k) \right) \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.1.41)$$

$c(x, \tau_k)$  – евклидова метрика, оптимальным является разбиение в виде «диаграмма Вороного самой отдаленной точки», причем выбор начального приближения функции  $\lambda^{(0)}(\cdot)$  в итерационном алгоритме также не влияет на результат;

3) если же входные данные в задаче такие, что существуют  $x \in \Omega$ , для которых не выполняется ни одно из неравенств (3.1.40) и (3.1.41), то оптимальное разбиение имеет такую структуру, что в ней чередуются диаграммы Дирихле – Вороного и диаграмма Вороного самой отдаленной точки. Кроме того, алгоритм, основанный на подходе 2, в этом случае может давать различные оптимальные разбиения при разных начальных приближениях вектор-функции  $\lambda^{(0)}(\cdot)$ ;

4) очевидно, подход 2 значительно сложнее по своей численной реализации в силу своего итерационного характера; к тому же, на точность решения задачи в этом случае влияет не только погрешность конечномерной аппроксимации самой задачи, но и погрешность, связанная с выполнением условия (3.1.39), поэтому подход, основанный на погружении множества множества  $\Lambda$  в симплекс  $\Lambda_1$ , оказывается интересным в большей степени с теоретической точки зрения;

5) вычислительные эксперименты подтверждают корректность полученных в предыдущих разделах теоретических результатов.

### 3.1.5. Обобщение задачи на случай наличия фазовых ограничений

В рассмотренной выше постановке простейшей динамической задачи оптимального разбиения множества предполагалось, что область изменения фазовой координаты  $\rho(x, t)$  не ограничена и совпадает со всем пространством  $R$ . Однако характерной чертой многих задач управления динамическими системами, которые встречаются на практике, является наличие ограничений на состояния системы. Особенно это актуально в эко-

номических задачах, где часто накладываются ограничения на неотрицательность фазовых переменных (например, на объем выпуска, величину производственной мощности, спрос). Задачи с поточечными ограничениями возникают в случаях, когда при построении модели в систему дифференциальных уравнений не были внесены некоторые естественные требования: нахождение траекторий в некоторой «трубке», отсечение областей нефизичности модели и т. д. Такими задачами являются динамические задачи оптимального планирования, непрерывные транспортные задачи, линейные задачи оптимального управления со смешанными ограничениями, которые возникают при анализе моделей научно-технического прогресса и экономико-экологических моделей.

Как известно, фазовые ограничения порождают существенные трудности при разработке необходимых и достаточных условий оптимальности, а также при решении таких задач. В работе [82] указывается, что когда фазовые переменные и управление связаны общей принадлежностью к некоторому множеству, возникает определенная патология. Оптимальные управления выражаются в терминах меры, т. е. оказывается, что в этих сложных ситуациях их не только нельзя реализовать, но и нельзя вычислить. Следует выделять специальные классы задач, которые решаются относительно просто, а для общих случаев строить теорию аппроксимаций оптимальных управлений.

Рассмотрим далее постановки динамических задач ОРМ с фазовыми ограничениями (точечными и интегральными) и сформулируем для них необходимые условия оптимальности.

**Задача А16.** Необходимо найти такое разбиение  $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Sigma_{\Omega}^N$ , управление  $u^*(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  и фазовую траекторию  $\rho^*(x, t)$ , при которых функционал

$$J(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt \quad (3.1.42)$$

достигал бы минимального значения при условиях

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= f(\rho(x, t), u(x, t), t), \quad t \in 0, T \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x), \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

$$g(t, \rho(x, t)) \leq 0, \quad t \in 0, T, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.1.44)$$

Здесь  $\beta_0, \beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$ ,  $c(x, \tau_i, t)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega \times 0, T$  функции, измеримые по  $x$  и  $t$  при произвольном фиксированном векторе параметров  $\tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^n \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $T > 0$ ,  $a_i, i = \overline{1, N}$ , – фиксированные величины;  $f(\rho, u, t)$  – известная функция своих аргументов, описывающая внутренние взаимосвязи системы или внешние факторы;  $\rho_0(x)$  – известная неотрицательная функция, определенная на  $\Omega$ ; функция  $g(t, y)$  – непрерывна по  $t$  и непрерывно дифференцируема по переменной  $y$ . Точки  $\tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^n \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , – так называемые «центры» подмножеств – считаются заданными.

Введем характеристические функции  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , и от задачи **A16** осуществим переход к задаче бесконечномерной оптимизации с булевыми переменными: найти вектор-функцию  $\lambda^*(\cdot) = (\lambda_1^*(\cdot), \dots, \lambda_N^*(\cdot))$  и пару  $(u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ , которые минимизируют функционал

$$I(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dx dt$$

при условиях (3.1.43), (3.1.44).

Коротко динамическую задачу оптимального разбиения множеств с точечными фазовыми ограничениями можно записать следующим образом:

$$I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V}, \quad (3.1.45)$$

где

$$V = \{ (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda, u(x, t) \in L_2 \Omega \times 0, T, \\ \dot{\rho}(x, t) = f(\rho(x, t), u(x, t), t), \quad t \in 0, T, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \\ g(t, \rho(x, t)) \leq 0, \quad t \in 0, T, \quad \forall x \in \Omega \}.$$

Сформулированная задача отличается от задачи (3.1.3), (3.1.2) общей записью дифференциальной связи, а также наличием фазовых ограничений (3.1.44), которые задаются в каждой точке. Для задачи (3.1.45) могут



быть сформулированы необходимые и достаточные условия, аналогичные теореме 3.1.1, с примечанием, что функция  $\rho(x, t)$  является решением задачи Коши (3.1.43) и удовлетворяет условию (3.1.44).

И, следовательно, решение задачи (3.1.45) сводится к решению семейства задач оптимального управления: п. в. для  $x \in \Omega$

$$I_2(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \in V^x}, \quad (3.1.46)$$

где

$$I_2(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) = \int_0^T \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) dt,$$

а  $V^x$  – сечение множества  $V$  при фиксированном параметре  $x \in \Omega$ .

То есть п. в. для  $x \in \Omega$  необходимо найти тройку  $(\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot))$ , доставляющую минимальное значение функционалу  $I_2(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot))$  при условиях

$$\dot{\rho}(x, t) = f(\rho(x, t), u(x, t), t), \quad t \in 0, T, \quad (3.1.47)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

$$g(t, \rho(x, t)) \leq 0, \quad t \in 0, T. \quad (3.1.48)$$

Для формулировки необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина введем в рассмотрение функцию Понтрягина:

$$H(\lambda, u, \rho, \Psi_x, \psi_0, t) = \Psi_x f(\rho, u, t) - \psi_0 \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho \lambda_i + \beta_1 u^2 \right).$$

Здесь и далее индекс  $x$  у функции  $\Psi_x(t)$  означает ее соответствие конкретной точке  $x \in \Omega$ .

**Теорема 3.4.** Пусть функции  $f(\rho, u, t)$  и  $g(t, \rho)$  имеют частные производные  $\frac{\partial f(\rho, u, t)}{\partial \rho}$  и  $\frac{\partial g(t, \rho)}{\partial \rho}$  и являются непрерывными вместе с этими

производными по совокупности своих аргументов при  $u \in \mathbb{R}, \rho \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ .

Пусть почти всюду для  $x \in \Omega$  процесс  $(\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) \in V^x$  является решением задачи (3.1.46) – (3.1.48), где  $V^x$  – сечение множества  $V$  при фиксированном  $x \in \Omega$ . Тогда п. в. для  $x \in \Omega$  непременно существуют

параметр  $\psi_0 \geq 0$  и функции  $\Psi_x(t)$ ,  $\mu_x(t)$ ,  $t \in 0, T$  такие, что:

1) функция  $\mu_x(t)$  определена всюду на промежутке  $0, T$ , неотрицательна, не убывает, непрерывна слева при всех  $t \in 0, T$ , постоянна на каждом интервале, принадлежащем множеству  $\bar{T}_x = \{t \in 0, T : g(t, \rho(x, t)) < 0\}$ ; причем  $\mu_x(0) = 0$ ;

2) функция  $\Psi_x(t)$  определена всюду на  $0, T$ , имеет ограниченное измерение на  $0, T$ , непрерывна слева при всех  $t \in 0, T$ , непрерывна во всех точках  $t \in 0, T$ , в которых непрерывна функция  $\mu_x(\cdot)$ , непрерывна в точке  $t = 0$  справа, если  $\mu_x(\cdot)$  непрерывна в этой точке справа, является решением интегрального уравнения

$$\Psi_x(t) = \int_t^T \frac{\partial H(\lambda(x, \sigma), u(x, \sigma), \rho(x, \sigma), \Psi_x(\sigma), \psi_0)}{\partial \rho} d\sigma - \int_t^T \frac{\partial g(\sigma, \rho(x, \sigma))}{\partial \rho} d\mu_x, \quad (3.1.49)$$

при всех  $t \in 0, T$ , где  $\int_t^T \frac{\partial g(\sigma, \rho(x, \sigma))}{\partial \rho} d\mu_x$  – интеграл Римана – Стильтеса

по мере, порожденной функцией  $\mu_x(t)$ ,  $t \in 0, T$ ;

3) справедливо равенство

$$\begin{aligned} & H(\lambda(x, t), u^*(x, t), \rho(x, t), \Psi_x(t), \psi_0) = \\ & = \max_u H(\lambda(x, t), u(x, t), \rho(x, t), \Psi_x(t), \psi_0) \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

во всех точках  $t \in 0, T$ , в которых оптимальное управление  $u(x, \cdot)$  является непрерывным.

Таким образом, наличие фазовых ограничений (3.1.44) в задаче **A16** вызывает появление в (3.1.49) слагаемого, которое является мерой. Вследствие этого сопряженные уравнения не являются исключительно дифференциальными, в связи с чем возникают сложные вопросы, связанные с нахождением условий, которые обеспечивали бы простоту структуры меры. Главными из них являются необходимые условия наличия скачков

и необходимые условия отсутствия составляющей меры. Изучению указанных вопросов посвящены, в частности, работы [10, 79, 88].

В [10] указано, что в реальных задачах во многих случаях сингулярная составляющая меры отсутствует и нельзя рассчитывать на то, что она является абсолютно непрерывной. Таким образом, проблема регуляризации фазовых ограничений в задачах оптимального управления динамическими системами является сегодня актуальной и открытой. Некоторые подходы к регуляризации задач оптимального управления с фазовыми ограничениями изучались в работах [118, 170]. Большинство подходов к аппроксимации оптимальных управлений в таких задачах привлекают идеи метода штрафа в различных модификациях и метода Лаврентьева.

Приведем далее несколько возможных подходов к регуляризации фазовых ограничений в задаче (3.1.46) – (3.1.48). Напомним, что эта задача решается почти для всех  $x \in \Omega$ .

Первый из подходов является аналогом подхода, предложенного в [39].

Введем в рассмотрение отображение  $V: W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , такое, что:

1)  $V(t, \rho(x, t))$  является непрерывной относительно топологии равномерной сходимости в пространстве  $W^{1,1}(0, T; \mathbb{R})$ ;

2)  $V(t, \rho(x, t)) = 0$  для всех  $t, \rho(x, t) : g(t, \rho(x, t)) \leq 0$ ;

3)  $V(t, \rho(x, t)) \geq 0$  для всех  $t, \rho(x, t) : g(t, \rho(x, t)) > 0$ .

Под пространством  $W^{1,1}(0, T; \mathbb{R})$  будем понимать банахово пространство относительно нормы:

$$\|z\|_{W^{1,1}(0, T; \mathbb{R})} = \int_0^T \left( |z(t)| + \left| \frac{\partial z(t)}{\partial t} \right| \right) dt.$$

Рассмотрим такую оптимизационную задачу:

$$I_3 u, \rho(x, t) = B(t, \rho(x, t)) \rightarrow \inf, \quad u, \rho(x, t) \in K, \quad (3.1.51)$$

где  $K = \{u(x, t), \rho(x, t) : u \in L^2(\Omega, 0, T), g(t, \rho(x, t)) \leq 0, t \in 0, T\}$ .

Учитывая непрерывность отображения  $V$ , компактность множества  $K$  и привлекая теорему Вейерштрасса к задаче (3.1.51), можно сделать вывод о существовании, по крайней мере, одного ее решения. Предположим:

$$B^* = \inf_{(u, \rho) \in K} I_3 u, \rho(x, t).$$

Вместо задачи (3.1.46) – (3.1.48) можно рассматривать следующую задачу:

$$\hat{I}(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \inf_{\substack{\lambda(x) \in \Lambda \\ u(x, \cdot) \in L_2(0, T)}}$$

при условиях (3.1.47), где

$$\hat{I}(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) = \int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) + \varepsilon^{-1} (V(t, \rho(x, t)) - V^*)^2 \right) dt .$$

Очевидно, что для решения задачи (3.1.51) функционал  $V(t, \rho(x, t))$  должен обладать определенными свойствами, которые при сложных ограничениях на фазовые переменные и управление иногда сложно обеспечить.

Еще один подход к регуляризации фазовых и смешанных ограничений в задачах оптимизации динамических систем типа (3.1.46) – (3.1.48) основан на релаксации таких задач специально построенными задачами векторной оптимизации [15, 16]. Приведем здесь только схему применения такой релаксации при решении задачи (3.1.46) – (3.1.48), в которой условия (3.1.48) являются жесткими, то есть их нельзя нарушать. Предположим, что множество  $K$  является компактным в пространстве

$C(0, T; \mathbb{R})$ . Для этого достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям теоремы Арцела [42]. Разобьем множество допустимых пар в задаче (3.1.46) – (3.1.48) на такие множества:

$$K_{1x} = \{ u(x, t), \rho(x, t) \in L^2(\Omega, 0, T) \times W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}) : g(t, \rho(x, t)) \leq 0, t \in 0, T \} ,$$

$$K_{2x} = \{ u(x, t), \rho(x, t) \in L^2(\Omega, 0, T) \times W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}) :$$

$$\dot{\rho} = f(\rho, u, t), t \in 0, T, \rho(x, 0) = \rho_0(x) \} .$$

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$I_{K_2}(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \inf, \quad u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \in K_{1x}, \quad (3.1.52)$$

где

$$I_{K_2}(u, \rho(x, t)) = \left\| \rho(x, t) - \rho_0(x) - \int_0^t f(\rho(x, \sigma), u(x, \sigma), \sigma) d\sigma \right\|_{C(0, T; \mathbb{R})} .$$

При определенных допущениях относительно правой части диффе-

рещиального уравнения (3.1.47) функционал  $I_{K_2}(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot))$  является непрерывным относительно топологии в пространстве  $L^2(\Omega, 0, T) \times W^{1,1}(0, T; \mathbb{R})$ . Тогда по теореме Вейерштрасса задача (3.1.52) является разрешимой. Пусть

$$\eta(\rho(x, \cdot)) = \inf_{u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \in K_{1x}} I_{K_2}(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)).$$

Вместо задачи (3.1.46) – (3.1.48) можно решать следующую задачу:

$$\hat{I}_\varepsilon(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \inf^{(*)}, \quad u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \in K_{1x}, \quad (3.1.53)$$

где

$$\hat{I}_\varepsilon(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) = \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) + \\ + \varepsilon^{-1} \left( \left\| \rho(x, t) - \rho_0(x) - \int_0^t f(\rho(x, \sigma), u(x, \sigma), \sigma) d\sigma \right\|_{C(0, T; \mathbb{R})} - \eta(\rho(x, \cdot)) \right)^2.$$

Пометка (\*) в (3.1.53) означает, что в задаче необходимо найти множество всех  $(\Lambda, \mu)$ -эффективных решений [152]. Здесь  $\Lambda$  – выпуклый замкнутый заостренный конус в рассматриваемом линейном банаховом пространстве, а  $\mu$  – слабая топология в пространстве  $L^1(0, T)$ . Далее для решения задачи (3.1.53) может быть применен, например, метод нелинейной скаляризации Пасколетти – Серафини, который позволяет свести поиск  $(\Lambda, \mu)$ -эффективных решений задачи векторной оптимизации к решению квадратичных задач минимизации.

Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа (3.1.48) всегда считались сложными. Существенным фактором при решении таких задач является инерционность управляемой системы. При большой инерционности оптимальные траектории содержат на временном промежутке участки «предыдущего подхода» к ограничению (так называемую «сингулярную меру» при касании), на которых сходимость того или иного метода становится плохой. В терминах аппроксимирующей задачи математического программирования фазовое ограничение после поточечной дискретизации превращается в набор ограничений большой размерности. Многие аппроксимации задач с фазовыми ограничениями могут быть проинтерпретированы как переопределенные задачи оптимизации, так как число ограничений в них значительно превышает

количество переменных. Кроме того, фазовые ограничения могут быть причиной большого количества «паразитических» локальных экстремумов, возникающих во вспомогательных экстремальных задачах.

Для решения задачи оптимального управления (3.1.45) – (3.1.48) будем применять комбинацию методов штрафных функций, оптимального разбиения множеств и недифференцируемой оптимизации с привлечением модифицированного функционала Лагранжа [28].

Для удобства запишем задачу (3.1.46) – (3.1.48) коротко следующим образом:

$$I_2(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \in V_x}, \quad (3.1.54)$$

где

$$V_x = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) \in \bar{V}_x; \\ g(t, \rho(x, t)) \leq 0, t \in 0, T \end{array} \right\},$$

$$\bar{V}_x = \{ (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda, u(x, t) \in L_2 \Omega \times 0, T \},$$

$$\dot{\rho}(x, t) = f(\rho(x, t), u(x, t), t), \quad t \in 0, T, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x).$$

Напомним, что задача (3.1.54) решается почти для всех  $x \in \Omega$ .

Реализуем редукцию задачи (3.1.54) к максиминной задаче, составив для нее модифицированный функционал Лагранжа следующим образом:

$$M(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot)) = I_2(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) + \int_0^T \psi(g(t, \rho(x, t)), \mu(t)) dt,$$

где  $\mu(\cdot)$  – действительная функция, так называемый множитель Лагранжа (двойственная переменная), зависящая от времени. Функция  $\psi(g(t, \rho(x, t)), \mu(t))$  должна быть задана при следующих условиях:

A1. Уравнение

$$\psi_{\mu}(g(t, \rho(x, t)), \mu(t)) = 0 \quad (3.1.55)$$

можно удовлетворить тогда и только тогда, когда

$$g(t, \rho(x, t)) \leq 0, \quad v = \psi_g(g(t, \rho(x, t)), \mu(t)), \quad v \geq 0, \quad (3.1.56)$$

$$g(t, \rho(x, t)) \cdot v = 0. \quad (3.1.57)$$

Уравнение (3.1.55) вместе с условием

$$v = \psi_g(g(t, \rho(x, t)), \mu(t)) \quad (3.1.58)$$

однозначно определяют  $\mu(\cdot)$  при произвольных заданных  $g(t, \rho(x, t))$ ,  $v$  значениях, которые удовлетворяют условиям (3.1.56), (3.1.57).

A2. Для произвольных  $\rho^*(x, t), \mu^*(t)$  таких, что для  $g(t, \rho^*(x, t))$  и  $\mu^*(t)$  выполняются условия (3.1.56), (3.1.57), и произвольных  $(\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) \in \bar{V}_x$  имеет место неравенство

$$\psi(g(t, \rho(x, t)), \mu^*(t)) \leq \psi(g(t, \rho^*(x, t)), \mu^*(t)). \quad (3.1.59)$$

Задачу (3.1.54) заменим задачей нахождения безусловного максимина функции  $M(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot))$ :

$$M(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot)) \rightarrow \max_{\mu(\cdot) \in L^2(0, T)} \min_{(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \in \bar{V}_x} . \quad (3.1.60)$$

Справедлива

**Теорема 3.5.** Пусть функционал  $M(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot))$  непрерывно дифференцируем по своим аргументам, функция  $\psi(g(t, \rho(x, t)), \mu(t))$  удовлетворяет условиям A1 и A2, а вектор  $q^* = (\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot), \mu^*(\cdot))$  – точка строгого локального максимина в (3.1.60). Тогда в задаче (3.1.54):

- 1) точка  $(\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot))$  является локальным решением;
- 2) функция  $v^*(t) = \psi_g(g(t, \rho^*(x, t)), \mu^*(t))$ ,  $t \in 0, T$ , такова, что  $z^* = (\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot), v^*(\cdot))$  является точкой Куна – Таккера функционала  $M(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot))$ .

Доказательство теоремы аналогично теореме 4.5.1 [28], сформулированной для задачи конечномерной условной оптимизации.

Использование модифицированных функционалов Лагранжа позволяет редуцировать исходную задачу условной оптимизации с точечными фазовыми ограничениями к такой максиминной задаче, в которой для всякой точки локального максимина  $q^* = (\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot), \mu^*(\cdot))$  гарантировалось бы, что соответствующая  $z^* = (\lambda^*(x), u^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot), v^*(\cdot))$  является точкой Куна – Таккера для исходной задачи.

Простейшей функцией, удовлетворяющей условиям A1 и A2, является следующая функция [28]

$$\psi(g(t, \rho(x, t)), \mu(t)) = \frac{1}{2} \left[ \max^2(0, \mu(t) + g(t, \rho(x, t))) - \mu^2(t) \right].$$

Далее приведем описание метода решения задачи (3.1.46) – (3.1.48) на основе модифицированного функционала Лагранжа, записанного следующим образом:

$$\begin{aligned}
 L(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s) = \\
 = \int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt + \\
 + \int_0^T \frac{1}{2s} \max^2 (0, \mu(t) + sg(t, \rho(x, t)) - \mu^2(t)) dt,
 \end{aligned}$$

где  $\mu(\cdot)$  – множитель Лагранжа (двойственная переменная), который зависит от времени,  $s$  – коэффициент штрафа.

**Замечание 1.** Если в задаче (3.1.46) – (3.1.48) есть несколько условий на фазовые переменные, то есть в (3.1.48) функция  $g(t, \rho(x, t)) = g_1(t, \rho(x, t)), g_2(t, \rho(x, t)), \dots, g_m(t, \rho(x, t))$ , то модифицированный функционал Лагранжа запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 L(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s) = \\
 = \int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt + \\
 + \sum_{j=1}^m \int_0^T \frac{1}{2s_j} \max^2 (0, \mu_j(t) + s_j g_j(t, \rho(x, t)) - \mu_j^2(t)) dt,
 \end{aligned}$$

$\mu(\cdot) = \mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot), \dots, \mu_m(\cdot)$  – вектор-функция множителей Лагранжа (двойственных переменных), которая зависит от времени;  $s_j, j = \overline{1, m}$ , – коэффициенты штрафа.

Опишем метод последовательной безусловной оптимизации, в котором формула для перерасчета двойственной переменной записывается следующим образом:

$$\mu^{(k+1)}(t) = \mu^{(k)}(t) + s \cdot \max(0, g(t, \rho^{(k)}(x, t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in 0, T.$$

Заметим, что коэффициент  $s$  в функционале  $L(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s)$  носит для метода иной смысл, чем в методе внешнего штрафа, являясь не столько основным средством достижения точности решения, сколько коэффициентом регуляризации, обеспечивающим квазимонотонность процесса сходимости по двойственной переменной. Вычислительная практика показывает, что для достижения решения исходной задачи не требует следования  $s \rightarrow \infty$ . Достаточно достичь некоторого порогового его значения, после чего уточнение решения осуществляется за счет вычислений двойственных переменных.



Приведем схему метода последовательной оптимизации в задаче (3.1.60), аналогичную [25].

1. Задаем параметры алгоритма:

$\Delta_\mu$  – коэффициент допустимого изменения функции  $\mu(\cdot)$  ;

$\beta_s > 1$  – коэффициент увеличения штрафа;

$\gamma$  – коэффициент допустимого изменения фазового ограничения.

2. Задаем начальное приближение прямых и двойственных переменных:

$$u^{(0)}(x, t), \mu^{(0)}(t), t \in 0, T ; s^{(0)} .$$

Решаем задачу Коши (3.1.47) при  $u = u^{(0)}(x, t), t \in 0, T$  и находим фазовую переменную  $\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(x, t), t \in 0, T$  .

Вычисляем компоненты вектора  $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \dots, \lambda_N^{(0)}(x))$  по формуле:

$$\lambda_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^T (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^{(0)}(x, t) dt = \\ = \min_{k=1, N} \left( \int_0^T (c(x, \tau_k, t) + a_k) \rho^{(0)}(x, t) dt \right); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть вычислены  $k$  приближений:  $u^{(k)}(x, t), \mu^{(k)}(t), t \in 0, T ; s^{(k)} ; \rho^{(k)}(x, t), t \in 0, T ; \lambda^{(k)}(x)$  . Опишем  $(k+1)$ -й шаг метода.

3. Решаем задачу минимизации функции  $L(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s)$  по переменной  $u(x, t)$  при фиксированных параметрах  $\mu^{(k)}(t), t \in 0, T ; s^{(k)}$  , и начальном приближении  $u^{(k)}(x, t), t \in 0, T$  , например, с помощью градиентного метода (расчетная формула градиентного метода, а также формула для вычисления производной Фреше функционала  $L(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s)$  по переменной  $u(x, t)$  приведены ниже).

При этом на каждом шаге градиентного метода решается задача Коши (3.1.47) и вычисляются компоненты вектора  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x))$  по формуле:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^T (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dt = \\ & = \min_{k=1, N} \left( \int_0^T (c(x, \tau_k, t) + a_k) \rho(x, t) dt \right); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

при соответствующих найденных значениях функции  $\rho(x, t)$ ,  $t \in 0, T$ .

Таким образом, находим  $u^{(k+1)}(x, t)$ ,  $t \in 0, T$ ,

$$\lambda^{(k+1)}(x) = (\lambda_1^{(k+1)}(x), \dots, \lambda_N^{(k+1)}(x)), \rho^{(k+1)}(x, t), t \in 0, T,$$

4. Вычисляем новое приближение двойственной переменной:

$$\mu^{(k+1)}(t) = \mu^{(k)}(t) + s^{(k)} \cdot \max(0, g(t, \rho^{(k+1)}(x, t))), \quad t \in 0, T.$$

5. Определяем относительное изменение двойственной переменной:

$$\Delta\mu_{\max} = \max_{t \in 0, T} \frac{|\mu^{(k+1)}(t) - \mu^{(k)}(t)|}{1 + |\mu^{(k+1)}(t)|}.$$

Если  $\Delta\mu_{\max} > \Delta\mu$ , то увеличиваем коэффициент штрафа:

$$s^{(k+1)} = \beta_s \cdot s^{(k)}.$$

Если  $\Delta\mu_{\max} \leq \Delta\mu$ , коэффициент штрафа оставляем прежним. Таким образом, штрафной коэффициент увеличивается только тогда, когда не удастся существенно уменьшить значение функции правой части ограничения (3.1.48),:

$$s^{(k+1)} = \begin{cases} s^{(k)} \cdot \beta_s, & \max(0, g(t, \rho^{(k+1)}(x, t))) > \gamma \max(0, g(t, \rho^{(k)}(x, t))) \\ s^{(k)}, & \max(0, g(t, \rho^{(k+1)}(x, t))) \leq \gamma \max(0, g(t, \rho^{(k)}(x, t))) \end{cases}$$

6. Проверяем выполнение критерия окончания итерационного процесса, в качестве которого может выступать одно из неравенств:

$$\|u^{(k+1)}(x, \cdot) - u^{(k)}(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)} < \varepsilon,$$

$$|I_2^{(k+1)} - I_2^{(k)}| < \varepsilon,$$

где  $I_2^{(k)} = I_2(u^{(k)}(x, \cdot), \rho^{(k)}(x, \cdot), \lambda^{(k)}(x))$ .

Если хотя бы одно из указанных условий выполняется, то заканчива-

ем вычислительный процесс. В качестве приближения оптимального решения задачи выбираем набор  $(\lambda^{(l)}(x), u^{(l)}(x, \cdot), \rho^{(l)}(x, \cdot))$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполняется критерий окончания. В случае его невыполнения осуществляется переход на шаг 3.

**Замечание 2.** Как нетрудно заметить, на первом этапе алгоритма описанного метода последовательной оптимизации корректируются как двойственная переменная, так и коэффициент штрафа, при этом увеличиваются штрафные коэффициенты только тогда, когда наиболее «трудно» удовлетворить фазовые ограничения. На втором этапе коэффициент штрафа остается неизменным, а корректировке подлежит только двойственная переменная.

Далее построим производную Фреше функционала  $L(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s)$  по переменной  $u(x, t)$  и приведем итерационную формулу градиентного метода, по которой в методе последовательной оптимизации вычисляются приближения управляющей функции в задаче (3.1.60).

Пусть для каждого  $x \in \Omega$  тройка  $(\hat{\lambda}(x), \hat{u}(x, t), \hat{\rho}(x, t)) \in \bar{V}_x$  – является произвольным допустимым процессом в задаче (3.1.60). Дадим приращение  $\Delta u(x, \cdot) \in L^2(0, T)$  функции  $\hat{u}(x, \cdot)$ . Соответствующее приращение фазовой переменной должно удовлетворять следующей задаче Коши:

$$\Delta \dot{\rho}(x, t) = \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial \rho} \Delta \rho + \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial u} \Delta u + o(\|\Delta u\|, \|\Delta \rho\|),$$

$$t \in 0, T, \Delta \rho(x, 0) = 0,$$

где величина  $o(\|\Delta u\|, \|\Delta \rho\|)$  – бесконечно малая, такая, что

$$\lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{o(\|\Delta u\|, \|\Delta \rho\|)}{\|\Delta u\|} = 0.$$

Вариация функционала  $L(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s)$  по переменной  $u(x, t)$  запишется так:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(\hat{u}(x, \cdot) + \Delta u(x, \cdot), \hat{\rho}(x, \cdot) + \Delta \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s) - L(\hat{u}(x, \cdot), \hat{\rho}(x, \cdot), \mu(\cdot), s) = \\ &= \int_0^T \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N \left[ (c(x, \tau_i, t) + a_i) \Delta \rho(x, t) \hat{\lambda}_i(x) \right] + \beta_1 \left[ 2\hat{u}(x, t) \Delta u(x, t) + \Delta u^2(x, t) \right] \right) dt + \\ &+ \int_0^T \left( \max(0, \mu(t) + sg(t, \hat{\rho}(x, t))) \frac{\partial g(t, \hat{\rho}(x, t))}{\partial \rho} \Delta \rho(x, t) \right) dt + o(\|\Delta u\|, \|\Delta \rho\|), \end{aligned}$$

Рассмотрим тождество:

$$\begin{aligned}
 0 &\equiv \left( v(t), \Delta \hat{\rho}(x, t) - \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial \rho} \Delta \rho - \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial u} \Delta u \right)_{L^2(0, T)} = \\
 &= \int_0^T v(t) \left( \Delta \hat{\rho}(x, t) - \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial \rho} \Delta \rho - \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial u} \Delta u \right) dt = \\
 &= v(t) \Delta \rho(x, t) \Big|_0^T - \int_0^T \left( \dot{v}(t) + \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial \rho} v(t) \right) \Delta \rho dt - \\
 &\quad - \int_0^T \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial u} v(t) \Delta u dt = v(T) \Delta \rho(x, T) - \\
 &\quad - \int_0^T \left( \dot{v}(t) + \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial \rho} v(t) \right) \Delta \rho dt - \int_0^T \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial u} v(t) \Delta u dt.
 \end{aligned}$$

Пусть функция  $v(t)$  удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}(t) + \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial \rho} v(t) &= \\
 &= \beta_0 \sum_{i=1}^N \left[ (c(x, \tau_i, t) + a_i) \hat{\lambda}_i(x) \right] + \\
 &+ \max(0, \mu(t) + \text{sg}(t, \hat{\rho}(x, t))) \frac{\partial g(t, \hat{\rho}(x, t))}{\partial \rho}, \\
 v(T) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.61}$$

Тогда приращение функционала  $L(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s)$  по переменной  $u(x, t)$  в точке  $\hat{u}(x, t)$  может быть записано так:

$$\Delta L = \int_0^T \left( 2\beta_1 \hat{u}(x, t) - \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial u} v(t) \right) \Delta u(x, t) dt.$$

В соответствии с определением производной Фреше можно записать следующую формулу для вычисления производной функционала  $L(u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s)$  по переменной  $u(x, t)$ :

$$\frac{\partial L(x, \cdot)}{\partial u} = 2\beta_1 \hat{u}(x, t) - \frac{\partial f(\hat{\rho}(x, t), \hat{u}(x, t), t)}{\partial u} v(t). \tag{3.1.62}$$

Здесь обозначение  $\frac{\partial L(x, \cdot)}{\partial u} = \frac{\partial L(\hat{\lambda}(x), \hat{u}(x, \cdot), \hat{\rho}(x, \cdot), \mu(\cdot), s)}{\partial u}$  соответствует производной Фреше функционала в точке  $(\hat{\lambda}(x), \hat{u}(x, t), \hat{\rho}(x, t)) \in \bar{V}_x$  при произвольных допустимых фиксированных параметрах  $\mu(\cdot), s$ .

Следовательно, для осуществления  $k$ -го шага метода последовательной оптимизации, описанного выше, нужно построить итерационный процесс:

$$u^{(q+1)}(x, t) = u^{(q)}(x, t) - \alpha_q \frac{\partial L(\lambda^{(q)}(x), u^{(q)}(x, \cdot), \rho^{(q)}(x, \cdot), \mu^{(k)}(\cdot), s_k)}{\partial u}, \quad (3.1.63)$$

$$q = 0, 1, 2, \dots$$

при этом для вычисления производной  $\frac{\partial L(x, \cdot)}{\partial u}$  необходимо решить справа налево задачу Коши (3.1.61). Параметр метода  $\alpha_q > 0$  можно выбирать одним из известных способов, например, априорно  $\alpha_q = \frac{1}{q + A}$ ,  $A > 0$  – произвольное число.

Критерием окончания итерационного процесса поиска управления  $u^{(k+1)}(x, t), t \in [0, T]$  может служить какое-либо из следующих неравенств:

$$\|u^{(q+1)}(x, \cdot) - u^{(q)}(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)} < \varepsilon,$$

$$|L(\lambda^{(q+1)}, u^{(q+1)}, \rho^{(q+1)}, \mu^{(k)}, s^{(k)}) - L(\lambda^{(q)}, u^{(q)}, \rho^{(q)}, \mu^{(k)}, s^{(k)})| < \varepsilon.$$

Таким образом, с учетом вышеизложенного материала сформулируем **численный алгоритм решения задачи (3.1.45)**.

**Алгоритм**

1. Область  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  покрываем квадратной сеткой  $n \times n$  с шагом  $h$ . Пусть  $\hat{\Omega} = (x_1, x_2) : x_1 = ih, x_2 = jh, i, j = \overline{1, n}$  – множество узлов пространственной сетки. Задаем: значение функции начальных условий  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  в узлах сетки  $x \in \hat{\Omega}$ ; параметры алгоритма  $\Delta_\mu, \beta_s > 1, \gamma$ . покрываем отрезок  $[0, T]$  сеткой с шагом  $h_t$ , обозначаем через  $\hat{T} = t : t = lh_t, l = \overline{1, n_T}$  множество узлов сетки по временной переменной.

2. Для каждого узла  $x \in \hat{\Omega}$  решаем задачу (3.1.46) – (3.1.48):

2.1. Задаем начальное приближение прямых и двойственных переменных:  $u^{(0)}(x, t), \mu^{(0)}(t), t \in \hat{T}; s^{(0)}$ .

2.2. Решаем задачу Коши (3.1.47) при  $u = u^{(0)}(x, t), t \in \hat{T}$  и находим фазовую переменную  $\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(x, t), t \in \hat{T}$ .

2.3. Вычисляем компоненты вектора  $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \dots, \lambda_N^{(0)}(x))$  по формуле:

$$\lambda_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^T (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^{(0)}(x, t) dt = \\ & \min_{k=1, N} \left( \int_0^T (c(x, \tau_k, t) + a_k) \rho^{(0)}(x, t) dt \right); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2.4. Проинициализируем параметр  $k$ :  $k := 0$ . Пусть вычислены  $k$  приближений:  $u^{(k)}(x, t), \mu^{(k)}(t), t \in \hat{T}; s^{(k)}$ .

2.5.  $(k+1)$ -й шаг.

2.5.1. Фиксируем параметры  $\mu^{(k)}(t), s^{(k)}$ . Инициализируем  $q$ :  $q := k$ .

2.5.2. Решаем задачу Коши (3.1.47) при  $u = u^{(q)}(x, t), t \in \hat{T}$  и находим фазовую переменную  $\rho^{(q)} = \rho^{(q)}(x, t), t \in \hat{T}$ .

2.5.3. Вычисляем компоненты вектора  $\lambda^{(q)}(x) = (\lambda_1^{(q)}(x), \dots, \lambda_N^{(q)}(x))$  по формуле:

$$\lambda_i^{(q)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^T (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^{(q)}(x, t) dt = \\ & = \min_{k=1, N} \left( \int_0^T (c(x, \tau_k, t) + a_k) \rho^{(q)}(x, t) dt \right); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2.5.4. Решаем задачу (3.1.61) при фиксированных параметрах  $\mu^{(k)}(t), s^{(k)}, u = u^{(q)}(x, t), \rho = \rho^{(q)}(x, t), t \in \hat{T}, \lambda^{(q)}(x)$  и находим

$$v(t) = v^{(q)}(t), t \in \hat{T}.$$

2.5.5. Вычисляем производную Фреше функционала  $L(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \mu(\cdot), s)$  по переменной  $u(x, t)$  в точке  $(u^{(q)}(x, \cdot), \rho^{(q)}(x, \cdot), \mu^{(k)}(\cdot), s^{(k)})$  по формуле:

$$\frac{\partial L^{(q)}(x, \cdot)}{\partial u} = 2\beta_1 u^{(q)}(x, t) - \frac{\partial f(\rho^{(q)}(x, t), u^{(q)}(x, t), t)}{\partial u} v^{(q)}(t), t \in \hat{T}.$$

Вычисляем следующее приближение управляющей переменной по формуле:

$$u^{(q+1)}(x, t) = u^{(q)}(x, t) - \alpha_q \frac{\partial L(u^{(q)}(x, \cdot), \rho^{(q)}(x, \cdot), \mu^{(k)}(\cdot), s_k)}{\partial u},$$

где параметр  $\alpha_q > 0$  выбирается с помощью одного из способов, используемых в градиентных методах, например, априорно:  $\alpha_q = \frac{1}{q + C}$ ,  $C$  – некоторая положительная константа.

2.5.6. Проверяем выполнение условий:

$$\begin{aligned} \left\| u^{(q+1)}(x, \cdot) - u^{(q)}(x, \cdot) \right\|_{L^2(0, T)} &< \varepsilon, \\ \left| L^{(q+1)} - L^{(q)} \right| &< \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.1.63}$$

где  $L^{(q)} = L^{(q)}(u^{(q)}(x, \cdot), \rho^{(q)}(x, \cdot), \mu^{(k)}(\cdot), s_k)$ . Если хотя бы одно из условий (3.1.63) выполняется, то полагаем:  $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(m)}(x)$ ,  $u^{(k+1)} = u^{(m)}(x, t)$ ,  $\rho^{(k+1)} = \rho^{(m)}(x, t)$ ,  $t \in \hat{T}$ , где  $m$  – номер итерации, на которой выполняется (3.1.63), и осуществляем переход на шаг 2.1.6. В противном случае –  $q := q + 1$  и переход на шаг 2.5.2.

2.6. Вычисляем новое приближение двойственной переменной:

$$\mu^{(k+1)}(t) = \mu^{(k)}(t) + s^{(k)} \cdot \max(0, g(t, \rho^{(k+1)}(x, t))), \quad t \in 0, T.$$

2.7. Определяем относительное изменение двойственной переменной:

$$\Delta\mu_{\max} = \max_{t \in 0, T} \frac{\left| \mu^{(k+1)}(t) - \mu^{(k)}(t) \right|}{1 + \left| \mu^{(k+1)}(t) \right|}.$$

Если  $\Delta\mu_{\max} > \Delta_\mu$ , то  $s^{(k+1)} = \beta_s \cdot s^{(k)}$ .

Если  $\Delta\mu_{\max} \leq \Delta\mu$ , то

$$s^{(k+1)} = \begin{cases} s^{(k)} \cdot \beta_s, & \max(0, g(t, \rho^{(k+1)}(x, t))) > \gamma \max(0, g(t, \rho^{(k)}(x, t))) \\ s^{(k)}, & \max(0, g(t, \rho^{(k+1)}(x, t))) \leq \gamma \max(0, g(t, \rho^{(k)}(x, t))). \end{cases}$$

2.8. Проверяем выполнение критерия окончания итерационного процесса:

$$\begin{aligned} & \left\| u^{(k+1)}(x, \cdot) - u^{(k)}(x, \cdot) \right\|_{L^2(0, T)} < \varepsilon, \\ & \left| I_2^{(k+1)} - I_2^{(k)} \right| < \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.1.64}$$

где  $I_2^{(k)} = I_2^{(k)}(\lambda^{(k)}(x), u^{(k)}(x, \cdot), \rho^{(k)}(x, \cdot))$ . Если хотя бы одно из условий (3.1.64) выполняется, то переходим на шаг 3. В случае невыполнения этих критериев – меняем  $k := k + 1$  и осуществляем переход на шаг 2.5.

3. В качестве приближения оптимального решения задачи выбираем набор  $(\lambda^{(l)}(x), u^{(l)}(x, \cdot), \rho^{(l)}(x, \cdot))$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполняется хотя бы один из критериев (3.1.64).

4. Вычисляем приближенное оптимальное значение целевого функционала (3.1.45) при  $\rho(x, t) = \rho^{(l)}(x, t)$ ,  $u(x, t) = u^{(l)}(x, t)$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(l)}(x)$ ,  $x \in \hat{\Omega}$ ,  $t \in \hat{T}$ .

Конец работы алгоритма.

### 3.1.6. Обобщение задачи на случай наличия интегральных ограничений на фазовую переменную

На практике часто встречаются задачи, в которых накладываются условия на состояния управляемой системы. Так, например, при описании экономических ситуаций необходимо учитывать ограничения на объем выпускаемой продукции, спрос, производственные мощности и т. д. При исследовании экологических и социальных систем должны быть учтены ограничения на емкость среды. Поэтому рассмотрим более интересный вариант динамической задачи оптимального разбиения множества, в которой накладываются совместные ограничения на разбиение и фазовую переменную [56].

Под динамической задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subset E_n$  с интегральными ограничениями будем понимать следующую задачу.



**Задача А14**

$$J(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in \Phi}, \quad (3.1.65)$$

где функционал  $J(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot))$  записывается в виде (3.1.42), а допустимое множество решений имеет следующий вид:

$$\Phi = \{(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) : \bar{\omega} \in P_N(\Omega), u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times 0, T);$$

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t), t \in 0, T, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x); \int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \}.$$

Оптимальным решением задачи (3.1.65) будем называть допустимую тройку  $(\bar{\omega}^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ , которая доставляет минимальное значение функционалу  $J$ .

При помощи характеристических функций подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  функционал и интегральные ограничения задачи (3.1.65) перепишутся в следующем виде:

$$I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \beta_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dx dt;$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}.$$

И, таким образом, динамическая задача оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями (3.1.65) в терминах характеристических функций подмножеств имеет вид:

$$I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_0}, \quad (3.1.66)$$

где

$$V_0 = \left\{ (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda, u(x, t) \in L_2(\Omega \times 0, T), \right.$$

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in 0, T, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x) \forall x \in \Omega;$$

$$\left. \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \right\}.$$

Условия существования решения задачи (3.1.66) будут приведены ниже.

Согласно теории непрерывных задач ОРМ, множество  $\Lambda$  погружает-

ся в симплекс

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1; 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \forall x \in \Omega \right\}$$

и вместо (3.1.66) решается задача

$$I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1}, \quad (3.1.67)$$

$$V_1 = \left\{ (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda_1, u(x, t) \in L_2 \quad \Omega \times 0, T, \right. \\ \left. \dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in 0, T, \rho(x, 0) = \rho_0(x) \forall x \in \Omega; \right. \\ \left. \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \right\}.$$

Под функционалом Лагранжа задачи (3.1.67) будем понимать функционал

$$h \quad \lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot), \xi = I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) + \\ + \sum_{i=1}^N \xi_i \left( \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt - b_i \right), \quad (3.1.68)$$

определенный на  $V \times \Gamma$ , где

$$V = (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda_1, u(x, t) \in L_2 \quad \Omega \times 0, T, \\ \dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in 0, T, \rho(x, 0) = \rho_0(x) \forall x \in \Omega; \\ \Gamma = \xi \in \mathbf{R}^N : \xi_i \geq 0, i = \overline{1, N}.$$

**Определение** [22]. Пару  $\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot), \xi^*$  будем называть седловой точкой функционала Лагранжа  $h \quad \lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot), \xi$  на множестве  $V \times \Gamma$ , если для всех  $\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V, \xi \in \Gamma$  выполняется соотношение

$$h \quad \lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot), \xi^* \leq h \quad \lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot), \xi^* \leq h \quad \lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot), \xi^* \leq h \quad \lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot), \xi^*.$$

Задача, двойственная к задаче (3.1.67), записывается следующим образом:

$$\chi(\xi) = \min_{\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V} h \lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot), \xi \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma} \quad (3.1.69)$$

Отметим, что задача (3.1.69) является конечномерной, в отличие от задачи (3.1.67), – бесконечномерной задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве.

По аналогии с [22] нетрудно показать, что для того, чтобы задачи (3.1.67) и (3.1.69) были связаны соотношением двойственности  $I_1^* = \chi^*$ , причем верхняя грань в двойственной задаче достигалась, необходимо и достаточно, чтобы функционал (3.1.69) имел седловую точку в смысле введенного определения. Таким образом, решение пары двойственных задач (3.1.67) и (3.1.69) эквивалентно нахождению седловой точки функционала Лагранжа  $h \lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot), \xi$  на множестве  $V \times \Gamma$ .

Уточним вид функции  $\chi(\xi)$ . Пусть  $\xi \in \Gamma$  – произвольный, но фиксированный вектор. Рассмотрим задачу

$$h \lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot), \xi \rightarrow \min_{\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V} \quad (3.1.70)$$

Справедлива

**Теорема 3.6.** Для того, чтобы процесс  $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)) \in V$  доставлял минимальное значение функционалу задачи (3.1.69) при произвольном фиксированном  $\xi \in \Gamma$ , необходимо и достаточно, чтобы почти всюду для  $x \in \Omega$  выполнялась равенство

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^N \left[ (\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho^*(x, t) \lambda_i^*(x) \right] + \beta_1 u^{*2}(x, t) \right) dt = \quad (3.1.71)$$

$$= \min_{\substack{\lambda(x) \in \Lambda_2 \\ u(x, \cdot) \in L_2(\overline{[0, T]})}} \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N \left[ \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i \right] \rho(x, t) \lambda_i(x) \right) \beta_1 u^2(x, t) dt,$$

где  $\Lambda_2 = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}$ , функция  $\rho(x, t)$  – решение задачи Коши (3.1.43), которое соответствует функции управления  $u(x, \cdot)$ .

Доказательство аналогично теореме 3.1.

С целью более детального представления целевой функции задачи (3.1.69) для каждой точки  $x \in \Omega$  будем решать задачу оптимального управления

$$P_{\xi} \lambda(x), u(x, \cdot) = \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt \rightarrow \min_{\substack{\lambda(x) \in \Lambda_2 \\ u(x, \cdot) \in L_2(0, T)}}$$

при условии

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in [0, T], \rho(x, 0) = \rho_0(x).$$

Будем рассматривать эту задачу как задачу оптимального управления с вектором параметров  $\lambda(x)$ . Ее оптимальное решение для каждого фиксированного набора параметров  $\lambda(x)$ , полученное с помощью принципа максимума Понтрягина, имеет следующий вид:

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2\beta_1} \int_{\tau_i=1}^t \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma; \quad (3.1.72)$$

$$\rho^*(x, t) = \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_{\theta=1}^t \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma d\theta. \quad (3.1.73)$$

Введем обозначения:  $Q_i(x, t) = \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i$ . Подставив найденные выражения для функций  $u^*(x, t)$  и  $\rho^*(x, t)$  в функционал  $P_{\xi} \lambda(x), u(x, \cdot)$ , получим задачу условной минимизации функции  $N$  переменных:

$$\bar{P}_{\xi}(\lambda(x)) \rightarrow \min_{\lambda(x) \in \Lambda_2}, \quad (3.1.74)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\xi}(\lambda(x)) = & \sum_{j=1}^N \left( \int_0^T Q_j(x, t) \rho_0(x) \lambda_j(x) dt - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T Q_j(x, t) \int_0^t \int_{\theta=1}^t \sum_{i=1}^N Q_i(x, \sigma) \lambda_i(x) \lambda_j(x) d\sigma d\theta dt \right) + \\ & + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_{\tau_i=1}^t \sum_{i=1}^N Q_i(x, \sigma) \lambda_i(x) d\sigma \right\}^2 dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что целевая функция задачи (3.1.74) – квадратичная. Найдем аналитическое ее решение.

Далее, для упрощения математических выкладок, опустим аргумент  $x$

в функциях  $Q_i(x, t)$ ,  $\rho_0(x)$  и компонентах вектора  $\lambda(x)$  с учетом того, что задача (3.1.74) формулируется для каждого произвольного, но фиксированного  $x \in \Omega$ .

Исследуем свойства функции  $\bar{P}_\xi$   $\lambda$ . Выпишем ее градиент и матрицу Гессе.  $k$ -я компонента вектора градиента имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k} = & -\frac{1}{2\beta_1} \left[ \sum_{i=1}^N \int_0^T Q_k(t) \int_0^t Q_i(\sigma) d\sigma d\theta dt \lambda_i + \sum_{j=1}^N \int_0^T Q_j(t) \int_0^t Q_k(\sigma) d\sigma d\theta dt \lambda_j \right] + \\ & + \frac{1}{2\beta_1} \sum_{i=1}^N \int_0^T \left( \int_0^t Q_i(\sigma) d\sigma \lambda_i \cdot \int_0^t Q_k(\sigma) d\sigma \right) dt + \rho_0 \int_0^T Q_k(t) dt = \\ & = \rho_0 \int_0^T Q_k(t) dt - \\ & - \frac{1}{2\beta_1} \sum_{i=1}^N \lambda_i \int_0^T \int_0^t Q_k(t) Q_i(\sigma) + Q_i(t) Q_k(\sigma) d\sigma d\theta + \int_0^T Q_i(\sigma) d\sigma \cdot \int_0^T Q_k(\sigma) d\sigma \Big] dt, \end{aligned}$$

а элементы матрицы Гессе записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} = \\ = -\frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \left[ \int_0^t Q_k(t) Q_s(\sigma) + Q_s(t) Q_k(\sigma) d\sigma d\theta - \int_0^t Q_s(\sigma) d\sigma \cdot \int_0^t Q_k(\sigma) d\sigma \right] dt. \end{aligned}$$

Упростим последнее выражение, для этого введем следующее обозначение:

$$\int_0^t Q_s(\sigma) d\sigma = W_s(t).$$

Отметим, что  $W_s(T) = 0$ . Тогда:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} = -\frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \left[ Q_k(t) \int_0^t W_s(\theta) d\theta + Q_s(t) \int_0^t W_k(\theta) d\theta - W_s(t) \cdot W_k(t) \right] dt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям для определенного интеграла, приходим к равенству:

$$\int_0^T Q_k(t) \int_0^t W_s(\theta) d\theta dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \int_0^t W_s(\theta) d\theta; \quad du = \frac{d}{dt} \left( \int_0^t W_s(\theta) d\theta \right) dt = W_s(t) \\ \\ dv = Q_k(t) dt; \quad v = \int_0^t Q_k(t) dt + C_k \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^t W_s(\theta) d\theta \cdot -W_k(t) + C_k \left[ \int_0^T - \int_0^T -W_k(t) + C_k \quad W_s(t) dt = \right.$$

$$= C_k \int_0^T W_s(\theta) d\theta + \int_0^T W_k(t) \cdot W_s(t) dt - C_k \int_0^T W_s(\theta) d\theta = \int_0^T W_k(t) \cdot W_s(t) dt$$

Меняя индексы k и s местами, получаем:

$$\int_0^T Q_s(t) \int_0^t W_k(\theta) d\theta dt = \int_0^T W_k(t) \cdot W_s(t) dt .$$

Итак, выражение для элементов матрицы Гессе функции  $\bar{P}_\xi(\lambda)$  имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} = -\frac{1}{2\beta_1} \int_0^T [W_s(t) \cdot W_k(t)] dt, \quad k, s = \overline{1, N}. \quad (3.1.75)$$

Очевидно, что главный минор матрицы первого порядка отрицательный. Для минора второго порядка удастся получить только следующую оценку снизу:

$$\Delta_2 = \frac{1}{4\beta_1^2} \left( \int_0^T W_s^2(t) dt \cdot \int_0^T W_k^2(t) dt - \left( \int_0^T W_s(t) \cdot W_k(t) dt \right)^2 \right) \geq$$

$$\geq -\frac{1}{16\beta_1^2} \left( \int_0^T W_s^2(t) dt - \int_0^T W_k^2(t) dt \right)^2 .$$

Кроме того, легко привести примеры такого задания функций  $c(x, \tau_i, t)$ , при котором минор второго порядка будет отрицательным. Таким образом, в общем случае ничего определенного о выпуклости или вогнутости функции  $\bar{P}_\xi(\lambda)$  сказать нельзя. И для решения задачи (3.1.67) приходится ограничиваться лишь необходимыми условиями оптимальности, или, возможно, применять другой подход к учету интегральных огра-

ничений на фазовую переменную  $\rho(x, t)$ .

В частном случае, когда  $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)f(t)$ , где  $f(t) \in L_2$   $0, T$  — одна и та же функция для всех  $i = \overline{1, N}$ , выражение для компонент матрицы Гессе упрощаются:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} = -\frac{1}{6\beta_1} c_s \cdot c_k \int_t^T f^2(\sigma) d\sigma.$$

Легко показать, что только главный минор первого порядка такой матрицы  $\frac{\partial^2 \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_j^2} = -\frac{T^3}{6\beta_1} Q_j^2 \xi_j < 0$ , а остальные главные миноры равны

нулю. Таким образом, в соответствии с критерием Сильвестра, матрица Гессе является отрицательно определенной. Следовательно, функция  $\bar{P}_\xi \lambda$  является выпуклой вверх и достигает своего минимального значения в крайних точках множества  $\Lambda_2$ . Крайние точки множества  $\Lambda_2$  являются значениями характеристических функций подмножеств  $\Omega_i, i = \overline{1, N}$ , образующих разбиение множества  $\Omega$ . Поэтому в случае, когда  $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)f(t)$ , задача (3.1.66) эквивалентна задаче (3.1.67). Тем самым теоретически обоснованы переход от задачи бесконечномерного программирования с булевыми переменными к задаче бесконечномерного программирования на симплексе и возможность применения к последней теории двойственности.

Далее будем рассматривать задачу (3.1.66) и эквивалентную ей задачу (3.1.67), в которых  $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)f(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Учитывая тот факт, что  $\bar{P}_\xi \lambda$  достигает своего минимального значения в крайних точках симплекса  $\Lambda_2$ , а для этих точек выполняются равенства:  $\lambda_i^2 = \lambda_i$ ,  $\lambda_i \lambda_j = 0$  при  $i \neq j$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , то можно упростить выражение функционала  $\bar{P}_\xi \lambda$ , после чего — найти решение задачи (3.1.74) в аналитическом виде. После упрощения функционал  $\bar{P}_\xi \lambda$  принимает такой вид:

$$\bar{P}_\xi(\lambda(x)) = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^T Q_j(x, t) p_0(x) \lambda_j(x) dt - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. -\frac{1}{2\beta_1} \int_0^T Q_j(x, t_j) \int_0^t \sum_{i=1}^N Q_i(x, \sigma) \lambda_i(x) \lambda_j(x) d\sigma d\theta dt \right\} + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T \sum_{i=1}^N Q_i(x, \sigma) \lambda_i(x) d\sigma \right\}^2 dt = \right. \\
 & = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^T Q_j(x, t) \rho_0(x) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int_0^t Q_j(x, t) Q_j(x, \theta) d\theta d\xi dt + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T Q_j(x, \theta) d\theta \right\}^2 dt \right) \lambda_j(x).
 \end{aligned}$$

Аналитическое решение задачи (3.1.74) при фиксированном параметре  $\xi \in \Gamma$  запишется так:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \xi_i) = \min_{k=1, \overline{N}} B_k(x; \xi_k), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (3.1.76)$$

где величина  $B_i(x; \xi_i)$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_i(x; \xi_i) = & \int_0^T Q_j(x, t) \rho_0(x) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int_0^t Q_j(x, \sigma) Q_j(x, \theta) d\theta d\sigma dt + \\
 & + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T Q_j(x, \theta) d\theta \right\}^2 dt.
 \end{aligned}$$

Если обозначить через  $G_j \ x, t = \int_0^t Q_j \ x, \theta \ d\theta$  и применить формулу интегрирования по частям во втором и третьем слагаемых, то выражение для  $B_i(x; \xi_i)$  преобразуется так:

$$B_j(x; \xi_j) = \int_0^T Q_j \ x, t \ \rho_0(x) dt - \quad (3.1.77)$$

$$-\frac{1}{4\beta_1} \left( T \cdot G_j^2 \ x, T - 2 \int_0^T Q_j \ x, t \cdot \left( \int_0^t G_j \ x, \sigma \ d\sigma \right) dt - \int_0^T G_j^2 \ x, t \ dt \right).$$



Учитывая полученное аналитическое решение задачи (3.1.74), целевую функцию двойственной задачи (3.1.69) записываем следующим образом:

$$\chi(\xi) = \int_{\Omega} \min_{j=1, \overline{N}} B_j(x; \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j. \quad (3.1.78)$$

Принимая во внимание вышеизложенное, можно сделать вывод о справедливости следующего утверждения.

**Утверждение 3.1.** Пусть в функционале (3.1.42) функции  $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)f(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , где  $c(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$  функции, измеримые по переменной  $x$  при произвольном фиксированном векторе параметров  $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $f(t) \in L_2[0, T]$ . Для того чтобы допустимое разбиение  $\bar{\omega}^* = \Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  было оптимальным для задачи **A14**, необходимо существование неотрицательных значений параметров  $\xi_1, \dots, \xi_N$ , таких, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T Q_j(x, t) \rho_0(x) dt - \\ & - \frac{1}{4\beta_1} \left( T \cdot G_j^2(x, T) - 2 \int_0^T Q_j(x, t) \cdot \left( \int_0^t G_j(x, \sigma) d\sigma \right) dt - \int_0^T G_j^2(x, t) dt \right) \leq \\ & \leq \int_0^T Q_k(x, t) \rho_0(x) dt - \\ & - \frac{1}{4\beta_1} \left( T \cdot G_k^2(x, T) - 2 \int_0^T Q_k(x, t) \cdot \left( \int_0^t G_k(x, \sigma) d\sigma \right) dt - \int_0^T G_k^2(x, t) dt \right) \end{aligned}$$

$j \neq k$ , почти всюду для  $x \in \Omega_j^*$ ,  $j, k = \overline{1, N}$ .

**Утверждение 3.2.** Пусть в функционале (3.1.42) функции  $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)f(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , где  $c(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$  функции, измеримые по переменной  $x$  при произвольном фиксированном векторе параметров  $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $f(t) \in L_2[0, T]$ . Тогда седловая точка

$\lambda^*(\cdot, \cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot), \xi^*$  функционала Лагранжа (3.1.68) на множестве

$V \times \Gamma$  определяется для  $i = 1, 2, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \xi_i^*) = \min_{k=1, N} B_k(x; \xi_k^*), \\ 0, & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (3.1.79)$$

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2\beta_1} \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma; \quad (3.1.80)$$

$$\rho^*(x, t) = \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma d\theta, \quad (3.1.81)$$

где

$$B_j(x; \xi_j) = \int_0^T Q_j(x, t; \xi_j) \rho_0(x) dt - \\ - \frac{1}{4\beta_1} \left( T \cdot G_j^2(x, T; \xi_j) - 2 \int_0^T Q_j(x, t; \xi_j) \cdot \left( \int_0^t G_j(x, \sigma; \xi_j) d\sigma \right) dt - \int_0^T G_j^2(x, t; \xi_j) dt \right), \\ Q_i(x, t; \xi_i) = \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i, \quad G_j(x, t; \xi_j) = \int_0^t Q_j(x, \theta; \xi_j) d\theta,$$

а в качестве  $\xi_1^*, \dots, \xi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (3.1.69), приведенной к виду (3.1.78).

Для решения задачи максимизации негладкой вогнутой функции (3.1.78) на множестве  $\xi \in \Gamma$  применяется метод обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов –  $r$ -алгоритм Шора [109,111]. При этом от задачи (3.1.78) осуществляется переход к задаче безусловной максимизации посредством введения в целевую функцию негладкой штрафной функции множества  $\Gamma$ :

$$\bar{\chi}(\xi) = \chi(\xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \rightarrow \max_{\xi \in E^N}, \quad (3.1.82)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число (значительно больше максимального из множителей Лагранжа).

**Утверждение 3.3.** Если вектор правых частей интегральных ограни-

чений-неравенств задачи (3.1.65) удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq T \int_{\Omega} \left( \rho_0(x) - \frac{\beta_0 T^2}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx, \quad (3.1.83)$$

где  $\bar{c}(x) = \min_{i=1, N} \left( \min_{t \in 0, T} c(x, \tau_i, t) + a_i \right)$ ,  $\forall x \in \Omega$ , то множество допустимых решений задачи (3.1.65) не пусто.

**Доказательство.** Просуммируем интегральные ограничения задачи (3.1.65):

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx dt \leq \sum_{j=1}^N b_j, \quad (3.1.84)$$

и оценим левую часть этого соотношения с учетом (3.1.81) и того, что  $\xi \in \Gamma$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \sum_{i=1}^N \beta_0 c(x, \tau_i, \sigma) + a_i + \xi_i \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt = \\ &= T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \int_0^t \sum_{i=1}^N \beta_0 c(x, \tau_i, \sigma) + a_i + \xi_i \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\ &\leq T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \int_0^t \sum_{i=1}^N \beta_0 c(x, \tau_i, \sigma) + a_i \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\ &\leq T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \int_0^t \sum_{i=1}^N \left( \min_{v \in 0, T} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) d\sigma d\theta dt \right) dx = \\ &= T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \frac{T^3}{3} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left( \min_{v \in 0, T} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) dx \leq \\ &\leq T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \frac{T^3}{3} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \bar{c}(x) \lambda_i(x) dx = T \int_{\Omega} \left( \rho_0(x) - \frac{\beta_0 T^2}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx \quad (3.1.85) \end{aligned}$$

Сравнивая выражения (3.1.84) и (3.1.85), приходим к выводу, что в случае выполнения для вектора  $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$  условия (3.1.83) всегда найдется разбиение  $\bar{\omega} = \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  множества  $\Omega$  из класса  $\Sigma_{\Omega}^N$ , удовлетворяющее интегральным условиям. В этом случае множество

допустимых разбиений не пустое. Иначе может оказаться, что  $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i \subset \Omega$ , и не то что оптимального, но и одного допустимого решения задача (3.1.65) не будет иметь.

Теперь рассмотрим общий случай задачи, когда на функции  $c(x, \tau_i, t)$  не накладываются какие-либо условия.

В отличие от вышеизложенного подхода, сначала решим задачу (3.1.70) по  $\lambda(\cdot)$ , учитывая линейность функционала по этой переменной, а также структуру множества  $\Lambda_2$ , на котором она задается.

Таким образом, согласно теореме 3.6, задача (3.1.70) сводится к совокупности следующих задач: почти всюду для  $x \in \Omega$

$$P_{\xi} \lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \rightarrow \min_{\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \in V^x} \quad (3.1.86)$$

где

$$P_{\xi} \lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) = \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt, \quad (3.1.87)$$

а  $V^x$  – сечение множества  $V$  при фиксированом  $x \in \Omega$ .

Очевидно, что функция  $P_{\xi} \lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)$  достигает своего минимального значения по переменной  $\lambda(x)$ , при фиксированных остальных параметрах, в точке  $\lambda^*(x)$ , компоненты которой вычисляются по формуле:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i \rho(x, t) dt = \\ & = \min_{k=1, N} \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_k, t) + a_k) + \xi_k \rho(x, t) dt \\ 0 & \text{в противном случае, } \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.1.88)$$

Подставив выражение (3.1.88) в функционал  $P_{\xi} \lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)$ , получим следующую задачу оптимального управления:

$$\hat{P}_{\xi} u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \rightarrow \min_{u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \in V_2^x} \quad (3.1.89)$$

где

$$\hat{P}_\xi u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) =$$

$$= \min_{k=1, N} \int_0^T (\beta_0(c(x, \tau_k, t) + a_k) + \xi_k) \rho(x, t) dt + \beta_1 \int_0^T u^2(x, t) dt,$$

$$V_2^x = (u(x, t), \rho(x, t)) : u(x, t) \in L_2 \Omega \times 0, T, \quad ,$$

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in 0, T, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Обозначим через  $i(x)$  индекс, на котором для соответствующей точки  $x \in \Omega$  достигается минимум первого слагаемого в функционале задачи (3.1.89):

$$i(x) : \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_{i(x)}, t) + a_{i(x)}) + \xi_{i(x)} \rho(x, t) dt =$$

$$= \min_{k=1, N} \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_k, t) + a_k) + \xi_k \rho(x, t) dt.$$

При помощи принципа максимума Понтрягина для задачи (3.1.89) получим оптимальное решение:

$$u^*(x, t; \xi) = \frac{1}{2\beta_1} \int_T^t \beta_0(c(x, \tau_{i(x)}, \sigma) + a_{i(x)}) + \xi_{i(x)} d\sigma; \quad (3.1.90)$$

$$\rho^*(x, t; \xi) = \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_0^\theta \beta_0(c(x, \tau_{i(x)}, \sigma) + a_{i(x)}) + \xi_{i(x)} d\sigma d\theta. \quad (3.1.91)$$

Далее будем использовать такое обозначение:

$$Q_i(t; \xi_i) = \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i.$$

С учетом вышеизложенного, седловая точка  $((\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot), \xi^*))$  функционала Лагранжа (3.1.68) на множестве  $V \times \Gamma$  определяется для  $i = 1, 2, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i^* \rho^*(x, t) dt = \\ & = \min_{k=1, N} \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_k, t) + a_k) + \xi_k^* \rho^*(x, t) dt; \\ 0 & \text{в противном случае, } \quad i = 1, 2, \dots, N; \end{cases} \quad (3.1.92)$$

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \beta_0(c(x, \tau_{i(x)}, \sigma) + a_{i(x)}) + \xi_{i(x)}^* d\sigma; \quad (3.1.93)$$

$$\rho^*(x, t) = \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_0^\theta \beta_0(c(x, \tau_{i(x)}, \sigma) + a_{i(x)}) + \xi_{i(x)}^* d\sigma d\theta, \quad (3.1.94)$$

$$\begin{aligned} \text{где } i(x): \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_{i(x)}, t) + a_{i(x)}) + \xi_{i(x)}^* \rho^*(x, t) dt = \\ = \min_{k=1, N} \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_k, t) + a_k) + \xi_k^* \rho^*(x, t) dt, \end{aligned} \quad (3.1.95)$$

или (что то же)

$$i(x): \lambda_i^*(x) = 1, \quad (3.1.96)$$

а в качестве  $\xi_1^*, \dots, \xi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (3.1.69), приведенной к виду:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(\xi) = \int_{\Omega} \int_0^T \left[ Q_{i(x)}(t; \xi_{i(x)}) \left[ \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_0^\theta Q_{i(x)}(\sigma; \xi_{i(x)}) d\sigma d\theta \right] \right] dt dx + \\ + \frac{1}{4\beta_1} \int_{\Omega} \int_0^T \left[ \int_0^\theta Q_{i(x)}(\sigma; \xi_{i(x)}) d\sigma \right]^2 dt dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j. \end{aligned} \quad (3.1.97)$$

Следует отметить, что, сочетая выражения (3.1.29) и (3.1.96), можно прийти к выводу, что формула (3.1.92), которая определяет оптимальное разбиение в задаче (3.1.66), фактически является операторным уравнением. Этот факт соответствующим образом отражается при разработке приближенного алгоритма решения задачи **A14** (или эквивалентной задачи **B14**).

Для решения задачи максимизации негладкой вогнутой функции (3.1.97) на множестве  $\xi \in \Gamma$  можно также применить г-алгоритм Шора, переходя к задаче безусловной максимизации посредством введения в целевую функцию негладкой штрафной функции множества  $\Gamma$ :

$$\bar{\chi}(\xi) = \hat{\chi}(\xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \rightarrow \max_{\xi \in E^N}, \quad (3.1.98)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число.

**Алгоритмы решения динамической задачи ОРМ с интегральными ограничениями**

**Алгоритм 1** (основан на утверждении 3.2)

1. Множество  $\Omega$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение двойственных переменных  $\xi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Пусть  $\hat{\Omega}$  – множество узлов  $x$  пространственной сетки. Задаем: значение функции начальных условий  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  в узлах  $x \in \hat{\Omega}$ . Покрываем отрезок  $[0, T]$  сеткою с шагом  $h_t$ , обозначим через  $\hat{T} = t: t = lh_t, l = \overline{1, n_T}$  множество узлов сетки по временной переменной.

2. Для каждого узла  $x \in \hat{\Omega}$ :

2.1. Вычисляем  $\lambda_i^{(0)}(x)$ ,  $i = \overline{1, N}$  по формулам (3.1.76), (3.1.77) при

$$\xi_i = \xi_i^{(0)}, \quad i = \overline{1, N}.$$

2.2. Вычисляем управляющую функцию  $u^{(0)}(x, t)$  и фазовую траекторию  $\rho^{(0)}(x, t)$  по формулам (3.1.72) и (3.1.73) соответственно при  $\lambda = \lambda^{(0)}(x)$ .

3. Вычисляем компоненты  $g_{\bar{\chi}}^{\xi_i}$ ,  $i = \overline{1, N}$  обобщенного градиента функции  $\bar{\chi}(\xi)$  в точке  $\xi = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$  при  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\xi_i = \xi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $u^{(0)}(x, t)$ ;  $\rho^{(0)}(x, t)$ .

4. Выбираем начальный шаг  $h_0 > 0$   $r$ -алгоритма, находим:

$$\xi^{(1)} = \xi^{(0)} + h_0 g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\xi^{(0)})$$

и осуществляем переход на второй шаг.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  шагов алгоритма получены определенные значения  $\xi^{(k)}$ ,  $\lambda^{(k-1)}(x)$ ,  $u^{(k-1)}(x, \cdot)$ ,  $\rho^{(k-1)}(x, \cdot)$ .

$(k+1)$ -й шаг:

5. Для каждого узла  $x \in \hat{\Omega}$ :

5.1. Вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(x)$  по формулам (3.1.76), (3.1.77) при

$\xi = \xi^{(k)}$ ; вычисляем управляющую функцию  $u^{(k)}(x, \cdot)$  и фазовую траекторию  $\rho^{(k)}(x, \cdot)$  по формулам (3.1.72) и (3.1.73) соот-

ветственно при  $\lambda = \lambda^{(k)}(x)$ .

5.2. Вычисляем приближенно компоненты вектора обобщенного градиента  $g_{\tilde{\rho}}^{\xi}(\xi^{(k)})$  при  $\lambda(\cdot) = \lambda^{(k)}(x)$ ,  $\xi_i = \xi_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $u^{(k)}(x, \cdot)$ ,  $\rho^{(k)}(x, \cdot)$ .

6. Осуществляем  $(k+1)$ -й шаг  $\tau$ -алгоритма для максимизации функции  $\bar{\chi}(\xi)$ , краткая схема которого записывается так:

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\tilde{\chi}}^{\xi}(\xi^{(k)}),$$

где  $B_{k+1}^{\xi}$  – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E_N$ , пересчет которого производится по следующим формулам:  $B_0^{\xi} = I_N$ , ( $I_N$  – единичная матрица),

$$B_{k+1}^{\xi} = B_k^{\xi} R_{\alpha} \left( \frac{r_k}{\|r_k\|} \right), \quad r_k = g_{\tilde{\chi}}^{\xi}(\xi^{(k)}) - g_{\tilde{\chi}}^{\xi}(\xi^{(k-1)}),$$

$R_{\alpha} \zeta$  – оператор растяжения пространства в направлении  $\zeta$  с коэффициентом растяжения  $\alpha$ , матричная форма которого имеет вид:

$$R_{\alpha} \zeta = I_N + (\alpha - 1) \zeta \zeta^T; \quad \tilde{g}_{\tilde{\chi}}^{\xi} = B_{k+1}^{\xi T} g_{\tilde{\chi}}^{\xi}(\xi^{(k)});$$

$h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума функции по рассматриваемому направлению.

7. Проверяем условия

$$\left\| g_{\tilde{\chi}}^{\xi}(\xi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \left\| \xi^{(k)} - \xi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon. \quad (3.1.99)$$

Если ни одно из условий не выполняется, то осуществляем переход на  $(k+2)$ -й шаг, иначе – на шаг 8.

8. Полагаем,  $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ ,  $\xi_i^* = \xi_i^{(l)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $u^*(x, \cdot) = u^{(l)}(x, \cdot)$ ,  $\rho^*(x, \cdot) = \rho^{(l)}(x, \cdot)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполняется хотя бы одно из условий (3.1.99) окончания итерационного процесса.

9. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала  $I_1(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  и, для контроля правильности результата, значение функции (3.1.78) при  $\xi^*$ ,  $\lambda^*(\cdot)$ ,  $u^*(\cdot, \cdot)$ ,  $\rho^*(\cdot, \cdot)$ .

Алгоритм 1 описан.



**Алгоритм 2** (основан на формулах (3.1.92) – (3.1.97))

1. Множество  $\Omega$  покрываем прямоугольной сеткой,  $\hat{\Omega}$  – множество узлов  $x$  пространственной сетки. Задаем начальное приближение двойственных переменных  $\xi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ; значение функции начальных условий  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  в узлах  $x \in \hat{\Omega}$ . Покрываем отрезок  $[0, T]$  сеткою с шагом  $h_t$ , обозначим через  $\hat{T} = t : t = lh_t, l = \overline{1, n_T}$  множество узлов сетки по временной переменной.

2. Для каждого узла  $x \in \hat{\Omega}$ :

2.1. Для каждого индекса  $i = \overline{1, N}$  вычисляем значение функции  $\rho(x, t; \xi_i)$  по формуле (3.1.91) при  $\xi_i = \xi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Вычисляем с помощью любой квадратурной формулы интегралы:

$$A_i = \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i \rho(x, t; \xi_i) dt.$$

Находим:

$$\lambda_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & A_i = \min_{k=1, N} A_k \\ 0 & \text{в противном случае, } i = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Предположим  $i(x)$ :  $\lambda_{i(x)}^{(0)}(x) = 1$ ;  $\rho(x, t; \xi_{i(x)})$ .

2.2. Вычисляем управляющую функцию  $u^{(0)}(x, t)$  и фазовую траекторию  $\rho^{(0)}(x, t)$  по формулам (3.1.90) и (3.1.91) соответственно.

2.3. Вычисляем компоненты  $g_{\lambda}^{\xi_i}$ ,  $i = \overline{1, N}$  обобщенного градиента функции  $\bar{\lambda}(\xi)$  в точке  $\xi = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$  при следующих параметрах:  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\xi_i = \xi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $u^{(0)}(x, t)$ ,  $\rho^{(0)}(x, t)$ .

2.4. Выбираем начальный шаг  $h_0 > 0$  r-алгоритма, находим

$$\xi^{(1)} = \xi^{(0)} + h_0 g_{\lambda}^{\xi}(\xi^{(0)})$$

и осуществляем переход на второй шаг.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  шагов алгоритма получены определенные значения  $\xi^{(k)}$ ,  $\lambda^{(k-1)}(x)$ ,  $u^{(k-1)}(x, \cdot)$ ,  $\rho^{(k-1)}(x, \cdot)$ .

( $k+1$ )-й шаг:

а) для каждого индекса  $i = \overline{1, N}$  вычисляем значение функции  $\rho(x, t; \xi_i)$  по формуле (3.1.91) при  $\xi_i = \xi_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Вычисляем с помощью какой-либо квадратурной формулы интегралы

$$A_i = \int_0^T \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i \rho(x, t; \xi_i) dt;$$

б) находим

$$\lambda_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & A_i = \min_{m=1, N} A_m \\ 0 & \text{в противном случае, } i = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Предположим  $i(x)$ :  $\lambda_i^{(k)}(x) = 1$ ;  $\rho(x, t; \xi_i) = \rho(x, t; \xi_{i(x)})$ .

в) вычисляем управляющую функцию  $u^{(k)}(x, t)$  и фазовую траекторию  $\rho^{(k)}(x, t)$  по формулам (3.1.90) и (3.1.91);

г) вычисляем компоненты  $g_{\bar{\chi}}^{\xi_i}$ ,  $i = \overline{1, N}$  обобщенного градиента функции  $\bar{\chi}(\xi)$  в точке  $\xi = (\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_N^{(k)})$  при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ ;  $\xi_i = \xi_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $u^{(k)}(x, t)$ ;  $\rho^{(k)}(x, t)$ ;

д) осуществляем  $(k+1)$ -й шаг  $r$ -алгоритма для максимизации функции  $\bar{\chi}(\xi)$ , краткая схема которого записывается следующим образом:

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\xi}(\xi^{(k)}),$$

где  $B_{k+1}^{\xi}$  – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E_N$ , пересчет которого производится по следующим формулам:  $B_0^{\xi} = I_N$ , ( $I_N$  – единичная матрица),

$$B_{k+1}^{\xi} = B_k^{\xi} R_{\alpha} \left( \frac{\Gamma_k}{\|\Gamma_k\|} \right), \quad \Gamma_k = g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\xi^{(k)}) - g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\xi^{(k-1)}),$$

$R_{\alpha} \zeta$  – оператор растяжения пространства в направлении  $\zeta$  с коэффициентом растяжения  $\alpha$ , матричная форма которого имеет вид:

$$R_{\alpha} \zeta = I_N + (\alpha - 1) \zeta \zeta^T; \quad \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\xi} = B_{k+1}^{\xi T} g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\xi^{(k)});$$

$h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия

оптимума функции по рассматриваемому направлению;

д) проверяем условия

$$\left\| g_{\lambda}^{\xi}(\xi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon \text{ или } \left\| \xi^{(k)} - \xi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon. \quad (3.1.100)$$

Если ни одно из условий не выполняется, то осуществляем переход на  $(k+2)$ -й шаг, иначе – к пункту е);

е) считаем,  $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ ,  $\xi_i^* = \xi_i^{(l)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $u^*(x, \cdot) = u^{(l)}(x, \cdot)$ ,  $\rho^*(x, \cdot) = \rho^{(l)}(x, \cdot)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполняется хотя бы одно из условий (3.1.100) окончания итерационного процесса.

3. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала  $I_1(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  и, для контроля правильности результата, значение функции (3.1.97) при  $\xi^*$ ,  $\lambda^*(\cdot)$ ,  $u^*(\cdot, \cdot)$ ,  $\rho^*(\cdot, \cdot)$ .

Алгоритм 2 описан.

**Анализ результатов вычислительных экспериментов.** Приведенный алгоритм реализован в виде программного модуля, включен в комплекс программ DOSPP, ориентированный на решение разнообразных динамических задач оптимального разбиения множеств. Далее представим результаты решения некоторых тестовых примеров. Общими для экспериментов № 1 – 4 выбирались следующие параметры задачи **A14**:

$\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ;  $T = 2.5$ ,  $c(x, \tau, t) = \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}$ ;  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\tau_1 = (0.3, 0.3)$ ;  $\tau_2 = (0.8, 0.2)$ . Для численного решения задач множество покрывалось сеткой. Шаги разбиения по временной и пространственным координатам такие:  $h_t = 0.1$ ;  $h_x = h_y = 0.025$ . Другие параметры тестовых примеров, а также результаты оптимального разбиения множества и оптимальные значения целевых функционалов прямой и двойственной задач приведены в табл. 3.1.

В эксперименте 1 правые части интегральных ограничений – достаточно большие числа – выбраны для того, чтобы получить очевидное оптимальное разбиение в виде диаграммы Дирихле – Вороного. Анализируя значение интегралов, полученных в левых частях ограничений при таких значениях компонент  $b_i$ , в экспериментах 2 и 3 правые части интегральных условий изменили так, чтобы разбиение изменилось «в соответствующую сторону», что и можно проследить на приведенных диаграммах разбиений. В эксперименте 4 в качестве функции начальных условий задачи Коши (3.1.43) задана синусоида, что характерным образом отразилось на оптимальном разбиении. Такие диаграммы в научной литерату-

ре подробно исследовались с точки зрения их декоративного применения. В эксперименте 6 функция начальных условий задана отрицательной. В результате получено оптимальное разбиение квадрата в виде диаграммы Дирихле – Вороного самой отдаленной точки (farthest-point Voronoi diagram, [140, 174]).

В отличие от всех предыдущих тестовых примеров, в эксперименте № 8 функция стоимости  $c(\tau, x, t)$  зависит явно от временной переменной:

$c(\tau, x, t) = e^{-0.8t} \cdot \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}$ . За счет того, что функция начальных условий  $\rho_0(x_1, x_2) = 7$  позволяет функции  $\rho(x_1, x_2, t)$  не выйти за отведенное время за пределы положительной полуплоскости, оптимальное разбиение имеет вид диаграммы Дирихле – Вороного, откорректированной согласно ограничениям на мощности подмножеств, образующих это разбиение.

В эксперименте № 9 в качестве метрики  $c(\tau, x, t)$  выступала функция  $c(\tau, x) = |\tau_1 - x_1| + |\tau_2 - x_2|$ , что соответствующим образом сказалось на границах между подмножествами, составляющими оптимальное разбиение. Здесь и далее каждому подмножеству, что является составной частью оптимального разбиения, поставим в соответствие свой цвет (оттенок серого). Это обусловлено тем фактом, что подмножества могут оказаться бесвязными, даже пустыми.

В экспериментах № 10, 11 функция  $c(\tau, x, t)$  имеет вид  $c(\tau, x) = \max \{|\tau_1 - x_1|, |\tau_2 - x_2|\}$ . Тестовые примеры отличаются только параметрами  $b_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , ограничивающими мощности подмножеств. Интересным оказалось и отличие соответствующих разбиений.

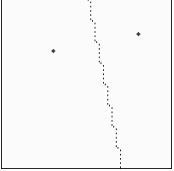
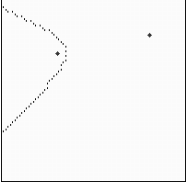
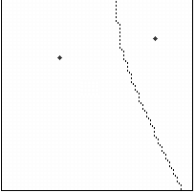
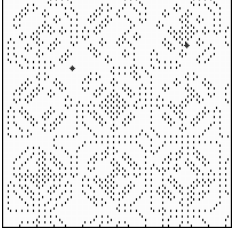
Результаты решения тестового примера, приведены в таблице под номером 12 (тут  $c(\tau, x, t) = 0.3t^2 + 0.8t \cdot \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}$ ), демонстрируют возможность появления диаграммы Вороного самой отдаленной точки как оптимального разбиения множества. Эта ситуация соответствует задаче (3.1.65), в которой функция  $\rho(\tau, x, t)$  на промежутке  $t \in 0, T$  меняет свой знак и на большей части этого временного интервала является отрицательной. Кроме того, некоторые подмножества могут оказаться пустыми, что обусловлено наличием интегральных ограничений на фазовую переменную.

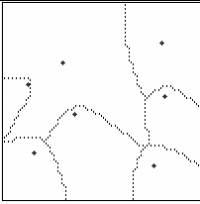
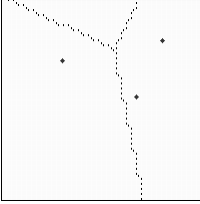
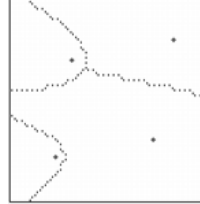
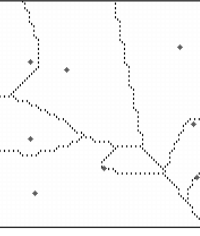
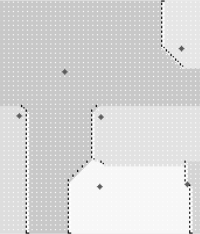
По результатам всех экспериментов видно, что значение прямого и

двойственного функционалов на оптимальном решении с достаточной точностью совпадают, причем, как правило, выполняется основное соотношение двойственности ( $I_1^* \geq \chi^*$ ). К тому же, в каждом из примеров имеет место выполнение условий дополняющей нежесткости.

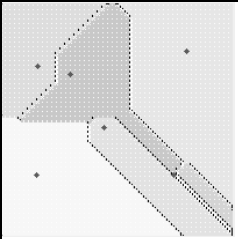
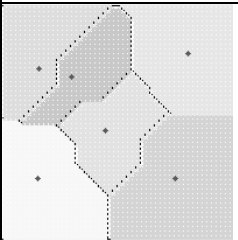
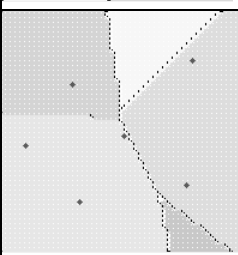
Таблица 3.1

Результаты вычислительных экспериментов

№	$\rho_0(x)$ ; вектор $b$	Значение $I_1$ та $\chi$	Оптим- альные значения $\xi_i^*$	Оптимальное разби- ние
1	$\rho_0(x) = 1$ ; $b_1 = 50$ ; $b_2 = 50$ .	$\chi^* = 0.6676$ $I_1^* = 0.6682$	1.02E-05 2.62E-06	
2	$\rho_0(x) = 1$ ; $b_1 = 0.1$ ; $b_2 = 2.0$ .	$\chi^* = 0.8092$ $I_1^* = 0.8104$	0.43418 2.73E-06	
3	$\rho_0(x) = 1$ ; $b_1 = 1.6$ ; $b_2 = 0.4$	$\chi^* = 0.6799$ $I_1^* = 0.6799$	1.20E-06 0.13187	
4	$\rho_0 = \sin(\frac{x_1 x_2}{2}) + 1$ ; $b_1 = 50$ ; $b_2 = 50$	$\chi^* = 0.5650$ $I_1^* = 0.5652$	1.26E-06 2.46E-06	

<i>Продолжение таблицы 3.1</i>				
5	$\rho_0(x) = 1;$ $b_1 = 2.0; b_2 = 0.3$ $b_3 = 0.1; b_4 = 0.0$ $b_5 = 0.3; b_6 = 0.1$ $b_7 = 0.04$	$\chi^* = 0.5131$ $I_1^* = 0.5146$	8.25E-07 0.14314 0.35640 0.51850 0.21183 0.34527 0.18432	
6	$\rho_0(x) = -1;$ $b_1 = 50; b_2 = 50.$ $\tau_3 = (0.67, 0.48)$	$\chi^* = -2.190$ $I_1^* = -2.189$	2.21E-06 9.46E-08 4.91E-07	
7	$\rho_0(x) = 3;$ $b_1 = 0.7; b_2 = 10,$ $b_1 = 0.4; b_2 = 10.$ $\tau_3 = (0.22, 0.775)$ $\tau_4 = (0.7, 0.69)$	$\chi^* = 1.9034$ $I_1^* = 1.8996$	0.3875 0.0006 0.421577 0.0002	
8	$\rho_0(x) = 7;$ $b_1 = 8; b_2 = 8;$ $b_3 = 1; b_4 = 0.9;$ $b_5 = 0.4; b_6 = 0.6$ $b_7 = 1; b_8 = 7.$ $\tau_i$ – см. рис.	$\chi^* = 0.122$ $I_1^* = 0.1300$	2,492E-06 6,866E-05 0,0028 0,0030 0,0100 0,0175 0,0101 3,09E-06	
9	$\rho_0(x, y) = 3;$ $b_1 = 20; b_2 = 0.5;$ $b_3 = 0.4; b_4 = 0.9$ $b_5 = 0.9; b_6 = 0.3$ $\tau_i$ – см. рис.	$\chi^* = 2,296$ $I_1^* = 2.1899$	9,117E-07 0,400227 0,31626 0,35412 0,24661 0,71905	

Окончание таблицы 3.1

10	$\rho_0(x) = 1;$ $b_1 = 20; b_2 = 0.5;$ $b_3 = 0.4; b_4 = 0.9;$ $b_5 = 0.9; b_6 = 0.3.$ $\tau_i$ — см. рис.	$\chi^* = 1,9772$ $I_1^* = 1,9899$	1,76E-05 7,00E-06 0,00011 3,25E-05 0,15492 0,44226	
11	$\rho_0(x) = -1;$ $b_i = 10; i = \overline{1, 6}.$ $\tau_i$ — см. рис.	$\chi^* = 1,4930$ $I_1^* = 1,4932$	8,50E-06 8,04E-07 4,52E-06 4,04E-06 4,12E-06 3,04E-07	
12	$\rho_0(x) = 5;$ $b_{1,2} = 20;$ $b_3 = 10; b_4 = 1;$ $b_5 = 3; b_6 = 0.2.$ $\tau_i$ — см. рис.	$\chi^* = -7695,7$ $I_1^* = -7695,6$ $\Omega_4^* = \emptyset$	2,70E-06 8,00E-07 2,38E-06 0,000100 0,032030 2,47E-05	

## 3.2. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА С РАЗМЕЩЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ПОДМНОЖЕСТВ

### 3.2.1. Математическая постановка задачи

Предположим, что в задаче **A14** наряду с разбиением множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть пустые), неизвестными являются и координаты  $\tau_1, \dots, \tau_N$  центров этих подмножеств. Кроме того, будем считать, что на состояние управляемой системы влияют некоторые посторонние факторы, которые можно описать некоторой

известной функцией  $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ . Математическую постановку такой задачи запишем сразу в терминах характеристических функций подмножеств, составляющих допустимое разбиение множества  $\Omega$ .

**Задача B15.** Необходимо отыскать вектор-функцию  $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Lambda$ , набор  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Omega^N$ , управляющую функцию  $u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  и фазовую переменную  $\rho(\cdot, \cdot)$ , так чтобы

$$I(\lambda(\cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c(x, \tau_i, t) + a_i \rho(x, t) + u^2(x, t) \lambda_i(x) dx dt \quad (3.2.1)$$

достигал своего минимального значения при условиях

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) + f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.2.2)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.2.3)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.2.4)$$

где  $T$  – заданный момент времени,  $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)q(t)$ ,  $c(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримая по переменным  $x$  при произвольном фиксированном наборе параметров  $\tau_i = \tau_1^i, \dots, \tau_N^i \in \Omega$  для всех  $i = \overline{1, N}$ ;  $q(t) \in L_2[0, T]$ ,  $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  – заданные функции.

### 3.2.2. Метод решения задачи

В соответствии с теорией непрерывных задач ОРМ погружаем множество  $\Lambda$  в симплекс  $\Lambda_1$ :

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) \in [0, 1], i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ почти всюду для } x \in \Omega \right\},$$

и переходим к задаче бесконечномерного программирования:

$$I(\lambda(x), \tau, u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V_1} \quad (3.2.5)$$

при условиях (3.2.4), где



$$V_1 = (\lambda(x), \tau, u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda_1, \tau \in \Omega^N, u(x, t) \in L_2 \quad \Omega \times [0, T] ,$$

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) + f(x, t) \quad \forall t \in [0, T] , \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega .$$

Для задачи (3.2.5), (3.2.4) введем к рассмотрению функционал Лагранжа:

$$h \quad \lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) , \xi = \\ = I_1(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) + \sum_{i=1}^N \xi_i \left( \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt - b_i \right) ,$$

определенный на  $V_1 \times \Gamma$ ,  $\Gamma = \xi \in \mathbb{R}^N : \xi_i \geq 0, i = \overline{1, N}$  .

**Определение.** Пару  $\lambda^*(\cdot), \tau, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot) , \xi^*$  будем называть *седловой точкой* функционала Лагранжа  $h \quad \lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) , \xi$  на множестве  $V_1 \times \Gamma$ , если для всех  $\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V_1, \xi \in \Gamma$  выполняется соотношение

$$h \quad \lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot) , \xi \leq h \quad \lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot) , \xi^* \leq \\ \leq h \quad \lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) , \xi^* .$$

Задача, двойственная к задаче (3.2.5) – (3.2.4), записывается так:

$$\chi(\xi) = \min_{\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V_1} h \quad \lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) , \xi \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma} . \quad (3.2.6)$$

Можно показать, что в случае, когда функционал Лагранжа имеет седловую точку в виде приведенного выше определения, задачи (3.2.5), (3.2.4) и (3.2.6) связаны соотношением двойственности  $I_* = \chi^*$ , причем верхняя грань в функции двойственной задачи (3.2.6) достигается. И, следовательно, решение пары указанных двойственных задач эквивалентно нахождению седловой точки функционала Лагранжа  $h \quad \lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) , \xi$  на множестве  $V_1 \times \Gamma$  .

Пусть  $\xi \in \Gamma$  – произвольный, но фиксированный вектор. Как и в разделе 3.1.6, будем рассматривать задачу

$$h \quad \lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) , \xi \rightarrow \min_{\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V_1} . \quad (3.2.7)$$

Зафиксируем также произвольный вектор  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Omega^N$ . Обоз-

начим через  $V_1^\tau$  сечение множества  $V_1$  при заданном векторе  $\tau \in \Omega^N$ .

Основываясь на теоретическом материале, приведенном в п. 3.1, можно прийти к выводу, что при произвольных, но фиксированных значениях  $\xi \in \Gamma$  и  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Omega^N$  допустимый процесс  $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  будет доставлять минимальное значение функционалу задачи (3.2.7) тогда и только тогда, когда почти всюду для  $x \in \Omega$  будет выполняться равенство

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^N \left[ (\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho^*(x, t) \lambda_i^*(x) \right] + \beta_1 u^*(x, t)^2 \right) dt =$$

$$= \min_{\substack{\lambda(x) \in \Lambda_2 \\ u(x, \cdot) \in L_2(0, T)}} \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt, \quad (3.2.8)$$

где  $\Lambda_2 = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}$ , функция  $\rho(x, t)$  – решение задачи Коши (3.2.2), (3.2.3), соответствующее функции управления  $u(x, \cdot)$ .

Введем обозначение для функционала Лагранжа, отвечающее фиксированным значениям  $\xi \in \Gamma$  и  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Omega^N$ :

$$P_{\xi, \tau} \lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) =$$

$$= \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x) + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt.$$

Для каждой точки  $x \in \Omega$  оптимальное решение задачи

$$P_{\xi, \tau} \lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \rightarrow \min_{\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \in V_1^{\tau x}}, \quad (3.2.9)$$

где  $V_1^{\tau x}$  – сечение множества  $V_1^\tau$  при  $x \in \Omega$ , записывается следующим образом:

$$u^*(x, t; \tau) = \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma; \quad (3.2.10)$$

$$\rho^*(x, t; \tau) = \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_0^\theta \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\alpha d\theta +$$

$$+ \int_0^t f(x, \theta) d\theta, \quad (3.2.11)$$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \tau_i, \xi_i) = \min_{k=1, N} B_k(x; \tau_k, \xi_k), \\ 0, & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (3.2.12)$$

где величина  $B_i(x; \tau_i, \xi_i)$  вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} B_j(x; \tau_j, \xi_j) = & \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) \left( \rho_0(x) + \int_0^t f(x, \theta) d\theta \right) dt - \\ & - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int_0^\zeta Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta d\xi dt + \\ & + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta \right\}^2 dt, \end{aligned}$$

$$Q_i(x, t; \tau_i, \xi_i) = \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Аналитические выражения (3.2.10) – (3.2.12) могут быть получены с помощью принципа максимума Понтрягина, который, учитывая свойства задачи (3.2.9), определяет не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности управляемого процесса. Если ввести обозначение

$$G_j(x, t; \tau_j, \xi_j) = \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta, \quad f_0(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t f(x, \theta) d\theta,$$

то выражение для  $B_j(x; \tau_j, \xi_j)$  преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned} B_j(x; \tau_j, \xi_j) = & \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) f_0(x, t) dt - \frac{1}{4\beta_1} T \cdot G_j^2(x, T; \tau_j, \xi_j) + \\ & + \frac{1}{4\beta_1} \left( 2 \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) \cdot \left( \int_0^t G_j(x, \sigma; \tau_j, \xi_j) d\sigma \right) dt + \int_0^T G_j^2(x, t; \tau_j, \xi_j) dt \right). \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

С учетом полученного аналитического решения задачи (3.2.7), соответствующего фиксированным векторам  $\tau \in \Omega^N$  и  $\xi \in \Gamma$ , целевая функция двойственной задачи (3.2.6) записывается следующим образом:

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j. \quad (3.2.14)$$

Таким образом, седловая точка  $\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot), \xi^*$  функционала Лагранжа (3.2.6) на множестве  $V_1 \times \Gamma$  определяется для  $i = 1, 2, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) = \min_{k=1, N} B_k(x; \tau_k^*, \xi_k^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (3.2.15)$$

$$u^*(x, t; \tau^*) = \frac{1}{2\beta_1} \int_{T=1}^t \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i^*, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma; \quad (3.2.16)$$

$$\rho^*(x, t) = f_0(x, t) + \frac{1}{2\beta_1} \int_{\theta=1}^t \int_{T=1}^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i^*, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma d\theta, \quad (3.2.17)$$

где

$$\begin{aligned} B_j(x; \tau_j^*, \xi_j^*) &= \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) f_0(x, t) dt - \\ &- \frac{1}{4\beta_1} \left( T \cdot G_j^2(x, T; \tau_j^*, \xi_j^*) - 2 \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) \cdot \left( \int_0^t G_j(x, \sigma; \tau_j^*, \xi_j^*) d\sigma \right) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T G_j^2(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) dt \right), \\ Q_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) &= \beta_0(c(x, \tau_j^*, t) + a_j) + \xi_j^*, \\ G_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) &= \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j^*, \xi_j^*) d\theta, \end{aligned}$$

а в качестве  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*; \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (3.2.6), приведенной к виду:

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &= \min_{\tau \in \Omega^N} \chi_1(\tau, \xi) = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \left( \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma}. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Сформулируем условия разрешимости задачи (3.2.1) – (3.2.4). Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 3.4.** Если вектор правых частей неравенств (3.2.4) удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \left( \int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx, \quad (3.2.19)$$

где  $f_0(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t f(x, \theta) d\theta$ ,  $\bar{c}(x) = \min_{i=1, N} \left( \min_{t \in [0, T]} \min_{\tau \in \Omega^T} c(x, \tau_i, t) + a_i \right)$ ,

$\forall x \in \Omega$ , то множество допустимых решений задачи (3.2.1) – (3.2.4) не пусто.

**Доказательство.** Просуммируем ограничения-неравенства (3.2.4):

$$\int_{\Omega} \int_0^T \rho(x, t) dx dt \leq \sum_{j=1}^N b_j, \quad (3.2.20)$$

и оценим левую часть этого соотношения с учетом (3.2.17) и того, что  $\xi \in \Gamma$ . Опустив пометку \* в (3.2.17) и подставив это выражение в (3.2.20), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_0^T \rho(x, t) dx dt = \\ & = \int_{\Omega} \int_0^T \left( f_0(x, t) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \sum_{i=1}^N \beta_0 c(x, \tau_i, \sigma) + a_i + \xi_i \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt = \\ & = \int_{\Omega} \int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_{\Omega} \int_0^T \left( \int_0^t \sum_{i=1}^N \beta_0 c(x, \tau_i, \sigma) + a_i + \xi_i \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_{\Omega} \int_0^T \left( \int_0^t \sum_{i=1}^N \beta_0 c(x, \tau_i, \sigma) + a_i \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_{\Omega} \int_0^T \int_0^t \sum_{i=1}^N \left( \min_{v \in [0, T]} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) d\sigma d\theta dt dx = \\ & = \int_{\Omega} \int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{2\beta_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left( \min_{v \in [0, T]} \min_{\tau \in \Omega^T} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{2\beta_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \bar{c}(x) \lambda_i(x) dx = \int_{\Omega} \left( \int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx. \end{aligned}$$

**Замечание.** Если в задаче (3.2.1) – (3.2.4) функции  $c_i(x, \tau_i, t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,

неотрицательны почти всюду для  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \Omega$ , оценку (3.2.19) можно огрубить до следующей:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \left( \int_0^t f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{6\beta_1} \cdot \min_{i=1, N} a_i \right) dx.$$

**Теорема 3.7.** Пусть в задаче **V15** ((3.2.1) – (3.2.4)):

- 1)  $\Omega$  – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество из  $E_n$ ;
- 2) функции  $c_i(x, \tau_i, t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , непрерывны по переменной  $\tau_i$  на  $\Omega$  почти всюду для  $x \in \Omega$  и  $t \in [0, T]$ ;
- 3) выполняется условие утверждения 3.4.

Тогда задача (3.2.1) – (3.2.4) разрешима.

**До к а з а т е л ь с т в о.** Во-первых, необходимость выполнения условия утверждения 3.4 очевидна, так как в противном случае класс допустимых разбиений для задачи (3.2.1) – (3.2.4) может быть пустым и задача ОРМ станет неразрешимой. Ранее было установлено, что задача (3.2.1) – (3.2.4) эквивалентна задаче (3.2.5), а решение последней, при условии выполнения утверждения 3.2.4, определяется по формулам (3.2.15) – (3.2.17). Поэтому вопрос о возможности решения динамической задачи ОРМ с размещением центров подмножеств (3.2.1) – (3.2.4) сводится к исследованию разрешимости задачи (3.2.6), приведенной к виду (3.2.18). Покажем, что при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение.

При условии непрерывности функции  $c(x, \tau_i, t)$  по переменной  $\tau_i$ , непрерывными на  $\Omega^N$  по параметрам  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , также будут и функции  $\rho(x, t; \tau)$  и  $u(x, t; \tau)$ , определяемые по формулам (3.2.17) и (3.2.16) соответственно, для всех  $x \in \Omega$  и  $t \in [0, T]$ . Вместе с этими функциями непрерывными на  $\Omega$  по параметрам  $\tau_i$  оказываются и функции  $Q_i(x, t; \tau_i, \xi_i)$ ,  $G_i(x, t; \tau_i, \xi_i)$ ,  $V_i(x, \tau_i, \xi_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Действительно, из того, что для произвольной последовательности  $\tau^{(k)} = \tau_1^k, \dots, \tau_N^k$ , сходящейся к произвольной, но фиксированной точке  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Omega^N$ , выполняется соотношение:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c(x, \tau_1^{(k)}, t) = c(x, \tau_1, t), \quad x \in \Omega \text{ и } t \in [0, T],$$

следует, что при каждом фиксированном значении  $\xi \in \Gamma$ , а также  $x \in \Omega$  и  $t \in [0, T]$ , справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} Q_i(x, t; \tau_1^{(k)}, \xi_i) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_0(c(x, \tau_1^{(k)}, t) + a_i) + \xi_i = \\ &= \left( \beta_0 \left( \lim_{k \rightarrow \infty} c(x, \tau_1^{(k)}, t) + a_i \right) + \xi_i \right) = \\ &= \beta_0 c(x, \tau_1, t) + a_i + \xi_i = Q_i(x, t; \tau_1, \xi_i); \\ \lim_{k \rightarrow \infty} G_j(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j^{(k)}, \xi_j) d\theta = \\ &= \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} Q_j(x, \theta; \tau_j^{(k)}, \xi_j) d\theta = \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta = G_j(x, \tau_j, \xi_j); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) &= \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) f_0(x, t) dt - \frac{1}{4\beta_1} T \cdot G_j^2(x, T; \tau_j^{(k)}, \xi_j) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4\beta_1} \left( 2 \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) \cdot \left( \int_0^t G_j(x, \sigma; \tau_j^{(k)}, \xi_j) d\sigma \right) dt + \int_0^T G_j^2(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) dt \right) \right] = \\ &= B_j(x; \tau_j, \xi_j). \end{aligned}$$

Для целевой функции задачи (3.2.18) при произвольном, фиксированном векторе  $\xi \in \Gamma$  выполняется равенство:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_1(\tau^{(k)}, \xi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right) = \\ &= - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) dx = \\ &= - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) \right) dx = \chi_1(\tau, \xi), \end{aligned}$$

что означает непрерывность функции  $\chi_1(\tau, \xi)$  по переменным  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , на  $\Omega^N$ .

Согласно теореме Вейерштрасса, непрерывная по переменной  $\tau$  функция  $\chi_1(\tau, \xi)$  на выпуклом ограниченном замкнутом множестве  $\Omega^N$  достигает своего минимального значения для произвольного фиксированного  $\xi \in \Gamma$ . Таким образом, внутренняя задача (3.2.18) минимизации функции  $\chi_1(\tau, \xi)$  по  $\tau$  разрешима. Существование же вектора  $\xi \in \Gamma$ , максимизирующего функцию  $\chi(\xi)$ , следует из теоремы двойственности.

Таким образом, показано, что при выполнении условий теоремы задача (3.2.18) разрешима, вследствие чего динамическая задача ОРМ (3.2.1) – (3.2.4) также имеет решение.

Для решения задачи максимизации негладкой вогнутой функции (2,118) на множестве  $\xi \in \Gamma$  может быть применен любой известный метод, например, методы типа субградиентных, эллипсоидов [109, 111, 112] и др. Далее приведен численный алгоритм решения задачи (3.2.5), в котором для решения задачи (3.2.18) используется метод обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов –  $\gamma$ -алгоритм Шора. При этом от задачи (3.2.18) совершается переход к задаче безусловной максимизации посредством введения в целевую функцию негладкой штрафной функции множества  $\Gamma$ :

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) = \chi_1(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \rightarrow \max_{\xi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N}, \quad (3.2.21)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число (значительно больше максимального из множителей Лагранжа). О возможности перехода от задачи (3.2.18) к задаче (3.2.21) см. в [22].

### 3.2.3. Численный алгоритм решения задачи. Анализ результатов вычислительных экспериментов

Не теряя общности, будем считать, что множество  $\Omega$  является параллелепипедом  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой прямоугольной системы координат.

1. Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $\psi, \tau = \psi^{(0)}, \tau^{(0)}$ . Пусть  $\hat{\Pi}$  – множество узлов пространственной сетки.

2. Покрываем отрезок  $[0, T]$  сеткой с шагом  $h_t$ , обозначим через



$\hat{T} = t : t = l h_t, l = \overline{1, n_T}$  множество узлов сетки по временной переменной.

3. Решаем задачу (3.2.21):

3.1. Для каждого узла  $x \in \hat{\Gamma}$  вычисляем значения характеристических функций подмножеств  $\lambda_i^{(0)}(x), i = \overline{1, N}$  по формуле (3.2.15) при значениях  $\xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}$ . Вычисляем управляющую функцию  $u^{(0)}(x, t)$  и фазовую траекторию  $\rho^{(0)}(x, t)$  в каждой точке  $t \in \hat{T}$  по формулам (3.2.16) и (3.2.17) соответственно при  $\lambda = \lambda^{(0)}(\cdot), \psi = \psi^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}$ .

3.2. Вычисляем компоненты  $g_{\lambda}^{\tau_1}, \dots, g_{\lambda}^{\tau_N}; g_{\lambda}^{\xi_1}, \dots, g_{\lambda}^{\xi_N}$  обобщенного градиента функции  $\bar{\chi}(\tau, \xi)$  в точке  $\tau, \xi = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}; \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$  при  $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot), \xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}; u^{(0)}(x, \cdot), \rho^{(0)}(x, \cdot)$ .

3.3. Выбираем начальный шаг  $h_0 > 0$  r-алгоритма и находим:

$$\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(0)} + h_0 g_{\lambda}^{\xi_i}(\xi^{(0)}); \tau_i^{(1)} = \text{Pr}_{\Omega} \left[ \tau_i^{(0)} - \beta_0 g_{\lambda}^{\tau_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right], i = \overline{1, N},$$

где  $\text{Pr}_{\Omega}$  – оператор проектирования на множество  $\Omega$ .

Осуществляем переход на второй шаг.

Пусть в результате вычислений после  $k, k=1, 2, \dots$  шагов алгоритма получены некоторые значения  $\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x), u^{(k-1)}(x, \cdot), \rho^{(k-1)}(x, \cdot)$ .

3.4.  $(k+1)$ -й шаг:

а) для каждого узла  $x \in \hat{\Gamma}$  вычисляем: значения характеристических функций  $\lambda^{(k)}(x)$  по формуле (3.2.15) при  $\tau = \tau^{(k)}; \xi = \xi^{(k)}$ ; значения управляющей функции  $u^{(k)}(x, t)$  и фазовой переменной  $\rho^{(k)}(x, t)$  в точках  $t \in \hat{T}$  по формулам (3.2.16) и (3.2.17) соответственно при  $\tau = \tau^{(k)}; \xi = \xi^{(k)}; \lambda = \lambda^{(k)}(\cdot)$ ;

б) вычисляем приближенно компоненты вектора обобщенного градиента  $g_{\lambda}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), g_{\lambda}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$  при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x), u^{(k)}(x, \cdot), \rho^{(k)}(x, \cdot)$ ;

в) осуществляем  $(k+1)$ -й шаг r-алгоритма для решения задачи (3.2.21), краткая схема которого записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\chi}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}); \\ \tau_k^{(k+1)} &= \text{Pr}_{\Omega^N} \left[ \tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_{\chi}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) \right],\end{aligned}$$

где  $B_{k+1}^{\xi}$ ,  $B_{k+1}^{\tau}$  – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E_N$ , пересчет которых производится по следующим формулам:  $B_0^{\xi} = I_N, B_0^{\tau} = I_N$  ( $I_N$  – единичная матрица),

$$\begin{aligned}B_{k+1}^{\xi} &= B_k^{\xi} R_{\alpha} \left( \frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|} \right), \quad \bar{r}_k = g_{\chi}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\chi}^{\xi}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}), \\ B_{k+1}^{\tau} &= B_k^{\tau} R_{\alpha} \left( \frac{\bar{k}_k}{\|\bar{k}_k\|} \right), \quad \bar{k}_k = g_{\chi}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\chi}^{\tau}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}),\end{aligned}$$

$R_{\alpha} \zeta$  – оператор растяжения пространства в направлении  $\zeta$  с коэффициентом растяжения  $\alpha$ , матричная форма которого имеет вид:

$$\begin{aligned}R_{\alpha} \zeta &= I_N + \alpha - 1 \zeta \zeta^T; \\ \tilde{g}_{\chi}^{\xi} &= B_{k+1}^{\xi T} g_{\chi}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}); \quad \tilde{g}_{\chi}^{\tau} = B_{k+1}^{\tau T} g_{\chi}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}); \end{aligned}$$

$h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума функции по рассматриваемому направлению;

г) если условие

$$\left\| \tau^{(k)}, \xi^{(k)} - \tau^{(k+1)}, \xi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (3.2.22)$$

не выполняется, то переходим на  $(k+2)$ -й шаг г-алгоритма, иначе – совершаем переход на шаг 4.

4. Полагаем  $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ ,  $\psi^* = \psi^{(l)}$ ,  $\tau^* = \tau^{(l)}$ ,  $u^*(x, t) = u^{(l)}(x, t)$ ,  $\rho^*(x, t) = \rho^{(l)}(x, t)$ ,  $t \in \hat{T}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой вектор  $\tau^{(k)}, \xi^{(k)}$  удовлетворяет условию (3.2.22) окончания итерационного процесса (для каждой точки  $x \in \hat{\Pi}$  номер  $l$  – свой). Вычисляем оптимальное значение целевого функционала  $I_1(\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  и, для контроля правильности результата, значение функции (3.2.21) при следующих параметрах:  $\xi = \xi^*$ ,  $u = u^*(\cdot, \cdot)$ ,  $\rho = \rho^*(\cdot, \cdot)$ ,  $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$ ,  $\tau = \tau^*$ .

Алгоритм описан.

**Замечание 1.** Приведенный алгоритм легко адаптировать для решения динамических задач оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств, в которых отсутствуют ограничения типа (3.2.4). При этом функция (3.2.18) не содержит слагаемые с двойственными переменными и, следовательно, не возникает потребность в максимизации указанной функции по переменным  $\xi_i$ ;  $i = \overline{1, N}$ , осуществляется лишь ее минимизация по координатам центров подмножеств  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

**Замечание 2.** Для решения задачи минимизации функции (3.2.21) по переменной  $\tau \in \Omega^N$  не обязательно применять метод проекции градиента. К тому же, в случае, когда множество  $\Omega$  имеет сложную форму или не является выпуклым, проекцию точки на множество  $\Omega$  найти сложно или вовсе невозможно. Тогда целесообразно ввести штрафную функцию множества  $\Omega$  :

$$P(\tau) = \begin{cases} 0, \forall \tau \in \Omega^N, \\ \infty, \forall \tau \in \tau \in \mathbb{R}^{nN} \setminus \Omega^N, \end{cases}$$

расширить ею целевую функцию (3.2.21) и решать задачу безусловной оптимизации:

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) = \chi_1(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i) + P(\tau) \rightarrow \max_{\xi \in \mathbb{R}^N} \min_{\tau \in \mathbb{R}^{nN}}. \quad (3.2.23)$$

В комплексе программ DOSPP реализованы два алгоритма решения динамической задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств. Первый, сформулированный в предыдущем разделе, основан на методе проекции градиента для решения задачи минимизации функции (3.2.21) по переменной  $\tau \in \Omega^N$ . В основе второго лежит метод штрафных функций для решения задачи (3.2.23). Далее представлены результаты решения некоторых модельных примеров. В таблице 3.2 (см. приложения) приведены результаты решения модельных задач при помощи алгоритма, представленного в п. 3.2, который сочетает метод штрафных функций и метод проекции градиента для решения задачи (3.2.21). В табл. 3.3 (см. приложения) продемонстрирована работа алгоритма, основанного на решении задачи (3.2.23). Для сравнения работы обоих алгоритмов здесь приведены результаты решения тех же модельных задач с помощью вышеописанного алгоритма.

Общим для экспериментов № 1 – 5 (см. приложения табл. 3.2) являются следующие параметры задачи (3.2.1) – (3.2.4):  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ;

$\beta_0 = 1, \beta_1 = 1; T = 2.5; c_i(\tau_i, x, t) = \|x - \tau_i\|^2, \forall x \in \Omega$ , де  $\|\cdot\|$  – евклидова метрика,  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$  – заранее неизвестны;  $f(x, t) \equiv 0$ . Для численного решения задач множество  $\Omega$  покрывалось сеткой с шагом  $h_x = h_y = 0.02$ , шаг по временной переменной  $h_t = 0.1$ . При реализации г-алгоритма задавались следующие его параметры: коэффициент растяжения пространства  $\alpha = 1/3$ ; точность вычисления координат центров подмножеств и значений двойственных переменных, а также значений целевой функции задачи (24)  $\varepsilon = 0.0001$ . Другие параметры задачи для соответствующих экспериментов, а также полученные оптимальные решения, представлены в табл. 3.2.

Как видно из результатов вычислительных экспериментов решения модельных задач № 1 и 2, оптимальное размещение координат центров подмножеств зависит от начального приближения этих параметров. Но в обоих случаях получен локальный оптимум целевого функционала. Такой вывод следует из результатов исследований свойств решений задач ОРМ, приведенных в работе [65]. В частности, там показано, что в случае, когда

в задаче ОРМ без ограничений функции  $c_i(\tau_i, x, t) = \|x - \tau_i\|^2, \forall x \in \Omega$ , где  $\|\cdot\|$  – евклидова метрика,  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , локальным оптимальным расположением двух центров подмножеств, образующих разбиение квадрата  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , являются концы диаметра окружности

$$C = (x_1, x_2): \sqrt{(x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2} = 0.25. \text{ Заметим, что в модельных}$$

задачах № 1 и 2 ограничения (3.2.4) пассивны, то есть фактически решаются динамические задачи ОРМ с размещением центров без ограничений.

В экспериментах № 3 и № 4 можно проследить, как ограничения на мощности подмножеств (3.2.4) влияют на расположение центров подмножеств и на само разбиение. Подмножества, составляющие оптимальное разбиение в динамической задаче ОРМ, могут быть несвязными, о чем свидетельствуют результаты решения задачи № 5. Здесь форму границ между подмножествами существенно определяет функция начальных условий, которая в данном примере является периодической.

В модельных задачах № 6 и 7 в качестве метрики  $c(\tau, x, t)$  выступали функции  $c(\tau, x) = |\tau_1 - x_1| + |\tau_2 - x_2|$  и  $c(\tau, x) = \max |\tau_1 - x_1|, |\tau_2 - x_2|$  соответственно, что определенным образом сказалось и на границах между подмноже-

ствами, составляющими оптимальное разбиение, и на оптимальном размещении центров подмножеств.

В отличие от предыдущих модельных задач № 8 и 9 функция стоимости  $c(\tau, x, t)$  зависит явно от временной переменной:

$c(\tau, x, t) = e^{0.3t} \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}$  и  $c(\tau, x, t) = e^{-0.3t} \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}$  соответственно, что существенно отразилось и на значении целевого функционала, и на форме границ между подмножествами.

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что почти во всех задачах с точностью, не превышающей  $10^{-3}$ , выполняется соотношение двойственности  $\Gamma^* = \chi^*$ . Исключение составляет лишь результат решения задачи № 8, что объясняется порядком исходных данных. Хотя и в этом случае относительная погрешность, с которой выполняется указанное равенство, составляет 2 %.

Следует заметить, что в ходе реализации алгоритма при вычислении компонент вектора обобщенного градиента  $g_{\chi}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$ ,  $g_{\chi}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$  использовались аналитические выражения этих компонент. Погрешность их вычисления состояла только из погрешности, допускаемой при приближенном нахождении значения определенных интегралов, входящих в указанные аналитические выражения.

При реализации второго алгоритма, базирующегося только на методе внешнего штрафа для решения задачи (3.2.18), все компоненты вектора обобщенного градиента вычисляли приближенно, используя формулы численного дифференцирования. Это является еще одним существенным фактором, который может вызвать значительные расхождения результатов решения модельных задач, приведенных в табл. 3.3 (см. приложения).

Применение формул численного дифференцирования для приближенного вычисления частных производных целевой функции (3.2.18) существенно сказывается и на продолжительности процесса решения динамической задачи оптимального разбиения. Время вычислений при этом в несколько раз превышает время, за которое находится оптимальное решение задачи в случае, когда компоненты вектора обобщенного градиента вычисляются хотя и приближенно, но на основе аналитических их выражений.

Исследования алгоритмов решения динамических задач оптимального разбиения множеств, как с фиксированными центрами подмножеств, так и с их размещением, с интегральными ограничениями или без ограничений, проводились также с целью выявления зависимости оптимальных

решений задач от количества точек, которые составляют дискретизацию разбиваемого множества.

Оказалось, что размер сетки незначительно влияет на результаты расчетов значений функционалов, а также на оптимальное разбиение и координаты центров подмножеств, если границы между подмножествами неподвижны. При решении динамических задач оптимального разбиения множеств с движущимися границами между подмножествами плотность точек дискретизации разбиваемого множества влияет как на оптимальное разбиение, так и на оптимальное значение целевого функционала. Об этом свидетельствуют результаты, приведенные в табл. 3.3 и 3.4 (см. приложения).

### *3.3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ МЕЖДУ ПОДМНОЖЕСТВАМИ*

#### **3.3.1. Постановка задачи**

Пусть задан набор функций  $u_i(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ,  $i = \overline{1, N}$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество. Позволим границам между подмножествами изменяться со временем и обозначим через  $\bar{\omega}(t) = (\Omega_1(t), \dots, \Omega_N(t))$  разбиение множества  $\Omega$ , соответствующее моменту времени  $t$ ,  $t \in [0, T]$ . Введем обозначение:

$$P_N(\Omega) = \bar{\omega}(t) = (\Omega_1(t), \dots, \Omega_N(t)) : \bar{\omega}(t) \in \Sigma_{\Omega}^N \quad \forall t \in [0, T] .$$

**Задача А17.** Необходимо в каждый момент времени  $t \in [0, T]$  отыскать такое разбиение множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств  $\bar{\omega}^*(t) = (\Omega_1^*(t), \dots, \Omega_N^*(t))$ , при котором функционал

$$J(\bar{\omega}(\cdot)) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i(t)} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i(t)} u_i^2(x, t) dx dt \rightarrow \min_{\bar{\omega}(\cdot) \in P_N(\Omega)} , \tag{3.3.1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \rho(x, t) + u_i(x, t) + f(x, t), \quad x \in \Omega_i(t), \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Здесь  $\beta_0, \beta_1 \geq 0, T > 0, a_i \geq 0, i = \overline{1, N}$ , – заданные величины;  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , – заданные центры соответствующих подмножеств;  $c(x, \tau_i, t) \equiv c_i(x, t) \in L_2 \Omega \times 0, T$ ,  $f(x, t) \in L_2 \Omega \times 0, T$ ,  $\rho_0(x) \in L_2(\Omega)$  – известные функции своих аргументов.

Как уже отмечалось в п 3.1, задача **A17** отличается от рассмотренных выше динамических задач оптимального разбиения множеств тем, что функция  $\rho(x, t)$ , описывающая состояние некоторой системы, меняется со временем по определенному закону, так что скорость изменения функции  $\rho(x, t)$  в каждой точке  $x \in \Omega$  зависит от принадлежности этой точки к текущему подмножеству  $\Omega_i(t)$ . И, таким образом, разбиения множества  $\Omega$  в разные моменты времени могут отличаться друг от друга, а следовательно, границы между подмножествами могут изменяться в течение рассматриваемого отрезка времени.

**Определение.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств, в которых разбиение может меняться со временем, будем называть *непрерывными динамическими задачами оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами*.

В частных случаях (при определенных исходных данных) оптимальное разбиение в задаче (3.3.1), (3.3.2) может носить и статический характер. Ниже будут приведены примеры таких задач.

### 3.3.2. Сведение динамической задачи оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами к семейству задач оптимального управления

Введем в рассмотрение следующий класс функций:

$$U(t) = \{u(x, t; \bar{\omega}(t)) : u(x, t; \bar{\omega}(t)) = u_i(x, t) \text{ п. в. для}$$

$$x \in \Omega_i(t), i = \overline{1, N}; \quad \bar{\omega}(t) = (\Omega_1(t), \dots, \Omega_N(t)) \in \Sigma_{\Omega}^N\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Тогда условие (3.3.125) в задаче **A17** может быть записано следующим образом: почти всюду для  $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}(t)) + f(x, t), \quad u \in U(t), \quad t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Каждое допустимое разбиение  $\bar{\omega}(t) \in \Sigma_{\Omega}^N$  определяет функцию  $u(x, t; \bar{\omega}(t)) \in U(t)$  такую, что соответствующая ей задача Коши (3.3.3) имеет единственное решение.

Существование и единственность решения линейной задачи (3.3.3) почти всюду для  $x \in \Omega$  при произвольном ограниченном управлении  $u(x, \cdot; \bar{\omega})$  и начальном условии  $\rho_0(x)$  следует из представленной далее теоремы.

**Теорема 3.8** [22, стр. 382]. Пусть в задаче Коши

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.3.4)$$

$$y(0) = y_0, \quad (3.3.5)$$

элементы  $a_{ij}(t)$ ,  $b_{il}(t)$  матриц  $A$  и  $B$  принадлежат пространству  $L_{\infty} 0, T$ , а функция  $f(t) \in L_1^n 0, T$ . Тогда для каждого управления  $u(t) \in L_p^r 0, T$ , где  $p$  – какое-либо фиксированное число,  $1 \leq p \leq \infty$ , и произвольной точки  $y_0 \in E^n$  задача Коши (3.3.4), (3.3.5) имеет, и притом единственное, решение  $y = y(t)$  – непрерывную функцию, удовлетворяющую равенству

$$y(t) = y_0 + \int_0^t A(\sigma)y(\sigma) + B(\sigma)u(\sigma) + f(\sigma) d\sigma, \quad t \in [0, T],$$

определенную на всем отрезке  $t \in 0, T$ . Это решение имеет производную  $\dot{y}(t)$  почти всюду на  $0, T$ ,  $\dot{y}(t) \in L_1^n 0, T$ , и удовлетворяет уравнению (3.3.4) почти всюду на  $0, T$ . Если помимо перечисленных условий имеет место и включение  $f(t) \in L_p^n 0, T$ , то  $\dot{y}(t) \in L_p^n 0, T$ .

Договоримся решение задачи (3.3.3), соответствующее функции  $u(x, t; \bar{\omega}(t))$ , обозначать через  $\rho(x, t; \bar{\omega}(t))$ . Тогда можно сформулировать **задачу оптимального управления**, которая заключается в отыскании для каждой точки  $x \in \Omega$  такой функции управления  $u^*(x, t; \bar{\omega}(t)) \in U(t)$  и соответствующей фазовой траектории  $\rho^*(x, t; \bar{\omega}(t))$ ,  $t \in [0, T]$  (являющейся решением задачи (3.3.3)), при которых функционал



$$\begin{aligned}
 J(u(\cdot, \cdot)) = & \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i(t)} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t; \bar{\omega}(t)) dx dt + \\
 & + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t; \bar{\omega}(t)) dx dt
 \end{aligned}
 \tag{3.3.6}$$

достигал бы своего минимального значения.

Итак, непрерывная динамическая задача оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами (задача **A17**) может быть отнесена к классу задач оптимального управления системой с сосредоточенными параметрами, которая характеризуется, во-первых, наличием целого семейства задач Коши вида (3.3.3) (семейство определяется параметром  $x \in \Omega$ ), во-вторых, специфической структурой допустимого множества управляющих функций  $U(t)$ . Зависимость функции правой части дифференциального уравнения (3.3.3) от разбиения множества затрудняет применение для задачи минимизации функционала (3.3.6) на множестве  $U(\cdot)$  методов оптимального управления системами, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Далее приведем необходимые и достаточные условия оптимальности, а также метод решения сформулированной задачи, который синтезирует основные положения теории непрерывных задач оптимального разбиения [65] и теории оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами [30, 108].

Функцию управления можно представить в виде:

$$u(x, t; \lambda(x, t)) = \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t),$$

где  $\lambda_i(\cdot, t)$  – характеристические функции подмножеств  $\Omega_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , образующих допустимое разбиение множества  $\Omega$ ,  $t \in [0, T]$ . Для каждого  $x \in \Omega$  и каждого  $t \in [0, T]$  будем обозначать решение задачи Коши (3.3.3), которое соответствует набору характеристических функций  $\lambda(x, t) = (\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t))$ , через  $\rho(x, t; \lambda(x, t))$ .

Задача минимизации функционала (3.3.6) на множестве  $U(\cdot)$  при условиях (3.3.3) эквивалентна задаче: отыскать вектор-функцию  $\lambda(\cdot, \cdot) = (\lambda_1(\cdot, \cdot), \dots, \lambda_N(\cdot, \cdot))$ , такую что

$$I(\lambda(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda}
 \tag{3.3.7}$$

при условиях: для каждого  $x \in \Omega$

$$\dot{\rho}(x, t) = \rho(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t) + f(x, t), \quad \lambda \in \Lambda, \quad t \in [0, T], \quad (3.3.8)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{I}(\lambda(\cdot, \cdot)) = & \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} [\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t; \lambda(x, t)) + \\ & + \beta_1 u_i^2(x, t)] \lambda_i(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

$$\Lambda = \{ \lambda(x, t) = (\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t)) : \lambda_i(x, t) = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1, \text{ почти всюду для } x \in \Omega, t \in [0, T] \}.$$

### 3.3.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности. Обоснование метода решения

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.9.** Допустимый процесс  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  ( $\lambda^*(\cdot, \cdot) \in \Lambda$ ,  $\rho^*(\cdot, \cdot)$  – решение задачи (3.3.8)) доставляет минимальное значение функционалу задачи (3.3.7) тогда и только тогда, когда почти всюду для  $x \in \Omega$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^T [\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t; \lambda^*(x, t)) + \beta_1 u_i^2(x, t)] \lambda_i^*(x, t) dt = \\ = \min_{\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_1} \sum_{i=1}^N \int_0^T [\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t; \lambda(x, t)) + \beta_1 u_i^2(x, t)] \lambda_i(x, t) dt, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

где  $\rho^*(x, t; \lambda^*(x, t))$  – решение задачи Коши (3.3.8), соответствующее функции  $\lambda^*(x, t) \in \Lambda_1$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

Таким образом, теорема 3.9 сводит решение задачи (3.3.7), (3.3.8) к решению семейства задач оптимального управления: для каждого  $x \in \Omega$

$$\bar{I}(\lambda(x, \cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_1} \quad (3.3.10)$$

при условиях (3.3.8), где

$$\bar{I}(\lambda(x, \cdot)) = \sum_{i=1}^N \int_0^T [\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i)\rho(x, t; \lambda(x, t)) + \beta_1 u_i^2(x, t)] \lambda_i(x, t) dt.$$

Пусть  $x \in \Omega$  – произвольная, но фиксированная точка. Задача (3.3.10), (3.3.8) – задача оптимального управления, в которой в качестве управляющей выступает вектор-функция  $\lambda(x, \cdot) = (\lambda_1(x, \cdot), \dots, \lambda_N(x, \cdot))$ .

**Теорема 3.10.** Для того чтобы процесс  $(\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot))$ , удовлетворяющий условиям  $\lambda^*(x, \cdot) \in \Lambda_1$  и (3.3.8), доставлял минимальное значение функционалу задачи (3.3.10), необходимо и достаточно существование такого значения  $\psi_0 \geq 0$  и функции  $\Psi_x(t)$ , которые одновременно не обращаются в нуль ни при каком значении  $t \in [0, T]$ , и таковы, что выполняются:

а) условия стационарности по  $\rho(x, \cdot)$  :

$$\frac{d\Psi_x}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \rho}, \tag{3.3.11}$$

где функция Понтрягина имеет вид:

$$H(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \Psi_x(\cdot), \psi_0, t) = (\rho(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t) + f(x, t)) \Psi_x(t) - \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i)\rho(x, t) + \beta_1 u_i^2(x, t)) \lambda_i(x, t);$$

б) условие трансверсальности по фазовой координате  $\rho(x, \cdot)$  :

$$\Psi_x(T) = 0; \tag{3.3.12}$$

в) условие оптимальности по управляющей функции  $\lambda(x, \cdot)$  :

$$\lambda^*(x, t): \max_{\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_1} H(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \Psi_x(\cdot)),$$

то есть

$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & q_i(x, \tau_i, t) = \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t), \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{3.3.13}$$

где

$$q_i(x, \tau_i, t) = u_i(x, t) \Psi_x(t) - \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i)\rho(x, t) - \beta_1 u_i^2(x, t).$$

Доказательство. В соответствии с методами решения непрерывных задач ОРМ, погружаем множество  $\Lambda_1$  в симплекс:

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\},$$

и вместо задачи (3.3.10) будем решать задачу

$$I(\lambda(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda_2} \quad (3.3.14)$$

при условиях (3.3.8), где

$$\bar{I}(\lambda(x, \cdot)) = \sum_{i=1}^N \int_0^T [\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i)\rho(x, t; \lambda(x, t)) + \beta_1 u_i^2(x, t)] \lambda_i(x, t) dt.$$

Эквивалентность задач (3.3.137) и (3.3.133) будет установлена ниже.

Пусть процесс  $(\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot))$ , таков что  $\forall t \in [0, T] \lambda^*(x, t) \in \Lambda_2$ , а функция  $\rho^*(x, t)$  является соответствующим решением задачи Коши (3.3.131). Пусть вектор-функция  $\chi(x, t) \in L_2 \quad 0, T$  – допустимое приращение вектор-функции  $\lambda^*$ :  $\lambda^*(x, t) + \chi(x, t) \in \Lambda_2, \forall t \in [0, T]$ . Здесь, для удобства, соответствие функции  $\chi(x, t)$  фиксированной точке  $x \in \Omega$  обозначается так же, как и для  $\lambda^*(x, t)$ .

Очевидно,  $\forall t \in [0, T] \chi(x, t) \in X^*(x, t)$ , где

$$X^*(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \chi = (\chi_1, \dots, \chi_N) : \\ -\lambda_i^*(x, t) \leq \chi_i \leq 1 - \lambda_i^*(x, t), i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \chi_i(x, t) = 0 \end{array} \right\}.$$

Приращение  $\chi(x, t)$  вызывает приращение функции  $\rho^*(x, t)$ , которое обозначим через  $\Delta\rho(x, t)$ . Легко заметить, что последнее является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial \Delta\rho(x, t)}{\partial t} = \Delta\rho(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \chi_i(x, t), \quad t \in [0, T], \quad (3.3.15)$$

$$\Delta\rho(x, 0) = 0.$$

Рассмотрим вариацию целевого функционала (3.3.14):

$$\Delta \bar{I} = I(\lambda^* + \chi) - I(\lambda^*) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) + \Delta\rho(x, t) \lambda_i^*(x, t) + \chi_i(x, t) dt + \\
 &\quad + \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_1 u_i^2(x, t) \lambda_i^*(x, t) + \chi_i(x, t) dt - \\
 &\quad - \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) \lambda_i^*(x, t) dt - \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_1 u_i^2(x, t) \lambda_i^*(x, t) dt.
 \end{aligned}$$

Представим первое слагаемое  $\bar{I}(\lambda^* + \chi)$  в виде ряда Тейлора в окрестности точки  $\lambda^*$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{I}(\lambda^* + \chi) &= \\
 &= \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) + \Delta\rho(x, t) \lambda_i^*(x, t) + \chi_i(x, t) dt + \\
 &\quad + \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_1 u_i^2(x, t) \lambda_i^*(x, t) + \chi_i(x, t) dt = \\
 &= \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) \lambda_i^*(x, t) dt + \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_1 u_i^2(x, t) \lambda_i^*(x, t) dt + \\
 &\quad + \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \lambda_i^*(x, t) \Delta\rho(x, t) dt + \\
 &\quad + \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) \chi_i(x, t) dt + \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_1 u_i^2(x, t) \chi_i(x, t) dt + \\
 &\quad + o(\Delta\rho(x, t), \chi_i(x, t)).
 \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned}
 \Delta\bar{I} &= \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \lambda_i^*(x, t) \Delta\rho(x, t) dt + \\
 &\quad + \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) \chi_i(x, t) dt + \int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_1 u_i^2(x, t) \chi_i(x, t) dt + \\
 &\quad + o(\Delta\rho(x, t), \chi_i(x, t)).
 \end{aligned}$$

Если  $(\rho^*, \lambda^*)$  действительно является точкой минимума функционала  $\bar{I}(\lambda(x, \cdot))$ , то должно выполняться неравенство

$$\Delta\bar{I} \geq 0. \quad (3.3.16)$$

Покажем, при каких условиях неравенство (3.3.16) будет иметь место.

Пусть  $\Psi_x(t) \in L_2([0, T])$  – функция, выбором которой распорядимся позже. С учетом (3.3.15) справедливо следующее тождество:

$$\int_0^T \left( \frac{\partial \Delta \rho(x, t)}{\partial t} - \Delta \rho(x, t) - \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \chi_i(x, t) \right) \Psi_x(t) dt \equiv 0. \quad (3.3.17)$$

Левую часть (3.3.17) представим как разность трех интегралов, и для первого из слагаемых применим формулу интегрирования по частям. Получим:

$$\begin{aligned} & \Psi_x(T) \Delta \rho(x, T) - \int_0^T \frac{\partial \Psi_x(t)}{\partial t} \Delta \rho(x, t) dt - \int_0^T \Psi_x(t) \Delta \rho(x, t) dt - \\ & - \int_0^T \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \chi_i(x, t) \Psi_x(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Потребуем от функции  $\Psi_x(t)$  удовлетворения условию

$$\Psi_x(T) = 0,$$

тогда равенство (3.3.18) запишется таким образом:

$$\int_0^T \dot{\Psi}_x(t) + \Psi_x(t) \Delta \rho(x, t) dt = - \int_0^T \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \chi_i(x, t) \Psi_x(t) dt.$$

Пусть функция  $\Psi(x, t)$  такая, что

$$\dot{\Psi}_x(t) + \Psi_x(t) = \beta_0 \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i, t) + a_i] \lambda_i(x, t), \quad (3.3.19)$$

тогда приращение  $\Delta \bar{I}$  функционала можно записать так:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{I} = & - \int_0^T \sum_{i=1}^N \left[ u_i(x, t) \Psi_x(t) - \beta_0 (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) - \beta_1 u_i^2(x, t) \right] \chi_i(x, t) dt + \\ & + o(\Delta \rho(x, t), \chi_i(x, t)). \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$q_i(x, \tau_i, t) = u_i(x, t) \Psi_x(t) - \beta_0 (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho^*(x, t) - \beta_1 u_i^2(x, t).$$

Пусть  $\lambda_i^*(x, t)$  такая, что

$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & q_i(x, \tau_i, t) = \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t), \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку  $\chi(x, t) \in X^*(x, t)$ , имеет место двойное неравенство

$$-\lambda_i^*(x, t) \leq \chi_i(x, t) \leq 1 - \lambda_i^*(x, t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Тогда справедливо, что

$$\chi_i(x, t) \in \begin{cases} [-1, 0], & \text{при } \lambda_i^*(x, t) = 1, \\ [0, 1], & \text{при } \lambda_i^*(x, t) = 0; \end{cases} \quad i = \overline{1, N}.$$

Покажем, что выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^N q_i(x, \tau_i, t) \chi_i(x, t) \leq \sum_{i=1}^N \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t) \chi_i(x, t). \quad (3.3.20)$$

Пусть, для определенности,  $q_1(x, \tau_1, t) = \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t)$ . Если

$\chi_1(x, t) = 0$ , то с учетом неотрицательности  $\chi_j(x, t)$  и равенства  $\sum_{i=1}^N \chi_i(x, t) = 0$ , следует, что и остальные значения  $\chi_j(x, t) = 0$ ,  $j = \overline{2, N}$ . В

этом случае неравенство (3.3.20) очевидно.

В случае, когда  $-1 \leq \chi_1(x, t) < 0$ , все другие  $\chi_j(x, t)$  такие, что  $0 < \chi_j(x, t) \leq 1$ ,  $j = \overline{2, N}$ . Для положительных  $\chi_j(x, t)$  является верным следующее неравенство:

$$\sum_{i=2}^N q_i(x, \tau_i, t) \chi_i(x, t) \leq \sum_{i=2}^N \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t) \chi_i(x, t).$$

Тогда выполняется

$$\begin{aligned} & q_1(x, \tau_1, t) \chi_1(x, t) + \sum_{i=2}^N q_i(x, \tau_i, t) \chi_i(x, t) \leq \\ & \leq q_1(x, \tau_1, t) \chi_1(x, t) + \sum_{i=2}^N \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t) \chi_i(x, t), \\ & q_1(x, \tau_1, t) \chi_1(x, t) + \sum_{i=2}^N q_i(x, \tau_i, t) \chi_i(x, t) \leq \\ & \leq \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t) \chi_1(x, t) + \sum_{i=2}^N \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t) \chi_i(x, t), \\ & \sum_{i=1}^N q_i(x, \tau_i, t) \chi_i(x, t) \leq \sum_{i=1}^N \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t) \chi_i(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (3.3.20) выполняется для любой допустимой функции  $\chi(x, t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N q_i(x, \tau_i, t) \chi_i(x, t) &\leq \sum_{i=1}^N \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t) \chi_i(x, t) = \\ &= \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t) \sum_{i=1}^N \chi_i(x, t) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$-\sum_{i=1}^N q_i(x, \tau_i, t) \chi_i(x, t) \geq 0,$$

и тогда

$$\Delta \bar{I} = - \int_0^T \sum_{i=1}^N q_i(x, \tau_i, t) \chi_i(x, t) dt \geq 0.$$

Таким образом,  $\Delta \bar{I} \geq 0$  при условиях (3.3.11) – (3.3.13), и эти условия являются необходимыми условиями оптимальности для задачи (3.3.14).

Учитывая линейность целевого функционала задачи (3.3.14) и дифференциального уравнения (3.3.8) по фазовой переменной  $\rho(x, \cdot)$  и управляющей функции  $\lambda(x, \cdot)$ , можно сделать вывод о том, что условия (3.3.11) – (3.3.13) есть и достаточными для оптимальности процесса  $(\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot))$ .

Остался лишь вопрос об эквивалентности задач (3.3.10) и (3.3.14). Из формулы (3.3.13), а также с учетом удовлетворения условия  $\sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1 \forall t \in [0, T]$  вектор-функцией  $\lambda^*(x, t)$  следует, что оптимальное решение задачи (3.3.14) является крайней точкой множества  $\Lambda_2$ , а крайние точки множества  $\Lambda_2$  являются допустимыми точками для задачи (3.3.10). Таким образом, множество решений задачи (3.3.14) содержит все возможные оптимальные решения задачи (3.3.10), в результате чего делаем вывод об эквивалентности задач (3.3.10) и (3.3.14). Заметим, что одновременно с получением необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (3.3.14) сформулирован и критерий оптимальности для задачи (3.3.10).

### 3.3.4. Численный алгоритм решения задачи

Итак, оптимальное решение задачи (3.3.7), (3.3.8) определяется по формуле: почти для всех  $x \in \Omega$



$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & q_i(x, \tau_i, t) = \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t), \\ 0, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \quad (3.3.21)$$

где  $q_i(x, \tau_i, t) = u_i(x, t)\Psi_x(t) - \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i)\rho(x, t) - \beta_1 u_i^2(x, t)$ ,  
а функции  $\rho(x, t)$  и  $\Psi_x(t)$  удовлетворяют краевой задаче

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \rho(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t)\lambda_i(x, t) + f(x, t), \\ \dot{\Psi}_x(t) &= -\Psi_x(t) + \beta_0 \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i, t) + a_i]\lambda_i(x, t) \quad \lambda \in \Lambda, \quad t \in [0, T], \quad (3.3.22) \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x), \quad \Psi_x(T) = 0. \end{aligned}$$

Далее представим численный алгоритм решения непрерывной динамической задачи оптимального разбиения множества с подвижными границами между подмножествами, в основе которого лежат формулы (3.3.21), (3.3.22). Для решения краевой задачи (3.3.22) применен метод Ньютона.

Не теряя общности, приведем алгоритм решения непрерывной динамической задачи оптимального разбиения множеств  $A17$  в предположении, что  $\Omega$  – квадратная область  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

### Алгоритм

1. Область  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  покрываем квадратной сеткой  $n \times n$  с шагом  $h$  по каждой переменной и задаем значение функции начальных условий  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  в узлах сетки  $\rho((i, j), 0)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

2. Для каждого узла  $(i, j)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  сетки:

а) инициализируем  $k$ :  $k = 0$ . Задаем начальное значение  $\alpha^0$ ;

б) задаем значение двойственной функции  $\Psi_x(t)$  при  $t = 0$  путем присвоения ей значения  $k$ -го приближения параметра  $\alpha$ :  $\Psi_x(0) = \alpha^k$ ;

с) находим значение характеристической функции  $\lambda_g^*((i, j), 0)$ ,  $g = \overline{1, N}$ , по формуле (3.3.21);

д) покрываем отрезок  $[0, T]$  сеткой с шагом  $h_t$ . Далее, для удобства, будем обозначать узел интегрирования по временной переменной через  $t$ . В каждом узле  $0 < t \leq T$ , при помощи одного из численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (например, методом Эйлера, или одним из методов Рунге – Кутты) вычис-

ляем значения функций  $\rho((i, j), t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $\Psi_x(t)$ , при этом на каждом шагу численного интегрирования системы по формуле (3.3.21) находим значения характеристических функций  $\lambda_g^*((i, j), t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $g = \overline{1, N}$ ;

е) пользуясь краевым условием для функции  $\Psi_x(t)$  на правом конце, находим невязку  $Y(\alpha^k)$ :

$$Y(\alpha^k) = \Psi_x(T) - 0;$$

ф) если выполняется неравенство  $|Y(\alpha^k)| \leq \varepsilon$ ,

где  $\varepsilon > 0$  – заранее заданная точность, то оптимальная вектор-функция  $\lambda^*((i, j), t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , определяющая принадлежность узла  $(i, j)$  в каждый момент времени  $t$  к некоторому из подмножеств  $\Omega_p^*$ ,  $p = \overline{1, N}$ , образующих динамическое разбиение множества  $\Omega$  в задаче **A17**, а также соответствующую функцию  $\rho^*(\cdot, t)$ , найдена. Переходим на шаг 3. Если нет, переходим на шаг г);

г) по формуле метода Ньютона вычисляем новое приближение параметра в каждом узле сетки:

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k - \frac{Y(\alpha^k)}{Y'(\alpha^k)},$$

где  $Y'(\alpha^k) \approx \frac{Y(\alpha^k + \Delta\alpha) - Y(\alpha^k)}{\Delta\alpha}$ ,

$\Delta\alpha$  – заданное малое приращение параметра  $\alpha$ .

Отметим, что для вычисления величины  $Y(\alpha^k + \Delta\alpha)$  следует реализовать пункты а) – е) алгоритма при  $\alpha := \alpha^k + \Delta\alpha$ .

$k = k + 1$ . Возвращаемся на шаг б).

3. Находим оптимальное значение целевого функционала (3.3.10).

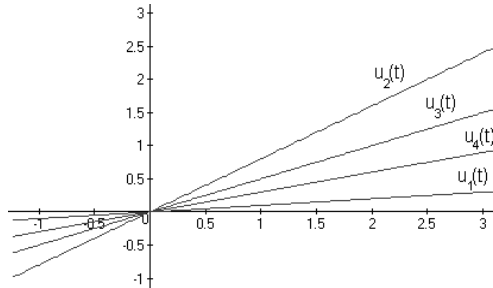
Алгоритм описан.

### **3.3.5. Особенности вычислительной реализации алгоритма. Анализ результатов решения модельных задач**

Численная реализация приведенного выше алгоритма математической модели динамической задачи оптимального разбиения множеств включе-

на в состав программного комплекса DSPP. Рассмотрим результаты нескольких модельных задач [70, 165].

**Модельная задача 1.** Решается задача **A17** при следующих исходных данных:  $\Omega = (x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1$ ;  $N = 4$ ;  $T = 2.6$ ; функции стоимости  $c(x, \tau_i, t) = \sqrt{(x_1 - \tau_{1i})^2 + (x_2 - \tau_{2i})^2} / (t + 0.1)$ ;  $a_i = 0, i = \overline{1, 4}$ ;  $f(x, t) = 1$ ;  $\beta_{0,1} = 1$ . Функция управления линейна по времени и определяется в каждой точке соответствующего подмножества так:  $u_i(t) = B_i t + A_i, i = \overline{1, N}$ ;  $B_1 = 0.1, B_2 = 0.8, B_3 = 0.5, B_4 = 0.3$ ;  $A_i = 0, i = \overline{1, 4}$ ;  $\rho_0(x) = 1$  (рис. 3.12).



**Рис. 3.12.** Линейные функции управления  $u_i(t)$  в модельной задаче 1

Численная реализация предложенного алгоритма осуществлялась при таких параметрах:  $h = 0.01$  – шаг сетки;  $h_t = 0.1$  – шаг по времени;  $\alpha = 0.5$ ;  $\varepsilon = 0.001$ . Изменение оптимального разбиения множества  $\Omega = (x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1$  по времени можно проследить в табл. 3.4 (см. Приложение), где представлены разбиения в некоторые фиксированные отсчеты времени, а также значения целевого функционала задачи (3.3.1).

В таблице 3.5 (см. Приложение) в столбце а) – размещение центров симметрично,  $\tau_1 = (0.3, 0.3), \tau_2 = (0.7, 0.3), \tau_3 = (0.3, 0.7), \tau_4 = (0.7, 0.7)$ , в столбце б) – нет:  $\tau_1 = (0.3, 0.3), \tau_2 = (0.8, 0.2), \tau_3 = (0.46, 0.44), \tau_4 = (0.66, 0.86)$ .

Проанализируем представленные в таблице результаты. Во-первых, обратим внимание на то, что в обоих случаях в начальный момент времени оптимальным разбиением является диаграмма Дирихле – Вороного. Объяснением этому является тот факт, что функция  $\rho(\cdot, \cdot)$  в начальный

момент времени тождественно равна единице. Но в дальнейшем функция  $\rho(\cdot, \cdot)$  изменяется по закону (3.3.2), в котором управляющая функция определяется разбиением множества  $\Omega$ , а последнее, в свою очередь, – условием (3.3.21) принципа максимума. Тот факт, что функция  $\rho(\cdot, \cdot)$  зависит от разбиения, легко прослеживается и в случае а), и в случае б), если сопоставить поверхность функции  $\rho(\cdot, \cdot)$  в конечный момент времени с разбиением в тот же момент ( $t = T = 25$ ).

Проследим, каков вклад функции управления  $u(\cdot, \cdot)$  в оптимальное разбиение. В начальный момент времени она не влияет на разбиение, поскольку при  $t = 0$  все  $u_i(t) = 0, i = \overline{1, N}$ . Анализируя разбиение в момент времени  $t = 12$  и графический вид выбранных функций управления (рис. 3.12), можно сделать вывод о том, что чем быстрее растет функция  $u(\cdot, \cdot)$  со временем, тем меньше мощность соответствующего подмножества, и тем быстрее возрастает функция плотности  $\rho(\cdot, \cdot)$  в точках этого подмножества.

Следует отметить, что в случае, когда параметры  $B_i, A_i, i = \overline{1, N}$ , функции управления одинаковы на всех подмножествах, то оптимальное разбиение оказывается статическим.

**Модельная задача 2.** Рассмотрим задачу **A17**, в которой значения всех параметров, за исключением функции  $\rho_0(\cdot)$ , те же, что и в предыдущей модельной задаче. Предположим:

$$\rho_0(x_1, x_2) = \begin{cases} 2, & \text{если } 0.18 \leq x_1 \leq 0.39; 0.67 \leq x_2 \leq 0.81; \\ 1 & \text{для других точек из } \Omega. \end{cases}$$

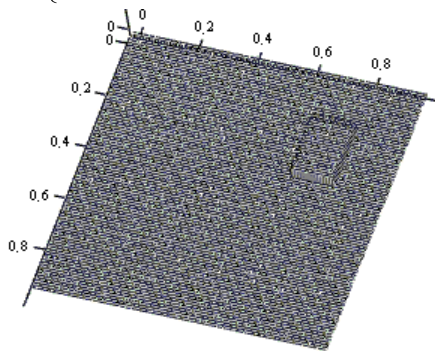


Рис. 3.13. Функция  $\rho_0(\cdot)$  в модельной задаче 2

То есть,  $\rho_0(\cdot)$  – кусочно-постоянная функция (рис. 3.13). Значения параметров, при которых осуществлялась численная реализация алгоритма, следующие:  $h = 0.01$  – шаг сетки;  $h_t = 0.1$  – шаг по времени;  $\alpha = 1$ ;  $\varepsilon = 0.001$ .

Оптимальное разбиение множества  $\Omega$  в определенные отсчеты времени, а также значения целевого функционала задачи (3.3.1) приведены в табл. 3.5 (см. Приложение).

Проанализируем результаты табл. 3.5. В начальный момент  $t = 0$  в обоих случаях а) и б) оптимальным разбиением вновь является диаграмма Дирихле – Вороного. Это объясняется тем, что только первое слагаемое в целевом функционале оказывает влияние на разбиение, поскольку в начальный момент функция управления равна нулю на каждом подмножестве. В свою очередь, первое слагаемое содержит функцию  $c(x, \tau_i, t)$  – функцию расстояния точек множества от фиксированного центра  $\tau_i$ , которая и воспроизводит диаграмму Дирихле – Вороного как оптимальное разбиение множества в начальный момент времени. Далее со временем границы между подмножествами меняются, меняется соответственно и разбиение, так как на каждом подмножестве конкретная ненулевая функция управления  $u(\cdot, \cdot)$  определяет функцию  $\rho(\cdot, \cdot)$  – своеобразную весовую функцию, которая вносит значительный вклад в целевой функционал.

Анализ результатов серии подобных экспериментов с различным заданием функции  $\rho_0(\cdot)$  при фиксированных других параметрах позволяет сделать вывод о том, что при условии  $u_i(0) = 0, i = \overline{1, N}$  в начальный момент времени оптимальным разбиением в задаче (3.3.1), (3.3.2) всегда является диаграмма Дирихле – Вороного, т. е. вид функции  $\rho_0(\cdot)$  не влияет на начальное разбиение множества. Но вид оптимального разбиения в последующие моменты времени существенно определяется этой функцией, о чем свидетельствуют результаты решения модельных задач, приведенных в табл. 3.6, 3.8 (см. Приложение).

**Модельная задача 3** отличается от предыдущей значениями параметров функции управления:  $B_i = 0, i = \overline{1, N}$ ;  $A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 3, A_4 = 4$ , рис. 3.14. Оптимальное разбиение множества  $\Omega$  в определенные отсчеты времени, а также значения целевого функционала задачи (3.3.1), приведены в таблице 3.7.

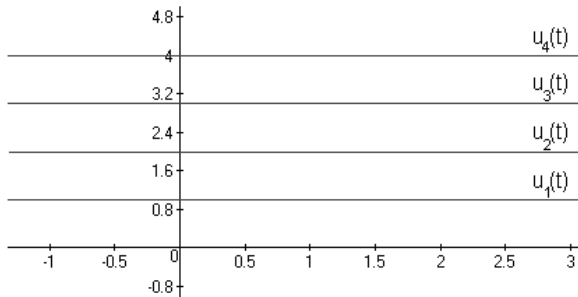


Рис. 3.14. Функции управления  $u_i(t)$  в модельной задаче 3

По трем отсчетам времени достаточно сложно представить, как изменялось разбиение на всем промежутке времени, однако можно увидеть, что в начальный момент оптимальное разбиение уже отличается от диаграммы Дирихле – Вороного, что объясняется весомым вкладом в целевой функционал второго слагаемого, содержащего ненулевую функцию управления  $u(\cdot, t)$ .

Кроме того, особенностью полученного оптимального динамического разбиения выступает тот факт, что подмножества  $\Omega_3(t)$  и  $\Omega_4(t)$  остаются пустыми на всем промежутке времени. Соответственно и суммарные мощности этих подмножеств на всем временном интервале равны нулю (табл. 3.7). Под **мощностью подмножества**  $\Omega_i(t)$  здесь и далее будем понимать величину

$$S_i = \int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx, \quad i = 1..N.$$

Такое динамическое разбиение обусловлено выбором параметров функции управления  $u(x, t)$ , а также функцией начальных условий  $\rho_0(x)$ .

**Модельная задача 4.** Решается задача 4 при таких исходных *данных*:  $\Omega = (x_1, x_2)$ :  $0 \leq x_1 \leq 1$ ;  $0 \leq x_2 \leq 1$ ;  $N = 4$  – количество подмножеств;  $T = 2.6$ ;  $\beta_0 = \beta_1 = 1$ ;  $f(x, t) = 1$ ; функции стоимости  $c(x, \tau_i, t) = \sqrt{(x_1 - \tau_{1i})^2 + (x_2 - \tau_{2i})^2} / (t + 0.1)$ ,  $i = 1..N$ ; координаты центров подмножеств  $\tau_1 = (0.3, 0.3)$ ,  $\tau_2 = (0.8, 0.2)$ ,  $\tau_3 = (0.77, 0.72)$ ,  $\tau_4 = (0.37, 0.65)$ ;  $a_i = 0, i = \overline{1, N}$ . Функции, определяющие управление, имеют вид:  $u_1(t) \equiv 0.1$ ,  $u_2(t) \equiv 0.8$ ,  $u_3(t) \equiv 0.5$ ,  $u_4(t) \equiv 0.3$ . Варианты зада-

чи отличаются лишь заданием функции начальных условий задачи (3.3.2). В табл. 3.8 (см. Приложение) приведены выражения этой функции согласно варианту задачи, а также представлены результаты расчетов – оптимальное разбиение в определенные отсчеты времени и поверхности, которые являются графическими изображениями функции  $\rho(x,t)$  в соответствующие отсчеты времени.

### 3.3.6. Динамическая задача оптимального разбиения множеств с управляемыми центрами подмножеств. Необходимые условия оптимальности

В предыдущем подразделе рассматривалась динамическая задача оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами, в которой динамическими являются не только некоторые характеристики рассматриваемого процесса, но и само разбиение множества. Границы между подмножествами могут быть подвижными за счет того, что скорость изменения функции  $\rho(x,t)$ , описывающей состояние процесса, в каждой точке  $x \in \Omega$  определяется принадлежностью этой точки текущему подмножеству, входящему в состав разбиения множества  $\Omega$ . Следует заметить, что границы между подмножествами могут изменяться со временем и за счет подвижных центров подмножеств. Частным случаем таких задач есть задача Цермело, задача построения динамической диаграммы Вороного (подробнее см. п. 6.1).

Далее будем считать, что точки  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , меняют свое местоположение в области  $\Omega$  под влиянием некоторых внешних управляющих сил.

*Под динамической задачей оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами и управляемыми центрами этих подмножеств будем понимать следующую задачу.*

**Задача А18.** Пусть задан набор функций  $u_i(x,t) \in L_2(\Omega \times [0, T]), i = \overline{1, N}$ . Состояние некоторого управляемого объекта описывается функцией  $\rho(x,t)$ , удовлетворяющей  $\forall x \in \Omega_i(t)$  следующей задаче Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x,t) &= f(\rho(x,t), u(x,t; \bar{\omega}(t)), x, t), \quad u \in U(t), \quad \forall t \in [0, T], \\ \rho(x,0) &= \rho_0(x), \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

$$U(t) = \{u(x, t; \bar{\omega}(t)) : u(x, t; \bar{\omega}(t)) = u_i(x, t) \text{ п.в. для } x \in \Omega_i(t), i = \overline{1, N}; \\ \bar{\omega}(t) = (\Omega_1(t), \dots, \Omega_N(t)) \in P_N(\Omega)\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Пусть с каждым подмножеством  $\Omega_i(\cdot)$  связана точка  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , координатами которой можно управлять с помощью определенных параметров  $v_i(t) = v_i^1(t), \dots, v_i^r(t)$ ,  $v_i^l \in L_2(0, T), l = \overline{1, r}, i = \overline{1, N}$ ,  $t \in 0, T$ . Изменение координат центров с течением времени описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{\tau}_i(t) = \varphi(\tau_i(t), v_i(t), t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.3.24)$$

В (3.3.23), (3.3.24) функции  $f, \varphi = \varphi^1, \dots, \varphi^n$  – известные функции своих аргументов.

Требуется найти разбиение  $\bar{\omega}^*(t) = (\Omega_1^*(t), \dots, \Omega_N^*(t)) \in P_N(\Omega)$ ,  $t \in [0, T]$ , соответствующую функцию  $\rho^*(\cdot, \cdot) = \rho^*(\cdot, \cdot, \bar{\omega}^*(\cdot))$ , управляющие вектор-функции  $v_i^*(\cdot) = v_i^{1*}(\cdot), \dots, v_i^{r*}(\cdot)$ ,  $v_i^{l*}(\cdot) \in V \subseteq L_2(0, T)$ ,  $l = \overline{1, r}, i = \overline{1, N}$ , и соответствующие им фазовые траектории  $\tau_i^*(\cdot) \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , при которых центры подмножеств  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , переходили бы из заданного начального состояния  $\tau_i(0) = \bar{\tau}_{i0}, i = \overline{1, N}$ , в заданное конечное состояние  $\tau_i(T) = \bar{\tau}_{iT}, i = \overline{1, N}$ , а некоторый функционал  $F(\bar{\omega}(\cdot), \tau(\cdot), \rho(\cdot, \cdot; \bar{\omega}(\cdot)), v_1(\cdot), \dots, v_N(\cdot))$  достигал своего минимального (максимального) значения.

Необходимые условия оптимальности и алгоритм непрямого метода решения динамической задачи ОРМ с подвижными границами между подмножествами и управляемыми центрами приведем далее для следующего частного случая задачи **A18**.

Рассмотрим задачу управления движением  $N$  точек  $\tau_i \in \bar{\Omega}, i = \overline{1, N}$ , по поверхности  $\bar{\Omega}$ , рельеф которой может быть описан определенной функцией  $z = \mu(x^1, x^2)$ ,  $(x^1, x^2) \in \Omega, \Omega \subset R^2$ , с одновременным отысканием областей наблюдения  $\bar{\Omega}_1(t), \dots, \bar{\Omega}_N(t)$  точек  $\tau_i \in \bar{\Omega}, i = \overline{1, N}$ , так, чтобы «суммарные затраты на наблюдение» за всеми точками множества  $\bar{\Omega}$ , а также траектории, по которым осуществляются перемещения точек  $\tau_i \in \bar{\Omega}, i = \overline{1, N}$ , были бы как можно меньше.



Математическая постановка сформулированной задачи записывается следующим образом.

**Задача A19.** Требуется

$$J(\bar{\omega}(\cdot), \tau(\cdot), \rho(\cdot, \cdot; \bar{\omega}(\cdot)), a(\cdot), \xi(\cdot)) \rightarrow \min ,$$

где

$$\begin{aligned} & J(\bar{\omega}(\cdot), \tau(\cdot), \rho(\cdot, \cdot; \bar{\omega}(\cdot)), a(\cdot), \xi(\cdot)) = \\ & = \gamma_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i(t)} \left[ c(x, \tau_i(t), t) + A_i \rho(x, t; \bar{\omega}(t)) + u_i^2(x, t) \right] dxdt + \\ & \quad + \gamma_1 \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\tau_i(0)}^{\tau_i(T)} dL_i + \int_0^T \sum_{i=1}^N a_i^2(t) dt \right\}, \end{aligned}$$

при ограничениях

$$\dot{\rho}(x, t) = \rho(x, t) + u_i(x, t) + f(x, t), \quad x \in \Omega_i(t), \quad \forall t \in 0, T, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x);$$

$$\dot{\tau}_{1i}(t) = a_i(t) \cos \phi_i(t),$$

$$\dot{\tau}_{2i}(t) = a_i(t) \sin \phi_i(t),$$

(3.3.25)

$$\tau_i(0) = \tau_{1i}^0, \tau_{2i}^0, \quad \dot{\tau}_i(0) = v_{1i}^0, v_{2i}^0, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\tau_i(T) = \tau_{1i}^T, \tau_{2i}^T, \quad \dot{\tau}_i(T) = 0, 0,$$

Здесь  $u_i(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – заданный набор функций, определяющих величину воздействий центра на некоторую наблюдаемую и управляемую величину  $\rho(x, t)$ ;  $f(x, t), \rho_0(x)$  – известные функции своих аргументов. Точка  $\tau_i$  на рассматриваемой поверхности имеет координаты  $(\tau_{1i}, \tau_{2i}, \tau_{3i})$ , где первые две изменяются по закону (3.3.25) под воздействием управляющих параметров  $a_i(t) \in KC(0, T)$ ,  $\phi_i(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  и могут принимать значение в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , третья координата –  $\tau_{3i} = \mu(\tau_{1i}, \tau_{2i})$ ,  $i = \overline{1, N}$ . В функционале  $L_i$  – длина  $i$ -й кривой (траектории движения  $i$ -й «управляемой точки» по поверхности  $z = \mu(x^1, x^2)$ ), соединяющей точки  $\tau_i^0$  и  $\tau_i^T$ ; криволинейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\tau_i(0)}^{\tau_i(T)} dL_i = \sum_{i=1}^N \int_0^T \sqrt{\dot{\tau}_{1i}^2(t) + \dot{\tau}_{2i}^2(t) + \dot{\tau}_{3i}^2(t)} dt .$$

Константы  $\gamma_0, \gamma_1 \geq 0$  заданы и определяют приоритет слагаемого;  $A_i \geq 0, i = \overline{1, N}$ , – фиксированные величины;  $c(x, y, t)$  – заданная функция,  $T > 0$  – фиксированная продолжительность управляемого процесса.

Как уже отмечалось в п.1.1.6, в задаче **A19** управление совершается проекциями на плоскость  $x_1 O x_2$  точек  $(\tau_{1i}, \tau_{2i}, \tau_{3i})$ , а множество  $\Omega$ , являющееся проекцией  $\bar{\Omega}$  на эту же плоскость, и подлежит разбиению (рис. 1.3). Границы между подмножествами могут изменяться не только вследствие того, что скорость изменения функции  $\rho(x, t)$  определяется принадлежностью точки  $x$  к тому или иному подмножеству, но и в силу того, что «центры» подмножеств, меняя свое место расположения, могут «тянуть» за собой границы между «зонами своего наблюдения».

Приведем необходимые условия оптимальности решения динамической задачи ОРМ **A19**.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{1i}(t) &= v_{1i}(t), \\ \dot{\tau}_{2i}(t) &= v_{2i}(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, N}, \\ \eta_i(t) &= \tau_{1i}(t), \tau_{2i}(t), v_{1i}(t), v_{2i}(t) , \\ \eta_{i0} &= \tau_{1i}^0, \tau_{2i}^0, v_{1i}^0, v_{2i}^0 , \quad \eta_{iT} = \tau_{1i}^T, \tau_{2i}^T, 0, 0 , \quad i = \overline{1, N} . \end{aligned}$$

Тогда условия (3.4.2) и (3.4.3) переписутся, соответственно, в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{1i}(t) &= v_{1i}(t), \\ \dot{v}_{1i}(t) &= a_i(t) \cos \varphi_i(t), \\ \dot{\tau}_{2i}(t) &= v_{2i}(t), \\ \dot{v}_{2i}(t) &= a_i(t) \sin \varphi_i(t), \\ \tau_i(0) &= \tau_{1i}^0, \tau_{2i}^0 , \quad v_i(0) = v_{1i}^0, v_{2i}^0 , \\ \tau_i(T) &= \tau_{1i}^T, \tau_{2i}^T , \quad v_i(T) = 0, 0 , \end{aligned} \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, N},$$

или кратко:

$$\dot{\eta}_i^j(t) = f^j \eta_i(t), a_i(t), \varphi_i(t) , \quad j = \overline{1, 4}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.3.26)$$

$$\eta_i(0) = \eta_{i0}, \quad \eta_i(T) = \eta_{iT} , \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.3.27)$$

где  $f^j \eta_i(t), a_i(t), \varphi_i(t)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – соответствующие функции.

Пользуясь теми же соображениями, что и в пункте 3.3.4, перепишем рассматриваемую задачу в виде задачи оптимального управления, в которой управляющие параметры делятся на два типа: 1) управление границами подмножеств осуществляется посредством выбора характеристических функций подмножеств, т. е. заданием вектор-функции  $\lambda(\cdot, \cdot)$ ; 2) управления «подвижными центрами» подмножеств – выбором вектор-функций  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ :

$$\begin{aligned}
 J(\gamma) = & \gamma_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left[ c(x, \tau_i(t), t) + A_i \rho(x, t) + u_i^2(x, t) \right] \lambda_i(x, t) dx dt + \\
 & + \gamma_1 \left\{ \sum_{i=1}^N \int_0^T \sqrt{v_{1i}^2(t) + v_{2i}^2(t) + \mu^2(\tau_{1i}(t), \tau_{2i}(t))} dt + \right. \\
 & \left. + \int_0^T \sum_{i=1}^N a_i^2(t) dt \right\} \rightarrow \min_{\gamma \in V},
 \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

где  $\gamma(\cdot, \cdot) = \eta(\cdot), \rho(\cdot, \cdot); a(t), \varphi(t), \lambda(\cdot, \cdot)$ , а множество допустимых процессов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 V = & \gamma(\cdot, \cdot) = \eta(\cdot), \rho(\cdot, \cdot); a(t), \varphi(t), \lambda(\cdot, \cdot) : \\
 & \dot{\eta}_i^j(t) = f^j \eta_i(t), a_i(t), \varphi_i(t), j = \overline{1, 4}, \\
 & \eta_i(0) = \eta_{i0}, \eta_i(T) = \eta_{iT} \quad i = \overline{1, N}; \\
 & \dot{\rho}(x, t) = \rho(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), \quad t \in [0, T], \\
 & \rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega.
 \end{aligned}$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, можно получить следующие формулы для стационарного процесса задачи (3.3.28):

$$a_i^*(t) = \frac{\psi_{2i}^*(t) \cos \varphi_i^*(t) + \psi_{4i}^*(t) \sin \varphi_i^*(t)}{2}; \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.3.29}$$

$$\varphi_i^*(t) = \arctg \frac{\psi_{4i}^*(t)}{\psi_{2i}^*(t)}; \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.3.30}$$

$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & q_i(x, \tau_i, t) = \max_{k=1, N} q_k(x, \tau_k, t), \\ \forall x \in \Omega, t \in [0, T], \\ 0, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \quad (3.3.31)$$

где

$$q_i(x, \tau_i, t) = u_i(x, t)\Psi_5(x, t) - \gamma_0 \left[ (c(x, \tau_i, t) + a_i)\rho(x, t) - u_i^2(x, t) \right],$$

а вектор-функция  $\Psi^*(x, t) = \Psi_1^*(t), \Psi_2^*(t), \Psi_3^*(t), \Psi_4^*(t), \Psi_5^*(x, t)$ , где  $\Psi_j^*(t) = \psi_{j1}^*, \dots, \psi_{jN}^*$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , является решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{1i} &= \frac{\partial}{\partial \tau_{1i}} \left( \gamma_0 \int_{\Omega} (c(x, \tau_i, t)\rho(x, t)\lambda_i(x, t)dx + \gamma_1 \sqrt{v_{1i}^2 + v_{2i}^2 + \mu^2(\tau_{1i}, \tau_{2i})}) \right), \\ \dot{\psi}_{2i} &= -\psi_{1i}(t) + \frac{\partial}{\partial v_{1i}} \gamma_1 \sqrt{v_{1i}^2 + v_{2i}^2 + \mu^2(\tau_{1i}, \tau_{2i})}, \\ \dot{\psi}_{3i} &= \frac{\partial}{\partial \tau_{2i}} \left( \gamma_0 \int_{\Omega} (c(x, \tau_i, t)\rho(x, t)\lambda_i(x, t)dx + \gamma_1 \sqrt{v_{1i}^2 + v_{2i}^2 + \mu^2(\tau_{1i}, \tau_{2i})}) \right), \\ \dot{\psi}_{4i} &= -\psi_{3i}(t) + \frac{\partial}{\partial v_{2i}} \gamma_1 \sqrt{v_{1i}^2 + v_{2i}^2 + \mu^2(\tau_{1i}, \tau_{2i})}, \quad i = \overline{1, N}, \\ \frac{\partial \Psi_5}{\partial t} &= -\Psi_5(x, t) + \gamma_0 \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i, t) + a_i)\rho(x, t)\lambda_i(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

а функция  $\psi_5(x, t)$  для всех  $x \in \Omega$  удовлетворяет условию:

$$\psi_5(x, T) = 0.$$

Для численного решения полученной краевой задачи принципа максимума с учетом аналитического выражения для управляющих функций (3.3.29) – (3.3.31) применяется метод Ньютона.

# Глава 4

## НЕПРЕРЫВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

В главе представлены математические модели нелинейных динамических задач оптимального разбиения множеств. Особенностью этих задач является зависимость скорости изменения состояния некоторой управляемой системы в каждой точке рассматриваемого множества  $\Omega$  от принадлежности этой точки к определенному подмножеству  $\Omega_i$  множества  $\Omega$ . Нелинейность задач связана, прежде всего, с видом функционала (например, это может быть среднеквадратическое отклонение состояния системы от желаемого, или функционал, содержащий функции  $|\cdot|$ ,  $\max(\cdot)$  и другие). Кроме того, нелинейной может оказаться и дифференциальная связь. Приведены несколько подходов к решению таких задач.

### *4.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА. СТАТИЧЕСКОЕ РАЗБИЕНИЕ*

#### **4.1.1. Постановка задачи**

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеряемое по Лебегу множество из  $E_n$ ,  $\Sigma_{\Omega}^N$  класс всевозможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N): \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes } \Omega_i \cap \Omega_j = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N},$$

где  $\text{mes}(\cdot)$  означает меру Лебега. Пусть функции  $u_i(x, t; \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – заданные действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times 0, T \times \Omega$ , измеримые по  $x$  при соответствующих произвольных векторах парамет-

ров  $\tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^K \in \Xi_i, \Xi_i \subseteq \mathbb{R}^K, i = \overline{1, N}$ . Далее, используя терминологию теории непрерывных задач ОРМ, векторы  $\tau_i, i = \overline{1, N}$ , будем называть «центрами» подмножеств  $\Omega_i, i = \overline{1, N}$ , хотя в действительности интерпретировать эти точки как центры этих подмножеств можно только в частном случае, когда  $K = n, \Xi_i \equiv \Omega_i, i = \overline{1, N}$ .

Введем в рассмотрение класс допустимых управляющих функций:

$$U = \{u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) : u(x, t; \bar{\omega}, \tau) = u_i(x, t; \tau_i), \text{ п. в. для } x \in \Omega_i, \tau_i \in \Xi_i, i = \overline{1, N},$$

$$\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N\}; t \in [0, T]$$

и функционал

$$F(\gamma) = \int_{\Omega} \int_0^T \rho(x, t; u(x, t; \bar{\omega}, \tau)) - \hat{\rho}(x, t)^2 dt dx,$$

где  $\gamma = \bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot), T > 0$  – заданный момент времени;  $u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U, \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau \in \Xi, \Xi = \Xi_1 \times \Xi_2 \times \dots \times \Xi_N$ , функция  $\rho(x, \cdot) \in C^1([0, T])$  для каждого  $x \in \Omega$  является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \quad t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

причем

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.1.2)$$

В выражениях (4.1.1), (4.1.2)  $\alpha, b_1, \dots, b_N$  – заданные величины.

**Нелинейной динамической задачей оптимального разбиения множества  $\Omega \subseteq E^n$  на ее подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  с размещением центров этих подмножеств** называется следующая задача [54].

**Задача.** Необходимо найти такой набор  $\gamma^* = \bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot, \cdot; \bar{\omega}^*, \tau^*), \rho^*(\cdot, \cdot)$ , где разбиение  $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Sigma_{\Omega}^N$ , параметры  $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Xi$ , управление  $u^*(\cdot, \cdot; \bar{\omega}^*, \tau^*) \in U$  и фазовая траектория  $\rho^*(x, t)$  (удовлетворяющая условиям (4.1.1), (4.1.2)), при котором функционал  $F(\gamma)$  достигал бы минимального значения.

Коротко задачу будем записывать так:

$$F(\bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot) \in \Phi}, \quad (4.1.3)$$

$$\Phi = \{ \bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot) : \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau \in \Xi, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U; \\ \dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \quad t \in 0, T, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x); \int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \}.$$

Оптимальным решением задачи (4.1.3) будем называть допустимую четверку  $\gamma^* = \{ \bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot, \cdot; \bar{\omega}^*, \tau^*), \rho^*(\cdot, \cdot) \}$ , доставляющую минимальное значение функционалу  $F$ .

**Замечание 4.1.** Каждое допустимое разбиение  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$  и набор параметров  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Xi$  определяет функцию  $u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U$  такую, что соответствующая задача Коши (4.1.2) имеет единственное решение  $\rho(x, t)$  в следующем смысле:  $\forall x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}$ , функция  $\rho(x, t)$  – непрерывна по временной переменной  $t \in 0, T$  и удовлетворяет равенству

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t \alpha \rho(x, \theta) + u_i(x, \theta; \tau_i) d\theta, \quad t \in 0, T.$$

**Замечание 4.2.** Задаче (4.1.3) при условиях  $\forall \tau_i \in \Omega_i, i = \overline{1, N}$ , можно дать следующую экономическую интерпретацию. Пусть рассматривается сосуществование производителей однотипных товаров (сходных по цене и качеству), потребителями которых является определенный слой общества с примерно одинаковым уровнем доходов, проживающий в одинаковых условиях и имеющий одинаковую шкалу предпочтений. Общим интересом для фирм-производителей однотипного товара является удержание спроса  $\rho(x, t)$  на данный товар на определенном уровне  $\hat{\rho}(x, t)$ , который можно лишь несколько увеличивать или уменьшать со временем, сохраняя при этом главную тенденцию колебаний в окрестности желаемого спроса, при условии учета предельной границы потребления данного товара и производственных мощностей предприятия. Считается, что динамика спроса прямо пропорциональна самому спросу (что отображается в линейном слагаемом дифференциального уравнения (4.1.1),  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности). Кроме того, повышение спроса на продукцию может осуществляться за счет проведения субъектами производства определенных действий, увеличивающих спрос, например, незначительного сокращения стоимости товара за счет модернизации производства, рекламных акций и т. д. Сила воздействия таких мероприятий  $i$ -го производителя описывается функцией  $u_i(x, \tau_i, t), i = \overline{1, N}$ . Поскольку предпола-

гается сосуществование производителей, не имеет смысла каждому из них «вкладывать средства» в каждого потребителя. Необходимо лишь найти оптимальные местоположения производителей в регионе  $\Omega$  и распределить потребителей на зоны влияния и обслуживания соответствующих производителей с учетом их общих интересов. Ограничения типа (4.1.2) могут учитывать или предельную границу потребления данного товара, или производственные мощности предприятий.

**Замечание 4.3.** Вместо интегральных ограничений типа (4.1.2) на фазовую переменную в задаче (4.1.3) могут быть введены аналогичные ограничения на управляющую функцию:

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_i(x, t; \tau_i) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.1.2')$$

Тогда экономически задача (4.1.3) с такими ограничениями (4.1.2') при условии  $\Xi = \Omega^N$  может быть интерпретирована так. Пусть, как и в замечании 4.2, рассматривается сосуществование производителей однотипных товаров, координаты расположения которых  $\tau_i \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , могут быть заданы, а могут подлежать определению. Будем считать, что можно спрогнозировать уровень  $\hat{\rho}(x, t)$  спроса на данный товар в каждой точке  $x$  региона  $\Omega$  на некоторый период  $t \in [0, T]$ . Общим интересом для фирм-производителей однотипного товара является удовлетворение этого спроса. Пусть функция  $\rho(x, t)$  описывает количество товара у потребителя  $x$  в момент времени  $t \in [0, T]$ . При  $t = 0$  эта величина известна и задается функцией  $\rho_0(x)$ ,  $x \in \Omega$ . Изменение количества товара у потребителя с течением времени происходит за счет потребления товара. Будем считать, что такие изменения пропорциональны самому количеству ( $\alpha < 0$  – коэффициент пропорциональности), а также могут происходить за счет производства и доставки продукции производителем  $\Omega_i$  в количестве  $u_i(x, \tau_i, t)$  в единицу времени. Ограничения (4.1.2') учитывают мощности самих производителей. Необходимо закрепить каждого потребителя за одним производителем для как можно более полного удовлетворения спроса.

Для корректности поставленной задачи правые части неравенств (4.1.2) или (4.1.2') должны удовлетворять некоторым условиям, при которых сформулированная задача была бы разрешимой. Эти условия получим в процессе разработки и обоснования метода решения задачи (4.1.3).



### 4.1.2. Метод и алгоритм решения задачи

Согласно методике решения непрерывных задач ОРМ, от задачи (4.1.3) перейдем к эквивалентной задаче бесконечномерного программирования с булевыми переменными: найти вектор-функцию  $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)$ , и набор векторов  $\tau \in \Xi$ , которые минимизируют функционал

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t; \lambda(x), \tau) - \hat{\rho}(x, t)^2 dt dx \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \quad (4.1.4)$$

при условиях

$$\dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + \sum_{j=1}^N u_j(x, t; \tau_j) \lambda_j(x), \quad t \in 0, T, \quad (4.1.5)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.1.6)$$

Решение задачи Коши (4.1.5) для каждого  $x \in \Omega$  легко получить в аналитическом виде:

$$\rho(x, t; \lambda(x), \tau) = \rho_0(x) + \sum_{j=1}^N \left( \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_j(x, \theta; \tau_j) d\theta \right) \lambda_j(x), \quad (4.1.7)$$

$$x \in \Omega, t \in 0, T.$$

Учитывая выражение (4.1.7), задачу (4.1.4) – (4.1.6) можно переписать следующим образом:

$$I(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \quad (4.1.8)$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^N \left( \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \theta; \tau_i) d\theta \right) \lambda_i(x) - \bar{\rho}(x, t) \right)^2 dt dx$$

при условиях

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho_0(x) + \sum_{j=1}^N \left( \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_j(x, \theta; \tau_j) d\theta \right) \lambda_j(x) \right) \lambda_i(x) dt dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.1.9)$$

где  $\bar{\rho}(x, t) = \hat{\rho}(x, t) - \rho_0(x)$ .

Для упрощения и функционала (4.1.8), и соотношения (4.1.9) воспользуемся следующим свойством элементов множества  $\Lambda$ :

$$\lambda_i^2(x) = \lambda_i(x), \lambda_i(x)\lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i(x), & i = j \end{cases}, \forall x \in \Omega, i, j = \overline{1, N}.$$

Тогда задача (4.1.8), (4.1.9) приобретает следующий вид:

$$I_1(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Lambda \times \Xi}, \quad (4.1.10)$$

$$I_1(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left( \int_0^T \left[ \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \theta; \tau_i) d\theta \right]^2 - 2\bar{\rho}(x, t) \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \theta; \tau_i) d\theta \right) \lambda_i(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\rho}(x, t)^2 dt dx$$

при условиях

$$\int_{\Omega} \left( T\rho_0(x) + \int_0^T \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \theta; \tau_i) d\theta dt \right) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.1.11)$$

Таким образом, от непрерывной динамической задачи оптимального разбиения множества с квадратичным функционалом (4.1.3) удается перейти к эквивалентной непрерывной линейной задаче ОРМ с ограничениями-неравенствами. К решению полученной задачи (4.1.10) – (4.1.11) можно применить метод, представленный в разделе 3.2. При этом для оптимального решения задачи (4.1.10), (4.1.11) нетрудно получить следующие расчетные формулы:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) = \min_{k=1, N} B_k(x; \tau_k^*, \xi_k^*), \\ 0 & \text{во всех остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (4.1.12)$$

где

$$B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) = \xi_i T\rho_0(x) + \int_0^T \phi_i(x, t; \tau_i^*) \phi_i(x, t; \tau_i^*) - 2\bar{\rho}(x, t) + \xi_i dt,$$

$$\phi_i(x, t; \tau_i) = \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \tau_i, \theta) d\theta, \quad i = \overline{1, N},$$

а в качестве  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*; \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$  выбирается оптимальное решение задачи

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Xi} \left( \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\rho}(x, t)^2 dt dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma}. \quad (4.1.13)$$

Нелинейную задачу (4.1.4) – (4.1.6) можно также привести к непрерывной линейной задаче ОРМ, основываясь на следующем представлении

задачи Коши (4.1.5):

$$\rho(x, t) = \rho_1(x, t) + \rho_2(x, t; \lambda(x), \tau), \quad (4.1.14)$$

где функция  $\rho_1(x, \cdot)$  для каждого  $x \in \Omega$  является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1(x, t) &= \alpha \rho_1(x, t), \quad t \in 0, T, \\ \rho_1(x, 0) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

а функция  $\rho_2(x, \cdot; \lambda(x), \tau)$  – удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_2(x, t) &= \alpha \rho_2(x, t) + \sum_{j=1}^N u_j(x, \tau_j, t) \lambda_j(x), \quad t \in 0, T, \\ \rho_2(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Задача (4.1.15) решается однозначно:

$$\rho_1(x, t) = \rho_0(x) e^{\alpha t}, \quad x \in \Omega, t \in 0, T.$$

Решение задачи (4.1.16) записывается следующим образом:

$$\rho_2(x, t) = \sum_{j=1}^N \eta_j(x, t; \tau_j) \lambda_j(x), \quad x \in \Omega, t \in 0, T,$$

$$\text{где } \eta_j(x, t; \tau_j) = \int_0^t e^{-\alpha \theta} u_j(x, \theta; \tau_j) d\theta, \quad j = \overline{1, N}.$$

Задача (4.1.4) – (4.1.6) с учетом представления (4.1.14) и указанных выше свойств множества  $\Lambda$  записывается следующим образом:

$$I_2(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \quad (4.1.17)$$

при условиях

$$\int \left( A_0(x) + \int_0^T \eta_i(x, t; \tau_i) dt \right) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.1.18)$$

где

$$\begin{aligned} I_2(\lambda(\cdot), \tau) &= \int \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^T \left[ \eta_i^2(x, t; \tau_i) - 2\bar{\rho}(x, t) \eta_i(x, t; \tau_i) \right] dt \right] \lambda_i(x) dx + \\ &+ \int \int_{\Omega 0}^T \bar{\rho}(x, t)^2 dt dx, \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

$$\bar{\rho}(x, t) = \hat{\rho}(x, t) - \rho_1(x, t), \quad A_0(x) = \rho_0(x) \int_0^T e^{\alpha t} dt, \quad x \in \Omega.$$

Далее, пользуясь методикой решения непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств с ограничениями в форме неравенств и с расположением центров подмножеств, подробно описанной в разделе 3.2, можно получить следующие расчетные формулы для характеристиче-

ских функций подмножеств, составляющих оптимальное разбиение в задаче (4.1.3):

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^T v_i(x, t; \tau_i^*) dt + \xi_i^* A_0(x) = \\ & = \min_{k=1, N} \int_0^T v_k(x, t; \tau_k^*) dt + \xi_k^* A_0(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (4.1.20)$$

где  $v_i(x, t; \tau_i^*) = \eta_i^2(x, t; \tau_i^*) - 2\bar{\rho}(x, t) - \xi_i^* \eta_i(x, t; \tau_i^*)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,

а в качестве  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*; \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$  выбирается оптимальное решение задачи

$$\chi(\xi) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma}, \quad (4.1.21)$$

где

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Xi} \left( \int_{\Omega} \left[ \min_{k=1, N} \int_0^T v_k(x, t; \tau_k^*) dt + \xi_k^* A_0(x) \right] dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right).$$

Алгоритм решения задачи (4.1.3), записанной в терминах характеристических функций, аналогичен алгоритму, представленному в разделе 3.2.

Имеет место следующее утверждение.

**Утверждение.** Если константы  $b_1, \dots, b_N$  удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} e^{\alpha(t-\theta)} \bar{u}(x, \theta) d\theta dt dx, \quad (4.1.22)$$

где  $\bar{u}(x, t) = \max_{i=1, N} \max_{\tau_i \in \Xi_i} u_i(x, t; \tau_i) \forall x \in \Omega, t \in [0, T]$ , множество допустимых процессов задачи (4.1.3) не является пустым.

Оценку (4.1.22) можно записать, используя представление (4.1.14), и таким образом:

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha T} - 1 \rho_0(x) + \int_0^T \int_{\Omega} e^{-\alpha \theta} \bar{u}(x, \theta) d\theta dt dx.$$

Далее приведем численный алгоритм, в котором для решения задачи минимизации функции (4.1.13) по набору параметров  $\tau \in \Xi$  применяется метод проекции градиента, а условия неотрицательности множителей Лагранжа  $\xi_i$  учитываются с помощью функции внешнего штрафа, т. е. решается следующая задача:

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) \rightarrow \max_{\xi \in R^N} \min_{\tau \in \Xi}, \quad (4.1.23)$$

где

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) = \int_{\Omega} \min_{j=1, \overline{N}} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i))$$

$$B_i(x; \tau_i, \xi_i) = \xi_i T \rho_0(x) + \int_0^T \phi_i(x, t; \tau_i) \phi_i(x, t; \tau_i) - 2\bar{\rho}(x, t) + \xi_i dt,$$

$$\phi_i(x, t; \tau_i) = \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \tau_i, \theta) d\theta, i = \overline{1, N}.$$

В случае, когда  $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ , а множество  $\Omega$  имеет сложную форму или не является выпуклым, проекцию точки на  $\Omega$  найти сложно или невозможно. Тогда целесообразно ввести штрафную функцию множества  $\Omega$ :

$$P(\tau_i) = \begin{cases} 0, \forall \tau_i \in \Omega, \\ \infty, \forall \tau_i \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

расширить с ее помощью целевую функцию (4.1.23) и решать такую задачу безусловной оптимизации:

$$\bar{\bar{\chi}}(\tau, \xi) = \chi_1(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) + \sum_{i=1}^N P(\tau_i) \rightarrow \max_{\xi \in \mathbb{R}^N} \min_{\tau \in \mathbb{R}^{nN}}. \quad (4.1.24)$$

**Алгоритм решения задачи.** Не теряя общности, будем считать, что множество  $\Omega$  является параллелепипедом  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой прямоугольной системы координат.

1. Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $\tau, \xi = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}; \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$ . Пусть  $\hat{\Pi}$  – множество узлов пространственной сетки.

2. Покрываем отрезок  $0, T$  сеткой с шагом  $h_t$ , обозначая через  $\hat{T} = \{t : t = lh_t, l = \overline{1, n_T}\}$  множество узлов сетки по временной переменной.

3. Для каждого узла  $x \in \hat{\Pi}$ :

3.1. Вычисляем  $\lambda_i^{(0)}(x), i = \overline{1, N}$ , по формуле (4.1.12) при значениях  $\xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}$ .

3.2. Вычисляем значение фазовой переменной  $\rho(x, t; \lambda(x), \tau)$  в каждом узле временной сетки  $\hat{T}$  по формуле (4.1.7) при  $\lambda_i = \lambda_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}$ .

4. Вычисляем компоненты  $(g_{\lambda}^{\tau_1}, \dots, g_{\lambda}^{\tau_N}; g_{\lambda}^{\xi_1}, \dots, g_{\lambda}^{\xi_N})$  обобщенного

градиента функции  $\bar{\chi}(\tau, \xi)$  в точке  $\tau, \xi = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}; \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$  при  $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot)$ ,  $\xi_i = \xi_i^{(0)}$ ,  $\tau_i = \tau_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

5. Выбираем начальный шаг  $h_0 > 0$  r-алгоритма и находим:

$$\begin{aligned} \xi_i^{(1)} &= \xi_i^{(0)} + h_0 g_{\xi_i}^{\xi_i}(\xi^{(0)}); \\ \tau_i^{(1)} &= \text{Pr}_{\Xi_i} \left[ \tau_i^{(0)} - h_0 g_{\tau_i}^{\tau_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right], \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где  $\text{Pr}_{\Xi_i}$  – оператор проектирования на множество  $\Xi_i$ .

Осуществляем переход на второй шаг.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  шагов алгоритма получены некоторые значения  $\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ .

( $k+1$ )-й шаг:

6. Для каждого узла  $x \in \hat{\Pi}$ :

6.1. Вычисляем  $\lambda_i^{(k)}(x)$ ,  $i = \overline{1, N}$  по формуле (4.1.8) при значениях  $\xi_i = \xi_i^{(k)}$ ,  $\tau_i = \tau_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

6.2. Вычисляем значение фазовой переменной  $\rho(x, t; \lambda(x), \tau)$  в каждом узле временной сетки  $\hat{T}$  по формуле (4.1.7) при  $\lambda_i = \lambda_i^{(k)}$ ,  $\tau_i = \tau_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

7. Вычисляем компоненты  $g_{\tau_i}^{\tau_i}, \dots, g_{\tau_N}^{\tau_N}; g_{\xi_1}^{\xi_1}, \dots, g_{\xi_N}^{\xi_N}$  обобщенного градиента функции  $\bar{\chi}(\tau, \xi)$  в точке  $\tau, \xi = (\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)}; \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_N^{(k)})$  при  $\lambda(\cdot) = \lambda^{(k)}(\cdot)$ ,  $\xi_i = \xi_i^{(k)}$ ,  $\tau_i = \tau_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

8. Осуществляем ( $k+1$ )-й шаг r-алгоритма для решения задачи (4.1.23), краткая схема которого записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\xi}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), \\ \tau^{(k+1)} &= \text{Pr}_{\Xi} \left[ \tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_{\tau}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) \right], \end{aligned}$$

где  $B_{k+1}^{\xi}$ ,  $B_{k+1}^{\tau}$  – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E^N$ , пересчет которых производится по следующим формулам:  $B_0^{\xi} = I_N, B_0^{\tau} = I_N$  ( $I_N$  – единичная матрица),

$$B_{k+1}^{\xi} = B_k^{\xi} R_{\alpha} \left( \frac{r_k}{\|r_k\|} \right), \quad r_k = g_{\xi}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\xi}^{\xi}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}),$$

$$B_{k+1}^\tau = B_k^\tau R_\alpha \left( \frac{\bar{h}_k}{\|\bar{h}_k\|} \right), \quad \bar{h}_k = g_{\bar{\chi}}^\tau(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\chi}}^\tau(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}),$$

$R_\alpha \zeta$  – оператор растяжения пространства в направлении  $\zeta$  с коэффициентом растяжения  $\alpha$ , матричная форма которого имеет вид:

$$R_\alpha \zeta = I_N + \alpha - 1 \zeta \zeta^T;$$

$$\tilde{g}_{\bar{\chi}}^\xi = B_{k+1}^\xi \quad T \quad g_{\bar{\chi}}^\xi(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), \quad \tilde{g}_{\bar{\chi}}^\tau = B_{k+1}^\tau \quad T \quad g_{\bar{\chi}}^\tau(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}),$$

$h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума функции по рассматриваемому направлению.

9. Если условие

$$\left\| \tau^{(k)}, \xi^{(k)} - \tau^{(k+1)}, \xi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.1.25)$$

не выполняется, то  $k:=k+1$  и осуществляем переход на шаг 6, иначе – переход на шаг 3, если не все точки пространственной сетки просмотрены, или на шаг 10 – если исчерпаны все точки  $x \in \hat{\Pi}$ .

10. Полагаем  $\lambda^*(x) = \lambda^{(1)}(x)$  для каждой точки  $x \in \hat{\Pi}$ ,  $\xi^* = \xi^{(1)}$ ,  $\tau^* = \tau^{(1)}$ , где 1 – номер итерации, на которой вектор  $\tau^{(k)}, \xi^{(k)}$  удовлетворяет условию (4.1.25) окончания итерационного процесса. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала  $I_1(\lambda^*(\cdot), \tau^*)$  и, для контроля правильности результата, значение функции (4.1.23) при следующих параметрах:  $\xi = \xi^*$ ,  $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$ ,  $\tau = \tau^*$ .

Алгоритм описан.

**Замечание 4.4.** Приведенный алгоритм легко адаптировать для решения динамических задач оптимального разбиения множеств, в которых отсутствуют ограничения типа (4.1.2). При этом функция (4.1.13), а значит и (4.1.23), не содержит слагаемые с двойственными переменными и, таким образом, нет необходимости максимизировать указанную функцию по переменным  $\xi_i, i=1, \bar{N}$ , осуществляется только ее минимизация по параметрам  $\tau_i$ .

### 4.1.3. Исследование свойств решений

Приведенный алгоритм реализован в виде программного модуля, который является одной из составных частей комплекса программ DOSPP.

Работа приведенного алгоритма решения динамической задачи ОРМ (4.1.3) проверена на многих тестовых примерах. При этом алгоритм был адаптирован на случаи:

решения динамической задачи ОРМ с нелинейным функционалом без интегральных ограничений с заданными фиксированными параметрами  $\tau_i, i = \overline{1, N}$ ;

решения задачи разбиения при наличии интегральных ограничений на фазовую переменную и / или на управляющую функцию.

Результаты решения тестовых или модельных задач приведем в порядке возрастания сложности их постановки, то есть по мере увеличения списка переменных, значение которых необходимо определить, а также условий, которым должны удовлетворять решения. Анализ результатов вычислительных экспериментов проведем с целью выявления влияния исходных данных на структуру оптимального разбиения. К таким данным относятся количество узлов интегрирования по временной и пространственным координатам, вид функций  $\rho_0(x), \hat{\rho}(x, t)$  и  $u_i(x, t; \tau_i), i = \overline{1, N}$ .

Представим результаты решения некоторых тестовых примеров. Общими данными для тестовых задач № 1 – 7 (см. табл. 4.1 – 4.3 Приложения) являются следующие параметры задачи (4.1.3):  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ;  $T = 3$ . Параметр  $\alpha$  в уравнении (4.1.2) равен нулю. Для численного решения задач множество  $\Omega$  покрывалось сеткой с шагом  $h_x = h_y = 0.005$ , шаг по временной переменной  $h_t = 0.015$ . Другие параметры задач для соответствующих экспериментов, а также полученные оптимальные разбиения представлены в табл. 4.1 – 4.4 (см. Приложение). Отметим также, что вычисление, при необходимости, координат центров подмножеств и значений двойственных переменных осуществлялось с точностью  $\varepsilon = 0.0001$ .

Для проверки корректности расчетных формул и работы алгоритма были решены несколько динамических задач ОРМ с квадратичным функционалом (4.1.3) без интегральных ограничений (4.1.2) с фиксированными параметрами  $\tau_i, i = \overline{1, N}$ . При этом в качестве исходных данных, то есть функций  $\rho_0(x), \hat{\rho}(x, t)$  и  $u_i(x, t; \tau_i), i = \overline{1, N}$  выбирались такие, чтобы структуру оптимального разбиения и значение целевого функционала можно было бы предугадать заранее.

Результат решения таких задач приведен в табл. 4.1 (см. Приложение). В тесте № 1 функция  $\hat{\rho}(x, t)$  является решением задачи Коши (4.1.2) в случае, когда управляющая функция  $u(x, t; \tau)$  – кусочно-постоянная по



пространственной переменной, принимает только два значения 0.2 и 0.62 и имеет линию переключения  $x_1 = 0.4$ . Функции  $u_i(x, t; \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , – постоянные, причем среди возможных их значений можно заметить и указанные выше. Как видно из таблицы, получено оптимальное разбиение и почти нулевое значение целевого функционала. Погрешность вычислений обуславливается дискретизацией множества  $\Omega$  и приближенным вычислением двойного интеграла по пространственной переменной в функционале (интегрирование по временной переменной в данном случае с помощью формулы трапеций обеспечивает нулевую погрешность). Так же получается и в тесте № 2.

Результаты тестов № 3 и № 4 фактически демонстрируют возможность аппроксимации функции  $u(x, t; \tau)$  кусочно-постоянной функцией со значениями в промежутке от 4.4 до 9.6 так, чтобы соответствующее ей решение уравнения (4.1.2) было как можно ближе к функции  $\hat{\rho}(x, t) = 2 + e^{-0.8t} \sum_{m=1}^M Q_m e^{-\gamma_m \|x - \sigma_m\|^2}$ . Функцию  $\hat{\rho}(x, t)$ , в свою очередь, можно интерпретировать как совместное влияние на множество  $\Omega$  источников, расположенных в точках  $\sigma_m \in \Omega$ ,  $m = \overline{1, M}$ .

На рисунках, приведенных в табл. 4.1, эти источники помечены кругами, причем, чем больше интенсивность источника  $Q_m$ , тем больше радиус круга. Кроме того, следует заметить, что левый верхний угол прямоугольника на рисунке соответствует координатам (0,0), ось  $Ox_1$  направлена вниз, ось  $Ox_2$  – вправо.

В тестах № 5, 6 функции  $\rho_0(x)$  и  $\hat{\rho}(x, t)$  задавались в таком виде:

$$\hat{\rho}(x, t) = 3 + \sum_{m=1}^M Q_m e^{-\eta \|x - \sigma_m\|^2},$$

$$\rho_0(x) = 0.3 \sum_{m=1}^M Q_m e^{-\nu \|x - \sigma_m\|^2},$$

а источники  $\sigma_m$  и их интенсивности помечены на рисунках в табл. 4.2 (см. Приложение). Для теста № 5 значения параметров выбирались такими:  $\eta = 0.02$ ,  $\nu = 0.04$ ,  $Q = (3, 2, 5)$ ; в тестах № 6, 7 эти параметры равны:  $\eta = \nu = 9$ ,  $Q = (14, 12, 6)$ . Аналитический вид функций  $u_i(x, t; \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , приведен в табл. 4.2. Здесь же можно проследить влияние параметров этих функций на структуру разбиения. В тесте № 8 все функции такие же, как и в тесте № 6, отличаются лишь координаты и интенсивности источников. Кроме того, в дифференциальном уравнении (4.1.2) задано не-

нулевое значение параметра:  $\alpha = -0.06$ .

В табл. 4.3 (см. Приложение) представлены результаты некоторых экспериментов по решению динамических задач ОРМ (4.1.3) с интегральными ограничениями при фиксированных центрах подмножеств. В тестах № 9 – 11 функция, среднеквадратическое отклонение фазовой переменной от которой минимизируется, имеет следующий вид:

$$\hat{\rho}(x, t) = \begin{cases} 5te^{-10(x_1 - 0.75)^2 + x_2 - 0.25^2}, & -2x_1^2 + x_2 \geq 0.3 \\ 5te^{-10(x_1 - 0.3)^2 + x_2 - 0.7^2}, & -2x_1^2 + x_2 < 0.3 \end{cases} \quad (4.1.26)$$

а функции, с помощью которых определяется управляющая функция, задаются таким образом:

$$u_i(x, t; \tau_i) = 5e^{-10\|x - \tau_i\|^2},$$

где  $\|x - \tau_i\|$  – метрика в  $E^2$ , и отличаются только векторами  $\tau_i$ , координаты которых указаны в табл. 4.4. В случае, когда  $N = 2$  и величины правых частей ограничений-неравенств (4.1.3) достаточно большие – тест № 9, в результате получено оптимальное разбиение такое, что фазовая переменная «почти» совпадает с функцией  $\hat{\rho}(x, t)$ . Среднеквадратическое отклонение при этом вычислено приближенно и составляет **0.0620**. При уменьшении величин  $b_1$  или  $b_2$  уменьшается подмножество, на котором задается соответствующая функция  $u_i(x, t; \tau_i)$ , что отражено, например, на рисунке из теста № 10. В следующем тесте  $N = 2$ , а задаваемые функции такие же, как и в предыдущих двух экспериментах.

Интересными с точки зрения «устойчивости» разбиения оказались результаты тестов № 12, 13, в которых функция  $\hat{\rho}(x, t)$  имеет вид:

$$\hat{\rho}(x, t) = \begin{cases} 5te^{-10(x_1 - 0.2)^2 + x_2 - 0.6^2}, & -2x_1^2 + x_2 \geq 0.3, \\ 5te^{-10(x_1 - 0.4)^2 + x_2 - 0.2^2}, & -3x_2^2 + x_1 < 0.2, \\ 5te^{-10(x_1 - 0.9)^2 + x_2 - 0.4^2} & \text{для остальных } (x_1, x_2), \end{cases} \quad (4.1.27)$$

а некоторые из функций  $u_i(x, t; \tau_i)$  совпадают с производной по временной переменной функций, составляющих  $\hat{\rho}(x, t)$ . Как можно заметить на рисунках в тестах 12, 13, оптимальное разбиение имеет зоны неустойчивости, т. е. в подмножествах, составляющих разбиение, появляются некоторые вкрапления – множества (почти нулевой меры) точек из других подмножеств. Нетрудно заметить, что указанные множества являются

окрестностями границ диаграммы Вороного, т. е. линий, описываемых следующими уравнениями:

$$\|x - \tau_i\|^2 = \|x - \tau_j\|^2, \quad i \neq j,$$

как в тесте № 12, или модифицированной диаграммы Вороного, линий, описываемых следующими уравнениями вида:

$$a_i e^{-\beta \|x - \tau_i\|^2} = a_j e^{-\beta \|x - \tau_j\|^2}, \quad i \neq j, \quad \beta > 0,$$

как в тесте № 13. Можно предположить, что такая «неустойчивость» оптимального разбиения связана именно с видом функций  $\hat{\rho}(x, t)$  и  $u_i(x, t; \tau_i)$  и с вычислительной погрешностью.

В табл. 4.4. приведены другие показательные результаты решения непрерывных динамических задач оптимального разбиения с функциями  $u_i(x, t; \tau_i)$  и  $\hat{\rho}(x, t)$  специального вида.

Таким образом, в данном подразделе представлен численный алгоритм решения динамической задачи ОРМ с квадратичным функционалом, в которой скорость изменения состояния некоторой системы в каждой точке множества  $\Omega$  зависит от принадлежности этой точки к одному из подмножеств  $\Omega_i$ , составляющих разбиение множества  $\Omega$ . В основе алгоритма лежит следующая схема: исходная задача сводится к линейной непрерывной задаче ОРМ. Последняя, в свою очередь, редуцируется к конечномерной задаче максимина некоторой негладкой функции. Такая редукция возможна в силу линейности дифференциального уравнения и определенных свойств множества  $\Lambda$ . Далее обобщим задачу (4.1.3) на случай подвижных границ между подмножествами  $\Omega_i$ , а также нелинейности по фазовой переменной дифференциального уравнения, описывающего изменение состояния системы.

## *4.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ. ДИНАМИЧЕСКОЕ РАЗБИЕНИЕ*

### **4.2.1. Постановка задачи и ее эквивалент в терминах характеристических функций подмножеств**

**Математическая постановка задачи.** Пусть  $\Omega$  – ограниченное, из-

меримое по Лебегу множество из пространства  $E_n$ ;  $u_i(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – заданный набор функций;  $\Sigma_\Omega^N$  – класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств. Как и в разделе 3.3, позволим границам между подмножествами меняться со временем. Момент времени  $T$  считается фиксированным.

Пусть для всех (или п. в.)  $x \in \Omega$  состояние некоторого управляемого процесса или объекта описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}(t)) + f(x, t), \quad u \in U(t), \quad t \in [0, T], \quad (4.2.1)$$

где  $\alpha$  – заданная величина;  $f(x, t)$  – известная функция из пространства  $L_2(\Omega \times [0, T])$ ; а класс управляющих функций имеет следующий вид:

$$U(t) = \{u(x, t; \bar{\omega}(t)) : u(x, t; \bar{\omega}(t)) = u_i(x, t) \text{ п. в. для } x \in \Omega_i(t), i = \overline{1, N};$$

$$\bar{\omega}(t) = (\Omega_1(t), \dots, \Omega_N(t)) \in \Sigma_\Omega^N\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

То есть в каждой точке  $x \in \Omega$  управление рассматриваемым процессом может осуществляться по одному из известных заранее сценариев  $u_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Начальное состояние процесса известно:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.2.2)$$

Каждое допустимое разбиение  $\bar{\omega}(t) \in \Sigma_\Omega^N$  определяет функцию  $u(x, t; \bar{\omega}(t)) \in U(t)$  такую, что соответствующая ей задача Коши (4.2.1), (4.2.2) имеет единственное решение, что следует из теоремы 3.6. Условимся решение указанной задачи Коши, соответствующее функции  $u(x, t; \bar{\omega}(t))$ , обозначать через  $\rho(x, t; \bar{\omega}(t))$ .

Требуется отыскать для каждой точки  $x \in \Omega$  такое разбиение  $\bar{\omega}^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$  и соответствующие ему функции  $u^*(x, t; \bar{\omega}(t)) \in U(t)$  и  $\rho^*(x, t; \bar{\omega}(t))$ , при которых состояние  $\rho^*(x, \cdot; \bar{\omega}(\cdot))$  к моменту времени  $t = T$  было бы как можно ближе к желаемому состоянию, описываемому функцией  $\hat{\rho}(x)$ , т. е. функционал

$$J(\bar{\omega}(\cdot)) = \int_{\Omega} \rho(x, T; \bar{\omega}(T)) - \hat{\rho}(x)^2 dx \quad (4.2.3)$$

достигал бы своего минимального значения.

Как нетрудно заметить, в отличие от ранее рассмотренных задач управления, функционал (4.2.3) – терминальный.

Введя в рассмотрение характеристические функции  $\lambda_i(\cdot, t)$  подмножеств  $\Omega_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , образующих допустимое разбиение множества  $\Omega$ ,

$t \in [0, T]$ , функцию управления представим в следующем виде:

$$u(x, t; \lambda(x, t)) = \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t).$$

Для каждой точки  $x \in \Omega$  и каждого момента времени  $t \in [0, T]$  будем обозначать решение задачи Коши (4.2.1), (4.2.2), соответствующее набору характеристических функций  $\lambda(x, t) = (\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t))$  как  $\rho(x, t; \lambda(x, t))$ .

Задача минимизации функционала (4.2.3) на множестве  $U(\cdot)$  при условиях (4.2.1), (4.2.2) эквивалентна следующей задаче: найти вектор-функцию  $\lambda(\cdot, \cdot) = (\lambda_1(\cdot, \cdot), \dots, \lambda_N(\cdot, \cdot))$ , такую что

$$I(\lambda(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda}, \quad (4.2.4)$$

при условиях: для каждого  $x \in \Omega$

$$\dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t) + f(x, t), \quad \lambda \in \Lambda, \quad t \in [0, T], \quad (4.2.5)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

где

$$I(\lambda(\cdot, \cdot)) = \int_{\Omega} \rho(x, T; \lambda(x, T)) - \hat{\rho}(x)^2 dx,$$

$$\Lambda = \{ \lambda(x, t) = (\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t)) : \lambda_i(x, t) = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1, \text{ почти всюду для } x \in \Omega, t \in [0, T] \}.$$

Задача (4.2.4), (4.2.5) может быть отнесена к классу задач оптимального управления системой с сосредоточенными параметрами, в которой в качестве управляющих функций выступают характеристические функции подмножеств, составляющих в каждый момент времени рассматриваемого временного интервала разбиение множества  $\Omega$ .

## 4.2.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.1.** Допустимый процесс  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  ( $\lambda^*(\cdot, \cdot) \in \Lambda$ ,  $\rho^*(\cdot, \cdot)$  – решение задачи (4.2.5)) доставляет минимальное значение функционалу задачи (4.2.4) тогда и только тогда, когда почти всюду для  $x \in \Omega$  выполняется равенство

$$\rho(x, T; \lambda^*(x, T)) - \hat{\rho}(x)^2 = \min_{\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_1} \rho(x, T; \lambda(x, T)) - \hat{\rho}(x)^2, \quad (4.2.6)$$

где  $\rho^*(x, t; \lambda^*(x, t))$  – решение задачи Коши (4.2.5), соответствующее функции  $\lambda^*(x, t) \in \Lambda_1, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)) : \lambda_i(t) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = 1, t \in [0, T] \right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

Итак, теорема 4.1 сводит решение задачи (4.2.4), (4.2.5) к решению семейства задач оптимального управления с терминальным нелинейным функционалом: для каждого  $x \in \Omega$

$$\bar{I}(\lambda(x, \cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_1} \quad (4.2.7)$$

при условиях (4.2.5), где

$$\bar{I}(\lambda(x, \cdot)) = \rho(x, T; \lambda(x, T)) - \hat{\rho}(x)^2.$$

Пусть  $x \in \Omega$  – произвольная, но фиксированная точка. Для задачи (4.2.7), (4.2.5) – задачи Майера, в которой в качестве управляющей выступает вектор-функция  $\lambda(x, \cdot) = (\lambda_1(x, \cdot), \dots, \lambda_N(x, \cdot))$ , справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Для того чтобы процесс  $(\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot))$ , удовлетворяющий условиям  $\lambda^*(x, \cdot) \in \Lambda_1$  и (4.2.5), доставлял минимальное значение функционалу задачи (4.2.7), необходимо и достаточно существование такого значения  $\psi_0 \geq 0$  и функции  $\Psi_x(t)$ , которые одновременно не обращаются в нуль ни при каком значении  $t \in [0, T]$ , и таковы, что выполняются:

а) условия стационарности по фазовой переменной  $\rho(x, \cdot)$  :

$$\frac{d\Psi_x}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \rho}, \quad (4.2.8)$$

где функция Понтрягина имеет вид:

$$H(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot), \Psi_x(\cdot), \psi_0, t) = (\alpha \rho(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t) + f(x, t)) \Psi_x(t);$$

б) условие трансверсальности по фазовой координате  $\rho(x, \cdot)$  :

$$\Psi_x(T) = -2\psi_0 \rho(x, T; \lambda(x, T)) - \hat{\rho}(x); \quad (4.2.9)$$

в) условие оптимальности по управляющей функции  $\lambda(x, \cdot)$  :

$$\lambda^*(x, t) : \max_{\lambda(x, t) \in \Lambda_1} H(\lambda(x, t), \rho(x, t), \Psi_x(t), \psi_0, t),$$

то есть

$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & q_i(x, t) = \min_{k=1, N} q_k(x, t), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad t \in 0, T; \quad (4.2.10)$$

где  $q_i(x, \tau_i, t) = u_i(x, t)\Psi_x(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

**Доказательство.** Погружаем множество  $\Lambda_1$  в симплекс:

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)) : 0 \leq \lambda_i(t) \leq 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = 1, t \in 0, T \right\},$$

и вместо задачи (4.2.7), (4.2.5) будем решать задачу

$$\bar{I}(\lambda(x, \cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_2} \quad (4.2.11)$$

при условиях (4.2.5). Напомним, что  $x$  – произвольная фиксированная точка множества  $\Omega$ .

Пусть процесс  $(\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot))$ , таков, что  $\lambda^*(x, \cdot) \in \Lambda_2$ , а функция  $\rho^*(x, t)$  является соответствующим решением задачи Коши (4.2.5).

Условия (4.2.8) – (4.2.10) являются необходимыми условиями оптимальности управляемого процесса для задачи (4.2.11), (4.2.5), вытекающими из принципа максимума Понтрягина.

Достаточность этих условий для оптимальности процесса следует из выпуклости функционала (4.2.7) по фазовой координате, а также линейности дифференциального уравнения как по фазовой переменной, так и по управляющим параметрам.

Осталось лишь доказать эквивалентность задач (4.2.7) и (4.2.11). Действительно, из формулы (4.2.10) с учетом выполнения условия  $\sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1 \forall t \in 0, T$  для вектор-функции  $\lambda^*(x, t)$  следует, что опти-

мальное решение задачи (4.2.11) является допустимой точкой для задачи (4.2.7). Таким образом, множество решений задачи (4.2.11) содержит все возможные оптимальные решения задачи (4.2.7), в результате чего делаем вывод об эквивалентности задач (4.2.7) и (4.2.11).

Таким образом, теорема 4.2 определяет критерий оптимальности для каждой из задач оптимального управления семейства (4.2.7).

### 4.2.3. Алгоритм решения задачи

Основываясь на теоремах 4.1 и 4.2, представим общую схему решения задач типа (4.2.4), (4.2.5), а также сформулируем численный алгоритм решения таких задач.

Нетрудно показать, что при  $\psi_0 = 0$  задача оптимального управления (4.2.7), (4.2.5) решения не имеет. Поэтому положим  $\psi_0 = 1$ .

Оптимальное решение задачи (4.2.4), (4.2.5) определяется следующим образом: почти для всех  $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & q_i(x, t) = \max_{k=1, N} q_k(x, t), \\ 0, & \text{во остальных случаях; } t \in [0, T]; \end{cases} \quad (4.2.12)$$

где  $q_i(x, t) = \rho(x, t) \Psi_x(t)$ , а функции  $\rho(x, t)$  и  $\Psi_x(t)$  удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \alpha \rho(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t) + f(x, t), \\ \dot{\Psi}_x(t) &= -\alpha \Psi_x(t) \quad \lambda \in \Lambda, \quad t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x), \\ \Psi_x(T) &= -2 \rho(x, T; \lambda(x, T)) - \hat{\rho}(x). \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Представленный ниже численный алгоритм решения непрерывной нелинейной динамической задачи ОРМ с подвижными границами между подмножествами разработан на основе метода Ньютона.

Не теряя общности, в качестве множества  $\Omega$  будем рассматривать  $n$ -мерный куб  $[0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ .

### Алгоритм

1. Область  $\Omega$  покрываем квадратной сеткой с шагом  $h$  по каждой пространственной переменной. Обозначим  $\tilde{\Pi}$  – множество узлов полученной сетки. Задаем значение функции начальных условий  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  в узлах  $x \in \tilde{\Pi}$ .

2. Для каждого узла  $x \in \tilde{\Pi}$  сетки:

а) инициализируем  $k$ :  $k = 0$ . Задаем начальное значение  $\alpha^0$ ;

б) задаем значение двойственной функции  $\Psi_x(t)$  при  $t = 0$  путем присвоения ей значения  $k$ -го приближения параметра  $\alpha$ :  $\Psi_x(0) = \alpha^k$ ;

в) находим значение характеристической функции  $\lambda_g^{(k)}(x, 0)$ ,  $g = \overline{1, N}$ , по формуле (4.2.12);

г) покрываем отрезок  $[0, T]$  сеткой с шагом  $h_t$  (узел интегрирования по временной переменной будем обозначать через  $t$ ). Решаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.2.13) с помощью одного из численных методов; вычисляя в каждом узле



$0 < t \leq T$  значения функций  $\rho^{(k)}(x, t)$  и  $\Psi_x^{(k)}(t)$ , при этом на каждом шаге численного интегрирования системы по формуле (4.2.12) находим значения характеристических функций  $\lambda_g^{(k)}(x, t)$   $g = \overline{1, N}$ ;

д) вычисляем невязку  $Y(\alpha^k)$  :

$$Y(\alpha^k) = \Psi_x^{(k)}(T) + 2 \rho^{(k)}(x, T; \lambda^{(k)}(x, T)) - \hat{\rho}(x) ;$$

е) если выполняется неравенство

$$\left| Y(\alpha^k) \right| \leq \varepsilon, \quad (4.2.14)$$

где  $\varepsilon > 0$  – заранее заданная точность, то полагаем  $\lambda^*(x, t) = \lambda^{(1)}(x, t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , где 1 – номер итерации, на которой выполнилось условие (4.2.14). Переходим на начало шага 2 для следующей точки пространственной сетки или, если все точки сетки просмотрены, – на шаг 3. Если неравенство (4.2.14) не выполняется, то переходим на шаг ж);

ж) вычисляем новое приближение параметра по формуле метода Ньютона:

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k - \frac{Y(\alpha^k)}{Y'(\alpha^k)}, \quad Y'(\alpha^k) \approx \frac{Y(\alpha^k + \Delta\alpha) - Y(\alpha^k)}{\Delta\alpha},$$

где  $\Delta\alpha$  – заданное малое приращение параметра  $\alpha$  .

Отметим, что для вычисления величины  $Y(\alpha^k + \Delta\alpha)$  следует реализовать пункты б) – д) алгоритма при  $\alpha := \alpha^k + \Delta\alpha$  .

$k = k + 1$  . Возвращаемся на шаг б) .

3. Находим оптимальное значение целевого функционала (4.2.7) по одной из формул приближенного вычисления кратных интегралов.

Алгоритм описан.

### *4.3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ*

Сформулируем необходимые условия оптимальности для непрерывной динамической задачи оптимального разбиения множества без ограничений в форме неравенств, в отличие от рассмотренных выше. Укажем, какими свойствами должны обладать функции, входящие в постановку за-

дачи, чтобы эти условия были и достаточными условиями оптимальности разбиения и управляемого процесса.

### 4.3.1. Постановка задачи

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеряемое по Лебегу множество из  $E_n$ ,  $\Sigma_\Omega^N$  – класс всевозможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств:

$$\Sigma_\Omega^N = \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N): \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes } \Omega_i \cap \Omega_j = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N},$$

где  $\text{mes}(\cdot)$  означает меру Лебега.

Пусть функции  $u_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – заданные действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times [0, T]$ , измеримые по  $x$  и  $t$ .

Введем в рассмотрение класс допустимых управляющих функций:

$$U = \{u(x, t; \bar{\omega}(t)) : u(x, t; \bar{\omega}(t)) = u_i(x, t), \text{ п. в. для } x \in \Omega_i, i = \overline{1, N},$$

$$\bar{\omega} \in \Sigma_\Omega^N, [0, T]; t \in [0, T], x \in \Omega \}.$$

**Задача 1.** Минимизировать функционал

$$F(\rho(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}(\cdot))) = \int_0^T \int_\Omega \Phi(\rho(x, t), u(x, t; \bar{\omega}(t)), t) dx dt \quad (4.3.1)$$

при ограничениях

$$\dot{\rho}(x, t) = \varphi(\rho(x, t), u(x, t; \bar{\omega}(t)), t), \quad \bar{\omega}(t) \in \Sigma_\Omega^N, t \in [0, T], \quad (4.3.2)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.3.3)$$

$$u(x, t) \in U \text{ почти всюду для } x \in \Omega, 0 \leq t \leq T. \quad (4.3.4)$$

Минимизация производится по всем ограниченным измеримым  $u \in U$  и по всем непрерывным  $\rho(x, t)$ , удовлетворяющим (4.3.2), (4.3.3) почти всюду для  $t \in [0, T]$  и  $x \in \Omega$ . Момент времени  $T$  – фиксирован. Уравнение (4.3.2) будем понимать в интегральном смысле, т. е. п.в. для  $x \in \Omega$  решением задачи Коши (4.3.2), (4.3.3) почти всюду для  $t \in [0, T]$  будем считать пару  $\rho(x, t)$  (непрерывную по  $t$ ) и  $u \in U$ , удовлетворяющую интегральному уравнению:

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t \varphi(\rho(x, \theta), u(x, \theta; \bar{\omega}(\theta)), \theta) d\theta, \quad \bar{\omega}(t) \in \Sigma_\Omega^N, t \in [0, T].$$

При этом заметим, что управление в каждой точке  $x \in \Omega$  в каждый

момент времени  $t \in [0, T]$  полностью определяется разбиением множества  $\bar{\omega}(t) = (\Omega_1(t), \dots, \Omega_N(t)) \in \Sigma_{\Omega}^N$ .

Будем предполагать выполненными следующие условия.

**Условие 1.** Функции  $\Phi(\rho, u, t)$  и  $\varphi(\rho, u, t)$  заданы на  $\mathbb{R}^3$  со значениями в  $\mathbb{R}^1$ , непрерывны по  $u$  и непрерывно дифференцируемы по  $\rho$  и  $t$ , причем  $\Phi_{\rho}(\rho, u, t)$ ,  $\varphi_{\rho}(\rho, u, t)$ ,  $\Phi_t(\rho, u, t)$ ,  $\varphi_t(\rho, u, t)$  ограничены при любых ограниченных  $\rho, u$ .

### 4.3.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности

Введем характеристические функции  $\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t) \in \Lambda$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , где

$$\Lambda = \left\{ \lambda(x, t) = (\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t)) : \lambda_i(x, t) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1, \text{ почти всюду для } x \in \Omega \right\},$$

и представим функции, входящие в класс допустимых управлений  $U$ , в виде:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t). \quad (4.3.5)$$

Тем самым в качестве управляющих функций в задаче **1** можно считать функции из множества  $\Lambda$ . Перейдем от задачи **1**, в которой неизвестным является разбиение множества  $x \in \Omega$ , к следующей задаче.

**Задача 2.** Найти вектор-функцию  $\lambda^*(\cdot, \cdot) = \lambda_1^*(\cdot, \cdot), \dots, \lambda_N^*(\cdot, \cdot) \in \Lambda$ , соответствующую ей фазовую траекторию  $\rho^*(x, t)$  (удовлетворяющую условиям (4.3.2), (4.3.3)), которые минимизируют функционал

$$I(\rho(\cdot, \cdot), \lambda(\cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), t) dx dt. \quad (4.3.6)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.3.** Пусть  $\lambda^*(\cdot, \cdot) \in \Lambda$ ,  $\rho^*(x, \cdot) \in C[0, T]$  п. в. для  $x \in \Omega$  – решение задачи Коши (4.3.2), (4.3.3), соответствующее функции  $\lambda^*(\cdot, \cdot)$ .

Для того чтобы допустимый процесс  $\lambda^*(\cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)$  доставлял минимальное значение функционалу (4.3.5), необходимо и достаточно, чтобы почти всюду для  $x \in \Omega$  выполнялось равенство

$$\int_0^T \Phi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i^*(x, t), t) dt = \min_{\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \in V_x} \int_0^T \Phi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), t) dt, \quad (4.3.7)$$

где

$$V_x = \lambda, \rho : \lambda \in \Lambda_0; \dot{\rho}(x, t) = \varphi(\rho(x, t), u(x, t); \lambda(x, t), t), \quad t \in 0, T, \quad x \in \Omega,$$

$$\Lambda_0 = \left\{ v(t) = (v_1(t), \dots, v_N(t)) : v_i(t) = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad \sum_{i=1}^N v_i(t) = 1, \quad t \in 0, T \right\}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Учитывая тот факт, что, согласно условиям (4.3.2), функция  $\rho(x, t)$  для каждого  $x \in \Omega$  изменяется только по времени, поменяем порядок интегрирования в функционале (4.3.6):

$$I(\rho(\cdot, \cdot), \lambda(\cdot, \cdot)) = \int_{\Omega} \int_0^T \Phi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), t) dt dx$$

и введем обозначения:

$$B(\lambda(x), \rho(x, \cdot)) = \int_0^T \Phi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), t) dt, \\ V = \bigcup_{x \in \Omega} V_x.$$

Тогда задачу (4.3.5), (4.3.2), (4.3.3) можно записать следующим образом:

$$\int_{\Omega} B(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) dx \rightarrow \min_{\lambda(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V}.$$

**Необходимость.** Пусть  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  – оптимальное решение задачи, т. е.

$$I(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)) \leq I(\lambda(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \quad \forall \lambda(\cdot, \cdot) \in \Lambda,$$

$\rho(\cdot, \cdot)$  – решение (4.3.2), соответствующее функции управления  $\lambda(\cdot, \cdot)$ . Покажем, что этот процесс почти всюду для  $x \in \Omega$  удовлетворяет условию (4.3.7). Предположим противное: существует подмножество  $\tilde{\Omega}$  множества  $\Omega : \text{mes}(\tilde{\Omega}) > 0$ , такое что  $\forall x \in \tilde{\Omega}$  условие (4.3.7) не выполняется, а это

значит, что п. в. для  $x \in \tilde{\Omega}$  существует процесс  $(\tilde{\lambda}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)) \in V_x$ , для которого справедливо неравенство

$$\int_0^T \Phi(\tilde{\rho}(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \tilde{\lambda}_i(x, t)) dt < \int_0^T \Phi(\rho^*(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i^*(x, t)) dt,$$

или, используя введенные обозначения:

$$B(\tilde{\lambda}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)) < B(\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)).$$

Составим новый процесс:

$$(\tilde{\lambda}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)) = \begin{cases} (\tilde{\lambda}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)) \in V_x, & \forall x \in \tilde{\Omega} \\ (\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) \in V_x, & \forall x \in \Omega \setminus \tilde{\Omega} \end{cases}$$

Вычислим значение функционала задачи (4.3.5) на этом процессе:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B(\tilde{\lambda}(\cdot, \cdot), \tilde{\rho}(\cdot, \cdot)) dx &= \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} B(\tilde{\lambda}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)) dx + \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} B(\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) dx. \end{aligned}$$

Разбивая выражение функционала  $I(\lambda(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot))$  при наборе  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  аналогичным образом и сопоставляя правые части полученных соотношений, придем к выводу:

$$I(\tilde{\lambda}(\cdot, \cdot), \tilde{\rho}(\cdot, \cdot)) < I(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)),$$

что противоречит условию оптимальности процесса  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ .

*Достаточность.* Пусть процесс  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  удовлетворяет условию (4.3.7) почти всюду для  $x \in \Omega$ . Покажем, что пара  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$  является оптимальным решением задачи (4.3.6), (4.3.2), (4.3.3). Пусть для всех  $x \in \Omega$   $(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \in V_x$  – произвольный допустимый процесс. Тогда почти всюду для  $x \in \Omega$

$$B(\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) \geq B(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot)).$$

Интегрируя это неравенство по всем  $x \in \Omega$  и учитывая тот факт, что неравенство может не выполняться на множестве точек из множества  $\Omega$ , значение подынтегральной функции в которых не влияет на величину интеграла, получим:

$$\int_{\Omega} B(\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot)) dx \leq \int_{\Omega} B(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) dx,$$

что указывает на оптимальность допустимого процесса  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ .

Теорема доказана.

И, таким образом, теорема 4.3 сводит решение задачи (4.3.6), (4.3.2), (4.3.3) к решению семейства задач оптимального управления: почти всюду для  $x \in \Omega$

$$I_1(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot) \in V_x}, \quad (4.3.8)$$

где

$$I_1(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) = \int_0^T \Phi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), t) dt,$$

а функция  $\rho(x, \cdot)$  – решение задачи (4.3.2), (4.3.3) при

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), \quad t \in 0, T.$$

**Замечание.** Если в исходной непрерывной динамической задаче ОРМ момент времени  $T$  будет не фиксированным, а подлежащим определению наряду с парой  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ , то редукция такой задачи ОРМ к семейству задач оптимального управления не представляется возможной.

Введем в рассмотрение множество  $W$  функций, представимых в виде (4.3.5), где вектор-функция  $\lambda(\cdot, \cdot)$  принимает значение на симплексе

$$\Lambda_1 = \lambda(x, t) = (\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1;$$

$$0 \leq \lambda_i(x, t) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad t \in 0, T.$$

Множество функций имеет вид:

$$W = u \in L_2(\Omega \times 0, T) :$$

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), \quad \lambda \in \Lambda_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad t \in 0, T.$$

**Свойство 1.** Множество  $W$  выпукло.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Действительно, легко показать, что  $\Lambda_1$  – замкнутое, ограниченное, выпуклое множество гильбертова пространства  $L_2 \Omega \times 0, T$ . Пусть  $\bar{u}(x, t)$  и  $\bar{\bar{u}}(x, t)$  произвольные элементы множества  $W$ . Им соответствуют функции  $\bar{\lambda}(x, t)$  и  $\bar{\bar{\lambda}}(x, t)$  из  $\Lambda_1$ . Напомним, что  $u_i(x, t)$ ,  $i = \bar{1}, \bar{N}$ , – заданные действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times 0, T$ , измеримые по  $x$  и  $t$ . Рассмотрим функцию вида

$$u(x, t) = \alpha \bar{u}(x, t) + (1 - \alpha) \bar{\bar{u}}(x, t), \quad (4.3.9)$$

п.в. для  $x \in \Omega$ ,  $t \in 0, T$ , где  $\alpha \in 0, 1$  – произвольная константа. Очевидно, что  $u(x, t) \in L_2(\Omega \times 0, T)$  и

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \alpha \bar{u}(x, t) + (1 - \alpha) \bar{\bar{u}}(x, t) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \bar{\lambda}_i(x, t) + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \bar{\bar{\lambda}}_i(x, t) = \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha u_i(x, t) \bar{\lambda}_i(x, t) + (1 - \alpha) u_i(x, t) \bar{\bar{\lambda}}_i(x, t) = \\ &= \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \alpha \bar{\lambda}_i(x, t) + (1 - \alpha) \bar{\bar{\lambda}}_i(x, t) \quad = \quad \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \hat{\lambda}_i(x, t), \end{aligned}$$

в силу  
выпуклости  $\Lambda_1$

$\hat{\lambda}(x, t) \in \Lambda_1$  п.в. для  $x \in \Omega$ ,  $t \in 0, T$ . Таким образом, показано, что вместе с любыми двумя своими элементами  $\bar{u}(x, t)$  и  $\bar{\bar{u}}(x, t)$  множество  $W$  содержит и функции вида (4.3.9), из чего заключаем, что это множество выпукло.

Наряду с задачей 2 будем рассматривать и следующую задачу:

**Задача 3.** Найти вектор-функцию  $\lambda^*(\cdot, \cdot) = \lambda_1^*(\cdot, \cdot), \dots, \lambda_N^*(\cdot, \cdot) \in \Lambda_1$ , соответствующую ей фазовую траекторию  $\rho^*(x, t)$  (удовлетворяющую условиям (4.3.2), (4.3.3)), которые минимизируют функционал (4.3.6).

**Свойство 2.** Если функция  $\Phi(\rho, u, t)$  выпукла по переменной  $u$  при всех фиксированных  $\rho$  и  $t$  и не убывает на  $R$ , то функционал  $I(\rho(\cdot, \cdot), \lambda(\cdot, \cdot))$  выпукл по  $\lambda(\cdot, \cdot)$  на  $\Lambda_1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\rho$  произвольная, фиксированная функция. Выберем произвольные  $\bar{\lambda}(\cdot, \cdot)$  и  $\bar{\bar{\lambda}}(\cdot, \cdot)$  из  $\Lambda_1$ . Этим функциям соответствуют функции  $\bar{u}(\cdot, \cdot)$  и  $\bar{\bar{u}}(\cdot, \cdot)$  из выпуклого множества  $W$ . Пусть  $\alpha \in 0, 1$ . Тогда:

$$\begin{aligned} I(\rho, \alpha \bar{\lambda} + (1 - \alpha) \bar{\bar{\lambda}}) &= \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(\rho, \sum_{i=1}^N u_i(x, t) (\alpha \bar{\lambda}_i(x, t) + (1 - \alpha) \bar{\bar{\lambda}}_i(x, t)), t) dx dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(\rho, \alpha \bar{u} + (1 - \alpha) \bar{\bar{u}}, t) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} \alpha \Phi(\rho, \bar{u}, t) + (1 - \alpha) \Phi(\rho, \bar{\bar{u}}, t) dx dt = \\ &= \alpha \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(\rho, \bar{u}, t) dx dt + (1 - \alpha) \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(\rho, \bar{\bar{u}}, t) dx dt = \alpha I(\rho, \bar{\lambda}) + (1 - \alpha) I(\rho, \bar{\bar{\lambda}}). \end{aligned}$$

Аналогично тому, как задача 2 эквивалентна семейству задач (4.3.8), задача 3 эквивалентна решению семейства задач оптимального управле-

ния:

$$I(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \in \hat{V}_x}, \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad (4.3.10)$$

$$\hat{V}_x = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x, t) \in \Lambda_{1x}, \\ \dot{\rho}(x, t) = \varphi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), t), \quad t \in 0, T, \quad \rho(x, t) = \rho_0(x) \end{array} \right\}$$

с управляющей функцией  $\lambda(x, \cdot)$ , где  $\Lambda_{1x}$  – сечение множества  $\Lambda_1$  при конкретном  $x \in \Omega$ . Пусть

$$\hat{V} = \bigcup_{x \in \Omega} \hat{V}_x.$$

Сформулируем локальный принцип максимума для задачи 3.

**Теорема 4.4.** Пусть в задаче 3 функции  $\Phi(\rho, u, t)$  и  $\varphi(\rho, u, t)$  заданы на  $\mathbf{R}^3$  со значениями в  $\mathbf{R}^1$ , непрерывны по  $\rho$  и  $u$ , измеримы по  $t$ , непрерывно дифференцируемы по  $\rho$  и  $u$ , причем  $\Phi_\rho(\rho, u, t)$ ,  $\Phi_u(\rho, u, t)$ ,  $\varphi_\rho(\rho, u, t)$ ,  $\varphi_u(\rho, u, t)$  ограничены при любых ограниченных  $\rho, u$ . Пусть  $u_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – заданные действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times 0, T$ , измеримые по  $x$  и  $t$ .

Пусть пара  $\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot) \in \hat{V}$  – решение задачи 3. Тогда п. в. для  $x \in \Omega$  необходимо существуют такие функция  $\psi_x(t)$  и константа  $\psi_0 \geq 0$  (для каждого  $x$  свои), не равные одновременно нулю ни при каком  $t \in 0, T$ , что

1) функция  $\psi_x(t)$  удовлетворяет задаче Коши

$$\dot{\psi}_x = -\psi_x(t) \cdot \frac{\partial \Phi^*(\rho(x, t), u(x, t), t)}{\partial \rho} + \psi_0 \frac{\partial \Phi^*(\rho(x, t), u(x, t), t)}{\partial \rho}; \quad (4.3.11)$$

$$\psi_x(T) = 0, \quad (4.3.12)$$

где

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \rho} = \frac{\partial \Phi(\rho^*(x, t), u(x, t; \lambda^*(x, t)), t)}{\partial \rho}, \quad u(x, t; \lambda^*) = \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i^*(x, t);$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \rho} = \frac{\partial \Phi(\rho^*(x, t), u(x, t; \lambda^*(x, t)), t)}{\partial \rho};$$



2) п.в. для  $t \in 0, T$  и всех  $\lambda \in \Lambda_{1x}$

$$\left( \left( -\psi_x(t) \cdot \frac{\partial \Phi^*(\rho, u, t)}{\partial u} + \psi_0 \frac{\partial \Phi^*(\rho, u, t)}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial \lambda}, \lambda - \lambda^*(x, t) \right) \geq 0. \quad (4.3.13)$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in \Omega$  – фиксированная точка. Функция Понтрягина для задачи (4.3.10) имеет следующий вид:

$$H(\rho, \lambda, \psi_x, t) = \psi_x(t) \cdot \varphi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), t) - \\ - \psi_0 \Phi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x, t), t).$$

Условия (4.3.11), (4.3.12) являются условиями стационарности и трансверсальности по фазовой координате соответственно для процесса  $\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot) \in V_x$  задачи оптимального управления (4.3.10). Условие (4.3.13) – это необходимое условие максимума функции Понтрягина  $H(\rho, \lambda, \psi_x, t)$  по всем  $\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_{1x}$ :

$$H_\lambda(\rho, \lambda, \psi_x, t), \lambda - \lambda^*(x, t) \leq 0 \text{ п.в. для } t \in 0, T \text{ и всех } \lambda \in \Lambda_{1x}.$$

Компоненты вектора  $H_\lambda(\rho, \lambda, \psi_x, t)$  – градиента функции Понтрягина по переменной  $\lambda_k(x, t)$  вычисляются по формуле:

$$H_{\lambda_k}(\rho^*, \lambda^*, \psi_x, t) = \left( \psi_x(t) \cdot \frac{\partial \Phi^*(\rho, u, t)}{\partial u} - \psi_0 \frac{\partial \Phi^*(\rho, u, t)}{\partial u} \right) \cdot u_k(x, t),$$

$$k = \overline{1, N}.$$

Таким образом, условия (4.3.11) – (4.3.13) являются необходимыми условиями оптимальности допустимого процесса  $\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot) \in V_x$  в задаче (4.3.10). В силу того, что решение задачи **3** эквивалентно решению семейства задач (4.3.10) п. в. для  $x \in \Omega$ , заключаем, что процесс  $\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot) \in V$ , для которого выполняются условия теоремы, является стационарным процессом для задачи **3**.

Если не требовать выпуклости и существования внутренних точек множества допустимых управлений, что характерно для задачи **2** (или самой исходной задачи), а также требования дифференцируемости функций  $\Phi(\rho, u, t)$  и  $\varphi(\rho, u, t)$  по управляющей переменной, можно сформулировать и доказать по схеме Дубовицкого – Милютина следующую теорему.

**Теорема 4.5.** Функции  $\Phi(\rho, u, t)$  и  $\varphi(\rho, u, t)$  заданы на  $\mathbf{R}^3$  со значениями в  $\mathbf{R}^1$ , непрерывны по  $u$  и непрерывно дифференцируемы по  $\rho, t$ , причем  $\Phi_\rho(\rho, u, t), \varphi_\rho(\rho, u, t), \Phi_t(\rho, u, t), \varphi_t(\rho, u, t)$  ограничены при любых ограниченных  $\rho, u$ .

Пусть пара  $\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot) \in V$  – решение задачи 2. Тогда п. в. для  $x \in \Omega$  необходимо существуют такие функция  $\psi_x(t)$  и константа  $\psi_0 \geq 0$  (для каждого  $x$  свои), не равные одновременно нулю ни при каком  $t \in 0, T$ , что

1) функция  $\psi_x(t)$  является решением задачи Коши (4.3.11), (4.3.12);

2) функция Понтрягина  $H(\rho, \lambda, \psi, t)$  при  $\lambda(x, \cdot) = \lambda^*(x, \cdot), \rho(x, \cdot) = \rho^*(x, \cdot)$  достигает максимума по всем  $\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_0$ , что равносильно условию:

$$H(\rho^*, \lambda^*, \psi_x, t) = \max_{\lambda(x) \in \Lambda_0} H(\rho^*, \lambda, \psi_x, t) \quad (4.3.14)$$

или

$$H(\rho^*, \lambda^*, \psi_x, t) = \sigma + \int_t^T -\psi_x(t) \cdot \varphi'_t(\rho^*(x, t), u^*(t)) - \psi_0 \Phi'_t(\rho^*(x, t), u^*(t)) dt, \quad (4.3.15)$$

где  $u^* = \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i^*(x, t)$ ,  $\sigma$  – некоторая константа.

**Определение.** Будем говорить, что задача 3 удовлетворяет **условию сильной регулярности**, если функция Понтрягина  $H(\rho, \lambda, \psi_x, t)$  почти каждой из задач оптимального управления семейства (4.3.10) такова, что

$$H_{\lambda_k}(\rho^*, \lambda^*, \psi_x, t) \neq 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad t \in 0, T,$$

за исключением множества точек  $t \in 0, T$  нулевой меры.

В соответствии с теоремой 4.4, учитывая структуру множества  $\bar{\Lambda}$ , для вычисления компоненты  $\lambda^*(x, \cdot)$  оптимального решения задачи 3 можно записать следующее операторное уравнение: п. в. для  $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x, t) = \min_{k=1, N} B_k(x, t), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (4.3.16)$$

где величина  $B_i(x, t)$  вычисляется по формуле:

$$B_i(x, t) = \left( -\psi_x(t) \cdot \frac{\partial \varphi^*(\rho, u, t)}{\partial u} + \psi_0 \frac{\partial \Phi^*(\rho, u, t)}{\partial u} \right) \cdot u_i(x, t),$$

а функции  $\psi_x(t)$  и  $\rho^*(x, t)$  являются решениями следующих задач Коши (4.3.11), (4.3.12) и (4.3.2), (4.3.3) при  $\lambda = \lambda^*(\cdot, \cdot)$ . Формула (4.3.16) имеет место в предположении, что задача 3 удовлетворяет условию сильной регулярности.

Таким образом, если функции Понтрягина почти каждой из задач семейства (4.3.10) или (4.3.8) удовлетворяют условию сильной регулярности, то компонента  $\lambda^*(x, \cdot)$  оптимального решения задачи 2 определяется однозначно из операторного уравнения (4.3.16).

**Теорема 4.6.** Пусть в задаче 1 функция  $\Phi(\rho, u, t)$  – выпукла и непрерывно дифференцируема по  $\rho, u$ , и непрерывна по  $t$ ; функция  $\varphi(\rho, u, t)$  линейна и по фазовой  $\rho$ , и по управляющей переменной  $u$  с коэффициентами  $A(t), B(t)$ , непрерывно зависящими от  $t$ . Тогда при сделанных предположениях локальный принцип максимума (теорема 4.4) является достаточным условием экстремума в задаче 2.

**Замечание.** Теоремы 4.4 – 4.6 в дальнейшем могут быть обобщены в различных направлениях, таких как отказ от условия невырожденности, другие типы функционалов и граничных условий, наличие фазовых ограничений и т. д.

#### 4.4. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ЦЕЛЕВЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Представленная в данном разделе динамическая задача оптимального разбиения множества отличается от рассмотренных выше, во-первых, видом целевого функционала, во-вторых, нелинейной динамикой функции спроса, которая, в свою очередь, определяется принадлежностью точки (потребителя) к зоне влияния определенного производителя. В исследуемой задаче сами разбиения предполагаются статическими, по аналогии с задачами разделов 4.1, 4.3 и в отличие от задач раздела 4.2. Сформулированную задачу разбиения можно отнести к классу задач оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами с особой структурой множества допустимых управлений. Поэтому для ее исследования и решения будем сочетать математические аппараты теории непрерывных

задач ОРМ и теории управления динамическими системами. Следует еще раз подчеркнуть, что постановка задачи содержит функционал, который является недифференцируемым по Фреше, а имеет лишь производные по направлениям в функциональном пространстве. Это свойство вносит определенные особенности в процесс решения задачи. В данном разделе предлагается применять метод последовательной линеаризации Р. П. Федоренко [106], который хорошо зарекомендовал себя при решении задач оптимального управления с функционалом, содержащие функции  $|\cdot|$ ,  $\max(\cdot)$  и другие.

#### 4.4.1. Постановка задачи и метод ее решения

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}_n$  – некоторое ограниченное, измеримое по Лебегу множество;  $u_i(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ,  $i = \overline{1, N}$  – заданный набор функций;  $T > 0$  – фиксированный момент времени;  $\Sigma_\Omega^N$  – класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств:

Требуется

$$F(\bar{\omega}) \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in P_N(\Omega)}, \quad (4.4.1)$$

где

$$F(\bar{\omega}) = \int_{\Omega} \int_0^T |\rho(x, t; \bar{\omega}) - \xi(x, t)| dt dx,$$

функция  $\rho(x, \cdot; \bar{\omega})$  для каждого разбиения  $\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Sigma_\Omega^N$  и для каждого  $x \in \Omega_i$  является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \alpha \rho(x, t) - \beta \rho^2(x, t) + u_i(x, t), \quad t \in [0, T] \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

$\alpha > 0, \beta > 0$  – заданные величины;  $\xi(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ,  $\rho_0(x) \in L_2(\Omega)$  – известные функции.

Задаче (4.4.1), (4.4.2) можно дать экономическую интерпретацию, аналогичную задаче раздела 4.1.

Введение характеристических функций  $\lambda_i(\cdot)$  подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , позволяет перейти от задачи (4.4.1), (4.4.2) к эквивалентной задаче:

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \int_0^T |\rho(x, t; \lambda(x)) - \xi(x, t)| dt dx \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda_1}, \quad (4.4.3)$$

где через  $\rho(x, \cdot; \lambda(x))$  для каждого  $x \in \Omega$  обозначено решение следующей задачи Коши:

$$\dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) - \beta \rho^2(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x), \quad t \in [0, T] \quad (4.4.4)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

$$\Lambda_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; i = \overline{1, N} \}.$$

Далее, в соответствии с теорией непрерывных задач оптимального разбиения, множество  $\Lambda_1$  погружается в симплекс

$$\Lambda_0 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; i = \overline{1, N} \}$$

и задача (4.4.3), (4.4.4) сводится к задаче

$$I(\lambda(\cdot)) \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda_0}, \quad (4.4.5)$$

при условиях (4.4.4).

Задачу (4.4.5), (4.4.4) будем рассматривать как задачу оптимального управления, в которой в качестве управляющей для каждого  $x \in \Omega$  выступает функция  $u(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i(x)$ ,  $\lambda \in \Lambda_0$ . Для ее решения применим метод, в основе которого лежит идея построения *релаксационной последовательности* функций  $\lambda^k(\cdot) \in \Lambda_0$ , то есть такой последовательности, для которой выполняется следующее условие:

$$I(\lambda^0(\cdot)) > I(\lambda^1(\cdot)) > I(\lambda^2(\cdot)) > \dots > I(\lambda^k(\cdot)) > \dots$$

### Схема метода

1.  $k = 0$ . Задаем  $\lambda^0(x) \in \Lambda_0$  для всех  $x \in \Omega$ .
2. Для каждого  $x \in \Omega$  с функцией  $u^{(k)}(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i^{(k)}(x)$  решаем задачу Коши (4.4.4).
3. Вычисляем значение функционала  $I(\lambda(\cdot))$  из (4.4.5).
4. В окрестности невозмущенного процесса  $\sum_{i=1}^N u_i(x, t) \lambda_i^k(x)$ ,  $\rho(x, t)$  задача линеаризуется. Процесс линеаризации включает два этапа:

1) вычисление дифференциала Гато функционала  $I(\lambda(\cdot))$ :

$$D(\lambda^k(\cdot), v^k(\cdot)) = D(\lambda^k(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)); \quad \bar{\lambda}(\cdot) \in \Lambda_0;$$

2) построение малой окрестности  $\delta\Lambda_0$  невозмущенной функции  $\lambda^k(\cdot)$ .

Формулируем и решаем следующую задачу: найти приращение (возмущение)  $v^k(\cdot) = \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)$  функции  $\lambda^k(\cdot)$  из условия

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} D(\lambda^{(k)}(\cdot), \lambda(\cdot) - \lambda^{(k)}(\cdot)) = D(\lambda^{(k)}(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^{(k)}(\cdot)). \quad (4.4.6)$$

Эта задача является линеаризацией решаемой задачи в окрестности невозмущенного процесса  $\sum_{i=1}^N u_i(\cdot, t) \lambda^k(\cdot); \rho(\cdot, t)$ . Решение задачи (4.4.6) позволяет осуществить основной шаг процесса – переход к следующему приближению:

$$\lambda^{k+1}(\cdot) = \lambda^k(\cdot) + s(\bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)). \quad (4.4.7)$$

Параметр  $s \in 0,1$  подбирается так, чтобы удовлетворить условию релаксации процесса:

$$I(\lambda^{k+1}(\cdot)) < I(\lambda^k(\cdot)). \quad (4.4.8)$$

Критерием окончания итерационного процесса может выступать одно из неравенств:

$$\begin{aligned} \|\lambda^{k+1}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)\| &\leq \varepsilon; \\ |I^{k+1} - I^k| &\leq \varepsilon; \\ |D(\lambda^k(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot))| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

#### 4.4.2. Построение дифференциала Гато функционала задачи

Напомним, что функционал  $I(\lambda(\cdot))$  называется *дифференцируемым по Гато*, если для любой вектор-функции  $v(\cdot)$  (из того же пространства, что и  $\lambda(\cdot)$ ) имеет место формула

$$I(\lambda(\cdot) + sv(\cdot)) = I(\lambda(\cdot)) + sD(\lambda(\cdot), v(\cdot)) + o(s), \quad (4.4.9)$$

где  $s$  – произвольное малое неотрицательное число,  $D(\lambda(\cdot), v(\cdot))$  – некоторый функционал, называемый производной функционала  $I$  в точке  $\lambda(\cdot)$  по направлению  $v(\cdot)$  (дифференциалом Гато).

Для каждой точки  $x \in \Omega$  введем в рассмотрение три множества:

$$\Theta^0(x) = t \in 0, T : \rho(x, t; \lambda(x)) - \xi(x, t) = 0 ;$$

$$\Theta^+(x) = t \in 0, T : \rho(x, t; \lambda(x)) - \xi(x, t) > 0 ;$$

$$\Theta^-(x) = t \in 0, T : \rho(x, t; \lambda(x)) - \xi(x, t) < 0 .$$

Вариацией функции  $\lambda^{(k)}(\cdot) \in \Lambda_0$  будем считать функцию

$$v(\cdot) = \lambda(\cdot) - \lambda^{(k)}(\cdot), \text{ де } \lambda(\cdot) \in \Lambda_0 .$$

Дадим приращение  $\delta\lambda(\cdot) = sv(\cdot)$  функции  $\lambda^{(k)}(\cdot)$ , где  $s > 0$  – достаточно малый параметр. Этому приращению соответствует приращение фазовой траектории  $\delta\rho$ , удовлетворяющее следующей линеаризованной задаче Коши:

$$\dot{\delta\rho} = \alpha(\delta\rho) - 2\beta\rho(\delta\rho) + \sum_{i=1}^N u_i(x, t)sv_i(x); \quad (4.4.10)$$

$$\delta\rho(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} I(\lambda^{(k)}(\cdot) + \delta\lambda(\cdot)) &= \int_{\Omega} \int_0^T \left| \rho(x, t; \lambda^{(k)}(x)) - \xi(x, t) + \delta\rho(x, t) + O(\|\delta\lambda\|^2) \right| dt dx = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Theta^0(x)} |\delta\rho(x, t)| dt + \int_{\Theta^+(x)} \rho(x, t; \lambda^{(k)}(x)) - \xi(x, t) + \delta\rho(x, t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Theta^-(x)} \rho(x, t; \lambda^{(k)}(x)) - \xi(x, t) + \delta\rho(x, t) dt \right\} dx + O(s). \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с формулой (4.4.9), заключаем, что дифференциал Гато функционала  $I(\lambda(\cdot))$  вычисляется по такой формуле:

$$D(\lambda^0(\cdot), v(\cdot)) = \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Theta^0(x)} |\delta\rho(x, t)| dt + \int_{\Theta^+(x)} \delta\rho(x, t) dt - \int_{\Theta^-(x)} \delta\rho(x, t) dt \right\} dx.$$

Используя уравнения в вариациях (4.4.10) и тождество Лагранжа, это выражение можно переписать в эквивалентном виде относительно приращения  $sv(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} D(\lambda^0(\cdot), v(\cdot)) &= \\ &= s \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Theta^0(x)} \left| \int_0^T \sum_{i=1}^N u_i(x, t)v_i(x)\psi(x, t, t') dt' + \int_0^T \sum_{i=1}^N u_i(x, t)v_i(x)\psi(x, t) dt \right| \right\} dx, \end{aligned}$$

где для каждого  $x \in \Omega$  функция  $\psi(x, \cdot)$  является решением следующей задачи Коши:

$$-(\dot{\psi}(x, t) + (\alpha - 2\beta\rho)\delta\rho\psi(x, t)) = \begin{cases} 1, & t \in \Theta^+(x); \\ 0, & t \in \Theta^0(x); \\ -1, & t \in \Theta^-(x); \end{cases} \quad (4.4.11)$$

$$\psi(x, T) = 0 \quad x \in \Omega; \quad t \in 0, T, \quad (4.4.12)$$

а для каждого  $t' \in \Theta^0(x)$  функция  $\psi(x, t, t')$  – решение такой задачи:

$$\delta(t - t') \dot{\psi}(x, t, t') + (\alpha - 2\beta\rho)\psi(x, t, t') = \delta(t - t'), \quad (4.4.13)$$

$$\psi(x, T, t') = 0 \quad x \in \Omega, \quad (4.4.14)$$

$\delta(t - t')$  – функция Дирака.

Следует подчеркнуть, что в случае, когда  $\text{mes}\Theta^0(x) = 0$  почти всюду для  $x \in \Omega$ , функционал (4.4.5) будет дифференцируемым по Фреше, и его производная Фреше может быть вычислена после решения задачи Коши (4.4.11), (4.4.12) по формуле:

$$\frac{\partial I(\lambda(\cdot))}{\partial \lambda_i(\cdot)} = \int_0^T \psi(\cdot, t) u_i(\cdot, t) dt,$$

что соответствует результатам, полученным в процессе исследования задач типа (4.4.4), (4.4.5) с линейным критерием качества.

### **4.4.3. Замечания относительно численной реализации алгоритма решения задачи**

В процессе численной реализации приведенной выше схемы решения задачи (4.4.4), (4.4.5) множество  $\Omega$  покрывается, как правило, равномерной сеткой с шагами  $h_i, i = \overline{1, n}$ , по пространственным переменным. Пусть  $\gamma$  – полученная сеточная аппроксимация множества  $\Omega$ .

Задается начальное приближение  $\lambda^0(x), \forall x \in \gamma$ . Решается задача Коши (4.4.4), например, методом Рунге – Кутты, и тем самым в каждой точке пространственной сетки определяется численно фазовая траектория  $\rho(x, t), t \in 0, T$ .

Для каждой точки  $x$  сетки  $\gamma$  вычисление значения производной Гато функционала (4.4.5) при  $\lambda(x) = \lambda^k(x)$  требует интегрирования задач Коши (4.4.11), (4.4.12) и (4.4.13), (4.4.14). При этом следует выделить множества индексов  $M_x^-, M_x^+, M_x^0$  следующим образом:



$$\begin{aligned}
 l \in M_x^-, & \text{ если } \rho_x^1 - \xi(x, t_1) < -\varepsilon; \\
 l \in M_x^+, & \text{ если } \rho_x^1 - \xi(x, t_1) > \varepsilon; \\
 l \in M_x^0, & \text{ если } |\rho_x^1 - \xi(x, t_1)| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,
 \end{aligned}$$

где  $\rho_x^1$  – приближенное значение фазовой координаты в точке  $x$  пространственной сетки в момент времени  $t_1, l \in \overline{1, M_1}$ .

Величину  $\varepsilon > 0$  следует задавать как можно меньшей, но с учетом того, что сложность решения задачи связана с количеством индексов в множестве  $M_x^0$ . В то же время  $\varepsilon$  не должно быть слишком мало, в целях избежания перехода за один шаг процесса произвольного индекса  $l$  из  $M_x^-$  в  $M_x^+$ .

Далее записывается конечномерная аппроксимация задачи (4.4.6). Заменяя в выражении производной Гато интегралы интегральными суммами, задачу можно свести к задаче линейного программирования [22] и решить симплекс-методом.

В результате реализации метода последовательной линеаризации в каждой точке сетки  $\gamma$  получим значения вектор-функции  $\lambda^*(\cdot)$ , являющейся решением задачи (4.4.4), (4.4.5). Эта функция может содержать все целые компоненты (и тогда она является и оптимальным решением задачи (4.4.3), (4.4.4)). В случае наличия в решении нецелых значений компонент их можно округлить по определенному правилу. Если округление невозможно, то для решения задачи (4.4.3), (4.4.4) нужно применять другой подход с использованием методов целочисленного линейного программирования.

Результаты вычислительной реализации описанного алгоритма приведем в разделе 5.5 на примере решения задачи оптимального управления системой параболического типа с функционалом вида (4.4.1).

## *4.5. НЕПРЕРЫВНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С РАЗМЕЩЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ПОДМНОЖЕСТВ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ*

### **4.5.1. Постановка задачи**

В разделе 4.1 описан подход к решению динамической задачи ОРМ с

квадратичным функционалом по фазовой координате, основанный на сведении исходной нелинейной задачи к задаче (4.1.10), (4.1.11) и позволяющий свести исходную бесконечномерную задачу оптимизации через функционал Лагранжа к конечномерной задаче максимизации некоторой негладкой функции. При этом характеристические функции, соответствующие оптимальному разбиению, удается получить в аналитическом виде.

Необходимые и достаточные условия оптимальности для непрерывных нелинейных задач оптимального разбиения множеств без ограничений, приведенные в разделе 4.3, сводят задачу к операторному уравнению относительно характеристических функций подмножеств, составляющих оптимальное разбиение.

Как уже отмечалось, переход от задачи ОРМ с квадратичным функционалом к линейной непрерывной задаче ОРМ удастся осуществить лишь в тех случаях, когда решение задачи Коши (4.1.1) может быть получено аналитически. Достаточно в правой части дифференциального уравнения появиться нелинейному слагаемому, и подход, основанный на сведении исходной динамической задачи ОРМ к линейной непрерывной задаче ОРМ, не срабатывает.

Продемонстрируем этот факт на примере задачи оптимального разбиения множества потребителей однотипного продукта на зоны влияния производителей с учетом их общих интересов, в которой динамика спроса описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \alpha(t)\rho(x, t) - \beta(t)\rho^2(x, t) + u_i(x, \tau_i, t), \quad t \in 0, T, \\ \rho(x, t) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Известно, что дифференциальное уравнение (4.1.22) не всегда интегрируется в квадратурах от элементарных функций. Иногда использование вспомогательных инструментов позволяет неразрешимые уравнения превратить в разрешимые. Так, применение квазилинеаризации путем подстановки  $v^2 = \max_u (2uv - u^2)$  в уравнение Риккати (к которому может быть приведено уравнение (4.2.1))

$$\dot{v} + v^2 + p(t)v + q(t) = 0$$

сводит это уравнение к следующему:

$$\dot{v} = \max_u -2uv + u^2 - p(t)v - q(t),$$

решение которого записывается так:

$$v(t) = \min_u \left\{ e^{-\int_0^t 2u(\tau)+p(\tau) d\tau} \left( v(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s 2u(\tau)+p(\tau) d\tau} \left[ u^2(s) - q(s) \right] ds \right) \right\}.$$

Вряд ли эта формула, адаптированная к задаче (4.1.1), (4.5.1), (4.1.3), может упростить процесс ее решения. Поэтому будем разрабатывать алгоритм решения непрерывной нелинейной динамической задачи ОРМ на основе синтеза методов теории ОРМ, необходимых условий оптимальности, полученных в разделе 4.3, а также методов приближенного решения задач Коши для нелинейных дифференциальных уравнений и их систем.

**Рассмотрим динамическую задачу оптимального разбиения множеств с нелинейной дифференциальной связью и функционалом, квадратичным относительно фазовой переменной.**

**Задача.** Необходимо

$$F(\bar{\omega}(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega}(\cdot) \in P_N(\Omega) \\ \tau \in \Xi}} , \quad (4.5.2)$$

где

$$F(\bar{\omega}(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \int_0^T \rho(x, t; \bar{\omega}(t), \tau) - \hat{\rho}(x, t)^2 dt dx ,$$

$$P_N(\Omega) = \bar{\omega}(t) = (\Omega_1(t), \dots, \Omega_N(t)) \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \forall t \in 0, T ,$$

$T > 0$  – фиксированная величина, функция  $\rho(x, \cdot; \bar{\omega}, \tau)$  для каждой точки  $x \in \Omega$  и для каждого разбиения  $\bar{\omega}(\cdot) \in P_N(\Omega)$  является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \varphi(\rho(x, t), u_i(x, \tau_i, t), t), \quad x \in \Omega_i(\cdot), \quad t \in 0, T , \\ \rho(x, t) &= \rho_0(x), \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

причем

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} u_i(x, \tau_i, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} . \quad (4.5.4)$$

Здесь функция  $\varphi(\rho, u, t)$  – известная функция своих аргументов, непрерывна по  $u$  и непрерывно дифференцируема по  $\rho$ , причем  $\frac{\partial \varphi(\rho, u, t)}{\partial \rho}$

ограничена при любых ограниченных  $\rho$  и  $u$ ;  $u_i(x, \tau_i, t) \in L_2(\Omega \times \Xi_i \times 0, T)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – заданный набор функций, в каждой из которых вектор параметров  $\tau_i = \tau_i^1, \dots, \tau_i^K \in \Xi_i, \Xi_i \subseteq \mathbb{R}^K$ ,  $i = \overline{1, N}$ , подлежит определению наряду

с разбиением;  $\Xi = \Xi_1 \times \Xi_2 \times \dots \times \Xi_N$ ; функции  $\rho_0(x) \in L_2(\Omega)$ ,  $\hat{\rho}(x, t) \in L_2(\Omega \times 0, T)$  – заданы.

В отличие от задачи (4.1.1) – (4.1.3), в задаче (4.5.2) – (4.5.4) интегральные ограничения накладываются не на фазовую переменную, а на управляющую функцию. В задаче о распределении потребителей между производителями такие условия могут указывать на ограниченные возможности производителей.

### 4.5.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности

В терминах характеристических функций подмножеств, составляющих разбиение множества  $\Omega$ , задача формулируется следующим образом: необходимо отыскать вектор-функцию  $\lambda^*(\cdot, \cdot) = \lambda_1^*(\cdot, \cdot), \dots, \lambda_N^*(\cdot, \cdot)$ , и набор векторов  $\tau^* \in \Xi$ , которые минимизируют функционал

$$I(\lambda(\cdot, \cdot), \tau) = \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t; \lambda(x, t), \tau) - \hat{\rho}(x, t)^2 dt dx \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot, \cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \quad (4.5.5)$$

при условиях:

$$\dot{\rho}(x, t) = \varphi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i(x, t), t), \quad t \in 0, T, \quad (4.5.6)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \lambda_i(x, t) \in \Lambda, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}, \quad \forall x \in \Omega, \quad (4.5.7)$$

$$\Lambda = \lambda(x, t) = (\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t)): \sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1;$$

$$\lambda_i(x, t) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad t \in 0, T.$$

Далее зависимость функции  $\rho(x, t; \lambda, \tau)$  от  $\lambda, \tau$  при необходимости сокращения записи будем опускать.

Согласно теории непрерывных задач ОРМ [65], множество  $\Lambda$  погружается в симплекс  $\Lambda_1$

$$\Lambda_1 = \lambda(x, t) = (\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_N(x, t)): \sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1;$$

$$0 \leq \lambda_i(x, t) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad t \in 0, T.$$

Наряду с задачей (4.5.5) – (4.5.7) будем решать и следующую задачу:

$$I(\lambda(\cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1}, \quad (4.5.8)$$

$$V_1 = \left\{ (\lambda(x, t), \tau, \rho(x, t)) : \lambda(x, t) \in \Lambda_1, \tau \in \Xi, \right.$$

$$\dot{\rho}(x, t) = \varphi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i(x, t), t), \quad t \in 0, T, i = \overline{1, N},$$

$$\left. \rho(x, t) = \rho_0(x); \int_0^T \int_{\Omega} u_i(x, t; \tau_i) \lambda_i(x, t) dx dt \leq b_i; i = \overline{1, N} \right\}.$$

Под функционалом Лагранжа задачи (4.5.8) будем понимать функционал

$$\begin{aligned} h(\lambda(\cdot, \cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot), \xi) = \\ = I(\lambda(\cdot, \cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)) + \sum_{i=1}^N \xi_i \left( \int_0^T \int_{\Omega} u_i(x, t; \tau_i) \lambda_i(x, t) dx dt - b_i \right), \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

определенный на множестве  $V \times \Gamma$ , где

$$V = (\lambda(x, t), \tau, \rho(x, t)) : \lambda(x, t) \in \Lambda_1, \tau \in \Xi,$$

$$\dot{\rho}(x, t) = \varphi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i(x, t), t), \quad \forall t \in 0, T,$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega;$$

$$\Gamma = \xi \in \mathbb{R}^N : \xi_i \geq 0, i = \overline{1, N}.$$

**Определение.** Пару  $((\lambda^*(\cdot, \cdot), \tau, \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^*)$  будем называть седловой точкой функционала Лагранжа  $h((\lambda(\cdot, \cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)), \xi)$  на множестве  $V \times \Gamma$ , если для всех  $(\lambda(\cdot, \cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)) \in V, \xi \in \Gamma$  выполняется соотношение

$$h((\lambda^*(\cdot, \cdot), \tau, \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi) \leq h((\lambda^*(\cdot, \cdot), \tau, \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^*) \leq h((\lambda(\cdot, \cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)), \xi^*).$$

Задача, двойственная к задаче (4.5.8), имеет вид:

$$\chi(\xi) = \min_{(\lambda(\cdot, \cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)) \in V} h((\lambda(\cdot, \cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)), \xi) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma}. \quad (4.5.10)$$

**Определение.** Будем говорить, что задача (4.5.8) удовлетворяет условию Слейтера, если существует точка  $\tilde{\lambda}(\cdot) \in \Lambda_1$ , для которой

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_i(x, t; \tau_i) \tilde{\lambda}_i(x, t) dx dt < b_i, i = \overline{1, N}.$$

**Лемма 4.1.** Если в задаче (4.5.2) – (4.5.4) константы  $b_1, \dots, b_N$  удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = \int_0^T \int_{\Omega} \bar{u}(x, t) dx dt ,$$

где  $\bar{u}(x, t) = \max_{i=1, N} \max_{\tau_i \in \Xi_i} u_i(x, t; \tau_i)$ , то для задачи (4.5.8) выполняется условие

Слейтера.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 3.2.

Отметим, что задача (4.5.10) является конечномерной, в отличие от задачи (4.5.8).

Нетрудно показать (по аналогии с [22]), что для того, чтобы задачи (4.5.10) и (4.5.8) были связаны соотношением двойственности  $I_{1*} = \chi^*$ , причем верхняя грань в двойственной задаче (4.5.10) достигалась, необходимо и достаточно, чтобы функционал (4.5.9) имел седловую точку в смысле введенного выше определения.

И, таким образом, решение пары двойственных задач (4.5.10) и (4.5.8) сводится к нахождению седловой точки функционала Лагранжа  $h((\lambda(\cdot, \cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)), \xi)$  на множестве  $V \times \Gamma$ .

Уточним вид функции  $\chi(\xi)$ . Пусть  $\xi \in \Gamma$ ,  $\tau \in \Xi$  – произвольные, но фиксированные векторы. Рассмотрим задачу

$$h((\lambda(\cdot, \cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot)), \xi) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot) \in V_{\tau}} , \quad (4.5.11)$$

где  $V_{\tau}$  – сечение множества  $V$  при фиксированном наборе параметров  $\tau$ .

Аналогично теореме 4.3 можно доказать, что при произвольных, но фиксированных значениях  $\xi \in \Gamma$  и  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Xi$  допустимый процесс  $(\lambda^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)) \in V_{\tau}$  будет доставлять минимальное значение функционалу задачи (4.5.9) тогда и только тогда, когда *почти всюду* для  $x \in \Omega$  будет выполняться равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[ \rho^*(x, t; \lambda^*(x, t), \tau) - \hat{\rho}(x, t) \right]^2 + \sum_{i=1}^N \xi_i u_i(x, t; \tau_i) \lambda_i^*(x, t) \Big] dt = \\ & = \min_{\substack{\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_2 \\ \rho(x, \cdot; \lambda(x, \cdot), \tau)}} \int_0^T \left[ \rho(x, t; \lambda(x, t), \tau) - \hat{\rho}(x, t) \right]^2 + \sum_{i=1}^N \xi_i u_i(x, t; \tau_i) \lambda_i(x, t) \Big] dt, \end{aligned}$$

где  $\Lambda_2 = \left\{ \lambda(t) \in \mathbb{R}^N : \lambda_i(t) \geq 0, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = 1, \forall t \in \Omega \right\}$ , а функция

$\rho(x, \cdot; \lambda(x, \cdot), \tau)$  – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \varphi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i(x, t), t), \quad \forall t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

соответствующее вектор-функции  $\lambda(x, \cdot)$  и вектору параметров  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Xi$ .

Введем вспомогательный функционал, соответствующий фиксированным значениям  $\xi \in \Gamma$ ,  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Xi$  и  $x \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} P_{\xi, \tau} \lambda(x, \cdot), \rho(x, \cdot) &= \\ &= \int_0^T \left[ \rho(x, t; \lambda(x, \cdot), \tau) - \hat{\rho}(x, t) \right]^2 + \sum_{i=1}^N \xi_i u_i(x, t) \lambda_i(x, \cdot) \, dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим семейство задач оптимального управления:

$$P_{\xi, \tau} \lambda(x), \rho(x, \cdot) \rightarrow \min_{\lambda(x), \rho(x, \cdot) \in V_\tau^x}, \quad x \in \Omega, \quad (4.5.12)$$

где  $V_\tau^x$  – сечение множества  $V_\tau$  при  $x \in \Omega$ .

Выпишем для каждой из этих задач условия принципа максимума Понтрягина, основываясь на результатах раздела 4.3. При выводе подобных условий удастся отказаться от требования выпуклости и существования внутренних точек допустимого множества управлений. Такая формулировка принципа максимума целесообразна здесь потому, что, в случае отказа от погружения множества  $\Lambda$  в  $\Lambda_1$ , в задачах семейства (4.5.12) на всем временном промежутке управляющая функция выбирается из конечного множества функций  $\Phi_\tau = u_i(x, \tau_i, t) \in L_2(\Omega \times \Xi \times [0, T])$ ,  $i = \overline{1, N}$  (вектор  $\tau$  – фиксирован), что видно из представления функции управления  $u(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i(x, t)$ , где  $\sum_{i=1}^N \lambda_i(x, t) = 1$ ;  $\lambda_i(x, t) = 0 \vee 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Пусть  $x \in \Omega$  – фиксированная точка. Функция Понтрягина для задачи (4.5.12) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H_{\tau, \xi}(\rho, \lambda, \psi_x, t) &= \psi_x(t) \cdot \varphi(\rho(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i(x, t), t) - \\ &- \psi_0 \left[ \rho(x, t; \lambda(x, t), \tau) - \hat{\rho}(x, t) \right]^2 + \sum_{i=1}^N \xi_i u_i(x, t; \tau_i) \lambda_i(x, t). \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.7.** Пусть в задаче (4.5.1) – (4.5.4) правая часть уравнения состояния  $\varphi(\rho, u, t)$  – известная функция своих аргументов, непрерывна

по  $u$  и непрерывно дифференцируема по  $\rho$ , причём  $\frac{\partial \varphi(\rho, u, t)}{\partial \rho}$  ограничена при любых ограниченных  $\rho$  и  $u$ , и пусть для каждого  $x \in \Omega$   $\lambda^*(x, \cdot), \rho^*(x, \cdot) \in V_{\tau}^X$  – решение задачи (4.5.12). Тогда найдутся  $\psi_x(t)$  и  $\psi_0 \geq 0$  (для каждого  $x$  свои), не равные одновременно нулю ни при каком  $t \in 0, T$  такие, что:

1) функция  $\psi_x(t)$  является решением задачи Коши

$$\dot{\psi}_x = -\psi_x(t) \cdot \frac{\partial \varphi^*(\rho(x, t), u(x, t), t)}{\partial \rho} + 2\psi_0 \rho^*(x, t) - \hat{\rho}(x, t);$$

$$\psi_x(T) = 0,$$

где

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi(\rho^*(x, t), u(x, t; \lambda^*(x, t), \tau), t)}{\partial \rho}, \quad u(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i(x, t);$$

2) функция Понтрягина  $H_{\tau\xi}(\rho, \lambda, \psi, t)$  при  $\lambda(x, \cdot) = \lambda^*(x, \cdot)$ ,  $\rho(x, \cdot) = \rho^*(x, \cdot)$  достигает максимума по всем  $\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_{1x}$ , что равносильно условию:

$$H_{\tau\xi}(\rho^*, \lambda^*, \psi_x, t) = \max_{\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_{1x}} H_{\tau\xi}(\rho^*, \lambda, \psi_x, t)$$

или

$$H_{\tau\xi}(\rho^*, \lambda^*, \psi_x, t) = \sigma + \int_t^T -\psi_x(t) \cdot \varphi'_1(\rho^*(x, t), u^*(x, t)) - 2\psi_0 \rho^*(x, t) - \hat{\rho}(x, t) \cdot \hat{\rho}'_1(x, t) dt,$$

где  $u^* = \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i^*(x, t)$ ,  $\sigma$  – некоторая константа.

Учитывая структуру множества  $\Lambda_{1x}$ , для вычисления компоненты  $\lambda^*(x, \cdot)$  оптимального решения задачи (4.5.12) можно записать следующую формулу:

$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x, t; \tau_i, \xi_i) = \min_{k=1, N} B_k(x, t; \tau_k, \xi_k), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (4.5.13)$$

где величина  $B_i(x, t; \tau_i, \xi_i)$  вычисляется по формуле:



$$B_i(x, t; \tau_i, \xi_i) = \int_t^T -\psi_x(t) \cdot \varphi'_i(\rho^*(x, t), u_i(x, t; \tau_i), t) + 2\psi_0 \rho^*(x, t) - \hat{\rho}(x, t) \cdot \hat{\rho}'_i(x, t) dt,$$

а функции  $\psi_x(t)$  и  $\rho^*(x, t)$  являются решениями следующих задач Коши:

$$\dot{\psi}_x = -\psi_x(t) \cdot \frac{\partial \varphi(\rho^*(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t; \tau_i) \lambda_i^*(x, t), t)}{\partial \rho} + \quad (4.5.14)$$

$$+ 2\psi_0 \rho^*(x, t) - \hat{\rho}(x, t);$$

$$\psi_x(T) = 0, \quad (4.5.15)$$

$$\rho^*(x, t) = \varphi(\rho^*(x, t), \sum_{i=1}^N u_i(x, t; \tau_i) \lambda_i^*(x, t), t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.5.16)$$

$$\rho^*(x, 0) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.5.17)$$

Как нетрудно заметить, теорема 4.7 сводит процесс решения задачи (4.5.12) к решению операторного уравнения (4.5.13) относительно характеристических функций подмножеств, составляющих разбиение с одновременным интегрированием системы дифференциальных уравнений (4.5.14), (4.5.16) при граничных условиях (4.5.15), (4.5.17). Численно реализовать такой процесс достаточно сложно. Поэтому, с целью упрощения вычислительной формулы для отыскания характеристических функций  $\lambda^*(x, \cdot)$ , перепишем условие 2) теоремы 4.7 в предположении, что функция  $\varphi(\rho, u, t)$  непрерывно дифференцируема по переменной  $u$ ,  $\lambda(x, \cdot) \in \Lambda_2$ . Основываясь на результатах раздела 4.3 (см. теорема 4.4), для отыскания компоненты  $\lambda^*(x, \cdot)$  оптимального решения задачи (4.5.12) можно получить следующую формулу: п. в. для  $t \in [0, T]$

$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x, t) = \min_{k=1, N} B_k(x, t), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (4.5.18)$$

где величина  $B_i(x, t)$  вычисляется по формуле:

$$B_i(x, t) = \left( -\psi_x(t) \cdot \frac{\partial \varphi^*(\rho, u_i, t)}{\partial u} + \psi_0 \xi_{i1} \right) \cdot u_i(x, t),$$

где  $\frac{\partial \varphi^*(\rho, u, t)}{\partial u} = \frac{\partial \varphi(\rho, u, t)}{\partial u} \Big|_{u^* = \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i, t) \lambda_i^*(x, t)}$ , а функции  $\psi_x(t)$  и

$\rho^*(x, t)$  являются решениями краевой задачи (4.5.14) – (4.5.17) при  $\lambda = \lambda^*(\cdot, \cdot)$ . Формула (4.5.18) имеет место в предположении, что задача **3** удовлетворяет **условию сильной регулярности**, т. е. для любых  $\xi \in \Gamma, \tau \in \Xi$

$$\text{mes} \left\{ t \in 0, T : \left( -\psi_x(t) \cdot \frac{\partial \varphi(\rho, u_i, t)}{\partial u} + \psi_0 \xi_i \right) \cdot u_i(x, \tau_i, t) \neq 0 \right\} = 0, \quad i = \overline{1, N} .$$

Таким образом, оптимальное решение задачи (4.5.5) – (4.5.7) может быть получено по формуле: п. в. для  $x \in \Omega$  и п. в. для  $t \in 0, T$

$$\lambda_i^*(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x, t; \tau_i^*, \xi_i^*) = \min_{k=1, N} B_k(x, t; \tau_k^*, \xi_k^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.5.19)$$

где величина  $B_i(x, t; \tau_i^*, \xi_i^*)$  вычисляется по формуле:

$$B_i(x, t; \tau_i^*, \xi_i^*) = \left( -\psi_x(t) \cdot \frac{\partial \varphi^*(\rho, u_i(x, \tau_i^*, t), t)}{\partial u} + \psi_0 \xi_i^* \right) \cdot u_i(x, \tau_i^*, t),$$

где  $\frac{\partial \varphi^*(\rho, u, t)}{\partial u} = \frac{\partial \varphi(\rho, u, t)}{\partial u} \Big|_{u^* = \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i^*, t) \lambda_i^*(x, t)}$ , функции  $\psi_x(t)$  и

$\rho^*(x, t)$  являются решениями краевой задачи (4.5.14) – (4.5.17) при  $\lambda = \lambda^*(\cdot, \cdot)$ ,  $\xi = \xi^*, \tau = \tau^*$ , а пара  $\xi^*, \tau^*$  является решением конечномерной задачи оптимизации

$$\chi(\tau, \xi) \rightarrow \min_{\tau \in \Xi} \max_{\xi \in \Gamma}, \quad (4.5.20)$$

где

$$\chi(\tau, \xi) = \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \rho^*(x, t) - \hat{\rho}(x, t) \right]^2 + \sum_{i=1}^N \xi_i u_i(x, t; \tau_i) \lambda_i^*(x, t) \Big] dt dx - \sum_{i=1}^N \xi_i b_i .$$

**Замечание.** Для наиболее полного обоснования метода решения непрерывной нелинейной динамической задачи ОРМ с отысканием центров подмножеств при ограничениях вида (4.5.2), (4.5.3) требуется выяснить, каким условиям должны удовлетворять функции  $u_i(x, \tau_i, t), i = \overline{1, N}$ ,  $\varphi(\rho, u, t)$ , вектор параметров  $b_i, i = \overline{1, N}$ , для того, чтобы задача была разрешима. Какими дополнительными свойствами должна обладать исходная задача, чтобы эквивалентная ей задача, сформулированная в терми-

нах характеристических функций (4.5.5) – (4.5.7), была, в свою очередь, эквивалентна задаче (4.5.8).

### 4.5.3. Численный алгоритм решения задачи

Сформулируем на основе полученных формул общую итерационную процедуру, которая может быть положена в основу численного алгоритма решения непрерывной нелинейной динамической задачи ОРМ вида (4.5.2), (4.5.3). При этом будем применять  $\tau$ -алгоритм Шора для решения задачи

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) = \chi(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \rightarrow \max_{\xi \in E^N} \min_{\tau \in \Xi} \quad (4.5.21)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число.

Не теряя общности, будем считать, что множество  $\Omega$  является параллелепипедом  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой прямоугольной системы координат.

1. Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $\tau, \xi = \tau^{(0)}, \xi^{(0)}$ . Пусть  $\hat{\Pi}$  – множество узлов пространственной сетки.

2. Покрываем отрезок  $[0, T]$  сеткой с шагом  $h_t$ , обозначим через  $\hat{T} = t : t = l h_t, l = \overline{1, n_T}$  множество узлов сетки по временной переменной.

Для каждого узла  $x \in \hat{\Pi}$ : решаем краевую задачу (4.5.14) – (4.5.17), сведя ее, например, к задаче Коши для системы двух дифференциальных уравнений и применяя метод Ньютона. При этом на каждом шаге численного интегрирования этой системы находим  $\lambda_i^{(0)}(x, t), i = \overline{1, N}$ , по формуле (4.5.18) при значениях  $\xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}$ . Тем самым вычисляем управляющую функцию  $u^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i^{(0)}, t) \lambda_i^{(0)}(x, t)$  и фазовую траекторию  $\rho^{(0)}(x, t)$  в каждой точке  $t \in \hat{T}$ .

3. Вычисляем компоненты  $g_{\chi}^{\tau_1}, \dots, g_{\chi}^{\tau_N}; g_{\chi}^{\xi_1}, \dots, g_{\chi}^{\xi_N}$  обобщенного градиента функции  $\bar{\chi}(\tau, \xi)$  в точке  $\tau, \xi = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}; \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$  при  $\lambda(\cdot, \cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot, \cdot), \xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}; u^{(0)}(x, \cdot), \rho^{(0)}(x, \cdot)$ .

4. Выбираем начальный шаг  $h_0 > 0$   $\tau$ -алгоритма и находим:

$$\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(0)} + h_0 g_{\bar{\chi}}^{\xi_i}(\xi^{(0)}); \quad \tau_i^{(1)} = \text{Pr}_{\Xi_i} \left[ \tau_i^{(0)} - h_0 g_{\bar{\chi}}^{\tau_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right], \quad i = \overline{1, N},$$

где  $\text{Pr}_A$  – оператор проектирования на множество  $A$ .

Осуществляем переход на второй шаг.

Пусть в результате вычислений после  $k, k=1, 2, \dots$  шагов алгоритма получены некоторые значения  $\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x, t), u^{(k-1)}(x, t), \rho^{(k-1)}(x, t)$ , для всех  $x \in \hat{\Pi}, t \in \hat{T}$ .

( $k+1$ )-й шаг:

5. Для каждого узла  $x \in \hat{\Pi}$ : решаем краевую задачу (4.5.14) – (4.5.17), сведя ее, например, к задаче Коши для системы двух дифференциальных уравнений и применяя метод Ньютона. При этом на каждом шаге численного интегрирования этой системы находим  $\lambda_i^{(k)}(x, t)$ , по формуле (4.5.18) при значениях  $\xi_i = \xi_i^{(k)}, \tau_i = \tau_i^{(k)}, i = \overline{1, N}$ . Вычисляем управляющую функцию  $u^{(k)}(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(x, \tau_i^{(k)}, t) \lambda_i^{(k)}(x, t)$  и фазовую траекторию  $\rho^{(k)}(x, t)$  в каждой точке  $t \in \hat{T}$ .

6. Вычисляем компоненты  $g_{\bar{\chi}}^{\tau_1}, \dots, g_{\bar{\chi}}^{\tau_N}; g_{\bar{\chi}}^{\xi_1}, \dots, g_{\bar{\chi}}^{\xi_N}$  обобщенного градиента функции  $\bar{\chi}(\tau, \xi)$  в точке  $\tau, \xi = (\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)}; \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_N^{(k)})$  при  $\lambda(\cdot, \cdot) = \lambda^{(k)}(\cdot, \cdot), \xi_i = \xi_i^{(k)}, \tau_i = \tau_i^{(k)}, i = \overline{1, N}; u^{(k)}(\cdot, \cdot), \rho^{(k)}(\cdot, \cdot)$ .

7. Осуществляем ( $k+1$ )-й шаг  $g$ -алгоритма для решения задачи (4.5.21), краткая схема которого записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}); \\ \tau_k^{(k+1)} &= \text{Pr}_{\Omega^N} \left[ \tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) \right], \end{aligned}$$

где  $B_{k+1}^{\xi}, B_{k+1}^{\tau}$  – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E^N$ , пересчет которых производится по следующим формулам:  $B_0^{\xi} = I_N, B_0^{\tau} = I_N$  ( $I_N$  – единичная матрица),

$$B_{k+1}^{\xi} = B_k^{\xi} R_{\alpha} \left( \frac{r_k}{\|r_k\|} \right), \quad r_k = g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}),$$

$$\mathbf{B}_{k+1}^\tau = \mathbf{B}_k^\tau \mathbf{R}_\alpha \left( \frac{\bar{\mathbf{h}}_k}{\|\bar{\mathbf{h}}_k\|} \right), \quad \bar{\mathbf{h}}_k = \mathbf{g}_{\bar{\lambda}}^\tau(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - \mathbf{g}_{\bar{\lambda}}^\tau(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}),$$

$\mathbf{R}_\alpha \zeta$  – оператор растяжения пространства в направлении  $\zeta$  с коэффициентом растяжения  $\alpha$ , матричная форма которого имеет вид:

$$\mathbf{R}_\alpha \zeta = \mathbf{I}_N + \alpha - 1 \zeta \zeta^T;$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{\bar{\lambda}}^\xi = \mathbf{B}_{k+1}^\xi \mathbf{g}_{\bar{\lambda}}^\xi(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}); \quad \tilde{\mathbf{g}}_{\bar{\lambda}}^\tau = \mathbf{B}_{k+1}^\tau \mathbf{g}_{\bar{\lambda}}^\tau(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$$

$\mathbf{h}_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума функции по рассматриваемому направлению;

8. Если условие

$$\left\| \tau^{(k)}, \xi^{(k)} - \tau^{(k+1)}, \xi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (4.5.22)$$

не выполняется, то переходим на  $(k + 2)$ -й шаг  $\Gamma$ -алгоритма, иначе – на шаг 4.

9. Полагаем  $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ ,  $\xi^* = \xi^{(l)}$ ,  $\tau^* = \tau^{(l)}$ ,  $u^*(x, t) = u^{(l)}(x, t)$ ,  $\rho^*(x, t) = \rho^{(l)}(x, t)$ ,  $x \in \hat{\Pi}$ ,  $t \in \hat{T}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой вектор  $(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$  удовлетворяет условию (4.5.22) окончания итерационного процесса. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала  $I(\lambda^*(\cdot), \tau^*)$  и, для контроля правильности результата, значение функции (4.5.21) при следующих параметрах:  $\xi = \xi^*$ ,  $\rho = \rho^*(\cdot, \cdot)$ ,  $\lambda(\cdot, \cdot) = \lambda^*(\cdot, \cdot)$ ,  $\tau = \tau^*$ .

Алгоритм описан.

Таким образом, в данной главе показано, что в случае, когда дифференциальное уравнение, описывающее изменение состояния системы, линейно, и решение задачи Коши записывается в аналитическом виде, удастся осуществить переход от исходной нелинейной динамической задачи ОРМ с квадратичным функционалом к линейной непрерывной задаче ОРМ и применить соответствующий метод решения. При этом характеристические функции подмножеств, составляющих оптимальное разбиение множества  $\Omega$ , можно найти в аналитическом виде. Для решения динамической задачи оптимального разбиения множеств, в которой дифференциальное уравнение нелинейно и аналитическое представление решения задачи Коши громоздкое или вообще невозможно, предложен и теоретически обоснован иной подход. В этом случае исходная бесконечномерная задача оптимизации сводится к задаче минимизации негладкой функции,

зависящей от конечного числа параметров. Характеристические функции подмножеств, составляющих оптимальное разбиение множества  $\Omega$ , удастся получить лишь в форме операторного уравнения. Для решения динамической задачи ОРМ с недифференцируемым функционалом применяется метод последовательной линеаризации Р. П. Федоренко.

Рассмотренные в этой главе динамические задачи ОРМ могут служить математическими моделями некоторых обратных задач для дифференциальных уравнений с переключаемой правой частью. Особенностью указанных задач является тот факт, что состояние некоторого процесса или объекта изменяется со временем, причем поведение исследуемого объекта описывается обыкновенным дифференциальным уравнением или системой уравнений с разрывной правой частью. К таким задачам относятся задачи идентификации «многозонных» или «многостадийных» моделей динамики, заключающиеся в определении по некоторой апостериорной информации неизвестных границ между зонами функционирования того или иного объекта так, что в пределах одной зоны его динамический режим может быть описан линейным дифференциальным уравнением. Неизвестными в задаче также могут быть и некоторые коэффициенты дифференциального оператора. Тогда задача сводится к нелинейной динамической задаче ОРМ с размещением «центров» подмножеств. Некоторые постановки таких задач представлены в главе 7.

# Глава 5

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ УПРАВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

В этой главе продемонстрирована возможность использования методов ОРМ для решения задач управления процессами, описываемыми уравнениями в частных производных параболического типа, с линейным критерием качества. Приведены математические постановки задач стартового и распределенного управлений, сводящихся к непрерывным динамическим задачам оптимального разбиения множеств. Представлены два способа сведения указанных задач управления к задачам ОРМ. В основе одного способа лежит интегральное представление решения краевой задачи с помощью функции Грина, другой использует аппарат сопряженных задач.

### *5.1. ЗАДАЧА СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ЛИНЕЙНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ*

#### **5.1.1. Постановка задачи управления и ее эквивалент в терминах динамических задач оптимального разбиения множеств. Понятие решения задачи**

Пусть на некотором ограниченном измеримом по Лебегу множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  задан набор функций  $\varphi_{0i}(x) \in L_2(\Omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $P_N(\Omega)$  – класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств.

Пусть состояние управляемого объекта описывается функцией  $\varphi(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega \times [0, T])$ , удовлетворяющей краевой задаче

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + f(x, t); \quad (5.1.1)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0 \quad x; \bar{\omega} = \varphi_{0i}(x) \quad \forall x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; \quad \bar{\omega} = \Omega_1, \dots, \Omega_N \in \Sigma_{\Omega}^N; \quad (5.1.2)$$

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \bar{\omega} = \Omega_1, \dots, \Omega_N \in P_N(\Omega) : \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \right\}; \quad (5.1.3)$$

$$\varphi(x, t) = g(x, t) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (5.1.4)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – оператор Лапласа;  $b_1, b_2, \dots, b_N$  – заданные числа;

$g(x, t) \in L_2(\partial\Omega \times [0, T])$ ,  $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  – заданные функции.

Каждое допустимое разбиение  $\bar{\omega} \in P_N(\Omega)$  определяет начальную функцию  $\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})$  такую, что соответствующая ей краевая задача (5.1.1) – (5.1.4) имеет единственное решение  $\varphi(x, t)$  в следующем смысле [80]:

- $\varphi(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ ;
- формально вычисленные производные  $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_1}$  и  $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_2}$  почти при всех  $t \in [0, T]$  являются обобщенными функциями и принадлежат  $L_2(\Omega)$ ;
- $\varphi(x, t)$  удовлетворяет граничному условию (5.1.4);
- функция  $\varphi(x, t)$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \varphi \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + f\varphi \right] dx dt = 0$$

для любой функции  $\varphi(x, t) \in W_2^1(\Omega \times [0, T])$ , удовлетворяющей условию  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ . Здесь  $t_1$  и  $t_2$  – произвольные моменты времени, такие что  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ ;

- для любой функции  $\chi(x) \in L_2(\Omega)$  имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{\Omega} \varphi(x, t) - \varphi_0(x; \bar{\omega}) \chi(x) dx = 0, \quad \forall \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N.$$

Условимся решение краевой задачи (5.1.1) – (5.1.5), соответствующее функции  $\varphi_0(x, \bar{\omega})$ ,  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$ , обозначать  $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$ .

Требуется определить такое разбиение  $\bar{\omega}^* \in \Sigma_{\Omega}^N$ , для которого функция  $\varphi_0(\cdot; \bar{\omega}^*)$  доставляла бы минимальное значение функционалу



$$V \varphi_0(\cdot, \bar{\omega}) = \int_{\Omega} \varphi(x, T; \varphi_0(x, \bar{\omega})) dx, \quad (5.1.5)$$

где  $T > 0$  – фиксированная длительность управляемого процесса.

Функционал (5.1.5) будем также записывать в виде

$$V \varphi_0(\cdot, \bar{\omega}) = \int_{\Omega} \varphi(x, T) dx.$$

**Замечание 1.** В [80] показано, что функция  $\varphi(x, t)$ , рассматриваемая как отображение отрезка  $[0, T]$  в пространство  $L_2(\Omega)$ , является непрерывной по переменной  $t$  в том смысле, что функция  $\zeta(x) = \|\varphi(x, t)\|_{L_2(\Omega)}$  непрерывна при  $t \in [0, T]$ , следовательно, интеграл в (5.1.5) существует.

**Замечание 2.** Интегральные ограничения в (5.1.3) могут быть заданы в более общем виде, например,

$$\int_{\Omega_i} \xi(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (5.1.6)$$

где  $\xi(\cdot)$  – некоторая заданная функция пространства  $L_2(\Omega)$ .

Отличительными чертами сформулированной задачи являются, во-первых, то, что начальное состояние процесса, которым мы управляем, определяется разбиением  $\bar{\omega}$  множества  $\Omega$ , во-вторых, наличие ограничений типа (5.1.3), в которых неизвестный параметр входит в пределы интегрирования.

**Замечание 3.** Условия существования оптимальных границ между подмножествами и их свойства в работе не исследуются. Некоторые сведения, касающиеся этих вопросов, приведены в [113].

**Замечание 4.** Задачи управления, имеющие математические модели, подобные сформулированной, ставятся во многих областях науки и техники, таких как металлургия, энергетика, геология, почвоведение, экология, пищевая промышленность и т. д. В случае управления процессами диффузии функция  $\varphi(x, t)$  представляет собой концентрацию некоторого вещества; процессы фильтрации жидкости в пористых средах описываются скалярной функцией напора; если же имеем дело с распространением тепла, то функция  $\varphi(x, t)$  представляет собой температуру в каждой точке заданного пространства и в каждый момент времени.

### 5.1.2. Условия существования решения динамической задачи оптимального разбиения множеств

Решение краевой задачи (5.1.1 – (5.1.4), соответствующее каждому допустимому разбиению  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$ , запишем в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, T, \varphi_0(x, \bar{\omega})) = & \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_0(x'; \bar{\omega}) dx' + \int_0^T \int_{\Omega} G(x, x', T-t) f(x', t) dx' dt + \\ & + \int_0^T \int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(x, x', T-t)}{\partial n} g(x', t) dx' dt, \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

где  $G(x, x', t)$  – функция Грина задачи (5.1.1) – (5.1.4).

Подставляя выражение для функции  $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$  (5.1.7) в функционал (5.1.5) и учитывая тот факт, что набор подмножеств  $\bar{\omega} = \Omega_1, \dots, \Omega_N$  является элементом класса  $P_N(\Omega)$ , приходим к следующей задаче ОРМ: найти набор подмножеств  $\bar{\omega}^* = \Omega_1^*, \dots, \Omega_N^* \in \Sigma_{\Omega}^N$ , на котором достигается минимальное значение функционала

$$F(\bar{\omega}) = F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \int \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') dx' dx + I_2 + I_3,$$

где

$$I_2 = \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, x', T-t) f(x', t) dx' dx dt, \quad I_3 = \int_0^T \int_{\partial \Omega} G(x, x', t) g(x', t) dx' dx dt.$$

Коротко эту задачу можно записать так:

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \rightarrow \min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N}. \quad (5.1.8)$$

**Лемма 5.1.** Для разрешимости задачи (5.1.8) достаточно, чтобы вектор правых частей неравенств в определении класса  $\Sigma_{\Omega}^N$  удовлетворял условию

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \overline{\varphi_0}(x) dx, \quad (5.1.9)$$

где  $\overline{\varphi_0}(x) = \max_{i=1, N} \varphi_{0i}(x)$ .

**Доказательство.** Сложив ограничения-неравенства, определяющие структуру класса  $\Sigma_{\Omega}^N$ , получим:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i . \quad (5.1.10)$$

Оценим левую часть соотношения (5.1.10):

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \max_{i=1, N} \varphi_{0i}(x) dx = \int_{\Omega} \overline{\varphi_0}(x) dx . \quad (5.1.11)$$

Сопоставляя выражения (5.1.10) и (5.1.11), приходим к выводу, что если для вектора  $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$  выполняется условие (5.1.9), то всегда найдется разбиение  $\overline{\omega} = \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  множества  $\Omega$  из класса  $\Sigma_{\Omega}^N$ . В этом случае класс  $\Sigma_{\Omega}^N$  не пуст и, следовательно, задача разрешима. В противном случае может оказаться  $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i \subset \Omega$ , а это означает, что множество

допустимых решений задачи (5.1.8)  $\Sigma_{\Omega}^N$  пусто, и задача неразрешима.

**Замечание.** В случае задания ограничений на набор подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  в виде (5.1.6) условие (5.1.9) запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \xi(x) dx .$$

### 5.1.3. Описание метода решения задачи.

#### Численный алгоритм

Задача (5.1.8) является линейной непрерывной задачей оптимального разбиения множества с ограничениями типа неравенств. Для ее решения применим метод, описанный в п. 3.1.6.

Введя характеристические функции  $\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , от задачи (5.1.8) переходим к эквивалентной задаче бесконечномерного программирования: найти вектор-функцию  $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)$ , при которой

$$I(\lambda(\cdot)) = \int \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx + I_2 + I_3 \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_1} , \quad (5.1.12)$$

где

$$\Lambda_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega; \quad i = \overline{1, N},$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5.1.13)$$

Очевидно,

$$I(\lambda(\cdot)) = F(\bar{\omega}).$$

Существование решения задачи типа (5.1.12), (5.1.13) доказано в [65]. Там же показано, что среди множества точек, в которых линейный относительно  $\lambda(\cdot)$  функционал (5.1.12) достигает на множестве  $\Lambda_1$  минимального значения при условиях (5.1.13), найдется хотя бы одна крайняя точка симплекса

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda(x) \in \Lambda_0; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N} \right\},$$

где

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \right. \\ \left. 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \quad i = \overline{1, N} \right\},$$

а крайние точки симплекса  $\Lambda_2$  представляют собой характеристические функции некоторых подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , образующих разбиение множества  $\Omega$ . Следовательно, множество оптимальных решений задачи

$$I \lambda(\cdot) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_2}, \quad (5.1.14)$$

содержит оптимальные решения задачи (5.1.12), (5.1.13). И, таким образом, решение последней сводится к решению задачи (5.1.14).

Под *функционалом Лагранжа* задачи (5.1.14) будем понимать функционал

$$h \lambda(\cdot), \psi = I \lambda(\cdot) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right), \quad (5.1.15)$$

где

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \Gamma = \psi \in \mathbb{R}^N : \psi_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad \lambda(x) \in \Lambda_0, \quad x \in \Omega$$

**Определение.** Пару  $\lambda^*(\cdot), \psi^*$  будем называть седловой точкой

функционала Лагранжа  $h(\lambda(\cdot), \psi)$  на множестве  $\Lambda_0 \times \Gamma$ , если для всех  $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ ,  $\psi \in \Gamma$  выполняется соотношение

$$h(\lambda^*(\cdot), \psi) \leq h(\lambda^*(\cdot), \psi^*) \leq h(\lambda(\cdot), \psi^*).$$

Задача, двойственная к задаче (5.1.14), записывается в виде:

$$Q(\psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Gamma}, \quad (5.1.16)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\psi) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h(\lambda(\cdot), \psi) = \\ &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \left\{ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left[ \int_{\Omega} G(x, x', T) dx + \psi_i \right] \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right\} + I_2 + I_3 - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \end{aligned}$$

Отметим, что задача (5.1.16) является конечномерной, в то время как задача (5.1.14) – бесконечномерная задача выпуклого программирования в гильбертовом пространстве  $L_2(\Omega)$  [115]. Кроме того, в силу линейности относительно  $\lambda(\cdot)$  функционала  $I(\lambda(\cdot))$  и функционалов, входящих в ограничения неравенства, двойственная задача (5.1.16) не зависит от переменных  $\lambda(\cdot)$  прямой задачи (5.1.14).

В [65] показано, что задачи (5.1.14) и (5.1.16) связаны соотношением двойственности  $I_* = Q^*$ , причем верхняя грань в двойственной задаче (5.1.16) достигается.

Таким образом, решение пары двойственных задач (5.1.14) и (5.1.16) эквивалентно нахождению седловой точки функционала Лагранжа (5.1.15) на множестве  $\Lambda_0 \times \Gamma$ .

Учитывая линейность функционала Лагранжа (5.1.15) по  $\lambda(\cdot)$  и структуру множества  $\Lambda_2$ , заключаем, что минимальное значение выражения, стоящего в фигурных скобках (5.1.16), для каждого  $\psi \in \Gamma$  достигается при  $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot) = \lambda_1^*(\cdot), \dots, \lambda_N^*(\cdot)$ , где

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i} \end{cases} \quad (5.1.17)$$

$$\Omega_{*i} = \left\{ x' \in \Omega : \left[ \int_{\Omega} G(x, x', T) dx + \psi_i \right] \varphi_{0i}(x') = \right.$$

$$= \min_{k=1, N} \left[ \int_{\Omega} G(x, x', T) dx + \psi_k \right] \varphi_{0k}(x'), \quad i = \overline{1, N}.$$

Подставляя в (5.1.16) вместо  $\lambda_i(\cdot)$  выражение (5.1.17) и учитывая, что  $\lambda_i(\cdot)$  удовлетворяют почти всюду для  $x \in \Omega$  условию

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1,$$

получаем следующую эквивалентную (5.1.16) задачу:

$$Q(\psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Gamma}, \quad (5.1.18)$$

$$Q(\psi) = \int \min_{k=1, N} \left[ \int_{\Omega} G(x, x', T) dx + \psi_k \right] \varphi_{0k}(x') dx' + I_2 + I_3 - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i.$$

Имеет место следующая лемма.

**Лемма 5.2.** Для того чтобы возможное разбиение  $\bar{\omega}^* = \Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  являлось оптимальным для задачи (5.1.1) – (5.1.5), необходимо и достаточно существование неотрицательных констант  $\psi_1, \dots, \psi_N$ , таких что

$$\left[ \int_{\Omega} G(x, x', T) dx + \psi_i \right] \varphi_{0i}(x') \leq \left[ \int_{\Omega} G(x, x', T) dx + \psi_k \right] \varphi_{0k}(x'), \quad i \neq k,$$

п. в. для  $x \in \Omega_i^*$ ,  $i, k = \overline{1, N}$ .

Таким образом, седловая точка  $\lambda^*(\cdot), \psi^*$  функционала Лагранжа (5.1.15) на множестве  $\Lambda_0 \times \Gamma$  (где первая компонента  $\lambda^*(\cdot)$  является оптимальным решением задачи (5.1.14)) определяется для  $i = 1, 2, \dots, N$  и почти всех  $x' \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_{*i}(x') = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \left[ \int_{\Omega} G(x, x', T) dx + \psi_i^* \right] \varphi_{0i}(x') = \\ & = \min_{k=1, N} \left[ \int_{\Omega} G(x, x', T) dx + \psi_k^* \right] \varphi_{0k}(x'); \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (5.1.19)$$

а в качестве  $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи (5.1.16), приведенной к виду (5.1.18).

Для решения задачи (5.1.18) с негладкой вогнутой функцией  $Q(\psi)$

применяется метод обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов –  $r$ -алгоритм Шора. При этом от задачи (5.1.18) совершается переход к задаче безусловной максимизации с помощью введения в целевую функцию негладкой штрафной функции множества  $\Gamma$ :

$$P(\psi) = Q(\psi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\psi_i)) \rightarrow \max_{\psi \in E^N}, \quad (5.1.20)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число (значительно большее максимального из множителей Лагранжа).

**Численный алгоритм** решения задачи (5.1.12), (5.1.13) для прямоугольной области  $\Omega$  имеет следующий вид.

1. Область  $\Omega$  покрываем прямоугольной  $m \times ml$  сеткой и задаем начальное приближение двойственных переменных  $\psi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

2. Вычисляем  $\lambda_i^{(0)}(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, N}$  в узлах сетки по формуле (5.1.19) при  $\psi_i = \psi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

3. Вычисляем значение обобщенного градиента функции  $P(\psi)$  в точке  $\psi = (\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_N^{(0)})$  по формулам:

$$g_P^{\psi_i} = -b_i + \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx - S \max(0, (-\text{sign}(\psi_i))) \quad (5.1.21)$$

при  $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot)$ ,  $\psi_i = \psi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

4. Выбирая начальный шаг  $h_0 > 0$   $r$ -алгоритма, находим:

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_P^{\psi}(\psi^{(0)}).$$

и переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  шагов алгоритма получены определенные значения  $\psi^{(k)}$ ,  $\lambda^{(k-1)}(\cdot)$  в узлах сетки.

( $k+1$ )-й шаг:

а) вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(\cdot)$  в узлах сетки по формулам (5.1.19) при  $\psi = \psi^{(k)}$ ;

б) вычисляем значение  $g_P^{\psi}(\psi^{(k)})$  по формулам (5.1.21) при  $\psi = \psi^{(k)}$ ;

в) проводим ( $k+1$ )-й шаг  $r$ -алгоритма для максимизации функции  $P(\psi)$ , краткая схема которого имеет вид:

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_P^{\psi}(\psi^{(k)}),$$

где  $B_{k+1}^\psi$  – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E_N$ , пересчет которых производится по следующим формулам:  $B_0^\psi = I_N$  ( $I_N$  – единичная матрица),

$$B_{k+1}^\psi = B_k^\psi R_\alpha \left( \frac{r_k}{\|r_k\|} \right), \quad r_k = g_P^\psi(\psi^{(k)}) - g_P^\psi(\psi^{(k-1)}),$$

$R_\alpha \zeta$  – оператор растяжения пространства в направлении  $\zeta$  с коэффициентом растяжения  $\alpha$ , матричная форма которого имеет вид:

$$R_\alpha \zeta = I_N + \alpha - 1 \zeta \zeta^T;$$

$$\tilde{g}_P^\psi = B_{k+1}^\psi \quad g_P^\psi(\psi^{(k)}),$$

$h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума функции по рассматриваемому направлению;

г) проверяем условия  $\|g_P^\psi(\psi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon$  или  $\|\psi^{(k)} - \psi^{(k+1)}\| \leq \varepsilon$ . Если ни одно из этих условий не выполняется, то переходим к  $(k+2)$ -му шагу, иначе – к пункту д);

д) полагаем  $\lambda_*(\cdot) = \lambda^{(l)}(\cdot)$ ,  $\psi^* = \psi^{(l)}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполняется хотя бы одно из условий. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала  $I \lambda(\cdot)$  и для контроля правильности результата – значение функции (5.1.20) при  $\lambda(\cdot) = \lambda^*$ ,  $\psi = \psi^*$ .

Алгоритм описан.

#### **5.1.4. Оценка сходимости конечномерной аппроксимации задачи оптимального разбиения множества**

Полная погрешность, с которой может быть получено приближенное решение задачи (5.1.1) – (5.1.5) с помощью описанного выше алгоритма, складывается из абсолютной погрешности алгоритма (эта погрешность определяется погрешностью вычисления функционалов прямой и двойственной задач, погрешностью, возникающей в результате замены функции Грина суммой конечного числа слагаемых, и погрешностью  $g$ -алгоритма), абсолютной погрешности округлений в результате реализации алгоритма на ЭВМ и абсолютной погрешности за счет неточности исходных данных.

Оценка погрешности вычисления значения двойственного функционала



задачи ОРМ может быть получена по методике, описанной в [65]. Здесь же оценим погрешность, возникающую за счет приближенного вычисления значения функции Грина.

Как известно, численная реализация алгоритма решения задачи (5.1.18) предполагает ее аппроксимацию задачей

$$\tilde{Q}(\psi) \rightarrow \max, \quad \psi \in \Gamma, \quad (5.1.22)$$

в которой целевая функция  $\tilde{Q}(\psi)$  отличается от  $Q(\psi)$  тем, что в ней функция Грина, в общем случае имеющая вид:

$$G(x, x', T - \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) v_n(x') e^{-\gamma_n(T-\theta)},$$

где  $v_n(x)$  – полная ортонормированная в  $L_2(\Omega)$  последовательность собственных функций, а  $\gamma_n$  – соответствующая последовательность собственных значений задачи  $\Delta v + \gamma v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$ , заменена суммой конечного  $L$  числа слагаемых. В связи с этим значение вектор-функции  $\lambda^*(\cdot)$ , а следовательно, и оптимальное значение функционала задачи (5.1.14) находится с некоторой погрешностью.

Введем обозначения:  $G(x, x', T)$  – точное, а  $\tilde{G}_L(x, x', T)$  – приближенное значения функции Грина,  $I^*, \lambda^*(\cdot)$  и  $\tilde{I}, \tilde{\lambda}^L(\cdot)$  – соответствующие значения функционала (5.1.14) и вектор-функции  $\lambda(\cdot)$ . Оценим меру уклонения приближенного значения функционала (5.1.14) от его точного значения для случая, когда множество  $\Omega$  представляет собой прямоугольник  $(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq p; 0 \leq y \leq q$ . Параллельно исследуем вопрос о сходимости последовательности функций  $\tilde{\lambda}^L(\cdot)$  к функции  $\lambda^*(\cdot)$  при  $L \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned} |I^* - \tilde{I}| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' dx + I_2 + I_3 - \tilde{I}_2 - \tilde{I}_3 - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \tilde{\lambda}_i^L(x') dx' dx \right| \leq |I_2 - \tilde{I}_2| + |I_3 - \tilde{I}_3| + \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, x', T) \lambda_i^*(x') - \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i^L(x') \varphi_{0i}(x') dx' dx \right|. \end{aligned}$$

Обозначим модули, стоящие в правой части неравенства,  $W_2, W_3, W_1$

соответственно. И пусть  $M = \max_{i=1, N} \max_{x \in \Omega} \varphi_{0i}(x)$ ,  $M_f$  – точная верхняя грань функции  $f(x, t)$  на множестве  $\Omega \times 0, T$ , а  $M_g$  – точная верхняя грань  $g(x, t)$  на  $\partial\Omega \times 0, T$ . Тогда

$$W_1 \leq M \sum_{i=1}^N \int \int_{\Omega} |G(x, x', T) \lambda_i^*(x') - \tilde{G}_L(x, x', T) \lambda_i^*(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) \lambda_i^*(x') - \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i^L(x')| dx' dx \leq M \sum_{i=1}^N \int \int_{\Omega} |G(x, x', T) - \tilde{G}_L(x, x', T)| \lambda_i^*(x') dx' dx + M \sum_{i=1}^N \int \int_{\Omega} |\tilde{G}_L(x, x', T)| |\lambda_i^*(x') - \tilde{\lambda}_i^L(x')| dx' dx.$$

Нетрудно получить оценку интеграла от остаточного члена функции Грина:

$$\begin{aligned} R_L &= \int \int_{\Omega \Omega} |G(x, x', T) - \tilde{G}_L(x, x', T)| dx dx' \leq \\ &\leq \frac{4}{pq} \sum_{n, m=L+1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{p^2} + \frac{m^2 \pi^2}{q^2}\right) T} \left| \int_0^p \sin \frac{n\pi}{p} x' dx' \int_0^p \sin \frac{n\pi}{p} x dx \int_0^q \sin \frac{m\pi}{q} y' dy' \int_0^q \sin \frac{m\pi}{q} y dy \right| \leq \\ &\leq \frac{4}{pq} \sum_{n, m=L+1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{p^2} + \frac{m^2 \pi^2}{q^2}\right) T} \left| -\frac{p}{n\pi} \cos n\pi - 1 \right|^2 \times \left| -\frac{q}{m\pi} \cos m\pi - 1 \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{64pq}{\pi^2} \sum_{n=L+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{p^2} T} \sum_{m=L+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} e^{-\frac{m^2 \pi^2}{q^2} T} \leq \\ &\leq \frac{64pq}{\pi^2 (L+1)^4} \sum_{n=L+1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{p^2} T} \sum_{m=L+1}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \pi^2}{q^2} T} \leq \\ &\leq \frac{64pq}{\pi^2 (L+1)^4} \sum_{k=(L+1)^2}^{\infty} e^{-\frac{k\pi^2}{p^2} T} \sum_{k=(L+1)^2}^{\infty} e^{-\frac{k\pi^2}{q^2} T} \leq \\ &\leq \frac{64pq e^{-(L^2+2L)\left(\frac{\pi^2}{p^2} + \frac{\pi^2}{q^2}\right) T}}{\pi^2 (L+1)^4 e^{\pi^2 T/p^2} - 1 e^{\pi^2 T/q^2} - 1}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно записать

$$R_L \leq A \frac{e^{-L^2+2Lk}}{(L+1)^4}, \quad (5.1.23)$$

где  $k = \pi^2(p^2 + q^2)/(pq)^2 T$ ,  $A = \frac{64pq}{\pi^2 e^{\pi^2 T/p^2} - 1 e^{\pi^2 T/q^2} - 1}$ .

Выбором числа  $L$  можно добиться того, что величина  $R_L$  будет меньше произвольного наперед заданного числа  $\varepsilon$ .

Далее, пусть  $x'$  – произвольная точка множества  $\Omega$ . Покажем, что для п. в.  $x' \in \Omega$  справедливо равенство:  $|\lambda_i^*(x') - \lambda_i^L(x')| = 0$ .

Согласно формуле (5.1.17)  $\lambda_i^*(x') = 1$ , если при  $k = i$  достигается

$$\min_{k=1, N} \left\{ \int_{\Omega} G(x, x', T) dx + \psi_k^* \right\} \varphi_{0k}(x'), \text{ где } \psi_k^*, k = \overline{1, N}, \text{ представляют собой}$$

оптимальное решение задачи (5.1.18). Функция  $\tilde{\lambda}_i^L(x')$  определяется аналогично, с той лишь разницей, что вместо функции  $G(x, x', T)$  берется ее аппроксимация  $\tilde{G}_L(x, x', T)$ .

Легко видеть, что  $\psi_i^* = \tilde{\psi}_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Действительно, в результате замены функции  $G(x, x', T)$  на  $\tilde{G}_L(x, x', T)$

$$\arg \max_{\psi \in E^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{i=1, N} \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') dx' dx + \psi_i \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') dx' - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - S \sum_{i=1}^N \max(0, -\psi_i) \right\}$$

не изменится, отличие будет лишь в оптимальном значении функции  $P$ , которое в данном случае несущественно. Следовательно, остается показать, что  $\min_{k=1, N} \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0k}(x') dx$  и  $\min_{k=1, N} \int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0k}(x') dx$  достигаются при одном и том же значении индекса  $k$ .

Пусть  $\min_{k=1, N} \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0k}(x') dx = \left( \int_{\Omega} G(x, x', T) dx \right) \varphi_{01}(x')$ .

Так как функция Грина для любых  $x, x', T$  неотрицательна (см. [80]), то можно записать:

$$\min_{k=1, N} \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0k}(x') dx = \left( \int_{\Omega} G(x, x', T) dx \right) \min_{k=1, N} \varphi_{0k}(x').$$

Учитывая оценку (5.1.23), интеграл  $\int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) dx$  можно предста-

вить в виде:

$$\int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) dx = \int_{\Omega} G(x, x', T) dx - o(\varepsilon).$$

Нетрудно заметить, что этот интеграл принимает неотрицательное значение и поэтому

$$\begin{aligned} \min_{k=1, N} \int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0k}(x') dx &= \\ \int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) dx \min_{k=1, N} \varphi_{0k}(x') &= \int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) dx \varphi_{01}(x'). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lambda^*(x') = \tilde{\lambda}^L(x')$  и в силу произвольности выбора точки  $x'$  можно утверждать, что почти для всех  $x \in \Omega$  имеет место равенство

$$|\lambda_i^*(x) - \tilde{\lambda}_i^L(x)| = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Возвращаясь к оценке величины  $W_1$ , получаем:

$$W_1 \leq \frac{A M e^{-(L^2+2L)k}}{\pi^2 (L+1)^4} = O\left(\frac{e^{-(L^2+2L)k}}{(L+1)^4}\right).$$

Получим теперь оценки для величин  $W_2$  и  $W_3$ :

$$\begin{aligned} W_2 &= |I_2 - \tilde{I}_2| \leq M_f \frac{4}{pq} \times \\ &\times \sum_{n, m=L+1}^{\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\Omega} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{p^2} + \frac{m^2 \pi^2}{q^2}\right) T-t} \left| \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{p} x' \sin \frac{m\pi}{q} y \sin \frac{m\pi}{q} y' \right| dx dy dx' dy' \leq \\ &\leq \frac{4M_f}{pq} \frac{(pq)^2}{\pi^4 n^2 m^2} (\cos m\pi - 1)^2 (\cos n\pi - 1)^2 \sum_{n, m=L+1}^{\infty} \int_0^T e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{p^2} + \frac{m^2 \pi^2}{q^2}\right) t-T} dt \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{64M_f pq}{\pi^4} \sum_{n,m=L+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^2} \times \frac{1}{n^2 \pi^2 q^2 + m^2 \pi^2 p^2} \times \left[ 1 - e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{p^2} + \frac{m^2 \pi^2}{q^2}\right) \Gamma} \right] \leq$$

$$\leq \frac{64M_f pq}{\pi^6 L^2 (p^2 + q^2)} \left[ \sum_{n,m=L+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^2} - \sum_{n,m=L+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^2} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{p^2} + \frac{m^2 \pi^2}{q^2}\right) \Gamma} \right].$$

Используя оценку

$$\sum_{k=L}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=L}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k} = \sum_{k=L}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{L}$$

и промежуточные оценки для  $R_L$ , получим окончательную оценку для величины  $W_2$ :

$$W_2 \leq \frac{64M_f pq}{\pi^6 L^6 (p^2 + q^2)} + \frac{Ae^{-(L^2+2L)k}}{\pi^4 (L+1)^4 L^2 (p^2 + q^2)} = O\left(\frac{1}{L^6}\right).$$

Оценим теперь величину  $W_3$ :

$$W_3 \leq \frac{4M_g}{pq} \sum_{n,m=L+1}^{\infty} \left| \int_0^{\Gamma} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{p^2} + \frac{m^2 \pi^2}{q^2}\right) (\Gamma-t)} dt \right| \times \frac{4pq}{nm\pi^2} \times \left( \frac{mp}{nq} + \frac{nq}{mp} \right) \times$$

$$\times (\cos n\pi - 1)(1 - \cos m\pi) \leq \frac{64M_g pq}{\pi^4} \sum_{n,m=L+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^2} \left| 1 - e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{p^2} + \frac{m^2 \pi^2}{q^2}\right) \Gamma} \right| \leq$$

$$\leq \frac{64M_g pq}{\pi^4 L^2} - \frac{M_g Ae^{-(L^2+2L)k}}{\pi^2 (L+1)^4} = O\left(\frac{1}{L^2}\right).$$

Таким образом,  $|\tilde{I}^* - \tilde{I}|$  является величиной порядка  $O(1/L^2)$ .

В процессе получения оценки погрешности установлена асимптотическая независимость оптимального разбиения множества  $\Omega$ , а следовательно, и оптимального решения исходной задачи (5.1.1) – (5.1.5) от приближенного вычисления значения функции Грина, то есть это свойство имеет место при достаточно большом  $L$ .

### 5.1.5. Результаты решения задач управления с помощью алгоритма, основанного на функциях Грина

Предложенный в п. 5.1.3 алгоритм программно реализован в среде разработки приложений Delphi 7. В качестве тестовой задачи была рассмотрена задача отыскания такого разбиения прямоугольника  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 3\}$  на  $N=5$  подмножеств, что соответствующая ему функция  $\varphi_0(\cdot)$  доставляла бы минимальное значение функционалу

$$V(\varphi_0(\cdot)) = \int_{\Omega} \varphi(x, T; \varphi_0(x)) dx \rightarrow \inf, \quad \varphi_0(\cdot) \in U, \quad (5.1.24)$$

где  $\varphi = \varphi(x, t, \varphi_0(x))$  – решение краевой задачи

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + 10\exp(-t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1], \quad (5.1.25)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (5.1.26)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]. \quad (5.1.27)$$

Ограничения на функцию  $\varphi_0(\cdot)$ , выступающую в качестве управления, имеют вид:

$$U = \{ \varphi(x) = \varphi_{0i}(x) \forall x \in \Omega_i, \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N}; \Omega_1, \dots, \Omega_N \in P_N(\Omega) \}, \text{ где}$$

$P_N(\Omega)$  – класс всевозможных разбиений  $\Omega$  (см. п. 5.1.1). Функции  $\varphi_{0i}(\cdot)$  определены следующим образом:  $\varphi_{0i}(x) = \max(|x_1 - \tau_{1i}|, |x_2 - \tau_{2i}|)$ , где  $\tau_i, i = \overline{1, N}$ , – заданные точки из области  $\Omega$  (см. рис. 5.1).

При численной реализации алгоритма решения данной задачи область  $\Omega$  покрывалась сеткой  $m \times m_1 = 30 \times 15$ . Двойные интегралы, входящие в формулы для определения функций  $\lambda_i(\cdot), i = \overline{1, N}$ , значения функционала (5.1.18) и его вектора-градиента в точке  $\psi = \psi_1, \dots, \psi_N$  вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций по узлам сетки. Вектор правых частей ограничений неравенств  $b$  был задан равным  $(0.5, 10, 10, 0.5, 10)$ . В качестве начального приближения функции начальных условий выбрана функция  $\varphi_0^{(0)}(x) = \varphi_{01}(x) \quad \forall x \in \Omega$ . Начальное значение вектора сопряженных переменных –  $\psi_i^{(0)} = 1, i = \overline{1, 5}$ . Значения функционалов прямой и двойственной задач на нулевой итерации:  $I^{(0)} \approx 40.5857, P^{(0)} \approx 24.3816$ .

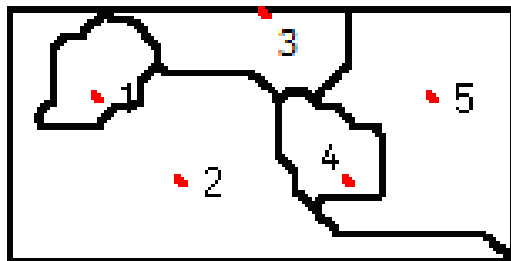


Рис. 5.1. Решение тестовой задачи

Разбиение  $\Omega$ , соответствующее оптимальному на этой области заданию функций  $\varphi_{0i}(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , получено на 65-й итерации и представлено на рис. 5.1. При этом достигнуты оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач  $I^* \approx 40.8877$ ,  $P^* \approx 40.7704$ . Разница между оптимальными значениями функционалов прямой и двойственной задач в этом примере и ниже объясняется погрешностью вычислений (см. п. 5.1.4). Приведем также значения двойственных переменных, полученных на 65-й итерации:  $\psi^* \approx (0.2718, 0.000, 0.000, 0.5016, 0.000)$ . Все вычисления производились с точностью  $\varepsilon = 0.0001$ . Нулевые значения двойственных переменных указывают на то, что ограничения, участвующие в определении класса  $U$ , выполняются как строгие неравенства. Для проверки этого факта были вычислены значения интегралов в левых частях неравенств:

$$\int_{\Omega_1^*} \varphi_{01}(x) dx = 0.50, \quad \int_{\Omega_2^*} \varphi_{02}(x) dx = 8.67, \quad \int_{\Omega_3^*} \varphi_{03}(x) dx = 3.461,$$

$$\int_{\Omega_1^*} \varphi_{01}(x) dx = 0.49, \quad \int_{\Omega_1^*} \varphi_{01}(x) dx = 4.60.$$

Следует также отметить, что результаты, приведенные выше, соответствуют случаю, когда для приближенного вычисления функции Грина последняя заменялась суммой  $L=8$  слагаемых. При увеличении числа  $L$  резко увеличивается время работы программы. О влиянии величины  $L$  на значения функционалов прямой и двойственной задач можно судить, анализируя данные, приведенные в табл. 5.1. Нетрудно заметить, что эти данные согласуются с результатами пункта 5.1.5.

Результаты решения других задач управления начальными данными для системы, описанной дифференциальным уравнением параболического типа, приведены в работе [43].

*Таблица 5.1*

**Влияние числа слагаемых в функции Грина на значения функционалов**

Число слагаемых L	Значение двойственного функционала P	Функционал прямой задачи I
6	40.395242	40.408875
8	40.7701	40.8877
12	40.9243	40.9582
20	40.981301	41.000415

Описанный в п. 5.1.4 алгоритм решения задачи стартового управления легко обобщается на случай задачи управления, в которой управляющая функция входит в правую часть дифференциального уравнения. Здесь приведем результаты решения одной из тестовых задач: найти такое разбиение квадрата  $\Omega = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$  на  $N=5$  непересекающихся подмножеств, что соответствующая функция  $u(\cdot, \bar{\omega})$  доставляла бы минимальное значение функционалу

$$V u(\cdot, \bar{\omega}) = \int_{\Omega} \varphi(x, t; u(x, t; \bar{\omega})) dx \rightarrow \inf, u \in U, \quad (5.1.28)$$

где  $\varphi = \varphi(x, t; u(x, t; \bar{\omega}))$  является решением краевой задачи

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + u(x, t; \bar{\omega}) \exp(-t); \quad x, t \in \Omega \times 0; 1, \quad (5.1.29)$$

$$\varphi(x, 0) = 4 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad (5.1.30)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 4 \quad \forall x \in \partial\Omega, t \in 0, 1, \quad (5.1.31)$$

ограничения на  $u(\cdot, \cdot)$  имеют вид

$$U = \{ u(x, t; \bar{\omega}) = u_i(x), \forall x \in \Omega_i, \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N \}, \quad (5.1.32)$$

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \bar{\omega} = \{ \Omega_1, \dots, \Omega_N \} \in \mathcal{P}_N(\Omega) : \int_{\Omega_i} u_i(x) dx \leq b_i; i = \overline{1, N} \right\}.$$

1. При решении задачи (5.1.28) – (5.1.32) в случае, когда функции, определяющие множество допустимых управлений, задавались в виде  $u_i(x) = \|x - \tau_i\|^2$ ,  $i = \overline{1, N}$ , где точки  $\tau_i = (\tau_{1i}, \tau_{2i})$  – заданные точки с координатами:  $\tau_1 = (1, 3)$ ,  $\tau_2 = (2, 3)$ ,  $\tau_3 = (3, 3)$ ,  $\tau_4 = (0.5, 1)$ ,  $\tau_5 = (3.5, 1)$ ,  $b_i = 10$ ,  $\psi_i^{(0)} = 1$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , получено оптимальное разбиение, представлен-



ное на рис. 5.2. Оптимальное значение функционала прямой задачи ОРМ, равное 31.4002, получено уже на нулевой итерации. Значение же двойственного функционала возросло за 50 итераций с  $P^{(0)} = -7.5337$  до  $P^* = 31.39187$ . Ему соответствует следующий вектор сопряженных переменных:  $\psi^* = (0.0005; 0.00002; 0.0001; 0.00007; 0.000004)$ . Такие значения двойственных переменных указывают на то, что интегральные ограничения, участвующие в описании класса  $\Sigma_{\Omega}^N$ , выполняются на полученном оптимальном разбиении как строгие неравенства. В процессе решения задачи этот факт был численно подтвержден.

2. На рис. 5.3 представлено разбиение квадрата  $\Omega$ , соответствующее оптимальному решению задачи (5.1.28) – (5.1.32) в случае, когда  $u_1(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ ,  $u_2(x) = 0.2x_1 + 0.2x_2$ ,  $u_3(x) = 2\sin x_1 + x_2$ ,  $u_4(x) = 4\exp(-x_1 - x_2)$ ,  $u_5(x) = 0.5$ ; вектор правых частей ограничений неравенств  $b = (1, 1, 1, 0.7, 1)$ . Вектор  $\psi^{(0)}$  был задан так же, как и в предыдущем случае. Минимальное значение целевого функционала  $\Gamma^* = 29.3302$  было достигнуто за 57 итераций. При этом получены следующие значения двойственного функционала и вектора сопряженных переменных:

$$P^* = 29.3286, \quad \psi^* = (0.000004; 0.00007; 0.00002; 0.140852; 0.000001).$$

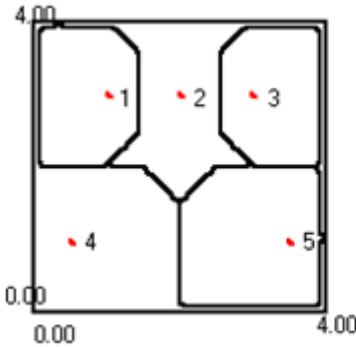


Рис. 5.2

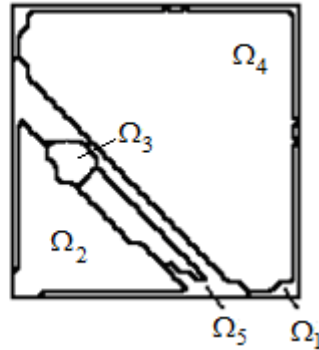


Рис. 5.3

Как нетрудно заметить, во всех описанных примерах значения функционалов прямой и двойственной задач на оптимальном разбиении с достаточной точностью совпадают, что говорит о выполнении соотношения

двойственности, а значит и о достоверности результата. Выполнение ограничений-неравенств в каждой из задач также позволяет сделать вывод о правильности счета.

Большое количество численных экспериментов на ЭВМ, описание которых не представляется возможным, подтвердило возможность использования предлагаемого подхода к решению задач оптимального управления, подобных задаче (5.1.1) – (5.1.5).

*5.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ  
ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ  
С РАЗМЕЩЕНИЕМ ЦЕНТРОВ  
ПОДМНОЖЕСТВ, К КОТОРЫМ СВОДЯТСЯ  
НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ*

**5.2.1. Постановка задачи распределенного управления параболической системой и ее аналог в терминах теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств**

Среди прикладных задач оптимального управления распределенными системами встречаются задачи, математическая постановка которых подобна модели, рассмотренной в предыдущем подразделе, с той лишь разницей, что множество допустимых управлений определяется не только наборами разбиений исходного множества, но еще и некоторыми параметрами, которые необходимо найти в процессе решения. К задачам такого типа относятся задачи оптимального размещения промышленных предприятий; задачи рационального использования нефтяных месторождений, состоящие в отыскании координат нефтяных скважин, и др. Алгоритм решения указанных задач можно построить на основе описанного в предыдущем подразделе алгоритма. В этом случае задачи управления сводятся к задачам ОРМ с размещением “центров” подмножеств.

Этот класс задач рассмотрим на примере решения задачи оптимального управления линейной пространственно-двумерной параболической системой с управлением, входящим в правую часть дифференциального уравнения.

**Постановка задачи и ее сведение к задаче ОРМ.** Пусть на некотором ограниченном измеримом по Лебегу множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-

гладкой границей  $\partial\Omega$  задан набор функций  $u_i(x, \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , – действительных, ограниченных, измеримых по аргументу  $x$ ; точки  $\tau_i \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, N}$ , заранее неизвестны. Состояние управляемого объекта описывается функцией  $\varphi(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega \times [0, T])$ , удовлетворяющей краевой задаче

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + u(x; \bar{\omega}, \tau)f(t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad u \in U, \quad (5.2.1)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (5.2.2)$$

$$\varphi(x, t) = g(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \quad (5.2.3)$$

Допустимое множество управлений  $u(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$  имеет вид

$$U = \{ u(x; \bar{\omega}, \tau) = u_i(x, \tau_i) \quad \forall x \in \Omega_i, \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau \in \Omega^N \}, \quad (5.2.4)$$

где

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \bar{\omega} \in P_N(\Omega) : \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N} \right\}, \quad \Omega^N = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_N.$$

Величины  $T$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_N$  и функции  $\varphi_0(\cdot) \in L_2(\Omega)$ ,  $f(\cdot) \in L_2([0, T])$ ,  $g(\cdot, \cdot) \in L_2(\partial\Omega \times [0, T])$  считаются заданными,  $\rho(\cdot)$  – действительная неотрицательная на  $\Omega$  функция. Точки  $\tau_i \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, N}$ , будем называть условно “центрами” подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N \in P_N(\Omega)$ .

Условимся решение краевой задачи (5.2.1) – (5.2.4), соответствующее функции  $u(x; \bar{\omega}, \tau)$ ,  $\bar{\omega}, \tau \in \Sigma_{\Omega}^N \times \Omega^N$ , обозначать  $\varphi = \varphi(x, t; u(x; \bar{\omega}, \tau))$ .

Здесь, как и в п. 5.1.1, предполагаем, что функция  $\varphi = \varphi(x, t; u(x; \bar{\omega}, \tau))$ , соответствующая каждому допустимому набору  $\bar{\omega}, \tau \in \Sigma_{\Omega}^N \times \Omega^N$ , является обобщенным решением краевой задачи (5.2.1) – (5.2.4).

Требуется определить разбиение  $\bar{\omega}^* \in \Sigma_{\Omega}^N$  и набор “центров” подмножеств  $\tau^* \in \Omega^N$ , таких что соответствующая им функция  $u(\cdot; \bar{\omega}^*, \tau^*)$  доставляла бы минимальное значение функционалу

$$V \ u(\cdot; \bar{\omega}, \tau) = \int_{\Omega} \varphi(x, T, u(x; \bar{\omega}, \tau)) \rho(x) dx. \quad (5.2.5)$$

Используя методику сведения, описанную в разд. 5.1.2, приходим к следующей задаче оптимального разбиения с размещением “центров” подмножеств: разбить множество  $\Omega$  на  $N$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть пустые) и разместить центры  $\tau_1, \dots, \tau_N$  этих под-

множеств в области  $\Omega$  так, чтобы

$$F_{\Omega_1, \dots, \Omega_N, \tau_1, \dots, \tau_N} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} W(x') u_i(x', \tau_i) dx' + I_1 + I_3, \quad (5.2.6)$$

где

$$W(x') = \int_0^T \int_{\Omega} G(x, x', T-t) \rho(x) f(t) dx dt, \quad I_1 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, x', T) \rho(x) \varphi_0(x') dx' dx,$$

$$I_3 = \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial G(x, x', T-t)}{\partial n} g(x', t) \rho(x) dx dx' dt,$$

достигал минимального значения, и при этом выполнялись ограничения:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5.2.7)$$

Очевидно, что

$$V u(\cdot; \bar{\omega}, \tau) = F_{\Omega_1, \dots, \Omega_N, \tau}.$$

**Утверждение 5.3.** Если компоненты вектора  $b = (b_1, \dots, b_N)$  таковы, что выполняется соотношение

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i,$$

то в задаче (5.2.1) – (5.2.5) класс допустимых разбиений  $\Sigma_{\Omega}^N$  не пуст.

Доказательство утверждения 5.3 аналогично доказательству утверждения 5.1.

Условия, при которых задача (5.2.1) – (5.2.5) разрешима, будут приведены ниже.

### **5.2.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности. Метод решения задачи. Численный алгоритм**

Введя характеристические функции  $\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , от задачи минимизации функционала (5.2.6) при условиях (5.2.7), переходим к эквивалентной задаче бесконечномерного программирования:

$$I \lambda(\cdot), \tau = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} W(x') u_i(x', \tau_i) \lambda_i(x') dx' + I_1 + I_3 \rightarrow \min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Lambda_1 \times \Omega^N}, \quad (5.2.8)$$

где

$$\Lambda_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; i = \overline{1, N}; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N} \}.$$

Будем рассматривать также задачу:

$$I \lambda(\cdot), \tau \rightarrow \min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Lambda_2 \times \Omega^N}, \quad (5.2.9)$$

где

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda(x) \in \Lambda_0; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N} \right\},$$

$$\Lambda_0 = \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) :$$

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega.$$

Учитывая структуру функционала задачи (5.2.8), можно заключить, что

$$\min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Lambda_2 \times \Omega^N} I \lambda(\cdot), \tau = \min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_2} I \lambda(\cdot), \tau. \quad (5.2.10)$$

Как следует из результатов п. 5.1.3, при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  внутренняя задача в (5.2.10) линейна относительно  $\lambda(\cdot)$  на  $\Lambda_2$  и глобально разрешима. Кроме того, при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  среди множества оптимальных решений задачи (5.2.8) содержатся оптимальные решения задачи (5.2.9).

Введем для задачи (5.2.9) функционал Лагранжа:

$$h \lambda(\cdot), \tau, \psi = I \lambda(\cdot), \tau + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right) = \quad (5.2.11)$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N W(x') u_i(x', \tau_i) + \psi_i \rho(x') \lambda_i(x') dx' - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + I_1 + I_3,$$

где  $\psi \in \Gamma = \psi \in \mathbf{R}^N : \psi_i \geq 0, i = \overline{1, N}$ ,  $\lambda \cdot \in \Lambda_0$ ,  $\tau \in \Omega^N$ .

**Определение.** Пару элементов  $\lambda^*(\cdot), \tau^*, \psi^*$  будем называть седловой точкой функционала Лагранжа  $h \lambda(\cdot), \tau, \psi$  на множестве

$\Lambda_0 \times \Omega^N \times \Gamma$ , если

$$h \lambda^*(\cdot), \tau^*, \psi \leq h \lambda^*(\cdot), \tau^*, \psi^* \leq h \lambda(\cdot), \tau, \psi^*$$

для всех  $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ ,  $\psi \in \Gamma$ ,  $\tau \in \Omega^N$ , или

$$h \lambda^*(\cdot), \tau^*, \psi^* = \min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Lambda_0 \times \Omega^N} \max_{\psi \in \Gamma} h \lambda(\cdot), \tau, \psi =$$

$$\max_{\psi \in \Gamma} \min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Lambda_0 \times \Omega^N} h \lambda(\cdot), \tau, \psi .$$

Обозначим

$$G(\psi) = \min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Lambda_0 \times \Omega^N} h \lambda(\cdot), \tau, \psi, \quad \psi \in \Gamma .$$

Задача, двойственная к задаче (5.2.9), имеет вид:

$$G(\psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Gamma} . \quad (5.2.12)$$

Рассмотрим задачу

$$h \lambda(\cdot), \tau, \psi \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \quad (5.2.13)$$

при произвольных, но фиксированных значениях  $\tau \in \Omega^N$ ,  $\psi \in \Gamma$ . Обозначим

$$G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h \lambda(\cdot), \tau, \psi . \quad (5.2.14)$$

Подставляя в (5.2.14) выражение для  $h \lambda(\cdot), \tau, \psi$  из (5.2.11) и учитывая, что этот функционал является линейным сепарабельным относительно  $\lambda(\cdot)$ , получаем:

$$G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h \lambda(\cdot), \tau, \psi = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i +$$

$$+ \int_{\Omega} \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \sum_{i=1}^N W(x') u_i(x', \tau_i) + \psi_i \rho(x') \lambda_i(x') dx', \quad \tau \in \Omega^N, \psi \in \Gamma . \quad (5.2.15)$$

В (5.2.15) минимальное значение функционала  $h \lambda(\cdot), \tau, \psi$ , как следует из результатов п. 5.1.3, достигается для каждого  $\psi \in \Gamma$ ,  $\tau \in \Omega^N$  при  $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$ , где

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1 & \text{при } x' \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{при } x' \in \Omega \setminus \Omega_i^*, \end{cases} \quad (5.2.16)$$

$$\Omega_i^* = x \in \Omega: \left. \begin{aligned} & W(x)u_i(x, \tau_i) + \psi_i \rho(x) = \\ & = \min_{k=1, N} W(x)u_k(x, \tau_k) + \psi_k \rho(x) \end{aligned} \right\}, \quad i = \overline{1, N},$$

и функция  $G_1(\tau, \psi)$  принимает вид:

$$\begin{aligned} G_1(\tau, \psi) &= \\ &= -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int \min_{k=1, N} W(x')u_k(x', \tau_k) + \psi_k \rho(x') \, dx' + I_1 + I_3. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Из вида оптимального решения (5.2.16) задачи (5.2.15) при фиксированном векторе  $\tau \in \Omega^N$  следует (в предположении, что  $\rho(x) \geq 0$  п. в. для  $x \in \Omega$ )

**Теорема 5.1.** Для того чтобы возможное разбиение  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  было оптимальным для задачи (5.2.13), необходимо и достаточно существования вектора действительных констант  $\psi \in \Gamma$ , такого что

$$W(x)u_i(x, \tau_i) + \psi_i \rho(x) \leq W(x)u_k(x, \tau_k) + \psi_k \rho(x), \quad i \neq k, \quad (5.2.18)$$

п. в. для  $x \in \Omega_i^*$ ,  $i, k = \overline{1, N}$ ,  $\tau \in \Omega^N$ .

**Следствие.** В точках  $x \in \Omega$ , принадлежащих оптимальной границе между подмножествами  $\Omega_i^*$  и  $\Omega_j^*$ , в неравенстве (5.2.18) достигается знак равенства.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.2.** Седловая точка  $\lambda^*(\cdot), \tau^*, \psi^*$  (где первая компонента  $\lambda^*(\cdot), \tau^*$  является оптимальным решением задачи (5.2.8)) функционала (5.2.11) на множестве  $\Lambda_0 \times \Omega^N \times \Gamma$  определяется для  $i = \overline{1, N}$  и п. в.  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1 & \text{при } x' \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{при } x' \in \Omega \setminus \Omega_i^*, \end{cases} \quad (5.2.19)$$

$$\Omega_i^* = x \in \Omega: W(x)u_i(x, \tau_i^*) + \psi_i^* \rho(x) =$$

$$= \min_{k=1, \overline{N}} \left[ W(x) u_k(x, \tau_k^*) + \psi_k^* \rho(x) \right], \quad i = \overline{1, N},$$

в качестве  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи, приведенной к виду:

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{k=1, \overline{N}} W(x') u_k(x', \tau_k) + \psi_k \rho(x') \, dx' - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + I_1 + I_3 \rightarrow \max_{\psi \in \Gamma}. \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Теперь сформулируем условия разрешимости задачи (5.2.6), (5.2.7).

**Теорема 5.3.** Пусть в задаче (5.2.1) – (5.2.5):

- 1)  $\Omega$  – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество из  $R^2$ ;
- 2) функция  $f(t) \geq 0$  ( $f(t) \leq 0$ ) п. в. для  $t \in 0, T$ ;
- 3) каждая из функций  $u_i(x, \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , полунепрерывна снизу (сверху) по переменной  $\tau_i$  на  $\Omega$  п. в. для  $x \in \Omega$ ;
- 4) выполняется условие утверждения 5.3.

Тогда задача (5.2.1) – (5.2.5) имеет решение.

**Доказательство.** Во-первых, необходимость выполнения условия утверждения 5.3 очевидна, так как в противном случае может оказаться пустым класс допустимых разбиений для задачи (5.2.1) – (5.2.5), а следовательно, и эквивалентной ей задачи минимизации функционала (5.2.6) при условиях (5.2.7) – задача ОРМ становится неразрешимой.

Выше было установлено, что задача (5.2.6), (5.2.7) эквивалентна задаче (5.2.8), а решение последней при условии выполнения утверждения 5.3 определяется формулами (5.2.19), (5.2.20). Поэтому вопрос о разрешимости задачи ОРМ (5.2.6), (5.2.7) сводится к исследованию разрешимости задачи (5.2.20). Покажем, что при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение.

Пусть  $f(t) \geq 0$  п. в. для  $t \in 0, T$ . Тогда функция  $W(x')$  принимает для всех  $x' \in \Omega$  неотрицательные значения в силу того, что функция Грина  $G(x, x', t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall x' \in \Omega, t \geq 0$  и  $\rho(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$  (по условию задачи (5.2.1) – (5.2.5)). Пусть далее каждая из функций  $u_i(x, \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , полунепрерывна снизу по переменной  $\tau_i$  на  $\Omega$  для п. в.  $x \in \Omega$ . Это озна-



чает, что для любой последовательности  $\tau^{(k)} = \tau_1^k, \dots, \tau_N^k$ , сходящейся к произвольной, но фиксированной точке  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N \in \Omega^N$ , выполняется соотношение:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} u_i(x, \tau_i^{(k)}) \geq \bar{u}_i(x, \tau_i) \text{ для п. в. для } x \in \Omega. \quad (5.2.21)$$

Оценим

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} G_1(\tau^{(k)}, \psi) &= \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left[ -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \min_{i=1, N} \left[ W(x') u_i(x', \tau_i^{(k)}) + \psi_i \rho(x') \right] dx' + I_1 + I_3 \right] = \\ &= -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + I_1 + I_3 + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \min_{i=1, N} \left[ W(x') u_i(x', \tau_i^{(k)}) + \psi_i \rho(x') \right] dx' = \\ &= -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + I_1 + I_3 + \int_{\Omega} \min_{i=1, N} \left[ \liminf_{k \rightarrow \infty} W(x') u_i(x', \tau_i^{(k)}) + \psi_i \rho(x') \right] dx'. \end{aligned}$$

Учитывая неотрицательность величины  $W(x')$  и выполнение условия (5.2.21), можно записать, что

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} G_1(\tau^{(k)}, \psi) &\geq -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + I_1 + I_3 + \\ &+ \int_{\Omega} \min_{i=1, N} \left[ W(x') u_i(x', \tau_i) + \psi_i \rho(x') \right] dx' = G_1(\tau, \psi). \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

В силу произвольности точки  $\tau \in \Omega$  заключаем, что  $G_1(\tau, \psi)$  как функция переменного  $\tau$  полунепрерывна снизу на множестве  $\Omega^N$ .

Согласно обобщенной теореме Вейерштрасса полунепрерывна снизу по переменной  $\tau$  функция  $G_1(\tau, \psi)$  на выпуклом ограниченном замкнутом множестве  $\Omega^N$  достигает своего минимального значения для любого фиксированного  $\psi \in \Gamma$ . Таким образом, внутренняя задача (5.2.20) минимизации функции  $G_1(\tau, \psi)$  по  $\tau$  разрешима. Существование вектора  $\psi \in \Gamma$ , максимизирующего функцию  $G(\psi)$ , следует из теоремы двойственности.

Итак, показано, что при выполнении условий теоремы задача (5.2.20) разрешима, а значит имеет решение и задача ОРМ (5.2.6), (5.2.7).

В случае, когда  $f(t) \leq 0$  для всех  $t \in 0, T$ , функция  $W(x') \leq 0$

$\forall x \in \Omega$ . И тогда для того чтобы функция  $G_1(\tau, \psi)$  для любого фиксированного  $\psi \in \Gamma$  была полунепрерывна снизу по переменной  $\tau$  на множестве  $\Omega^N$ , необходимо, чтобы функции  $u_i(x, \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$  были полунепрерывны сверху по переменной  $\tau$  для п. в.  $x \in \Omega$ . Действительно, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} G_1(\tau^{(k)}, \psi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \min_{i=1, N} \left[ W(x') u_i(x', \tau_i^{(k)}) + \psi_i \rho(x') \right] dx' + I_1 + I_3 \right] = \\ &= -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + I_1 + I_3 + \int_{\Omega} \min_{i=1, N} \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} W(x') u_i(x', \tau_i^{(k)}) + \psi_i \rho(x') \right] dx' = \\ &= -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + I_1 + I_3 + \int_{\Omega} \min_{i=1, N} \left[ W(x') \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_i(x', \tau_i^{(k)}) + \psi_i \rho(x') \right] dx'. \end{aligned}$$

Далее, в силу того, что  $W(x') \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$  и  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_i(x, \tau_i^{(k)}) \leq u_i(x, \tau_i)$ ,

легко увидеть, что справедливо неравенство (5.2.22).

Из эквивалентности задач (5.2.1) – (5.2.5) и (5.2.6), (5.2.7) следует разрешимость обеих задач при выполнении условий теоремы.

Теорема доказана.

**Замечание.** Для отыскания решения задачи (5.2.20), являющейся задачей конечномерной оптимизации с негладкой вогнутой целевой функцией  $Q(\psi)$  может быть применен любой известный метод, например методы типа  $\varepsilon$ -субградиентных, типа эллипсоидов [111, 112] и др. Здесь используется алгоритм обобщенных почтиградиентов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, близкий к  $g$ -алгоритму Шора. Для этого от задачи (5.2.20) совершаем переход к задаче безусловной максимизации по  $\psi$ , введя в целевую функцию (5.2.20) негладкую штрафную функцию множества  $\Gamma$ :

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, -\psi_i) \rightarrow \max_{\psi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N}, \quad (5.2.23)$$

где  $S$  – достаточно большое число (значительно большее максимального из множителей Лагранжа для функции (5.2.11)). О возможности перехода от задачи (5.2.20) к задаче (5.2.23) см. в [28, 100].

#### Алгоритм решения задачи

Область  $\Omega$  заключаем в параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой прямоугольной системы координат, полагая

$\rho(x) = 0$  для точек  $x \in \Pi \setminus \Omega$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $\psi, \tau = \psi^{(0)}, \tau^{(0)}$ .

Вычисляем значения функции  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (5.2.19) при  $\psi = \psi^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}$ . Вычисляем значение вектора градиента функции  $P(\tau, \psi)$  в узлах сетки по формулам

$$g_P^{\psi^k}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_k(x) dx - b_k + S \max 0, \text{sign}(-\psi_k), \quad k = \overline{1, N}; \quad (5.2.24)$$

$$g_P^{\tau^k}(\tau, \psi) = \int_{\Omega_k} W(x) \frac{\partial u_k(x, \tau_k)}{\partial \tau_k} dx, \\ \Omega_k = \{x \in \Omega: W(x) u_k(x, \tau_k) + \psi_k \rho(x) = \\ = \min_{i=1, N} W(x) u_i(x, \tau_i) + \psi_i \rho(x)\}, \quad k = \overline{1, N},$$

при  $\lambda = \lambda^{(0)}(\cdot), \psi = \psi^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}$ , выбираем начальный пробный шаг  $\beta_0 > 0$  для г-алгоритма и находим

$$\psi_i^{(1)} = \psi_i^{(0)} + \beta_0 g_P^{\psi^i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}); \\ \tau_i^{(1)} = \text{Pr}_{\Omega} \left[ \tau_i^{(0)} - \beta_0 g_P^{\tau^i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right], \quad i = \overline{1, N},$$

где  $\text{Pr}_{\Omega}$  – оператор проектирования на  $\Omega$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k, k=1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получены определенные значения  $\lambda^{(k-1)}(\cdot), \psi^{(0)}, \tau^{(0)}$  в узлах сетки. Опишем  $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения функции  $\lambda^{(k)}(\cdot)$  в узлах сетки по формулам (5.2.19) при  $\psi = \psi^{(k)}, \tau = \tau^{(k)}$ .

2. Вычисляем значение вектора градиента функции  $P(\tau, \psi)$  в узлах сетки по формулам (5.2.24) при  $\lambda = \lambda^{(k)}(\cdot), \psi = \psi^{(k)}, \tau = \tau^{(k)}$ .

3. Проводим  $(k+1)$ -й шаг алгоритма обобщенных почтиградиентов с растяжением пространства, близкого к г-алгоритму [109], краткая схема которого имеет вид:

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + \beta_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_P^{\psi}(\tau^{(k)}, \psi^{(k)});$$

$$\tau^{(k+1)} = \text{Pr}_{\Omega^N} \left[ \tau^{(k)} - \beta_k B_{k+1}^\tau \tilde{g}_P^\tau(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) \right],$$

где  $B_{k+1}^\psi$ ,  $B_{k+1}^\tau$  – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E^N$ , причем  $B_0^\psi = I_N$ ,  $B_0^\tau = I_N$  ( $I_N$  – единичная матрица),  $\tilde{g}_P^\psi = B_{k+1}^\psi \text{ }^T g_P^\psi(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ ,  $\tilde{g}_P^\tau = B_{k+1}^\tau \text{ }^T g_P^\tau(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ ,  $\beta_k$  – шаговой множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума по направлению. Формулы для пересчета матриц  $B_{k+1}^\psi$ ,  $B_{k+1}^\tau$  аналогичны приведенным в алгоритме п. 5.1.3.

4. Если условие

$$\left\| \tau^{(k)}, \psi^{(k)} - \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.2.25)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, иначе – к п. 5.

5. Полагаем  $\lambda^* = \lambda^{(l)}(\cdot)$ ,  $\psi^* = \psi^{(l)}$ ,  $\tau^* = \tau^{(l)}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (5.2.25). Вычисляем оптимальное значение целевой функции по формуле (5.2.23) при  $\psi = \psi^*$ ,  $\tau = \tau^*$  и – для контроля правильности счета – значение функционала (5.2.9) при  $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$ ,  $\tau = \tau^*$ .

Алгоритм описан.

### 5.2.3. Анализ результатов вычислительных экспериментов

В качестве тестовой задачи была рассмотрена следующая задача: требуется минимизировать функционал

$$V(u; \bar{\omega}, \tau) = \int_{\Omega} \varphi(x, t; u(x; \bar{\omega}, \tau)) \rho(x) dx, \quad u \in U, \quad (5.2.26)$$

где  $\Omega = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 4\}$ , функция  $\varphi = \varphi(x, t; u(x; \bar{\omega}, \tau))$  – решение краевой задачи

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + e^{-t} u(x; \bar{\omega}, \tau), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1], \quad (5.2.27)$$

$$\varphi(x, 0) = 4 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad (5.2.28)$$

$$\varphi(x, t) = 4 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times 0, 1, \quad (5.2.29)$$

где

$$U = u(x; \bar{\omega}, \tau) = u_i(x, \tau_i) \quad \forall x \in \Omega_i, \quad \bar{\omega} \in \hat{P}_N(\Omega), \tau \in \Omega^N, \quad (5.2.30)$$

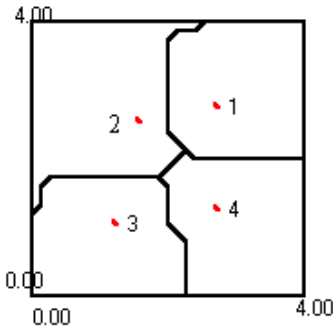
В качестве функций, определяющих множество допустимых управлений, выступали функции  $u_i(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|^2, \quad \forall x \in \Omega$ , в которых координаты точек  $\tau_i \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}$  заранее неизвестные,  $\|\cdot\|$  – евклидова метрика.

Данная задача была решена при различных заданиях числа подмножеств  $N$  и функции  $\rho(x)$ . Для численного решения этой задачи область  $\Omega$  покрывалась сеткой  $m \times m_1 = 20 \times 20$ . Вычисление координат центров подмножеств и вектора двойственных переменных производилось с точностью  $\varepsilon = 0.0001$ .

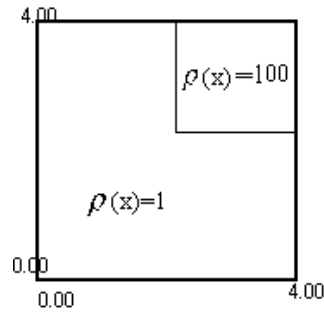
1. При решении задачи (5.2.26) – (5.2.30) в случае, когда  $N = 4$ , весовая функция  $\rho(x) \equiv 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad b_i = 100 \quad \forall i = \overline{1, N}$ , а в качестве начального приближения координат центров подмножеств и вектора двойственных переменных выступали  $\tau_i^{(0)} = (0, 0), \quad \psi_i^{(0)} = 1, \quad \forall i = \overline{1, 4}$ , за 68 итераций достигнуты оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач  $I^* = 44.470, \quad P^* = 44.4698$ . Начальное разбиение множества  $\Omega$ :  $\bar{\omega}^{(0)} = \Omega_1 \equiv \Omega; \quad \Omega_i = \emptyset, \quad \forall i = \overline{2, 4}$ . Ему соответствовало значение функционалов  $I^{(0)} = 77.506, \quad P^{(0)} = -306.431$ . Оптимальное разбиение квадрата представлено на рис. 5.4. Этому разбиению соответствуют следующие значения координат центров подмножеств:  $\tau_1^* = (2.723, 2.855), \quad \tau_2^* = (1.186, 2.675), \quad \tau_3^* = (1.232, 1.124), \quad \tau_4^* = (2.742, 1.335)$ . Для контроля правильности работы алгоритма были вычислены значения интегралов в левых частях ограничений неравенств:

$$\int_{\Omega_1^*} \rho(x) dx = 3.845, \quad \int_{\Omega_2^*} \rho(x) dx = 4.1875, \\ \int_{\Omega_3^*} \rho(x) dx = 3.75, \quad \int_{\Omega_4^*} \rho(x) dx = 4.2813.$$

2. Эта же задача была решена в случае, когда весовая функция  $\rho$   $x$  не являлась постоянной на всей области, а имела вид, представленный на рис. 5.5.



**Рис. 5.4**



**Рис. 5.5**

Исходя из тех же начальных приближений координат центров подмножеств и двойственных переменных, на 203-й итерации получен следующий результат: оптимальное значение функционала прямой задачи ОРМ  $I^* = 526.650171$ , при этом двойственный функционал  $P^* = 526.65$ ; координаты центров подмножеств:  $\tau_1^* = (2.433, 2.176)$ ,  $\tau_2^* = (0.949, 2.09)$ ,  $\tau_3^* = (0.674, 0.914)$ ,  $\tau_4^* = (1.69, 0.87)$ ; вектор двойственных переменных  $\psi^* = (0, 0, 0.154, 0)$ ; левые части ограничений неравенств равны соответственно 51.5, 71.75, 100, 96. Значения же функционалов прямой и двойственной задач на нулевой итерации составляли  $I^{(0)} = 850.05$ ,  $P^{(0)} = 769.2$ . Оптимальное разбиение  $\Omega$  изображено на рис. 5.6.

3. На рис. 5.7 представлено оптимальное разбиение прямоугольника  $\Omega = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 8, 0 \leq x_2 \leq 4\}$  на  $N=8$  подмножеств и расположение их центров для задачи (5.2.26) – (5.2.30), в которой весовая функция  $\rho(x) \equiv 1 \forall x \in \Omega$ , а вектор правых частей ограничений неравенств имеет вид:  $b_7 = 1$ ,  $b_i = 20 \forall i \neq 7$ .

Оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач равны  $I^* = 147.9902$ ,  $P^* = 147.9516$ . Найденные координаты центров подмножеств равны:  $\tau_1^* = (4.38, 2.74)$ ,  $\tau_2^* = (6.77, 1.26)$ ,  $\tau_3^* = (5.11, 1.25)$ ,  $\tau_4^* = (1.08, 1.89)$ ,  $\tau_5^* = (3.30, 1.23)$ ,  $\tau_6^* = (2.44, 2.77)$ ,  $\tau_7^* = (1.91, 1.02)$ ,  $\tau_8^* = (6.38, 2.77)$ . Следует заметить, что данный результат получен исходя из различных начальных приближений координат центров подмножеств и вектора двойственных переменных.

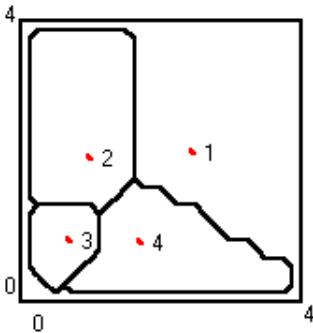


Рис. 5.6

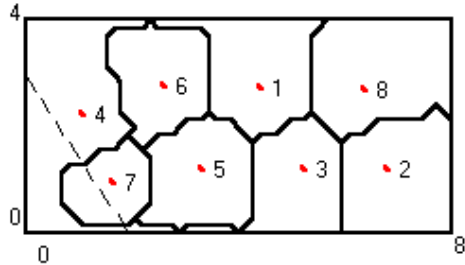


Рис. 5.7

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что:

- 1) во всех задачах выполняется с достаточной точностью основное соотношение двойственности ( $I^* \geq P^*$ );
- 2) в каждом из примеров имеет место выполнение условия дополняющей нежесткости:

$$\psi_i^* \left( \int_{\Omega_i^*} \rho(x) dx - b_i \right) = 0 \quad \forall i.$$

### 5.3. ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СВЕДЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ К ДИНАМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

В этом разделе описан еще один способ сведения задач управления, подобных задаче (5.1.1) – (5.1.5), к непрерывным линейным задачам оптимального разбиения множества. Этот способ основан на использовании аппарата сопряженных задач, разработанных Г. И. Марчуком [77], и не требует знания функции Грина для краевых задач.

#### 5.3.1. Постановка задачи стартового управления и ее эквивалент в терминах теории оптимального разбиения множеств

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: пусть на

некотором ограниченном измеримом по Лебегу множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  задан набор функций  $\varphi_{0i}(x) \in L_2(\Omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Требуется:

$$V_{\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})} = \int_{\Omega} \varphi(x, T; \varphi_0(x, \bar{\omega})) \rho(x) dx \rightarrow \min_{\varphi_0(\cdot, \bar{\omega}) \in \Phi}, \quad (5.3.1)$$

где функция  $\varphi(x, t; \bar{\omega})$  является решением краевой задачи

$$\partial\varphi(x, t)/\partial t + \sigma\varphi(x, t) = \mu\Delta\varphi(x, t) + f(x, t), \quad (5.3.2)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x, \bar{\omega}), \quad \varphi_0(x, \bar{\omega}) \in \Phi, \quad (5.3.3)$$

$$\varphi(x, t) = g(x, t) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (5.3.4)$$

$$\Phi \equiv \varphi_0(x, \bar{\omega}): \varphi_0(x, \bar{\omega}) = \varphi_{0i}(x) \text{ п. в. для } x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N,$$

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \bar{\omega} = \Omega_1, \dots, \Omega_N \in P_N(\Omega): \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \right\}; \quad (5.3.5)$$

где  $\rho(x)$  – заданная действительная неотрицательная функция,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – оператор Лапласа;  $\sigma, \mu \geq 0$  – заданные константы;

$g(x, t) \in L_2 \partial\Omega \times [0, T]$ ,  $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  – заданные функции,

$b_1, b_2, \dots, b_N$  – заданные числа;  $T > 0$  – фиксированная длительность управляемого процесса.

Будем считать, что каждое допустимое разбиение  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$  определяет начальную функцию  $\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})$  такую, что соответствующая ей краевая задача (5.3.2) – (5.3.5) имеет единственное решение  $\varphi(x, t)$ .

Для задачи (5.3.1) – (5.3.5) построим сопряженную задачу, используя технику, описанную в [77], или на основе тождества Лагранжа. С этой целью умножим уравнение (5.3.2) на некоторую функцию  $\varphi^*(x, t)$ , свойства которой уточним позднее, и результат проинтегрируем по времени и пространству:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \partial\varphi(x, t)/\partial t + \sigma\varphi(x, t) - \mu\Delta\varphi(x, t) \varphi^*(x, t) dx dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \varphi^*(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$



Левую часть этого равенства преобразуем так, чтобы за скобками под интегралом стояла функция  $\varphi(x, t)$ , а в скобках – дифференциальное соотношение, содержащее функцию  $\varphi^*(x, t)$ . С этой целью воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt = \int_{\Omega} \varphi^* \varphi dx \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} dx dt \quad (5.3.7)$$

и формулой Грина

$$\mu \int_0^T \int_{\Omega} \varphi^* \Delta \varphi dx dt = \mu \int_0^T \int_{\Omega} \varphi^* \Delta \varphi dx dt + \mu \int_0^T \int_{\partial \Omega} \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) dx dt. \quad (5.3.8)$$

Подставляя (5.3.7) и (5.3.8) в (5.3.6), получим:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \varphi(x, t) \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega} \varphi(x, T) \cdot \varphi^*(x, T) dx - \int_{\Omega} \varphi(x, 0) \cdot \varphi^*(x, 0) dx - \\ & - \mu \int_0^T \int_{\Omega} \varphi^* \Delta \varphi dx dt + \mu \int_0^T \int_{\partial \Omega} \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) dx dt + \sigma \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \varphi^* dx dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \varphi^*(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая начальные и граничные условия (5.3.3), (5.3.4) и приведя подобные слагаемые, приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \varphi(x, t) \left[ -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma \varphi^* - \mu \Delta \varphi^* \right] dx dt + \int_{\Omega} \varphi(x, T) \varphi^*(x, T) dx + \\ & + \int_0^T \int_{\partial \Omega} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \varphi^*(x, t) dx dt - \int_0^T \int_{\partial \Omega} g(x, t) \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dx dt + \\ & + \int_{\Omega} \varphi_0(x, \bar{\omega}) \varphi^*(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Предположим, что функция  $\varphi^*(x, t)$  удовлетворяет краевой задаче

$$-\frac{\partial \varphi^*(x, t)}{\partial t} + \sigma \varphi^*(x, t) - \mu \Delta \varphi^*(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times 0, T, \quad (5.3.9)$$

$$\varphi^*(x, T) = \rho(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.3.10)$$

$$\varphi^*(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial \Omega \times 0, T. \quad (5.3.11)$$

Тогда функционал (5.3.11) исходной задачи управления может быть записан в виде:

$$V(\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})) = \int_{\Omega} \varphi(x, T; \varphi_0(x, \bar{\omega})) \rho(x) dx = \int_{\Omega} \varphi^*(x, 0) \varphi_0(x, \bar{\omega}) dx +$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega} \varphi^*(x, t) f(x, t) dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(x, t) \frac{\partial \varphi^*(x, t)}{\partial n} dx dt .$$

Правая часть этого выражения и представляет собой двойственное представление функционала  $V(u(\cdot, \bar{\omega}))$ , и вместо исходной задачи управления можно рассматривать эквивалентную задачу

$$\bar{V}(\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})) = \int_{\Omega} \varphi^*(x, 0) \varphi_0(x, \bar{\omega}) dx + I_1 \rightarrow \min_{\varphi_0(\cdot, \bar{\omega}) \in \Phi} , \quad (5.3.12)$$

где  $\varphi^*(x, t)$  – решение задачи (5.3.9) – (5.3.11), а

$$I_1 = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi^*(x, t) f(x, t) dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(x, t) \frac{\partial \varphi^*(x, t)}{\partial n} dx dt .$$

Далее, учитывая структуру множества допустимых управлений  $\Phi$ , перейдем к эквивалентной линейной непрерывной задаче ОРМ: среди всех возможных разбиений  $\bar{\omega}$  множества  $\Omega$  ( $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$ ) найти такое, при котором достигается минимальное значение функционала

$$F(\bar{\omega}) = F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) \varphi^*(x, 0) dx + I_1 ,$$

где  $\varphi^*(x, t)$  является решением задачи (5.3.71) – (5.3.73).

Коротко эту задачу можно записать так:

$$F \bar{\omega} \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N} . \quad (5.3.13)$$

**Замечание.** Для того чтобы класс допустимых разбиений задачи (5.3.13) не был пуст, достаточно выполнения условия утверждения 5.3.

### **5.3.2. Совокупность соотношений, характеризующих оптимальное разбиение**

В соответствии с методом решения линейных непрерывных задач ОРМ, описание которого приведено в п. 5.1.3, от задачи (5.3.13) переходим к эквивалентной задаче бесконечного программирования с булевыми переменными:

$$I(\lambda(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \varphi^*(x, 0) dx + I_1 \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_1} , \quad (5.3.14)$$

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \quad \text{п. в. для } x \in \Omega; \right.$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \Big\},$$

а затем – к непрерывной задаче бесконечномерного программирования:

$$I(\lambda(\cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_2}, \quad (5.3.15)$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda(x) \in \Lambda_0; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N} \right\},$$

где

$$\Lambda_0 = \lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \quad i = \overline{1, N}.$$

Под функционалом Лагранжа задачи (5.3.15) будем понимать функционал

$$h \lambda(\cdot), \psi = I \lambda(\cdot) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \rho(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right), \quad (5.3.16)$$

где  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \Gamma = \psi \in \mathbb{R}^N : \psi_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}$ ,  $\lambda(x) \in \Lambda_0$ .

Задача, двойственная к задаче (5.3.15), записывается в виде:

$$Q(\psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h(\lambda(\cdot), \psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Gamma}. \quad (5.3.17)$$

Учитывая линейность функционала Лагранжа по  $\lambda(\cdot)$  и структуру множества  $\Lambda_0$ , решение внутренней задачи (5.3.17) по  $\lambda(\cdot)$  для каждого  $\psi \in \Gamma$  запишем в виде:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega_i^*, \\ 0, & \text{если } x \in \Omega \setminus \Omega_i^*, \end{cases} \quad (5.3.18)$$

где

$$\Omega_i^* = \left\{ x \in \Omega : \varphi^*(x, 0) \varphi_{0i}(x) + \rho(x) \psi_i = \min_{k=1, N} \varphi^*(x, 0) \varphi_{0k}(x) + \rho(x) \psi_k \right\}.$$

Из вида оптимального решения (5.3.18) внутренней задачи (5.3.17) следует

**Теорема 5.3.** Для того чтобы возможное разбиение  $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*)$  было оптимальным для задачи (5.3.17), необходимо и достаточно существование вектора действительных констант  $\psi \in \Gamma$ , таких что

$$\varphi^*(x, 0)\varphi_{0i}(x) + \rho(x)\psi_i \leq \varphi^*(x, 0)\varphi_{0k}(x) + \rho(x)\psi_k, \quad i \neq k, \quad (5.3.19)$$

для п. в. для  $x \in \Omega_i^*$ ,  $i, k = \overline{1, N}$ .

**Следствие.** В точках  $x \in \Omega$ , принадлежащих оптимальной границе между подмножествами  $\Omega_i^*$  и  $\Omega_k^*$ , в неравенстве (5.3.19) достигается знак равенства.

Из вышесказанного следует

**Теорема 5.4.** Седловая точка функционала Лагранжа  $h(\lambda(\cdot), \psi)$  (где первая компонента является решением задачи (5.3.14)), на множестве  $\Lambda_0 \times \Gamma$  определяется для  $i = \overline{1, N}$  и п. в.  $x \in \Omega$  следующим образом:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega_i^*, \\ 0, & \text{если } x \in \Omega \setminus \Omega_i^*, \end{cases} \quad (5.3.20)$$

где

$\Omega_i^* = \left\{ x \in \Omega : \varphi^*(x, 0)\varphi_{0i}(x) + \rho(x)\psi_i^* = \min_{k=1, N} \left[ \varphi^*(x, 0)\varphi_{0k}(x) + \rho(x)\psi_k^* \right] \right\}$ , где  $\varphi^*(x, t)$  является решением задачи (5.3.9) – (5.3.11), а в качестве  $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение двойственной задачи, приведенной к виду:

$$Q(\psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Gamma}, \quad (5.3.21)$$

$$Q(\psi) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + I_1 + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} \varphi^*(x, 0)\varphi_{0k}(x) + \rho(x)\psi_k \, dx.$$

Для решения задачи (5.3.21) применим г-алгоритм Шора [109]. При этом от задачи условной оптимизации совершается переход к задаче безусловной максимизации с помощью введения в целевую функцию негладкой штрафной функции множества  $\Gamma$ :

$$P(\psi) = Q(\psi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\psi_i)) \rightarrow \max_{\psi \in E^N}, \quad (5.3.22)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число.

### 5.3.3. Численный алгоритм решения задачи

1. Область  $\Omega$  покрываем прямоугольной  $m \times ml$  сеткой и задаем начальное приближение переменных  $\psi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Решаем каким-либо численным методом задачу (5.3.9) – (5.3.11).

2. Вычисляем  $\lambda_i^{(0)}(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, N}$  в узлах сетки по формуле (5.3.20) при  $\psi_i = \psi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

3. Вычисляем значение обобщенного градиента функции  $P(\psi)$  в точке  $\psi = (\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_N^{(0)})$  по формулам:

$$g_P^{\psi_i} = -b_i + \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - S \max 0, (-\text{sign}(\psi_i)) \quad (5.3.23)$$

при  $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot)$ ,  $\psi_i = \psi_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

4. Выбирая начальный шаг  $h_0 > 0$  г-алгоритма, находим:

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_P^{\psi}(\psi^{(0)}).$$

и переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  шагов алгоритма получены определенные значения  $\psi^{(k)}$ ,  $\lambda^{(k-1)}(\cdot)$  в узлах сетки.

Опишем  $(k+1)$ -й шаг:

а) вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(\cdot)$  в узлах сетки по формулам (5.3.20) при  $\psi = \psi^{(k)}$ ;

б) вычисляем значение  $g_P^{\psi}(\psi^{(k)})$  по формулам (5.3.23) при  $\psi = \psi^{(k)}$ ;

в) проводим  $(k+1)$ -й шаг г-алгоритма для максимизации функции  $P(\psi)$ , краткая схема которого имеет вид:

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_P^{\psi}(\psi^{(k)}),$$

где  $B_{k+1}^{\psi}$  – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E_N$ , пересчет которого осуществляется по формулам, приведенным в алгоритме п. 5.1.3;  $h_k$  – шаговый множитель, выбираемый из условия максимума по направлению;

г) проверяем условия  $\|g_P^{\psi}(\psi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon$  или  $\|\psi^{(k)} - \psi^{(k+1)}\| \leq \varepsilon$ . Если ни одно из этих условий не выполняется, то переходим к  $(k+2)$ -му шагу, иначе – к пункту д);

д) полагаем  $\lambda_*(\cdot) = \lambda^{(l)}(\cdot)$ ,  $\psi^* = \psi^{(l)}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполняется хотя бы один из критериев окончания итерационного процесса. Вычисляем оптимальное значение функционала (5.3.14) и значение функции (5.3.21) при  $\lambda(\cdot) = \lambda^*$ ,  $\psi = \psi^*$ . Алгоритм описан.

### 5.3.4. Результаты решения модельных задач.

#### Сравнительная характеристика двух подходов к сведению задач управления к динамическим задачам оптимального разбиения множеств

Описанный в п. 5.3.3 алгоритм и его модификации (на случай решения задач управления, в которых функция управления входит в правую часть дифференциального уравнения, задач управления, сводящихся к задачам ОРМ с размещением центров подмножеств) реализованы в виде программного продукта, который включен в разработанный комплекс программ OU\_ORM, ориентированный на решение задач оптимального управления с линейным функционалом, сводящихся к задачам ОРМ.

В программной реализации этих алгоритмов предусмотрена возможность выбора одного из двух приближенных методов решения краевой задачи (5.3.2) – (5.3.3): явной разностной схемы и метода переменных направлений (схема Писмена – Рекфорда). Как известно, явная разностная схема удобна для численной реализации, однако обладает и существенными недостатками. Во-первых, эта схема имеет лишь второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, первый – по временной. Во-вторых, эта схема устойчива лишь при условии

$$\frac{\tau}{\min(h_x^2, h_y^2)} \leq \frac{1}{4},$$

дающем связь между шагами по пространственным и временной переменным  $h_x$ ,  $h_y$  и  $\tau$ , т. е. схема условно устойчива. Порядок точности схемы совпадает с порядком аппроксимации.

Продольно-поперечная схема Писмена – Рекфорда безусловно устойчива, экономична (требующая для перехода со слоя на слой затраты числа арифметических действий, пропорционального числу узлов сетки). Кроме того, метод переменных направлений имеет второй порядок точности.

Следует отметить, что для решения задачи (5.3.2) – (5.3.4) можно использовать и другие известные численные методы, например, экономичные факторизованные схемы, метод суммарной аппроксимации, методы расщепления и т. д.

В качестве одной из **тестовых** была рассмотрена **задача**: найти такое разбиение  $\bar{\omega}^*$  квадрата  $\Omega = (x, y): 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4$  на  $N = 4$  подмножеств, при котором

$$V(\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})) = \int_{\Omega} \varphi(x, 1; \varphi_0(x, \bar{\omega})) \rho(x) dx \rightarrow \min_{\varphi_0(\cdot, \bar{\omega}) \in \Phi}, \quad (5.3.24)$$

где  $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$  – решение задачи

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \Delta \varphi(x, t) + 10e^{-t}; \quad (5.3.25)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x, \bar{\omega}), \quad \varphi_0(x, \bar{\omega}) \in \Phi, \quad (5.3.26)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t \in [0, T]. \quad (5.3.27)$$

Функции  $\varphi_{0i}(x)$ , определяющие множество допустимых управлений, имеют следующий вид:

$$\varphi_{0i}(x) = \|x - \tau_i\|^2 = x_1 - \tau_{1i}^2 + x_2 - \tau_{2i}^2, \quad i = \overline{1, N}, \quad (5.3.28)$$

где  $\tau_1 = (1, 2)$ ,  $\tau_2 = (2, 1)$ ,  $\tau_3 = (2, 3)$ ,  $\tau_4 = (3, 2)$ . Вектор правых частей ограничений равен  $b = (2; 20; 0.7; 20)$ , начальное приближение вектора двойственных переменных –  $\psi^{(0)} = (1, 1, 1)$ .

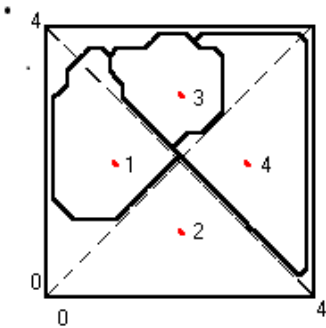


Рис. 5.8

Для численного решения этой задачи область  $\Omega$  покрывалась сеткой  $m \times m_1 = 20 \times 20$ . Двойные интегралы, входящие в формулы для определения функций  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , значения функционала  $P(\psi)$  и его вектора-градиента в точке  $\psi$  вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций по узлам сетки. Начальное разбиение квадрата представлено на рис. 5.8 пунктирной линией.

Разбиение  $\Omega$ , соответствующее оптимальной функции управления, изображено на рис. 5.8 сплошной линией. Информация о количестве итераций, времени счета, значении целевых функционалов прямой и двойственной задач, двойственных переменных, полученных с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ , содержится в таблице 5.2.

Для сравнения в этой таблице приведены результаты решения задачи (5.3.24) – (5.3.28) с помощью алгоритма, описанного в п. 5.3.3.

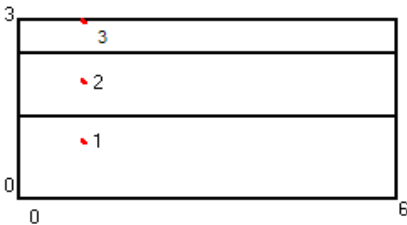
Приведем результаты решения задачи (5.3.25) – (5.3.28), в которой  $\Omega = (x, y): 0 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 3$ ,  $N = 8$ ,  $b_i = 10$ ,  $i = \overline{1, 8}$ , функции  $\varphi_{0i}(x, \bar{\omega}, \tau_i)$ , определяющие класс допустимых управлений, заданы в виде (5.3.28), а параметры  $\tau_i \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, 8}$  заранее неизвестны. Как следу-

ет из изложенного в разделе 5.2, эта задача сводится к задаче оптимального разбиения с размещением центров подмножеств. Начальное разбиение множества  $\Omega$ , изображено на рис. 5.9,а. Там же указаны начальные приближения координат центров подмножеств. На рис. 5.9,б представлено разбиение, соответствующее функции оптимального управления рассматриваемой задачи.

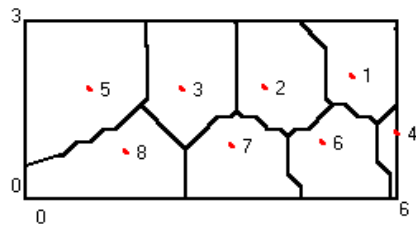
*Таблица 5.2*

**Сравнительный анализ результатов работы двух алгоритмов**

Алгоритм включает решение краевой задачи с помощью:	Число итераций	Значение функционала прямой задачи	Значение функционала двойственной задачи	Вектор двойственных переменных	Время счета
Явной разностной схемы	43	7.9885	37.9921	0.1500 0.0000 0.4108 0.0000	8 сек.
Метода переменных направлений	43	38.0027	38.0013	0.1535 0.0000 0.4094 0.0000	11 сек.
Функции Грина	34	37.9307	37.9333	0.1501 0.0000 0.4112 0.0000	3 мин. 48 сек.



**Рис. 5.9,а**



**Рис. 5.9,б**

В табл. 5.3 приведены данные об оптимальных значениях функционалов прямой и двойственной задач, координат центров подмножеств, а также количестве итераций и времени счета. Все вычисления проводились с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ .



Таблица 5.3

Сравнительный анализ результатов работы алгоритмов решения задачи управления, сводящейся к задаче ОРМ с размещением центров подмножеств

Алгоритм включает	Число итераций	Значение функционала прямой задачи	Значение функционала двойственной задачи	Координаты центров подмножеств		Время счета
				x	y	
Решение сопряженной задачи	192	39.5222	39.5217	3.5512	0.9416	17 сек.
				3.9563	2.0036	
				2.8310	2.0359	
				5.0763	1.9978	
				1.5074	2.1079	
				4.7920	0.9148	
				2.3215	0.9816	
				1.0106	1.0812	
Аналитическое решение исходной краевой задачи с помощью функции Грина	198	39.4183	39.4177	4.7875	2.0863	14 мин. 08 сек.
				3.5375	2.0144	
				2.3111	2.0025	
				5.0723	1.0032	
				1.0422	1.9831	
				3.0755	0.9797	
				2.7247	0.9490	
				1.3382	0.9050	

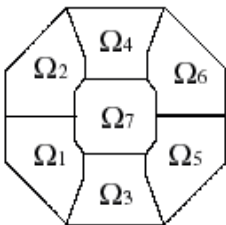


Рис. 5.10

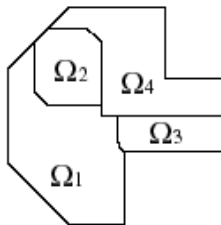


Рис. 5.11

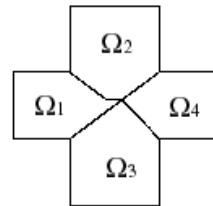


Рис. 5.12

Анализируя информацию, содержащуюся в табл. 5.3 и 5.2, а также результаты многочисленных вычислительных экспериментов, описание которых не представляется возможным, можно сделать вывод, что к достоинствам описанного в данном разделе алгоритма относится:

– время, затраченное на решение задачи ОРМ, значительно меньше времени, за которое получено оптимальное решение с помощью алгоритма, включающего аналитическое решение;

– значения функционалов прямой и двойственной задач, а также оптимальные разбиения множества с достаточной точностью совпадают с результатами решения соответствующих задач с помощью описанных в предыдущих параграфах алгоритмов.

К преимуществам данного алгоритма относится и тот факт, что его можно применять и для задач управления с областью  $\Omega$ , имеющей достаточно сложную форму (отличную от прямоугольника).

Так например, на рис. 5.10 представлено разбиение множества  $\Omega$ , представляющего собой правильный восьмиугольник, вписанный в прямоугольник  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 4\sqrt{3}\}$ , соответствующее оптимальному решению задачи (5.3.25) – (5.3.28), в которой  $\varphi_{0i}(x) = \|\bar{x} - \tau_i\|^2$ ,  $i = \overline{1, 7}$ ;  $\bar{x} \in \Omega$ ;  $\tau_1 = (2; 2.309)$ ;  $\tau_2 = (2; 4.619)$ ;  $\tau_3 = (4; 1.155)$ ;  $\tau_4 = (4; 5.774)$ ;  $\tau_5 = (6; 2.309)$ ;  $\tau_6 = (6; 4.619)$ ;  $\tau_7 = (4; 3.464)$ ;  $b = (10; 10; 10; 10; 10; 10; 10)$ . Здесь и в следующих примерах функция граничных условий  $g(x, t) \equiv 0$ , функция источника имеет вид  $f(x, t) = \exp(-x - y)$ ; а начальные приближения координат вектора двойственных переменных  $\psi_i^{(0)} = 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ . За 64 итерации были достигнуты оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач  $I^* = 193.7466$ ,  $P^* = 193.7371$ .

При решении задачи (5.3.25) – (5.3.28) с областью  $\Omega$ , изображенной на рис. 5.11, со следующими входными данными:  $\varphi_{0i}(x) = \|\bar{x} - \tau_i\|^2$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ;  $\bar{x} \in \Omega$ ;  $\tau_1 = (1; 1)$ ,  $\tau_2 = (1; 3)$ ,  $\tau_3 = (3; 1)$ ,  $\tau_4 = (3; 3)$ ,  $b = (10; 2; 20; 20)$ , за 32 итерации достигнуты оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач  $I^* = 5.0734$ ,  $P^* = 5.0536$ .

На рис. 5.12 изображено разбиение множества  $\Omega$ , соответствующее оптимальному решению задачи (5.3.25) – (5.3.28) в случае, когда  $\varphi_{0i}(x) = \|\bar{x} - \tau_i\|^2$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ;  $\bar{x} \in \Omega$ ;  $\tau_1 = (1; 2)$ ,  $\tau_2 = (2; 3)$ ,  $\tau_3 = (2; 1)$ ,  $\tau_4 = (3; 2)$ ,  $b = (3; 3; 3; 3)$ . За 35 итераций с точностью  $\varepsilon = 0.001$  достигнуто оптимальное значение функционала  $I^* = 1.2524$ .

*5.4. НЕПРЕРЫВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ  
ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО  
РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ КАК МОДЕЛИ  
НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ*

В данном разделе рассмотрена задача стартового управления линейной пространственно-двумерной системой с квадратичным критерием качества, сводящаяся с помощью аппарата функций Грина к нелинейной непрерывной задаче оптимального разбиения. Построен и теоретически обоснован алгоритм решения этой задачи. Дана оценка погрешности, возникающей за счет приближенного вычисления функции Грина.

**5.4.1. Постановка модельной задачи восстановления  
разрывных начальных условий для параболического  
уравнения**

На некотором ограниченном замкнутом множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  задан набор функций  $\Phi = \varphi_{0i}(\cdot) \in L^2(\Omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Пусть состояние объекта  $\varphi(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$  определяется как решение задачи (5.1.1) – (5.1.4).

Требуется определить такое начальное распределение на  $\Omega$  температуры  $\varphi_0(\cdot)$ , при котором функционал

$$V \varphi_0(\cdot) = \int_{\Omega} \varphi(x, T) - Z(x)^2 dx, \quad (5.4.1)$$

где  $Z(\cdot) \in L^2(\Omega)$  – заданная функция,  $T > 0$  – фиксированная длительность нагрева области  $\Omega$ , достигал бы минимального значения.

Для корректности постановки задачи потребуем, чтобы вектор правых частей ограничений-неравенств (5.1.3) удовлетворял условию (5.1.6) (см. лемму 5.1).

**Замечание.** Задачу минимизации функционала (5.4.1) при условиях (5.1.1) – (5.1.4) можно отнести к классу обратных задач математической физики, так как в ней по известному распределению тепла в области  $\Omega$  в момент времени  $T$  необходимо восстановить информацию о начальном температурном режиме. При этом дополнительно известно, что температура в начальный момент времени может быть описана в некоторых по-

добластях области  $\Omega$  одной из заданных функций. Эта дополнительная информация и дает возможность классифицировать сформулированную задачу (5.4.1), (5.1.1) – (5.1.4) как непрерывную нелинейную динамическую задачу оптимального разбиения множеств.

### 5.4.2. Сведение обратной задачи к непрерывной задаче оптимального разбиения множества

Используя методику сведения, описанную в подразделе 5.1.2, от задачи стартового управления (5.1.1) – (5.1.4), (5.4.1) переходим к следующей задаче ОРМ: разбить  $\Omega$  на  $N$  непересекающихся подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N \in P_N(\Omega)$  так, чтобы достигалось минимальное значение функционала

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x') G(x, x', T) dx' + \bar{Z}(x) \right]^2 dx, \quad (5.4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{Z}(x) = & -Z(x) + \int_0^T \int_{\Omega} G(x, x', T - \theta) f(x', \theta) dx' d\theta + \\ & + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, x', T - \theta)}{\partial n} g(x', \theta) dx' d\theta, \end{aligned}$$

и выполнялись ограничения

$$\int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5.4.3)$$

Далее от задачи (5.4.2), (5.4.3) переходим к эквивалентной задаче бесконечномерного программирования с булевыми переменными: найти вектор-функцию  $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)$ , минимизирующую функционал

$$I \lambda(\cdot) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x') G(x, x', T) \lambda_i(x') dx' + \bar{Z}(x) \right\}^2 dx \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_1}, \quad (5.4.4)$$

где

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \right.$$

$$\text{п. в. для } x \in \Omega; i = \overline{1, N}; \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N} \Big\}.$$

Наряду с задачей (5.4.4) будем рассматривать задачу

$$I \lambda(\cdot) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_2}, \tag{5.4.5}$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda(x) \in \Lambda_0; \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N} \right\},$$

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) : \sum_{i=1}^N \right.$$

$$\left. \text{п. в. для } x \in \Omega; i = \overline{1, N} \right\}.$$

в предположении, что эта задача разрешима, и множество ее решений содержит все решения задачи (5.4.4). Условия, при которых это выполняется, будут приведены ниже.

**Определение.** Будем говорить, что задача (5.4.5) удовлетворяет условию Слейтера, если существует точка  $\tilde{\lambda}(\cdot) \in \Lambda_0$ , для которой

$$\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \tilde{\lambda}_i(x) dx < b_i, i = \overline{1, N}.$$

**Лемма 5.1.** Если в задаче (1.1) – (1.4) константы  $b_1, \dots, b_N$  удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx,$$

где  $\bar{\varphi}_0(x) = \max_{i=\overline{1, N}} \varphi_{0i}(x)$ , то для задачи (5.4.5) выполняется условие Слейтера.

**Доказательство.** Для каждого  $x \in \Omega$  рассмотрим вектор-функцию  $\bar{\lambda}(x)$ ,  $i$ -я компонента которой определяется по формуле:

$$\bar{\lambda}_i(x) = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Функция  $\bar{\lambda}(x) \in \Lambda_0$ , так как  $0 \leq \bar{\lambda}_i(x) \leq 1$  для всех  $i = \overline{1, N}$  и

$$\sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i(x) = \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j} = 1.$$

Пусть выполнено условие леммы, то есть  $\sum_{i=1}^N b_i > \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx$ .

Тогда

$$\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \bar{\lambda}_i(x) dx = \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j} dx \leq \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx < b_i, \quad i=1, \bar{N},$$

что и требовалось доказать.

### **5.4.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности редуцированной задачи оптимального разбиения множества**

Нетрудно показать, что функционал  $I \lambda(\cdot)$  является выпуклым по  $\lambda(\cdot)$  на выпуклом замкнутом ограниченном множестве  $\Lambda_2$ , следовательно, задача (5.4.5) является задачей выпуклого программирования и для нее справедлива теорема Куна – Таккера [22]. Согласно этой теореме решение задачи (5.4.5) сводится к поиску седловой точки функционала Лагранжа этой задачи, который имеет вид:

$$\begin{aligned} h \lambda(\cdot), \psi &= I \lambda(\cdot) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right) = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N \int G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right]^2 + 2\bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N \int G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right\} dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i, \end{aligned}$$

где  $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ ;  $\psi \in \Gamma = \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ :  $\psi_i \geq 0, i = \bar{1}, \bar{N}$ .

Задача, двойственная задаче (5.4.5), запишется в виде:

$$Q(\psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Gamma}, \tag{5.4.6}$$

$$\begin{aligned}
 Q(\psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h \lambda(\cdot), \psi = & -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \\
 & + \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \left\{ \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right]^2 + \right. \\
 & \left. + 2\bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right\} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi_i \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \Big\}. \quad \text{Для}
 \end{aligned}$$

решения внутренней задачи

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h \lambda(\cdot), \psi \tag{5.4.7}$$

воспользуемся необходимым и достаточным условием оптимальности, которое дает следующая теорема [104].

**Теорема 5.5.** Для того чтобы  $\lambda^0(x) \in \Lambda_0$  была решением задачи (5.4.7), необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda^0(x)$  удовлетворяла условию

$$\min_{\lambda(x) \in \Lambda_0} \int_{\Omega} \left[ H^\lambda \lambda^0(x), \psi, \lambda(x) - \lambda^0(x) \right] dx = 0, \tag{5.4.8}$$

где  $H_j^\lambda \lambda(\bar{x})$  – градиент функционала  $h \lambda(\cdot), \psi$  по переменной  $\lambda(\cdot)$ ,  $j$ -я компонента которого вычисляется по формуле:  $\forall \bar{x} \in \Omega$

$$\begin{aligned}
 H_j^\lambda \lambda(\bar{x}) = & 2\varphi_{0j}(\bar{x}) \times \left\{ \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, \bar{x}, T) dx + \frac{1}{2} \psi_j + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} G(x, x', T) G(x, \bar{x}, T) dx \right] \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right\}.
 \end{aligned}$$

Далее, на основе условий оптимальности (5.4.8) получим операторное уравнение для оптимальной вектор-функции  $\lambda^0(x')$ ,  $x' \in \Omega$ . По теореме 5.5, если  $\lambda^0(x) \in \Lambda_0$  – решение задачи (5.4.7), то имеет место равенство

$$\min_{\lambda(x) \in \Lambda_0} \int_{\Omega} H^\lambda \lambda^0(x), \psi, \lambda(x) - \lambda^0(x) dx = 0.$$

**Определение.** Будем говорить, что функционал  $h \lambda(\cdot), \psi$  удовлетворяет **условию сильной регулярности**, если

$$H_j^\lambda \lambda^0(x), \psi \neq 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega,$$

за исключением множества точек  $x \in \Omega$  нулевой меры.

Это условие означает, что для оптимальной вектор-функции ни на одном множестве точек  $x \in \Omega$  ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений Эйлера  $H_j^\lambda \lambda^0(x), \psi = 0$  для задачи минимизации по  $\lambda(\cdot)$  функционала  $h \lambda(\cdot), \psi$  без ограничений.

Запишем условие (5.4.8) в виде:

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^N H_i^\lambda \lambda^0(x), \psi \lambda_i(x) \right) dx = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^N H_i^\lambda \lambda^0(x), \psi \lambda_i^0(x) \right) dx.$$

Вектор-функция  $\lambda^*(x)$ , удовлетворяющая этому равенству, такова, что почти для всех  $x \in \Omega$  имеет место

$$H_i^\lambda \lambda^0(x), \psi \lambda_i^*(x) = \min_{0 \leq z_i \leq 1} H_i^\lambda \lambda^0(x), \psi z_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega$$

Отсюда получим, что при выполнении условия

$$\text{mes } x \in \Omega: H_i^\lambda \lambda(x), \psi = H_j^\lambda \lambda(x), \psi, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N} = 0 \quad (5.4.9)$$

вектор-функция  $\lambda^*(x)$  определяется очевидным образом:  $\forall x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } H_i^\lambda \lambda^*(x), \psi = \min_{j=1, N} H_j^\lambda \lambda^*(x), \psi, \\ \forall \alpha \in [0, 1], & \text{при } H_i^\lambda \lambda^*(x), \psi = 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При выполнении условия сильной регулярности  $H_i^\lambda \lambda(\cdot), \psi = 0$  лишь на множестве точек  $x \in \Omega$  нулевой меры, следовательно, вектор-функция  $\lambda^*(\cdot)$  определяется единственным образом по формуле  $\forall x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & H_i^\lambda \lambda^0(x), \psi = \min_{j=1, N} H_j^\lambda \lambda^0(x), \psi, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5.4.10)$$

Справедливы следующие теоремы [104].

**Теорема 5.6.** Для того чтобы было выполнено условие оптимальности (5.4.8), необходимо при выполнении условий сильной регулярности и (5.4.9), чтобы  $\lambda^0(x) = \lambda^*(x)$ , где равенство двух вектор-функций понимается в смысле равенства нулю нормы разности этих вектор-функций, а вектор-функция  $\lambda^*(x)$  определяется по формуле (5.4.10).



**Теорема 5.7.** Если условие оптимальности (5.4.8) является достаточным, а также выполнены условия сильной регулярности и (5.4.9), то вектор-функция  $\lambda^0(x)$ , определяемая из условия  $\lambda^0(x) = \lambda^*(x)$ , является оптимальной для задачи (5.4.7), где  $\lambda^*(x)$  определяется по формуле (5.4.10).

Таким образом, из приведенных теорем следует, что решение задачи (5.4.7) для выпуклого функционала  $h(\lambda(\cdot), \psi)$ , удовлетворяющего условиям сильной регулярности и (5.4.9), может быть определено как решение операторного уравнения:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) = \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^*(x), \psi), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad \text{для п. в. } x \in \Omega.$$

Подставим (формально) эту формулу в задачу (5.4.7). Полученный при этом функционал будем обозначать  $Q_1(\lambda^*(\cdot), \psi)$ :

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda^*(\cdot), \psi) &= Q(\psi) + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^*(x), \psi) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) \lambda_i^*(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right\} dx + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \psi_i \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ &\quad + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2\varphi_{0j}(x'') \left\{ \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \frac{1}{2} \psi_j + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right\} \right\} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} 2\varphi_{0i}(x'') \left\{ \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \frac{1}{2} \psi_i + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left( \int G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \left. \right\} \lambda_i^*(x'') dx'' = \\
 & = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^N \int G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right]^2 dx + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \\
 & \quad + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ \psi_j \varphi_{0i}(x'') + 2 \varphi_{0j}(x'') \left[ \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left( \int G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right] \right\} dx'' - \\
 & - 2 \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left( \int G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right\} \varphi_{0k}(x'') \lambda_k^*(x'') dx'' = \\
 & = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^N \int G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right]^2 dx + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \\
 & \quad + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ \varphi_{0j}(x'') \left[ \psi_j + 2 \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left( \int G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right] \right\} dx'' .
 \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^N \int G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' . \quad (5.4.11)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 F_1(Y(\cdot), \psi) & = Q_1 \lambda^*(\cdot), \psi = - \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \\
 & + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx' .
 \end{aligned}$$

**Теорема 5.8.** При любых фиксированных  $\psi \in \Gamma$ ,  $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ ,  $Y(\cdot) \in L_2(\Omega)$  выполняется неравенство

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \leq I(\lambda(\cdot)) , \quad (5.4.12)$$

причем на оптимальной траектории  $(\lambda^*(\cdot), \psi^*)$  достигается знак равенства:

$$F_1(Y(\cdot), \psi^*) = I(\lambda^*(\cdot)).$$

Доказательство. Обозначим

$$\bar{Y}(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx'.$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} F_1(Y(\cdot), \psi) - I(\lambda(\cdot)) &= - \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ &+ \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) G(x, x'', T) dx + 2 \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \psi_j \right\} \varphi_{0j}(x'') dx'' - \\ &- \left\{ \int_{\Omega} \bar{Y}^2(x) dx + 2 \int_{\Omega} \bar{Z}(x) \bar{Y}(x) dx \right\} = - \int_{\Omega} Y^2(x) + \bar{Y}^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ &+ \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) + Z(x) G(x, x'', T) dx + \psi_j \right\} \varphi_{0j}(x'') \sum_{k=1}^N \lambda_k(x'') dx'' - \\ &- \int_{\Omega} \int_{\Omega} 2 \bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \psi_i \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx - \\ &- 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} Y(x) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \psi_i \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} Y(x) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx = \\ &= - \int_{\Omega} Y^2(x) + \bar{Y}^2(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left\{ \min_{j=1, N} \left[ \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) dx + \psi_j \right) \varphi_{0j}(x') \right] - \right. \\ &- \left. \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) dx + \psi_i \right) \varphi_{0i}(x') \right\} \lambda_i(x') dx' + \\ &+ \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} Y(x) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx = \\
 & = - \int_{\Omega} Y^2(x) + \bar{Y}^2(x) dx + \\
 & + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left\{ \min_{j=1, N} \left[ \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) dx + \psi_j \right) \varphi_{0j}(x') \right] - \right. \\
 & \left. - \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) dx + \psi_i \right) \varphi_{0i}(x') \right\} \lambda_i(x') dx' + \\
 & + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right) + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} Y(x) \bar{Y}(x) dx = \\
 & = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left\{ \min_{j=1, N} \left[ \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) dx' + \psi_j \right) \varphi_{0j}(x') \right] - \right. \\
 & \left. - \left[ \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) dx + \psi_i \right) \varphi_{0i}(x') \right] \right\} \lambda_i(x') dx' + \\
 & + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right) - \int_{\Omega} Y(x) - \bar{Y}(x) \quad ^2 dx \leq 0. \quad (5.4.13)
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \leq I(\lambda(\cdot)).$$

Далее, пусть  $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$ ;  $\psi = \psi^*$ . Тогда  $Y(\cdot) = \bar{Y}(\cdot)$ , и, значит, последнее слагаемое в (5.4.13) равно нулю:  $-\int_{\Omega} Y(x) - \bar{Y}(x) \quad ^2 dx = 0$ .

В силу того, что вектор  $\psi^*$  является решением задачи (5.4.7),  $\psi_i^* \left( \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' - b_i \right) = 0$ . Первое же слагаемое в (5.4.13) равно нулю согласно формуле (5.4.10), по которой определяется оптимальная вектор-функция  $\lambda^*(\cdot)$ .

Таким образом, на оптимальном наборе  $(\lambda^*(\cdot), \psi^*)$  в неравенстве (5.4.12) достигается знак равенства.

Из этой теоремы следует, что

$$F_1(Y(\cdot), \psi^*) = \max_{Y'(\cdot), \psi \in L_2(\Omega) \times \Gamma} F_1(Y'(\cdot), \psi),$$

и имеет место

**Теорема 5.9.** Решение задачи (5.4.5) может быть получено почти всюду для  $x \in \Omega$  по формуле:

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } \left[ 2 \int_{\Omega} Y^*(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) dx + \psi_i^* \right] \phi_{0i}(x') = \\ = \min_{j=1, N} \left\{ \left[ 2 \int_{\Omega} Y^*(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) dx + \psi_j^* \right] \phi_{0j}(x') \right\} & (5.4.14) \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где  $Y^*(\cdot), \psi^*$  – решение задачи максимизации функционала  $F_1(Y(\cdot), \psi)$  на множестве  $L_2(\Omega) \times \Gamma$ .

Следующая теорема определяет условия, при которых задачи (5.4.4) и (5.4.5) эквивалентны.

**Теорема 5.10.** Пусть выполнено условие леммы 5.1. Тогда если для функционала Лагранжа  $h \lambda(\cdot), \psi$  задачи (5.4.5) выполняются условия сильной регулярности и (5.4.9), то множества оптимальных решений задач (5.4.4) и (5.4.5) совпадают.

**Доказательство.** Прежде всего, следует заметить, что задача (5.4.5) при условии выполнения леммы 5.1 разрешима, так как функционал  $I \lambda(\cdot)$  непрерывен и выпукл на ограниченном замкнутом выпуклом множестве  $\Lambda_2$ . Множество  $\Lambda_2$  содержит хотя бы одну крайнюю точку, а крайние точки симплекса, как уже отмечалось, являются характеристическими функциями некоторых подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , образующих разбиение множества  $\Omega$  [44, 65].

Пусть функционал  $h \lambda(\cdot), \psi$  удовлетворяет условиям сильной регулярности и (5.4.9). Тогда, согласно теоремам 5.5 – 5.7, решение  $\lambda^*(\cdot)$  задачи (5.4.5) определяется *единственным образом* по формуле (5.4.10). Функция  $\lambda^*(\cdot)$ , очевидно, представляет собой крайнюю точку множества  $\Lambda_2$  и, кроме того, является допустимой точкой для задачи (5.4.4).

Пусть  $\bar{\lambda}(\cdot)$  – некоторое решение задачи (5.4.4). Тогда справедливо не-

равенство  $I \lambda^*(\cdot) \geq I \bar{\lambda}(\cdot)$ . С другой стороны, так как  $\lambda^*(\cdot)$  – решение задачи (5.4.5), а  $\Lambda_1 \in \Lambda_2$ , то выполняется соотношение  $I \lambda^*(\cdot) \leq I \bar{\lambda}(\cdot)$ . Следовательно,  $I \lambda^*(\cdot) = I \bar{\lambda}(\cdot)$  и  $\lambda^*(\cdot)$  – решение задачи (5.4.5). Таким образом, решения задач (5.4.4) и (5.4.5) совпадают.

### **5.4.4. Конечномерная аппроксимация задачи оптимального разбиения множества и алгоритм ее решения**

Сформулируем численный алгоритм решения задачи ОРМ (5.4.4), основанный на результатах теоремы 5.7. Как и в разделе 5.1 от задачи условной оптимизации с помощью введения в целевой функционал негладкой штрафной функции множества  $\Gamma$  перейдем к задаче безусловной оптимизации:

$$P(Y(\cdot), \psi) = F_1(Y(\cdot), \psi) - \sum_{i=1}^N S \max(0, (-\psi_i)) \rightarrow \max_{Y(\cdot), \psi \in L_2(\Omega) \times E^N}, \quad (5.4.15)$$

где  $S$  – достаточно большое число.

Задача (5.4.15) является задачей бесконечномерного программирования без ограничений. Построим ее конечномерный аналог.

Рассмотрим сеточную область  $\gamma$  – множество точек пересечения семейства прямых

$$x = lh_x, \quad y = sh_y, \quad t = rh_t, \quad l = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, ml}, \quad r = \overline{1, m2},$$

покрывающих множество  $\Omega \times 0, T$ .

Используя конечномерные аппроксимации интегралов, участвующих в выражении функционала (5.4.15), получаем конечномерную задачу:

$$\begin{aligned} \bar{P}(Y, \psi) = & - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{ml} A_{jk} Y_{jk}^2 - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ & + \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^{ml} A_{ls} \min_{r=1, N} \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{ml} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_r \right\} \Phi_{0r}^{ls} + \\ & + \sum_{i=1}^N S \max(0, (-\psi_i)). \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Здесь  $A_{jk}$  – коэффициенты кубатурной формулы,

$$Y_{jk} = Y(x_j, y_k); \quad \varphi_{0r}^{ls} = \varphi_{0r}(x_1, y_s);$$

$$D_{ls}^{jk} = G(x_1, y_s), (x_j, y_k), T; \quad I_1^{jk} = \bar{Z}(x_j, y_k),$$

причем для вычисления величин  $D_{ls}^{jk}$ ,  $I_1^{jk}$  функция Грина  $G(x, x', T)$  заменяется суммой конечного числа  $L$  слагаемых.

Аналогично получаем конечномерную аппроксимацию формулы (5.4.14):

$$\lambda_i^*(x_1, y_s) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left[ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} Y_{jk} D_{ls}^{jk} + \psi_i \right] \varphi_{0i}^{ls} = \\ & = \min_{r=1, N} \left[ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_r \right] \varphi_{0r}^{ls}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5.4.17)$$

Задача максимизации функции (5.4.16) является конечномерной задачей математического программирования и заключается в отыскании  $m \times m1$ -мерного вектора  $Y = Y_{jk}$  и  $N$ -мерного вектора сопряженных переменных  $\psi = \psi_i$ , доставляющих максимальное значение целевой функции  $\bar{P}$ .

При большом числе разбиений  $m$  и  $m1$  решение этой задачи представляет вычислительную сложность.

Как и в разделе 5.1, для решения задачи максимизации вогнутой недифференцируемой функции  $\bar{P}(Y(\cdot), \psi)$  используется метод обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов ( $r$ -алгоритм Шора).

Таким образом, **численный алгоритм решения задачи (5.4.5)** с учетом изложенного принимает вид:

1. Область  $\Omega$  покрываем прямоугольной  $m \times m1$  сеткой и задаем начальное приближение функции  $Y(\cdot)$  в узлах сетки  $Y_{kj}^{(0)}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m1}$  и вектора двойственных переменных  $\psi^{(0)} = (\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_N^{(0)})$ .

2. Вычисляем значение функции  $\lambda_i^{(0)}(x)$ ,  $i = \overline{1, N}$  в узлах сетки по формуле (5.4.17) при фиксированных значениях  $\psi^{(0)}$ ,  $Y^{(0)}$ .

3. Вычисляем значение градиента  $g_P = (g_P^Y, g_P^\Psi)$  функции  $\bar{P}$  в точке  $(Y_{kj}^{(0)}, \psi_I^{(0)})$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, ml}$ ,  $i = \overline{1, N}$  по формулам:

$$g_P^{\Psi_i} = -b_i + \sum_{(l,s) \in W_i} A_{ls} \phi_{0i}^{ls} - S \max 0, -\text{sign}(\psi_i), \quad (5.4.18)$$

где

$$\begin{aligned} W_i &= \left\{ (l,s), l = \overline{1, m}, s = \overline{1, ml} : \min_{r=1, N} \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{ml} A_{jk} Y_{jk} D_{ls}^{jk} + \psi_r \right\} \phi_{0r}^{ls} = \right. \\ &= \left. \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{ml} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_i \right\} \phi_{0i}^{ls} \right\}; \\ g_P^{Y_{jk}} &= 2A_{jk} \left( -Y_{jk} + \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^{ml} D_{ls}^{jk} \phi_{0i}^{ls} \right), \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

где  $i$  – номер индекса (для каждой пары  $(l,s)$  свой), при котором достигается  $\min_{r=1, N} \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{ml} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_r \right\} \phi_{0r}^{ls}$ .

4. Выбирая начальный шаг  $h > 0$   $r$ -алгоритма, находим:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} + h_0 g_P^\Psi(Y^{(0)}, \psi^{(0)}), \\ Y^{(1)} &= Y^{(0)} + h_0 g_P^Y(Y^{(0)}, \psi^{(0)}). \end{aligned}$$

и переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k$  шагов получены определенные значения  $\phi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x), Y^{(k)}(x)$  в узлах сетки.

5.  $(k+1)$ -й шаг:

а) вычисляем  $\lambda_i^{(k)}(x)$ ,  $i = \overline{1, N}$  по формуле (5.4.17);

б) вычисляем значение градиента  $g_P(Y^{(k)}, \psi^{(k)})$  по формулам (5.4.18), (5.4.19) при  $Y = Y^{(k)}$ ;  $\psi = \psi^{(k)}$ ;

в) проводим  $(k+1)$ -й шаг  $r$ -алгоритма для максимизации функции (5.4.16) по переменным  $Y(\cdot), \psi$ , краткая схема которого имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} + h_k B_{k+1} \tilde{g}_P^\Psi(Y^{(k)}, \psi^{(k)}), \\ Y^{(k+1)} &= Y^{(k)} + h_k B_{k+1} \tilde{g}_P^Y(Y^{(k)}, \psi^{(k)}), \end{aligned}$$

где  $B_{k+1}$  – оператор отображения преобразованного пространства в ос-



новное пространство  $E^{MR}$ , где  $MR = m + ml + N$ , причем  $B_0 = I_{MR}$ ,  $I_{MR}$  – единичная  $MR \times MR$  матрица (формулы пересчета оператора – см. алгоритм п. 5.1.3);  $\tilde{g}_P = B_{k+1}^T g_P(Y^{(k)}, \psi^{(k)})$ ,  $h_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума функции по направлению;

г) проверяем условие  $\| (Y^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) \| \leq \varepsilon$  или  $\| g_P(Y^{(k)}, \psi^{(k)}) \| \leq \varepsilon$ . Если ни одно из условий не выполняется, то переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, иначе – к пункту д);

д) полагаем  $\lambda_*(\cdot) = \lambda^{(l)}(\cdot)$ ,  $\psi^* = \psi^{(l)}$ ,  $Y(\cdot) = Y^{(l)}(\cdot)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполняется хотя бы один из критериев окончания. Вычисляем оптимальное значение конечномерной аппроксимации целевого функционала (5.4.5) и для контроля правильности результата – значение функционала (5.4.16) при  $\lambda(\cdot) = \lambda_*(\cdot)$ ,  $\psi = \psi^*$ ,  $Y(\cdot) = Y^*(\cdot)$ .

### 5.4.5. Сходимость и оценка погрешности конечномерной аппроксимации задачи

Как было указано, численная реализация алгоритма решения задачи (5.4.5), основанного на теореме 5.5, предполагает аппроксимацию задачи

$$F_1 Y(\cdot), \psi \rightarrow \max, Y(\cdot) \in L_2(\Omega), \psi \in \Gamma \quad (5.4.20)$$

задачей

$$\tilde{F}_1^L Y(\cdot), \psi \rightarrow \max, Y(\cdot) \in L_2(\Omega), \psi \in \Gamma, \quad (5.4.21)$$

в которой целевая функция  $\tilde{F}_1^L(Y, \psi)$  отличается от  $F_1(Y, \psi)$  тем, что в ней функция Грина заменена суммой конечного  $L$  числа слагаемых.

Пусть  $G(x, x', T)$  – точное, а  $\tilde{G}_L(x, x', T)$  – приближенные значения функции Грина,  $Y^*(\cdot)$  и  $\tilde{Y}_L(\cdot)$  – точные решения задач (5.4.20) и (5.4.21) соответственно, а  $\lambda^*(\cdot)$  и  $\tilde{\lambda}^L(\cdot)$  – соответствующие значения вектор-функции  $\lambda(\cdot)$ . Рассмотрим вопрос о сходимости последовательности характеристических функций  $\tilde{\lambda}^L(\cdot)$  к функции  $\lambda^*(\cdot)$  при  $L \rightarrow \infty$  для случая, когда множество  $\Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q\}$ .

Прежде всего, покажем, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{Y}_L(x) = Y^*(x). \quad (5.4.22)$$

**Лемма 5.2.** Функционалы задач (5.4.21) при  $L \rightarrow \infty$  сходятся к функционалу задачи (5.4.20) равномерно по всем  $Y(\cdot) \in L_2(\Omega)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} F_1(Y, \psi) - \tilde{F}_L(Y, \psi) = \\ = \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) + \bar{Z}(x) G(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx' - \\ - \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx'. \end{aligned}$$

Используя оценки, полученные в работе [66], можно записать:

$$\begin{aligned} F_1(Y, \psi) - \tilde{F}_L(Y, \psi) = \\ = \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2) \tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2}) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx' - \\ - \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx'. \end{aligned}$$

Предположим, что для каждого фиксированного  $x' \in \Omega$  и для каждого

$$L = 1, 2, \dots, \min_{j=1, N} \left\{ \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_j \right) \varphi_{0j}(x') \right\}$$

достигается при  $j=k$ , а

$$\min_{j=1, N} \left\{ \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2) \tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2}) dx + \psi_j \right) \varphi_{0j}(x') \right\}$$

– при  $j=1$ . Тогда имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} & \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2) \tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2}) dx + \psi_1 \right) \varphi_{01}(x') \leq \\ & \leq \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2) \tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2}) dx + \psi_k \right) \varphi_{0k}(x') \end{aligned}$$

или

$$\left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_1 \right) \varphi_{01}(x') -$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_k \right) \varphi_{0k}(x') \leq \\
 & \leq 2 \varphi_{0k}(x') - \varphi_{0l}(x') \int_{\Omega} O(1/L^2) \tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2}) Y(x) + \tilde{Z}(x) dx.
 \end{aligned}$$

Так как интеграл в правой части последнего неравенства является величиной порядка  $O(1/L^2)$ , то найдется такое число  $L'$ , что для всех  $L > L'$  разность

$$\begin{aligned}
 W = & \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_l \right) \varphi_{0l}(x') - \\
 & - \left( 2 \int_{\Omega} Y(x) + \tilde{Z}(x) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_k \right) \varphi_{0k}(x')
 \end{aligned}$$

будет меньше сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$ , а следовательно,  $k=1$  и, в силу произвольности выбора точки  $x' \in \Omega$ , можно заключить, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{F}_L(Y, \psi) = F_1(Y, \psi). \quad (5.4.23)$$

**Лемма 5.3.** Функционалы  $F_1(Y, \psi)$  и  $\tilde{F}_L(Y, \psi)$  являются вогнутыми по  $Y(\cdot)$ .

**Доказательство.** Пусть  $Y_1(\cdot), Y_2(\cdot) \in L_2(\Omega)$ . Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned}
 & F_1(\alpha Y_1(\cdot) + (1-\alpha)Y_2(\cdot), \psi) - \alpha F_1(Y_1(\cdot), \psi) + (1-\alpha)F_1(Y_2(\cdot), \psi) = \\
 & = - \int_{\Omega} (\alpha Y_1(x) + (1-\alpha)Y_2(x))^2 dx + \\
 & + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} [\alpha Y_1(x) + (1-\alpha)Y_2(x) + (1 \pm \alpha)\tilde{Z}(x) G(x, x', T) dx + (1 \pm \alpha)\psi_j] \varphi_{0j}(x') \right\} dx' + \\
 & \quad + \alpha \int_{\Omega} Y_1^2(x) dx - \\
 & \quad - \alpha \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y_1(x) + \tilde{Z}(x) G(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx' + \\
 & \quad + (1-\alpha) \int_{\Omega} Y_2^2(x) dx - \\
 & - (1-\alpha) \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y_2(x) + \tilde{Z}(x) G(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx'.
 \end{aligned}$$

Так как имеет место неравенство

$$\min_{j=1,N} a_j + b_j \geq \min_{j=1,N} a_j + \min_{j=1,N} b_j,$$

можно записать:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha Y_1(\cdot) + (1-\alpha)Y_2(\cdot), \psi) - \alpha F_1(Y_1(\cdot), \psi) + (1-\alpha)F_1(Y_2(\cdot), \psi) \geq \\ \geq -\alpha^2 \int_{\Omega} Y_1^2(x) dx - 2\alpha(1-\alpha) \int_{\Omega} Y_1(x)Y_2(x) dx - \\ -(1-\alpha)^2 \int_{\Omega} Y_2^2(x) dx + \alpha \int_{\Omega} Y_1(x) dx + \\ + (1-\alpha) \int_{\Omega} Y_2^2(x) dx = \alpha(1-\alpha) \int_{\Omega} Y_1(x) - Y_2(x)^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функционал  $F_1(Y, \psi)$  вогнут по  $Y(\cdot)$ . Аналогично можно показать вогнутость функционалов  $\tilde{F}_L(Y, \psi)$ .

Теперь, основываясь на леммах 5.2 и 5.3, можно показать, что имеет место формула (5.4.22).

Так как  $\tilde{Y}_L(\cdot)$  максимизирует функционал  $\tilde{F}_L(Y, \psi)$ , то выполняется соотношение

$$\tilde{F}_L(\tilde{Y}_L(x), \psi) \geq \tilde{F}_L(Y(x), \psi) \quad \forall Y(x) \in L_2(\Omega). \quad (5.4.24)$$

Переходя к пределу при  $L \rightarrow \infty$  и учитывая (5.4.23), получим:

$$F_1(\tilde{Y}(x), \psi) \geq F_1(Y(x), \psi) \quad \forall Y(x) \in L_2(\Omega), \quad \forall \psi \in \Gamma,$$

где  $\tilde{Y}(x)$  – некоторый элемент пространства  $L_2(\Omega)$ . Покажем, что  $\tilde{Y}(x) = Y^*(x)$ . Предположим обратное. Тогда, согласно (5.4.24), должно выполняться неравенство

$$F_1(\tilde{Y}(x), \psi) \geq F_1(\alpha \tilde{Y}(x) + (1-\alpha)Y^*(x), \psi), \quad (5.4.25)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Так как функционал  $F_1(Y(x), \psi)$  вогнут по  $Y(\cdot)$ , то (5.4.25) можно переписать в виде:

$$F_1(\tilde{Y}(x), \psi) \geq \alpha F_1(\tilde{Y}(x), \psi) + (1-\alpha)F_1(Y^*(x), \psi),$$

а это выполняется лишь в случае, когда  $F_1(\tilde{Y}(x), \psi) = F_1(Y^*(x), \psi)$ .

Таким образом,

$$\tilde{Y}(x) \in S^* = Y^*(x) \in L_2(\Omega) : F_1(Y^*(x), \psi) \geq F_1(Y(x), \psi) \quad \forall Y(x) \in L_2(\Omega). \quad \text{Не}$$

теряя общности, можно считать  $\tilde{Y}(x) = Y^*(x)$ .

Покажем теперь, что  $\forall x \in \Omega$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}^L(x) = \lambda^*(x). \quad (5.4.26)$$

Согласно формуле (5.4.12) и теореме 5.4, можно записать следующие соотношения между функциями  $Y(\cdot)$  и  $\lambda(\cdot)$ :

$$Y^*(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx',$$

$$\tilde{Y}_L(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \tilde{\lambda}_i^L(x') dx'.$$

Рассмотрим разность:

$$Y^*(x) - \tilde{Y}_L(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[ G(x, x', T) \lambda_i^*(x') - \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i^L(x') \right] dx' =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[ O(e^{-\gamma_L T}) \lambda_i^*(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) \lambda_i^*(x') - \tilde{\lambda}_i^L(x') \right] dx'.$$

При  $L \rightarrow \infty$ , выражение в левой части, согласно (5.4.22), стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') O(e^{-\gamma_L T}) \lambda_i^*(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) \lambda_i^*(x') - \tilde{\lambda}_i^L(x') dx' = 0,$$

а это возможно лишь в случае, когда для всех  $x \in \Omega$  и для всех  $i=1,2,\dots,N$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\lambda_i^*(x) - \tilde{\lambda}_i^L(x)) = 0,$$

так как  $\varphi_{0i}(x)$ ,  $\tilde{G}_L(x, x', T)$  – ограниченные, не равные тождественно нулю функции на  $\Omega$  и  $\Omega \times \Omega \times 0, T$  соответственно, а  $\lim_{L \rightarrow \infty} O(e^{-\gamma_L T}) = 0$ .

Таким образом, доказана асимптотическая сходимость последовательности вектор-функций  $\tilde{\lambda}_i^L(x)$  к искомой вектор-функции  $\lambda_i^*(x)$  при  $L \rightarrow \infty$ .

Оценим теперь погрешность вычисления значения функционала  $I(\cdot)$ , возникающую за счет приближения функции Грина:

$$I(\lambda(\cdot)) - \tilde{I}(\tilde{\lambda}(\cdot)) = \int \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') G(x, x', T) \lambda_i(x') dx' + \bar{Z}(x) \right\}^2 -$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') dx' + \tilde{Z}(x) \right\}^2 dx =$$

$$= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^N \int \varphi_{0i}(x') \left[ G(x, x', T) \lambda_i(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') \right] dx' + \bar{Z}(x) + \tilde{Z}(x) \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{i=1}^N \int \varphi_{0i}(x') \left[ G(x, x', T) \lambda_i(x') - G(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') \right] dx' + \bar{Z}(x) - \tilde{Z}(x) \right\} dx.$$

Покажем, что первый множитель в подынтегральном выражении, обозначим его через  $W_1(x)$ , при определенных условиях ограничен, а второй –  $W_2(x)$ , стремится к нулю при  $L \rightarrow \infty$ .

$$\text{Пусть } S = \max_{i=1, N} \max_{x \in \Omega} \varphi_{0i}(x); \quad M_z = \max_{x \in \Omega} Z(x); \quad M_f = \max_{x \in \Omega} \max_{t \in 0, T} f(x, t);$$

$M_g = \max_{x \in \Omega} \max_{t \in 0, T} g(x, t)$ . Тогда, используя оценки, полученные в [43], мож-

но записать оценку для  $W_1(x)$ :

$$W_1(x) \leq 2M_z + \frac{16M_f p^2 q^2}{\pi^2(p^2 + q^2)} + \frac{8 - 4e^{-\pi^2 L^2(p^2 + q^2)T/(pq)^2}}{1 - e^{-\pi^2 T(p^2 + q^2)/(pq)^2}} \left( S - \frac{M_f p^2 q^2}{\pi^2(p^2 + q^2)} \right) + + \\ \frac{32p^2 q^2}{\pi^3} \left( \frac{\pi^4}{36} - \frac{1}{e^{\left(\frac{\pi^2}{p^2} + \frac{\pi^2}{q^2}\right)T} - 1} \right) \leq A,$$

где  $A = \text{const} < \infty$ .

Рассмотрим:

$$W_2(x) =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^N \int \varphi_{0i}(x') \left[ G(x, x', T) \lambda_i(x') - G(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') \right] dx' + \bar{Z}(x) - \tilde{Z}(x) \right\} \leq$$

$$\leq S \sum_{i=1}^N \int \left\{ \frac{4}{pq} e^{-L^2 k^2 T} \lambda_i(x') + \frac{4 - 4e^{-L^2 k^2 T}}{1 - e^{-k^2 T}} \left[ \lambda_i(x') - \tilde{\lambda}_i(x') \right] \right\} dx' +$$

$$+ (4M_f pq/k^2 + 16M_g/\pi^2)(1 - e^{-L^2 k^2 T})/L^2,$$

$$\text{где } k^2 = \pi^2(p^2 + q^2)/(pq)^2.$$

Учитывая (5.4.26), можно подобрать такое число  $L''$ , что для всех  $L > L''$  и для всех  $x \in \Omega$  будет справедливо неравенство

$$|\lambda_i(x) - \tilde{\lambda}_i(x)| \leq \varepsilon'',$$

где  $\varepsilon'' > 0$  – сколь угодно малое число.

Пусть  $L'$  – число, начиная с которого

$$\left| 4Se^{-L^2k^2T} + (4M_f pq/k^2 + 16M_g/\pi^2)(1 - e^{-L^2k^2T})/L^2 \right| \leq \varepsilon'.$$

Выбрав  $L > \max\{L', L''\}$ , получим, что величина  $W_2(x)$ , а следовательно, и величина  $\left| I \lambda(\cdot) - \tilde{I} \tilde{\lambda}(\cdot) \right|$  будут порядка  $o(\varepsilon)$ , где  $\varepsilon = \max\{\varepsilon', \varepsilon''\}$ . Тем самым показана асимптотическая сходимость  $\tilde{I}_L(\tilde{\lambda}(\cdot)) \rightarrow I(\lambda(\cdot))$  при  $L \rightarrow \infty$ .

### 5.4.6. Анализ результатов вычислительных экспериментов по восстановлению разрывной правой части параболического уравнения и начальных условий

Предложенный метод реализован в виде программного продукта в среде разработки приложений Delphi 3.0 для платформы Windows и включен в комплекс программ OU ORM. Причем метод, описанный выше, был обобщен на случай задачи восстановления разрывной правой части параболического уравнения. В качестве тестовой и приведем следующую задачу:

$$V(u(\cdot)) = \int_{\Omega} \varphi(x, 1, u) - z(x)^2 dx \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (5.4.27)$$

где  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ ;  $z(x) = \|x - x_0\|^2$ ,  $x_0 = (2, 2)$ ,  $\varphi = \varphi(x, t, u)$  – решение краевой задачи

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + u(x)\exp(-t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1], \quad (5.4.28)$$

$$\varphi(x, 0) \equiv \varphi_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (5.4.29)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]. \quad (5.4.30)$$

Ограничения на управление  $u(\cdot)$  имеют вид:

$$U = \{u(x) \in L_2(\Omega) : u(x) = u_i(x) \quad \forall x \in \Omega_i, \int_{\Omega_i} u(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N}\}, \quad (5.4.31)$$

где  $\Omega_1, \dots, \Omega_N \in \mathcal{P}_N(\Omega)$ ,  $u_i(x) = \|x - \tau_i\|^2$ ,  $\forall x \in \Omega$ ,  $\tau_i \in \Omega$  – фиксированные точки,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\|\cdot\|$  – евклидова метрика.

В задаче (5.4.27) – (5.4.31), в отличие от рассмотренной в п. 5.4.1 задачи, функция управления входит в правую часть дифференциального уравнения. Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } \left[ 2 \int_{\Omega} Y^*(x) + I_1(x) H(x, x') dx + \psi_i^* \right] u_i(x') = \\ = \min_{j=1, N} \left\{ \left[ 2 \int_{\Omega} Y^*(x) + I_1(x) H(x, x') dx + \psi_j^* \right] u_j(x') \right\}, & (5.4.32) \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где  $x \in \Omega$ ,  $H(x, x') = \int_0^1 G(x, x', T-t) e^{-t} dt$ ,  $I_1(x) = 2 \int_{\Omega} G(x, x', T) dx' - z(x)$ , а

$Y^*(\cdot)$ ,  $\psi^*$  – решение задачи максимизации

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \rightarrow \max_{(Y(\cdot), \psi) \in L_2(\Omega) \times \Gamma},$$

где

$$F_1(Y(\cdot), \psi) = - \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) + I_1(x) H(x, x') u_j(x') dx + \psi_j u_j(x') \right\} dx'.$$

Сравнивая формулы (5.4.15) и (5.4.32) заключаем, что алгоритм, описанный в п. 5.4.6, с небольшими изменениями, связанными с заменой функции  $G(x, x', 1)$  на функцию  $H(x, x')$ , может быть применен к решению задачи (5.4.1) – (5.4.5).

Для численного решения этой задачи область  $\Omega$  покрывалась сеткой  $m \times m_1 = 20 \times 20$ . Двойные интегралы, входящие в формулы для определения функций  $\lambda_i(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , значения функционала  $F_1$  и его вектора градиента в точке  $(Y(\cdot), \psi)$  вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций по узлам сетки.

1. При решении задачи (5.4.27) – (5.4.31) со следующими входными данными:  $N = 3$ ,  $\tau_1 = (0, 4)$ ,  $\tau_2 = (2, 2)$ ,  $\tau_3 = (4, 0)$ ,  $b = (40, 50, 30)$ ,  $\psi^{(0)} = (1, 1, 1)$ ;  $\varphi_0(x) = 0$ ;  $u^{(0)}(x) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega$ ,  $\varepsilon = 0.001$ , за 25 итераций достигнуты оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач  $\Gamma^* = 98.630$ ,  $P^* = 98.6214$ . Разбиение  $\Omega$ , соответствующее оптимальному на этой области заданию функций  $u_i(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , представлено на рис.



5.13. Вектор двойственных переменных  $\psi^* = (0.0018, 0.00078, 0.0013)$ .

Для проверки выполнения условий (5.1.5) (или (5.4.31)) были вычислены значения интегралов в левых частях неравенств:  $\int_{\Omega_1^*} u_1(x)dx = 2.11$ ,

$\int_{\Omega_2^*} u_2(x)dx = 28.53$ ,  $\int_{\Omega_3^*} u_3(x)dx = 2.11$ . Разница между оптимальными значениями функционалов прямой и двойственной задач в этом примере и ниже объясняется погрешностью вычислений.

2. На рис. 5.14 представлено разбиение  $\Omega$ , соответствующее оптимальному решению задачи (5.4.27) – (5.4.31) в случае, когда  $N = 4$ ,  $\varphi_0(x) = 2$ ,  $\tau_1 = (3,3)$ ,  $\tau_3 = (3,1)$ ,  $\tau_2 = (1,3)$ ,  $\tau_4 = (1,1)$ ,  $b = (1,30,0.8,30)$ . Это решение получено исходя из начального приближения  $u^{(0)}(x) = u_2(x) \forall x \in \Omega$ ,  $\psi^{(0)} = (1,1,1,1)$ . Минимальное значение целевого функционала  $I^* = 127.762$  было достигнуто за 15 итераций. При этом получены следующие значения двойственного функционала и вектора сопряженных переменных:  $P^* = 127.732$ ,  $\psi^* = (1.18; 0.00038; 1.344; 0.00015)$ , а

$\int_{\Omega_1^*} u_1(x)dx = 0.996$ ,  $\int_{\Omega_2^*} u_2(x)dx = 5.93$ ,  $\int_{\Omega_3^*} u_3(x)dx = 0.782$ ,  $\int_{\Omega_4^*} u_4(x)dx = 8.32$ .

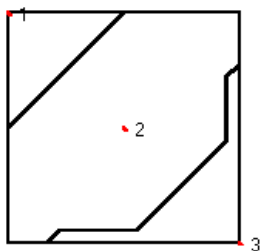


Рис. 5.13

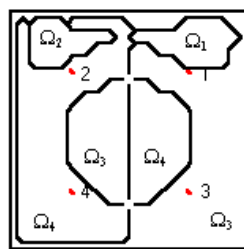


Рис. 5.14

Анализ других примеров решения задач оптимального управления с квадратичным функционалом, сводящихся к нелинейным задачам ОРМ, приведен в работе [69].

Следует заметить, что описанный в п. 5.4.4 алгоритм решения задач оптимального управления (стартового или распределенного), сводящихся к нелинейным задачам ОРМ, легко переносится на тот случай, когда функции, определяющие множество допустимых управлений  $U$ , зависят от некоторых параметров, которые необходимо отыскать в процессе решения (см. раздел 5.2). Это так называемые задачи управления, сводящие-

ся к нелинейным задачам ОРМ с размещением “центров” подмножеств.

Далее представим результаты решения одной из таких задач. Рассматривалась задача стартового управления вида

$$V(u(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) = \int_{\Omega} \varphi(x, 1, u) - z(x)^2 dx \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (5.4.33)$$

где  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ ;  $\varphi = \varphi(x, t, u)$  – решение краевой задачи

$$\partial \varphi / \partial t = \Delta \varphi + \exp(-t)((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1], \quad (5.4.34)$$

$$\varphi(x, 0) = u(x; \bar{\omega}, \tau) \quad \forall x \in \Omega, \quad (5.4.35)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad (x, t) \in \partial \Omega \times [0, 1]. \quad (5.4.36)$$

Ограничения на управление  $u(\cdot)$  имеют вид

$$U = \{u(x) \in L_2(\Omega) : \|u(x) - \tau_i\|^2 \leq b_i, \quad \forall x \in \Omega_i,$$

$$\int_{\Omega_i} dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad \bar{\omega} \in P_2(\Omega) \}.$$

В качестве функции  $z(x)$  выступало аналитическое решение краевой задачи (5.4.34) – (5.4.36) с функцией начальных условий вида:

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N \|x - \beta_i\|^2 \lambda_i(x), \quad \text{где } N = 2, \quad \beta_1 = (2, 1), \quad \beta_2 = (2, 3), \quad \text{а } \lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot) -$$

характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение квадрата  $\Omega$ , представленное на рис. 5.15. Здесь и в следующем случае константы  $b_i, i = \overline{1, N}$  выбирались таким образом, чтобы ограничения на площади подмножеств выполнялись как строгие неравенства.

При решении задачи (5.4.33) – (5.4.36) с помощью модифицированного алгоритма п. 5.4.4 (дополненного условием отыскания минимума по  $\tau \in \Omega^2$ ) начиная с начального приближения  $\Omega_1^{(0)} = \Omega; \Omega_2^{(0)} = \emptyset; \tau_i^{(0)} = (0, 0); i = \overline{1, N}$ , получен с точностью  $\varepsilon = 0.00001$  следующий результат: разбиение множества  $\Omega$ , соответствующее оптимальной управляющей функции начальных условий  $u(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$ , совпало с разбиением, представленным на рис. 5.15; значения координат центров подмножеств  $\tau_1^* = (1, 999; 2, 725), \tau_2^* = (2, 00; 1, 274)$ ; значения функционалов прямой и двойственной задач  $I^* = 0.3045, P^* = 0.2807$ .

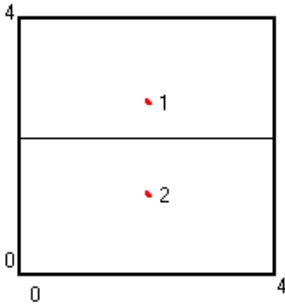


Рис. 5.15

Как нетрудно заметить, значения координат точек  $\tau_i$  с достаточной степенью точности совпадают с координатами точек  $\beta_i$ ; кроме того, значение функционала прямой задачи весьма удовлетворительное.

Эта же задача (5.4.33) – (5.4.36) решалась в случае, когда функция  $z(x)$  представляла собой аналитическое решение краевой задачи (5.4.34) – (5.4.36) с функцией начальных условий вида

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N \|x - \beta_i\|^2 \lambda_i(x),$$

где  $N = 4$ ,  $\beta_1 = (1,1)$ ,  $\beta_2 = (1,3)$ ,  $\beta_3 = (3,1)$ ,  $\beta_4 = (3,3)$ , а  $\lambda_i(\cdot)$  – характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение квадрата  $\Omega$ , представленное на рис. 5.16, а. Исходя из начального приближения координат центров подмножеств  $\tau_i = (0,0)$ ,  $\forall i$ , вектора сопряженных переменных  $\psi^{(0)} = (1,1,1,1)$  и управления  $u^{(0)}(x) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega$  за 60 итераций с точностью  $\varepsilon = 0.001$  достигнуто оптимальное значение функционала (5.4.7)  $I^* = 0.413$ .

Значения двойственного функционала  $P(Y(\cdot), \psi) : P^* = 0.327$ . Для сравнения приведем значение функционала исходной задачи на нулевой итерации:  $I^{(0)} = 26.24$ . Разбиение множества  $\Omega$ , соответствующее оптимальному управлению  $u^*(\cdot)$ , изображено на рис. 5.16, б. Оптимальные значения координат центров подмножеств получены такие:  $\tau_1 = (2.89, 1.6)$ ,  $\tau_2 = (2.29, 2.93)$ ,  $\tau_3 = (1.224, 1.003)$ ,  $\tau_4 = (0.39, 2.681)$ .

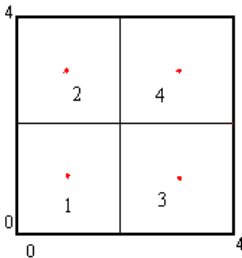


Рис. 5.16, а

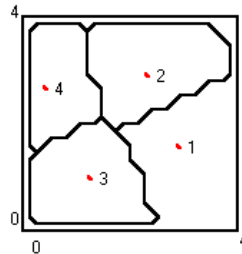


Рис. 5.16, б

## 5.5. СПЕЦИФИКА РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ, К КОТОРЫМ СВОДЯТСЯ НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

На практике часто возникают задачи, математическая постановка которых содержит функционал, не дифференцируемый по Фреше, а имеющий лишь производные по направлениям в функциональном пространстве. Эта особенность делает решение таких задач очень сложным. В данном разделе рассмотрена задача управления, сводящаяся к задаче оптимального разбиения без ограничений, в функционал которой входит функция  $|\cdot|$ . Сформулирован метод решения этой задачи, аналогичный методу последовательной линеаризации Р. П. Федоренко [106].

### 5.5.1. Постановка задачи оптимального управления и схема метода ее решения

Рассмотрим задачу стартового управления параболической системой вида [69]:

$$V(u(\cdot)) = \int_{\Omega} |\varphi(x, T; u(x)) - Z(x)| dx \rightarrow \min_{u(x) \in U}. \quad (5.5.1)$$

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + f(x, t); \quad (5.5.2)$$

$$\varphi(x, 0) = u(x); \quad u \in U; \quad (5.5.3)$$

$$\varphi(x, t) = g(x, t) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad t \in 0, T, \quad (5.5.4)$$

$U = \{u(x); \bar{\omega} = u_i(x) \text{ п. в. для } x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; \bar{\omega} = \Omega_1, \dots, \Omega_N \in P_N(\Omega)\};$

$u_i(\cdot), i = \overline{1, N}$ , – заданные функции из пространства  $L_2(\Omega)$ .

Введя в рассмотрение характеристические функции  $\lambda_i(\cdot)$  множеств  $\Omega_i, i = \overline{1, N}$ , функцию начальных условий можно представить в виде:

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N u_i(x)\lambda_i(x). \quad (5.5.5)$$

Обозначим через  $\varphi(x, t; \lambda(x))$  – решение краевой задачи (5.5.2) –

(5.5.4), соответствующее функции начальных условий (5.5.5).

Рассмотрим задачу, эквивалентную (5.5.1) – (5.5.4):

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} |\varphi(x, T; \lambda(x)) - Z(x)| dx \rightarrow \min_{\lambda(x) \in \Lambda_1}, \quad (5.5.6)$$

где

$$\Lambda_1 = \lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \quad i = \overline{1, N}.$$

В соответствии с методами решения непрерывных задач ОРМ, погружаем множество  $\Lambda_1$  в симплекс

$$\Lambda_0 = \lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \quad i = \overline{1, N},$$

и в дальнейшем будем решать задачу

$$I(\lambda(\cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(x) \in \Lambda_0} \quad (5.5.7)$$

Отметим, что задачу (5.5.7), (5.5.2) – (5.5.4), в свою очередь, можно рассматривать как задачу стартового управления, в которой в качестве управляющей функции выступает вектор-функция  $\lambda(\cdot)$ . В дальнейшем под управлением будем подразумевать функцию  $\lambda(\cdot)$ .

Для решения (5.5.7), (5.5.2) – (5.5.4) будем применять метод, аналогичный методу последовательной линеаризации Р. П. Федоренко решения задач оптимального управления системой с сосредоточенными параметрами. Этот метод является методом спуска в пространстве функций  $\lambda(\cdot)$  и состоит в построении минимизирующей последовательности  $\lambda^k(\cdot) \in \Lambda_0$ .

**Схема метода** следующая.

0. задается  $\lambda^0(\cdot) \in \Lambda_0$ ,  $k = 0$ .

1. С функцией  $u^k(\cdot) = \sum_{i=1}^N u_i(\cdot) \lambda_i^k(\cdot)$  решается краевая задача (5.5.2) – (5.5.4) и вычисляется значение функционала (5.5.7).

2. В окрестности невозмущенной траектории  $\lambda^k(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot)$  задача линеаризуется. Процесс линеаризации включает два этапа:

– вычисление функциональной производной, т. е. дифференциала

Гато  $D(\lambda^k(\cdot), v^k(\cdot)) = D(\lambda^k(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)); \bar{\lambda}(\cdot) \in \Lambda_0;$

– построение малой окрестности  $\delta\Lambda_0$  невозмущенной функции  $\lambda^k(\cdot)$ .

3. Формулируется и решается задача: найти приращение (возмущение) управляющей функции  $v^k(\cdot) = \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)$  из условия

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} D(\lambda^0(\cdot), \lambda(\cdot) - \lambda^0(\cdot)) = D(\lambda^0(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^0(\cdot)). \quad (5.5.8)$$

Эта задача является линеаризацией решаемой задачи в окрестности невозмущенной траектории  $\lambda^k(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot)$ . Решение задачи (5.5.8) позволяет осуществить основной шаг процесса – переход к следующему приближению

$$\lambda^{k+1}(\cdot) = \lambda^k(\cdot) + s(\bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)). \quad (5.5.9)$$

Параметр  $s \in 0,1$  подбирается так, чтобы обеспечить условие релаксации:

$$I(\lambda^{k+1}(\cdot)) \leq I(\lambda^k(\cdot)). \quad (5.5.10)$$

Критериями окончания итерационного процесса построения минимизирующей последовательности управлений могут служить неравенства

$$\begin{aligned} \|\lambda^{k+1}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)\| &\leq \varepsilon; \\ I^{k+1} - I^k &\leq \varepsilon; \\ |D(\lambda^k(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot))| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

### 5.5.2. Дифференциал Гато функционала вспомогательной задачи

Составной частью описанной схемы является вычисление дифференциала Гато функционала (5.5.7).

Как известно, функционал  $I(\lambda(\cdot))$  называется *дифференцируемым в смысле Гато*, если для любой вектор-функции  $v(\cdot)$  (из того же пространства, что и  $\lambda(\cdot)$ ) имеет место формула

$$I(\lambda(\cdot) + sv(\cdot)) = I(\lambda(\cdot)) + sD(\lambda(\cdot), v(\cdot)) + o(s), \quad (5.5.12)$$

где  $s$  – любое малое неотрицательное число,  $D(\lambda(\cdot), v(\cdot))$  – некоторый функционал, называемый производной функционала  $I$  в точке  $\lambda(\cdot)$  по направлению  $v(\cdot)$  (дифференциалом Гато).

Введем обозначение

$$\Omega^0 = \{x \in \Omega: \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) = 0\};$$

$$\Omega^{+(-)} = \{x \in \Omega: \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) > 0 (< 0)\}.$$

Под вариацией (приращением) функции  $\lambda^0(\cdot) \in \Lambda_0$  будем понимать функцию  $v(\cdot) = \lambda(\cdot) - \lambda^0(\cdot)$ , где  $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ .

Дадим приращение  $\delta u(\cdot) = sv(\cdot)$  функции  $\lambda^0(\cdot)$ , где  $s > 0$  – достаточно малый параметр. Этому приращению соответствует приращение фазовой траектории  $\delta\varphi$ , являющееся решением краевой задачи

$$\frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t} = \Delta(\delta\varphi); \tag{5.5.13}$$

$$\delta\varphi(x, 0) = \sum_{i=1}^N u_i(x)sv_i(x); \tag{5.5.14}$$

$$\delta\varphi(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega; t \in [0, T] \tag{5.5.15}$$

Рассмотрим значение:

$$\begin{aligned} I(\lambda^0(\cdot) + \delta u(\cdot)) &= \int_{\Omega} \left| \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) + s\delta\varphi(x, T) + O(\|\delta u\|^2) \right| dx = \\ &= \int_{\Omega^0} |\delta\varphi(x, T)| dx + \int_{\Omega^+} \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) + s\delta\varphi(x, T) dx - \\ &\quad - \int_{\Omega^-} \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) + s\delta\varphi(x, T) dx + O(s). \end{aligned}$$

Сопоставляя это выражение с выражением (5.5.12), заключаем, что дифференциал Гато функционала  $I(\lambda(\cdot))$  вычисляется по формуле

$$D(\lambda^0(\cdot), v(\cdot)) = \int_{\Omega^0} |\delta\varphi(x, T)| dx + \int_{\Omega^+} \delta\varphi(x, T) dx - \int_{\Omega^-} \delta\varphi(x, T) dx.$$

Используя уравнения в вариациях (5.5.13) – (5.5.15) и тождество Лагранжа, это выражение запишем в эквивалентном виде относительно приращения  $v(\cdot)$ :

$$D(\lambda^0(\cdot), v(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi(x, 0)u_i(x)v_i(x) dx +$$

$$+ \int_{\Omega^0} \left| \sum_{i=1}^N \int \psi(x, x', 0) u_i(x) v_i(x) dx \right| dx', \quad (5.5.16)$$

где  $\psi(x, t)$  – решение краевой задачи

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi = 0; \quad (5.5.17)$$

$$\psi(x, T) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega^+; \\ 0, & \text{если } x \in \Omega^0; \\ -1, & \text{если } x \in \Omega^-; \end{cases} \quad (5.5.18)$$

$$\psi(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega; \quad t \in 0, T, \quad (5.5.19)$$

а  $\psi(x, x', t)$  – решения задачи

$$\frac{\partial \psi(x, x', t)}{\partial t} + \Delta \psi(x, x', t) = 0; \quad \forall x \in \Omega, t \in 0, T, \quad (5.5.20)$$

$$\psi(x, x', T) = \delta(x - x'), \quad (5.5.21)$$

$$\psi(x, x', t) = 0 \quad x \in \partial\Omega; \quad t \in 0, T. \quad (5.5.22)$$

Подчеркнем, что в случае, когда  $\text{mes}\Omega^0 = 0$ , функционал (5.5.7) дифференцируем по Фреше, и его производная вычисляется после решения краевой задачи (5.5.17) – (5.5.19) по формуле

$$\frac{\partial I(\lambda(\cdot))}{\partial \lambda_i(\cdot)} = \psi(\cdot, 0) u_i(\cdot),$$

что согласуется с результатами, полученными в процессе исследования задач управления системами типа (5.1.1) – (5.1.5) с линейным критерием качества.

### **5.5.3. Элементы вычислительной технологии. Результаты численного решения модельных задач**

Область  $\Omega$  покрывается равномерной сеткой с шагом  $h_x$  по переменной  $x$ ,  $h_y$  – по переменной  $y$ .

$$\gamma = (x_i, y_j): \quad x_i = x_0 + ih_x, \quad y_j = y_0 + jh_y, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, m_1}.$$

В качестве искомой функции  $\lambda(\cdot)$  будет выступать кусочно-постоянная функция



$$\lambda(\bar{x}) = \lambda_{i+1/2, j+1/2}(\bar{x}), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}; \quad y_j \leq y \leq y_{j+1} .$$

Вариации  $v(\cdot)$  будем искать в том же классе.

Задается начальное приближение  $\lambda^0(\cdot)$ . Решаем краевую задачу (5.5.2) – (5.5.4). Интегрирование этой системы осуществляется подходящим стандартным методом. После интегрирования системы (5.5.2) – (5.5.4) запоминаются значения траектории  $\varphi(\cdot, T)$  в конечный момент времени  $T$  в виде значений  $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j, T)$ .

Вычисление производной Гато функционала (5.5.6) в точке  $\lambda^0(\cdot)$  требует интегрирования системы вида (5.5.17) – (5.5.19). При этом следует выделить множества индексов  $M_\varepsilon^-, M_\varepsilon^+, M_\varepsilon^0$  следующим образом:

$$(i, j) \in M_\varepsilon^-, \text{ если } \varphi_{ij} - Z(x_i, y_j) < -\varepsilon ;$$

$$(i, j) \in M_\varepsilon^+, \text{ если } \varphi_{ij} - Z(x_i, y_j) > \varepsilon ;$$

$$(i, j) \in M_\varepsilon^0, \text{ если } |\varphi_{ij} - Z(x_i, y_j)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 .$$

**Замечание.** Выбор величины  $\varepsilon > 0$  определяется следующими соображениями:  $\varepsilon$  должно быть по возможности меньше, так как трудность решения задачи связана с количеством индексов в множестве  $M_\varepsilon^0$ . В то же время,  $\varepsilon$  не должно быть слишком малым: не следует допускать перехода за один шаг процесса какого-то индекса  $i, j$  из  $M_\varepsilon^-$  в  $M_\varepsilon^+$ .

Записывается конечномерная аппроксимация задачи (5.5.8). Заменяв в выражении производной Гато интегралы интегральными суммами, получим следующую задачу для определения функции  $\bar{\lambda}(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^m \sum_{s=1}^{m1} \bar{A}_{ps} u_{ps}^i (\lambda_{ps}^i - \lambda_{ps}^{0i}) + \\ & + \sum_{(i, j) \in M_\varepsilon^0} \left| \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^m \sum_{s=1}^{m1} A_{ps}^{lj} u_{ps}^i (\lambda_{ps}^i - \lambda_{ps}^{0i}) \right| \rightarrow \min_{\lambda} , \end{aligned} \quad (5.5.23)$$

при условиях

$$0 \leq \lambda_{ps}^i \leq 1, \quad i = \overline{1, N}; \quad (5.5.24)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{ps}^i = 1; \quad p = \overline{1, m}; \quad s = \overline{1, m1} . \quad (5.5.25)$$

Эта задача легко сводится к задаче линейного программирования. Последняя решается симплекс-методом. В результате получаем в каждой

точке сетки  $\gamma$  значение вектор-функции  $\lambda^*(\cdot)$ , являющейся решением задачи минимизации функционала (5.5.6) на симплексе  $\Lambda_0$ .

Это решение может либо содержать все целые компоненты (и тогда оно является также оптимальным целым решением задачи (5.5.7)), либо иметь несколько дробных значений, округление которых не представляет затруднений. Будем считать, что для каждой точки сетки  $\gamma$  большей компоненте вектора  $\lambda^*(\cdot)$  соответствует значение этой компоненты вектора  $\lambda^{**}(\cdot)$  равное 1, остальные компоненты  $\lambda^{**}(\cdot)$  обнуляем.

Заметим, что при возрастании размерности задач, т. е. при увеличении количества узлов сетки  $\gamma$ , дробные значения появляются все чаще и обычные методы округления в большинстве случаев не приводят к оптимальному решению задачи (5.5.7). Во избежание описанной ситуации при решении задачи (5.5.7) можно воспользоваться методом ветвей и границ в сочетании с методом отсечения плоскостей.

Для апробации метода, разработанного на основе метода последовательной линеаризации, был решен ряд тестовых и модельных задач. Результаты решения некоторых из них приведены ниже.

**Тестовая задача:** найти такое разбиение  $\bar{\omega}^*$  квадрата  $\Omega = (x, y): 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4$  на  $N=5$  подмножеств, при котором

$$V(\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})) = \int_{\Omega} |\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega})) - Z(x)| dx \rightarrow \min_{\varphi_0(\cdot, \bar{\omega}) \in \Phi}, \quad (5.5.26)$$

где  $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$  – решение задачи

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \Delta \varphi(x, t) + 7e^{-t} (x - 2)^2 + y - 2^2; \quad (5.5.27)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x, \bar{\omega}), \quad \varphi_0(x, \bar{\omega}) \in U, \quad (5.5.28)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t \in [0, T]. \quad (5.5.29)$$

$$U = \{ \varphi(x) = \varphi_{0i}(x) \quad \forall x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; \quad \Omega_1, \dots, \Omega_N \in P_N(\Omega) \}.$$

В случае, когда функция  $Z(x) \equiv 0$  на всей области  $\Omega$ , а функции  $\varphi_{0i}(x)$ , определяющие множество допустимых управлений, задавались следующим образом:

$$\varphi_{0i}(x) = \max \left[ x_1 - \tau_{1i}, x_2 - \tau_{2i} \right], \quad i = \overline{1, 5}, \quad (5.5.30)$$

где  $\tau_4 = (0, 0)$ ,  $\tau_2 = (2, 2)$ ,  $\tau_1 = (0, 4)$ ,  $\tau_3 = (4, 0)$ ,  $\tau_5 = (4, 4)$ , оптимальное разбиение квадрата  $\Omega$  получено на четвертой итерации в виде, изображенном на рис. 5.17. Для численного решения этой задачи область  $\Omega$  по-

крывалась сеткой  $m \times m_1 = 20 \times 20$ . Двойные интегралы, входящие в формулы для определения функций  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , значения функционалов исходной задачи и соответствующей вспомогательной непрерывной задачи оптимизации на симплексе, а также ее дифференциала Габо вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций по узлам сетки.

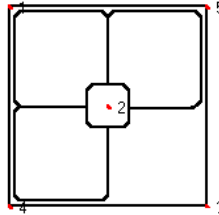


Рис. 5.17

Таблица 5.4

Итерация	$I (0 \leq \lambda \leq 1)$	$I (\lambda = 0 \vee 1)$	Число точек в $\Omega_0$
1	60.71	60.71	0
2	31.2249	31.2249	0
3	30.6585	31.2249	0
4	30.6574	30.6574	4
5	30.618	30.6574	4

Начальное разбиение квадрата было задано следующим образом:  $\Omega_1 = \Omega$ ,  $\Omega_i = \emptyset, i = \overline{2, 4}$ . Информация о значении функционалов задач исходной и соответствующей непрерывной задачи минимизации на симплексе, о количестве узлов сетки, входящих во множество  $M_\varepsilon^0$  (напомним, что это множество всех точек из  $\Omega$ , для которых  $|\varphi(x, T) - Z(x)| \leq \varepsilon$ ), содержится в табл. 5.4. При этом  $\varepsilon = 0.025$ . Следует отметить, что в силу равенства нулю функции  $Z(x)$  и неотрицательности значений  $\varphi(x, T)$ , полученное на последней итерации разбиение квадрата действительно является оптимальным, это соответствует результатам раздела 5.4.

**Модельная задача.** Для того чтобы убедиться в правильности работы алгоритма, рассматривалась задача стартового управления вида

$$V(u(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) = \int_{\Omega} \varphi(x, 1, u) - z(x)^2 dx \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (5.5.31)$$

где  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ ;  $\varphi = \varphi(x, t, u)$  – решение краевой задачи

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + \exp(-t)((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1], \quad (5.5.32)$$

$$\varphi(x, 0) = u(x; \bar{\omega}, \tau) \quad \forall x \in \Omega, \quad (5.5.33)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]. \quad (5.5.34)$$

Ограничения на управление  $u(\cdot)$  имеют вид:

$$U = u(x) \in L_2(\Omega): u(x) = \|x - \tau_i\|^2 \quad \forall x \in \Omega_i, \quad \bar{\omega} \in P_2(\Omega).$$

В качестве функции  $z(x)$  выступало аналитическое решение краевой задачи (5.5.31) – (5.5.34) с функцией начальных условий вида  $\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_{0i}(x)\lambda_i(x)$ , где  $N = 2$ ,  $\varphi_{01}(x) = 7\|x - \beta_1\|^2$ ,  $\varphi_{02}(x) = 2\|x - \beta_2\|^2$ ,  $\beta_1 = (3, 2)$ ,  $\beta_2 = (1, 2)$ , а в качестве  $\lambda_i(\cdot)$  выступали характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение квадрата  $\Omega$ , представленное на рис. 5.18 (пунктир).

Начальное разбиение множества:  $\Omega_1^{(0)} = \Omega$ ,  $\Omega_2^{(0)} = \emptyset$ . Погрешность, допускаемая при определении множества  $M_\varepsilon^0$ , равна  $\varepsilon = 0.01$ ; погрешность выполнения критерия окончания итерационного процесса равна  $\varepsilon_1 = 0.0001$ .

Оптимальное разбиение, полученное на 7-й итерации, изображено на рис. 5.18 (сплошная линия). Заметим, что в точности желаемое разбиение (изображенное на рис. 5.19 пунктиром) получить сложно. Это обусловлено, во-первых, погрешностью вычисления решения краевой задачи (5.5.32) – (5.5.34), функционалов исходной и вспомогательной задач; во-вторых, погрешностью, допускаемой при определении множества  $M_\varepsilon^0$ . Значение же функционала исходной задачи, как можно наблюдать, от итерации к итерации уменьшается (см. табл. 5.5), что говорит о правильности работы алгоритма.

При решении этой же задачи с исходной информацией в виде:

$N = 3$ ,  $\varphi_{0i}(x) = \|x - \tau_i\|^2$ ,  $\tau_1 = (1, 1)$ ,  $\tau_2 = (2, 3)$ ,  $\tau_3 = (3, 1)$ , функция  $Z(x)$  – решение краевой задачи, с функцией начальных условий вида  $u(x) = \sum_{i=1}^3 \|x - \tau_i\|^2 \lambda_i(x)$ ,  $\lambda_i(\cdot)$  – характеристические функции подмно-

жеств, составляющих разбиение квадрата  $\Omega$ , представленное на рис. 5.19 пунктиром, на седьмой итерации получено оптимальное разбиение множества, изображенное на рис. 5.19 сплошной линией. Значение функцио-

нала исходной задачи уменьшилось с 44.621 до 1.75. Подробная информация о процессе построения минимизирующей последовательности содержится в табл. 5.6.

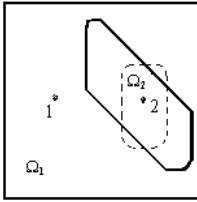


Рис. 5.18

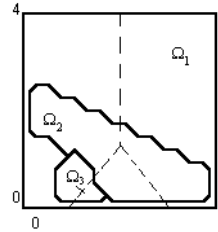


Рис. 5.19

Таблица 5.5

Итерация	$I(0 \leq \lambda \leq 1)$	$I(\lambda = 0 \vee 1)$	Число точек в $\Omega_0$
1	10.29	10.29	0
2	3.67	3.67	0
3	0.88	3.67	42
4	0.6827	3.61	60
5	0.6512	2.83	56
6	0.6113	0.6113	43
7	0.1816	0.6113	125

Таблица 5.6

Итерация	$I(0 \leq \lambda \leq 1)$	$I(\lambda = 0 \vee 1)$	Число точек в $\Omega_0$
1	10.45	10.45	0
2	3.8976	3.8976	0
3	3.2783	3.2839	3
4	0.6996	0.7104	2
5	0.4158	0.7104	80
6	0.3831	0.7104	98
7	0.3831	0.7104	117

Анализируя результаты решения как тестовых, так и модельных задач, можно сделать следующий вывод: алгоритм, разработанный на основе метода последовательной линеаризации Р. П. Федоренко, действительно позволяет строить минимизирующую последовательность управлений для задачи стартового управления с недифференцируемым функционалом, в которой в качестве управляющих функций выступают характеристические функции подмножеств.

# Глава 6

## ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

### *6.1. ДИАГРАММА ВОРОНОГО КАК РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА ИЗ $E_n$ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ*

Решение многих модельных задач оптимального разбиения множества из евклидова пространства без ограничений (линейных или нелинейных, динамических или стохастических) часто приводит к так называемым диаграммам Вороного или, что то же, разбиениям Дирихле. В этом разделе приведем определение этой структуры, опишем ее свойства, существующие алгоритмы построения, отличные от тех, которые разработаны для решения непрерывных задач ОРМ. Также рассмотрим различные обобщения (варианты) диаграммы Вороного и проследим, насколько широк спектр практических ее приложений.

#### **Определение и некоторые свойства диаграммы Вороного**

Как известно, диаграмма Вороного – это математический объект, который нестрого описывается следующим образом. Если на плоскости задан конечный набор точек, то для каждого элемента набора можно определить так называемую ячейку Вороного – множество точек плоскости, для которых данный элемент является ближайшим из всех точек набора. Границы ячеек Вороного образуют разбиение плоскости, которое и называют диаграммой Вороного. Рассматриваемая математическая структура называется по имени Георгия Вороного [172], но она также известна под названием полигонов Тиссена [116] или двумерных сот Дирихле [135]. Диаграммы Вороного в двух и трех измерениях используются в самых разных областях прикладных наук: кристаллографии, физике, астрономии, химии, микробиологии, компьютерной графике, при решении проблем искусственного интеллекта, распознавания образов, офтальмологии. В физике конденсированных сред такие мозаики также известны как блоки Вигнера – Зейтца [36, 91, 101]. Для общих решеток в группах Ли клет-

ки называют просто фундаментальными областями [150, 151]. В случае общих метрических пространств клетки часто называют метрическими фундаментальными многоугольниками. Другие эквивалентные названия этой математической структуры (или конкретных важных его приложений): многогранники Вороного, полигоны Вороного, домены влияния, разложения Вороного, мозаики Вороного, тесселяции Дирихле. Следует заметить, что под ячейками понимаются выделенные части континуальной системы, которые периодически расположены по объему системы, при этом каждая частица или вакансия занимает модифицированную ячейку Вигнера – Зейтца, окруженную полиэдром Вороного [174].

Далее приведем строгое определение диаграммы Вороного, некоторые ее свойства и некоторые существующие алгоритмы построения, приведенные в литературе по вычислительной геометрии. Опишем единый подход к построению различных обобщений диаграммы Вороного, основанный на формулировании непрерывной задачи оптимального разбиения множества (ОПМ) с критерием качества, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы, и решении полученной задачи методами ОПМ. Представим спектр практических приложений разнообразных диаграмм Вороного.

### Определение и алгоритмы построения диаграммы Вороного

Вначале приведем формальное определение диаграммы Вороного. Пусть  $M \subset R^2$  – конечное множество точек, элементы которого будем обозначать  $M_i$ . Многоугольником Вороного точки  $M_i$  множества  $M$  называется множество  $Vor(M_i)$ , такое что:

$$Vor(M_i) = \{x \in R^2 : \rho(x, M_i) \leq \rho(x, M_j), \forall j \neq i\},$$

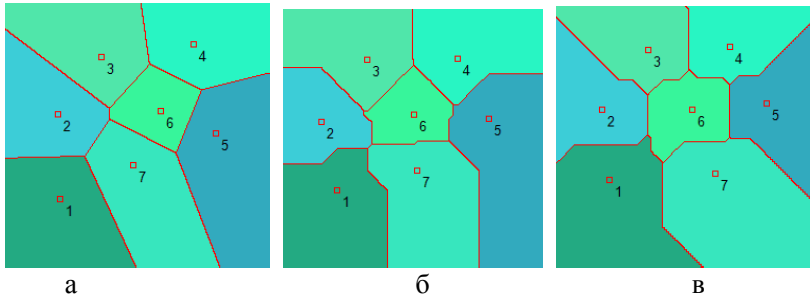
где  $\rho(x, y)$  – заданная метрика. Обычно – это стандартная евклидова метрика

$\rho(x, y) = \sqrt{x_1 - y_1^2 + x_2 - y_2^2}$ . Однако иногда рассматривают и

случай так называемой манхэттенской метрики  $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$  или универсальной метрики

$\rho(x, y) = \max |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|$ . На рис. 6.1 представлена диаграмма Вороного семи точек на квадрате в случае всех трех указанных метрик. Далее, если не оговорено иного, будет рассматриваться случай евклидовой метрики.

Очевидно, что многоугольник Вороного точки  $M_i$  представляет собой пересечение замкнутых полуплоскостей  $\Pi_j, j \neq i$ , где полуплоскость  $\Pi_j$  содержит точку  $M_i$  и ограничена соединенным перпендикуляром к отрезку  $M_i M_j$ . Поэтому множество  $Vor(M_i)$  является выпуклым многоугольником (возможно, неограниченным).



**Рис. 6.1.** Диаграмма Вороного семи точек в случае: а - евклидовой метрики; б - манхэттенской метрики; в - универсальной метрики

Диаграммой Вороного называется разбиение плоскости в объединение выпуклых многоугольников, полученных путем построения для каждой точки  $M_i$  из множества  $M$  ее многоугольника Вороного. Вершины многоугольников Вороного называются вершинами диаграммы Вороного, а их ребра – ребрами диаграммы Вороного.

Приведем несколько важных свойств диаграммы Вороного [89].

**Утверждение 1.** Пусть множество  $M$  таково, что никакие четыре точки его не лежат на одной окружности и никакие три точки из него не лежат на одной прямой. Тогда в каждой вершине диаграммы Вороного стыкуются ровно три ребра. Другими словами, каждая вершина  $V$  диаграммы Вороного является центром окружности  $C(V)$ , на которой лежат ровно три точки из множества  $M$ .

**Утверждение 2.** Пусть выполняются условия утверждения 1. Тогда внутри круга, ограниченного окружностью  $C(V)$ , не содержится точек из множества  $M$ .

**Утверждение 3.** Диаграмма Вороного является планарным графом, поэтому она имеет  $O(n)$  вершин и рёбер, где  $n = |M|$ .

**Утверждение 4.** Ячейка Вороного  $V_i$  является бесконечной тогда и



только тогда, когда точка  $M_i$  лежит на границе выпуклой оболочки множества  $M$ .

Точки, принадлежащие, согласно определению, сразу нескольким ячейкам Вороного, обычно так и относят сразу к нескольким ячейкам (в случае евклидовой метрики множество таких точек имеет меру нуль).

Диаграммы Вороного – достаточно хорошо изученный объект, и для них получено множество различных алгоритмов, работающих за оптимальную асимптотику  $O(n \log(n))$ , а некоторые из этих алгоритмов даже работают в среднем за  $O(n)$ . Однако все эти алгоритмы весьма сложны.

Простой алгоритм построения диаграммы Вороного за число шагов порядка  $O(n^4)$  основан на свойстве о том, что каждая ячейка Вороного представляет собой пересечение полуплоскостей: фиксируется  $i$ ; проводится серединный перпендикуляр между точкой  $M_i$  и каждой точкой  $M_j$ ; затем пересекаются попарно все полученные прямые – получается  $O(n^2)$  точек, и каждая проверяется на принадлежность всем  $n$  полуплоскостям. В результате за число действий порядка  $O(n^3)$  находятся все вершины ячейки Вороного  $V_i$  (их уже не более  $n$ , поэтому можно без ухудшения асимптотики отсортировать их по полярному углу).

Заметим, что диаграмма Вороного на плоскости в случае метрики  $\rho(x, y) = \max |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|$  уже для двух точек  $A$  и  $B$  представляет собой нетривиальный объект. Если  $a_1 = b_1$  или  $a_2 = b_2$ , то границей между ячейками Вороного для них является соответственно вертикальная или горизонтальная прямая. В других случаях диаграмма Вороного имеет вид «уголка»: отрезок под углом  $45^\circ$  в прямоугольнике, образованном точками  $A$  и  $B$ , и горизонтальные/вертикальные лучи из его концов в зависимости от того, какая сторона прямоугольника длиннее – вертикальная или горизонтальная. Если же этот прямоугольник вырождается в квадрат, т. е.  $|a_1 - b_1| = |a_2 - b_2|$ , то появляются две бесконечные области («уголки», образованные двумя лучами, параллельными осям), которые по определению должны принадлежать сразу обоим ячейкам. Тогда дополнительно нужно определить, как следует понимать эти области. Иногда искусственно вводят правило, по которому каждый уголок относят к своей ячейке.

В [89] приведены также алгоритм Бойер – Ватсона генерации диа-

граммы Вороного в случае любого числа измерений; алгоритм Форчуна (сложность  $O(n \log(n))$ ) для генерации диаграммы Вороного из набора точек на плоскости; алгоритм Ллойда, он же алгоритм К-средних кластеризации, который производит разбиения Дирихле – Вороного в пространстве произвольной размерности, адаптивные алгоритмы.

Другие алгоритмы построения диаграммы Вороного можно найти, например, в [3, 81, 122, 125, 154].

Хотя определение обычной диаграммы Вороного на случай пространства произвольной размерности является очевидным, ее построение связано со значительными алгоритмическими трудностями. При заданном числе точек количество элементов, необходимых для описания диаграммы Вороного, растет экспоненциально в зависимости от размерности пространства.

Таким образом, диаграмма Вороного конечного множества  $M$  точек на плоскости представляет собой разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов заданного множества  $M$ , чем к любому другому элементу этого множества. Основой для обобщения определения диаграммы Вороного могут служить такие его элементы [89, 154]: множество точек, плоскость, один элемент, а также формулы, по которым определяется близость двух точек. Различные приложения диаграммы Вороного вызывают различные ее вариации. Далее рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике обобщения диаграммы Вороного.

### Различные вариации диаграммы Вороного

В поисках структуры данных, обеспечивающей эффективное решение задачи поиска  $k$ -ближайших соседей, может возникнуть желание определить области, содержащие точки, более близкие к некоторому заданному подмножеству из  $k$  элементов заданного множества  $M$ , чем к любому другому подмножеству с таким же числом элементов. Если положить  $k = |M| - 1$ , то получится *диаграмма Вороного дальней точки* (*Furthest Point Voronoi Diagram*). Разработке эффективных алгоритмов построения таких диаграмм, а также вопросам их практического применения посвящены, например, работы [89, 119, 126, 155, 174].

Одним из наглядных способов получения диаграммы Вороного является выращивание кристаллов. Если кристаллы начинают расти в одно и то же время и с одной и той же скоростью, то получается определенное число растущих кругов, которые, встречаясь, образуют прямые. В конечном счете вся плоскость заполняется, при этом каждый кристалл точно

занимает область Вороного его возникновения.

В действительности кристаллы начинают расти в разное время. Даже если они растут с одинаковой скоростью, но рост начинается в разное время, то границы между ними уже представляют собой гиперболические сегменты.

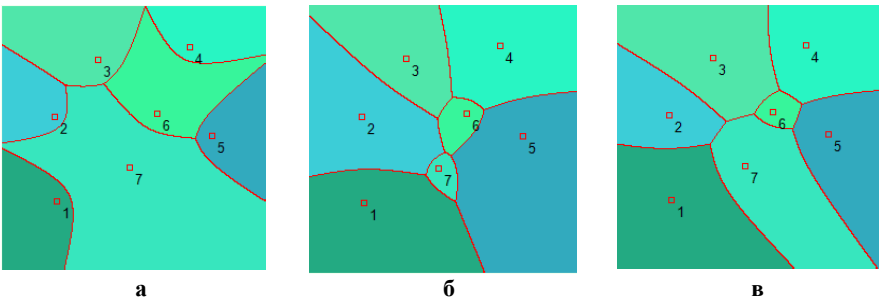
Такая ситуация соответствует так называемой *аддитивно взвешенной диаграмме Вороного (Additively Weighted Voronoi Diagram)* [2, 89, 119, 130]. Она определяется как обычная (стандартная) диаграмма Вороного, но каждая точка в ней имеет свой вес  $w_i$ , который добавляется к функции, задающей расстояние, при измерении последнего:

$$AWVor(M_i) = x \in R^2 : \rho(x, M_i) - w_i \leq \rho(x, M_j) - w_j, \quad \forall j \neq i .$$

На рис. 6.2 представлены границы между ячейками Вороного семи точек с различными весами:

- а)  $w = (-1; -0.3; -0.6; -0.2; -0.9; -2; -3)$  ;
- б)  $w = (1; 0.3; 0.6; 0.2; 0.9; 2; 3)$  ;
- в)  $w = (-1; -0.3; -0.6; 0.2; 0.9; 1.3; 0)$  .

Заметим, что стандартная диаграмма Вороного для этих же точек представлена на рис. 6.1, а).



**Рис. 6.2.** Аддитивно взвешенная диаграмма Вороного: а - отрицательные веса; б - положительные веса; в - веса принимают значения разных знаков

Случай, когда все кристаллы начинают расти одновременно, но растут с разной скоростью, соответствует так называемой *мультипликативно взвешенной диаграмме Вороного (Multiplicatively Weighted Voronoi Diagram)* [125, 171]: каждая точка получает вес, и при измерении расстояния к ней нужно умножить функцию, задающую расстояние, на этот вес. Обычно в математической литературе мультипликативно взвешенную

ячейку Вороного определяют следующим образом:

$$MWVor(M_i) = \{x \in R^2 : \rho(x, M_i) / w_i \leq \rho(x, M_j) / w_j, \forall j \neq i\}.$$

Границы между различными ячейками в такой диаграмме представляют собой сегменты круга. В качестве примера на рис. 6.3 представлена стандартная диаграмма десяти точек на квадрате, а также мультипликативно взвешенная ее вариация.

Существует еще одно обобщение диаграммы Вороного, известное под названиями: комплексы ячеек Дирихле, *диаграмма Пауэра или диаграмма Лагерра (Power Voronoi Diagram)* [89]. Пусть  $M$  – множество из  $N$  точек в пространстве  $E^2$ . С каждой точкой  $M_i$  множества  $M$  связано действительное число  $w_i$ . Для каждой точкой  $M_i \in M$  определим множество

$$GVor(M_i) = \{x \in R^2 : \rho^2(x, M_i) - w_i \leq \rho^2(x, M_j) - w_j, j \neq i, i, j = \overline{1, N}\},$$

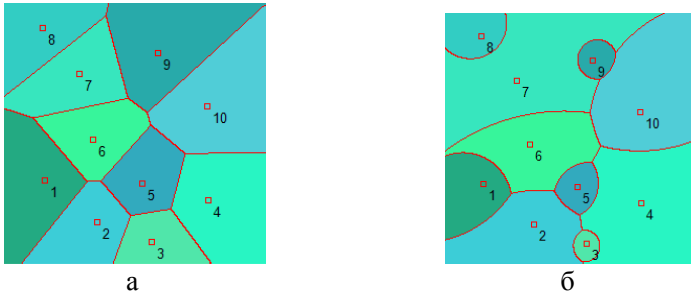
называемое *обобщенной областью Вороного точки  $M_i$*  (относительно множества  $M$ ). Обобщенной диаграммой Вороного (Power Voronoi Diagram) множества  $M$  называется следующее множество

$$GVor(M) = \bigcup_{M_i \in M} GVor(M_i).$$

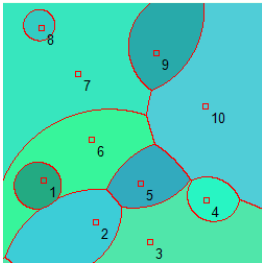
На рис. 6.4 представлена мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного, стандартный вариант которой см. на рис. 6.3, а). Аддитивно и мультипликативно взвешенная ее вариация приведена на рис. 6.5. Диаграмма Пауэра для этих же точек-генераторов представлена на рис. 6.6.

Одним из наиболее интересных фактов использования аддитивно взвешенной диаграммы Вороного является ее применение в анимации. Так, например, в работе [171] продемонстрировано применение аддитивно взвешенных диаграмм Вороного в качестве диаграмм деформации для коррекции искаженных изображений, в электронной анимации ECTS.

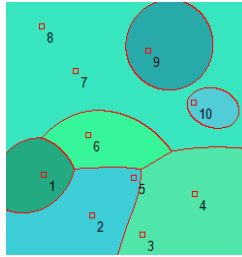
Диаграммы Вороного для  $n$  точек в  $d$ -мерном пространстве требуют  $O(n^{\lceil d/2 \rceil})$  места для хранения. Следовательно, хранить диаграммы Вороного для  $d > 2$  часто не представляется возможным. В качестве альтернативы можно использовать приближенные (нечеткие) диаграммы Вороного, где клетки Вороного имеют нечеткие границы, каждая из которых может быть аппроксимирована. Нечеткие диаграммы Вороного появляются и в том случае, когда любая точка множества  $M$  имеет нечеткие координаты или веса функций двух точек, определяющих ячейки Вороного, заданы нечетко.



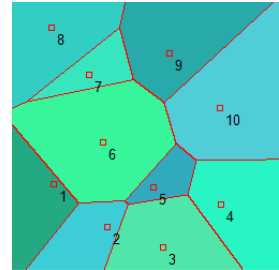
**Рис. 6.3. Диаграмма Вороного 10 точек:**  
а - стандартная; б - мультипликативно взвешенная



**Рис. 6.4. Мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного**



**Рис. 6.5. Аддитивно и мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного**



**Рис. 6.6. Диаграмма Пауэра**

В работе [122] изучаются диаграммы Вороного с ограничениями на мощности точек-генераторов. При этом в качестве мощности точки  $M_i$  множества  $M \subset \Omega$ ,  $\Omega \subset E^2$ , выступает взвешенная площадь ячейки Вороного, определяемая следующей формулой:

$$|\text{Vor}(M_i)| = \int_{x \in \text{Vor}(M_i)} \rho(x) dx,$$

где  $\rho(x) \geq 0$ ,  $x \in \Omega$ , – заданная функция плотности.

Диаграммой Вороного с ограничениями на мощность точек  $\text{Vor}(M, C)$  называется диаграмма Вороного на множестве  $\Omega$ , в которой каждая точка  $M_i \in M$  имеет свою мощность  $c_i \in C$ , или, что то же, диаграмма, удовлетворяющая следующему условию:

$$\sum_{i=1}^N (|V(s_i)| - c_i)^2 = 0.$$

Множество параметров  $C = c_i | i \in \{1, \dots, n\}$ , таких что  $0 < c_i \leq \infty$ ,

$\sum_{i=1}^N c_i = \int_{x \in \Omega} \rho(x) dx$ , считается заданным. Забегая немного вперед, следует

заметить, что такого рода диаграммы Вороного появились задолго до появления работы [122] в научной литературе. Так, в работах [44, 64, 136] представлены непрерывные задачи оптимального разбиения множеств с ограничениями на мощности подмножеств, математические формулировки которых включают в себя с точностью до обозначений вышеприведенные условия на взвешенные площади ячеек Вороного. Оптимальными разбиениями в таких задачах и есть так называемые диаграммы Вороного с ограничениями на мощности точек-генераторов.

В [141] представлено обобщение разбиения Вороного, называемое *разбиением Вороного, основанным на эффективности (effectiveness-based Voronoi partition (EBVP))* путем введения функции  $f_i(x, M_i)$  узла  $M_i$  в качестве меры эффективности предоставления сервиса этим узлом произвольной точке  $x$  множества  $\Omega \subset E^2$ .

Пусть  $F = \{f_i : \Omega \times M \rightarrow R, i = \overline{1, N}\}$  – набор функций узлов  $M_i, i = \overline{1, N}$ .

Определим набор подмножеств  $\{V_i^E, i = \overline{1, N}\}$ , такой что  $Q = \bigcup_{i=1}^N V_i^E$ , где

множество  $V_i^E$  определяется следующим образом:

$$V_i^E = \{x \in \Omega | f_i(x, M_i) \geq f_j(x, M_j), j = \overline{1, N}, j \neq i\}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Так как  $V_i^E \cap V_j^E \neq \emptyset$ , границей между множествами  $V_i^E$  и  $V_j^E$  называется множество

$$\partial V_{ij}^E = \{x \in \Omega | f_i(x, M_i) = f_j(x, M_j)\}, \quad i, j \in 1, 2, \dots, N.$$

Набор множеств  $\{V_i^E, i = \overline{1, N}\}$  с непересекающимися внутренностями и называется основанным на эффективности разбиением Вороного множества  $\Omega$  с наборами узлов  $M$  и узловых функций  $F$ :

$$V^E(\Omega) = \{V_i^E, i = \overline{1, N} : \bigcup_{i=1}^N V_i^E = \Omega, \text{mes } \partial V_{ij}^E = 0, \forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j\}$$

Множество  $V_i^E$  называется EBV-множество, соответствующее  $i$ -му узлу.

Очевидно, что различные виды диаграмм Вороного – стандартная, взвешенная аддитивно и/или мультипликативно, Пауэра, диаграмма дальней точки – являются частными случаями диаграммы EBVP при соответствующем задании узловых функций.

Еще одним обобщением являются *динамические диаграммы Вороного* [120, 142, 157]. Так, например, в [120] задача управления малым самолетом при наличии ветров проинтерпретирована как задача построения динамической диаграммы Вороного (ZVD-задача). Узлы диаграммы (так называемые генераторы) – не фиксированы, а являются подвижными целями, которые необходимо достичь за минимальное время. Эта задача известна как задача навигации Цермело.

Динамические диаграммы Вороного являются мощным инструментом при проектировании современных географических информационных систем [142, 143]. Об использовании данного инструментария при решении задач координации в области робототехники, контроля и биологии см., например, в [147, 148, 159].

Перейдем теперь к изложению единого подхода к построению различных вариаций диаграммы Вороного, основанного на аппарате теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств.

**Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств. Диаграммы Вороного как результат решения непрерывных задач ОРМ**

Приведем здесь самую простую непрерывную задачу оптимального разбиения множеств – *однопродуктовую задачу ОРМ без ограничений* с заданными координатами некоторых, характерных для каждого подмножества, точек, назовем их "центрами" подмножеств.

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n-мерном евклидовом пространстве  $E_n$ ,  $\Sigma_{\Omega}^N$  – класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ :

$$\Sigma_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N): \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N\}.$$

**Задача А1.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}),$$

где

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

функции  $c(x, \tau_i)$  – действительные, ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ;  $\rho(x)$  – ограниченная, измеримая, неотрицательная на  $\Omega$  функция;  $a_1, \dots, a_N$  – заданные неотрицательные числа.

Разбиение  $(\Omega^*_1, \dots, \Omega^*_N)$  множества  $\Omega$ , доставляющее минимальное значение функционалу задачи **A1**, называется *оптимальным*. Как доказано в [44, 64], необходимое условие оптимальности разбиения  $(\Omega^*_1, \dots, \Omega^*_N)$  для задачи **A1** в предположении, что выполняются условия  $\rho(x) \geq 0$ ,  $x \in \Omega$ , записывается так: если возможное разбиение  $(\Omega^*_1, \dots, \Omega^*_i, \dots, \Omega^*_N) \in \sum_{\Omega}^N$  является оптимальным для задачи **A1**, то

$$c(x, \tau_i) + a_i \leq c(x, \tau_k) + a_k \text{ п.в. для } x \in \Omega^*_i, \quad i, k = 1, 2, \dots, N.$$

В точках  $x$ , принадлежащих оптимальной границе подмножеств  $\Omega^*_i$  и  $\Omega^*_k$ , в неравенстве достигается знак равенства.

Если в задаче **A1**  $c(x, \tau_i)$  – евклидова метрика,  $\rho(x) \equiv \text{const} \forall x \in \Omega$ ,  $a_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , то оптимальное решение оказывается разбиением Дирихле – Вороного, т. е. разбиением множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N$ , определяемым следующими формулами:

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$c(x, \tau_i) = \min_{k=1, 2, \dots, N} c(x, \tau_k) \text{ при } x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Кроме того, в [123] доказано, что из всех возможных разбиений плоскости оптимальным является разбиение на правильные шестиугольники. Но такое разбиение определяется соответствующим положением центров подмножеств.

Поскольку в рассматриваемой задаче **A1** разбиваемое множество  $\Omega$  является ограниченным и не совпадает со всем пространством  $E_n$ , то не все отмеченные выше свойства разбиений Дирихле – Вороного можно автоматически перенести на рассматриваемую задачу. При численном решении задачи разбиения единичного квадрата из  $E_2$  такие свойства, как выпуклость подмножеств  $\Omega_i$  и кусочная линейность оптимальных границ, сохраняются и для случая выпуклого ограниченного множества  $\Omega$ . Оптимальное же разбиение выпуклой ограниченной части плоскости уже не



будет иметь вид правильной шестиугольной мозаики.

Непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданными координатами центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  соответственно называется

**Задача А3.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p; \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad ,$$

где  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ;  $b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Как уже было отмечено, оптимальным решением задачи **А3** при соответствующем задании метрики и других параметров является диаграмма Вороного с ограничениями на мощности центров подмножеств.

В табл. 6.1 приведено соответствие между конкретной вариацией диаграммы Вороного и математической моделью непрерывной задачи оптимального разбиения множеств, в результате решения которой может быть получена эта диаграмма.

Таблицу 6.1 можно продолжить, варьируя параметры задач **А1** и **А3** и получая при этом все новые обобщения диаграммы Вороного. Очевидно, непрерывная задача оптимального разбиения множеств может быть сформулирована с таким критерием качества разбиения и дополнительными условиями, которые обеспечивали бы получение в качестве ее решения соответствующий вид диаграммы Вороного. Заметим, что именно так были получены все варианты диаграммы Вороного, приведенные на рисунках данного раздела.

Таблица 6.1

**Модели непрерывных задач ОРМ и диаграммы Вороного, являющиеся оптимальным решением этих задач**

Модель непрерывной задачи ОРМ	Тип разбиения Вороного
Задача А1: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i)$ , $a_i = 0$ , $i = \overline{1, N}$ , здесь и далее $r(x, y) = \ x - y\ $ – метрика	Стандартная диаграмма Вороного
Задача А1: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i)$ , $a_i \neq 0$ , $i = \overline{1, N}$	Аддитивно взвешенная диаграмма Вороного
Задача А1: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) / w_i$ , $w_i > 0$ , $a_i \neq 0$ , $i = \overline{1, N}$	Мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного
Задача А1: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = \beta_i r(x, \tau_i)$ , $\beta_i, a_i > 0$ , $i = \overline{1, N}$	Мультипликативно и аддитивно взвешенная диаграмма Вороного
Задача А1: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = r^2(x, \tau_i)$ , $a_i = A_i^2$ , $i = \overline{1, N}$	Диаграмма Пауэра или Лагерра (Power Voronoi Diagram) с весами $A_i^2$
Задача А1: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = -r(x, \tau_i)$ , $a_i = 0$ , $i = \overline{1, N}$	Диаграмма Вороного дальней точки
Задачи А1: $\rho(x)$ – произвольная $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i)$ , $a_i = \text{Const}_i$ , $i = \overline{1, N}$	Другие взвешенные диаграммы
Задача А1: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = f_i(x, \tau_i)$ , $a_i = 0$ , $i = \overline{1, N}$	Диаграмма Вороного, основанная на эффективности
Задача А3: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i)$ , $a_i = 0$ , $i = \overline{1, N}$	Диаграмма Вороного с ограничениями на мощности точек-генераторов
Задача А3: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i)$ , $a_i \neq 0$ , $i = \overline{1, N}$	Аддитивно взвешенная диаграмма Вороного с ограничениями на мощности точек-генераторов
Задача А3: $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ , $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) / w_i$ , $w_i > 0$ , $a_i \neq 0$ , $i = \overline{1, N}$	Мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного с ограничениями на мощности точек-генераторов

### **Методы ОРМ как универсальный математический аппарат для построения различных типов диаграмм Вороного**

Таким образом, единым подходом (способом) построения различных вариаций диаграммы Вороного является подход, основанный на формулировании непрерывных задач оптимального разбиения множеств с критериями качества разбиения, обеспечивающими соответствующие виды диаграммы Вороного, и применении разработанного в [65] математического и алгоритмического аппарата решения таких задач.

Универсальность данного подхода к построению диаграмм Вороного подтверждается еще и следующими фактами. Во-первых, модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств могут быть обобщены на случай нечеткого задания исходных параметров задачи или требования нечеткого разбиения множества, в результате чего и результирующие диаграммы Вороного могут носить нечеткий характер.

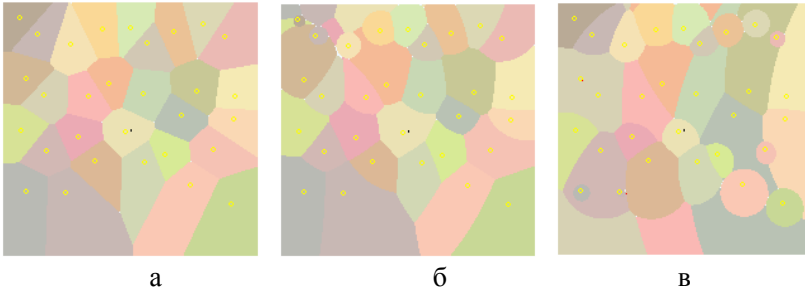
Во-вторых, если при математическом описании практических задач оптимального разбиения множеств учитывать состояние некоторого объекта или процесса, которое может изменяться со временем и/или в пространстве, можно получить в результате решения некоторых таких задач динамические диаграммы Вороного.

В-третьих, среди непрерывных задач оптимального разбиения множеств выделяют класс задач, в которых наряду с разбиением нужно отыскать еще и оптимальное расположение центров подмножеств. Таким образом, наряду с задачей построения диаграммы Вороного можно ставить задачу отыскания оптимальных (в каком-то смысле) координат точек-генераторов этой диаграммы.

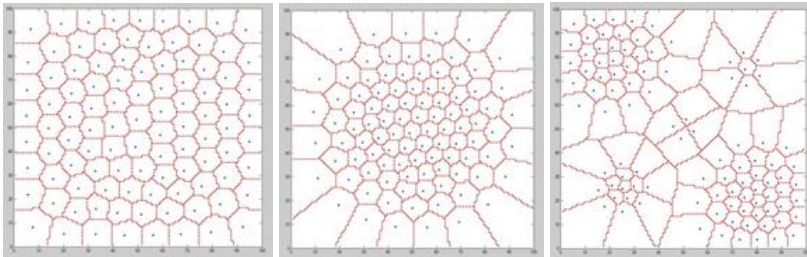
В-четвертых, в основе методов решения приведенных задач ОРМ лежит следующая общая идея. Исходные задачи ОРМ, которые математически сформулированы как бесконечномерные задачи оптимизации, сводятся через функционал Лагранжа к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина, для численного решения которых применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации, а именно, различные модификации  $g$ -алгоритма Шора.

Особенностью такого подхода является тот факт, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить аналитически в явном виде, причем в аналитическое выражение могут входить параметры, отыскиваемые как оптимальное решение вышеназванных вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями.

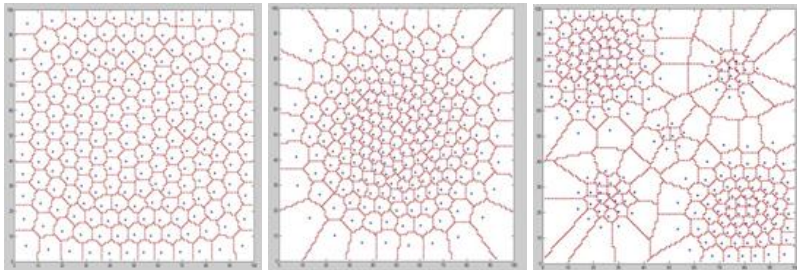
И, наконец, в-пятых, сложность алгоритмов построения диаграмм Вороного на основе описанного подхода существенно не меняется при увеличении количества точек-генераторов (см. рис. 6.7 –6.9).



**Рис. 6.7. Диаграммы Вороного, генерируемые 30 точками:**  
а - стандартная; б, в – взвешенные



**Рис. 6.8. Диаграммы Вороного, генерируемые 100 точками**



**Рис. 6.9. Диаграммы Вороного, генерируемые 200 точками**

Как известно, существуют диаграммы Вороного высших порядков [89], с помощью которых можно решать задачи о поиске наиболее удаленных точек или  $k$ -ближайших соседей. На рис. 6.10 приведен пример диаграммы Вороного второго порядка, полученной с помощью методов вычислительной геометрии, а также являющейся результатом решения



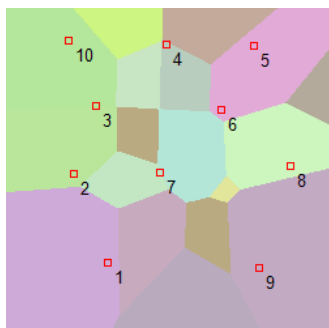


Рис. 6.13. 2-кратная диаграмма Вороного

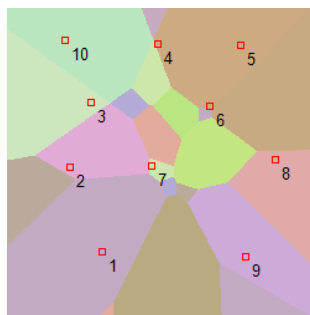


Рис. 6.14. 3-кратная диаграмма Вороного

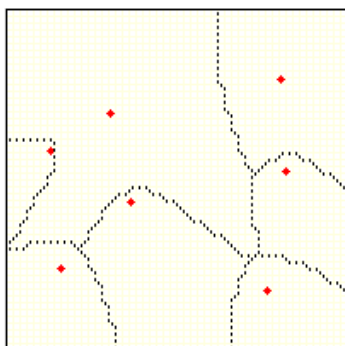


Рис. 6.15. Аддитивно взвешенная диаграмма Вороного с ограниченными мощностями ячеек

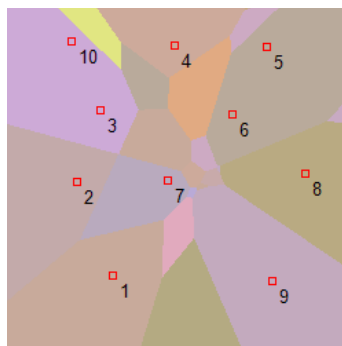


Рис. 6.16. 5-кратная диаграмма Вороного

**Практические приложения диаграммы Вороного и ее различных вариаций.** Универсальность и полезность применения методов ОРМ для решения задач оптимального размещения, основанных на разбиении Вороного, вытекает из приведенных в работе [117] примеров практических задач:

- размещения сенсорных датчиков беспилотных летательных аппаратов, летающих на разных высотах и наблюдающих за большими плоскими географическими регионами;
- задач развертывания поверхностей беспилотных судов для изучения дна океана, размещения базовых станций сотовой сети;
- географической оптимизации размещения электростанций.

В работе [143] выдвинута идея применения диаграмм Вороного в географических информационных системах (ГИС). При этом границы облас-

тей используются для исключения столкновений с географическими объектами. Среди практических примеров наличия динамики в диаграммах Вороного можно привести пример из работы [142]. Авторы отмечают, что географические информационные системы (ГИС) могут легко стать динамичными. Благодаря сложности и разнообразию содержания и функциональных требований на большой площади города текущий пакетный режим ГИС не может удовлетворять требованиям. Динамические модели данных Вороного оказываются перспективным кандидатом для разработки будущих ГИС.

Другим применением диаграммы Вороного, например, является определение максимального свободного пространства. В этом случае формулируется задача о размещении какой-либо службы или предприятия, в которой нужно выбрать положение объекта так, чтобы он был максимально удален от других заданных объектов. Размещаемый объект может быть источником загрязнения (атомная электростанция, склад органических (токсичных) отходов), и тогда его следует размещать так, чтобы минимизировать «эффективность» такого соседства. Либо это может быть новое производство, и поэтому желательно избежать конкуренции за окружающее пространство.

В настоящее время диаграммы Вороного нашли свое приложение в социологии и политологии. В формализованных моделях  $n$ -мерное политическое пространство разбивается на непересекающиеся области: электораты различных партий. Геометрически они представляют собой полиэдры Дирихле – Вороного: совокупности точек пространства, расположенных ближе к точке платформы данной партии, чем к любой другой платформе, и отделенные от соседней совокупности точек  $(n-1)$  – мерной гиперплоскостью [94, 153]. В [94] представлены результаты компьютерных экспериментов на моделях с двумя видами агентов – избирателями и партиями, предусматривавших возможность «рождения» и «гибели» партий.

В работе [154] продемонстрировано применение диаграмм Вороного и ее вариаций к проблеме нарезки избирательных округов в США. В качестве одного из обобщений структуры рассматривалась *Voronoi'sque diagram (диаграмма в стиле Вороного)*: изменение диаграммы Вороного на основе равных масс регионов. Как следует из изложенного в предыдущих главах, такие диаграммы можно получить, решая непрерывные задачи оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями на подмножества.

Есть и другие области применения разбиений Дирихле:

- в технике – расчет прочности конструкций по методу конечных

элементов; создание конечноэлементных сеток, позволяющих избегать малых углов элементов [36, 101, 148, 162];

- в маркетинге – оптимальная разбивка территории, рыночная модель в городах; определение территории рынка, простирающейся вплоть до отдельных розничных магазинов [81, 90, 121, 123, 146];

- в металлургии – моделирование роста зерен в металлических пленках [36, 101, 130];

- в картографии – моделирование поверхности земли, визуализация, анализ видимости на местности, направления потоков воды; создание карт; связка спутниковых фотографий в мозаику [168];

- в метеорологии – оценка количества осадков регионов, приведение данных в дискретные датчики дождя («полигонами Тиссена») [119, 160];

- в распознавании образов – поиск простых дескрипторов для формы, которые можно извлекать из характеристик 1D 2D форм («срединная ось» или «скелет» контура) [1, 132, 171];

- в антропологии и археологии – определение части региона под влиянием различных кланов неолита, вождей, церемониальных центров или городищ [119, 160];

- в статистике и анализе данных – статистическая кластеризация (поиск «естественных соседей», интерполяция) [91];

- в компьютерных науках – вычислительная геометрия; обработка изображений; компьютерная графика, в которой диаграммы Вороного используются для создания органических текстур [89, 155];

- в гидродинамике – как структуры данных при 3D-моделировании течения жидкости [91, 142, 159];

- в астрономии – идентификация групп звезд и галактик и др. [160, 162].

Это – далеко не полный перечень возможных сфер применения такого математического объекта как диаграмма Вороного. Содержательный обзор приложений диаграмм Вороного в различных областях приведен в работе [160]. Широкий обзор последних технических результатов и приложений с несколькими сотнями ссылок на литературу по вычислительной геометрии можно найти в [119].

Кроме полезности диаграмм Вороного, нельзя отрицать красоту и гармонию геометрии, что в последнее время все больше замечают архитекторы и дизайнеры.



## 6.2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Одной из важных задач науки в последнее время становится проблема охраны окружающей среды и ее восстановления. Интенсивное развитие экономики требует выяснения оптимальных условий размещения новых предприятий и технологических ограничений на их промышленные выбросы с учетом минимальной дозы загрязнения экологически значимых зон. Проблема оптимального размещения индустриальных объектов является задачей многоаспектной и алгоритмически сложной. В проблеме оптимальности взаимного расположения промышленных предприятий Г. И. Марчук выделяет следующие типы задач [77]:

- планирование размещения индустриальных объектов в заданной области в соответствии со сформировавшейся экологической структурой (например, строительство крупного комбината в окрестностях того или иного города);
- формирование экологической структуры вокруг промышленных объектов (например, строительство населенных пунктов в связи с предполагаемым сооружением предприятий, эксплуатирующих месторождение полезных ископаемых и поэтому “привязанных” к той или иной местности);
- одновременное размещение индустриальных объектов и планирование экологически значимых зон.

Последние два типа задач можно рассматривать как частные случаи задач оптимального управления, сводящихся в математической постановке к задачам ОРМ с размещением (или без) “центров подмножеств”. В этой главе иллюстрируется возможность практического применения развитого в первых двух главах подхода к решению указанных задач. Рассматриваются две задачи оптимизации диффузионных процессов в атмосфере. Математические модели этих задач включают в себя краевую задачу для дифференциального уравнения процесса переноса и диффузии загрязняющей примеси в атмосфере. Применяя (если это возможно) ее аналитическое решение или аппарат сопряженных уравнений [77, 85, 86], сформулированные задачи оптимального размещения предприятий сводят к задачам оптимального разбиения множества. В первом подразделе приведена постановка и алгоритм решения задачи формирования экологиче-

ской структуры вокруг промышленных предприятий, то есть выделения в заданном регионе экологически значимых зон определенной площади с учетом экологического фактора. Во втором подразделе эта задача усложнена требованием размещения индустриальных объектов [68, 69].

### 6.2.1. Задача формирования экологической структуры вокруг промышленных объектов

Пусть в некотором регионе  $\Omega$  действуют  $M$  промышленных предприятий, выбрасывающих в атмосферу загрязняющую примесь. Требуется в заданной области  $\Omega$  выделить  $N$  экологически значимых зон определенной площади (например, под сельскохозяйственные угодья, зоны отдыха, жилые постройки) так, чтобы в этих зонах уровень загрязнения в результате деятельности указанных промышленных объектов не превышал допустимые санитарные нормы, а затраты на восстановление окружающей среды, на сооружение и эксплуатацию коммуникационных линий (железных и автомобильных дорог, водопроводов, линий связи и т. д.) были минимальными.

Приведем математическую модель данной задачи. Пусть  $N$  промышленных объектов, каждый из которых выбрасывает ежесекундно в атмосферу на высоте  $z = H$  загрязняющую субстанцию с интенсивностью  $Q_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , расположены в точках  $\tau_i = (x_i, y_i) \in \Omega$ .

Пусть  $\varphi(x, y, z, t)$  – интенсивность аэрозольной субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере. Процесс распространения загрязняющей примеси в цилиндрической области  $G$  с поверхностью  $S$ , состоящей из боковой поверхности цилиндра  $\Sigma$ , нижнего основания  $\Omega$  (при  $z = 0$ ), верхнего основания  $\Sigma_H$  (при  $z = H$ ), описывается следующей краевой задачей [38, 77]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \nu \varphi + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + f(x, y, z, t), \quad (6.2.1)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (6.2.2)$$

$$\partial \varphi / \partial z = \alpha \varphi \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (6.2.3)$$

$$\partial \varphi / \partial z = 0 \quad \text{при} \quad z = H, \quad (6.2.4)$$

$$\varphi = \varphi_s \quad \text{на} \quad S \quad \text{при} \quad \nu_n < 0, \quad (6.2.5)$$

где  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – вектор скорости потока воздуха;  $\sigma \geq 0$  – величина, пропорциональная относительной скорости самопроизвольного уменьше-

ния концентрации примеси;  $\nu \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$  – соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии, вычисляемые экспериментально [13, 38]; функция  $f$  представляет собой функцию источника загрязняющей примеси:

$$f = \sum_{i=1}^N Q_i \delta(\bar{x} - \bar{\tau}_i); \quad (6.2.6)$$

где  $\bar{x} = (x, y, z)$ ,  $\delta(\bar{x} - \tau) - \delta$ -функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{\Omega} \varphi(r) \delta(r - \tau) dr = \begin{cases} \varphi(\tau), & \tau \in \Omega, \\ 0, & \tau \notin \Omega; \end{cases}$$

$\bar{\tau}_i = (x_i, y_i, H)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $\varphi_0(\cdot)$ ,  $\varphi_S(\cdot, \cdot)$  – заданные функции,  $\nu_n$  – проекция вектора  $\nu$  на внешнюю нормаль к боковой поверхности  $S$ ,  $\alpha \geq 0$  – некоторая функция, характеризующая взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью.

Потребуем также от решения задачи (6.2.1) – (6.2.5) выполнения необходимых условий гладкости и периодичности

$$\varphi(r, T) = \varphi(r, 0).$$

Требуется определить на  $\Omega$  области (подмножества)  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , так, чтобы функционал

$$V(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \beta \int_0^T \int_G d(r') \varphi(r', t) dr' dt + \gamma \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left( \sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right) dr, \quad (6.2.7)$$

достигал минимального значения и выполнялись ограничения

$$\text{mes}(\Omega_k) = S_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (6.2.8)$$

$$\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset, \quad k \neq j, \quad k, j = \overline{1, N}, \quad (6.2.9)$$

$$a \int_0^T \int_0^H \int_{\Omega_k} \varphi(r', t) dr' dt \leq b_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (6.2.10)$$

В функционале (6.2.7)  $\beta$ ,  $\gamma \geq 0$  – некоторые константы, определяющие приоритет соответствующего слагаемого;  $d(r)$  – функция, определяющая затраты на восстановление окружающей среды: если  $r \in \Omega_k$ , и зона  $\Omega_k$  выделяются под жилые постройки, то  $d(r)$  включает не только затраты на очистительные мероприятия, но и отчисления на восстановление здоровья людей в  $k$ -й зоне в расчете на единицу концентрации аэрозоля (здесь и далее будем предполагать, что загрязняющая примесь одно-

родна, то есть состоит из одного компонента); будем предполагать, что  $d(r)$  – кусочно-постоянная функция

$$d(r) = \begin{cases} d_i E_i + K_i, & r \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N} \\ K_{N+1}, & r \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \Omega_i \end{cases},$$

где  $d_i$  – затраты на восстановление здоровья людей в расчете на единицу населения и на единицу концентрации загрязнения;  $K_i$  – отчисления на очистительные мероприятия;  $E_i$  – предполагаемая численность населения в данном регионе (если зона не заселена, то  $E_i = 0$ );  $T$  – заданный момент времени,  $c_k(r', \tau_i)$  – стоимость сооружения и эксплуатации коммуникационных линий в расчете на единицу кратчайшего расстояния между объектом  $\tau_i$  и  $k$ -й зоной (включая среднюю стоимость перевозки грузов и пассажиров);  $q_k$  – стоимость построек в  $k$ -й зоне;  $a = \omega_g + v\alpha$ ,  $b_1, \dots, b_N$  – заданные неотрицательные константы, определяющие допустимую норму загрязнения подстилающей поверхности экологически значимых зон.

Легко заметить, что первое слагаемое в выражении функционала (6.2.7) определяет затраты на восстановление окружающей среды, в которые включаются отчисления на очистительные мероприятия, на охрану здоровья людей рассматриваемого региона, на повышение качественного содержания питания, на профилактории и т. д. Второе слагаемое характеризует стоимость сооружения каких-либо построек в экологически значимых зонах и необходимых коммуникационных линий этих зон с промышленными объектами.

**Замечание.** Приведенная модель может служить для математического описания задачи определения мест определенной площади с минимальным уровнем загрязнения от источников вредных веществ при планировании производственных помещений [11, 38].

### *Эквивалентная динамическая задача ОРМ и основные расчетные формулы*

В [38] сказано, что газовые и аэрозольные загрязняющие вещества могут переноситься на десятки, сотни и тысячи километров от источника выброса, однако высота распространения основной массы загрязнения ограничена: 600 – 2 000 метров. Масштабы горизонтального переноса в

этом случае значительно превышают масштабы возможного вертикального переноса. В связи с этим целесообразно использовать двумерную модель для прогноза распространения мелкодисперсных и газообразных примесей. Введя определение среднего количества загрязняющих веществ по высоте возможного распространения загрязнения:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{H} \int_0^H \varphi dz ,$$

приходим к следующей модели распространения загрязняющих аэрозолей:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial v_1 \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v_2 \bar{\varphi}}{\partial y} + (\sigma + \bar{\sigma}) \bar{\varphi} = \mu \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + f(x, y, t) , \quad (6.2.11)$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 \quad \text{при} \quad t = 0 , \quad (6.2.12)$$

$$\bar{\varphi} = g \quad \text{на границе} \quad \partial \Omega , \quad (6.2.13)$$

где  $\bar{\sigma} = \frac{w_g + \alpha v}{H}$ .

Если считать, что граница области распространения аэрозоля достаточно удалена от рассматриваемой области  $\Omega$ , и соответственно от точек  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, M}$ , и влиянием выброса в окрестности границы можно пренебречь, то начальные и краевые условия для дифференциального уравнения (6.2.11) будут иметь следующий вид:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 \quad \text{при} \quad t = 0 , \quad (6.2.14)$$

$$\bar{\varphi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \pm \infty . \quad (6.2.15)$$

Введем в рассмотрение множество  $\Omega_{N+1} = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$ , мера которого,

очевидно,  $\text{mes}(\Omega_{N+1}) = \text{mes}(\Omega) - \sum_{k=1}^N S_k$ . Тогда  $\Omega_1, \dots, \Omega_{N+1}$  составляют

разбиение области  $\Omega$  и, с учетом вышеизложенного перехода к двумерному аналогу краевой задачи (6.2.1) – (6.2.5), исходную задачу можно переписать так: найти такое разбиение  $\bar{\omega} \in P_{N+1}(\Omega)$ , что

$$\bar{V}(\bar{\omega}) = \beta \int_0^T \sum_{i=1}^{N+1} \int_{\Omega_i} (d_i E_i + K_i) \bar{\varphi}(r, t) dr dt + \gamma \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left[ \sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right] dr \rightarrow \min , \quad (6.2.16)$$

при условиях (6.2.7) – (6.2.9), где  $\bar{\varphi}(\cdot, \cdot)$  – решение краевой задачи (6.2.11)

– (6.2.13) или (6.2.11), (6.2.14), (6.2.15).

В соответствии с методами решения задач ОРМ, от этой задачи переходим к задаче бесконечномерного программирования:

$$I(\lambda(\cdot)) = \beta \int_0^T \sum_{i=1}^{N+1} \int_{\Omega} (d_i E_i + K_i) \bar{\varphi}(r, t) \lambda_i(r) dr dt + \\ + \gamma \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left( \sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right) \lambda_i(r) dr \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \quad (6.2.17)$$

при условиях

$$\int_{\Omega} \lambda_k(r) dr = S_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (6.2.18)$$

$$a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r, t) \lambda_b(r) dr dt \leq b_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (6.2.19)$$

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_{N+1}(x) : \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \right. \\ \left. 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \quad i = \overline{1, N+1} \right\},$$

Решение этой задачи получим путем поиска седловой точки функционала Лагранжа задачи (6.2.17) – (6.2.19), который имеет вид:

$$h(\lambda(\cdot), \xi, \psi) = \beta \int_0^T \sum_{i=1}^{N+1} \int_{\Omega} (d_i E_i + K_i) \bar{\varphi}(r, t) \lambda_i(r) dr dt + \\ + \gamma \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left( \sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right) \lambda_i(r) dr + \sum_{i=1}^{N+1} \xi_i \left( \int_{\Omega} \lambda_i(r) dr - S_i \right) + \\ + \sum_{i=1}^N \psi_i \left( a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r, t) \lambda_i(r) dr dt - b_i \right),$$

где  $(\psi, \xi) \in \Gamma = (\psi, \xi) \in \mathbf{R}^{2N+1} : \psi_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad \lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ .

Введя в рассмотрение вектор-функцию

$$P_i(r, \psi_i, \xi_i) = \begin{cases} a\psi_i + \beta(d_i E_i + K_i) \int_0^T \bar{\varphi}(r, t) dt + \gamma \left( \sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right) + \xi_i, & i = \overline{1, N} \\ \beta K_i \int_0^T \bar{\varphi}(r, t) dt + \xi_i, & i = N+1 \end{cases}$$

функционал Лагранжа можем записать в компактной, удобной для дальнейшего исследования, форме:

$$h(\lambda(\cdot), \xi, \psi) = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{\Omega} p_i(r, \psi_i, \xi_i) \lambda_i(r) dr - \sum_{i=1}^{N+1} \xi_i S_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i .$$

Для отыскания седловой точки этого функционала получены следующие формулы:  $\forall i = \overline{1, N+1}$

$$\lambda_i^*(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i(r, \psi_i^*, \xi_i^*) = \min_{k=1, N+1} p_k(r, \psi_k^*, \xi_k^*) \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (6.2.20)$$

где в качестве  $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{N+1}^*$  выбирается решение задачи

$$G(\psi, \xi) = \int_{\Omega} \min_{k=1, N+1} p_k(r, \psi_k, \xi_k) dr - \sum_{i=1}^{N+1} \xi_i S_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \rightarrow \max_{(\xi, \psi) \in \Gamma} . \quad (6.2.21)$$

*Алгоритм решения задачи формирования экологической структуры вокруг промышленных объектов*

Вместо задачи условной оптимизации (6.2.21) будем решать задачу на безусловный максимум функции:

$$P(\psi, \xi) = G(\psi, \xi) - S \sum_{k=1}^N \max(0, -\psi_k) . \quad (6.2.22)$$

Область  $\Omega$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $\psi, \xi = \psi^{(0)}, \xi^{(0)}$ . Тем или иным методом решаем краевую задачу (6.2.11)-(6.2.13) [38, 77, 107].

Вычисляем значения функции  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (6.2.20) при  $\psi = \psi^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}$ . Вычисляем компоненты вектора градиента функции  $P(\psi, \xi)$  в узлах сетки по формулам:

$$g_P^{\psi^k}(\psi, \xi) = a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r, t) \lambda_k(r) dr dt - b_k + S \max(0, \text{sign}(-\psi_k)) , \quad k = \overline{1, N};$$

$$g_P^{\xi^k} = -S_k + \int_{\Omega} \lambda_k(r) dr, \quad k = \overline{1, N+1}, \quad (6.2.23)$$

при  $\lambda = \lambda^{(0)}(\cdot)$ ,  $\psi = \psi^{(0)}$ ,  $\xi = \xi^{(0)}$ .

Выбираем начальный пробный шаг  $\beta_0 > 0$  для г-алгоритма и находим:

$$\begin{aligned}\psi_i^{(1)} &= \psi_i^{(0)} + \beta_0 g_P^{\psi_i}(\psi^{(0)}, \xi^{(0)}), \quad i = \overline{1, N} \\ \xi_i^{(1)} &= \xi_i^{(0)} + \beta_0 g_P^{\xi_i}(\psi^{(0)}, \xi^{(0)}), \quad i = \overline{1, N+1}.\end{aligned}$$

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k, k=1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получены определенные значения  $\lambda^{(k-1)}(\cdot)$ ,  $\psi^{(k)}$ ,  $\xi^{(k)}$  в узлах сетки. Опишем  $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения функции  $\lambda^{(k)}(\cdot)$  в узлах сетки по формулам (6.2.19) при  $\psi = \psi^{(k)}$ ,  $\xi = \xi^{(k)}$ .

2. Вычисляем значение вектора градиента функции  $P(\psi, \xi)$  в узлах сетки по формулам (6.2.23) при  $\lambda = \lambda^{(k)}(\cdot)$ ,  $\psi = \psi^{(k)}$ ,  $\xi = \xi^{(k)}$ .

3. Проводим  $(k+1)$ -й шаг алгоритма обобщенных градиентов с растяжением пространства, краткая схема которого имеет вид:

$$\psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)} = \psi^{(k)}, \xi^{(k)} + \beta_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_P(\psi^{(k)}, \xi^{(k)});$$

где  $B_{k+1}$  – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство  $E^{2N+1}$ , причем  $B_0 = I_{2N+1}$ , ( $I_{2N+1}$  – единичная матрица),  $\tilde{g}_P = B_{k+1}^* g_P(\psi^{(k)}, \xi^{(k)})$ ,  $\beta_k$  – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума по направлению.

4. Если условие

$$\left\| \psi^{(k)}, \xi^{(k)} - \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (6.2.24)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, иначе – к п. 5.

5. Полагаем  $\lambda^*(\cdot) = \lambda^{(l)}(\cdot)$ ,  $\psi^* = \psi^{(l)}$ ,  $\xi = \xi^{(l)}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (6.2.24).

6. Вычисляем оптимальное значение целевой функции по формуле (6.2.24) при  $\psi = \psi^*$ ,  $\xi = \xi^*$  и – для контроля правильности счета – значение функционала (6.2.17) при  $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$ .



### 6.2.2. Задача одновременного планирования размещения промышленных объектов и экологически значимых зон

Пусть требуется в некотором регионе  $\Omega$  определить место для строительства нового промышленного объекта и выделить зоны  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  заданной площади так, чтобы в результате деятельности этого предприятия уровень загрязнения земной поверхности в выделенных экологически значимых зонах не превышал допустимые санитарные нормы, а общее количество выпавшей на подстилающую поверхность области  $\Omega$  загрязняющей примеси было минимальным. Потребуем также, чтобы размещаемый источник находился как можно ближе к каждой из зон.

Так как в сформулированной задаче нас интересует только уровень загрязнения земной поверхности региона, то для описания процесса распространения загрязняющей примеси ограничимся двумерной моделью (6.2.11) – (6.2.13). Функция источника в уравнении (6.2.11) имеет вид:

$$f(\tau_0, r, t) = Q(t)\delta(r - \tau_0), \quad (6.2.25)$$

где  $Q(t)$  – предполагаемая интенсивность источника (может изменяться со временем),  $\tau_0 = (x_0, y_0)$  – его координаты.

Условимся решение краевой задачи (6.2.11) – (6.2.13) с функцией источника (6.2.25), соответствующее каждой точке  $\tau_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ , обозначать  $\varphi(r, \tau_0, t)$ .

Требуется найти точку  $\tau_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$  и выделить на  $\Omega$  подмножества  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , так, чтобы функционал

$$V(\tau_0, \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \beta a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r', \tau_0, t) dr' dt + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} c_k(r, \tau_0) dr \quad (6.2.26)$$

достигал минимального значения при выполнении ограничений

$$\text{mes}(\Omega_k) = S_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (6.2.27)$$

$$\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset, \quad k \neq j, \quad k, j = \overline{1, N}, \quad (6.2.28)$$

$$a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r', \tau_0, t) dr' dt \leq b_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (6.2.29)$$

В выражении (6.2.26)  $\beta$  и  $\gamma$  – весовые коэффициенты,  $T$  – заданный момент времени.

**Замечание.** Задача (6.2.26) – (6.2.29) легко обобщается на случай произвольного конечного числа размещаемых промышленных объектов.

*Эквивалентная задача ОРМ и основные соотношения, характеризующие оптимальное решение задачи*

Как и в предыдущем пункте, введя в рассмотрение подмножество  $\Omega_{N+1} = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$  с мерой  $\text{mes}(\Omega_{N+1}) = \text{mes}(\Omega) - \sum_{k=1}^N S_k$ , от задачи (6.2.26) – (6.2.29) переходим к эквивалентной задаче оптимального разбиения множества: требуется определить разбиение

$$\bar{\omega}^* = \Omega_1^*, \dots, \Omega_{N+1}^* \in P_{N+1}(\Omega)$$

и точку  $\tau_0^* \in \Omega$ , доставляющие минимальное значение функционалу

$$V(\tau_0, \bar{\omega}) = \beta a \sum_{k=1}^{N+1} \int_0^T \int_{\Omega_k} \bar{\varphi}(r, \tau_0, t) dr dt + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} c_k(r, \tau_0) dr \quad (6.2.30)$$

при ограничениях (6.2.27) – (6.2.29), где  $\bar{\varphi}(r, \tau, t)$  – решение краевой задачи (6.2.11) – (6.2.13), (6.2.25).

Для подмножества  $\Omega_{N+1}$  введем фиктивное ограничение

$$a \int_0^T \int_{\Omega_{N+1}} \bar{\varphi}(r, \tau, t) dr dt \leq b_{N+1}, \quad (6.2.31)$$

где  $b_{N+1} = \int_0^T \int_{\Omega} \max_{\tau \in \Omega} \bar{\varphi}(r, \tau, t) dr dt$ .

Следуя методике решения линейных задач ОРМ, от задачи (6.2.30), (6.2.27) – (6.2.29) перейдем к задаче бесконечномерного программирования:

$$I \lambda(\cdot), \tau = \beta a \sum_{k=1}^{N+1} \int_0^T \int_{\Omega_k} \bar{\varphi}(r, \tau, t) \lambda_k(r) dr dt + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} -c_k(r, \tau) dr \rightarrow \min_{\lambda(\cdot), \tau \in \Lambda_2 \times \Omega}, \quad (6.2.32)$$

где

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda(r) \in \Lambda_0; \int_0^T a \int_{\Omega_i} \bar{\varphi}(r, \tau, t) \lambda_i(r) dr dt \leq b_i, \int_{\Omega_i} \lambda_i(r) dr = S_i, \quad i = \overline{1, N+1} \right\},$$

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_{N+1}(x) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, \right. \\ \left. i = \overline{1, N+1}; \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \right\}.$$

Оптимальное решение задачи (6.2.32) получено в следующем виде: для  $i = \overline{1, N+1}$  и п. в. для  $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } x' \in \Omega_i^*, \\ 0, & \text{если } x' \in \Omega \setminus \Omega_i^*, \end{cases} \quad (6.2.33)$$

$$\Omega_i^* = \left\{ r \in \Omega : p_i(r, \tau_0^*, \psi_i, \xi_i) = \min_{k=1, N+1} p_k(r, \tau_0^*, \psi_k, \xi_k) \right\},$$

где

$$p_i(r, \tau_0^*, \psi_i, \xi_i) = \begin{cases} a(\beta + \psi_i) \int_0^T \bar{\varphi}(r, \tau_0^*, t) dt + \gamma c_i(r, \tau_0^*) + \xi_i, & i = \overline{1, N} \\ a(\beta + \psi_i) \int_0^T \bar{\varphi}(r, \tau_0^*, t) dt + \xi_i, & i = N+1 \end{cases}$$

а в качестве  $\tau_0^*, \psi_1^*, \dots, \psi_{N+1}^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{N+1}^*$  выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\tau, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \min_{k=1, N+1} p_k(r, \tau, \psi_k, \xi_k) dr - \\ - \sum_{i=1}^{N+1} (\psi_i b_i + \xi_i S_i) \rightarrow \min_{\tau \in \Omega} \max_{(\psi, \xi) \in \Gamma}, \quad (6.2.34)$$

$$\Gamma = (\psi, \xi) \in E^{2N+1} : \psi_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N+1}.$$

Далее, на основе полученных формул, сформулируем численный алгоритм решения задачи ОРМ и укажем особенности численной его реализации в случае приближенного решения краевой задачи для определения функции  $\bar{\varphi}(r, \tau, t)$  с помощью конечноразностных схем.

### Численный алгоритм решения задачи ОРМ

Пусть в задаче (6.2.34) функция  $\bar{\varphi}(r, \tau, t)$  является решением краевой

задачи (6.2.11), (6.2.14), (6.2.15). В предположении, что компоненты вектора скорости  $v_1, v_2$  представляют собой постоянные величины, решение краевой задачи может быть получено в аналитическом виде [37, 38]:

$$\bar{\varphi}(r, \tau, t) = \frac{Q}{4\pi\mu t} \exp \left[ -\bar{\sigma}t - \frac{x - x_0 - v_1 t^2}{4\mu t} - \frac{y - y_0 - v_2 t^2}{4\mu t} \right], \quad (6.2.35)$$

$$t \in 0, T .$$

Подставив это выражение в (6.2.34), получим задачу условной конечномерной оптимизации негладкой функции  $G(\tau, \psi, \xi)$ . Для решения этой задачи будем применять г-алгоритм. При этом от задачи условной оптимизации по  $\psi$  переходим к задаче на безусловный экстремум:

$$P(\tau, \psi, \xi) = G(\tau, \psi, \xi) + A \sum_{i=1}^{N+1} \max(-\psi_i, 0) \rightarrow \min_{\tau \in \Omega} \max_{(\psi, \xi) \in E^{2N+2}}, \quad (6.2.36)$$

где  $A$  – некоторая постоянная, значительно большая максимального множителя Лагранжа.

**Численный алгоритм** решения задачи оптимального разбиения (6.2.32) в случае аналитического решения начально-краевой задачи (6.2.11), (6.2.14), (6.2.15) формулируется так.

Область  $\Omega$  покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение  $\psi, \tau, \xi = \psi^{(0)}, \tau^{(0)}, \xi^{(0)}$ . Вычисляем значения функции  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (6.2.33) при  $\psi = \psi^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}$ . Вычисляем значения компонент вектора градиента функции  $P(\tau, \psi, \xi)$  в узлах сетки по формулам:

$$g_P^{\psi k}(\tau, \psi, \xi) = \beta a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r, \tau, t) \lambda_k(r) dr dt - b_k + S \max(0, \text{sign}(-\psi_k)),$$

$$k = \overline{1, N+1};$$

$$g_P^{\tau} = \epsilon \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^T \int_{\Omega} (\beta + \psi_i) \frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{\partial \tau} dx dt + \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial c_k(r, \tau)}{\partial \tau} dr,$$

$$g_P^{\xi} = -S_k + \int_{\Omega} \lambda_k(r) dr, \quad k = \overline{1, N+1}, \quad (6.2.37)$$

при  $\lambda = \lambda^{(0)}(\cdot), \psi = \psi^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}$ ; компоненты вектора градиента функции  $\bar{\varphi}(r, \tau, t)$  вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{\partial x_0} = \frac{Q}{4\pi\mu t} \exp \left[ -\bar{\sigma}t - \frac{x - x_0 - v_1 t^2}{4\mu t} - \frac{y - y_0 - v_2 t^2}{4\mu t} \right] \times \frac{-2(x - x_0 - v_1 t)}{4\mu t},$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{\partial y_0} = \frac{Q}{4\pi\mu t} \exp \left[ -\bar{\sigma}t - \frac{x - x_0 - v_1 t^2}{4\mu t} - \frac{y - y_0 - v_2 t^2}{4\mu t} \right] \times \frac{-2(y - y_0 - v_2 t)}{4\mu t}.$$

Выбираем начальный пробный шаг  $\beta_0 > 0$  для  $r$ -алгоритма и находим:

$$\begin{aligned} \psi_i^{(1)} &= \psi_i^{(0)} + \beta_0 g_P^{\psi_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}), \\ \xi_i^{(1)} &= \xi_i^{(0)} + \beta_0 g_P^{\xi_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}), \quad i = \overline{1, N+1}, \\ \tau^{(1)} &= Pr_{\Omega} \left[ \tau^{(0)} - \beta_0 g_P^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}) \right], \end{aligned}$$

где  $Pr_{\Omega}$  – оператор проектирования на  $\Omega$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k, k=1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получены определенные значения  $\lambda^{(k-1)}(\cdot), \psi^{(k)}, \tau^{(k)}, \xi^{(k)}$  в узлах сетки. Опишем  $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения функции  $\lambda^{(k)}(\cdot)$  в узлах сетки по формулам (6.2.33) при  $\psi = \psi^{(k)}, \tau = \tau^{(k)}, \xi = \xi^{(k)}$ .

2. Вычисляем значение вектора градиента функции  $P(\tau, \psi, \xi)$  в узлах сетки по формулам (6.2.37) при  $\lambda = \lambda^{(k)}(\cdot), \psi = \psi^{(k)}, \tau = \tau^{(k)}, \xi = \xi^{(k)}$ .

3. Проводим  $(k+1)$ -й шаг алгоритма обобщенных почтиградиентов с растяжением пространства, близкого к  $r$ -алгоритму [87], и определяем  $\psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}$ .

4. Если условие

$$\left\| \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)} - \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (6.2.38)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, иначе – к п. 5.

5. Полагаем  $\lambda^* = \lambda^{(1)}(\cdot), \psi^* = \psi^{(1)}, \tau^* = \tau^{(1)}, \xi = \xi^{(1)}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (6.2.38).

6. Вычисляем оптимальное значение целевой функции по формуле (6.2.34) при  $\psi = \psi^*, \tau = \tau^*, \xi = \xi^*$  и – для контроля правильности

счета – значение функционала (6.2.32) при  $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$ ,  $\tau = \tau^*$ .

Алгоритм описан.

В случае, когда решение краевой задачи (6.2.11) – (6.2.13) или (6.2.11), (6.2.14), (6.2.15) можно получить только с помощью каких-либо приближенных методов интегрирования, для отыскания градиента функции  $G(\tau, \psi, \xi)$  по переменной  $\tau$  приходится применять конечноразностные производные:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau + h_x e_1, t)}{\partial \tau_1} = \frac{\bar{\varphi}(r, \tau + h_x e_1, t) - \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{h_x};$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau + h_y e_2, t)}{\partial \tau_2} = \frac{\bar{\varphi}(r, \tau + h_y e_2, t) - \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{h_y},$$

где  $e_1, e_2$  – орты соответствующих осей координат. Как нетрудно заметить, для вычисления компонент вектора-градиента функции  $G(\tau, \psi, \xi)$  по переменной  $\tau$  необходимо решать на каждой итерации оптимизационного процесса краевую задачу (6.2.11) – (6.2.13) трижды (а в случае произвольного  $M$  количества размещаемых предприятий –  $2M+1$  раз).

В остальном алгоритм решения задачи тот же.

Опишем еще один алгоритм решения задачи оптимального разбиения (6.2.32), который позволяет избежать многократного численного решения краевой задачи для уравнения переноса и диффузии на каждой итерации процесса оптимизации функции  $G(\tau, \psi, \xi)$ . Этот алгоритм отличается от вышеописанных способом отыскания компонент вектора градиента целевой функции задачи (6.2.34), соответствующих переменной  $\tau = (x_0, y_0)$ .

Пусть известно некоторое начальное приближение координат размещаемого предприятия  $\tau^{(0)}$ , а также начальные значения вектора двойственных переменных  $\psi^{(0)}, \xi^{(0)}$ .

Находим значения функции  $\bar{\varphi}(\cdot, \cdot, \cdot)$  в узлах сетки при  $\tau = \tau^{(0)}$ .

Вычислим значения функции  $\lambda^{(0)}(\cdot)$  в узлах сетки по формулам (6.2.33).

Компоненты вектора градиента функции  $G(\tau, \psi, \xi)$  по переменным  $\psi, \xi$  вычисляются по тем же формулам (6.2.37). Для того, чтобы найти компоненты градиента, соответствующие переменной  $\tau$ , поступим следующим образом.

Запишем задачу, сопряженную (6.2.11) – (6.2.13):

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial v_1 \varphi^*}{\partial x} - \frac{\partial v_2 \varphi^*}{\partial y} + \sigma \varphi^* = \mu \Delta \varphi^* + q; \quad (6.2.39)$$

$$\varphi^* = 0, \quad \text{при } t=T, \quad (6.2.40)$$

$$\varphi^* = 0 \quad \text{на } \partial \Omega. \quad (6.2.41)$$

Функцию  $G(\tau, \psi, \xi)$  запишем так:

$$G(\tau, \psi, \xi) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left[ a(\beta + \psi_k) \int_0^T \bar{\varphi}(r, \tau, t) dt + \xi_k \right] \lambda_k^{(0)}(r) dr - \text{mes}(\Omega) + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} c_k(r, \tau) dr - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (6.2.42)$$

Если в качестве функции  $q$  выбрать функцию

$$q(r, t) = \begin{cases} a(\beta + \psi_k), & \text{если } (r, t) \in \Omega_k \times 0, T \\ 0, & \text{если } (r, t) \notin \Omega_k \times 0, T \end{cases}$$

то та часть функционала, которая линейна относительно  $\bar{\varphi}(\cdot, \cdot, \cdot)$ , может быть записана в следующем сопряженном виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} a(\beta + \psi_k) \int_0^T \bar{\varphi}(r, \tau, t) dt \lambda_k^{(0)}(r) dr = \\ = \int_0^T \int_{\Omega} Q \delta(r - \tau) \varphi^*(r, t) dr dt = Q \int_0^T \varphi^*(\tau, t) dt. \end{aligned}$$

Теперь частные производные функции  $G(\tau, \psi, \xi)$  по координатам  $\tau$  будем вычислять так:

$$g_P^\tau = Q \int_0^T \frac{\partial \varphi^*(\tau, t)}{\partial \tau} dt,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^*(\tau, t)}{\partial \tau_1} &\approx \frac{\varphi^*((x_{1+1}, y_j), t) - \varphi^*((x_1, y_j), t)}{h_x}; \\ \frac{\partial \varphi^*(\tau, t)}{\partial \tau_2} &\approx \frac{\varphi^*((x_1, y_{j+1}), t) - \varphi^*((x_1, y_j), t)}{h_y}, \end{aligned}$$

а  $(x_1, y_j)$  – точка сетки  $\gamma$ , ближайшая к приближению  $\tau^{(0)}$ . Значения сопряженной функции  $\varphi^*(\cdot, \cdot, \cdot)$  в узлах сетки находим каким-либо приближенным конечноразностным методом.

### 6.2.3. Результаты решения модельных задач

Как известно, при расчете переноса примесей с использованием моделей турбулентности большое влияние оказывают точность и достоверность задания исходной информации. При реализации расчетных моделей, используемых для изучения миграции примесей за достаточно долгие интервалы времени, следует использовать фактическую информацию по результатам наблюдений, а также различные эмпирические формулы для определения входной информации, необходимой для численного расчета уравнения переноса и диффузии примеси (коэффициенты турбулентного обмена, скорости осаждения примеси и т. д.).

**Пример 1.** В качестве примера рассмотрим задачу определения в некоторой прямоугольной области размером  $500 \times 500$  км пяти зон площадью 100, 200, 200, 200 и 200 кв. км, отводимых, например, под сельскохозяйственные угодья, с минимальным уровнем загрязнения почвенного покрова антропогенными выбросами городов и промышленных центров. Известно, что промышленные выбросы распространяются на высоте  $H \approx 350 - 600$  м, поэтому решение уравнения (6.2.10) дает осредненное по высоте значение концентрации примеси. Общее количество источников выброса 10. Численный расчет осуществляется в безразмерном виде. В качестве характерного линейного масштаба выбран размер  $L = 100$  км. Размерный масштаб скорости  $V=1$  м/с. Безразмерные координаты городов и промышленных центров указаны в табл. 6.2. Для проведения численного эксперимента примем за масштабную единицу количество примеси, выбрасываемой в атмосферу в городе N1, и нормируем выбросы остальных промышленных центров. В безразмерном виде количество примеси, выбрасываемой в городе N1, равно 10, выброс остальных источников оценивается безразмерным коэффициентом  $q$ , указанным в табл. 6.2.

В настоящем примере при проведении расчетов принимается безразмерное значение коэффициентов диффузии  $\mu_x = \mu_y = 0.4$ . Коэффициент  $\sigma$  в двумерной модели (6.2.10) учитывает скорость оседания частиц примеси, изменение интенсивности примеси из-за химических превращений, влияние подстилающей поверхности, вымывание примеси осадками. В расчетах в качестве входных данных принимается  $\sigma = 0.2 \cdot 10^{-4}$ . Эти и другие данные относительно розы ветров региона, параметров краевой задачи, описывающей процесс распространения загрязняющих веществ в атмосфере, взяты из модельной задачи о распространении антропогенных выбросов, приведенной в работе [38].



Таблица 6.2

Информация о координатах расположения и интенсивности источников загрязняющей примеси в примере 1

Промышленный центр	Координата $x$ , км	Координата $y$ , км	Безразмерная величина выброса $q$
N1	1	1	10.0
N2	2.04	2.04	5.6
N3	2.96	2.96	4.0
N4	3.94	3.98	4.0
N5	1.02	2.06	3.0
N6	1	3	6.0
N7	1.02	4	6.3
N8	2	2.95	4.2
N9	2	1	6.3
N10	2.04	3.98	8.4

В выражении функционала (6.2.7) функции  $c_i(r, \tau)$ , описывающие стоимость сооружения и эксплуатации коммуникационных линий в расчете на единицу кратчайшего расстояния между объектами  $\tau_k$ ,  $k = 1, \overline{NN}$ , и точкой  $r$   $i$ -й охранной зоны (включая среднюю стоимость планируемых перевозок грузов), пропорциональны этому расстоянию.

Предположим, что преобладающим в рассматриваемом регионе в течение временного цикла  $[0, T]$  является ветер, параллельный оси  $x$ .

Другая исходная информация задавалась следующим образом: ограничения на санитарно допустимые нормы загрязнения выделяемых экологически важных зон равны соответственно 2.5, 3, 0.6, 0.9, 0.5 условных единиц, точность вычислений  $\epsilon = 0.0001$ .

Численный расчет выполнялся на разностной сетке  $100 \times 100$  узел. Для решения краевой задачи, описывающей процесс распространения загрязняющих веществ (6.2.10) – (4.12), использовалась четырехшаговая попеременно-треугольная разностная схема, приведенная в [38]. Динамика распространения загрязняющего вещества в атмосфере представлена на рис. 6.17. Здесь показано среднегодовое поле концентрации загрязняющего вещества.

На рис. 6.18 представлено разбиение области, являющееся оптимальным решением задачи (6.2.7), (6.2.10) – (6.2.12) в случае, когда коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  в функционале, определяющие приоритет того или иного слагаемого, равны соответственно **10** и **0.005**.

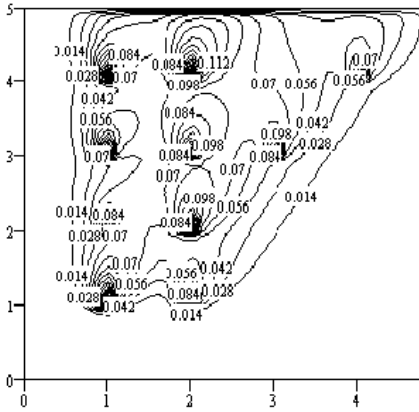


Рис. 6.17

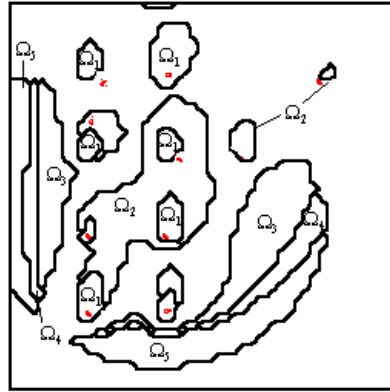


Рис. 6.18

На рис. 6.19 изображено разбиение области, полученное в результате решения той задачи (6.2.7), (6.2.10) – (6.2.12) при  $\beta = 0.1$  и  $\gamma = 10$ . Таким образом, разбиение, показанное на рис. 6.19, соответствует ситуации, когда стоимость проведения коммуникаций преобладает над отчислениями на очистительные мероприятия.

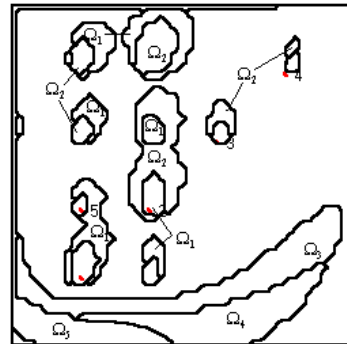


Рис. 6.19

Как видно из рис. 6.18 и 6.19, выделяемые экологически важные зоны могут быть не связаны, кроме того, вытянуты вдоль линий уровня концентрации загрязняющей примеси. Для того чтобы получить более компактные области  $\Omega_k$ , необходимо наложить дополнительные ограничения на диаметры этих подмножеств. Это значительно усложняет задачу.

**Пример 2.** Рассмотрим еще одну модельную ситуацию. Пусть в области  $80 \times 70$  км требуется выделить 5 подобластей с площадями 30, 10, 30, 20, 50 кв. км так, чтобы уровень загрязнения почвенного покрова этих зон от выбросов 5 крупных промышленных центров не превышал санитарно допустимые нормы, и эти зоны находились как можно ближе к указанным центрам. Координаты расположения и интенсивность выбросов источников загрязняющих веществ указаны в табл. 6.3.

Таблица 6.3

**Координаты расположения и интенсивность промышленных выбросов в примере 2**

Промышленный центр	Координата x, км	Координата y, км	Безразмерная величина выброса q
N1	7	6	100
N2	6	5	100
N3	1.95	3.98	100
N4	4	2.98	200
N5	7.7	2	100

Входные данные задачи задавались в следующем виде:  $\sigma = 0$ ,  $w_s = 0.08$ , коэффициенты диффузии  $\mu_x = \mu_y = 0.4$ . При расчете задавался равномерный профиль ветра:  $u = -1$ ,  $v = 0$ . В качестве начального условия для концентрации загрязняющего вещества полагалось  $\varphi = 0$ . Ограничения на санитарно допустимые нормы загрязнения экологически важных зон задавались равными  $b=(1, 2, 3, 2, 1)$ .

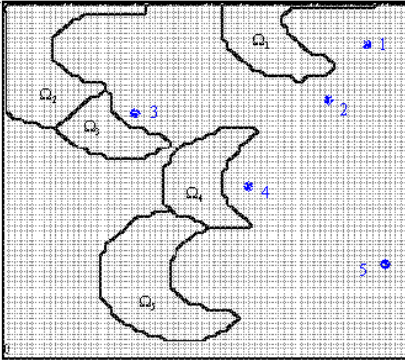


Рис. 6.20

Константы, определяющие приоритет слагаемых в выражении функционала задачи  $\beta$  и  $\gamma$ , задавались равными 10 и 1 соответственно, что делало соразмержными указанные слагаемые. В результате решения задачи с помощью алгоритма, включающего численное решение краевой задачи для уравнения переноса, оптимальное разбиение области получено на 67-й итерации в виде, изображенном на рис. 6.20.

Оптимальное значение функционала исходной задачи равно 20.15. Для контроля правильности счета были вычислены значения функционала двойственной задачи, левых частей ограничений на санитарно допустимые нормы загрязнения, а также площади полученных подобластей. В результате получены следующие величины:  $P = 19.75$ ;  $S=(29.97; 10.03; 30; 19.97; 41.25)$ , а уровень загрязнения значительно меньше допустимых норм.

**Пример 3.** Приведем решение одной тестовой задачи одновременного

размещения промышленных объектов и экологически значимых зон. Пусть в некотором регионе размером  $800 \times 700$  кв. км требуется разместить  $N = 4$  промышленных объектов и выделить 4 области площадью 600, 400, 300 и 200 кв. км. Предполагаемая интенсивность ежесекундных выбросов загрязняющих веществ в атмосферу этими предприятиями равна 20, 10, 10, 20 усл. ед. Санитарно допустимые нормы загрязнения выделенных зон равны 0.5, 0.2, 0.3, 0.2 усл. ед. Потребуем, чтобы  $i$ -я зона находилась как можно ближе к  $i$ -му предприятию. При этом предполагается, что затраты на сооружение коммуникационных линий пропорциональны расстоянию от выделенной зоны до соответствующего промышленного объекта, а затраты на восстановление окружающей среды пропорциональны величине концентрации загрязняющего вещества в каждой точке области.

В качестве начального приближения мест расположения промышленных центров выступали точки:  $(0.8, 5.4)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(6, 3)$  и  $(4, 4)$ .

На рис. 6.21 изображено разбиение области и координаты центров, являющееся оптимальным решением сформулированной задачи при  $\beta = 0.1$  и  $\gamma = 1$ . Эти значения коэффициентов позволяют сделать приоритетным в выражении функционала слагаемое, учитывающее затраты на строительство коммуникационных линий. Оптимальные координаты промышленных объектов имеют следующие значения:  $\tau_1 = (6.84; 3.96)$ ,  $\tau_2 = (1.04; 2.33)$ ,  $\tau_3 = (5.23; 1.15)$ ,  $\tau_4 = (2.74; 0.90)$ . Функционал задачи при этом равен 16.213 (значение двойственного критерия качества равно 15.85).

При решении этой же задачи с учетом лишь уровня загрязнения экологически значимых зон, что соответствует значениям  $\beta = 100$  и  $\gamma = 0.01$ , получено разбиение области, представленное на рис. 6.22.

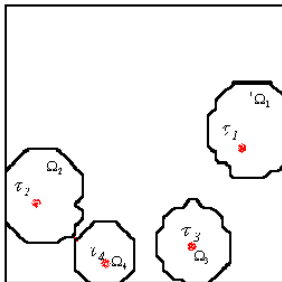


Рис. 6.21

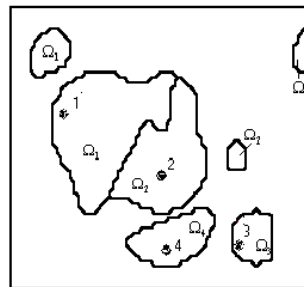


Рис. 6.22

Следует отметить, что это решение получено за значительно меньшее число итераций, равное 81, чем в предыдущем случае ( $\beta = 0.1$  и  $\gamma = 1$ ), когда для получения оптимального решения задачи потребовалось 395 итераций.

Большое количество численных экспериментов на ЭВМ, описание которых не представляется возможным, подтвердило возможность использования предложенного подхода к решению задач формирования экологической структуры промышленных регионов, подобных задачам (6.2.1) – (6.2.10) или (6.2.26) – (6.2.29).

### *6.3. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУР С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ*

Рассматривается задача построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов вида

$$\int_{\Omega} f(x) dx,$$

где  $\Omega$  – измеримое множество конечной лебеговой меры в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ .

Функции  $f$  принадлежат классу  $F_c$  измеримых на  $\Omega$  функций, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x) - f(\tau_i)| \leq c(x, \tau_i), \text{ для всех } x, \tau_i \in \Omega,$$

где функции  $c(x, \tau_i)$  – ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i$  из  $\Omega$  и обладают следующими свойствами квазиметрики (являются квазиметрикой) [100]:

$$c(x, x) = 0,$$

$$c(x, \tau_i) + c(y, \tau_i) \geq c(x, y),$$

$$c(x, y) = c(y, x),$$

$$c(x, \tau_i) \geq 0$$

для любых  $x, y, \tau_i \in \Omega$ .

С помощью различных квазиметрик  $c(\cdot, \cdot)$  можно описать многие важные, с точки зрения теории и приложений, функциональные классы. Частными случаями функционального класса, заданного квазиметриками, являются классы функций, удовлетворяющие различным формам усло-

вий Липшица или Гельдера с фиксированной константой или с разными константами в разных подобластях области определения; классы, заданные модулями непрерывности, и т. д.

Отметим также, что классы  $F_c$  содержат разрывные функции, если функция  $c(\cdot, \cdot)$  является разрывной [100].

Традиционно всякая квадратурная формула вида

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N p_i f(\tau_i) \quad (6.3.1)$$

задается вектором коэффициентов и узлов  $(p^N, \tau^N) = \{p_1, \dots, p_N, \tau_1, \dots, \tau_N\}$ , где  $p_1, \dots, p_N$  – произвольные действительные числа, а  $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – точки из  $\Omega$ ;

– оптимальными на классе  $F_c$  коэффициентами квадратурной формулы при фиксированных узлах  $\tau_1, \dots, \tau_N$  называют (см. [100]) коэффициенты  $p_1^*(\tau^N), \dots, p_N^*(\tau^N)$ , для которых

$$\sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i^*(\tau^N) f(\tau_i) \right| = \min_{p^N \in E^N} \sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i f(\tau_i) \right|; \quad (6.3.2)$$

– оптимальными на классе  $F_c$  узлами называют узлы  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^* \in \Omega$ , для которых

$$\begin{aligned} & \min_{p^N \in E^N} \sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i f(\tau_i^*) \right| = \\ & = \min_{\tau^N \in \Omega^N} \min_{p^N \in E^N} \sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i f(\tau_i) \right|, \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

где

$$\Omega^N = \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N, \quad E^N = \underbrace{E_1 \times \dots \times E_1}_N;$$

– квадратурная формула с оптимальными узлами и оптимальными коэффициентами называется оптимальной.

Таким образом, задача построения оптимальной квадратурной формулы сводится к задаче одновременного отыскания оптимальных узлов  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  (см. (6.3.3)) и оптимальных коэффициентов (см. (6.3.2)) этой квадратурной формулы.

### 6.3.1. Сведение задачи построения оптимальных квадратур к задаче оптимального разбиения множества $\Omega$

Для численного решения задачи одновременного отыскания оптимальных узлов  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  и оптимальных коэффициентов  $p_1^*, \dots, p_N^*$  рассматриваемой квадратурной формулы (6.3.1) сведём эту задачу к задаче **A2** оптимального разбиения множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  с одновременным отысканием координат центров этих подмножеств, совпадающих с координатами оптимальных узлов квадратурной формулы. В то же время значения оптимальных коэффициентов будем вычислять как лебеговы меры подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , на которые разбивается множество  $\Omega$ .

Приведем здесь постановку непрерывной задачи **A2** оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  с отысканием координат центров этих подмножеств при  $\rho(x) \equiv 1$  для любых  $x \in \Omega$ , к которой будет сводиться рассматриваемая задача построения оптимальных квадратур, в следующем виде, [160]

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в  $E_n$ . Требуется найти *такое разбиение* множества  $\Omega$  на  $N$  измеримых по Лебегу подмножеств  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  (среди которых могут быть и пустые) и *такие*, неизвестные заранее, *координаты*  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  центров подмножеств  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ , соответственно, которые являются решением следующей оптимизационной задачи **A2**. Запишем её здесь в следующем виде.

**Задача A2.** Найти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) dx$$

при условиях

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega,$$

$$\text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega.$$

Здесь интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем считать, что мера множества граничных точек  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , равна нулю.

Функции  $c(x, \tau_i)$  – действительные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , ограниченные, измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$ .

Введением характеристических функций  $\lambda_i(x)$  подмножеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , задача **A2** переписана в следующем виде.

**Задача В2.** Найти пару элементов  $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$ , такую, что

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)):$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega,$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N\};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

Оптимальное решение задачи **B2** достигается при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  на вектор-функции  $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_i^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$ ,  $i$ -я компонента которой имеет вид:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i^*) = \min_{k=1, \dots, N} c(x, \tau_k^*), \text{ тогда } x \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } x \notin \Omega_i^*; \end{cases} \quad (6.3.4)$$

а в качестве вектора  $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , входящего в формулу (6.3.4), следует выбрать оптимальное решение задачи

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, 2, \dots, N} c(x, \tau_i) dx \rightarrow \min, \quad (6.3.5)$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$



Перейдем теперь непосредственно к сведению задачи приближенного построения оптимальных квадратурных формул вида (6.3.1), т. е. задачи приближенного вычисления оптимальных коэффициентов и оптимальных узлов, к задаче **A2**.

Как уже отмечалось в разделе 6.1, оптимальное решение задачи **B2**, определяемое для каждого фиксированного  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$  по формулам (6.3.4) вектор-функцией  $\lambda_*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$ , оказывается известным с-разбиением Дирихле – Вороного [100], т. е. разбиением множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1(\tau^N), \dots, \Omega_N(\tau^N)$ , определяемым формулами

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i(\tau^N) \cap \Omega_j(\tau^N)) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

$$c(x, \tau_i) = \min_{k=1, \dots, N} c(x, \tau_k) \quad \text{при } x \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

В рассматриваемом случае, когда  $c$  – квазиметрика, подмножества  $\Omega_i(\tau^N)$ , образующие разбиение Дирихле – Вороного, и их лебеговы меры  $\mu(\Omega_i(\tau^N))$  определяются, вообще говоря, неоднозначно [100].

В работе [100] доказано, что квадратурная формула вида (6.3.1) с коэффициентами  $p_i^*(\tau^N) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\Omega_i(\tau^N))$ ,  $i=1, \dots, N$ , оптимальна на классе  $F_c$  среди квадратурных формул с фиксированными узлами  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , а гарантированный ею результат (максимальная погрешность

$$\sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i^*(\tau^N) f(\tau_i) \right| \text{ равен } \int_{\Omega} \min_{i=1, 2, \dots, N} c(x, \tau_i) dx.$$

Кроме того, решение задачи отыскания оптимальных узлов квадратурной формулы сводится к отысканию в области  $\Omega$  таких точек  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ , что

$$\int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i^*) dx = \min_{\tau^N \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) dx,$$

и наилучший на классе  $F_c$  во множестве всех квадратурных формул результат равен

$$m_N = \inf_{\tau^N \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) dx. \quad (6.3.6)$$

Сравнивая формулы (6.3.5) и (6.3.6), приходим к выводу, что, с одной стороны,  $(p_*^N, \tau_*^N)$  – это вектор оптимальных коэффициентов и оптимальных узлов квадратурной формулы (6.3.1), задающий наилучшую гарантированную точность  $m_N$ , с другой стороны, пара  $(\lambda_*(\cdot), \tau_*^N)$  – задает оптимальное разбиение множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  с оптимальными координатами центров подмножеств  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  и оптимальным значением функционала  $G(\tau_*^N)$ , равным  $m_N$ .

Отсюда, решая оптимизационную задачу **A2** оптимального разбиения множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  с отысканием координат центров этих подмножеств  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ , можно найти значения координат оптимальных узлов  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  и значения оптимальных коэффициентов  $p_i^*(\tau_*^N) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\Omega_i^*(\tau_*^N))$ ,  $i = 1, \dots, N$ , квадратурной формулы (6.3.1).

### 6.3.2. Алгоритм отыскания узлов оптимальной квадратурной формулы

Для отыскания координат оптимальных узлов  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  квадратурной формулы (6.3.1) воспользуемся алгоритмом **1.5** решения задачи **A4** с учётом того, что задача **A2** является частным случаем задачи **A4**.

Определим  $i$ -ю компоненту  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_G(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$  функции  $G(\tau)$  в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  следующим образом:

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = \int_{\Omega} g_c^{\tau_i}(x, \tau) \lambda_i(x) dx, \quad i=1, \dots, N. \quad (6.3.7)$$

Здесь  $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$  –  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_c^{\tau}(x, \tau)$  функции  $c(x, \tau_i)$  в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ , где  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  при фиксированном  $x$  имеет вид:

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

Сформулируем алгоритм **6.1** отыскания координат узлов оптимальной квадратной формулы (6.3.1).

**Алгоритм 6.1**

Область  $\Omega$  заключаем в  $n$ -мерный параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем  $\rho(x) = 0$  для  $x \in \Pi \setminus \Omega$ . Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой и задаём начальное приближение  $\tau = \tau^{(0)}$ . Вычисляем значения  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (6.3.4) при  $\tau = \tau^{(0)}$ , значения  $g_G(\tau)$  – по формуле (6.3.7) при  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(0)}$ , выбираем начальный пробный шаг  $g$ -алгоритма  $h_0 > 0$ , и находим:

$$\tau^1 = P_{\Pi} \left( \tau^0 - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau^0)}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau^0), g_G(\tau^0))}} \right),$$

$P_{\Pi}$  – оператор проектирования на  $\Pi$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получены определённые значения  $\tau^{(k)}$ ,  $\lambda^{(k-1)}(x)$  в узлах сетки. Опишем  $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (6.3.4) при  $\tau = \tau^{(k)}$ .
2. Находим значения  $g_G(\tau)$  по формулам (6.3.7) при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(k)}$ .
3. Проводим  $(k+1)$ -й шаг  $g$ -алгоритма в  $H$ -форме [81], итерационная формула которого имеет вид:

$$\tau^{k+1} = P_{\Pi} \left( \tau^k - h_k \frac{H_{k+1} g_G(\tau^k)}{\sqrt{(H_{k+1} g_G(\tau^k), g_G(\tau^k))}} \right).$$

4. Если условия

$$\|\tau^k - \tau^{k+1}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

(6.3.8)

не выполняются, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем  $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ ,  $\tau_* = \tau^{(l)}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (6.3.8).

6. Вычисляем оптимальное значение целевой функции по формуле

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \rho(x) dx, \quad \text{при } \tau = \tau_*.$$

Алгоритм **6.1** описан.

### 6.3.3. Алгоритмы отыскания коэффициентов оптимальной квадратурной формулы

Заметим, что в результате работы алгоритма **6.1** наряду с координатами оптимальных узлов  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  квадратурной формулы и значением наилучшей гарантированной точности  $m_N$ , равным  $G(\tau_*^N)$  из (6.3.5), будет также найдено оптимальное разбиение множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  в виде характеристической вектор-функции  $\lambda_*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$ . Как уже отмечалось ранее, значения оптимальных коэффициентов  $p_i^*(\tau_*^N)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , квадратурной формулы (6.3.1) равны мерам соответствующих подмножеств  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ , которые определяются алгоритмом **6.1**.

Опишем схему алгоритма **6.2** вычисления оптимальных коэффициентов  $p_i^*(\tau_*^N)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , как мер  $\mu(\Omega_i^*(\tau_*^N))$  для случая, когда заранее неизвестна геометрическая форма границ между подмножествами  $\Omega_i^*$  и  $\Omega_j^*$ . Считаем при этом найденными алгоритмом **6.1** значения оптимальных узлов  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$  квадратурной формулы, а также оптимальное разбиение множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ , представленное в виде характеристической вектор-функции  $\lambda_*(\cdot)$ .

Алгоритм **6.2** опишем для случая  $\Omega \subset E_n$ .

#### Алгоритм 6.2

**Шаг 1.** Множество  $\Omega \subset E_n$  покрываем сеткой, составленной из  $n$ -мерных параллелепипедов. С этой целью зададим набор чисел  $M^1, M^2, \dots, M^n$ , каждое из которых характеризует количество точек разбиения по каждой из сторон  $n$ -мерного параллелепипеда. Находим узлы сетки

$$x_i^j = a^j + (i^j - 1) \cdot h^j, \quad (6.3.9)$$

где  $h^j = \frac{b^j - a^j}{M^j}$  – шаг сетки,  $i^j = 1, M^j - 1$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $x_i^j \in \Omega$ .

**Шаг 2.** В каждом узле сетки, построенной на шаге 1,  $x_{i^1, \dots, i^n} = (x_{i^1}^{(1)}, \dots, x_{i^n}^{(n)})$ ,  $i^1 = 1, M^1 - 1, \dots, i^n = 1, M^n - 1$ , вычисляем значения

характеристической функции по следующей формуле:

$$\lambda_k^*(x_{i^1, \dots, i^n}) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x_{i^1, \dots, i^n}, \tau_k^*) = \min_{q=1, \dots, N} c(x_{i^1, \dots, i^n}, \tau_q^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

**Шаг 3.** Зададим вектор  $S = (S_1, \dots, S_N) = \theta$ , содержащий информацию о мерах полученных оптимальных подмножеств  $\Omega_1^{*(1)}, \dots, \Omega_N^{*(n)}$ . Здесь  $S_i$  хранит информацию о мере подмножества  $\Omega_i^*$  с центром в точке  $\tau_i^*$ .

**Шаг 4.** Рассмотрим для  $\forall i^j = \overline{1, M^j - 1}$ ,  $j = 1, \dots, n$  параллелепипед

$$[x_{i^1}^1, x_{(i+1)^1}^1] \times [x_{i^2}^2, x_{(i+1)^2}^2] \times \dots \times [x_{i^n}^n, x_{(i+1)^n}^n]. \quad (6.3.10)$$

Все вершины параллелепипеда (6.3.10) обозначим как  $A_{k^1, \dots, k^n}$ ,  $k^1 = i^1 \vee (i+1)^1, \dots, k^n = i^n \vee (i+1)^n$ . Для всех полученных  $2^n$  вершин найдем значения характеристической функции  $\lambda(\cdot)$  по формулам из шага 2.

4.1. Если все  $2^n$  значений характеристической функции  $\lambda(\cdot)$  совпадают и равны некоторому числу  $p$ , то параллелепипед (6.3.10) целиком принадлежит множеству  $\Omega_p$ . Найдём меру этого параллелепипеда и увеличим  $i$ -ю компоненту вектора  $S$  на эту величину:  $S_i \leftarrow S_i + V_{i^1, i^2, \dots, i^n}$ .

4.2. Если же среди  $2^n$  значений характеристической функции есть различные, то:

- находим количество  $Q$  оптимальных подмножеств, которые частично находятся в данном параллелепипеде (6.3.10);
- находим оптимальные границы и точку пересечения всех подмножеств, которые входят в (6.3.10);
- имея информацию о всех гранях и вершинах частей оптимальных множеств, находим меры этих сложных фигур и относим их к соответствующим компонентам вектора  $S = (S_1, \dots, S_N)$ :  $S_i \leftarrow S_i + V_i$ ,  $i = \overline{1, Q}$ .

**Шаг 5.** Если все параллелепипеды из пространства  $\Omega$  рассмотрены, то получим вектор  $S = (S_1, \dots, S_N)$ , содержащий значения мер оптимальных подмножеств, и алгоритм завершает свою работу. Иначе – возвращаемся к шагу 4.

Алгоритм 6.2 описан.

Описанный алгоритм 6.2 конкретизируем для случая  $\Omega \subset E_2$ .

**Алгоритм 6.3**

**Шаг 1.** Область  $\Omega \subset E_2$  заключаем в прямоугольник  $\{x_a \leq x \leq x_b, y_a \leq y \leq y_b\}$  и покрываем его сеткой. Задаем значения  $M^1, M^2$  – число узлов сетки по оси абсцисс и ординат, соответственно, так что

$$x_i = x_a + (i-1)h^1, \quad y_j = y_a + (j-1)h^2, \quad (6.3.11)$$

где  $h^1 = \frac{x_b - x_a}{M^1}$ ,  $h^2 = \frac{y_b - y_a}{M^2}$ ,  $i = \overline{1, M^1 - 1}$ ,  $j = \overline{1, M^2 - 1}$  – шаг сетки по осям абсцисс и ординат соответственно.

Значения  $M^1, M^2$  должны быть согласованы с задаваемой точностью приближенных вычислений.

**Шаг 2.** В каждом узле сетки  $(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, M^1 - 1}$ ,  $j = \overline{1, M^2 - 1}$ , полученном по формулам (6.3.11), вычислим значения характеристической функции по формуле

$$\lambda_k^*(x_{i^1}, \dots, i^n) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x_{i^1, \dots, i^n}, \tau_k^*) = \min_{q=1, \dots, N} c(x_{i^1, \dots, i^n}, \tau_q^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

**Шаг 3.** Зададим вектор  $S = (S_1, \dots, S_N)$  мер подмножеств  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  в виде  $S = (S_1, S_2, \dots, S_N) = (\underbrace{0, \dots, 0}_N)$ , где  $S_i$  мера подмножества  $\Omega_i^*$  с центром  $\tau_i^*$ .

**Шаг 4.** Рассмотрим для  $\forall i^j = \overline{1, M^j - 1}$ ,  $j = 1, \dots, n$  прямоугольник

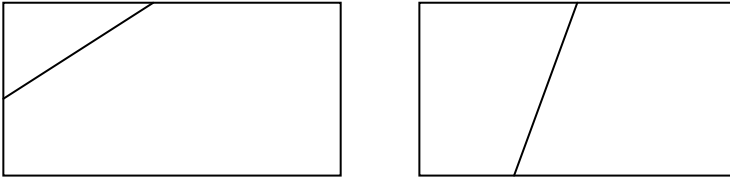
$$[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]. \quad (6.3.12)$$

Обозначим вершины прямоугольника (6.3.12):  $A_1 = (x_i, y_j)$ ,  $A_2 = (x_i, y_{j+1})$ ,  $A_3 = (x_{i+1}, y_{j+1})$ ,  $A_4 = (x_{i+1}, y_j)$ . Для полученных вершин найдем значения характеристической функции  $\lambda(\cdot)$  по формулам из шага 2.

4.1. Если равенство  $\lambda(A_1) = \lambda(A_2) = \lambda(A_3) = \lambda(A_4) = p$  выполняется, то прямоугольник (6.3.12) целиком принадлежит множеству  $\Omega_p$ . Находим меру этого прямоугольника (равную  $h^1 \cdot h^2$ ) и полагаем  $S_i \leftarrow S_i + h^1 \cdot h^2$ . Если же равенство не выполняется – на шаг 4.2.

4.2. Находим число  $Q$  оптимальных подмножеств, которые частично находятся в прямоугольнике (6.3.12). Для этого находим число отличных друг от друга значений  $\lambda(A_i)$ ; оптимальные границы и точку пересечения всех подмножеств, которые входят в состав рассматриваемого прямоугольника (6.3.12), находим с помощью следующей процедуры.

4.2.1. Пусть прямоугольник (6.3.12) содержит части лишь двух разных оптимальных подмножеств. Тогда рассматриваем случаи:



Все другие возможные случаи сводятся к этим двум принципиально разным случаям путем поворота рассматриваемого прямоугольника.

В первом случае часть одного множества имеет вид треугольника, а во втором – четырехугольника. Другое множество представлено пятиугольником и четырехугольником соответственно.

Для нахождения мер этих фигур необходима информация об их вершинах. Ее можно получить с помощью известной уже информации о координатах вершин прямоугольника  $A_1, \dots, A_4$ .

Зададим функцию  $f(x, k, m) = c(x, \tau_k^*) - c(x, \tau_m^*)$ , где  $k$  и  $m$  – номера подмножеств, которые частично принадлежат прямоугольнику (6.3.12). Очевидно, что в точках, принадлежащих границе между оптимальными множествами  $\Omega_k^*$  и  $\Omega_m^*$ , имеет место следующее равенство:

$$c(x, \tau_k^*) = c(x, \tau_m^*) \Rightarrow f(x, k, m) = 0.$$

Итак, отыскивать координаты вершин оптимальных подмножеств  $\Omega_k^*$  и  $\Omega_m^*$ , которые частично принадлежат прямоугольнику (6.3.12), будем следующим образом:

- выбираем сторону прямоугольника (6.3.12), на концах которой характеристическая функция  $\lambda(A_i)$  имеет разные значения, т. е. сторону, концы которой принадлежат разным оптимальным подмножествам. Обозначим эти точки через  $x_1$  и  $x_2$ ;

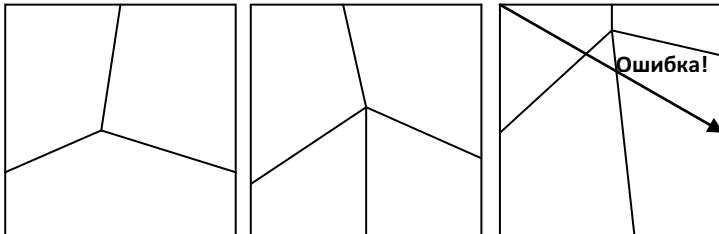
- зададим параметр  $\varepsilon$ ;

– делим выбранную сторону пополам:  $\frac{x_1+x_2}{2}$  и проверяем условие  $f(x_1, k, m) \times f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, k, m\right) \leq 0$ . Если это условие выполняется, то поиск продолжаем на отрезке  $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ , иначе – на отрезке  $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ ;

– процесс продолжаем до тех пор, пока не выполняться любое из трех условий:  $f(x_1, k, m) = 0$  или  $f(x_2, k, m) = 0$  или  $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$ .

Таким образом, найдя все точки пересечения оптимальных границ со сторонами рассматриваемого прямоугольника (6.3.12), находим площади соответствующих частей, увеличиваем соответствующие компоненты вектора  $S = (S_1, \dots, S_N)$  на полученную величину.

4.2.2. Пусть прямоугольник (6.3.12) включает в себя части трех или четырех оптимальных подмножеств вида:



Здесь необходима информация не только о координатах точек пересечения оптимальных границ со сторонами рассматриваемого прямоугольника, но и о координатах точки пересечения между оптимальными подмножествами, которые частично принадлежат прямоугольнику (6.3.12). Для определения точки пересечения оптимальных подмножеств, частично принадлежащих прямоугольнику (6.3.12), предлагается такая процедура. Произвольным образом выбираем сторону прямоугольника (6.3.12), содержащую точку пересечения с оптимальной границей некоторого подмножества  $\Omega_k^*$ , частично принадлежащего прямоугольнику (6.3.12); произвольно выбираем вершину этой стороны; соединяем ее с серединой противоположной стороны, до тех пор, пока не будет достигнуто пересечение



чение с оптимальной границей: т. е. значения функции  $\lambda(\cdot)$  в рассматриваемых точках – разные.

Таким образом, для оптимальной границы некоторого подмножества, частично принадлежащего прямоугольнику (6.3.12), получены две пары координат точек, которые ей принадлежат. Повторяем описанный процесс для определения хотя бы еще одной пары таких точек. После вычисления пар точек, принадлежащих оптимальным границам подмножеств, частично принадлежащих прямоугольнику (6.3.12), определяем координаты точки пересечения оптимальных границ между этими подмножествами. Находим все площади частей оптимальных подмножеств, которые размещаются в прямоугольнике (6.3.12), и увеличиваем соответствующие компоненты вектора  $S = (S_1, \dots, S_N)$  на полученные значения мер подмножеств.

**Шаг 5.** Перебрав все прямоугольники множества  $\Omega$ , получаем вектор  $S = (S_1, \dots, S_N)$ , который содержит значения мер оптимальных подмножеств  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ . Иначе – переходим на шаг 4.

Алгоритм **6.3** описан.

Исследование эффективности алгоритмов отыскания узлов и коэффициентов оптимальной квадратурной формулы для классов функций, определенных на  $\Omega$  из  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , заданных квазиметриками (6.3.13)–(6.3.15), приведено в работе [1]. Там же проводилось сравнение полученных результатов работы алгоритмов **6.1–6.3** с уже известными аналитическими решениями, т. е. когда задача построения оптимальных квадратур сводится к задаче оптимального покрытия [100]. Подтверждена достоверность алгоритмов **6.1–6.3** и их высокая эффективность.

Алгоритмы **6.1–6.3** также достаточно эффективно работают и для случаев, когда задача построения оптимальных квадратур не сводится к задаче оптимального покрытия, а решается задача оптимального разбиения, где центры подмножеств разбиения являются узлами квадратурной формулы. Значения гарантированной точности зависят от числа  $N$  разбиений множества  $\Omega$  на подмножества. При его увеличении значение наилучшей гарантированной точности  $m_N$  уменьшается.

## 6.4. РЕШЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ МНОЖЕСТВ

Интенсивное изучение задачи об оптимальном покрытии множества произвольной структуры конечной системой подмножеств началось в 60-е годы XX века и продолжается до настоящего времени [7, 18, 45, 57, 63, 72, 87, 90, 96, 97, 100, 163, 166, 167 и др.]. Интерес к задаче об оптимальном покрытии можно объяснить тем, что она служит адекватной математической моделью для большого числа задач техники, экономики и других областей человеческой деятельности. Такими задачами являются, например, задача построения сети из искусственных спутников земли, предназначенных для контролирования диапазона круговых орбит [87], задача об оптимальном (с точки зрения минимизации максимально возможного проигрыша) выборе параметров нескольких типов летательных аппаратов, проектируемых для выполнения всего заданного диапазона маневров [87], задача выбора оптимальной мощности универсальных двигательных установок малой тяги, задачи оптимального размещения предприятий и баз снабжения [18] и др.

Примерами теоретических задач, сводящихся к задачам оптимального покрытия, являются, например, задачи восстановления функций, глобальной оптимизации, построения оптимальных квадратур [100].

Рассмотрим здесь непрерывные задачи о покрытии множеств в следующих постановках.

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, замкнутое, измеримое по Лебегу множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ .

Будем называть  $s$ -шаром радиуса  $R$  с центром в точке  $\tau_i$  из  $E_n$  множество вида  $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n: c(x, \tau_i) \leq R\}$ , где  $c(x, \tau_i)$  – некоторая квазиметрика [100].

Скажем, что совокупность центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  задает шаровое покрытие множества  $\Omega$  с радиусом  $R$ , если

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tau_i, R).$$

Ясно, что радиус  $R$  покрытия множества  $\Omega$ , задаваемого центрами  $\tau_1, \dots, \tau_N$  (вектором  $\tau^N$ ), имеет вид:

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (6.4.1)$$

где  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N = E_n^N$  (либо, в частном случае,

$$\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

Очевидно, что покрытие множества  $\Omega$ , задаваемого вектором  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ , с радиусом  $R(\tau^N)$ , определяемым по формуле (6.4.1), является минимальным  $c$ -шаровым покрытием, генерируемым вектором  $\tau^N$ , т. е. никакие  $c$ -шары меньшего радиуса с центрами в  $\tau_1, \dots, \tau_N$  не покрывают  $\Omega$  [100, 144].

Покрытие минимального радиуса назовем *оптимальным*.

Таким образом, для отыскания оптимального покрытия надо найти величину

$$R(\tau^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i),$$

называемую *радиусом оптимального покрытия* и вектор  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , при которых достигается значение, равное нижней грани.

Рассмотрим три известные непрерывные задачи о  $c$ -шаровом покрытии, следуя [87, 100, 144].

**Задача III** (центры фиксированы). Для заданной системы центров  $(\tau_1, \dots, \tau_N)$  из  $E_n^N$  (либо из  $\Omega^N$ ) найти минимальное  $c$ -шаровое покрытие множества  $\Omega$ , т. е. найти величину (6.4.1).

Как известно [100, 144], величина радиуса  $R(\tau^N)$  покрытия, заданного вектором  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  из  $\Omega^N$  в задаче III, тесно связана с разбиением Дирихле – Вороного множества  $\Omega$ , т. е. с таким разбиением множества  $\Omega$  на измеримые попарно непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , объединение которых есть  $\Omega$ , и такие, что

$$c(x, \tau_i) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j), \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Действительно, как следует из [144],

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) = \sup_{i=1, \dots, N} \sup_{x \in \Omega_i} c(x, \tau_i). \quad (6.4.2)$$

Таким образом, для отыскания решения задачи III можно предложить следующую схему (рис. 6.23):

- 1) найти разбиение Дирихле – Вороного  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , генерируемое вектором  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  из  $\Omega^N$ ;
- 2) для каждого подмножества  $\Omega_i$  найти максимальное расстояние от точки  $\tau_i$  до его границы;

3) среди этих максимальных расстояний выбрать наибольшее и принять его в качестве радиуса  $R(\tau^N)$  покрытия.

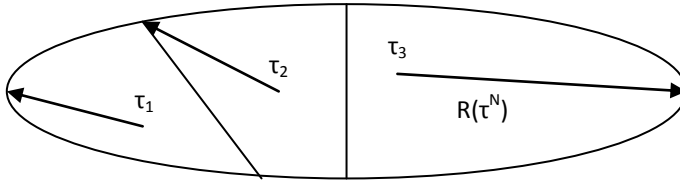


Рис. 6.23. Схема отыскания решения задачи о покрытии с фиксированными центрами

Как видно, на первом этапе этой схемы решения задачи **П1** возникает задача оптимального разбиения компактного множества  $\Omega$  на непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  с фиксированными центрами  $\tau_1, \dots, \tau_N$  этих подмножеств, математически сформулированная в следующем виде.

**Задача P1:** найти такую вектор-функцию  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x))$ , характеризующую разбиение множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , чтобы функционал

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx$$

достигал минимального значения при условиях

$$\begin{aligned} \lambda_i(x) &= 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) &= 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения первого этапа решения задачи о покрытии **П1** можно использовать оптимальное решение задачи **P1**, являющееся разбиением Дирихле – Вороного, имеющее для  $i = 1, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$  вид:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_i) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j), \quad x \in \Omega_i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь более сложную задачу об оптимальном покрытии, в которой, в отличие от задачи **П1**, центры  $\tau_1, \dots, \tau_N$  не фиксированы, а должны разместиться во множестве  $\Omega$  так, чтобы получить покрытие минимального радиуса (т. е. оптимальное покрытие).

**Задача П2** (об оптимальном ограниченном  $c$ -шаровом покрытии). При заданном числе  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  найти их размещение в области  $\Omega$ , осуществляющее покрытие множества  $\Omega$  с минимальным радиусом, т. е. найти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (6.4.3)$$

и вектор  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_n^N$ , при которых в (6.4.3) достигается значение, равное нижней грани.

Заметим, что если  $\Omega$  – компактное множество, а  $c(x, \tau_i)$  – непрерывна, то оптимальное покрытие множества  $\Omega$  заданным числом  $N$   $c$ -шаров одинакового радиуса существует [87].

Сформулируем теперь задачу об оптимальном покрытии, отличающуюся от задачи **П2** тем, что центры  $\tau_1, \dots, \tau_N$  могут размещаться не во множестве  $\Omega$ , а во всем пространстве  $E_n$ .

**Задача П3** (об оптимальном  $c$ -шаровом покрытии). При заданном числе  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  найти их размещение в  $E_n$ , осуществляющее покрытие множества  $\Omega$  с минимальным радиусом, т. е. найти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N \in E_n^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (6.4.4)$$

и вектор  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in E_n^N$ , при которых в (6.4.4) достигается значение, равное нижней грани.

Заметим, что обобщением задач **П2** и **П3** является задача об оптимальном покрытии, в которой каждый (или все) из центров  $\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N$  может размещаться в соответствующем множестве  $T_i$  (выпуклом, замкнутом, ограниченном) из  $E_n$ , которое не обязательно совпадает с подмножеством  $\Omega_i$ .

Схема решения задачи **П2** состоит из первых трех пунктов схемы решения задачи **П1** и 4-го пункта, состоящего в следующем:

4) из всех наборов  $(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$  выбрать тот (обозначим его  $(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ ), для которого радиус  $R(\tau_*^N)$  будет минимальным.

Результат четвертого пункта схемы решения задачи **П2** представлен на рис. 6.24.

И, наконец, сформулируем задачу о покрытии, отличающуюся от первых трех задач тем, что число  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  заранее не задано.

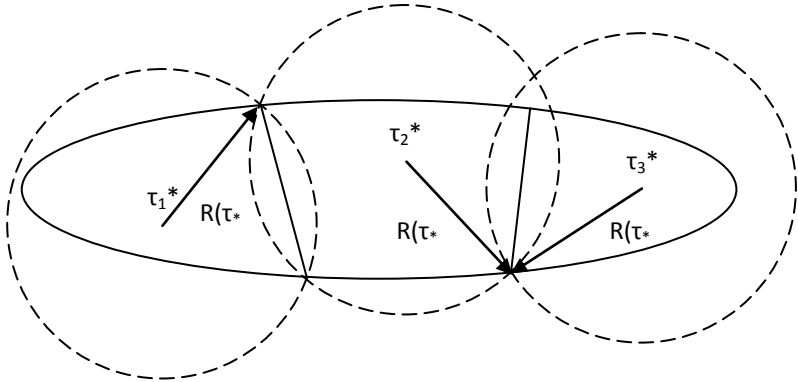


Рис. 6.24. Ограниченное оптимальное  $c$ -шаровое покрытие множества  $\Omega$  при  $N=3$ ,  $\tau^N \in \Omega^N$

**Задача П4** об отыскании минимальной по числу совокупности центров покрытия: при заданном радиусе покрытия  $R$  найти минимальную по числу  $N$  совокупность центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , генерирующую покрытие компактного множества  $\Omega$ .

Задача **П2** отличается от задачи **П3** так же, как задача конечномерной условной оптимизации отличается от задачи конечномерной безусловной оптимизации. Кроме того, как указано в работе [87], задачи **П2** и **П4** в определенном смысле взаимны. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, можно остановиться на рассмотрении задачи **П2**.

В данном разделе приведём конструктивный алгоритм решения непрерывной задачи об оптимальном покрытии множеств из  $E_n$ , разработанный на основе теории оптимального разбиения множеств.

Предложенный алгоритм оптимального покрытия, в отличие от алгоритмов, рассмотренных в [18, 87, 100, 137, 138, 144], удовлетворяет таким условиям:

- он не зависит от геометрических особенностей покрываемого множества и размерности пространства  $E_n$ ;
- каждый итерационный шаг его позволяет улучшать положение одновременно всех центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$ ;
- его можно использовать для различных квазиметрик  $c$  из [100];
- он имеет простую программную реализацию.

Перейдём к описанию алгоритма решения непрерывной задачи **П2** об оптимальном  $c$ -шаровом покрытии множества из  $E_n$ , сформулированной в следующем виде.

Пусть  $\Omega$  – компактное (ограниченное, замкнутое), измеримое по Лебе-

гу множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ .

**Задача П2.** При заданном числе  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  найти их размещение в области  $\Omega$ , осуществляющее  $c$ -шаровое покрытие множества  $\Omega$  с минимальным радиусом, т. е. найти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \quad (6.4.5)$$

и вектор  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_n^N$ , при которых в (6.4.5) достигается значение, равное нижней грани.

Здесь функция  $c(x, \tau_i)$  определяется как одна из метрик:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2} \text{ — евклидова,} \quad (6.4.6)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{j=1}^n |x^j - \tau_i^j| \text{ — манхэттенская,} \quad (6.4.7)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{j=1, \dots, N} \{|x^j - \tau_i^j|\} \text{ — Чебышева.} \quad (6.4.8)$$

Поскольку, как отмечалось выше, для компактного множества  $\Omega$  из  $E_n$  и непрерывной функции  $c$  оптимальное покрытие множества  $\Omega$  заданным числом  $N$   $c$ -шаров одинакового радиуса существует, то задачу (6.4.5) можно переписать следующим образом:

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \quad (6.4.9)$$

### 6.4.1. Свойства непрерывной задачи об оптимальном покрытии

Отметим некоторые свойства функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6.4.9) для случая евклидовой нормы  $c(x, \tau_i)$ , т. е.  $c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_{E_n}$ . Обоснование и иллюстрацию этих свойств см. в работе [65].

1. Легко показать, что функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  — непрерывна и ограничена на  $\Omega^N$ . Отметим также, что функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6.4.9) является *липшицевой* на  $\Omega^N$ , т. е. выполняется неравенство

$$|\max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) - \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \bar{\tau}_i)| \leq L \cdot \|\tau^N - \bar{\tau}^N\|_{E_n^N},$$

где  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ ,  $L > 0$  — константа Липшица, не зависящая от выбора

точек  $\tau^N$  и  $\bar{\tau}^N$  из  $\Omega^N$ . Доказательство этого утверждения можно найти в работе [144].

2. Функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6.4.9) не является выпуклой на  $\Omega^N$ .

3. Из того, что функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  удовлетворяет условию Липшица, следует, что она почти всюду дифференцируема [109], поэтому в дальнейшем правомерно будет вести речь о почти или обобщенных градиентах этой функции.

4. Многояэкстремальная функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  в зависимости от вида множества  $\Omega$  может обладать (с точностью до перенумерации центров) конечным или бесконечным числом глобальных минимумов, а также может иметь локальные минимумы.

5. Как доказано в [144], для непустого компактного множества  $\Omega \subset E_n$  и  $\tau_i \in \Omega, i = 1, \dots, N$ , справедливо следующее равенство:

$$R(\tau^N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) = \max_{i=1, \dots, N} \max_{x \in \Omega} c(x, \tau_i), \quad (6.4.10)$$

где множества  $\Omega_i, i = 1, \dots, N$ , составляют диаграмму Дирихле – Вороного для множества  $\Omega$ , т. е.

$$\Omega_i = \{x \in \Omega: c(x, \tau_i) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j)\} \text{ и } \Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i;$$

причем множества  $\Omega_i$  – компактны для всех  $i = 1, \dots, N$ .

Заметим, что множество  $\Omega_i$  определяется точкой  $\tau_i$ , поэтому иногда  $\Omega_i$  будем записывать как  $\Omega(\tau_i)$ .

6. Из [144] следует также, что если  $A$  – непустое компактное множество из  $E_n$ , то для любых  $y \in E_n$  имеет место:

$$y_0 = \sup_{x \in A} \|y - x\|_{E_n} = \sup_{x \in \text{co}(A)} \|y - x\|_{E_n},$$

где  $\text{co}(A)$  – выпуклая оболочка множества  $A$ .

7. Обозначим через  $T$  фиксированное разбиение непустого компактного множества  $\Omega$  на  $N$  непересекающихся подмножеств  $T_1, \dots, T_i, \dots, T_N$ ,

т. е.  $\bigcup_{i=1}^N T_i = \Omega, T_i \cap T_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, \dots, N, T_i$  – непустые, компактные.

Введем также для каждого  $i = 1, \dots, N$ , функции

$$\sigma_i(\tau^N) = \max_{x \in T_i} c(x, \tau_i). \quad (6.4.11)$$

Поскольку в (6.4.11) функции  $c(x, \tau_i), i = 1, \dots, N$ , определены на  $T_i \times E_n$ , непрерывны по  $x$  и выпуклы по  $\tau_i$  на  $E_n$  (либо на открытом выпуклом множестве из  $E_n$ ) при любом  $x \in T_i$ , то (см. [112], теорема 1.9) функции



$\sigma_i(\tau^N)$  из (6.4.11) выпуклы по  $\tau_i$  на  $E_n^N$ . И, согласно той же теореме, субградиентное множество  $G_{\sigma_i^T}(\tau_0^N)$  в точке  $\tau_0^N$  функции (6.4.11) вычисляется по формуле:

$$G_{\sigma_i^T}(\tau_0^N) = \overline{\text{co}} \bigcup_{x \in I(\tau_0^N)} G_{c(x, \tau_i)}(\tau_0^N), \tag{6.4.12}$$

где  $I(\tau_0^N) = \{x: x \in T_i; c(x, \tau_i^0) = \sigma_i^T(\tau_0^N)\}$ ;  $G_{c(x, \tau_i)}(\tau_0^N)$  – субдифференциал функции  $c(x, \tau_i)$  по  $\tau_i$  на  $E_n$  при данном  $x \in T_i$ .

Субградиентное множество  $G_{\sigma_i^T}(\tau_0^N)$  непустое, выпуклое, компактное.

Таким образом, из выпуклости функций  $\sigma_i(\tau^N)$  на  $E_n^N$  и равенства (6.4.10) следует, что значением целевой функции задачи (6.4.9) является максимум решений конечного числа выпуклых оптимизационных задач.

**Замечание 6.1.** Еще раз подчеркнем, что в формуле (6.4.12)  $T_i$  –  $i$ -е подмножество фиксированного разбиения множества  $\Omega$ . Однако, если разбиение множества  $\Omega$  на подмножества не фиксировано и неизвестно заранее положение точек  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , генерирующих оптимальное покрытие множества  $\Omega$ , а значит, и соответствующее разбиение Дирихле – Вороного, то функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6.4.9) не является, как отмечалось выше, выпуклой на  $\Omega^N$  вследствие невыпуклости по  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  на  $\Omega^N$  функции  $g(x, \tau^N) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j)$ .

Но хотя функция  $g(x, \tau^N)$  не является выпуклой по  $\tau^N$  при любом фиксированном  $x \in \Omega$ , она состоит из выпуклых участков, отвечающих локальным минимумам функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ , а, как известно [109], для невыпуклых кусочно-гладких функций почтиградиент совпадает с субградиентом к одному из примыкающих к данной точке выпуклых участков.

Далее приведем лемму, следуя [144], которая дает возможность генерировать монотонно убывающую последовательность значений целевой функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6.4.9) об оптимальном покрытии множества  $\Omega$ .

**Лемма 6.1.** Пусть  $\Omega$  компактное множество из  $E_n$  и

$$R(\tau^N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i).$$

Если центры  $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N$  выбрать из условия

$$\max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tilde{\tau}_i) = \min_{\tau_i \in \text{co } \Omega(\tau_i)} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\text{то } R(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N) \leq R(\tau_1, \dots, \tau_N).$$

(Здесь центр  $\tilde{\tau}_i$  задает шар, покрывающий  $\Omega(\tau_i)$  с минимальным радиусом.)

Доказательство (см. [65, с. 351 - 352]).

### 6.4.2. Алгоритм оптимального покрытия множества шарами минимального радиуса, основанный на использовании методов оптимального разбиения множеств

Для решения задачи (6.4.9) об оптимальном покрытии, т. е. для отыскания координат центров  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  и значения радиуса покрытия  $R(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , минимизирующих целевую функцию

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \quad (6.4.13)$$

при условии

$$(\tau_1, \dots, \tau_N) \in (\text{co } \Omega)^N, \quad (6.4.14)$$

необходимо, согласно лемме 6.1, минимизировать по  $\tau_i, \quad i = 1, \dots, N$ , на множестве  $\text{co } \Omega(\tau_i)$  функции

$$R_i(\tau_i) = \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.4.15)$$

Минимизация на множестве  $\text{co } \Omega(\tau_i)$  допустима, так как

$$\text{co } \Omega = \text{co } \bigcup_{i=1}^N \Omega(\tau_i) \supseteq \bigcup_{i=1}^N \text{co } \Omega(\tau_i).$$

Поскольку функции  $R_i(\tau_i)$  из (6.4.15) недифференцируемы, для решения задачи (6.4.13), (6.4.14) будем использовать один из вариантов метода g-алгоритма Шора [109]).

Согласно (6.4.12) и замечанию 6.1, i-я компонента N-мерного вектора обобщенного градиента

$$g_R(\tau^N) = (g_{R_1}^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g_{R_N}^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (6.4.16)$$

функции  $R(\tau^N)$  из (6.4.9) в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  является элементом субградиентного множества функции  $R_i, \quad i = 1, \dots, N$ , из (6.4.15) в точке  $\tau_i$ , которое имеет вид:

$$G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N) = \text{co } \{g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}_i); \bar{x}_i: \|\bar{x}_i - \tau_i\| = \max_{x \in \Omega(\tau_i)} \|x - \tau_i\|\}, \quad (6.4.17)$$

где  $g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}_i)$  – обобщенный градиент функции  $c(\bar{x}, \tau_i)$  в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ , а  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ .

Перейдем от задачи условной минимизации (6.4.13), (6.4.14) по  $\tau^N$  на множестве  $(\text{co}\Omega)^N$  к задаче безусловной минимизации по  $\tau^N$  на  $E_n^N$  с помощью введения в целевую функцию (6.4.13) негладкой штрафной функции множества  $\text{co}\Omega$ .

Если  $\text{co}\Omega = \{x \in E_n: \rho(x) \leq 0\}$ , где  $\rho(x)$  – функция, задающая границу области  $\text{co}\Omega$ , то негладкую штрафную функцию  $H$  для задачи (6.4.13), (6.4.14) можно ввести следующим образом:

$$H(\tau_1, \dots, \tau_N) = S \sum_{i=1}^N \max\{0, \rho(\tau_i)\}, \quad (6.4.18)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число (значительно большее максимального из множителей Лагранжа для функции (6.4.13)).

Заметим, что, как известно [81], функции  $\max\{0, \rho(\tau_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  выпуклы на  $\text{co}\Omega$ , если выпуклы функции  $\rho(\tau_i)$  на  $\text{co}\Omega$ , и  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_H(\tau_1, \dots, \tau_N) = (g_H^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_H^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g_H^{\tau_N}(\tau^N))$$

функции  $H$  в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in E_n^N$  имеет вид:

$$g_H^{\tau_i}(\tau_1, \dots, \tau_N) = S \cdot \max\{0, \rho(\tau_i)\} g_\rho^{\tau_i}(\tau_i), \quad (6.4.19)$$

где  $g_\rho^{\tau_i}(\tau_i)$  – обобщенный градиент функции  $\rho(\tau_i)$  в точке  $\tau_i$ .

Таким образом, от задачи условной минимизации (6.4.13), (6.4.14) перешли к следующей задаче безусловной минимизации:

$$\bar{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = R(\tau_1, \dots, \tau_N) + H(\tau_1, \dots, \tau_N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in E_n^N}, \quad (6.4.20)$$

где  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  имеет вид (6.4.13),  $H(\tau_1, \dots, \tau_N)$  имеет вид (6.4.18).

Обобщенный градиент функции  $\bar{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$  в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  задается формулой

$$g_{\bar{R}}(\tau_1, \dots, \tau_N) = g_R(\tau_1, \dots, \tau_N) + g_H(\tau_1, \dots, \tau_N), \quad (6.4.21)$$

где  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_R(\tau^N)$  из (6.4.16) функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  – любой элемент множества  $G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N)$  (см. (6.4.17)), а  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора  $g_H(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задается формулой (6.4.19).

Конкретизацию в  $E_2$  вида обобщенного градиента  $g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}_i)$  для каждой из метрик  $c(x, \tau_i)$  можно найти в [65].

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи (6.4.13), (6.4.14) об оптимальном покрытии множества  $\Omega$  из  $E_n$ .

Для этого область  $\Omega$  заключим в  $n$ -мерный параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, вводя вспомогательную функцию  $\rho(x)$ , определенную на  $\Pi$ , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда в задаче (6.4.13), (6.4.14) в качестве выпуклой оболочки  $co\Omega$  множества  $\Omega$  будет выступать  $n$ -мерный параллелепипед  $\Pi$ , а под функцией  $c(x, \tau_i)$  будет пониматься функция  $c(x, \tau_i) \cdot \rho(x)$ , определенная на  $\Pi$  и совпадающая с  $c(x, \tau_i)$  на  $\Omega$ , что даёт возможность применять этот алгоритм также для невыпуклых областей.

Для упрощения обозначений в алгоритме вектор  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  обозначим через  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ .

### Алгоритм 6.1

**Предварительный этап.** Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой с шагом  $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$ , и задаем начальное положение центров покрытия  $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ . Строим по этим центрам разбиение Дирихле – Вороного  $\{\Omega(\tau_i^{(0)}), i=1, \dots, N\} = \{\Omega(\tau_1^{(0)}), \dots, \Omega(\tau_N^{(0)})\}$ , используя алгоритм решения задачи А1 ОРМ без ограничений с заданным положением центров подмножеств.

Для каждого подмножества  $\Omega(\tau_i^{(0)}), i = 1, \dots, N$ , находим перебором на сетке все наиболее удаленные точки  $\bar{x}_i^{(0)}$  от соответствующего центра  $\tau_i^{(0)}, i = 1, \dots, N$ . С помощью этих точек по формуле (6.4.21) вычисляем вектор-градиент  $g_{\bar{R}}(\tau_1, \dots, \tau_N)$  в точке  $\tau^{(0)}$ , выбираем начальный пробный шаг  $g$ -алгоритма  $h_0 > 0$ .

**Первый шаг** алгоритма проводим по формуле:

$$\tau^1 = P_{\Pi}(\tau^{(0)} - h_0 \cdot g_{\bar{R}}(\tau^{(0)})),$$

$P_{\Pi}$  – оператор проектирования на  $\Pi$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k, k = 1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получен определенный вектор  $\tau^{(k)} = (\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)})$ .

Опишем **(k+1)-й шаг** алгоритма.

1. По центрам  $\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)}$  с помощью алгоритма решения задачи **A1** оптимального разбиения множеств строим разбиение Дирихле – Вороного  $\{\Omega(\tau_i^{(k)}), i = 1, \dots, N\}$ . Для каждого множества  $\Omega(\tau_i^{(k)}), i = 1, \dots, N$ , находим перебором на сетке все наиболее удаленные точки  $\bar{x}_i^{(k)}$  от соответствующего центра  $\tau_i^{(k)}$ .

2. Вычисляем значения  $g_{\bar{R}}(\tau)$  по формулам (6.4.21) при  $\tau = \tau^{(k)}$ .

3. Проводим (k+1)-й шаг г-алгоритма в Н-форме [81], итерационная формула которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Pi} \left( \tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}), g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}} \right),$$

где  $H_{k+1}$  – матрица растяжения пространства с коэффициентом  $\alpha$  (его целесообразно брать равным 3) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид:

$$H_{k+1} = H_k + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)},$$

$$\Delta_k = g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}) - g_{\bar{R}}(\tau^{(k-1)}).$$

Если из-за округлений счета  $H_{k+1}$  перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг  $h_k$  выбираем из условия минимума по направлению спуска [34].

$$\min_{h>0} \bar{R} \left( \tau^{(k)} - h \frac{H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}), g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}} \right).$$

4. Если условие

$$\|\tau^{k+1} - \tau^k\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{6.4.22}$$

не выполняется, переходим к **(k+2)-му шагу** алгоритма, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем  $\tau_* = \tau^{(l)}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (6.4.22) завершения работы алгоритма.

6. Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$R(\tau) = \max_{i=1, 2, \dots, N} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i),$$

при  $\tau = \tau^*$ .

Алгоритм **6.1** описан.

**Замечание** к алгоритму **6.1**. Близость точек  $\tau^{k+1}$  и  $\tau^k$  в формуле (6.4.22) определяется по одной из формул (6.4.6)–(6.4.8), в зависимости от выбранной в алгоритме **6.1** метрики  $s(x, \tau_i)$ .

**Замечание.** Описанный алгоритм **6.1** из-за невыпуклости целевой функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6.4.9) приводит в пределе к системе центров  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , являющейся, вообще говоря, точкой локального минимума этой функции.

Будем говорить, что точка  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N$  является точкой *локального минимума* функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  из (6.4.9) на множестве  $\Omega^N$ , если существует  $\delta > 0$ , такое, что  $R(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \leq R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  для всех  $\tau^N \in B_\delta(\tau_*^N) \cap \Omega^N$ , где  $B_\delta(\tau_*^N)$  – окрестность точки  $\tau_*^N \in \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N$ , т. е.

$B_\delta(\tau_*^N) = \{\tau^N \in \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N : \|\tau^N - \tau_*^N\| \leq \delta, \text{ где норма } \|\cdot\| - \text{одна из метрик (6.4.6)–(6.4.8)}\}$ .

Другими словами, любое смещение из точки  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$  в пределах некоторой окрестности  $B_\delta(\tau_*^N)$  не сможет уменьшить радиус покрытия  $R(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ .

Если такая окрестность  $B_\delta(\tau_*^N)$  совпадает со всем множеством  $\Omega^N$ , то точка  $\tau_*^N \in \Omega^N$  будет точкой *глобального минимума* функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (6.4.9).

**Замечание** к алгоритму **6.1**. Сходство и различие непрерывных задач оптимального *с*-покрытия и оптимального разбиения множеств были исследованы в работе [45]. Для покрытия множества  $\Omega$ , генерируемого вектором  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ , можно использовать оптимальное решение задачи ОРМ с фиксированными центрами  $\tau_1, \dots, \tau_N$  (алгоритм ОРМ с фиксированными центрами), являющееся разбиением Дирихле – Вороного. Поэтому на каждой итерации разработанного алгоритма оптимального покрытия множества  $\Omega$  используется алгоритм решения задачи **A1** оптимального разбиения этого множества при заданных координатах центров подмножеств  $\tau_1, \dots, \tau_N$  из [65].

Несмотря на то, что задачи оптимального покрытия и оптимального разбиения, вообще говоря, различны, имеют место частные случаи, когда центры оптимального покрытия совпадают с центрами оптимального разбиения.

Так, например, если метрика  $c(x, \tau_i)$  такова, что

$$c(x, \tau_i) = \max \{ |x^{(1)} - \tau_i^{(1)}|, |x^{(2)} - \tau_i^{(2)}| \},$$

т. е. в качестве покрывающего  $c$ -шара  $V(x, \tau_i)$  выступает квадрат, то диаграмма Дирихле – Вороного является одновременно глобальным оптимальным решением для обеих задач.

### 6.4.3. Исследование эффективности алгоритма оптимального $c$ -покрытия

Для исследования эффективности алгоритма 6.1 оптимального  $c$ -шарового покрытия были проведены многочисленные вычислительные эксперименты по покрытию  $c$ -шарами выпуклого множества  $\Omega \in E_2$ , являющегося единичным квадратом  $\{[0,1] \times [0,1]\}$ , в случае метрик  $c(x, \tau_i)$ , заданных формулами (6.4.6)–(6.4.8).

Для экспериментов по покрытию невыпуклых множеств  $\Omega$  был выбран тестовый пример из [144].

Проводились также эксперименты по покрытию дискретных множеств.

Для реализации алгоритма 6.1 в каждой из трех метрик (6.4.6)–(6.4.8) следующие параметры либо задаются пользователем, либо заданы по умолчанию в алгоритме:

- $\varepsilon$  – точность вычисления координат центров покрытия используется в условии останова  $r$ -алгоритма Шора (по умолчанию: 0,0001);
- $h_0$  – начальный пробный шаг  $r$ -алгоритма Шора (по умолчанию:  $h_0=1$ );
- $M$  – количество узлов сетки, аппроксимирующей множество  $\Omega$ , по каждой из координатных осей (по умолчанию:  $M = 100$ );
- $N$  – число покрывающих  $c$ -шаров;
- $\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}$  – начальное приближение для оптимальных центров покрытия (по умолчанию: начальное положение для всех центров покрытия – начало координат).

6.4.3.1. Результаты численных экспериментов по покрытию единичного квадрата с евклидовой метрикой

Опишем и проанализируем результаты экспериментов по покрытию единичного квадрата из  $E_2$  с евклидовой метрикой

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}. \quad (6.4.6')$$

В табл. 6.4 приведены численные значения минимальных радиусов оптимальных решений задачи (6.4.9) для соответствующих значений  $N = 2, \dots, 15$ , полученные алгоритмом и радиусами, полученными геометрически. Результаты, полученные алгоритмом, согласуются с результатами, описанными в работах [18, 87]. Заметим, что авторам этих работ удалось получить решения только для  $N \leq 15$ . На рис. 6.25 изображено оптимальное покрытие единичного квадрата с радиусом покрытия  $R(\tau_*) = 0,0687$ , полученное алгоритмом, для  $N = 100$  на сетке  $200 \times 200$  с начальным шагом 0,2.

Как правило, в результате экспериментов алгоритм приводил к глобальному оптимальному решению задачи (6.4.9) об оптимальном покрытии. Это можно увидеть в табл. 6.4, сравнивая оптимальные значения радиусов покрытия  $R(\tau_*)$ , полученных алгоритмом с радиусами  $R_*$ , полученными геометрически, хотя (крайне редко) имели место эксперименты, приводящие к локальному минимуму задачи (6.4.9).

Таблица 6.4

Оптимальное покрытие единичного квадрата с евклидовой метрикой,  $N=2, \dots, 15$

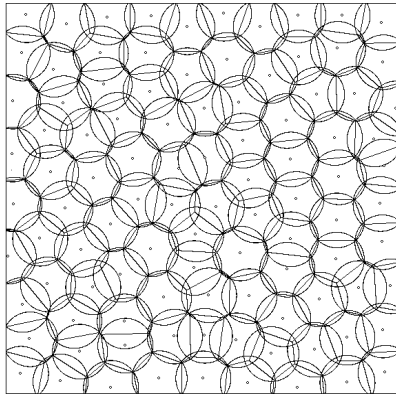
N	Численные значения минимального радиуса:		N	Численные значения минимального радиуса:	
	полученного алгоритмом	полученного геометрически		полученного алгоритмом	полученного геометрически
2	0.5599	0.5590	9	0.2339	0.2357
3	0.5033	0.5038	10	0.2186	0.2221
4	0.3536	0.3536	11	0.2125	0.2125
5	0.3266	0.3260	12	0.2068	0.2082
6	0.3001	0.3005	13	0.1956	0.1966
7	0.2596	0.2750	14	0.1859	0.1912
8	0.2596	0.2612	15	0.1807	0.1852

Проведенные вычислительные эксперименты позволяют также сделать вывод о том, что, ввиду высокой точности г-алгоритма, погрешность ре-



шения рассматриваемой задачи обуславливается в основном погрешностью, получаемой вследствие выбранной величины шага сетки. При этом точное значение минимального радиуса покрытия  $R_*$  находится на отрезке  $[R(\tau_*) - \Delta, R(\tau_*) + \Delta]$ , где  $R(\tau_*)$  – значение минимального радиуса, полученное на заданной сетке;  $\Delta$  – погрешность расчёта радиуса, полученная за счёт дискретизации множества  $\Omega$  и вычисленная по формуле  $\Delta =$

$$\frac{\sqrt{\Delta h_x^2 + \Delta h_y^2}}{2}. \text{ Здесь } \Delta h_x, \Delta h_y \text{ – шаги сетки, которая использовалась для получения диаграммы Дирихле – Вороного по осям } O_x \text{ и } O_y \text{ соответственно.}$$



**Рис. 6.25. Оптимальное покрытие единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_2, N=100$ , полученное алгоритмом 6.1**

*6.4.3.2. Результаты численных экспериментов по с-покрытию единичного квадрата с метрикой Чебышева*

Для метрики Чебышева в работе [100] теоретически установлено, что если множество  $\Omega$  – координатный куб, т. е.  $\Omega = \{x: 0 \leq x^j \leq 1, j = 1, \dots, n\}$ , то решение задачи (6.4.9) оптимального покрытия в случае метрики Чебышева (6.4.6) находится в явном виде:

- $R_* = \frac{1}{2m}$ , где  $m = \lceil \sqrt[n]{N} \rceil$ ; (6.4.23)

- $m^n$  из центров  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  оптимального покрытия совпадают с точками

$$\tau_i = \left( \frac{j_1}{2m}, \frac{j_2}{2m}, \dots, \frac{j_n}{2m} \right), j_1, \dots, j_n \in \{1, 3, \dots, 2m-1\}; \quad (6.4.24)$$

- остальные  $(N - m^n)$  – произвольные точки.

Отсюда следует, что для случая  $N = m^n$  оптимальные координаты всех  $N$  центров покрытия определяются аналитически по формулам (6.4.24), а для случая  $m^n < N < (m+1)^n$ ,  $m$  – целое, аналитически можно определить оптимальные координаты только  $m^n$  центров покрытия, остальные остаются неизвестными.

Сравним аналитические результаты из [100] по покрытию единичного квадрата из  $E_2$  в случае метрики Чебышева

$$c(x, \tau_i) = \max_{i=1, 2, \dots, N} \{ |x^{(1)} - \tau_i^{(1)}|, |x^{(2)} - \tau_i^{(2)}| \}, \quad (6.4.8')$$

с численными результатами, полученными алгоритмом **6.1**.

Заметим сразу, что с помощью алгоритма **6.1** можно определить координаты оптимальных центров покрытия как для случая  $N = m^2$ , так и (в отличие от теоретических результатов из [100]) для случая  $m^2 < N < (m+1)^2$ .

Опишем и проанализируем сначала результаты численных экспериментов по покрытию единичного квадрата с метрикой (6.4.8') для случая  $N = m^2$ ,  $m = 2, 3, 4, 5$ .

На рис. 6.26 изображены диаграммы Дирихле - Вороного глобальных оптимальных решений задачи оптимального покрытия (6.4.9) для случаев  $N=m^2=4, 9, 16, 25$ , полученные с точностью  $\epsilon=0.0001$ , а в табл. 6.5 приведены значения соответствующих оптимальных радиусов покрытия  $R(\tau_*)$ , полученных алгоритмом **6.1**, и оптимальных радиусов, полученных теоретически в [100].

Как видно, все приведенные численные результаты по покрытию единичного квадрата совпадают (с небольшой погрешностью) с теоретическими, приведенными в работе [100].

Алгоритмом **6.2** получено также оптимальное покрытие единичного квадрата для случая  $\|x\| = \|x\|_0$ ,  $N=100$ . Минимальный радиус покрытия –  $R(\tau_*) = 0,0563$ .

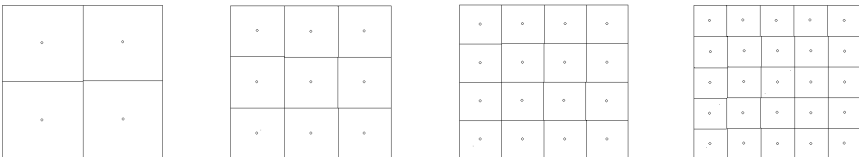


Рис. 6.26. Оптимальное покрытие единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_0$

Таблица 6.5

Оптимальное покрытие единичного квадрата с метрикой Чебышева,  $N=4, 9, 16, 25$

N	Минимальный радиус, полученный алгоритмом 1, $R(\tau_*)$	Минимальный радиус, полученный теоретически, $R_*^T$
4	0.2525	0.2500
9	0.1684	0.1667
16	0.1275	0.1250
25	0.1023	0.1000

Перейдём теперь к описанию и анализу результатов численных экспериментов по покрытию единичного квадрата с метрикой Чебышева (6.4.8') для случая  $m^2 < N < (m+1)^2$ .

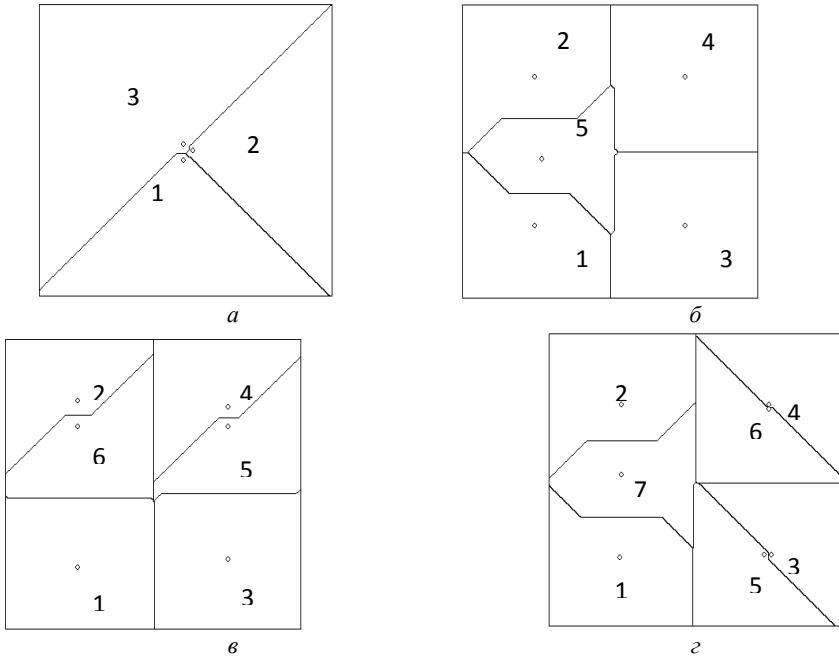


Рис. 6.27. Оптимальное покрытие единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_0$ ,  $N=3, 5, 6, 7$

На рис. 6.27, а представлена диаграмма Дирихле - Вороного оптимального решения задачи оптимального покрытия (6.4.9) для случая  $N=3$ .

Здесь  $m = \lfloor \sqrt{N} \rfloor = 1$ . Экспериментальный радиус покрытия  $R(\tau_*) = 0,5004$

отличается от теоретического  $R_*^T = 0,5$  на величину 0,0004. Число произвольных центров составляет  $(N-m^2) = 2$ .

Представленные на рис. 6.27, б, в, г диаграммы соответствуют теоретическим результатам из [100]. Во всех трёх случаях  $m = \lceil \sqrt{N} \rceil = 2$  и полученные оптимальные значения радиусов покрытия для  $N=5,6,7$  совпадают, с некоторыми погрешностями, с теоретическими значениями  $R_*^T = 0,25$ . В случае  $N=5$  произвольным центром покрытия является  $\tau_5$ , значения координат остальных четырёх центров совпадают с теоретическими с некоторой погрешностью, зависящей от заданной точности  $\varepsilon$  и размеров сетки, покрывающей множество  $\Omega$ . Количество произвольных центров, согласно теории, в случае  $N=6$  должно быть равно  $(N - m^2) = 2$ , а в случае  $N = 7$  равно  $(N - m^2) = 3$ . Из рис. 6.27, видно, что такими произвольными центрами могут быть при  $N = 6$  точки  $\tau_5$  и  $\tau_6$ , при  $N = 7$  – точки  $\tau_5$ ,  $\tau_6$  и  $\tau_7$ .

#### 6.4.3.3. Результаты численных экспериментов по с-покрытию единичного квадрата с манхэттенской метрикой

Опишем теперь результаты численного решения задачи оптимального покрытия единичного квадрата из  $E_2$  с манхэттенской метрикой

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = |x^1 - \tau_i^1| + |x^2 - \tau_i^2|, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.4.7')$$

Для манхэттенской метрики в работе А. Г. Сухарева [100] теоретически установлено, что если множество  $\Omega \subset E_2$ , имеет вид:  $\Omega = \{x: |x^1| + |x^2| \leq 1\}$  и  $N=m^2$ ,  $m$  – целое, то оптимальные координаты центров покрытия вычисляются по формулам:

$$\tau_i^* = \left( \frac{j_1 - j_2}{2m}, \frac{j_1 + j_2 - 2m}{2m} \right), \quad j_1, j_2 \in \{1, 3, \dots, 2m-1\}.$$

Результаты численных экспериментов по покрытию множества  $\Omega$  с-шарами для  $N = 4, 9$ , совпадают с теоретическими с небольшой погрешностью. Покрывающим с-шаром в этих случаях является ромб.

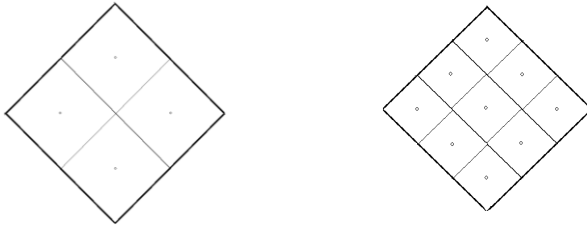
На рис. 6.28 изображены диаграммы Дирихле – Вороного глобальных оптимальных решений для этой задачи, полученные алгоритмом:

для  $N = 4$  (за 142 итерации при  $M = 100$ ,  $h_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $\tau_i^0 = (0;0)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ):

$$\tau_1^* = (0,5030; 0,7506), \quad \tau_2^* = (0,5022; 0,2504), \quad \tau_3^* = (0,2525; 0,5000), \\ \tau_4^* = (0,7525; 0,5000), \quad R(\tau^*) = 0,2476;$$

для  $N = 9$  (за 211 итерации при  $M = 100$ ,  $h_0 = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $\tau_i^0$  заданы случайно,  $i=1, \dots, 9$ ):

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= (0,5000; 0,1667), \tau_2^* = (0,5000; 0,8333), \tau_3^* = (0,1703; 0,4986), \\ \tau_4^* &= (0,6621; 0,3338), \tau_5^* = (0,3302; 0,6698), \tau_6^* = (0,8333; 0,5000), \tau_7^* = (0,4949; \\ &0,5051), \tau_8^* = (0,3378; 0,3288), \tau_9^* = (0,6667; 0,6667), \\ R(\tau^*) &= 0,1667. \end{aligned}$$



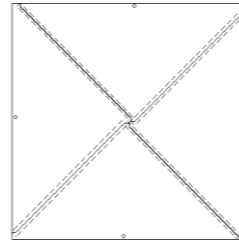
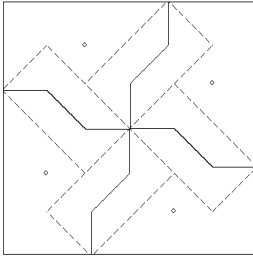
**Рис. 6.28.** Диаграммы Дирихле – Вороного оптимального покрытия множества  $\Omega$ , полученного алгоритмом 1 при  $N = 4, 9$  в случае  $\|x\| = \|x\|_0$

На рис. 6.29, а, б изображены диаграммы Дирихле – Вороного оптимального покрытия единичного квадрата решений задачи (6.4.9) для метрики (6.4.7'), полученного алгоритмом для  $N=4$ . В обоих случаях  $R(\tau^*) = 0,5000$ . На рис. 6.29, а изображена диаграмма Дирихле – Вороного оптимального покрытия единичного квадрата четырьмя с-шарами, полученного алгоритмом за 140 итераций при  $M = 100$ ,  $h_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $\tau_i^0 = (0;0)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Оптимальные координаты центров покрытия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= (0,6768; 0,1717), \tau_2^* = (0,3232; 0,8283), \tau_3^* = (0,1717; 0,3232), \\ \tau_4^* &= (0,8283; 0,6768). \end{aligned}$$

На рис. 6.29, б изображена диаграмма Дирихле – Вороного ещё одного оптимального решения этой же задачи ( $R(\tau^*) = 0,5000$ ), полученного алгоритмом 1 за 115 итераций при  $M = 101$ ,  $h_0 = 0,2$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $\tau_i^0 = (0;0)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Оптимальные координаты центров покрытия в этом случае имеют вид:

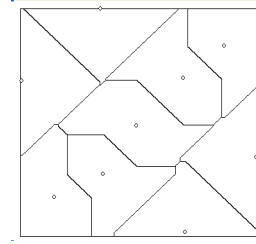
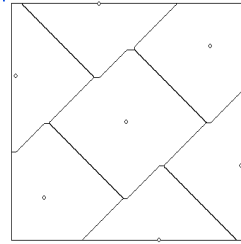
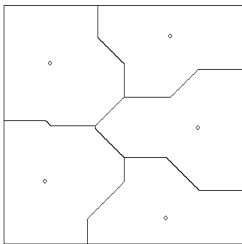
$$\begin{aligned} \tau_1^* &= (0,9851; 0,4800), \tau_2^* = (0,5225; 0,9875), \tau_3^* = (0,0165; 0,5165), \\ \tau_4^* &= (0,4784; 0,0134). \end{aligned}$$



а

б

**Рис. 6.29.** Диаграммы Дирихле - Вороного, оптимальные покрытия единичного квадрата, полученные алгоритмом для метрики (6.4.7') при  $N = 4$



**Рис. 6.30.** Диаграммы Дирихле – Вороного, задачи (П5) оптимального покрытия единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_1$ ,  $N=5, 7, 9$

На рис. 6.30 представлены диаграммы Дирихле – Вороного для задачи оптимального покрытия (6.4.9) единичного квадрата с метрикой (6.4.7'), полученные алгоритмом для  $N = 5, 7, 9$  при начальных данных  $\tau_i^0 = (0;0)$ ,  $i = 1, \dots, 9$ .

*6.4.3.4. Применение алгоритма 6.1 решения непрерывных задач оптимального с-покрытия к дискретным задачам покрытия*

Дискретную задачу оптимального покрытия рассмотрим в следующей постановке.

**Задача П5.** Найти координаты центров  $\tau_1^*, \dots, \tau_i^*, \dots, \tau_N^*$ , каждый из которых может принадлежать соответствующему множеству  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , (выпуклому, замкнутому, ограниченному, принадлежащему  $E_n$ ), генерирующих с-шаровое покрытие дискретного множества  $\Omega$  с минимально возможным радиусом, т. е.:

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in T_1 \times \dots \times T_N} . \quad (6.4.25)$$

Возможность применения алгоритма решения непрерывной задачи (6.4.9) о  $\epsilon$ -шаровом покрытии к решению дискретной задачи оптимального покрытия (6.4.25) проиллюстрируем на двух следующих тестовых примерах.

**Пример 1.** Множества  $T_i, i = 1, \dots, 4$ , совпадают с единичным квадратом, т. е.  $T_1=T_2=T_3=T_4=\{[0,1] \times [0,1]\}$ . Метрика  $c(x, \tau_i)$  – евклидова,  $N=4$ . Множество  $\Omega$  состоит из точек:

$\Omega = \{ (0,0; 0,0), (1/7; 0,0), (0,0; 1/7), (1/7; 1/7), (0,0; 6/7), (1/7; 6/7), (0,0; 1,0), (1/7; 1,0), (3/7; 4/7), (4/7; 4/7), (3/7; 5/7), (4/7; 5/7), (6/7; 6/7), (1,0; 6/7), (6/7; 1,0), (1,0; 1,0) \}$ .

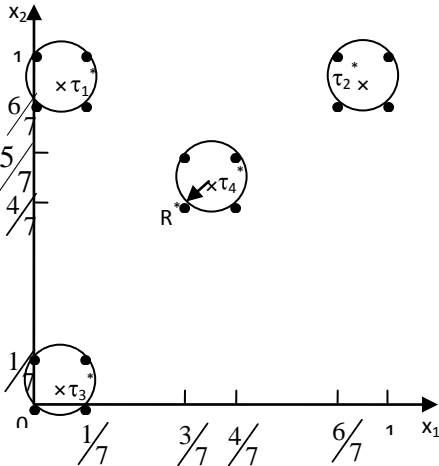


Рис. 6.31. Оптимальное покрытие дискретного множества  $\Omega$  из примера 1

На рис. 6.31 представлено оптимальное решение этой задачи, полученное алгоритмом за 254 итерации при следующих параметрах:  $h_0=1, \epsilon=0,0001, M=71, \tau_i^0=(0; 0), i=1, \dots, 4$ . Здесь центры  $\tau_i^*, i=1, \dots, 4$ , отмечены «x». Полученные численные результаты согласуются с геометрическими соображениями:

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= (0,0714; 0,0714), \\ \tau_3^* &= (0,9286; 0,9286), \\ \tau_2^* &= (0,0714; 0,9286), \\ \tau_4^* &= (0,5000; 0,6429), \\ R(\tau^*) &= 0,1010. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Покрывалось множество  $\Omega$ , состоящее из точек:

$\Omega = \{ (0,0; 0,0), (0,0; 0,25), (0,0; 0,5), (0,0; 0,75), (0,0; 1,0), (0,25; 0,0), (0,25; 0,25), (0,25; 0,5), (0,25; 0,75), (0,25; 1,0), (0,5; 0,0), (0,5; 0,25), (0,5; 0,5), (0,5; 0,75), (0,5; 1,0), (0,75; 0,0), (0,75; 0,25), (0,75; 0,5), (0,75; 0,75), (0,75; 1,0), (1,0; 0,0), (1,0; 0,25), (1,0; 0,5), (1,0; 0,75), (1,0; 1,0) \}$ ,

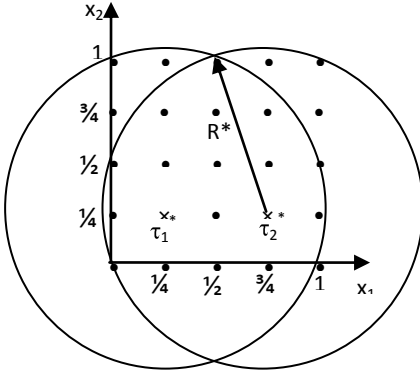


Рис. 6.32. Оптимальное покрытие дискретного множества  $\Omega$  из примера 2

Метрика  $c(x, \tau_i)$  – евклидова,  $N=2$ . Множества  $T_i, i=1, 2$ , имеют вид:

$$T_1 = \{[0,0; 0,25] \times [0,0; 0,25]\}, T_2 = \{[0,75; 1,0] \times [0,0; 0,25]\}.$$

Результаты численного эксперимента, полученные алгоритмом 1 за одну итерацию при  $h_0 = 1, \varepsilon = 0,0001, M = 41, \tau_i^0 = (0; 0), i = 1,2$ , имеют вид:

$$\tau_1^* = (0,0200; 0,2500),$$

$$\tau_2^* = (0,7500; 0,2500),$$

$$R(\tau_*) = 0,7906.$$

На рис. 6.32 изображено оптимальное покрытие множества  $\Omega$ , оптимальные центры покрытия отмечены « $\times$ ». Результаты численных экспериментов полностью подтверждаются геометрическими соображениями.

#### 6.4.3.5. Результаты численных экспериментов по $c$ -покрытию невыпуклых областей

Возможность применения алгоритма решения непрерывной задачи (6.4.9) о  $c$ -шаровом покрытии к покрытию невыпуклых областей проиллюстрируем следующими примерами.

**Пример 3.** Проводилось покрытие невыпуклого множества  $\Omega$  (мозаики, набранной из 7 правильных шестиугольников) 7 шарами. Центры покрытия  $\tau_i, i = 1, \dots, 7$ , размещались в соответствующих множествах  $T_i, i = 1, \dots, 7$ , где  $T_i = \{[0,1] \times [0,0; 10,3923]\}$ . Начальные значения координат центров покрытия выбирались нулевыми, т. е.  $\tau_i^0 = (0; 0), i = 1, \dots, 7$ .

Оптимальное решение, полученное алгоритмом за 224 итерации при  $h_0 = 1, \varepsilon = 0,0001, M = 151$ , имеет вид, представленный на рис. 6.33.

Оптимальные центры покрытия  $\tau_i^*, i = 1, \dots, 7$ , отмечены на рис. 6.33 « $\times$ ». Результаты численных экспериментов полностью подтверждаются геометрическими соображениями.



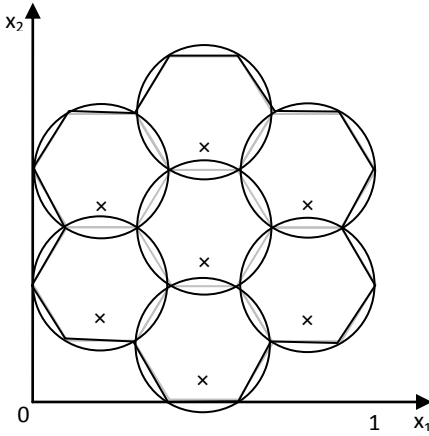


Рис. 6.33. Оптимальное покрытие мозаики 7 шарами

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= (0,4968; 0,1677), \\ \tau_2^* &= (0,5034; 0,5125), \\ \tau_3^* &= (0,1967; 0,3461), \\ \tau_4^* &= (0,4993; 0,8666), \\ \tau_5^* &= (0,8029; 0,3408), \\ \tau_6^* &= (0,1991; 0,6920), \\ \tau_7^* &= (0,8003; 0,6930), \\ R(\tau^*) &= 0,2010. \end{aligned}$$

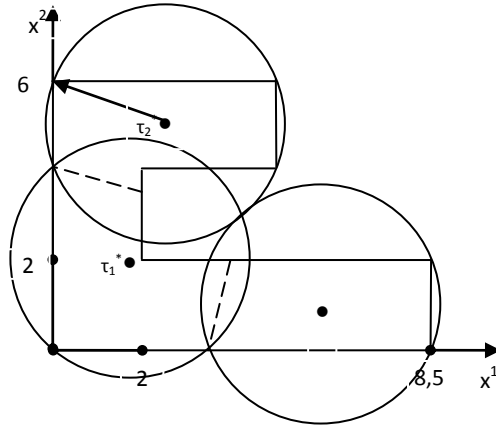


Рис. 6.34. Оптимальное покрытие невыпуклого множества  $\Omega$  тремя шарами

**Пример 4.** Данный тестовый пример взят из работы [144]. Три шара покрывалось невыпуклое множество  $\Omega$ , изображенное на рис. 6.34. Центры покрытия  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , размещались в соответствующих множествах

$$T_i = \{[0; 8,5] \times [0; 6]\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Оптимальное решение, полученное алгоритмом за 860 итераций при  $h_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$  имеет вид:  $\tau_1 = (2,5000; 5,0000)$ ,  $\tau_2 = (6,1003; 0,9992)$ ,  $\tau_3 =$

$= (1,7961; 1,9464)$ . При этом  $R(\tau^*) = 2,6926$ . На рис. 6.34 оптимальные центры отмечены точками. Результаты, полученные алгоритмом для данного тестового примера, согласуются с результатами из [144].

*6.4.3.6. Использование алгоритма оптимального с-покрытия для решения задачи покрытия множеств, точки которых имеют различный вес*

В ряде практических задач покрытия области, например, при оптимизации программ работы систем дистанционного зондирования Земли, возникает ситуация, когда на отдельных участках области потребность в спутниковой связи выше, чем на других. Так, например, в задаче покрытия для определения оптимального размещения супермаркетов плотность населения не везде будет одинакова. В задаче планирования в некотором регионе размещения станций сотовой связи стандарта CDMA радиус действия этих станций зависит от количества потребителей. Так, при увеличении нагрузки радиус действия станции уменьшается, и соответственно, когда абоненты покидают зону действия станции, ее радиус действия увеличивается. Известна предполагаемая плотность распределения абонентов в часы максимально возможной нагрузки. Необходимо определить минимально возможный радиус действия станций сотовой связи.

Соответственно, во всех этих случаях и «вес» каждой точки в покрываемом множестве может быть различным. Для учета плотности можно модифицировать исходный целевой функционал так, чтобы при решении задачи учитывался вес каждой точки области.

Для решения задачи (6.4.9) об оптимальном с-покрытии, т. е. для отыскания координат центров  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  и величины радиуса покрытия  $R(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , минимизирующих целевую функцию

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} \rho \times c(x, \tau_i), \quad (6.4.26)$$

при условии

$$(\tau_1, \dots, \tau_N) \in (\text{co}\Omega)^N, \quad (6.4.27)$$

необходимо минимизировать по  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , на множестве  $\text{co}\Omega(\tau_i)$  функции

$$R_i(\tau_i) = \max_{x \in \Omega(\tau_i)} \rho \times c(x, \tau_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.4.28)$$

Будем считать, что плотность распределения является непрерывной функцией почти всюду и  $\rho(x) > 0$ , тогда модификация целевого функ-

ционала не меняет его свойств и все доказанные выше утверждения остаются в силе.

Проиллюстрируем это утверждение на примере части алгоритма **6.1**, связанной с разбиением множества  $\Omega$  на подмножества  $\{\Omega(\tau_i), i = 1, \dots, N\} = \{\Omega(\tau_1), \dots, \Omega(\tau_N)\}$  при заданных центрах  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ . Справедлива следующая лемма.

**Лемма.** Разбиение множества  $\Omega$  на подмножества  $\{\Omega(\tau_1), \dots, \Omega(\tau_N)\}$  при заданных центрах  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  и переменной плотности распределения совпадает с разбиением Дирихле – Вороного. Следовательно, указанная модификация целевого функционала не приводит к изменению алгоритма поиска оптимального решения.

**Пример 5.** В качестве покрываемого множества рассматривался единичный квадрат, веса точек которого задавались функцией  $\rho(x, y) = e^{-(x-0,7)^2 - (y-0,5)^2 + 1}$ . В табл. 6.6 приведены взвешенный радиус шаров покрытия, координаты их центров. На рис. 6.35 представлены оптимальные покрытия единичного квадрата с неравномерно распределенной плотностью для  $N = 2 \div 7$  при начальных данных  $\tau_i^0 = (0; 0)$ ,  $i = 2, \dots, 7$ , оптимальные центры покрытия множества отмечены «\*».

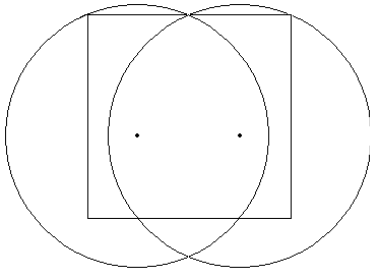
Таблица 6.6

Оптимальное решение тестовой задачи

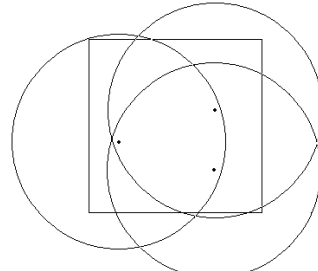
N	Численные результаты, полученные алгоритмом	
	R( $\tau^*$ )	( $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ )
2	0,648 2	$\tau_1 = (0,7525; 0,4010)$ $\tau_2 = (0,2474; 0,4010)$
3	0,621 5	$\tau_1 = (0,7266; 0,240934)$ $\tau_2 = (0,1768; 0,404144)$ $\tau_3 = (0,7341; 0,586252)$
4	0,535 6	$\tau_1 = (0,7549; 0,5237)$ $\tau_2 = (0,7500; 0,2797)$ $\tau_3 = (0,2428; 0,2879)$ $\tau_4 = (0,2523; 0,5290)$
5	0,489 7	$\tau_1 = (0,7531; 0,5837)$ $\tau_2 = (0,8754; 0,2964)$ $\tau_3 = (0,5050; 0,2767)$ $\tau_4 = (0,2444; 0,5778)$ $\tau_5 = (0,1293; 0,2916)$

Продолжение таблицы 6.6

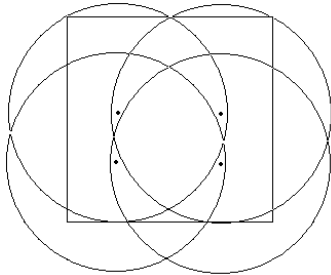
6	0,453 1	$\tau_1 = (0,8088;0,5958)$ $\tau_3 = (0,8979;0,2724)$ $\tau_5 = (0,0963;0,5825)$	$\tau_2 = (0,5629;0,2400)$ $\tau_4 = (0,4421;0,5783)$ $\tau_6 = (0,1807;0,2450)$
7	0,438 9	$\tau_1 = (0,3619;0,7920)$ $\tau_3 = (0,8833;0,2711)$ $\tau_5 = (0,5034;0,4484)$ $\tau_7 = (0,5327;0,1485)$	$\tau_2 = (0,8326;0,5942)$ $\tau_4 = (0,1377;0,5820)$ $\tau_6 = (0,1487;0,2564)$



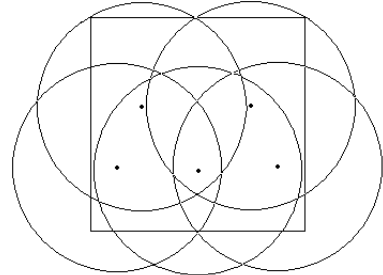
а



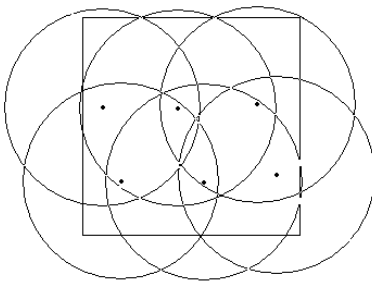
б



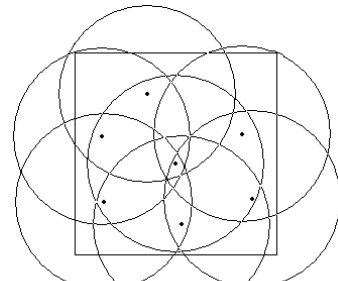
в



г



д



е

Рис. 6.35. Оптимальное покрытие единичного квадрата, точки которого имеют различный вес

*6.4.3.7. Использование алгоритма оптимального  $\epsilon$ -покрытия для решения задачи покрытия множества минимальным количеством шаров заданного радиуса*

Описанный выше алгоритм можно использовать для решения задачи о покрытии множества минимальным количеством шаров заданного радиуса. Для этого определяем оценочное значение  $N_0$  количества шаров заданного радиуса  $R$  по формуле  $N_0 = S/S_{\text{шара}}$  ( $S$  – площадь заданного множества  $\Omega \in E_n$ ,  $S_{\text{шара}}$  – площадь шара заданного радиуса  $R$ ). Затем решаем задачу об оптимальном  $\epsilon$ -шаровом покрытии заданным количеством шаров  $N$ . В результате получаем минимальный радиус покрытия  $\bar{R}$ . Если полученный радиус  $\bar{R}$  больше заданного  $R$ , то увеличиваем значение  $N$  на единицу и снова решаем задачу об оптимальном  $\epsilon$ -шаровом покрытии компактного множества заданным количеством шаров. Процедуру повторяем до тех пор, пока полученный радиус покрытия не станет меньше заданного. Программное обеспечение, реализующее данный подход, разработано и протестировано на модельных примерах.

**Пример 6.** Покрываемое множество для данного тестового примера взято из работы [96], где невыпуклое множество  $\Omega$  последовательно покрывалось шарами заданного радиуса  $R^*$ .

В результате были определены минимальное количество шаров, необходимое для покрытия множества  $N$ , а также минимально возможный радиус, требуемый для покрытия множества шарами. Центры шаров покрытия  $\tau_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , размещались в соответствующих множествах  $T_i = \text{co}\Omega$ ,  $i = 1,2,\dots,N$ . Численные результаты, полученные алгоритмом для данного тестового примера и представленные в табл. 6.7, согласуются с результатами из [96].

Для непрерывной задачи об оптимальном  $\epsilon$ -шаровом покрытии компактного множества  $\Omega$  из  $E_n$  заданным количеством шаров минимального радиуса и задачи о покрытии множества минимальным количеством шаров заданного радиуса предложен и обоснован алгоритм, основанный на использовании теории оптимального разбиения множеств и  $\gamma$ -алгоритма Шора.

Предложенный алгоритм 6.1 имеет следующие характеристики:

- на каждой итерации улучшается положение всех центров оптимального покрытия;
- может быть использован для покрытия множеств из  $n$ -мерного евклидова пространства произвольной размерности;

- его реализация не связана с геометрическими особенностями покрываемого множества;
- может быть использован для покрытия как выпуклых, так и невыпуклых множеств, для решения дискретных задач оптимального покрытия, а также для решения задачи покрытия множества минимальным количеством шаров заданного радиуса;
- может быть использован для покрытия множеств, точки которых имеют различный вес.

Таблица 6.7

N	Значение оптимального радиуса	Значение радиуса, полученного алгоритмом	N	Значение оптимального радиуса	Значение радиуса, полученного алгоритмом
1	106,06602	106,0668	11	28,53897	28,4122
2	83,85255	81,4968	12	27,38858	27,6912
3	70,27146	70,146	13	25,86670	26,2953
4	51,08375	50,3442	14	25,11455	25,5798
5	47,27901	47,2688	15	24,23172	24,8292
6	40,67141	39,8952	16	22,96237	23,3793
7	38,14401	38,0997	17	22,44569	22,7394
8	34,02622	33,9957	18	21,62820	21,5163
9	31,82953	31,2228	19	21,01274	20,8467
10	29,32231	29,3273	20	19,98385	20,5308

#### 6.4.4. Выводы к разделу 6.4

Алгоритм находит локальное оптимальное решение задачи об оптимальном  $s$ -шаровом покрытии. Хотя, как правило, в результате численных экспериментов, проведенных для метрик (6.4.6) – (6.4.8), алгоритм приводил к глобальному оптимальному решению.

Разработанный алгоритм позволяет получить результаты для произвольного количества шаров покрытия. Однако, как установлено в результате численных экспериментов, с увеличением количества шаров покрытия может увеличиваться и относительная погрешность, с которой получены оптимальные решения.

Алгоритм программно реализован. В результате численных экспериментов подтверждена сравнительная простота задания начальных данных и высокая эффективность алгоритмов, а также установлено, что алгоритмы хорошо работают из любого начального приближения для центров покрытия. Поэтому, для удобства пользователя, почти во всех тестовых примерах в качестве начального приближения для центров покрытия вы-

биралось начало координат. Однако при покрытии множества большим количеством шаров, например 100, эффективнее оказался случайный выбор начальных центров покрытия.

Достоверность полученных численных приближений оптимальных решений задач подтверждена либо совпадением с уже известными экспериментальными и теоретическими результатами из [7, 18, 87], если таковые имелись, либо геометрическими соображениями для новых модельных задач.

### 6.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Сформулируем задачу глобальной оптимизации, следуя [98].

Пусть  $f(x)$  – действительная, многоэкстремальная, непрерывная функция, определенная в области  $\Omega$  из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ , число локальных минимумов которой конечно и не превосходит  $N$ .

Рассмотрим задачу отыскания точки  $x^* \in \Omega$  (предполагается, что такая точка существует), в которой функция  $f(x)$  достигает минимального значения на множестве  $\Omega \subset E_n$ , т. е.:

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x). \quad (6.5.1)$$

Если в области  $\Omega$  существует единственная точка  $x^*$ , в некоторой окрестности  $U(x^*)$  которой справедливо неравенство

$$f(x^*) \leq f(x), \quad x \in \Omega \cap U(x^*),$$

то функцию  $f(x)$  называют *одноэкстремальной или унимодальной*.

В случае, когда в области определения  $\Omega$  существует несколько точек  $\tau_i^*$ ,  $1 \leq i \leq N$ , каждая из которых имеет свою окрестность  $U(\tau_i^*)$ , такую, что

$$f(\tau_i^*) \leq f(x), \quad x \in \Omega \cap U(\tau_i^*), \quad (6.5.2)$$

функцию  $f(x)$  называют *многоэкстремальной*.

При этом точки из (6.5.2) называют *точками локальных минимумов*, а точку  $\tau^*$  – *точкой глобального минимума*.

Пусть в некоторой подобласти  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , области  $\Omega$  функция  $f(x)$  унимодальна (точку локального минимума функции  $f(x)$  в подобласти  $\Omega_i$

обозначим  $\tau_i^*$ ), и пусть

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Тогда, применяя так называемые методы локального спуска, для любой начальной точки  $\tau_i^0 \in \Omega_i$  можно найти соответствующую точку локального минимума  $\tau_i^* \in \Omega_i$ . В связи с этим говорят, что подобласть  $\Omega_i$  является *областью притяжения локального минимума*  $\tau_i^*$ . (Другими словами, *областью притяжения локального минимума* называют область, начиная из любой точки которой наискорейший спуск приводит в этот локальный минимум.)

Таким образом, задачу глобальной оптимизации (6.5.1) можно считать решенной, если известно разбиение области определения  $\Omega$  на области притяжения  $\Omega_i$  локальных минимумов  $\tau_i^*$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Однако, как известно, оценка разбиения области определения  $\Omega$  на области притяжения  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , представляет собой сложную задачу.

Кроме того, в общем случае получение оценки для числа  $N$  областей притяжения является затруднительным.

Таким образом, разработка моделей (целевых функций) и методов, в которые были бы включены количество локальных минимумов и характеристики их областей притяжения, остается проблемой.

Рассматриваемый в данном разделе подход для решения задач глобальной оптимизации, основанный на применении теории оптимального разбиения множеств, преодолевает некоторые из названных трудностей.

С помощью методов оптимального разбиения множеств удается не только находить все области притяжения локальных минимумов, но одновременно с областями притяжения отыскивать и координаты всех локальных минимумов, а затем из них выбирать глобальный. Кроме того, если заранее неизвестно фактическое число локальных минимумов, для реализации алгоритма достаточно задать ожидаемое число локальных минимумов. В процессе реализации алгоритма уточняется фактическое число локальных минимумов.

При этом класс функций, минимизируемых рассматриваемым методом, достаточно широк. Это класс недифференцируемых функций, допускающих применение локального метода негладкой оптимизации –  $g$ -алгоритма Шора, т. е. класс почти дифференцируемых функций.

Итак, в основе предлагаемого подхода к решению задачи глобальной



оптимизации многоэкстремальной недифференцируемой функции, имеющей не более  $N$  локальных минимумов, лежит следующая идея. От задачи поиска точки глобального минимума функции  $f(x)$  на  $\Omega$  осуществляется переход к задаче отыскания оптимального разбиения допустимой области  $\Omega$  на  $N$  зон притяжения  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  локальных минимумов  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  с одновременным отысканием координат центров этих зон, совпадающих с соответствующими точками локальных минимумов исходной функции  $f(x)$  на  $\Omega$ .

В качестве критерия оптимальности разбиения области  $\Omega$  на зоны притяжения локальных минимумов выбирается минимум ошибки, допускаемой при отнесении точки  $x$  из зоны притяжения одного локального минимума к зоне притяжения другого.

Составной частью предлагаемого подхода является один из вариантов  $g$ -алгоритма Шора [109]. Он используется для решения задачи конечномерной недифференцируемой оптимизации, состоящей в отыскании координат локальных минимумов целевой функции.

Приведем здесь постановку непрерывной задачи **A2** оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  с отысканием координат центров этих подмножеств при  $\rho(x) \equiv 1$  для любых  $x \in \Omega$ , являющейся частным случаем задачи **A4** из подраздела 1.3.2, к которой будут сводиться рассматриваемые ниже задачи глобальной оптимизации, [60].

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в  $E_n$ . Требуется найти *такое разбиение* множества  $\Omega$  на  $N$  измеримых по Лебегу подмножеств  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  (среди которых могут быть и пустые) и *такие*, неизвестные заранее, *координаты*  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  центров подмножеств  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ , соответственно, которые являются решением следующей оптимизационной задачи **A2**. Запишем ее здесь в виде:

**Задача A2.** Найти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) dx$$

при условиях

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M,$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega.$$

Здесь интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем считать, что мера множества граничных точек  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  равна нулю.

Функции  $s(x, \tau_i)$  – действительные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , ограниченные, измеримые по  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$ .

### 6.5.1. Сведение задачи глобальной оптимизации к задаче оптимального разбиения множеств

Рассмотрим задачу отыскания точки  $x^* = (x^{*(1)}, \dots, x^{*(n)})$ , в которой функция  $f(x)$  достигает минимального значения на  $\Omega \subset E_n$ , т. е.

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x), \quad (6.5.3)$$

где  $f(x)$  – недифференцируемая функция на  $\Omega \subset E_n$ .

В качестве недифференцируемых функций  $f(x)$  возьмем, следуя [27, 109], класс почтидифференцируемых функций на  $\Omega \subset E_n$ .

Под почти - дифференцируемой функцией в [109] понимается непрерывная функция  $f(x)$ , определенная на  $E_n$ , если она локально липшицева, [27], и непрерывно дифференцируема на множестве, где градиент существует.

Пусть в некоторой подобласти  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , области  $\Omega$ , функция  $f(x)$  унимодальна (точку локального минимума функции  $f(x)$  на  $\Omega$  обозначим  $\tau_i^*$ ), и пусть

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M. \quad (6.5.4)$$

Сведем задачу (6.5.3) поиска глобального минимума функции  $f(x)$  на  $\Omega$  к задаче **A2** оптимального разбиения множеств.

Для сведения задачи (6.5.3) к задаче **A2** необходимо выполнение следующих требований: а) оптимальное разбиение  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  множества  $\Omega$  задачи **A2** должно быть разбиением области определения  $\Omega$  функции  $f(x)$  на зоны притяжения ее локальных минимумов; б) оптимальные координаты центров  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  подмножеств  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ , соответственно,

должны совпадать с координатами локальных минимумов функции  $f(x)$  на  $\Omega$ .

Для одновременного выполнения обоих описанных выше требований целью в задаче **A2** должна быть минимизация функционала суммарных потерь от неправильного разбиения области  $\Omega$  на зоны притяжения  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  и неправильного отыскания локальных минимумов  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  в каждой из этих зон, т. е. функционала

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) dx,$$

где функция  $c(x, \tau_i), i=1, \dots, N$ , должна являться штрафом за ошибку, допускаемую при отнесении точки  $x$  из области притяжения одного локального минимума к области притяжения другого.

Рассмотрим функцию штрафа  $c(x, \tau_i)$  в следующем виде:

$$c(x, \tau_i) = f(\tau_i) + S \cdot \sum_{j=1}^k \varphi_j(u), \quad (6.5.5)$$

где  $S$  – достаточно большое положительное число;  $k$  – натуральное число, характеризующее число делений отрезка  $[x, \tau_i]$ ;

$$\varphi_j(u) = \begin{cases} 0, u \leq 0 \\ 1, u > 0 \end{cases}, \quad u = f(x + \frac{\tau_i - x}{k} j) - f(x + \frac{\tau_i - x}{k} (j-1)).$$

Как видно из рис. 6.36, если точка  $x$  находится в области притяжения  $i$ -го локального минимума, то  $\varphi_j(u) = 0$ . Если точка  $x$  принадлежит зоне притяжения  $(i+1)$ -го локального минимума, а ее отнесли к зоне притяжения  $i$ -го локального минимума, то  $u > 0$  и  $\varphi_j(u) = 1$ . И чем дальше точка  $x$  отстоит от точки  $\tau_i$  (при неправильном отнесении), тем значение штрафа  $\sum_{i=1}^k \varphi_i(u)$  больше.

На рис. 6.37 представлено разбиение области  $\Omega$  на зоны притяжения  $\Omega_{i-1}^0, \Omega_i^0, \Omega_{i+1}^0$ , определяемое заданным начальным приближением для координат локальных минимумов  $\tau_{i-1}^0 = 0,2, \tau_i^0 = 0,6, \tau_{i+1}^0 = 0,65$  функции, изображенной на рис. 6.36, а также функции штрафа  $c(x, \tau_{i-1}^0), c(x, \tau_i^0)$  и  $c(x, \tau_{i+1}^0)$ . Характерной особенностью является унимодальность каждой

из функций  $c(x, \tau_{i-1}^0)$ ,  $c(x, \tau_i^0)$  и  $c(x, \tau_{i+1}^0)$  в точках соответствующих зон притяжения  $\Omega_{i-1}^0$ ,  $\Omega_i^0$ ,  $\Omega_{i+1}^0$ .

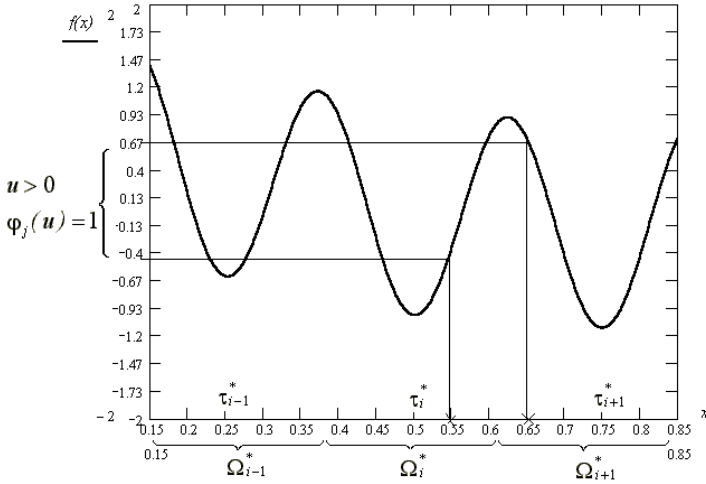


Рис. 6.36. График минимизируемой многоэкстремальной функции

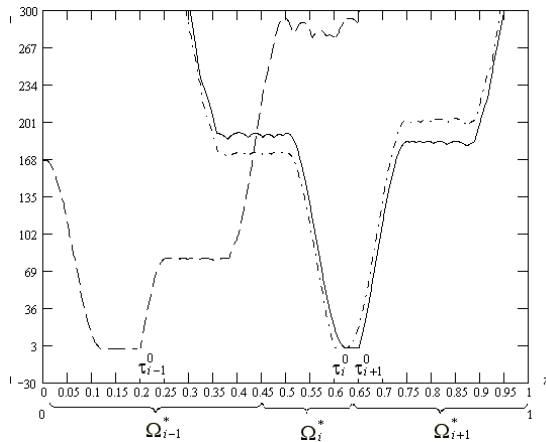
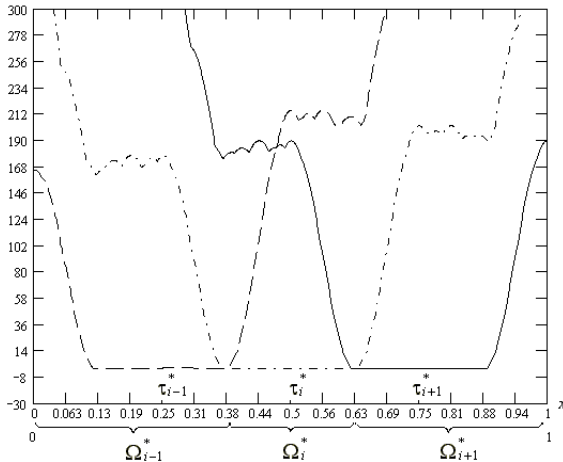


Рис. 6.37. Вид штрафных функций минимизируемой функции на начальном решении при  $N_{\text{ожид}}=3$ : сплошной линией изображен график функции  $c(x, \tau_{i+1}^*)$ ; пунктирной линией –  $c(x, \tau_{i-1}^*)$ ; штрихпунктирной линией –  $c(x, \tau_i^*)$

На рис. 6.38 (для этой же функции из рис. 6.36) изображено оптимальное разбиение области  $\Omega$  на зоны притяжения  $\Omega_{i-1}^0, \Omega_i^0, \Omega_{i+1}^0$  локальных минимумов  $\tau_{i-1}^0, \tau_i^0, \tau_{i+1}^0$ . Как видно, функция  $c(x, \tau_i^*)$  такова, что в точках зоны соответствующего локального минимума  $\tau_i^* = 0,5$  ее значение совпадает со значением функции  $f(x)$  в точке  $x = 0,5$ , а вне этой зоны значение функции  $c(x, \tau_i^*)$  резко возрастает (скорость возрастания определяется значениями параметра  $S$  из (6.5.5)). То же самое касается и функций  $c(x, \tau_{i-1}^*), c(x, \tau_{i+1}^*)$ .

Таким образом, от задачи (6.5.3) перешли к задаче отыскания координат локальных минимумов и их областей притяжения, которая свелась к задаче оптимального разбиения множества  $\Omega$  на подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  с отысканием координат центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  этих подмножеств, где функции штрафа  $c(x, \tau_i)$  имеют вид (6.5.5).



**Рис. 6.38.** Вид штрафных функций минимизируемой функции на оптимальном решении при  $N_{\text{факт}}=3$ : сплошной линией изображена функция  $c(x, \tau_{i+1}^*)$ ; пунктирной линией –  $c(x, \tau_{i-1}^*)$ ; штрихпунктирной линией –  $c(x, \tau_i^*)$

Согласно подразделу 1.3.2, оптимальное решение задачи **A2** достигается при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega^N$  на вектор-функции  $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_i^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$ ,  $i$ -я компонента которой имеет вид:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i^*) = \min_{k=1, \dots, N} c(x, \tau_k^*), \text{ тогда } x \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } x \notin \Omega_i^*; \end{cases} \quad (6.5.6)$$

а в качестве вектора  $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , входящего в формулу (6.5.6), следует выбирать оптимальное решение следующей задачи:

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, 2, \dots, N} c(x, \tau_i) dx \rightarrow \min, \quad (6.5.7)$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

### 6.5.2. Алгоритмы решения задачи глобальной оптимизации, сведенной к задаче оптимального разбиения

Для описания алгоритма решения задачи глобальной оптимизации (6.5.3), сведенной к задаче **A2** оптимального разбиения, перепишем функцию  $c(x, \tau_i)$  в более удобном для дальнейшего виде, учитывая, что  $x, \tau_i$  в **A2** – это точки  $n$ -мерного евклидова пространства, т. е.  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ ,  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ :

$$c(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) = f(\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) +$$

$$+ S \cdot \sum_{j=1}^k \left\{ \begin{array}{l} 0, f(x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} j, \dots, x^{(n)} + \frac{\tau_i^{(n)} - x^{(n)}}{k} j) - \\ - f(x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} (j-1), \dots, x^{(n)} + \frac{\tau_i^{(n)} - x^{(n)}}{k} (j-1)) \end{array} \right\}. \quad (6.5.8)$$

Для решения задачи **A2**, являющейся частным случаем задачи **A4** алгоритмом **6.1**, описанным в подразделе 1.3.2, осталось конкретизировать обобщенный градиент  $g_G(\tau)$  (при  $\rho(x) \equiv 1 \forall x \in \Omega$ ) функции  $G(\tau)$  из (6.5.7) в точке

$$\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(p)}; \dots; \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}).$$

Заметим, что для выпуклой функции обобщенный градиент совпадает с субградиентом, в противном случае, в качестве обобщенного градиента выступает почтиградиент [109].

В точке, где  $f(x)$  дифференцируема, почтиградиент совпадает с градиентом. Для кусочно гладких функций почтиградиент совпадает с градиентом к одному из примыкающих к данной точке кусков [109].

Таким образом, в большинстве случаев при решении практических задач вычисление обобщенных градиентов не вызывает особых трудностей.

Из подраздела 1.3.2 следует, что  $i$ -я компонента вектора обобщенного градиента  $g_G(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_i}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$  функции

$$G(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(p)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}) dx^{(1)}, \dots, dx^{(n)} \quad (6.5.9)$$

в точке  $\tau = (\tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$  определяется следующим образом:

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = g_G^{\tau_i}(\tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \int_{\Omega} g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \lambda_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)}, \dots, dx^{(n)}, \quad (6.5.10)$$

где  $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$  –  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_c(x, \tau)$  функции  $c(x, \tau)$  в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ , где  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ , при фиксированном  $x$  имеет вид:

$$g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(p)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(p)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \end{pmatrix}.$$

В свою очередь,  $p$ -я компонента  $g_c^{\tau_i^{(p)}}(x, \tau)$  обобщенного вектора градиента функции  $c(x, \tau)$  в точке  $\tau = (\tau_1^{(n)}, \dots, \tau_N^{(n)})$  при фиксированном  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)}, \dots, x^{(n)})$  определяется для каждого  $i = 1, \dots, N$  и  $p = 1, \dots, n$  по формулам:

$$g_c^{\tau_i^{(p)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(p)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= g_f^{\tau_i^{(p)}}(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_i^{(p)}, \dots, \tau_N^{(n)}) + \\
 &+ S \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } f(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) - f(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \leq 0, \\ \sum_{j=1}^k (g_f^{u^{(p)}}(u^{(1)}, \dots, u^{(p)}, \dots, u^{(n)}) \frac{j}{k} - g_f^{v^{(p)}}(v^{(1)}, \dots, v^{(p)}, \dots, v^{(n)}) \frac{j-1}{k}), & \\ \text{если } f(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) - f(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) > 0, & \end{cases} \quad (6.5.11)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 u &= (u^{(1)}, \dots, u^{(p)}, \dots, u^{(n)}) = \\
 &= (x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} j, \dots, x^{(p)} + \frac{\tau_i^{(p)} - x^{(p)}}{k} j, \dots, x^{(n)} + \frac{\tau_i^{(n)} - x^{(n)}}{k} j); \\
 v &= (v^{(1)}, \dots, v^{(p)}, \dots, v^{(n)}) = \\
 &= (x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} (j-1), \dots, x^{(p)} + \frac{\tau_i^{(p)} - x^{(p)}}{k} (j-1), \dots, x^{(n)} + \frac{\tau_i^{(n)} - x^{(n)}}{k} (j-1)).
 \end{aligned}$$

Теперь мы готовы описать общую схему алгоритма решения задачи глобальной минимизации (6.5.3), сведенной к задаче **A2** оптимального разбиения с функцией  $s(x, \tau_i)$  в виде (6.5.8).

*6.5.2.1. Алгоритм одновременного отыскания всех локальных минимумов функции и их зон притяжения для одномерного случая*

**Алгоритм 6.2**

На предварительном этапе:

– задаем значения параметров  $M, N, K$  из (6.5.5), (6.5.8);

– отрезок  $[a, b]$  покрываем одномерной сеткой  $x_i = a + (i-1)H_x, i = \overline{1, M}$ ,

где  $H_x$  – шаг сетки,  $H_x = \frac{b-a}{M-1}$ ;

– задаем начальные приближения  $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ ;

– вычисляем по формулам (6.5.6) в узлах сетки при  $\tau = \tau^{(0)}$  значения вектор-функции  $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \dots, \lambda_N^{(0)}(x))$ , характеризующей начальное разбиение отрезка  $[a, b]$  на зоны притяжения  $\Omega_1^0, \dots, \Omega_N^0$  локальных



минимумов  $\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}$ , (см. рис. 6.37);

– вычисляем по формулам (6.5.10), (6.5.11) значения вектора обобщенных градиентов  $g_G(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$  при  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(0)}$ ,  $n=1$ ;

– выбираем начальный пробный шаг  $h_0 > 0$  для  $r$ -алгоритма Н. З.

Шора.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле:

$$\tau^{(1)} = P_{[a,b]} \left( \tau^{(0)} - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau_0)}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau_0), g_G(\tau_0))}} \right),$$

где  $P_{[a,b]}$  – оператор проектирования на  $[a, b]$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) шагов алгоритма получены определенные значения  $\tau^{(l)}$  и  $\lambda^{(l-1)}(x)$ .

Опишем  $(l+1)$ -й шаг алгоритма.

1. Вычисляем значения  $\lambda^{(l)}(x)$  в узлах сетки по формулам (6.5.6) при  $\tau = \tau^{(l)}$ .

2. Вычисляем значения  $g_G^{\tau_i}(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, N$  по формулам (6.5.10), (6.5.11) при  $\lambda(x) = \lambda^{(l)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(l)}$ .

3. Для минимизации функции  $G(\tau)$  из (6.5.9) по  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$  проводим  $(l+1)$ -й шаг  $r$ -алгоритма Шора в  $H$ -форме [81], краткая схема которого имеет вид:

$$\tau^{(l+1)} = P_{[a,b]} \left( \tau^{(l)} - h_1 \frac{H_{l+1} g_G(\tau_1)}{\sqrt{(H_{l+1} g_G(\tau_1), g_G(\tau_1))}} \right).$$

4. Если условие

$$\|\tau^{(l)} - \tau^{(l+1)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (6.5.12)$$

не выполняется – к  $(l+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняется – переходим к п. 5.

5. Полагаем  $\tau^* = \tau^{(l)}$ ,  $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (6.5.12).

Таким образом, мы получили вектор координат локальных минимумов

$\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$  и значения вектор-функции  $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$ , характеризующей разбиение отрезка  $[a, b]$  на зоны притяжения  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  этих локальных минимумов (см. рис. 6.38).

6. Вычисляем значения функции  $f(x)$  в точках локальных минимумов  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  и выбираем среди них точку глобального минимума  $x^* : f(x^*) = \min f(\tau_1^*), \dots, f(\tau_N^*)$ .

Алгоритм 6.2 описан.

*6.5.2.2. Алгоритм одновременного отыскания всех локальных минимумов функции и их зон притяжения для двумерного случая*

Для описания алгоритма 6.3 решения задачи глобальной оптимизации в случае двумерного пространства нам необходимо конкретизировать обобщенный градиент  $g_G(\tau)$  (при  $\rho(x) \equiv 1 \quad \forall x \in \Omega$ ) функции  $G(\tau)$  из (6.5.7) в точке  $\tau = (\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}, \dots, \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_N^{(1)}, \tau_N^{(2)})$ .

Заметим, что  $i$ -я компонента  $2N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_G(\tau) = (g_G^{\tau_1^{(1)}}(\tau), g_G^{\tau_1^{(2)}}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N^{(1)}}(\tau), g_G^{\tau_N^{(2)}}(\tau))$  функции

$$\begin{aligned} G(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}, \dots, \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_N^{(1)}, \tau_N^{(2)}) = \\ = \iint_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x^{(1)}, x^{(2)}; \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) dx^{(1)}, dx^{(2)} \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

в точке  $\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)})$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} g_G^{\tau_i^{(1)}}(\tau) = \\ = \iint_{\Omega} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)}) \lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)}) dx^{(1)}, dx^{(2)}, \end{aligned} \quad (6.5.14)$$

$i=1, \dots, N,$

где  $g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau)$  –  $i$ -я компонента  $2N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau)$  функции  $c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ ,  $i=1, \dots, N$ , в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ , где  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$  при фиксированном  $x$  имеет вид:

$$g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, x^{(2)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)}) = g_f^{\tau_i^{(1)}}(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)}) + S \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } f(u^{(1)}, u^{(2)}) - f(v^{(1)}, v^{(2)}) \leq 0, \\ \sum_{j=1}^k (g_f^{u^{(p)}}(u^{(1)}, u^{(2)}) \frac{j}{k} - g_f^{v^{(p)}}(v^{(1)}, v^{(2)}) \frac{j-1}{k}), & \\ \text{если } f(u^{(1)}, u^{(2)}) - f(v^{(1)}, v^{(2)}) > 0, \end{cases} \quad (6.5.15)$$

где

$$u = (u^{(1)}, u^{(2)}) = (x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} j, x^{(2)} + \frac{\tau_i^{(2)} - x^{(2)}}{k} j);$$

$$v = (v^{(1)}, v^{(2)}) = (x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} (j-1), x^{(2)} + \frac{\tau_i^{(2)} - x^{(2)}}{k} (j-1)).$$

Для  $g_c^{\tau_i^{(2)}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau)$  – формулы аналогичны формулам (6.5.14), (6.5.15), в (6.5.15) только производится замена  $g_f^{u^{(1)}}$ ,  $g_f^{v^{(1)}}$  на  $g_f^{u^{(2)}}$ ,  $g_f^{v^{(2)}}$ , соответственно.

В этом случае  $\lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)})$  –  $i$ -я компонента вектор-функции

$$\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}) = (\lambda_1(x^{(1)}, x^{(2)}), \dots, \lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)}), \dots, \lambda_N(x^{(1)}, x^{(2)})): \sum_{i=1}^N \lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)}) = 1,$$

$0 \leq \lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)}) \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ , по аналогии с (6.5.6) вычисляется по формуле

$$\lambda_i^*(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^{(1)*}, \tau_i^{(2)*}) = \\ = \min_{k=1, \dots, N} c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_k^{(1)*}, \tau_k^{(2)*}), & \\ \text{тогда } (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega_i^*, & \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } (x^{(1)}, x^{(2)}) \notin \Omega_i^*. \end{cases} \quad (6.5.16)$$

Функция штрафа  $c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , принимается в виде:

$$c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) = f(\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) +$$

$$+S \cdot \sum_{j=1}^k \max \left\{ \begin{array}{l} 0, f(x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} j, x^{(2)} + \frac{\tau_i^{(2)} - x^{(2)}}{k} j) - \\ -f(x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} (j-1), x^{(2)} + \frac{\tau_i^{(2)} - x^{(2)}}{k} (j-1)) \end{array} \right\} \quad (6.5.17)$$

### Алгоритм 6.3

**Шаг 0.** Выбираем значения для параметров  $N, M, M1, K$ . Область определения  $[a, b] \times [c, d]$  покрываем двумерной сеткой  $x_i^{(1)} = a + (i-1)H_{x^{(1)}}$ ,  $i=1, \dots, M$ ,  $x_j^{(2)} = c + (j-1)H_{x^{(2)}}$ ,  $j=1, \dots, M1$ , здесь

$H_{x^{(1)}}$ ,  $H_{x^{(2)}}$  – шаг сетки:  $H_{x^{(1)}} = \frac{b-a}{M-1}$ ;  $H_{x^{(2)}} = \frac{d-c}{M1-1}$ . Задаем в области

определения  $\Omega$  начальное приближение  $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)1}, \tau_1^{(0)2}, \dots, \tau_N^{(0)1}, \tau_N^{(0)2})$ .

Вычисляем при  $\tau = \tau^{(0)}$  значения вектор-функции  $\lambda^{(0)}(x^{(1)}, x^{(2)})$  в узлах сетки по формулам (6.5.16); по формулам (6.5.14), (6.5.15) вычисляем компоненты вектора обобщенного градиента

$$g_G(\tau) = (g_{G_1}^{\tau_1^{(1)}}(\tau), g_{G_1}^{\tau_1^{(2)}}(\tau), \dots, g_{G_N}^{\tau_N^{(1)}}(\tau), g_{G_N}^{\tau_N^{(2)}}(\tau))$$

при  $\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}) = \lambda^{(0)}(x^{(1)}, x^{(2)})$ ; выбираем начальный пробный шаг  $h_0 > 0$  для г-алгоритма Н. З. Шора;  $k = 0$ .

Первый шаг алгоритма проводим по формуле

$$\tau^{(1)} = P_{[a, b] \times [c, d]} \left( \tau^{(0)} - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau_0)}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau_0), g_G(\tau_0))}} \right),$$

где  $P_{[a, b] \times [c, d]}$  – оператор проектирования на  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) шагов алгоритма получены определенные значения  $\tau^{(k)}$  и  $\lambda^{(k-1)}(x)$ .

Опишем **(k+1)-й** шаг алгоритма.

1. Вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(x^{(1)}, x^{(2)})$  в узлах сетки по формулам (6.5.16) при  $\tau = \tau^{(k)}$ .

2. Вычисляем компоненты  $g_G(\tau)$  при  $\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}) = \lambda^{(k)}(x^{(1)}, x^{(2)})$ ,

$\tau = \tau^{(k)}$  по формулам (6.5.14), (6.5.15).

3. Для минимизации функции  $G(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)})$  из (6.5.13) по  $\tau \in \Omega^N$  проводим  $(k+1)$ -й шаг  $r$ -алгоритма Н. З. Шора в  $H$ -форме [81], краткая схема которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)} = P_{[a,b] \times [c,d]} \left( \tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_G(\tau_k)}{\sqrt{(H_{k+1} g_G(\tau_k), g_G(\tau_k))}} \right),$$

где  $P_{[a,b] \times [c,d]}$  – оператор проектирования на  $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ .

4. Если условие

$$\|\tau^{(k)} - \tau^{(k+1)}\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \tag{6.5.18}$$

не выполняется – полагаем  $k = k+1$  и переходим на шаг 1, если выполняется – к шагу 5.

5. Полагаем  $\lambda^*(x^{(1)}, x^{(2)}) = \lambda^{(t)}(x^{(1)}, x^{(2)})$ ,  $\tau^* = \tau^{(t)}$ , где  $t$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (6.5.18).

Таким образом, мы получили вектор координат локальных минимумов  $\tau^* = (\tau_1^{(1)*}, \dots, \tau_N^{(2)*})$  и значения  $\lambda_1^*(x^{(1)}, x^{(2)}), \dots, \lambda_N^*(x^{(1)}, x^{(2)})$ , характеризующие разбиение области определения  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  на зоны притяжения  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$  этих локальных минимумов.

4. Вычисляем значения функции  $f(x^{(1)}, x^{(2)})$  в точках локальных минимумов  $\tau^* = (\tau_1^{(1)*}, \tau_1^{(2)*}; \dots; \tau_i^{(1)*}, \tau_i^{(2)*}; \dots; \tau_N^{(1)*}, \tau_N^{(2)*})$  и выбираем среди них точку глобального минимума:

$$x^* = (x^{(1)*}, x^{(2)*}) = \min \{ f(\tau_1^{(1)*}, \tau_1^{(2)*}); \dots; f(\tau_i^{(1)*}, \tau_i^{(2)*}); \dots; f(\tau_N^{(1)*}, \tau_N^{(2)*}) \}.$$

Алгоритм 6.3 описан.

*Алгоритм 6.3 (или 6.3) легко обобщается на случай трехмерного пространства.* Описание алгоритма для многомерного случая  $n > 3$  принципиальных сложностей не представляет и отличается, в основном, лишь заменой, например, одномерных интегралов многомерными и некоторой конкретизацией формул (6.5.5), (6.5.8) вычисления штрафных функций  $s(x, \tau_i)$ .

Описанные алгоритмы глобальной оптимизации были исследованы на большом числе тестовых одномерных, двумерных и трехмерных

функций, выявлены их свойства, доказана эффективность их применения для решения задач глобальной оптимизации, даны рекомендации по выбору основных параметров алгоритмов.

Полный набор одномерных, двумерных и трёхмерных тестовых функций можно найти в [65]. Там же проведен анализ эффективности предложенных алгоритмов глобальной оптимизации с применением теории оптимального разбиения множеств. Показано, что при надлежащем выборе основных параметров  $N$ ,  $M$ ,  $K$  описанные алгоритмы глобальной оптимизации для достаточно широкого класса недифференцируемых функций отыскивают одновременно все локальные минимумы, а значит, и глобальный, и зоны их притяжения, а также фактическое число локальных минимумов  $N_{\text{факт}}$ .

Алгоритмы хорошо проявили себя на функциях с эффектом «плато». Не обязательно знать фактическое количество локальных минимумов ( $N_{\text{факт}}$ ). Достаточно выбрать  $N_{\text{ожид}} > N_{\text{факт}}$ , так как в этом случае алгоритмы все равно найдут все  $N_{\text{факт}}$  локальных минимумов. Если все же оказалось, что  $N_{\text{ожид}} < N_{\text{факт}}$ , то некоторые локальные минимумы будут пропущены, остальные будут найдены правильно. В этом случае эксперимент следует повторить несколько раз, увеличивая значения  $N_{\text{ожид}}$  до тех пор, пока не будет определено  $N_{\text{факт}}$ .

Начальные приближения для локальных минимумов  $\tau_i^0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , рекомендуется располагать равномерно в области определения минимизируемой функции, или, если нет априорной информации о значениях локальных минимумов, генерировать их с помощью датчика случайных чисел. Если же начальные приближения для  $\tau_i^0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , помещены в одну точку (это удобно при задании исходной информации), тогда, чтобы не пропустить некоторые локальные минимумы, следует регулировать значения параметров  $M$  и  $K$ .

Требуют дальнейшей коррекции рекомендации по выбору основных параметров алгоритмов  $M$  и  $K$ . Возможность уточнения этих параметров дает диалоговый режим пользователя с алгоритмами в ходе процесса решения задачи.

По результатам работы алгоритмов, описанных в разделе 6.5, можно получить дополнительную информацию о расположении точек локального максимума (или седловых точек) исследуемой функции.

Метод оптимального разбиения множества на подмножества с размещением центров этих подмножеств позволяет также находить точки, лежащие на оптимальных границах между подмножествами  $\Omega_i^*$  и  $\Omega_j^*$ .

# Глава 7

## ДАЛЬНЕЙШИЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ И МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

### 7.1. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Многие технические объекты, такие как тепловые аппараты, электродвигатели, гироскопические системы, движущиеся объекты, в процессе реальной эксплуатации могут существенно изменять компоненты модели динамики. Это может быть обусловлено изменением свойств (теплофизических, электромагнитных) материалов в результате изменения параметров состояния объекта или условий его функционирования. Динамические режимы такого рода объектов или систем достаточно точно можно описать с помощью последовательного использования нескольких линейных дифференциальных уравнений [78]. Для этого множество всех возможных состояний системы разбивается на несколько стадий или зон таким образом, чтобы в пределах одной стадии динамика с достаточной точностью описывалась одним (в общем случае векторным) линейным дифференциальным уравнением. Так, например, общая модель динамики в случае выделения  $N$  зон представляет собой совокупность  $N$  систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 \cdot x(t) + B_1 \cdot u(t - \tau_1), \quad y \in \Omega_1; \\ &\dots \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

$$\dot{x}(t) = A_N \cdot x(t) + B_N \cdot u(t - \tau_N), \quad y \in \Omega_N,$$

где  $x(t)$  – вектор фазовых координат;  $u(t)$  – вектор параметров управления;  $A_j, B_j, j = \overline{1, N}$  – матрицы параметров;  $\tau_j, j = \overline{1, N}$  – время возможного запаздывания по каналу управления на  $j$ -й стадии;  $y$  – выходная (на-

блюдаемая) переменная, обычно это одна из фазовых координат;  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  определяют  $N$  возможных стадий (зон) функционирования системы так, что, если, например,  $y = x_1$ , то  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  – разбиение на  $N$  подмножеств множества значений первой фазовой координаты системы. В (7.1.1) вектор фазовых переменных на разных стадиях может иметь различную размерность. Если же размерности векторов  $x$  и  $u$  для всех стадий одинаковы, то система уравнений может быть представлена одним дифференциальным уравнением с разрывной правой частью:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 \cdot x(t) + B_1 \cdot u(t - \tau_1), & y \in \Omega_1; \\ \dots & \\ A_N \cdot x(t) + B_N \cdot u(t - \tau_N), & y \in \Omega_N. \end{cases} \quad (7.1.2)$$

В настоящее время ведутся научные исследования, связанные с разработкой методов идентификации динамических систем типа (7.1.2) с использованием аппарата теории непрерывных задач ОРМ. Этот класс обратных задач характеризуется тем, что в них идентификации подлежит правая часть дифференциального уравнения, являющаяся кусочно-непрерывной функцией в своей области определения [30, 31, 108]. Указанная особенность позволяет формулировать такие задачи как задачи разбиения наилучшим (в определенном смысле) образом континуального множества.

Далее приведем лишь математические модели этих задач и опишем круг вопросов, возникающих при исследовании таких моделей.

**Постановка задачи.** Будем рассматривать частный случай «многозонной» модели динамики (7.1.2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + b^i f_i(v_i, t), & x_1 \in \Omega_i, i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (7.1.3)$$

Здесь состояние некоторого объекта характеризуется двумя фазовыми координатами,  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  – множества значений первой фазовой координаты системы, которые определяют возможные состояния (зоны) функционирования системы;  $a_1^i, a_2^i, b^i, v_i, i = \overline{1, N}$  – заданные (или нет) параметры,  $f(v_i, t)$  – известная, непрерывная по своим переменным функция.

Прямая задача для системы (7.1.3) формулируется так: по известным границам между зонами  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  и заданным значениям параметров



$a_1^i, a_2^i, b^i, v_i, i = \overline{1, N}$  найти решение системы (7.1.3), удовлетворяющее условиям:

$$x_1(0) = \hat{x}_1, \quad x_2(0) = \hat{x}_2. \quad (7.1.4)$$

Под **идентификацией системы** будем понимать уточнение по экспериментальным данным модели объекта или процесса (7.1.3), то есть определение неизвестных границ между зонами функционирования  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , а также параметров  $a_1^i, a_2^i, b^i, v_i, i = \overline{1, N}$  (если они не заданы) по условиям (7.1.4) и апостериорной информации о значениях первой фазовой координаты в некоторые моменты времени

$$x_1(t_k) = \tilde{x}_1(t_k), \quad k = \overline{1, K}. \quad (7.1.5)$$

Как известно, задачи идентификации динамических систем относятся к обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений в последнее время интенсивно развивается, что обусловлено в значительной мере необходимостью разработки математических методов решения широкого класса важных прикладных задач, связанных с обработкой и интерпретацией наблюдений. Несмотря на то, что интенсивное исследование обратных задач началось сравнительно недавно, в этой области уже получено большое количество существенных результатов. В теории обратных задач сформировался ряд направлений, обусловленных как разнообразными сферами применений, так и типами математических постановок обратных задач. Число научных публикаций по теории обратных задач и ее приложений очень велико. Многие из полученных результатов нашли свое отражение в монографиях, где рассмотрены как общие вопросы, так и специальные разделы, посвященные конкретным направлениям исследований [5, 6, 12, 14, 23].

Одним из подходов к решению задач идентификации динамических систем является сведение их к задаче оптимального управления и применение принципа максимума Понтрягина или методов динамического программирования [12, 78]. Но, как отмечено в [12], при формулировке задач оптимального управления сложными процессами и явлениями, например таких, как иммунная защита, не так просто адекватно ввести управление и сконструировать удовлетворительную меру качества достижения комплекса разнообразных целей, улучшающих иммунную реакцию. Таким образом, актуальным направлением научных исследований является разработка специализированных методов решения обратных задач для дифференциальных уравнений с переключаемой правой частью, создание их алгоритмического и программного обеспечения.

Далее продемонстрируем принципиальную возможность идентификации сложных многостадийных процессов, синтезируя основные положения теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств и теории обратных задач для систем с сосредоточенными параметрами.

*Формулировка задачи идентификации динамической системы  
в терминах теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств*

Укажем на основные особенности сформулированной выше задачи, которые могут вызывать определенные трудности в процессе решения и требуют применения специальных подходов к исследованию задачи и построению алгоритмов ее решения. Обратная задача для системы (7.3) формулируется в предположении о том, что границы переключения зон неизвестны заранее. При этом значение переменной  $x_1$  наблюдается лишь в некоторые моменты времени отрезка  $\bar{T} = \{t : 0 \leq t \leq T\}$ . Требуется определить в системе (7.1.3) границы между зонами и, возможно, параметры функций правых частей  $a_j^i, b^i, v_i, i = \overline{1, N}$  (если они не заданы) по известным значениям первой фазовой координаты  $\tilde{x}_1$  в точках интервала  $\bar{T}$  (условиям (7.1.5)). Таким образом, в обратной задаче для системы (7.1.3) определению подлежит правая часть уравнения, о которой известно, что она принадлежит к классу кусочно-непрерывных на  $\Omega \times \mathbb{R} \times \bar{T}$  функций. Как и многие обратные задачи [14, 102], возникающие при обработке экспериментов, рассматриваемая задача является некорректно поставленной. В связи с этим вопросы, связанные с существованием и единственностью ее решения, а также непрерывной зависимостью решения от начальных данных обратной задачи, требуют дополнительного анализа.

Опишем подход к решению поставленной задачи, применяя аппарат теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Сформулируем эту задачу на языке ОРМ. Пусть известны результаты измерений входных и выходных переменных объекта, а также задано количество  $N$  зон функционирования объекта (множества  $\Omega$  значений первой фазовой координаты системы). Введем следующие обозначения:

–  $P_N(\Omega)$  класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств:

$$P_N(\Omega) = \{\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes } \Omega_i \cap \Omega_j = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}\};$$

-  $\tau_i = a_1^i, a_2^i, b^i, v_i$  – параметры функций  $\phi_i(t, x; \tau_i) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + b^i f_i(v_i, t)$  правых частей системы (7.1.3),  $i = \overline{1, N}$ , которые условимся называть «центрами» подмножеств  $\Omega_i$ ;

-  $x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$  – решение задачи Коши (7.1.3), (7.1.4), соответствующее набору параметров  $\bar{\omega}, \tau \in P_N(\Omega) \times R^{4N}$ .

Необходимо определить разбиение  $\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega)$  и неизвестные центры подмножеств  $\tau_i, i = \overline{1, N}$ , при которых разница между экспериментальными и расчетными данными достигала бы минимального значения, то есть достигал минимального значения некоторый критерий качества:

$$I x(\cdot; \bar{\omega}, \tau) \rightarrow \min_{\bar{\omega}, \tau \in P_N(\Omega) \times R^{4N}}. \quad (7.1.6)$$

В работе [55] предложено два способа задания функционала задачи (7.1.6):

$$I^1 x(\cdot; \bar{\omega}, \tau) = \int_0^T \dot{x}_2(t; \bar{\omega}, \tau) - \dot{\tilde{x}}_2(t) \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt, \quad (7.1.7)$$

где  $\dot{\tilde{x}}_2(t)$  – приближенные значения производной фазовой координаты  $x_2(\cdot)$ , вычисленные по результатам наблюдений переменной  $x_1(\cdot)$  с помощью операции численного дифференцирования;

$$I^2 x(\cdot; \bar{\omega}, \tau) = \int_0^T \beta_0 x_1(t; \bar{\omega}, \tau) - \tilde{x}_1(t) \quad + \beta_1 x_2(t; \bar{\omega}, \tau) - \tilde{x}_2(t) \quad \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt, \quad (7.1.8)$$

где  $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$  – решение задачи Коши (7.1.3), (7.1.4) восстанавливаемой системы,  $\tilde{x}_1(t)$  – значения наблюдаемой фазовой переменной,  $\tilde{x}_2(t)$  – приближенные значения фазовой координаты  $x_2(\cdot)$ , вычисленные по результатам наблюдений первой фазовой координаты  $x_1(\cdot)$  с помощью операции численного дифференцирования;  $\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$  – параметры, задающие приоритет слагаемого.

*О некорректности задачи минимизации функционала (7.1.7)  
и способах ее преодоления*

Метод решения сформулированной задачи ОРМ с применением операции численного дифференцирования наблюдаемого ряда и минимизации критерия (7.1.7), а также результаты применения такого подхода к идентификации некоторых многозонных моделей динамики приведены в работе [55]. Вычислительные эксперименты показали, что процесс восстановления кусочно-непрерывной по фазовым переменным функции правой части системы (7.1.3) на основе решения задачи минимизации функционала (7.1.7) обладает рядом особенностей:

– если в наборе наблюдений присутствуют точки переключения, то выборка наблюдений должна содержать точки из разных зон функционирования, количество их зависит от вида функции правых частей;

– качество реконструкции динамической системы с помощью приведенного в [55] алгоритма зависит от начальных приближений неизвестных параметров;

– задача характеризуется неединственностью решения, что преодолевается, например, путем сужения множества, на котором ищутся неизвестные параметры  $\tau_i, i = \overline{1, N}$ .

Кроме того, основной проблемой, возникающей при реализации метода, является то, что задача дифференцирования функции, заданной приближенно, в равномерной метрике является некорректной. Одним из подходов к решению указанной проблемы является учет погрешности задания функции при выборе шага сетки. Регуляризованная процедура численного дифференцирования может быть получена на основе различных подходов [33, 102].

В основе одного метода лежит традиционная аппроксимация дифференциального оператора конечноразностным оператором. При этом шаг сетки должен быть согласован с погрешностью входных данных. Так, например, в случае, когда значение самой функции может быть вычислено (или измерено) в любой точке и с любым шагом с точностью  $\delta$ , определение производной с заданной точностью  $\varepsilon$  возможно, если выбрать шаг  $h(\delta) = c\delta^q$ , где  $c$  и  $q$  – положительные константы,  $q < 1$ .

Второй способ численного дифференцирования основывается на интерполяции функции, заданной таблично с точностью  $\delta$ , сплайн-функциями [33]. Интерполяция сплайнами третьего порядка – это быстрый, эффективный и устойчивый способ интерполяции функций, позволяющий осуществ-

лять операцию дифференцирования. Основными достоинствами сплайн-интерполяции являются её устойчивость и малая трудоемкость. Системы линейных уравнений, которые требуется решать для построения сплайнов, хорошо обусловлены, что позволяет получать коэффициенты полиномов с высокой точностью. Фактически применение оператора предварительного сглаживания исходной информации позволяет преодолеть некорректность поставленной задачи вычисления неограниченного оператора и определить аналитически производные предварительно построенной гладкой сплайн-функции.

Задача численного дифференцирования также может быть решена в рамках идеологии обращения интегральных операторов типа Вольтерра на основе равенства  $\int_0^t x'(t)dt = x(t) - x(0)$ , численное обращение которых возможно с использованием регуляризированных алгоритмов, например метода А. Н. Тихонова.

*Подход к решению задачи идентификации на основе минимизации среднеквадратичного отклонения значений фазовой переменной от наблюдаемых значений*

Еще один подход к решению задачи идентификации динамической системы (7.1.3) по данным наблюдений основан на решении задачи

$$I^2 x(\cdot; \bar{\omega}, \tau) \rightarrow \min_{\bar{\omega}, \tau \in P_N(\Omega) \times R^{4N}}$$

где

$$I^2 x(\cdot; \bar{\omega}, \tau) =$$

$$= \int_0^T \beta_0 x_1(t; \bar{\omega}, \tau) - \tilde{x}_1(t)^2 + \beta_1 x_2(t; \bar{\omega}, \tau) - \tilde{x}_2(t)^2 \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \phi(x, t, \bar{\omega}), \phi \in \Phi, \end{cases} \quad (7.1.9)$$

$$\Phi = \bar{\phi}(t, x; \bar{\omega}): \bar{\phi}(t, x; \bar{\omega}) = \phi_i(t, x; \tau_i) \text{ м.в. для } x \in \Omega_i, \tau_i \in R^4, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} \in P_N(\Omega) ,$$

$x_1(\cdot), x_2(\cdot)$  – решение задачи Коши (7.1.3), (7.1.4) восстанавливаемой системы,  $\tilde{x}_1(t)$  – значения наблюдаемой фазовой переменной,  $\tilde{x}_2(t)$  – приближенные значения фазовой координаты  $x_2(\cdot)$ , вычисленные по результа-

там наблюдений первой фазовой координаты  $x_1(\cdot)$  с помощью операции численного дифференцирования,  $\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$ .

Введя характеристические функции  $\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , от задачи минимизации функционала  $\bar{I}^2 x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$  при условиях (7.1.9) переходим к эквивалентной задаче бесконечномерного программирования: найти вектор-функцию  $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot) \in \Lambda_0$  и вектор  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_N$ ,  $\tau_i = a_1^i, a_2^i, b^i, v_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , при которых

$$\bar{I}^2(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Lambda_0 \times \mathbb{R}^{4N}}, \quad (7.1.10)$$

где

$$\bar{I}^2(\lambda(\cdot), \tau) = \int_0^T \beta_0 x_1(\lambda(x_1), \tau; t) - \tilde{x}_1(t)^2 + \beta_1 x_2(\lambda(x_1), \tau; t) - \tilde{x}_2(t)^2 \sum_{k=1}^K \delta t - t_k dt,$$

$$\Lambda_0 = \{ \lambda(x_1) = (\lambda_1(x_1), \dots, \lambda_N(x_1)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x_1) = 1 ;$$

$$\lambda_i(x_1) = 0 \vee 1 \text{ п.в. для } x_1 \in \Omega; \quad i = \overline{1, N} \}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N \phi_i(t, x, \tau_i) \lambda_i(x_1) \end{cases}, \quad (7.1.11)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (7.1.12)$$

Для решения задачи предложен следующий **итерационный алгоритм**:

*Инициализация.* Задаем  $k=0$ ,  $\tau_i^k = a_1^{ik}, a_2^{ik}, b^{ik}, v_i^k$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\varepsilon > 0$ ; вычис-

ляем (в случае  $\beta_1 \neq 0$ )  $\tilde{x}_2(t) = \dot{\tilde{x}}_1(t)$  в точках  $t = t_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ ; задаем произвольно значения характеристических функций  $\lambda_i^k(x_{10}), i = \overline{1, N}$ .

1. Решаем задачу Коши (7.1.11) – (7.1.12) одним из методов Рунге – Кутты. При этом на каждом шаге численного интегрирования системы (7.1.11) – (7.1.12) находим значения характеристических функций подмножеств

$$\lambda_i^k(x_1(t)) = \begin{cases} 1, \text{ если } \beta_0 x_1^i - \tilde{x}_1^2 + \beta_1 x_2^i - \tilde{x}_2^2 = \\ = \min_{p=1, N} \left( \beta_0 x_1^p - \tilde{x}_1^2 + \beta_1 x_2^p - \tilde{x}_2^2 \right) \\ 0 \text{ в противном случае,} \quad i = \overline{1, N}. \end{cases}$$

2. Вычисляем обобщенный градиент  $\gamma^k$  функции  $\bar{\Gamma}^2(\lambda, \tau)$  по переменным  $\tau_i^k = a_1^{ik}, a_2^{ik}, b^{ik}, v_i^k, i = \overline{1, N}$  при  $\lambda = \lambda^k$ .
3. Осуществляем  $k$ -ю итерацию  $\gamma$ -алгоритма Н. З. Шора по формуле:

$$\tau^{k+1} = \tau^k - \alpha_k H_k \gamma^k,$$

где  $H_k$  – матрица растяжения пространства переменных  $\tau_i^k = a_1^{ik}, a_2^{ik}, b^{ik}, v_i^k, i = \overline{1, N}$  в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов  $\gamma^k$  и  $\gamma^{k-1}$ ,  $H_0 = E$  [109, 112];  $\alpha_k \geq 0$  – шаговый множитель, который выбирается из условия минимума целевой функции в направлении  $d = -H_k \gamma^k$ .

4. Если выполняется одно из условий

$$\|\tau^{k+1} - \tau^k\| \leq \varepsilon;$$

$$\|\gamma^k\| \leq \varepsilon;$$

$$|\bar{\Gamma}^2(\lambda^{k+1}, \tau^{k+1}) - \bar{\Gamma}^2(\lambda^k, \tau^k)| \leq \varepsilon,$$

то – конец алгоритма. В качестве оптимального решения задачи (7.1.10) – (7.1.12) выбираем  $(\lambda^{k+1}, \tau^{k+1})$ . Иначе  $k := k + 1$  и переходим на п. 1.

**Замечание.** Для того чтобы вычислить обобщенный градиент функции  $\bar{\Gamma}^2(\lambda^k, \tau)$  необходимо наряду с задачей Коши п.1 дополнительно решить  $4N$  задач Коши при возмущенных компонентах вектора параметров  $\tau$ .

*Некоторые результаты идентификации «многозонных» моделей динамики.  
Определение границ между зонами*

Работа предложенных алгоритмов была проверена на решении большого количества тестовых примеров. Вначале для выяснения принципиальной

возможности идентификации «многозонных» динамических систем с помощью предложенных подходов были рассмотрены задачи восстановления кусочно-линейной правой части для **одного** дифференциального уравнения:  $\dot{x} = a_{0k}x + a_{1k}t + a_{2k}$ ,  $x \in \Omega_k$ ,  $\Omega_1, \dots, \Omega_N \in P_N(\Omega)$ . Исследование проводилось в направлении выявления влияния исходных данных (количества точек наблюдений, начальных значений параметров восстанавливаемых функций) на качество реконструкции динамической системы. Анализ результатов таких вычислительных экспериментов позволил сделать следующие выводы:

1) увеличение количества наблюдений в несколько раз не влияет существенно на качество реконструкции (рис. 7.1);

2) если в наборе наблюдений присутствуют точки переключения, то выборка наблюдений должна содержать точки из разных зон функционирования, количество их зависит от вида функции правых частей;

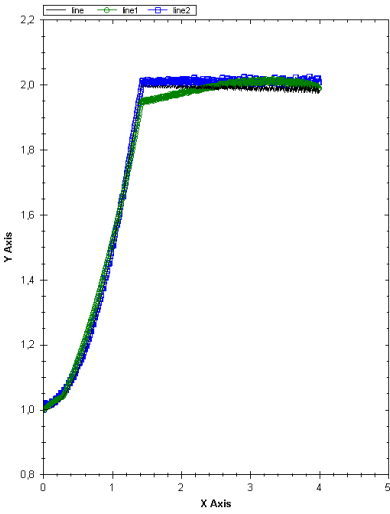
3) если динамическая система характеризуется наличием скользящего режима, то оба подхода позволяют выявить это свойство и восстановить правую часть с удовлетворительной точностью, что отражено на рис. 7.1;

4) при различных начальных приближениях восстанавливаемых параметров можно получить различные их «оптимальные» значения, хотя на качество восстановления фазовой траектории это может не повлиять (рис. 7.2).

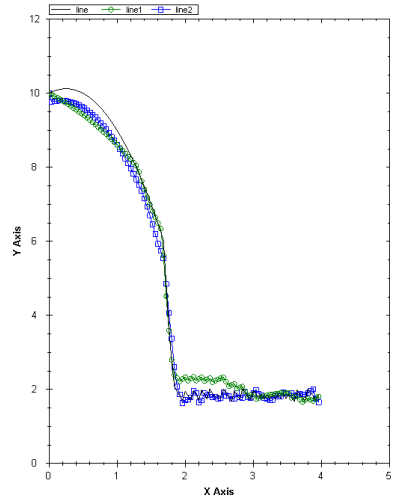
Приведем результаты вычислительных экспериментов восстановления разрывной по фазовой переменной правой части системы **двух** дифференциальных уравнений (7.1.3) с помощью двух предложенных подходов. Проведем их сравнительный анализ.

На рис. 7.3 представлены результаты идентификации двузонной динамической системы (7.1.3), которая описывается кусочно-линейной правой частью. Параметры функций  $\varphi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1t$ , точные и восстановленные по результатам 50 наблюдений с помощью двух предложенных подходов, представлены в табл. 7.1. Как уже отмечалось, такие системы являются моделями процессов функционирования многих технических объектов, описывающихся, вообще говоря, нелинейными системами, но достаточно хорошо представимыми в виде систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переключающимися правыми частями.

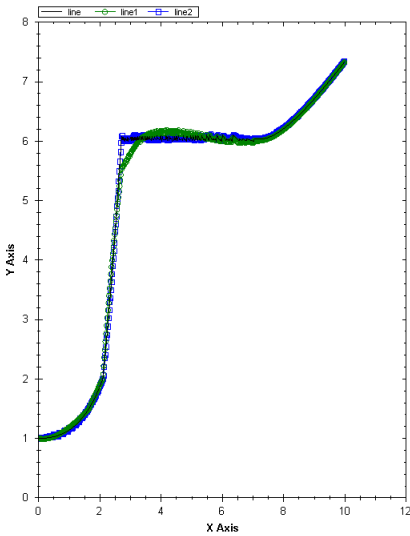




а)  $K = 100$



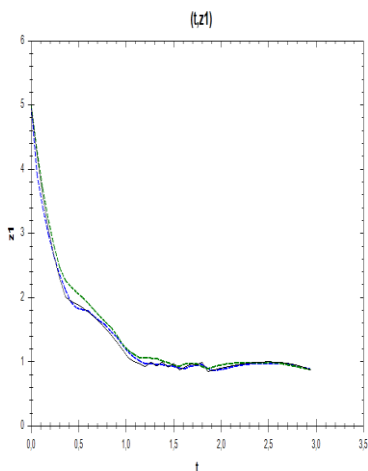
б)  $K = 50$



в)  $K = 100$

**Рис. 7.1. Идентификация «многозонной» одномерной динамической системы по результатам  $K$  наблюдений в случае наличия скользящего режима:**

- а, б – фазовая точка, попадая на границу переключения зон, на этой границе и остается;
- в – фазовая точка со временем выходит из скользящего режима



Точные значения параметров

1,5	-1	1
-1	-4	3
-3	2	1

Параметры, найденные с помощью подхода 1

0)  $a_0=-3,133868$   $a_1=-0,985487$   $a_2=2,772655$   
 1)  $a_0=-2,659884$   $a_1=-0,861191$   $a_2=4,561194$   
 2)  $a_0=-0,551495$   $a_1=0,703823$   $a_2=-1,117926$   
**f=0,072138**

Параметры, найденные с помощью подхода 2

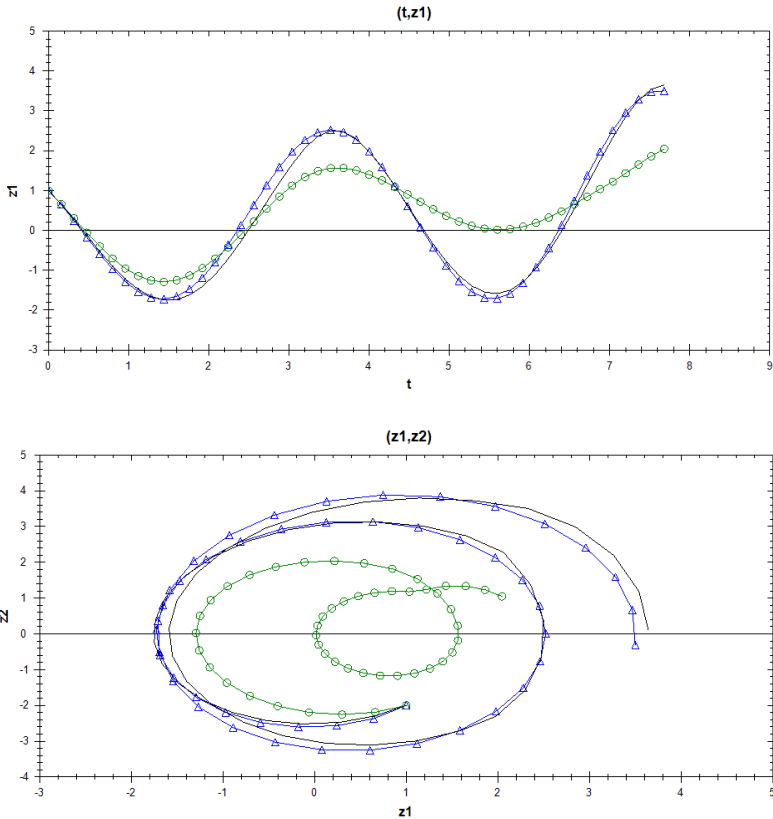
0)  $a_0=-7,567157$   $a_1=-2,607933$   $a_2=9,759653$   
 1)  $a_0=-2,009822$   $a_1=-0,696109$   $a_2=3,680429$   
 2)  $a_0=-3,407517$   $a_1=-0,447647$   $a_2=3,819386$   
**f=0,040175**

**Рис. 7.2. Реконструкция одномерной системы с тремя зонами функционирования (K=50)**

*Таблица 7.1*

**Значения параметров кусочно-линейной функции правой части системы уравнений (7.3), фазовые траектории которой приведены на рис. 7.3**

i	Точные значения параметров функций $\phi_i$	Начальные приближения параметров	Восстановленные значения параметров с помощью подхода, основанного на:	
			численном дифференцировании	минимизации функционала невязки (7.1.8)
1	-2; 0.1; 0.3	0.17; 0.67; 0.151	-3.57; -0.51; 0.845	-1.56; 0.65; 0.2
2	-4; 0.001; 1	-0.10; 0.26; 0.61	-1.9; -0.22; 0.302	-2.29; 0.09; 0.26



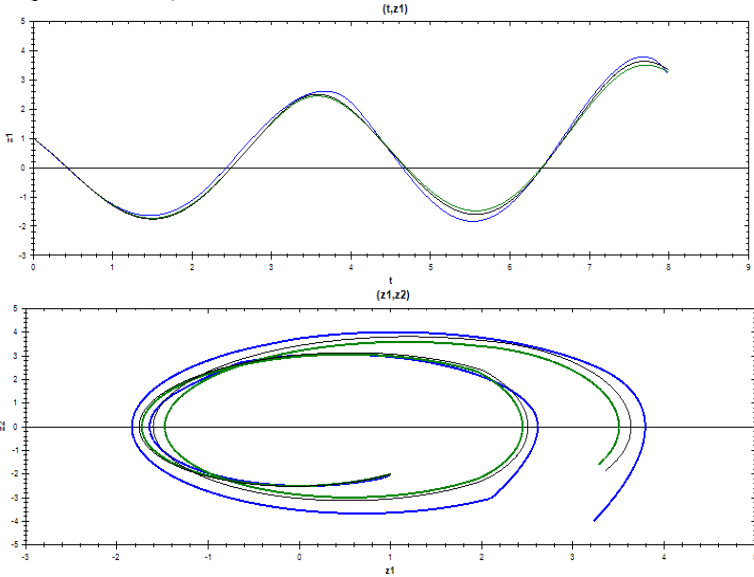
**Рис. 7.3.** Фазовые траектории системы (7.1.3) ( $N = 2$ , граница между зонами  $z_1 = 2$ ), восстановленные с помощью численного дифференцирования (кружки) и подхода 2 (треугольники) по  $K = 50$  наблюдениям

На рис. 7.4 – фазовые траектории той же системы, но восстановленные по результатам 1 000 наблюдений. Анализируя результаты решения этой и других задач реконструкции динамических систем, можно проследить:

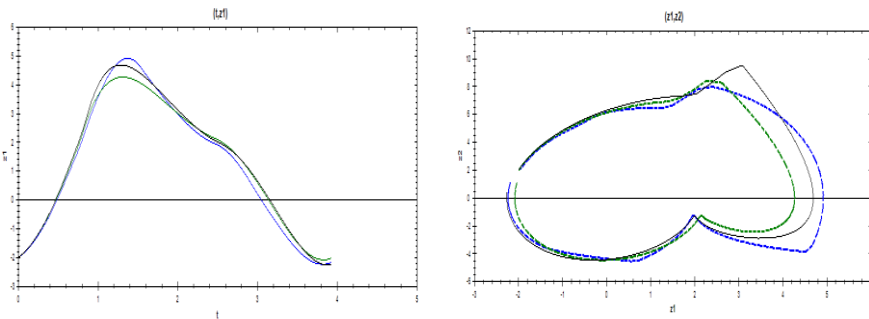
а) неединственность их решений, т. е. значения восстанавливаемых параметров могут существенно отличаться, хотя при этом аппроксимация правой части осуществляется с удовлетворительной точностью (см. табл. 7.1, 7.2). Этот факт не противоречит свойствам обратных задач;

б) границы между зонами функционирования системы с достаточной точностью идентифицируются (рис. 7.5, 7.6, 7.8);

в) при увеличении количества наблюдений качество реконструкции динамической системы с помощью подхода, основанного на численном дифференцировании, улучшается (см. рис. 7.6, 7.7), что не всегда справедливо для подхода, основанного на решении задачи минимизации функционала (7.8) (см. рис. 7.3, 7.4).



**Рис. 7.4. Фазовые траектории системы (7.1.3) ( $N = 2$ , граница между зонами  $z_1 = 2$ ), восстановленные с помощью подходов 1 и 2 по  $K = 1\ 000$  наблюдений**

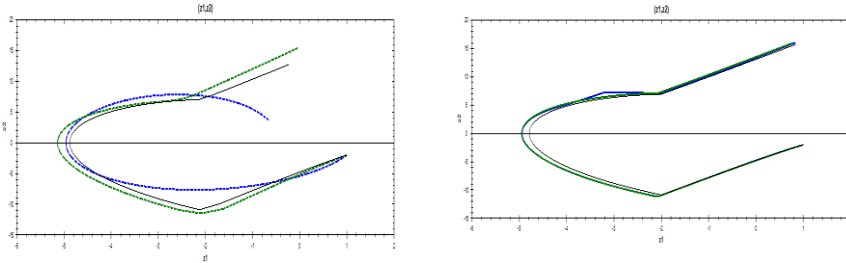


**Рис. 7.5. Восстановленные фазовые траектории двумерной системы (7.1.3) с тремя зонами функционирования**

Таблица 7.2

**Значения параметров кусочно-линейной функции правой части системы уравнений (7.3), фазовые траектории которой приведены на рис. 7.5**

Начальные значения параметров	Параметры, значение функционала, время идентификации системы на основе	
	численного дифференцирования	минимизации функционала (7.1.7)
0) -4, 1, 1 1) 0.3, 2, 3 2) -3, -3, 1	0) $a_0=-4,046023$ $a_1=0,888477$ $a_2=1,101959$ 1) $a_0=19,865915$ $a_1=-1,424852$ $a_2=-15,863411$ 2) $a_0=-3,243961$ $a_1=-2,354104$ $a_2=2,722767$ — $f=0,419061$   time = 3,51 sec	0) $a_0=0,638414$ $a_1=1,533407$ $a_2=2,724003$ 1) $a_0=-4,564860$ $a_1=0,651704$ $a_2=0,243582$ 2) $a_0=-4,564765$ $a_1=0,640050$ $a_2=0,232094$ — $f=0,721968$   time = 50,794 sec



**Рис. 7.6. Реконструкция двумерной системы (7.1.3) с тремя зонами функционирования:** а) число точек наблюдения  $K=50$ ; б) число точек наблюдения  $K=1\ 000$

Также следует отметить, что качество реконструкции динамической системы для обоих подходов зависит от начальных приближений неизвестных параметров. Это объясняется тем, что и в одном, и в другом случае для решения поставленных задач оптимизации применяются методы недифференцируемой оптимизации, сходящиеся в общем случае к локальному минимуму.

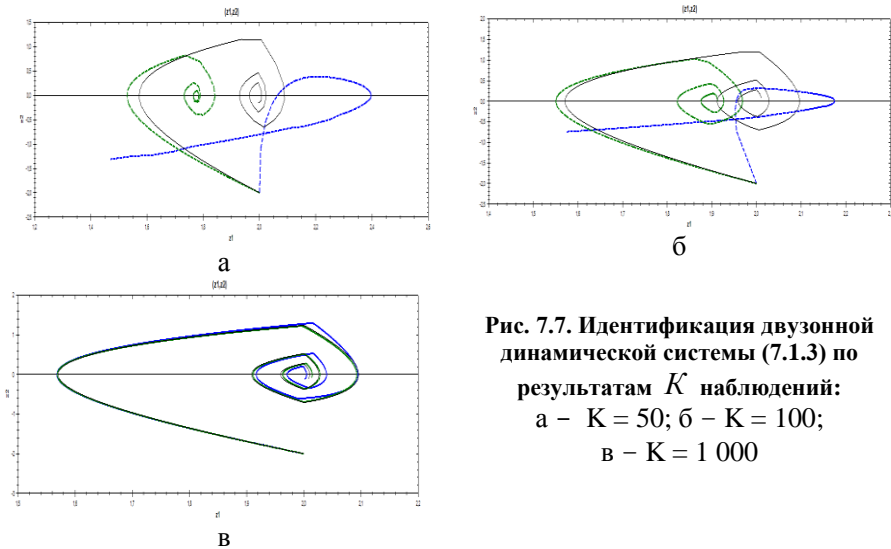
На рис. 7.3 – 7.7 приведены лишь результаты идентификации динамических систем, которые могут быть описаны кусочно-линейной правой частью. Как уже отмечалось, такие системы являются моделями процессов функционирования многих технических объектов, описывающихся, вообще говоря, нелинейными системами, но достаточно хорошо представимыми в виде систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переключающимися правыми частями. Численные же эксперименты проводи-

лись и в случае, когда составляющими правой части системы могли выступать функции квадратичные

$$\phi_i(t, x; \tau_i) = a_1^i x_1 - a_2^i + b^i t;$$

периодические по времени  $\phi_i(t; \tau_i) = b^i \sin(v_i t)$ ;

периодические по фазовой переменной  $\phi_i(x; \tau_i) = a_1^i \sin(a_2^i x_1)$ , параметры которых подлежали определению. Выводы, сделанные при анализе результатов идентификации динамических систем с разрывной нелинейной правой частью дифференциального (векторного) уравнения, идентичны выше изложенным.



**Рис. 7.7. Идентификация двузонной динамической системы (7.1.3) по результатам  $K$  наблюдений:  
а –  $K = 50$ ; б –  $K = 100$ ;  
в –  $K = 1\ 000$**

Оба предложенных подхода к решению задачи идентификации динамической системы, описывающейся системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, требуют проведения дополнительного теоретического обоснования и, в первую очередь, связанного с вопросами регуляризации задач. Предложенный математический аппарат может быть применен для решения задач оптимального управления на множестве состояний функционирования объекта, когда в процессе управления могут изменяться параметры модели динамики, функционала качества и др. Модели и мето-

ды, представленные в данном разделе, в дальнейшем могут быть обобщены на случай:

- наличия задержки в фазовых координатах или управляющих параметрах;

- когда динамика объекта или процесса представлена не наблюдениями одной фазовой координаты, а значениями линейной комбинации нескольких фазовых координат. В этом случае возникает также вопрос о возможности восстановления динамической системы по данным наблюдений;

- перехода к задаче оптимального управления как одного из подходов к решению задач идентификации динамических систем и применения методов теории управления сосредоточенными системами (например, непрямых, основанных на принципе максимума Понтрягина);

- решения задачи идентификации в широком смысле с привлечением теории операторных уравнений наряду с методами оптимального разбиения множеств.

## *7.2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

В данном разделе представлены задачи идентификации границ раздела нескольких разнородных сред по измерениям температуры в неподвижных точках объекта, для решения которых может быть также применен подход, основанный на сведении их к непрерывным динамическим задачам оптимального разбиения множеств и решению последних соответствующими методами.

Обратные задачи теории теплообмена являются одними из наиболее распространенных на практике классов обратных задач. Методы на их основе позволяют проводить исследования нестационарных и нелинейных процессов переноса тепла и тепловых режимов материалов и конструкций, что существенно для современных теплотехнических систем и теплонагруженных конструкций. Многие задачи идентификации и управления для многокомпонентных систем с распределенными параметрами рассмотрены в работах [26, 92].

Приведем далее постановки некоторых геометрических обратных задач теплопроводности, к решению которых предлагается новый подход, основанный на формулировке эквивалентных непрерывных динамических задач оптимального разбиения множеств [93]. Последние, в свою очередь, реду-

550

цируются к задачам минимизации недифференцируемых функций, для решения которых применяется *r-алгоритм* или его модификации.

К обратным задачам, сводящимся в своей математической постановке к непрерывным задачам ОРМ, относятся задачи определения границ фазового перехода или контакта (идеального или неидеального) сред, имеющих различные физические свойства. Неопределенность границы раздела двух или более разнородных сред является характерной особенностью ряда задач теплотехники. Незвестная граница может быть как неизменной по времени, так и перемещающейся по присущему ей закону. При восстановлении закона движения теплообменной границы тела по результатам измерений температуры внутри тела приходится иметь дело с задачами оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами. Примером нестационарной задачи идентификации границы, разделяющей две среды, служит задача оценивания положения и формы фронта кристаллизации в установке для выращивания кристаллов.

Во многих случаях за счет специальных конструктивных мер при разработке датчиков и моделей, а также при выборе условий постановки и проведения эксперимента, можно исследовать теплообменные процессы в элементах конструкции и теплоизоляционных покрытиях на основе одномерного уравнения теплопроводности. Это условие заметно упрощает обработку данных по методам обратных задач, а при определенных условиях даже делает ее более точной. Поэтому изучение возможности применения методов ОРМ к решению геометрических задач теплопроводности проводится на примерах следующих одномерных постановок.

**Задача идентификации точки идеального контакта в двухслойной пластине.** Пусть процесс теплопереноса в теле, представляющем собой совокупность двух пластин с различными теплофизическими характеристиками (рис. 7.9), описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}, & 0 < x < \xi; \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}, & \xi < x < l; \end{cases}, \quad (7.2.1)$$

где  $\rho_j, \lambda_j, c_j$  – заданные величины;  $y_1(x, t)$ ;  $y_2(x, t)$  – температуры соприкасающихся сред,  $x, t \in \Omega_T$ ,

$$\Omega_T = \Omega \times (0, T) \quad (\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 = (0, \xi), \Omega_2 = (\xi, l), 0 < \xi < l < \infty).$$



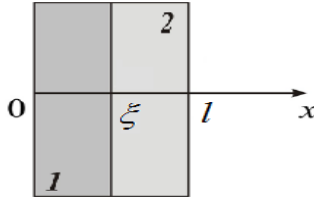


Рис. 7.9. Геометрия задачи (7.2.1) – (7.2.6)

На концах отрезка  $[0, l]$  заданы краевые условия

$$y_1|_{x=0} = u_1, \quad t \in (0, T), \quad (7.2.2)$$

$$y_2|_{x=l} = u_2, \quad t \in (0, T), \quad (7.2.3)$$

$u(\cdot) = u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in C(0, T) \times C(0, T)$  – заданные функции; в точке  $x = \xi$  имеют место условия идеального контакта:

$$y_1(\xi, t) = y_2(\xi, t) \quad t \in (0, T), \quad (7.2.4)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = -\lambda_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi}, \quad t \in (0, T) \quad (7.2.5)$$

Начальное условие имеет вид:

$$y_i|_{t=0} = y_{i0}(x), \quad i = 1, 2, \quad (7.2.6)$$

при  $x \in \bar{\Omega}_1$  и  $x \in \bar{\Omega}_2$  соответственно.

Будем предполагать, что в  $M$  точках  $d_i \in \Omega$  температура известна:

$$y(d_i, t) = f_i(t), \quad t \in (0, T), \quad i = \overline{1, M}. \quad (7.2.7)$$

Задача состоит в определении точки  $\xi$  идеального контакта границы

областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , при которой решение  $y(x, t) = \begin{cases} y_1(x, t), & x \in \bar{\Omega}_1 \\ y_2(x, t), & x \in \bar{\Omega}_2 \end{cases}$  задачи

(7.2.1) – (7.2.6) удовлетворяет равенствам (7.2.7).

Пусть  $P_2(\Omega)$  – класс всех возможных разбиений множества  $\Omega = [0, l]$  на 2 подмножества:

$$P_2(\Omega) = \{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \Omega_2) : \Omega_i \subseteq \Omega, i = \overline{1, 2}; \bigcup_{i=1}^2 \Omega_i = \Omega; \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = \emptyset, i \neq j; i, j = \overline{1, 2} \}.$$

Каждому фиксированному значению  $\xi \in (0, l)$  соответствует некоторое разбиение  $\bar{\omega} \in P_2(\Omega)$ . Условимся решение задачи (7.2.1) – (7.2.6), соответ-

ствующее значению  $\xi \in (0,1)$  (или разбиению  $\bar{\omega} \in P_2(\Omega)$ ), обозначать  $y(\xi; x, t)$  или (при необходимости)  $y(\bar{\omega}; x, t)$ .

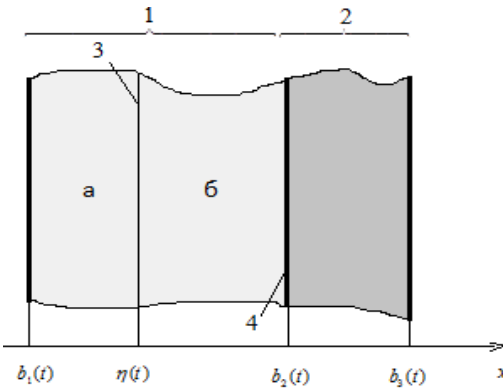
Тогда задача формулируется как непрерывная динамическая задача оптимального разбиения множества: найти такое разбиение  $\bar{\omega} \in P_2(\Omega)$  и соответствующую функцию  $y(\bar{\omega}; x, t)$ , при которых функционал-невязка

$$J(\bar{\omega}, y(\bar{\omega}; \cdot, \cdot)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \int_0^T y(\bar{\omega}; d_i, t) - f_i(t)^2 dt$$

достигал бы минимального значения.

Заметим, что наряду с точкой идеального контакта  $\xi \in (0,1)$  неизвестными могут быть и другие параметры задачи (7.2.1) – (7.2.6), например,  $\rho_j, \lambda_j$  или  $c_j$ .

**Одномерная задача теплопроводности в двухслойной пластине с фазовым переходом [5].** Пусть пластина состоит из двух слоев, материалы которых имеют разные теплофизические характеристики (рис. 7.10) и в одном из них происходит фазовый переход, например, плавление материала.



**Рис. 7.10.** Двухслойная пластина с фазовым переходом: 1, 2 – первый и второй слой; 3 – граница фазового перехода; 4 – линия контакта слоев; а, б – два фазовых состояния материала первого слоя

Границы слоев  $b_1(t), b_2(t), b_3(t)$  могут перемещаться с течением времени вследствие каких-либо физических процессов (уноса массы, температурного расширения или термической усадки материалов, механических деформаций). Подвижным является также и внутренний фронт фазового превращения  $\eta(t)$ .

Температурное поле  $y(x, t)$  в пластине на временном интервале  $t \in (0, T]$  описывается системой уравнений обобщенной теплопроводности

$$C_j \frac{\partial y_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_j \frac{\partial y_j}{\partial x} \right) + K_j \frac{\partial y_j}{\partial x} + S_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.2.8)$$

соответственно в областях  $b_1(t) < x < \eta(t)$ ,  $\eta(t) < x < b_2(t)$ ,  $b_2(t) < x < b_3(t)$ . При этом условиями сопряжения на линиях  $\eta(t)$  и  $b_2(t)$  являются

$$\begin{aligned} y_1(\eta(t) - 0, t) &= y_2(\eta(t) + 0, t), \\ \lambda_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=\eta(t)-0} - \lambda_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=\eta(t)+0} &= r \frac{d\eta}{dt}, \\ y_2(b_2(t) - 0, t) &= y_3(b_2(t) + 0, t) - R\lambda_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=b_2(t)-0}, \\ \lambda_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=b_2(t)-0} &= \lambda_3 \frac{\partial y_3}{\partial x} \Big|_{x=b_2(t)+0}. \end{aligned}$$

Начальные распределения температур имеют вид:

$$y_j(x, 0) = \mu_j(x), \quad j = 1, 2, 3$$

соответственно при  $b_1(t) \leq x \leq \eta(t)$ ,  $\eta(t) \leq x \leq b_2(t)$ ,  $b_2(t) \leq x \leq b_3(t)$ .

В качестве граничных условий могут рассматриваться:

– температуры

$$y_j(b_j(t), t) = Y_j(t), \quad j = 1, 3;$$

– тепловые потоки

$$-\lambda_j \frac{\partial y_j}{\partial x} \Big|_{x=b_j(t)} = q_j(t), \quad j = 1, 3;$$

– ньютоновские условия конвективного теплообмена

$$-\lambda_j \frac{\partial y_j}{\partial x} \Big|_{x=b_j(t)} = \alpha_j \left[ y_j(b_j(t), t) - y_j^*(t) \right], \quad j = 1, 3$$

– другие условия, учитывающие теплообмен тела с окружающей средой путем конвекции и излучения, источник теплоты на поверхности. Возможны также различные комбинации перечисленных граничных условий на линиях  $b_1(t)$ ,  $b_3(t)$ .

Коэффициенты  $C_j, \lambda_j, K_j$  и источники  $S_j$  в общем случае могут быть функциями пространственной или (и) временной координаты. Величины  $\tau, R, \alpha_j$  могут рассматриваться как функции времени.

Задача состоит в идентификации закона движения теплообменной границы тела по результатам измерений температуры в  $M$  неподвижных точках  $d_i$  тела, то есть при дополнительных условиях:

$$y(d_i, t) = f_i(t), \quad t \in (0, T), \quad i = \overline{1, M}.$$

В приведенной постановке задача сводится к непрерывной динамической задаче оптимального разбиения множества с подвижными границами между подмножествами. Для ее решения разработан алгоритм, базирующийся на теории оптимального управления, аппарате сопряженных уравнений математической физики, а также методах ОРМ.

В сформулированной задаче причинными характеристиками, подлежащими определению, могут также выступать объемная теплота фазового превращения  $\tau$ , контактное тепловое сопротивление  $R$ , объемные теплоемкости  $C_j$ , коэффициенты теплопроводности  $\lambda_j$ , конвективные коэффициенты  $K_j$ , другие параметры. В этом случае задача сводится к непрерывной динамической задаче ОРМ с подвижными границами между подмножествами и размещением «центров» этих подмножеств.

Еще одним примером задачи, сводящейся к непрерывной динамической задаче ОРМ, является следующая обратная задача в экстремальной постановке.

**Задача оптимизации теплозащитного пакета** [6]. Пусть пластина состоит из  $N$  слоев разных материалов с известными теплофизическими характеристиками. На одной из внешних границ пластины задан тепловой режим в форме закона Ньютона, другая является теплоизолированной. Требуется найти толщины слоев, обеспечивающих минимум удельной массы пластины при соблюдении заданных ограничений на максимальные температуры в слоях. Математическая модель теплопроводности этой задачи при абсолютных термических контактах слоев запишется следующим образом:

$$C_j \frac{\partial y_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_j \frac{\partial y_j}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in S_j,$$

$$S_j = (x, t) : l_{j-1} < x < l_j; l_0 = 0; 0 \leq t \leq T, \quad j = \overline{1, N}$$

$$y_j(x, 0) = \mu_j(x), \quad j = \overline{1, N},$$

$$y_j(l_j - 0, t) - y_{j+1}(l_j + 0, t) = 0, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$\lambda_j \frac{\partial y_j}{\partial x}(l_j - 0, t) - \lambda_{j+1} \frac{\partial y_{j+1}}{\partial x}(l_j + 0, t) = 0, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$\lambda_1 \frac{\partial y_1}{\partial x}(0, t) + \alpha Y_c - y_1(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial y_N}{\partial x}(l_N, t) = 0,$$

где теплофизические свойства  $C_j$ ,  $\lambda_j$ , начальное распределение температур  $\mu_j(x)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  и температура окружающей среды  $Y_c$  являются известными величинами.

Искомый вектор  $l = l_1, l_2, \dots, l_N$  должен обеспечить минимум величине

$$m = \sum_{j=1}^N \rho_j l_j - l_{j-1},$$

где  $\rho_j$  – плотность  $j$ -го слоя, при ограничениях

$$y_j(l_j, t) \leq y_j^{\lim}, \quad j = \overline{1, N},$$

$$l_j - l_{j-1} > 0, \quad j = \overline{1, N},$$

где  $y_j^{\lim}$  – значения предельно допустимых температур в стыках.

Характерной особенностью этой задачи является неизвестная правая граница последнего слоя, что вызывает необходимость обобщения теории и методов решения непрерывных задач ОРМ на случай неизвестных границ самого разбиваемого множества.

В настоящее время ведутся научные исследования, связанные с теоретическим обоснованием методов и алгоритмов идентификации многокомпонентных динамических систем с применением теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств.

### *7.3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ К ЗАДАЧАМ МНОГОКРАТНОГО ПОКРЫТИЯ*

Еще одним направлением дальнейшего развития теории непрерывных задач ОРМ является разработка на ее основе методов решения задач многократного покрытия, являющихся интересными и важными с прикладной точки зрения [58, 90]. Именно многократное покрытие зон обслуживания используют навигационные системы GPS, Глонасс, разрабатываемая европейская система Галилео [8, 9, 24]. Примером задачи многократного оптимального покрытия является также задача размещения камер противопожарной системы видеонаблюдения за лесными массивами. Как известно, дистанционно управляемая или работающая в автоматическом режиме поворотная видеокамера может поворачиваться на 360 градусов и передавать информацию оператору в режиме реального времени, а, следовательно, можно полагать, что зоной наблюдения отдельной видеокамеры является круг. С целью надежного и точного определения координат возможных очагов возгорания необходимо покрывать такими кругами заданную наблюдаемую область как минимум двукратно.

Задачи  $k$ -кратного покрытия возникают при размещении логистических и распределительных центров, зоной обслуживания которых выступает «круг», такой, что расстояние от центра до потребителя измеряется по существующим дорогам, а не как длина отрезка, соединяющего их. В качестве примеров таких задач оптимального покрытия могут выступать:

- задача размещения центров служб чрезвычайных ситуаций;
- задача размещения пунктов хранения химических реагентов для нефте- или газодобычи, в которой важно разместить эти пункты так, чтобы как можно быстрее доставлять реагенты в нужную точку. Существенным в этой задаче является условие, что если в ближайшем пункте необходимого реагента не окажется в наличии, то желательно, чтобы другой пункт находился не очень далеко. В результате задача состоит в, как минимум, двукратном покрытии заданного множества потребителей зонами обслуживания отдельными центрами хранения реагентов;
- задача размещения банкоматов, которые желательно расположить так, чтобы клиент мог добраться до ближайшего из них как можно быстрее. Аналогично условию предыдущей задачи, если в ближайшем банкомате нет в наличии необходимой суммы, или он не работает по техническим причинам, то желательно, чтобы другой банкомат располагался не слишком далеко.

- задача троекратного оптимального покрытия, возникающая при планировании размещения станций сотовой связи стандарта GSM. При этом предусматривается, что каждый абонент должен находиться в зоне обслуживания, по крайней мере, трех базовых станций. Хотя абонента и обеспечивает связью ближайшая к нему станция, в случае ее перегрузки обслуживание передается другой, менее загруженной станции.

Научная литература, в которой представлены алгоритмы решения задач оптимального многократного покрытия ограниченной части плоскости, не столь многочисленна, как для задач однократного покрытия. В настоящее время разработка и обоснование эффективных методов и алгоритмов решения таких задач активно продолжается.

Далее приведем математические формулировки задач многократного покрытия ограниченной в  $E_n$  области кругами минимального радиуса, используя математический аппарат теории непрерывных задач оптимального покрытия множеств.

Заметим, что при определении расстояний между конкретными объектами можно использовать матрицы расстояний, геоинформационные системы или функции оценки расстояния. Матрицы расстояний и геоинформационные системы сложно использовать для качественного анализа областей обслуживания отдельных станций – ячеек диаграмм Дирихле – Вороного. Поэтому целесообразнее для непрерывных задач многократного покрытия множества использовать функции для оценки расстояния, являющиеся некоторыми метриками в пространстве  $E_n$ , которому принадлежит покрываемое множество. Наиболее часто используются следующие метрики: евклидова, манхэттенская, метрика Чебышева, взвешенная  $l_p$ -метрика, взвешенная  $l_p$ -метрика с возможным поворотом осей координат и другие. Выбор метрики зависит от свойств множества и от существующих связей центра с клиентами.

### Математическая постановка задачи многократного оптимального покрытия

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, замкнутое множество в пространстве  $E_n$ .

Как и в разделе 6.4, **с-шаром** радиуса  $R$  с центром в точке  $\tau_i$  из  $E_n$  будем называть множество вида  $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n: c(x, \tau_i) \leq R\}$ , где  $c(x, \tau_i)$  – некоторая квазиметрика.

Будем говорить, что совокупность центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  задает **k-кратное шаровое покрытие множества  $\Omega$  с радиусом  $R$** , если

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tau_i, R),$$

и для каждой точки  $x \in \Omega$  выполняется условие  $x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, R)$ ,

$i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $k \leq l \leq N$ .

Радиус  $R$   $k$ -кратного покрытия множества  $\Omega$ , которое задается центрами  $\tau_1, \dots, \tau_N$  (вектором  $\tau^N$ ), определяется так:

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (7.3.1)$$

при этом для каждой точки  $x \in \Omega$  выполняется условие  $x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, R)$ ,

$k \leq l \leq N$ ,  $i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , где  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N = E_n^N$  (или, в ча-

стном случае,  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$ ).

$k$ -кратное покрытие множества  $\Omega$ , задаваемое вектором  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ , с радиусом  $R(\tau^N)$ , который определяется по формуле (7.3.1), является **минимальным  $k$ -кратным  $s$ -шаровым покрытием**, генерируемым вектором  $\tau^N$ , то есть никакие  $s$ -шары меньшего радиуса с центрами в точках  $\tau_1, \dots, \tau_N$   $k$ -кратно не покрывают множество  $\Omega$ .

**Определение.**  $k$ -кратное покрытие минимального радиуса называется **оптимальным  $k$ -кратным покрытием**.

Таким образом, для отыскания оптимального  $k$ -кратного покрытия необходимо определить величину радиуса оптимального покрытия

$$R(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i)$$

и вектор  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , на котором достигается значение  $R(\tau_*^N)$  при условии, что для каждой точки  $x \in \Omega$  выполняется включение

$$x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, R), \quad k \leq l \leq N, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

**Задача о поиске радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное  $s$ -шаровое покрытие множества**, может быть формализована математически следующим образом.

Пусть  $\Omega$  – ограниченное, замкнутое множество в пространстве  $E_n$ ,  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  – заданный на множестве  $\Omega$  (или в пространстве  $E_n$ ) набор точек, в



дальнейшем называемых центрами. Будем говорить, что точки  $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$  являются **к-ближайшими соседями точки**  $x \in \Omega$  из заданных  $N$  точек, если

$$\forall j = \overline{1, k} \quad c(x, \tau_{i_j}) < c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}. \quad (7.3.2)$$

В частных случаях, например, когда множество  $\Omega$  имеет симметричную структуру, или центры  $\tau_1, \dots, \tau_N$  размещены в области  $\Omega$  с определенной закономерностью, для некоторых точек  $x \in \Omega$  знак неравенства в (7.3.2) может быть нестрогим, то есть некоторые из заданных центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  могут находиться на одинаковом расстоянии от фиксированной точки  $x \in \Omega$ . Тогда будем считать, что точка  $x \in \Omega$  имеет несколько различных наборов из  $k$ -ближайших соседей. При численной реализации поиска  $k$ -ближайших соседей фиксированной точки  $x \in \Omega$  для однозначности будем полагать, что набор  $k$ -ближайших соседей образуют точки  $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$ , удовлетворяющие следующей системе неравенств:

$$\forall j = \overline{1, k} \quad c(x, \tau_{i_j}) \leq c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

и имеющие наименьшие возможные индексы.

Введем в рассмотрение множество  $\Lambda_N^k$   $N$ -мерных векторов, координаты которых могут принимать значения 0 или 1, причем в каждом таком векторе единиц может быть ровно  $k$ :

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_N : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\}.$$

Очевидно,  $|\Lambda_N^k| = C_N^k$ .

Тогда для каждой точки  $x \in \Omega$   $k$ -ближайших соседей из фиксированного набора точек  $\tau_1, \dots, \tau_N$  можно найти, решая задачу поиска такого вектора  $\lambda(x) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x) \in \Lambda$ , при котором достигается минимальное значение следующей величины:

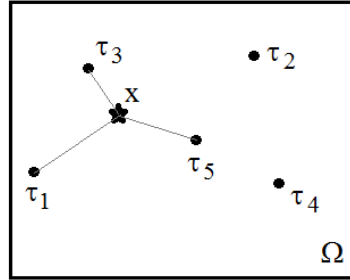
$$C(x) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x). \quad (7.3.3)$$

Покажем это на **примере**. Пусть  $x \in \Omega$  – произвольная фиксированная точка, а расстояние от этой точки до каждого из пяти центров  $\tau_1, \dots, \tau_5$  задано в табл. 7.3:

Таблица 7.3

**Расстояния  $c(x, \tau_i)$  в примере**

№ центра	$c(x, \tau_i)$
1	4
2	6
3	2
4	7
5	3



**Рис. 7. 11. Иллюстрация к примеру**

Множество  $\Lambda_5^3$  состоит из  $C_5^3 = 10$  элементов. В таблице 7.4 представлен процесс вычисления величины  $C(x)$  в соответствии с формулой (задачей) (7.3.3), и выделен вектор  $\hat{\lambda}^*(x)$ , на котором эта величина достигается. Единичные компоненты этого вектора указывают на номера центров, являющихся тремя ближайшими центрами к точке  $x$ .

Таблица 7.4

**Расчет величины  $C(x)$  в примере**

$\lambda(x)$	$\max_{i=1,N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$
(1,1,1,0,0)	$\max(4 \cdot 1, 6 \cdot 1, 2 \cdot 1, 7 \cdot 0, 3 \cdot 0) = 6$
(1,1,0,1,0)	$\max(4 \cdot 1, 6 \cdot 1, 2 \cdot 0, 7 \cdot 1, 3 \cdot 0) = 7$
(1,1,0,0,1)	$\max(4 \cdot 1, 6 \cdot 1, 2 \cdot 0, 7 \cdot 0, 3 \cdot 1) = 6$
(1,0,1,1,0)	$\max(4 \cdot 1, 6 \cdot 0, 2 \cdot 1, 7 \cdot 1, 3 \cdot 0) = 7$
<b>(1,0,1,0,1)</b>	$\max(4 \cdot 1, 6 \cdot 0, 2 \cdot 1, 7 \cdot 0, 3 \cdot 1) = 4$
(0,1,1,1,0)	$\max(4 \cdot 0, 6 \cdot 1, 2 \cdot 1, 7 \cdot 1, 3 \cdot 0) = 7$
(0,1,1,0,1)	$\max(4 \cdot 0, 6 \cdot 1, 2 \cdot 1, 7 \cdot 0, 3 \cdot 1) = 6$
(0,0,1,1,1)	$\max(4 \cdot 0, 6 \cdot 0, 2 \cdot 1, 7 \cdot 1, 3 \cdot 1) = 7$
(1,0,0,1,1)	$\max(4 \cdot 1, 6 \cdot 0, 2 \cdot 0, 7 \cdot 1, 3 \cdot 1) = 7$
(0,1,0,1,1)	$\max(4 \cdot 0, 6 \cdot 1, 2 \cdot 0, 7 \cdot 1, 3 \cdot 1) = 7$
$C(x) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda^k} \max_{i=1,N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$	4

Таким образом, можно считать, что на множестве  $\Omega$  определена вектор-функция  $\lambda(\cdot)$  со значениями в

$$\hat{\Lambda} = \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \lambda(x) \in \Lambda_N^k \quad \forall x \in \Omega,$$

так что для каждой точки  $x \in \Omega$  компонента  $\lambda_i(x)$  этой вектор-функции равна 1 тогда и только тогда, когда центр  $\tau_i$  считается одним из  $k$ -возможных «соседей» этой точки. Если же вектор  $\lambda(x)$  таков, что на нем достигается величина  $C(x)$ , то он будет соответствовать **ближайшим к точке  $x$   $k$ -соседям**. Эту величину  $C(x)$  и будем считать радиусом кругов с центрами  $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$ , покрывающим  $k$ -кратно точку  $x$ . Индексы этих центров совпадают с индексами единичных компонент вектора  $\lambda(x)$ . Если среди всех величин  $C(x)$ ,  $x \in \Omega$ , выбрать наибольшую, то эта величина и будет определять радиус кругов с центрами в точках  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , покрывающих  $k$ -кратно множество  $\Omega$ .

Итак, **задача о поиске радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное  $s$ -шаровое покрытие множества** состоит в отыскании величины

$$R = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

**Задача о минимальном  $k$ -кратном  $s$ -шаровом покрытии с размещением центров шаров математически** может быть сформулирована так:

Требуется найти величину

$$R(\lambda^*(\cdot), \tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x), \quad (7.3.4)$$

где

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_N : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\},$$

а также вектор-функцию  $\lambda^*(x) \in \Lambda_N^k \quad \forall x \in \Omega$ , и вектор  $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_n^N$ , при которых в (7.3.4) достигается нижняя грань.

Если в задаче (7.3.4) не интересоваться, какими именно  $s$ -шарами покрывается каждая точка  $x \in \Omega$ , то вектор-функцию  $\lambda^*(\cdot)$  слева в равенстве (7.3.4) можно опустить. В таком случае вектор-функция  $\lambda(\cdot)$  используется лишь для упрощения записи (для конструктивной записи) математической модели задачи и является промежуточным результатом.

Частными случаями приведенных двух задач о  $k$ -кратном  $s$ -шаровом покрытии множества или их обобщениях являются следующие постановки.

**Задача 1 (задача  $k$ -кратного покрытия заданного множества из  $E_n$  с фиксированными центрами).** Для заданной системы центров  $(\tau_1, \dots, \tau_N)$  из

$E_n^N$  (или из  $\Omega^N$ ) найти минимальное  $k$ -кратное  $s$ -шаровое покрытие множества  $\Omega$ .

Математически задача сводится к отысканию величины (7.3.1).

Предполагая, что координаты центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  неизвестны заранее и требуя их размещения в множестве  $\Omega$  так, чтобы получить  $k$ -кратное  $s$ -шаровое покрытие минимального радиуса, можно сформулировать следующую задачу об оптимальном  $k$ -кратном покрытии.

**Задача 2 (задача об оптимальном ограниченном  $k$ -кратном  $s$ -шаровом покрытии).** При заданном количестве  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  найти такое их размещение в области  $\Omega$ , которое генерирует  $k$ -кратное покрытие множества  $\Omega$  с минимальным радиусом.

Если предположить, что центры  $\tau_1, \dots, \tau_N$  могут располагаться не только в множестве  $\Omega$ , но и во всем пространстве  $E_n$ , то можно сформулировать следующую задачу.

**Задача 3 (задача об оптимальном  $k$ -кратном  $s$ -шаровом покрытии).** При заданном количестве  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  найти такое их размещение в  $E_n$ , которое генерирует  $k$ -кратное покрытие множества  $\Omega$  с минимальным радиусом.

В предположении о том, что количество  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  может не быть заданным наперед, можно также сформулировать следующую задачу о нахождении минимальной по количеству совокупности центров  $k$ -кратного покрытия.

**Задача 4.** При заданном радиусе покрытия  $R$  найти минимальную по количеству  $N$  совокупность центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , генерирующую  $k$ -кратное покрытие множества  $\Omega$ .

### **Конструктивные алгоритмы решения некоторых задач многократного покрытия заданного множества**

Представим здесь приближенный алгоритм решения задачи о поиске радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное  $s$ -шаровое покрытие множества, а также алгоритм решения задачи о минимальном  $k$ -кратном  $s$ -шаровом покрытии с размещением центров шаров. Приведем и проанализируем результаты некоторых вычислительных экспериментов. Наметим основные направления дальнейших теоретических исследований непрерывных задач многократного покрытия.

Для решения задачи об отыскании радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное  $s$ -шаровое покрытие заданного множества  $\Omega$  предложены два подхода.

**Первый подход** реализует математическую модель задачи, переформулированную следующим образом: пусть  $\bar{I}$  – множество всех сочетаний из  $N$  элементов по  $k$  элементов, то есть множество всех возможных индексов  $k$  центров, зоны наблюдения которых могут одновременно покрывать любую точку множества  $\Omega$ . Обозначим  $I_m$  – элемент множества  $\bar{I}$ . Очевидно,  $|\bar{I}| = C_N^k$ . Требуется найти величину

$$R = \sup_{x \in \Omega} \min_{I_m \in \bar{I}} \max_{i \in I_m} c(x, \tau_i). \quad (7.3.5)$$

Для реализации формулы (7.3.5) множество  $\Omega$  покрывается прямоугольной сеткой. Обозначим  $\tilde{\Omega}$  множество всех узлов сетки. Приближенное значение искомого радиуса вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{R} = \sup_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{I_m \in \bar{I}} \max_{i \in I_m} c(x, \tau_i).$$

**Второй подход** разработан с использованием алгоритмов сортировки массива расстояний от фиксированной точки  $x \in \Omega$  до заданных центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$ .

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи (7.3.1) или (7.3.3) о поиске радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное  $c$ -шаровое покрытие заданного множества  $\Omega$  из  $E_n$ . Для этого область  $\Omega$  заключим в  $n$ -мерный параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, вводя вспомогательную функцию  $\rho(x)$ , определенную на  $\Pi$ , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда в задаче (7.3.1) под функцией  $c(x, \tau_i)$  будет пониматься функция  $c(x, \tau_i) \cdot \rho(x)$ , определенная на  $\Pi$  и совпадающая с  $c(x, \tau_i)$  на  $\Omega$ .

### Алгоритм 7.1

**Предварительный этап.** Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой с шагом  $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$ ; обозначим  $\tilde{\Pi}$  – множество узлов сетки. Задаем положение центров покрытия  $\tau = \tau^1, \dots, \tau^N$ .

**Шаг 1.** Для каждой точки  $x$  сетки  $\tilde{\Pi}$  строим массив расстояний от этой точки до всех центров:  $D(x) = (c(x, \tau_1), c(x, \tau_2), \dots, c(x, \tau_N))$ .

**Шаг 2.** Полученный массив расстояний  $D(x)$  сортируем по возрастанию элементов.

**Шаг 3.** В каждом отсортированном массиве отбираем элемент, стоящий на  $k$ -м месте (с порядковым номером  $k$ ), обозначим этот элемент  $c^k(x, \tau_{i_k})$ .

**Шаг 4.** Среди всех отобранных элементов находим наибольший:

$$\tilde{R} = \max_{x \in \Gamma} c^k(x, \tau_{i_k}).$$

Полученное максимальное значение и является приближенным значением радиуса окружностей с центрами в точках  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , которые  $k$ -кратно покрывают множество  $\Omega$ .

Очевидно, на одинаковых пространственных сетках численные алгоритмы, реализующие оба подхода, дают одинаковые результаты. Время же работы алгоритма 7.1 значительно меньше времени, за которое вычисляется радиус шаров с заданными центрами,  $k$ -кратно покрывающими множество  $\Omega$ . Для подтверждения этого факта в табл. 7.5 приведено время работы алгоритмов при решении задачи поиска радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное  $c$ -шаровое покрытие единичного квадрата  $\Omega = 0,1 \times 0,1$  в случае, когда шаг разбиения  $\Delta h_j = 0.005$ ,  $i = 1, 2$ .

*Таблица 7.5*

**Зависимость времени работы алгоритмов от количества центров  $N$   
и кратности покрытия  $k$**

Входные данные		Время работы алгоритмов, реализующих	
$N$	$k$	первый подход	второй подход
4	2	2,2784	0,1822
9	2	6,3777	0,3108
14	3	36,0772	0,4286
20	4	651,0002	0,9246
25	3	276,2283	0,7917

Учитывая указанное временное преимущество алгоритма 7.1, именно его будем в дальнейшем использовать при разработке одного из возможных алгоритмов решения задачи о минимальном  $k$ -кратном  $c$ -шаровом покрытии с размещением центров шаров.

*Алгоритм оптимального многократного покрытия множества,  
основанный на использовании  $r$ -алгоритма. Шора*

Представим здесь один из возможных численных алгоритмов решения задачи (7.3.4) об оптимальном  $k$ -кратном покрытии – отыскания координат

центров  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  и значения радиуса покрытия  $R(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ , минимизирующих целевую функцию

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x),$$

где

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_N : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\},$$

в предположении, что покрываемое множество имеет простую структуру.

Поскольку функция  $R(\tau)$  недифференцируема, для решения задачи (7.3.4) будем использовать метод проекции обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательно обобщенных градиентов (г-алгоритм Н. З. Шора [109]).

$i$ -ю компоненту  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_R(\tau^N) = (g^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (7.3.6)$$

функции  $R(\tau^N)$  в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  будем вычислять с применением формул численного дифференцирования:

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = (g_1^{\tau_j}(\tau^N), g_2^{\tau_j}(\tau^N), \dots, g_n^{\tau_j}(\tau^N)), \quad (7.3.7)$$

где  $s$ -я компонента вычисляется приближенно по следующей формуле:

$$g_s^{\tau_j}(\tau^N) = \frac{R(\tau_1, \dots, (\tau_j^{(l)}, \dots, \tau_j^{(s)} + \Delta, \dots, \tau_j^{(n)}), \dots, \tau_N) - R(\tau_1, \dots, (\tau_j^{(l)}, \dots, \tau_j^{(s)}, \dots, \tau_j^{(n)}), \dots, \tau_N)}{\Delta},$$

$s = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, N}.$

Сформулируем алгоритм решения задачи оптимального многократного покрытия единичного  $n$ -мерного куба  $\Omega = \underbrace{0,1 \times 0,1 \times \dots \times 0,1}_n$ .

Для упрощения обозначений в алгоритме вектор  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  обозначим через  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ .

### Алгоритм 7.2

**Предварительный этап.** Куб  $\Omega$  покрываем прямоугольной сеткой с шагом  $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$ . Множество узлов прямоугольной сетки на множестве  $\Omega$  обозначим  $\tilde{\Omega}$ . Задаем шаг численного дифференцирования  $\Delta$ . Задаем начальное положение центров покрытия  $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ .

Вычисляем по этим центрам величину

$$R(\tau^{(0)}) = \sup_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(0)}) \lambda_i(x),$$

используя алгоритм **7.1** решения задачи поиска радиуса  $N$  кругов, образующих  $k$ -кратное  $c$ -шаровое покрытие заданного множества  $\Omega$ .

По формулам (7.3.6), (7.3.7) вычисляем вектор-градиент  $g_R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  в точке  $\tau^{(0)}$ , выбираем начальный пробный шаг  $r$ -алгоритма  $h_0 > 0$ .

**Первый шаг** алгоритма проводим по формуле:

$$\tau^{(1)} = P_{\Omega}(\tau^{(0)} - h_0 \cdot g_R(\tau^{(0)})),$$

$P_{\Omega}$  – оператор проектирования на множество  $\Omega$ .

Переходим ко **второму шагу**.

Пусть в результате вычислений после  $m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получен определенный вектор  $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$ .

Опишем **(m+1)-й шаг** алгоритма.

1. По центрам  $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$  с помощью алгоритма **7.1** находим величину

$$R(\tau^{(m)}) = \sup_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(m)}) \lambda_i(x).$$

2. Вычисляем значения  $g^R(\tau)$  по формулам (7.3.6), (7.3.7) при  $\tau = \tau^{(m)}$ .

3. Проводим **(m+1)-й шаг**  $r$ -алгоритма в  $H$ -форме [109], итерационная формула которого имеет вид:

$$\tau^{(m+1)} = P_{\Pi} \left( \tau^{(m)} - h_m \frac{H_{m+1} g_R(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_R(\tau^{(m)}), g_R(\tau^{(m)})}} \right),$$

где  $H_{m+1}$  – матрица растяжения пространства с коэффициентом  $\alpha$  (его целесообразно брать равным 3) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид:

$$H_{m+1} = H_m + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_m \xi_m \xi_m^T H_m}{(H_m \xi_m, \xi_m)},$$

$$\xi_m = g_R(\tau^{(m)}) - g_R(\tau^{(m-1)}).$$

Если из-за округлений счета  $H_{m+1}$  перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.



Шаг  $h_m$  выбираем из условия:

$$\min_{h>0} R \left( \tau^{(m)} - h \frac{H_{m+1} g_R(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_R(\tau^{(m)}), g_R(\tau^{(m)}))}} \right).$$

4. Если условие

$$\|\tau^{m+1} - \tau^m\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{7.3.8}$$

не выполняется, переходим к  $(m+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем  $\tau_* = \tau^{(l)}$ , где  $l$  – номер итерации, на которой выполнилось условие (7.3.8) завершения работы алгоритма.

6. Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле:

$$R(\tau_*) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_{*i}) \lambda_i(x)$$

с помощью алгоритма **7.1**.

Алгоритм **7.2** описан.

Приведем результаты вычислительных экспериментов по многократному покрытию единичного квадрата из  $E_2$  с помощью алгоритма **7.2**.

Вначале работу алгоритма продемонстрируем на примере решения задачи однократного покрытия указанного множества. На рис. 7.11–7.16 изображены оптимальные покрытия единичного квадрата, полученные с заданной точностью  $\varepsilon=0.0001$  алгоритмом **7.2**, для  $N = 2, 3, 4, 8, 11, 15$ . В табл. 7.6 приведены минимальные радиусы однократного покрытия в задаче (7.3.4) для соответствующих значений  $N$ , полученные с заданной точностью алгоритмом **7.2**, в сравнении с оптимальными решениями, полученными с помощью алгоритма, описанного в разделе 6.4.

Отметим, что результаты, полученные алгоритмом **7.2** для указанных значений  $N$ , согласуются с результатами, описанными в работах [7, 18, 87]. Незначительное расхождение в оптимальных значениях радиусов покрытия объясняется, прежде всего, погрешностью алгоритма (приближенное вычисление компонент обобщенного градиента целевой функции, дискретизация области и т. п.), а также вычислительной погрешностью.

Заметим также, что результаты приведенных ниже и других вычислительных экспериментов по численному решению задачи (7.3.4) об оптимальном многократном  $s$ -шаровом покрытии свидетельствуют о наличии свойства многоэкстремальности целевой функции задачи. Из различных начальных приближений набора центров  $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$  можно прийти к различным локальным решениям задачи (7.3.4).

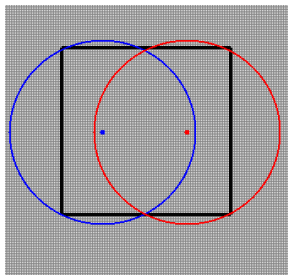


Рис. 7.11. Оптимальное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.2:  $\|x\| = \|x\|_2$ ,  $N=2$

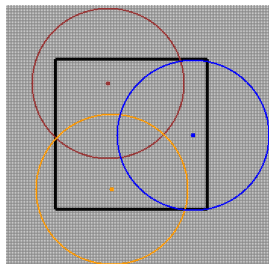


Рис. 7.12. Оптимальное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.2:  $\|x\| = \|x\|_2$ ,  $N=3$

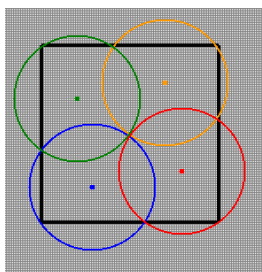


Рис. 7.13. Оптимальное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.2:  $\|x\| = \|x\|_2$ ,  $N=4$

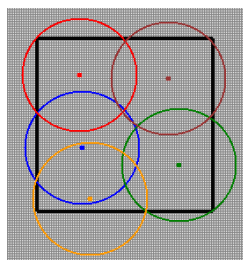


Рис. 7.14. Оптимальное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.2:  $\|x\| = \|x\|_2$ ,  $N=5$

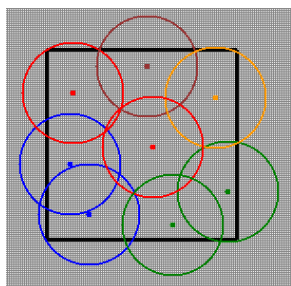


Рис. 7.15. Оптимальное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.2:  $\|x\| = \|x\|_2$ ,  $N=8$

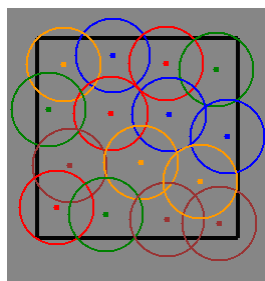
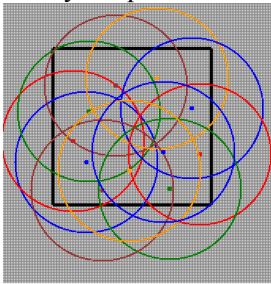


Рис. 7.16. Оптимальное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.2:  $\|x\| = \|x\|_2$ ,  $N=15$

Минимальный радиус однократного покрытия единичного квадрата, полученный с помощью алгоритма 7.2 и алгоритма п. 6.4

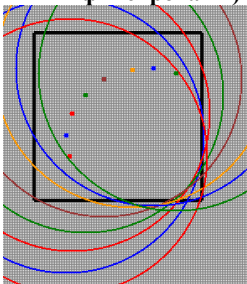
N	R( $\tau_*$ ) (алгоритм 7.2)	R( $\tau_*$ ) (алгоритм 6.4)	N	R( $\tau_*$ ) (алгоритм 7.2)	R( $\tau_*$ ) (алгоритм 6.4)
2	0,5545	0,5599	9	0,2500	0,2339
3	0,5022	0,5033	10	0,2328	0,2186
4	0,3541	0,3536	11	0,2236	0,2125
5	0,3233	0,3266	12	0,2191	0,2068
6	0,3162	0,3001	13	0,2166	0,1956
7	0,2926	0,2596	14	0,2070	0,1859
8	0,265	0,2596	15	0,1892	0,1807

На рис. 7.17 – 7.26 представлены результаты работы алгоритма 7.2 по многократному покрытию того же единичного квадрата.



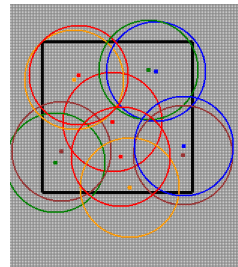
R = 0,454587725307229

Рис. 7.17. 2-кратное покрытие единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=11, полученное алгоритмом 7.1 (центры фиксированы)



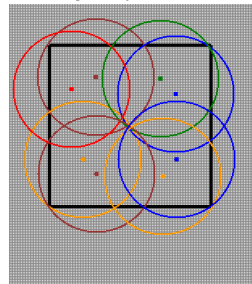
R = 0,823786987030022

Рис. 7.19. 2-кратное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.1,  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=8



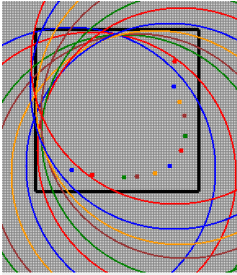
R = 0,334439830163814

Рис. 7.18. Оптимальное 2-кратное покрытие единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=11, полученное алгоритмом 7.2



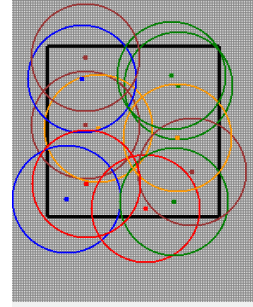
R = 0,36200828719796

Рис. 7.20. Оптимальное 2-кратное покрытие квадрата, полученное алгоритмом 7.2,  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=8



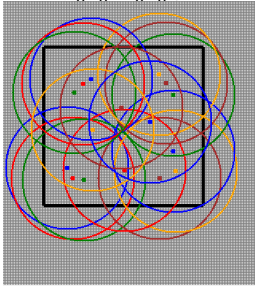
R = 0,882850496969901

Рис. 7.21. 2-кратное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.1,  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=12



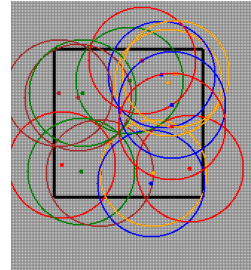
R = 0,318276609256792

Рис. 7.22. Оптимальное 2-кратное покрытие квадрата, полученное алгоритмом 7.2,  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=12



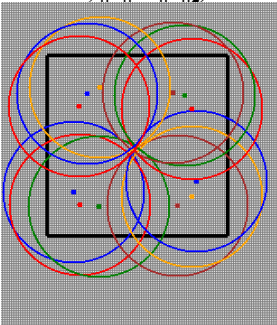
R = 0,389133653132186

Рис. 7.23. 3-кратное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.1,  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=16



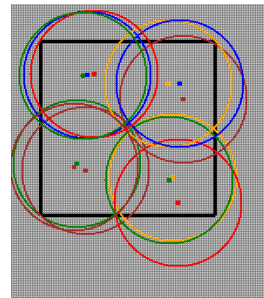
R = 0,364485939372152

Рис. 7.24. Оптимальное 3-кратное покрытие квадрата, полученное алгоритмом 7.2,  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=16



R = 0,390512483795333

Рис. 7.25. 3-кратное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 7.1,  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=12



R = 0,369120576505836

Рис. 7.26. Оптимальное 3-кратное покрытие квадрата, полученное алгоритмом 7.2,  $\|x\| = \|x\|_2$ , N=12

Предложенный алгоритм, хотя и может быть применен к решению задач об оптимальном многократном покрытии заданного множества (о чем свидетельствуют приведенные выше результаты вычислительных экспериментов), имеет ряд существенных недостатков. И это, прежде всего, зависимость результатов вычислений (величины минимального радиуса шарового покрытия) от исходных данных – начального приближения координат центров, величины шага пространственной сетки, величины шага численного дифференцирования при вычислении компонент обобщенного градиента. Серия вычислительных экспериментов показывает, что для получения радиуса покрытия, близкого к оптимальному радиусу, величину шага численного дифференцирования  $\Delta$  нужно согласовывать с шагом дискретизации области, с количеством центров и кратностью покрытия.

Для устранения этого недостатка алгоритма можно воспользоваться некоторыми элементами теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Так, например, при вычислении компонент обобщенного градиента целевой функции задачи (7.3.4) можно использовать  $k$ -кратную диаграмму Вороного, построенную с помощью методов ОРМ, по аналогии с алгоритмом решения задачи оптимального однократного покрытия, приведенного в разделе 6.4.

Результаты решения некоторых задач оптимального многократного покрытия свидетельствуют также о том, что при определенных значениях  $N$  и  $k$  оптимальное расположение центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  таково, что несколько центров могут быть расположены очень близко друг к другу (см. рис. 7.18, 7.26), что на практике не всегда реализуемо. Поэтому целевая функция задачи (7.3.4) должна быть расширена некоторым регуляризирующим слагаемым, отвечающим за невозможность слияния центров.

Дальнейшие исследования моделей и методов решения задач многократного покрытия множества включают:

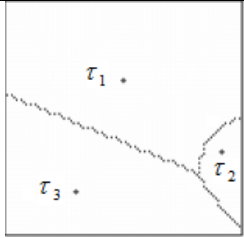
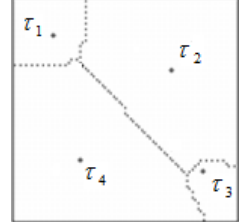
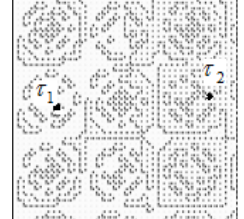
- построение и уточнение математических моделей непрерывных задач многократного покрытия множеств;
- выявление свойств математических моделей непрерывных задач многократного покрытия множеств, условий существования их решения;
- обоснование методов решения непрерывных задач многократного покрытия множества, которые базируются на **теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств**;
- разработку алгоритмов решения задач  $k$ -кратного ( $k > 1$ ) покрытия заданных множеств, аналогичных задачам 1 – 4, **на основе методов оптимального разбиения множеств**;

- оценку точности разработанных алгоритмов;
- разработку рекомендаций относительно выбора функций метрики, подбора ее параметров для отдельных типов станций обслуживания; исследование свойств диаграмм Дирихле – Вороного для выбранной метрики в задачах  $k$ -кратного покрытия;
- разработку программного комплекса для решения задач многократного покрытия, включая осуществление подбора функции метрики и ее параметров для заданных множеств с использованием электронных карт или матриц расстояний.

Таблица 3.2

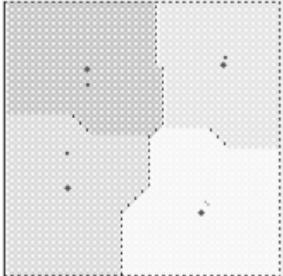
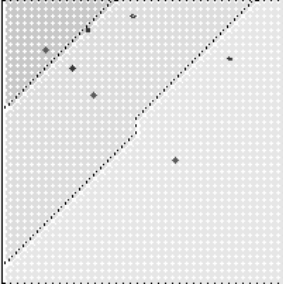
## Результаты вычислительных экспериментов

№ теста	Функция $\rho_0(x)$ ; вектор $b$ ; Начальные приближения центров	Значение функционалов $I_1$ и $\chi$	Оптимальные значения координат центров	Оптимальное разбиение
1	2	3	4	5
1	$\rho_0(x) = 4;$ $b_1 = 50; b_2 = 50.$ $\tau_1 = (0.0, 0.25)$ $\tau_2 = (0.0, 0.79)$	$\chi^* = 3.2.31560$ $I_1^* = 3.2.3159$	$\tau_1 = (0.443, 0.251)$ $\tau_2 = (0.504, 0.75)$	
2	$\rho_0(x) = 1;$ $b_0 = 50, b_1 = 50.$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3),$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2),$	$\chi^* = 0.59771$ $I_1^* = 0.59820$	$\tau_1 = (0.265, 0.509)$ $\tau_2 = (0.767, 0.519)$	

1	2	3	4	5
3	$\rho_0(x, y) = 3;$ $b_1 = 20; b_2 = 0.7; b_3 = 2.0.$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3),$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2),$ $\tau_3^{(0)} = (0.0, 0.0)$	$\chi^* = \mathbf{1.8772}$ $I_1^* = \mathbf{1.8753}$	$\tau_1 = (0.497, 0.335)$ $\tau_2 = (0.911, 0.641)$ $\tau_3 = (0.299, 0.811)$	
4	$\rho_0(x, y) = 3;$ $b_1 = 0.6;$ $b_2 = 10$ $b_3 = 0.4$ $b_4 = 10.$	$\chi^* = \mathbf{0.56505}$ $I_1^* = \mathbf{0.56523}$	$\tau_1 = (0.178, 0.169)$ $\tau_2 = (0.704, 0.324)$ $\tau_3 = (0.844, 0.772)$ $\tau_4 = (0.295, 0.724)$	
5	$\rho_0 = \sin(0.5xy) + 1;$ $b_1 = 50; b_2 = 50.$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3),$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2)$	$\chi^* = \mathbf{0.49994}$ $I_1^* = \mathbf{0.50014}$	$\tau_1 = (0.197, 0.523)$ $\tau_2 = (0.876, 0.432)$	



Продолжение таблицы 3.2

1	2	3	4	5
6	$\rho_0(x, y) = 10;$ $b_1 = 50;$ $b_2 = 50$ $b_3 = 100$ $b_4 = 20$	$\chi^* = \mathbf{13.2.495}$ $I_1^* = \mathbf{13.2.491}$	$\tau_1 = (0.296, 0.242)$ $\tau_2 = (0.709, 0.226)$ $\tau_3 = (0.225, 0.678)$ $\tau_4 = (0.710, 0.768)$	
7	$\rho_0(x, y) = 3;$ $b_1 = 0.8; b_2 = 10;$ $b_3 = 4; b_4 = 0$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3),$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2), \tau_3^{(0)} = (0.1, 0.5)$ $\tau_4^{(0)} = (0.245, 0.235)$	$\chi^* = \mathbf{3.2.45119}$ $I_1^* = \mathbf{3.2.44955}$	$\tau_1 = (0.153, 0.174)$ $\tau_2 = (0.614, 0.565)$ $\tau_3 = (0.321, 0.330)$ $\tau_4 = (0.245, 0.235)$	

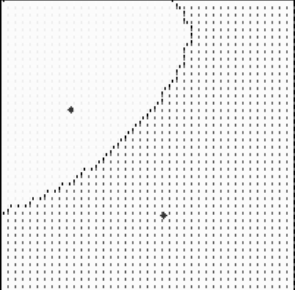
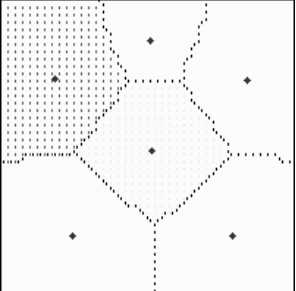
1	2	3	4	5
8	$\rho_0(x, y) = 500;$ $b_0 = 300,$ $b_1 = 400.$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3),$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2),$	$\chi^* = \mathbf{82730.1}$ $I_1^* = \mathbf{80584.5}$	$\tau_1 = (0.238, 0.374)$ $\tau_2 = (0.550, 0.733)$	
9	$\rho_0(x, y) = 1;$ $b_0 = 0.9, b_1 = 0.5,$ $b_2 = 0.2, b_3 = 1,$ $b_4 = 2.2, b_5 = 1.5.$	$\chi^* = \mathbf{0.04618}$ $I_1^* = \mathbf{0.04626}$	$\tau_1 = (0.514, 0.510)$ $\tau_2 = (0.184, 0.267)$ $\tau_3 = (0.506, 0.138)$ $\tau_4 = (0.836, 0.271)$ $\tau_5 = (0.786, 0.804)$ $\tau_6 = (0.242, 0.803)$	

Таблица 3.3.

**Зависимость оптимального значения функционалов динамических задач ОРМ от размера сетки, которой покрывается разбиваемое множество при реализации численных алгоритмов**

Размер сетки	Динамическая задача ОРМ с интегральными фазовыми ограничениями		Динамическая задача ОРМ с размещением центров подмножеств	
	оптимальное значение функционала	отклонение от среднего значения	оптимальное значение функционала	отклонение от среднего значения
0.1	0.686796387	0.015843	0.595768546	-0.00238
0.05	0.674250026	0.003297	0.598191892	4.8E-05
0.04	0.671850487	0.000897	0.598291384	0.000148
0.025	0.668235669	-0.00272	0.598198180	5.43E-05
0.02	0.667071988	-0.00388	0.598889277	0.000745
0.01	0.664791837	-0.00616	0.598776319	0.000632
0.005	0.663677356	-0.00728	0.598891430	0.000748

Таблица 3.4

Оптимальное динамическое разбиение в модельной задаче 1

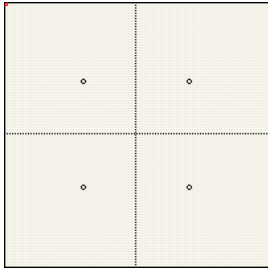
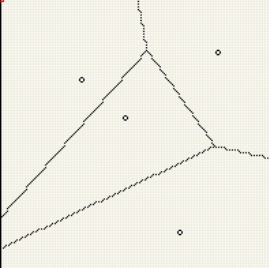
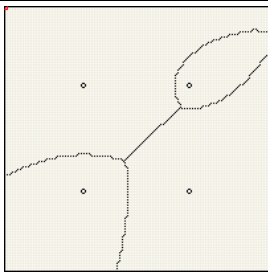

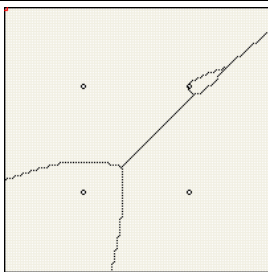

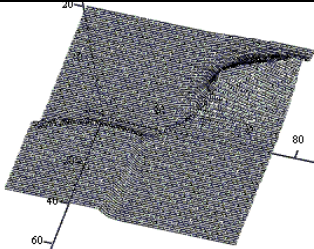
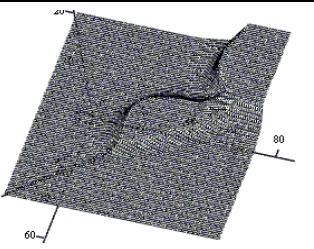
Момент времени	а	б
t = 0		
t = 12		
t = 25		
$\rho(x, T)$		
Функционал	3,5330091146322	3,84445682901021

Таблица 3.5

## Оптимальное динамическое разбиение в модельной задаче 2

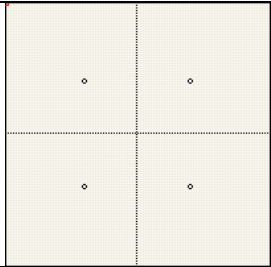
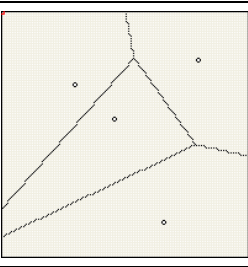
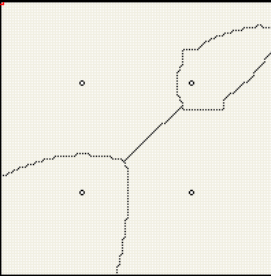
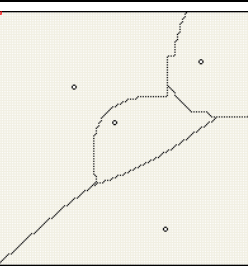
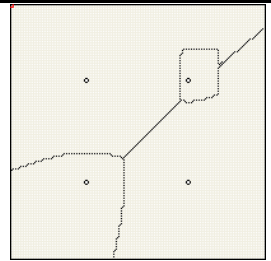
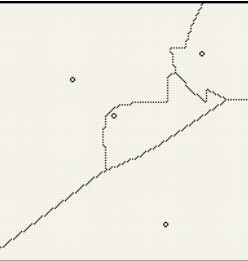
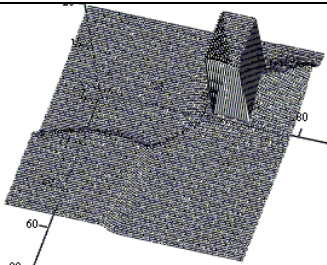
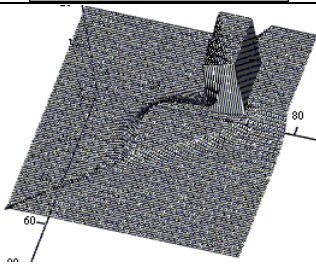
Момент времени	а)	б)
t = 0		
t = 12		
t = 25		
$\rho(x, T)$		
Функционал	3,56053991085117	3,88424834991232

Таблица 3.6

## Оптимальное динамическое разбиение в задаче 3

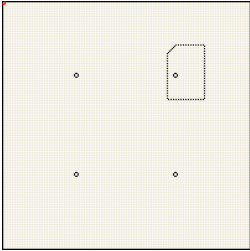
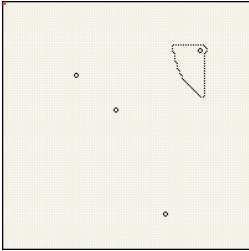
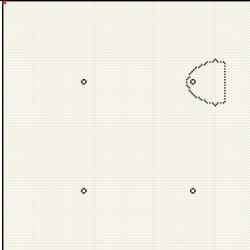
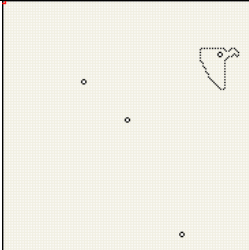
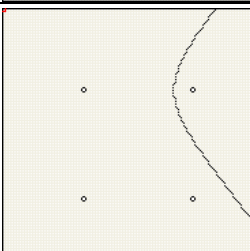

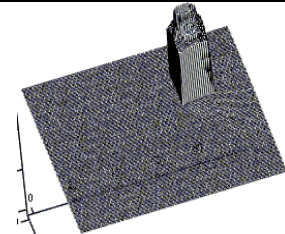
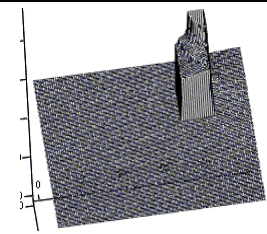
Момент времени	а	б
$t = 0$		
$t = 12$		
$t = 25$		
$\rho(x, T)$		
Целевой функционал	9,94308564350626	9,89748048262515

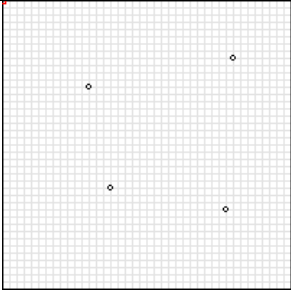
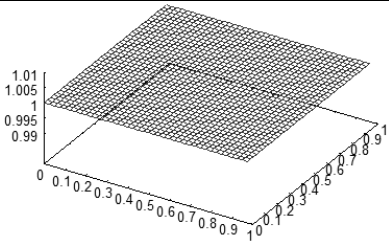
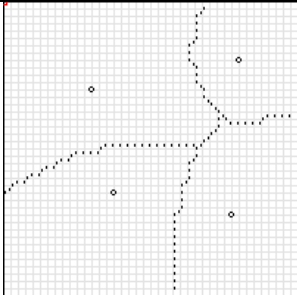
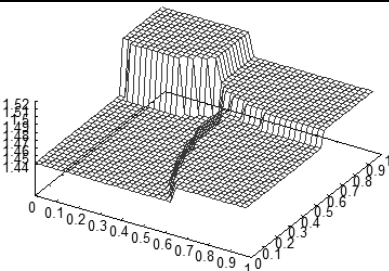
Таблица 3.7

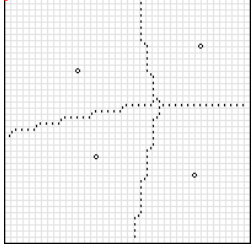
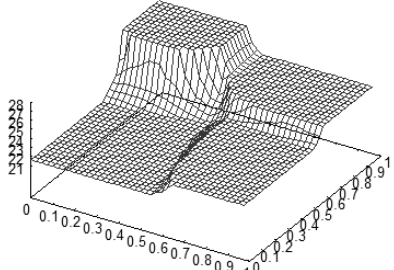
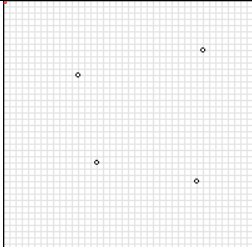
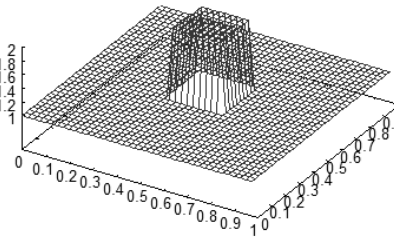
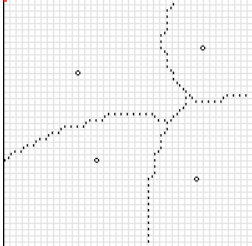
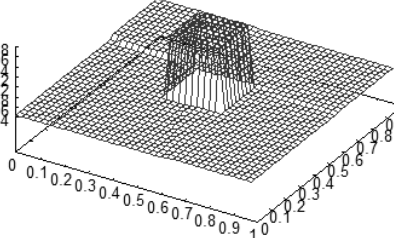
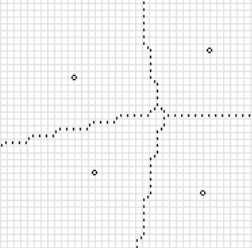
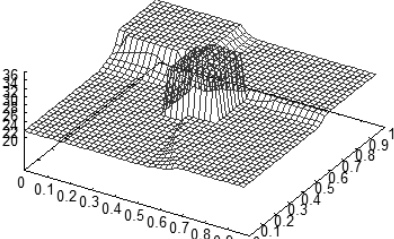
**Мощности подмножеств оптимального разбиения в задаче 3**

Подмножество	Мощность подмножества для модельной задачи 3	
	(а)	(б)
$\Omega_1(t)$	23,143	23,119
$\Omega_2(t)$	2,787	2,816
$\Omega_3(t)$	0	0
$\Omega_4(t)$	0	0

Таблица 3.8

**Результаты решения модельных задач 4 – 9**

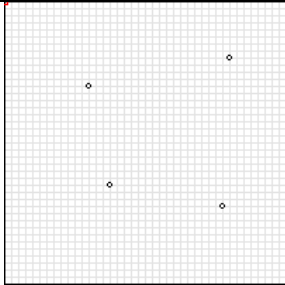
№ задачи	Функция начальных условий $\rho_0(x)$ ; оптимальное разбиение и поверхность функции $\rho(x, t)$ в определенные отсчеты времени	
4	$\rho_0(x) = 1$	
	 <p align="center"><math>t = 0</math></p>	
	 <p align="center"><math>t = 0.2</math></p>	

	 <p style="text-align: center;"><math>t = 3.2</math></p>	
<p>5</p>	$\rho_0(x_1, x_2) = \begin{cases} 2, & \text{если } 0.3 \leq x_1 \leq 0.5; 0.5 \leq x_2 \leq 0.7; \\ 1 & \text{для других точек из } \Omega. \end{cases}$	
 <p style="text-align: center;"><math>t = 0</math></p>		
 <p style="text-align: center;"><math>t = 0.2</math></p>		
 <p style="text-align: center;"><math>t = 2.5</math></p>		

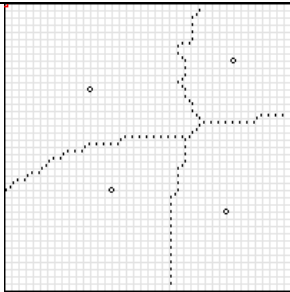
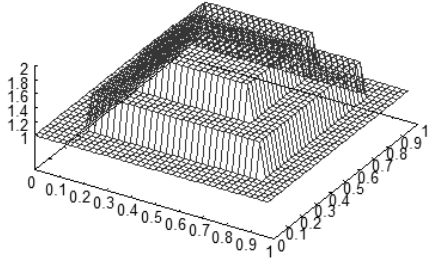


6

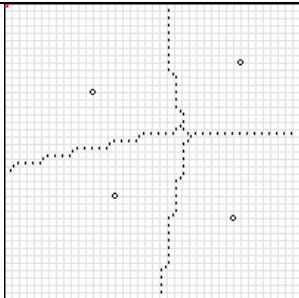
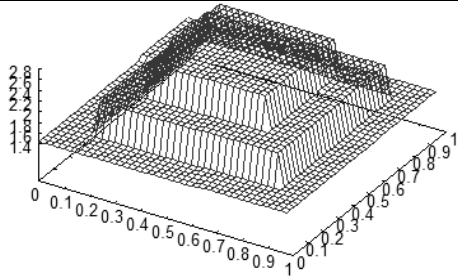
$\rho_0(i, j)$ : if  $(j > 15)$  and  $(j < 25)$  and  $(i > 15)$  and  $(i < 25)$  then  $\rho_0[i, j, 0] := 3.2.5$  else  $\rho_0[i, j, 0] := 1$ ;  
 if  $(j > 10)$  and  $(j < 30)$  and  $(i > 10)$  and  $(i < 30)$  then  $\rho_0[i, j, 0] := 2$  else  
 if  $(j > 5)$  and  $(j < 35)$  and  $(i > 5)$  and  $(i < 35)$  then  $\rho_0[i, j, 0] := 1.5$ ;



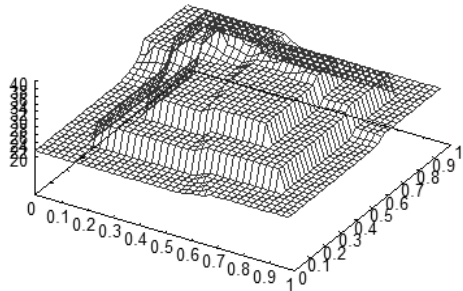
$t = 0$



$t = 0.2$

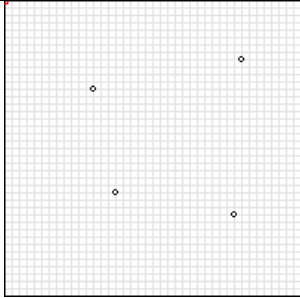


$t = 2.5$

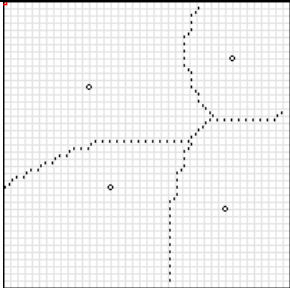
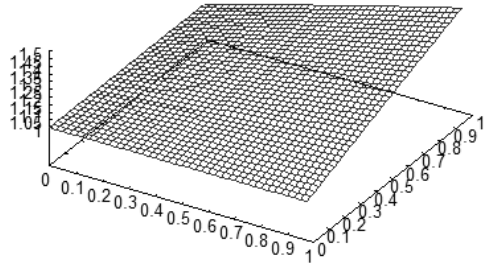


7

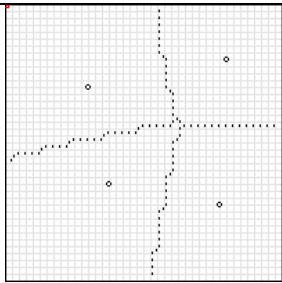
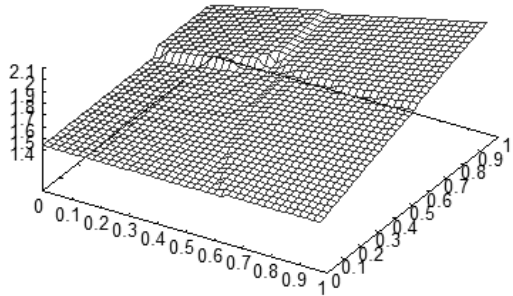
$$\rho_0(x) = \sin(0.5 * x_1 * x_2) + 1;$$



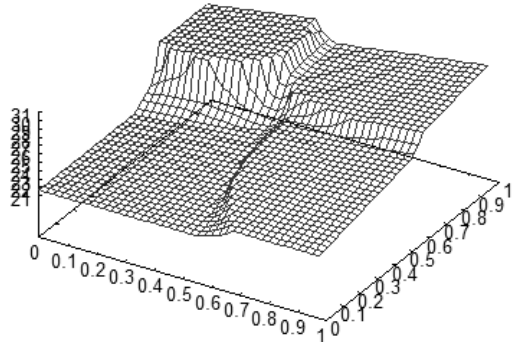
t = 0



t = 0.2

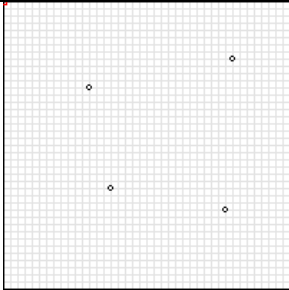


t = 2.5

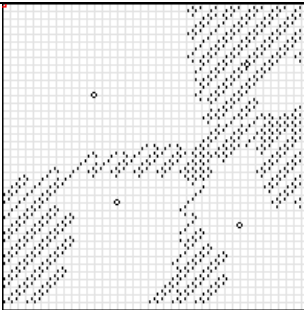
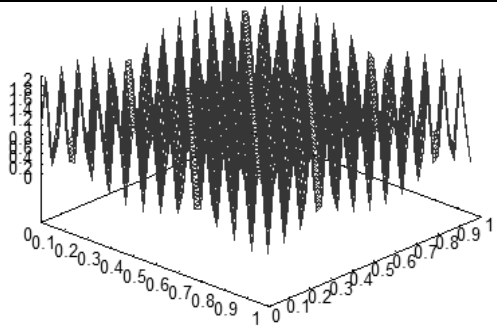


8

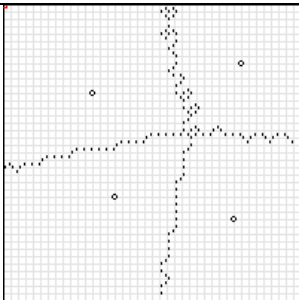
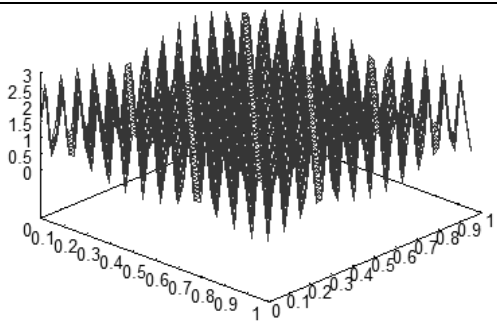
$$\rho_0(x) = \sin(80*x_1 + 80*x_2) + 1;$$



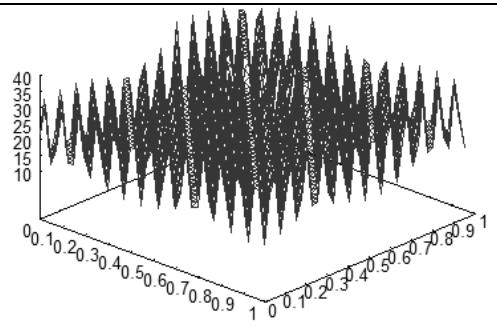
t = 0



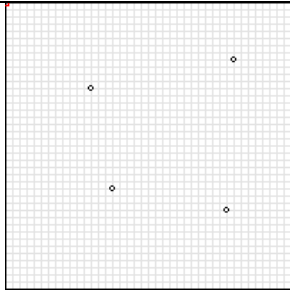
t = 0.2



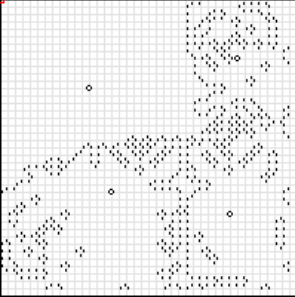
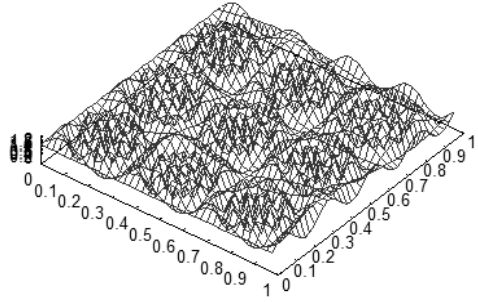
t = 2.5



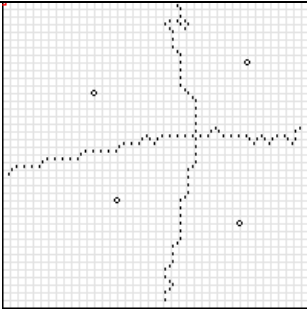
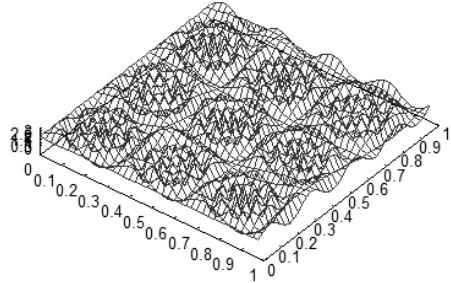
9  $ro[x_1, x_2, 0] := \sin(800 * x_1 * x_2) + 1;$



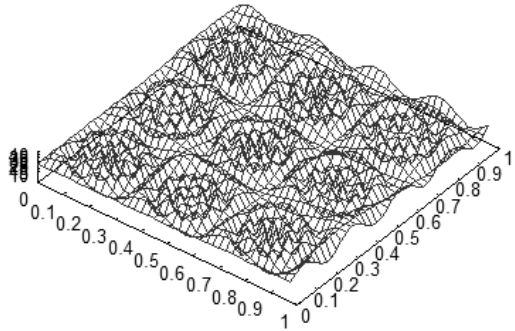
$t = 0$



$t = 0.2$



$t = 2.5$



Результаты решения тестовых динамических задач ОРМ  
с квадратичным функционалом с фиксированными параметрами

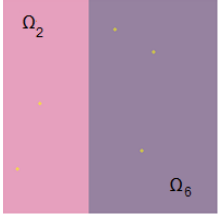
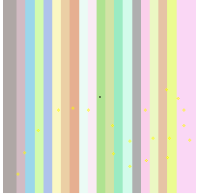
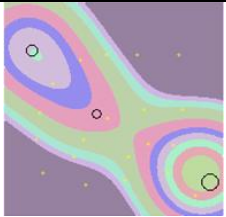
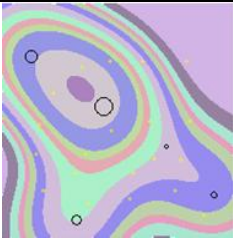
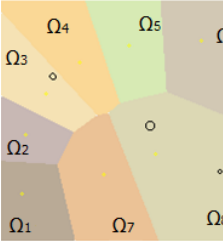

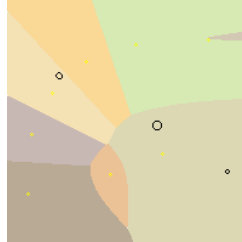
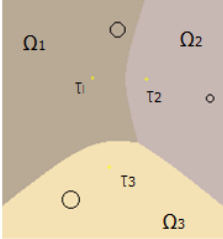
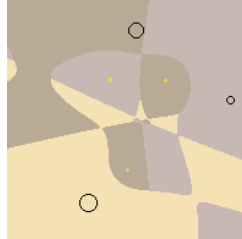
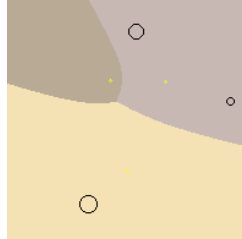
№ теста	$N$	Функции $\rho_0(x)$ , $u_i(x, t; \tau_i)$ , $\hat{\rho}(x, t)$	Оптимальное разбиение / Значение целевого функционала
1	6	$\rho_0(x) = 0;$ $u_i(x, t; \tau_i) = a_i,$ $a_1 = 0.14; a_2 = 0.2; a_3 = 0.3;$ $a_4 = 0.4; a_5 = 0.55; a_6 = 0.62;$ $\hat{\rho}(x, t) = \begin{cases} 0.2t, & x_1 \leq 0.4 \\ 0.62t, & x_1 > 0.4 \end{cases}$	 <p><math>I^* = 0.00012</math></p>
2	20	$\rho_0(x) = 0;$ $u_i(x, t; \tau_i) = i, \quad i = \overline{1, 20},$ $\hat{\rho}(x, t) = \frac{20}{3} x_1 t$	 <p><math>I^* = 4.4470</math></p>
3	20	$\rho_0(x) = 3;$ $u_i(x, t; \tau_i) = a_i,$ $3.4 \leq a_i \leq 9.4, \quad i = \overline{1, 20},$ $\hat{\rho}(x, t) = 2 + e^{-0.8t} \sum_{m=1}^M Q_m e^{-\gamma_m \ x - \sigma_m\ ^2}$ $M = 3; Q = (5, 4, 7); \sigma_m$	 <p><math>I^* = 15.8934</math></p>
4	20	<p>Такие же, как в эксперименте 3</p> $M = 5; Q = (8, 5, 4, 7, 3, 2);$ $\sigma_m$ – см. рис.	 <p><math>I^* = 22.1728</math></p>

Таблица 4.2


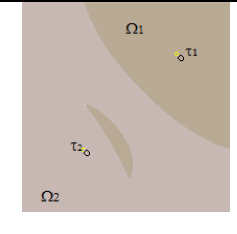
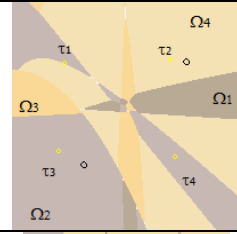
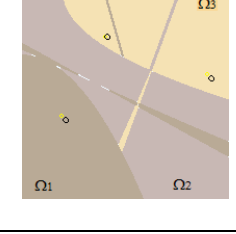
Влияние параметров  $\beta_i$  функций  $u_i(x, t; \tau_i, \beta_i)$  на структуру оптимального разбиения в задаче (4.1.3) без интегральных ограничений. Параметры  $\tau_i$  фиксированы

№ теста	Оптимальное разбиение множества $\Omega$ ; вектор параметров $\beta_i$ / оптимальное значение функционала		
1	2		
5			
$u_i(x, t; \tau_i) = \beta_i + \ x - \tau_i\ $ , $\ x - \tau_i\ $ – евклидова метрика			
$\beta_i = 0, i = \overline{1, 8}$ / $I^* = 78.771$	$\beta = (0.5; 0; 0.9; 0; 0.1; 0; 0; 0)$ $I^* = 78.9329$	$\beta = (0; 0; 0; 0; 0; 0.3; 0.2; 0.1)$ $I^* = 79.2736$	
6			
$u_i(x, t; \tau_i) = \beta_i e^{-6\ x - \tau_i\ }$ , $\ x - \tau_i\ $ – евклидова метрика			
$\beta = (3, 2, 1)$ $I^* = 77.087$	$\beta = (12, 10, 11)$ $I^* = 40.96$	$\beta = (1, 2, 3)$ $I^* = 74.69$	

Окончание табл. 4.2

7			
	$u_i(x, t; \tau_i) = \beta_i e^{-6\ x - \tau_i\ }$ , $\ x - \tau_i\ $ – евклидова метрика		
	$\beta_i = i, i = \overline{1, 7} / I^* = \mathbf{49.2}$	$\beta_i = 12 / I^* = \mathbf{35.86}$	$\beta_i = 14 - i / I^* = \mathbf{36.32}$
8			
	$u_i(x, t; \tau_i)$ , $i = \overline{1, 5}$ – те же, что и в тесте № 7		
	$\beta_i = i / I^* = \mathbf{66.79200}$	$\beta = (14, 12, 6, 14, 12) / I^* = \mathbf{35.707075}$	$\beta_i = 1 / I^* = \mathbf{82.434643}$

**Результаты решения тестовых динамических задач ОРМ  
с квадратичным функционалом и интегральными ограничениями на фазо-  
вую переменную. Параметры  $\tau_i$  фиксированы**

№ теста	$N$ ; вектор $b$ ; функции $\rho_0(x)$ , $\hat{\rho}(x, t)$ , $u_i(x, t; \tau_i)$	Значение функционала $I_1$ и функции $\chi$	Оптималь- ные значе- ния пара- мет- ров $\xi$	Оптимальное разбиение
9	$N=2$ ; $b_i = 500$ $\rho_0(x) = 0$ ; $\hat{\rho}(x, t)$ – см. (4.1.26) $u_i = 5e^{-10\ x-\tau_i\ ^2}$ , $\tau_1 = (0.3, 0.7)$ , $\tau_2 = (0.75, 0.25)$	$\chi^* = \mathbf{0.059}$ $I_1^* = \mathbf{0.0620}$	(0.0004, 0.0036)	
10	$\rho_0(x) = 0$ ; $b_0 = 0.50$ , $b_1 = 500$ $\hat{\rho}(x, t)$ – см формулу (4.1.26) $u_i = 5e^{-10\ x-\tau_i\ ^2}$ $\tau_1 = (0.3, 0.7)$ , $\tau_2 = (0.75, 0.25)$	$\chi^* = \mathbf{2.913}$ $I_1^* = \mathbf{2.914}$	(5.228, 2.4E-08)	
11	$\rho_0(x) = 0$ ; $N = 5$ , $b_i = 500$ $\hat{\rho}(x, t)$ – (4.1.26) $u_i = 5e^{-10\ x-\tau_i\ ^2}$ $\tau_1 = (0.23, 0.27)$ , $\tau_2 = (0.7, 0.26)$ $\tau_3 = (0.2, 0.7)$ , $\tau_4 = (0.7, 0.7)$ ,	$\chi^* = \mathbf{0.669}$ $I_1^* = \mathbf{0.6891}$	$\xi_i \approx 0.0$	
12	$\rho_0(x) = 0$ ; $N = 3$ , $b_i = 500$ $\hat{\rho}(x, t)$ – см формулу (4.1.27) $u_i = 5e^{-10\ x-\tau_i\ ^2}$ $\tau_1 = (0.2, 0.6)$ , $\tau_2 = (0.4, 0.2)$ $\tau_3 = (0.9, 0.4)$ ,	$\chi^* = \mathbf{0.412}$ $I_1^* = \mathbf{0.4199}$	$\xi_i \approx$ $\approx 1.0E-06$	



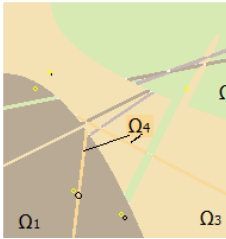


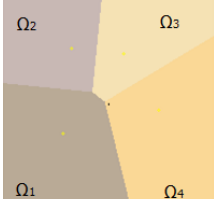
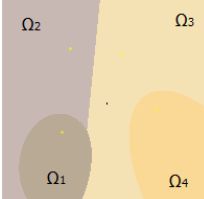
13	$\hat{\rho}(x, t) \rho_0(x)$ - те же $N = 5, b_i = 500$ $u_i = a_i e^{-10\ x - \tau_i\ ^2}$ $\tau_1 = (0.23, 0.27), \tau_2 = (0.7, 0.26)$ $\tau_3 = (0.21, 0.66), \tau_4 = (0.72, 0.68),$ $\tau_5 = (0.3, 0.8), a_i = i$	$\chi^* = 0.499$ $I_1^* = 0.500$	$\xi_i \approx$ $\approx 1.0E-06$	
----	---	-------------------------------------	--------------------------------------	---

Таблица 4.4

**Результаты решения тестовых динамических задач ОРМ с квадратичным функционалом и интегральными ограничениями на фазовую переменную. Параметры  $\tau_i$  фиксированы**

№ теста	Оптимальное разбиение множества $\Omega$ ; вектор параметров $\beta_i$ / оптимальное значение функционала	
14		
	$u_i(x, t; \tau_i) = \beta_i, \beta = (0.1, 0.2, 0.18, 0.4, 0.57, 0.62, 0.63)$	
	$b_i = 500, i = \overline{1, 7} / I^* = 0.00546$	$b_i = 500, i = \overline{1, 7}, i \neq 2,$ $b_2 = 0, 06 / I^* = 0.01013$
15		
	$u_i(x, t; \tau_i) = \beta_i$	
	$\beta_i = 50 \forall i / I^* = 0.4635$	$\beta = (0.1, 50, 50, 0.2) / I^* = 0.7921$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Айвазян С. А. Прикладная статистика: классификация и снижение размерности / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин // М.: Финансы и статистика, 1989.
2. Акимова И. Я. Задача оптимального размещения и обобщения одной теоремы Фейеша Тота // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика, 1982. – Т. 2. – С. 224–228.
3. Акимова И. Я. Применение диаграмм Вороного в комбинаторных задачах // Техн. Кибернетика. – 1984. – №2. – С. 102–109.
4. Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин // М.: Наука, 1979.
5. Алифанов О. М. Идентификация математических моделей сложного теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, А. В. Ненарокомов // М: Изд. МАИ, 1999. – 252 с.
6. Алифанов О. М. Обратные задачи как методологическая основа идентификации тепловых математических моделей // Тр. IV Междунар. форума по теплообмену. – Минск, 22–26 мая 2000. – Т. 3. – С. 3–13.
7. Антошкин А. А. Математическая модель задачи покрытия выпуклой многоугольной области кругами с учетом погрешностей исходных данных / А. А. Антошкин, Т. Е. Романова // Пробл. Машиностроения. – 2002. – 5, № 1. – С. 55–60
8. Астраков С. Н. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов / С. Н. Астраков, А. И. Ерзин // Вычислительные технологии, 2012. – Т. 17, № 1. – С. 26–34.
9. Астраков С. Н. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами / С. Н. Астраков, А. И. Ерзин, В. В. Залобовский // Дискретный анализ и исследование операций, 2009. – Т. 16, № 3. – С. 3–19.
10. Афанасьев А. П. Необходимые условия в оптимальном управлении / А. П. Афанасьев, В. В. Дикусар, А.А. Милютин, С.А. Чуканов. – М.: Наука, 1990. – 220 с.
11. Балтренас П. Б. Моделирование переноса пылевых смесей в закрытых помещениях / П. Б. Балтренас, К. П. Кирша // Проблемы контроля и защита атмосферы от загрязнения. – К.: Наук. думка, 1989.–Вып. 5. – С. 63–66.
12. Белых Л. Н. Анализ математических моделей в иммунологии / Л. Н. Белых, Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
13. Берлянд М. Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1985. – 273 с.
14. Бессонов А. Н. Методы и средства идентификации динамических объектов / А. Н. Бессонов, Ю. В. Загашвили, А. С. Маркелов // Л.: Энергоатомиздат, 1989. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 472 с.

15. Богомаз В. Н. О разрешимости одной задачи векторной оптимизации с фазовыми ограничениями / В. Н. Богомаз, П. И. Когут // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 3. – С. 31–45.
16. Богомаз В. М. Про регуляризацію фазових обмежень в одному класі задач векторної оптимізації / В. М. Богомаз, І. В. Нечай // Системні технології. – 1(78) 2012. – С. 18–25.
17. Бочарников В. П. Fuzzy – технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике. – СПб.: Наука, РАИ, 2001. – 328 с.
18. Брусов В. С. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости / В. С. Брусов, С. А. Пиявский // Журн. Вычисл. математики и мат. физики. – 1971. – 11, № 2. – С. 304–312.
19. Бублик Б. Н. Основы теории управления / Б. Н. Бублик, Н. Ф. Кириченко – К.: Вища школа, 1975. – 327 с.
20. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
21. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. – М.: МГУ, 1974. – 376 с.
22. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
23. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 223 с.
24. Галиев Ш. И. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами / Ш. И. Галиев, М. А. Карпова // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2010. – Т. 50, № 4. – С. 757–769.
25. Горнов А.Ю. Алгоритмы решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями // Вычислительные технологии. – Т.15. – № 2. – 2010. – С. 24 – 30.
26. Дейнека В. С. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К.: Наук. думка, 2007. – 703 с.
27. Демьянов В. Ф. Недифференцируемая оптимизация / В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
28. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
29. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука. – 1978. – 464 с.
30. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – 2 – е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
31. Егоров А. И. Синтез импульсных оптимальных управлений в распределенных системах / А. И. Егоров, В. Е. Капустян // Управление и оптимизация тепловых и диффузионных процессов: препр./ АН Украины. Ин – т кибернетики; 84 – 34. – К.: 1984. – С. 3 – 17.

32. Егоров А. И. Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии / А. И. Егоров, Р. Р. Рафатов // Ф.: Илим. – 1990. – 336 с.
33. Завьялов Ю. С. Методы сплайн – функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко – М.: Наука, 1980. – 352 с.
34. Задачі оптимального проектування надійних мереж / Заг.ред. академіка НАН України Н.З. Шора. – К.:Наук.думка, 2005. – 230 с.
35. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 168 с.
36. Займан Дж. Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем. – М.: Мир, 1982. – 592с.
37. Згуровский М. З. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами / М. З. Згуровский, В. С. Мельник – К.: Наук. думка, 1996. – 630 с.
38. Згуровский М. З. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев // К.: Наук. думка, 1997. – 368 с.
39. Иваненко В. И. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В. И. Иваненко, В. С. Мельник. // К.: Наукова думка. – 1988. – 288 с.
40. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
41. Кадочнікова Я. С. Методи та алгоритми розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин з обмеженнями: автореф. дис...к.ф. – м.н.: 01.05.01. – Д.,2010 – 19 с.
42. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
43. Капустян В. Е. Решение некоторых задач стартового управления методом оптимального разбиения множеств / В. Е. Капустян, Е. М. Киселева, Л. С. Кроха // Проблемы управления и информатики. – 1995. – №6. – С. 80–88.
44. Киселева Е. М. Решение одной задачи оптимального разбиения с размещением центров тяжести подмножеств // Журн. вычисл. математики и мат.физики. – 1989. – 29, № 5. – С. 709–722.
45. Киселева Е. М. О сходстве и различии некоторых непрерывных задач о покрытии и разбиении // Вопр. приклад. математики и мат. моделирования. – Днепропетровск: ДГУ, 1997. – С. 68–77.
46. Кісельова О. М. Елементи теорії функцій множин / О. М. Кісельова, Л.Л. Гарт // Д.: ДНУ, 2006. – 176 с.
47. Киселева Е. М. Решение непрерывной нелинейной задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств для случая выпуклого функционала / Е.М. Киселева, М.С. Дунайчук // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 134–152.

48. Киселева Е. М. Некоторые свойства пространства разбиений непрерывного множества / Е. М. Киселева, А. А. Жильцова // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2007. – С.84–91.
49. Киселева Е. М. Необходимые условия оптимальности для непрерывных задач разбиения множества в терминах теории функций множеств / Е. М. Киселева, А. А. Жильцова // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 55–66.
50. Кисельова О. М. Вступ до теорії оптимізації функцій множин / О. М. Кисельова, О. О. Жильцова // Д.: РВВ ДНУ, 2010. – 48 с.
51. Киселева Е. М. Общая схема получения необходимых условий оптимальности для непрерывных задач оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, А. А. Жильцова, В. А. Строева // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 5. – С. 50–63.
52. Киселева Е. М. Решение непрерывной однопродуктовой задачи оптимального разбиения с дополнительными ограничениями / Е. М. Киселева, Я. Е. Кадочникова // Проблемы управления и информатики. – 2009. – №4. – С. 47–61.
53. Киселева О. М. О решении и свойствах простейшей динамической задачи оптимального разбиения множеств // О. М. Киселева, Л. С. Коряшкіна. – Проблемы управления и информатики. – 2013. – № 3. – С. 102–112.
54. Кисельова О. М. Про зведення однієї нелінійної динамічної задачі оптимального розбиття множин до лінійної неперервної задачі розбиття / О. М. Кисельова, Л. С. Коряшкіна, О. В. Зайченко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2013. – С.164–173.
55. Кисельова О. М. Ідентифікація динамічної системи з декількома режимами функціонування / О. М. Кисельова, Л. С. Коряшкіна, О. В. Правдивий // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2011. – С.141–150.
56. Киселева Е. М. О динамической задаче оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкіна, Т.А. Шевченко // Проблемы управления и информатики. – 2013. – №4. – С. 33–44
57. Киселева Е. М. Алгоритм решения задачи о минимальном радиусе покрытия множества / Е. М. Киселева, Л. И. Лозовская // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2004. – С. 104–109.
58. Кисельова О. М. Про моделювання неперервних задач багатократного кулькового покриття множини / О. М. Кисельова, Л. І. Лозовська // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2013 – С.174–180.
59. Киселева Е. М. Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, Л. И. Лозовская, Е. В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 98–117.

60. Киселева Е. М. Поиск глобального минимума недифференцируемой функции с помощью метода оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, Т. Ф. Степанчук // Проблемы управления и информатики. – 2002. – №2. – С. 45–60.
61. Киселева Е. М. О выборе оптимальных коэффициентов и оптимальных узлов квадратурных формул для функциональных классов, заданных квази-метриками / Е. М. Киселева, Т. Ф. Степанчук // Проблемы управления и информатики. – 2002. – №3. – С. 138–153.
62. Киселева Е. М. Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Е. М. Киселева, В. А. Строева // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 40–53.
63. Киселева Е. М. О связи задач оптимального покрытия и оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, Б. Г. Шафиро // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. – Д.: ДГУ, 1991. – С. 23–27.
64. Киселева Е. М. Исследование алгоритма решения одного класса непрерывных задач разбиения / Е. М. Киселева, Н. З. Шор // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – №1. – С. 84–96.
65. Киселева Е. М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е. М. Киселева, Н. З. Шор. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.
66. Коряшкіна Л. С. Методы оптимального разбиения множеств для некоторых задач управления с квадратичным функционалом // Проблемы управления и информатики. – 1997. – №5. – С. 39–49.
67. Коряшкіна Л. С. Решение одной задачи управления параболической системой // Проблемы управления и информатики. – 1998. – №2. – С.94–101.
68. Коряшкіна Л. С. Решение одной задачи оптимального размещения промышленного объекта // Питання прикладної математики та математичного моделювання.– Д.: ДДУ, 1999. – С. 65–69.
69. Коряшкіна Л. С. Методи оптимального розбиття множин у керуванні розподіленими системами: автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01. – Д., 2000. – 18 с.
70. Коряшкіна Л. С. Особливості розв'язку задачі оптимального розбиття множин з рухомими границями між підмножинами. / Л. С. Коряшкіна, Т. О. Шевченко // Питання прикладної математики та математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2008. – С. 167–178.
71. Коряшкіна Л. С. Нові підходи до розв'язання динамічної задачі оптимального розбиття множини / Л. С. Коряшкіна, Т. О. Шевченко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.:ДНУ, 2009.– С.220–231.
72. Кротов В. Ф. Достаточные условия оптимальности в задачах об оптимальных покрытиях / В. Ф. Кротов, С. А. Пиявский. – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1968. – № 2. – С. 10–17.

73. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy TECH. – СПб.: БХВ – Петербург, 2003. – 736 с.
74. Лигун А. А. Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными параметрами. / А. А. Лигун, В. Е. Капустян, Ю. И. Волков. – Киев: Выща школа, 1990. – 208 с.
75. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. – К.: Наук. думка, 1998. – 465 с.
76. Малинаускас К. К. Динамическое построение абстрактных диаграмм Вороного // Фундаментальная и прикладная математика, 2007. – Т. 13, № 2. – С. 133 – 146.
77. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука. – 1982. – 320 с.
78. Матвейкин В. Г. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно – технического назначения: монография. / В. Г. Матвейкин, Д. Ю. Муромцев – М.: "Издательство Машиностроение – 1", 2007. – 128 с.
79. Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. – М.: Наука, 1999. – 304 с.
80. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – 2-е изд. перераб. и дополн. – М.: Наука, Главная редакция физико – математической литературы, 1983. – 424 с.
81. Михалевич В. С. Оптимизационные задачи производственно – транспортно-го планирования / В. С. Михалевич, В. А. Трубин, Н. З. Шор. – М.: Наука, 1986. – 260 с.
82. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971. – 328 с.
83. Муромцев Ю.Л. Моделирование и оптимизация технических систем при изменении состояний функционирования. / Ю.Л. Муромцев, Л.Н. Ляпин, О.В. Попова. – Воронеж: ВГУ, 1992. – 164 с.
84. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 206 с.
85. Пененко В. В. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. / В.В. Пененко, А.Е. Алоян – Новосибирск: Наука. – 1985. – 257 с.
86. Петросян Л. И. Введение в математическую экологию. / Л. И. Петросян, В. А. Захаров – Л., 1989. – 352 с.
87. Пиявский С. А. Об оптимизации сетей. – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1968. – № 1. – С. 68–80.
88. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко – М.: Наука, 1983. – 392 с.
89. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: Введение. Под редакцией Ю. М. Банковского / Ф. Препарата, М. Шеймос – М.: Мир, 1989. – 478 с.

90. Разина М. А. Математические модели и оптимизация размещения станций скорой помощи для обслуживания населения заданной области. Автореф. дис. канд. физ. – мат. наук : 05.13.18. – Казань, 2005.
91. Рейн Т. С. Метод естественных соседей для решения задач вязкой несжимаемой жидкости / Т. С. Рейн, К.Е. Афанасьев // Вестник НГУ (Серия «Математика, механика, информатика»). – 2008. – Т 8. № 2. – С. 31 – 38.
92. Сергиенко И. В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека – Киев: Наук. думка, 2009. – 639 с.
93. Сергиенко И. В. Применение методов оптимального разбиения множеств для решения геометрических обратных задач теплопроводности. / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека, Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина – Материалы 3 – й международной конференции Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии. – Кишинэу, 19 – 23 марта 2012 г. – С. 459–467.
94. Словохотов Ю. Л. Физика и социофизика. Ч.3. Квазифизическое моделирование в социологии и политологии. Некоторые модели лингвистики, демографии и математической истории // CONTROL SCIENCES. – 2012. – № 3.
95. Стерлин М. Д. Управление теплофизическими процессами: новые модели и алгоритмы. – СПб.: Изд – во Санкт – Петербургского гос. техн. ун – та, 1997. – 118 с.
96. Стоян Ю. Г. Покрытие многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса / Ю. Г. Стоян, В. Н. Пацук // Доп.НАН України. – 2006. – №3. – С.74 – 77.
97. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. – К.: Наук. думка, 1986.
98. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. – М.: Наука. – 1978. – 240 с.
99. Сумин М. И. Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2009. – Т. 49. № 12. – С. 2083–2102.
100. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах целочисленного анализа. – М.: Наука, 1989. – 364 с.
101. Терехов С. В. Моделирование тепловых и кинетических свойств реальных систем. – Донецк: «Вебер», 2007. – 306 с.
102. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин– М.: Наука, 1979. – 288 с.
103. Трухаев Р. Н. Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1981. – 257 с.
104. Трухаев Р. Н. Теория неклассических вариационных задач / Р. Н. Трухаев, В. В. Хоменюк. – Л.: ЛГУ, 1971. – 168 с.
105. Ус С. А. Решение одного класса бесконечномерных задач оптимизации: автореф. дис... канд. физ. – мат. наук: 01.01.09. – Д., 1992. – 16 с.



106. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М. Наука. – 1978. – 488 с.
107. Федоров В. В. Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979. – 280 с.
108. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 225 с.
109. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.
110. Шор Н. З. Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования / Н. З. Шор, Т. А. Бардадым, Н. Г. Журбенко, А. П. Лиховид, П. И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – №5. – С. 33–47.
111. Шор Н. З. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация / Н.З. Шор, С.И. Стеценко. – К.: Наукова думка, 1989.
112. Шор Н. З. Использование модификации  $g$  – алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций / Н. З. Шор, П. И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28–49.
113. Экланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы: Пер. С англ. / И. Экланд, Р. Темам – М.: Мир, 1979. – 399 с.
114. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. – М.: Сов. радио, 1974. – 400 с.
115. Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Советское радио, 1979. – 392 с.
116. Alfred H. Thiessen. Precipitation averages for large areas. Monthly Weather Review. – 1911. – 39(7). – P. 1082–1084.
117. Ambrosio, L. Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems / Ambrosio, L., Fusco, N., Pallara, D. // Clarendon, Oxford (2000)
118. Arada N. Optimal control problems with mixed control – state constraints / N. Arada, J. P. Raymond // SIAM J. Control Optimization, 39 (2001). – P. 1391 – 1407.
119. Aurenhammer Franz. Voronoi Diagrams: A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure / Aurenhammer Franz, Klein Rolf. // ACM Computing Surveys 23(3) (1991). – P. 345 – 405.
120. Bakolas E. The Zermelo – Voronoi Diagram: a Dynamic Partition Problem. / E. Bakolas, P. Tsiotras // Automatica. –2010. – V. 46, Issue 12. – P. 2059-2067
121. Balas E. Set partitioning: a survey / E. Balas, M.W. Padberg // Comb. Optimiz. Lect. summer Sch. Comb. Optimiz. Urbino, 1977. Chichester e.a. 1979. – P. 151– 210.
122. Balzer Michael. Capacity – Constrained Voronoi Diagrams in Continuous Spaces. / Balzer Michael // The International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering. – 2009. – 10 p.
123. Bollabas B. The optimal arrangement of producers. – J. London Math. Soc. – 1973. – 6., N 4. – P. 605–613.

124. Brasco L. A Survey On Dynamical Transport Distances. – Записки научных семинаров ПОМИ. – Том 390. – 2011. С. 5 – 51.
125. CGAL. Computational geometry algorithms library. <http://www.cgal.org/>.
126. Chee – Keng Yap. An  $o(n \log n)$  algorithm for the voronoi diagram of a set of simple curve segments // *Discrete & Computational Geometry*, 1987. – № 2. – P. 365 – 393.
127. Chen L. Solving a minimum – power covering problem with overlap constraint for cellular network design / L. Chen, D. Yuan // *European Journal of Operational Research*. 2010. – Vol. 203. – P. 714 – 723.
128. Chen R. Relaxation methods for the solution of the minimax location – allocation problem in Euclidean space / R. Chen, G.Y. Handler // *Nav. Res. Log.* – 1987. – V.34. – №6. – P. 231 – 243.
129. Corley H.W. Duality relationships a partitioning problem / H.W. Corley, S.D. Roberts // *SIAM. J. Appl. Math.* – 1972. – V.23. – № 4. – P.490 – 494.
130. David L. Millman. Degeneracy Proof Predicates for the Additively Weighted Voronoi Diagram. – A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science Department of Computer Science Courant Institute of Mathematical Sciences / – New York University/ May 2007
131. Dirichlet Gustave Lejeune. Uber die reduktion der positiven quadratischen formen mit drei unbestimmten ganzen zahlen. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 1850. – P. 209 – 227.
132. Duda R. O. Pattern classification / R. O. Duda, P. E. Hart, D. G. Stork // *New York: JohnWiley and Sons*, 2001.
133. Egil Bae. Global Minimization for Continuous Multiphase Partitioning Problems Using a Dual Approach./ Egil Bae, Jing Yuan, Xue – Cheng Tai.
134. Farahani R. Z. Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer – Verlag. / R.Z. Farahani , M. Hekmatfar (eds.). – Berlin, Heidelberg. – 2009. – 530 pp.
135. Fejes Tot G. Multiple packing and covering of spheres // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1979. V. 34. № 1–2. P. 165–176.
136. Francis R. L. Sufficient conditions for some optimum – property facility design // *Oper. Res.* – 1967. – V. 15. – № 3. – P. 448 – 466.
137. Friedman M. On the analysis and solution of certain geographical optimal covering problems // *Comput. and Oper. Res.* – 1976. – 3, N 4. – P. 283–294.
138. Garfinkel R. S. The set partioting problem: set covering with Equality Constaints / M. L. Fisher, P. Kedia // *Oper. Res.* – 1969. – 17. – P. 848–856.
139. Geib D. Optimally solving a transportation problem using Voronoi diagrams / D. Geib, R. Klein, R. Penninger, G. Rote // *Computational Geometry, Theory and Applications* July 30, 2012.
140. Gill Barequet. 2 – Point site Voronoi diagrams. / Gill Barequet, Matthew T. Dickerson, Robert L. Scot Drysdale. // *Discrete Applied Mathematics* 122 (2002). – P. 37 – 54.

141. Guruprasad K. R.. Effectiveness – based Voronoi partition: a new tool for solving a class of location optimization problems // Springer – Verlag 2012. 11p.
142. Hashemi L. Dynamic field process simulation within gis: the voronoi approche / Hashemi L. Beni, Mostafavi M. A., Pouliot J. //The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. Vol. XXXVII. Part B2. Beijing 2008. – P. 891 – 897.
143. Hugo Ledoux. Gold Modelling Three – dimensional Geoscientific Fields with the Voronoi Diagram and its Dual International Journal of Geographical Information Science / Hugo Ledoux, Christopher M. // vol. 22(5):547–574.
144. Jandl H. A continuous Set Covering Problemas a Quasidifferentiable Optimization Problem / H. Jandl, K. Wieder. – Optimization 19. – (1988)6. – P. 781–802.
145. Jean – Daniel Boissonnat. Curved Voronoi Diagrams / Jean – Daniel Boissonnat, Camille Wormser, Mariette Yvinec. // Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces (2007) 67 – 116
146. John Gunnar Carlsson. Dividing a Territory Among Several Facilities / John Gunnar Carlsson, Raghuveer Devulapalli // INFORMS Journal on Computing 25(4): 730-742 (2013)
147. Jorge Cort´es. Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems / Jorge Cort´es, Francesco Bullo. // IEEE Control and Decision Conference, Maui, Hawaii, 2003.
148. Kikuo Fujita. Voronoi diagram based cumulative approximation for engineering optimization / Kikuo Fujita, Noriyasu Hirokawa and Tomoya Tachikawa. // Department of Computer-Controlled Mechanical Systems, Graduate School of Engineering, Osaka University, Suita, Osaka 565-0871, Japan, AIAA – 2000 – 4919, pp. 1 – 11 (2000)
149. Kiseleva E.M. On Continuous Problems of the Optimal Partitioning of Sets with Non – Differentiable Functional / E.M. Kiseleva, L.S. Koryashkina // Abstracts of U.S. – Ukrainian Workshop “Recent Advances in Non – Differentiable optimization” – Kyiv, 2000. – P.20.
150. Klein R. Concrete and Abstract Voronoi Diagrams. – Berlin: Springer, 1989. – (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 400).
151. Klein R. Randomized incremental construction of abstract Voronoi diagrams / Klein R., Mehlhorn K., Meiser S. // Comput. Geom. – 1993. – Vol. 3. – P. 157 – 184.
152. Kogut P.I. In the existence of efficient solutions of vector optimization problems in Banach spaces / P.I. Kogut, R. Manzo, I.V. Nechay // Диференціальні рівняння та їх застосування. – 2008. – № 5. – С. 105 – 121.
153. Laver M. Endogenous birth and death of political parties in dynamic party competition, in: Seth A., Prescott T., Bryson J. (eds). / M. Laver, E. Sergenti, M. Schilperoord // Modelling natural action selection. Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 2010. – 584 p., Ch. 21
154. Lee D.T. Generalization of voronoi diagrams in the plane / D.T. Lee and Robert L. (Scot) Drysdale // SIAM J. Comput., 10: 73–87, 1981.

155. Lellmann Jan, Lenzen Frank. Christoph Schnörr Optimality Bounds for a Variational Relaxation of the Image Partitioning Problem Springer Science+Business Media New York 2012. – 19 p.
156. Lukas S. Applying Voronoi Diagrams to the Redistricting Problem / Svec Lukas, Sam Burden, Aaron Dilley // The UMAP Journal 28.3 (2007)– P. 313 – 329
157. Menelaos I. Dynamic additively weighted voronoi diagrams in 2d / Menelaos I. Karavelas and Mariette Yvinec. // Technical Report ECG – TR – 122201 – 01, INRIA , Sophia – Antipolis 10th European Symposium on Algorithms, pages 586–598, 2002.
158. Moreno J. Heuristic cluster algorithm for multiple facility location – allocation problem / J. Moreno, C. Rodriguez, N. Jimenez // Operations research. – 1991. – 25, N 1. – P. 97–107.
159. Nishida T. Stable marker – particle method for the Voronoi diagram in a flow field / T. Nishida, K. Sugihara, and M. Kimura // Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 202, no. 2. – 2007. – P. 377 – 391.
160. Okabe A. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams / A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu // West Sussex, England: John Wiley and Sons Ltd, second ed., 2000.
161. Papadopoulou E. The  $L_\infty$  Voronoi diagram of segments and VLSI applications / E. Papadopoulou, D. T. Lee // Internat. J. Comput. Geom. Appl. – 2001. – Vol. 11. – P. 503 – 528.
162. Pascal Jean Frey. Mesh Generation: Application to Finite Elements / Pascal Jean Frey and Paul – Louis George // Hermes Science, 2000.
163. Pelegrin B. New heuristic algorithms for the rectangular p – cover problem / B. Pelegrin, L. Canovas. – Operat. res. – 1995. – 29, N 1. – P. 73–91.
164. Rahwan T. An Anytime Algorithm for Optimal Coalition Structure Generation./ T. Rahwan, S.D. Ramchurn, N.R. Jennings, A. Giovannucci // Journal of Artificial Intelligence Research 34, 521–567 (2009)
165. Shevchenko T. The features of solving of the set partitioning problems with moving boundaries between subsets / T. Shevchenko, E. Kiseleva, L. Koriashkina // Operations Research Proceedings 2008/ Springer – Verlag Berlin Heidelberg 2009. – P. 533 – 538.
166. Stoyan Yu. G. Construction of a  $\Phi$  – function for two convex polytopes / Yu. G. Stoyan, J. Terno, M. Gil, T. Romanova, G. Scheithauer // Applicationes Mathematicae/ – V. 2, №29. – 2002. – P. 199 – 218.
167. Stoyan Yu. G.  $\Phi$  – function for complex 2D objects / Yu. G. Stoyan, G. Scheithauer, M. Gil, T. Romanova // 40R Quarterly Journal of the Belhian, French and Italian Operations Research Societies, V. 2, #1. 2004. P.69 – 84
168. Sugihara K. Voronoi diagrams in a river // International Journal of Computational Geometry and Applications, 1992/ – Vol. 2. – P. 29 – 48
169. Sweeney P.E. Cutting and packing problems: a categorized, application oriented research bibliography / P.E. Sweeney, E.L. Ridenour // Journ. Oper. Res. Soc. – 1992. – № 7. – P. 691 – 706.

170. Troltzsch F. Lagrange multipliers for control problems with mixed pointwise control-state constraints. / F. Troltzsch, Ä. // *Regular SIAM J. Optim.*, 15:616 – 634, 2005
171. Trubin Stanislav I. Information Space Mapping with Adaptive Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams // Thesis (M.S.) – Oregon State University. – 2007.
172. Voronoi Georgy. Nouvelles applications des parametres continus ala theorie des formes quadratiques. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 1907. – P. 97 – 178.
173. Weiping Yang. An Outline Of A Dynamic Solution Tj Spatio – Temporal Windowing In An Urban GIS. / Weiping Yang, Christopher M. Gold. // *Proceedings AUSIA'93, Advances in Urban Spatial Information and Analysis*, 1993. –
174. Yoshiaki Ohsawa. A geometrical solution for quadratic bicriteria location models. *European Journal of Operational Research* 114 (1999) 380 – 388.

*Наукове видання*

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ОЛЕСЯ  
ГОНЧАРА

КІСЕЛЬОВА Олена Михайлівна  
КОРЯШКІНА Лариса Сергіївна

**МОДЕЛІ І МЕТОДИ РІШЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ЗАДАЧ  
ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН**

(РОСІЙСЬКОЮ МОВОЮ)

Київ, Науково-виробниче підприємство  
«Видавництво “Наукова думка” НАН України», 2013

ОРИГІНАЛ-МАКЕТ ВИГОТОВЛЕНО У ВИДАВНИЦТВІ  
ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

РЕДАКТОР *В. Д. МАЛОВИК*  
КОРЕКТОР *В. Д. МАЛОВИК*  
ТЕХНІЧНИЙ РЕДАКТОР *В. А. УСЕНКО*  
КОМП'ЮТЕРНА ВЕРСТКА *Н. В. БАЛЕЙКО*

Підписано до друку 19.09.2013. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір друкарський. Гарн.Таймс.  
Друк плоский. Ум. друк. арк. 35,34. Ум. фарбовідб. 35,34. Обл.-вид. арк. 34,6. Тираж  
300 прим. Зам. № .

НВП «Видавництво “Наукова думка” НАН України»  
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи  
до Державного реєстру ДК № 2440 від 15.03.2006 р.  
01601, Київ 1, вул. Терещенківська, 3

**ISBN 978-966-00-1428-2**