

В.И. ЕЛИСЕЕВ, канд. физ.-мат. наук,

В.И. ЛУЦЕНКО, А.П. ЛУКИША, кандидаты техн. наук,

(Украина, Днепропетровск, Институт геотехнической механики НАН Украины)

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАПИЛЛЯРЕ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Введение. Энергия вращательного движения нашла широкое применение в технологических операциях разделения, обезвоживания различных масс и других технологических процессах горнорудной и металлургической промышленности [1, 2]. Возникающие при вращении силы действуют на движущиеся компоненты рабочих тел, заставляя их выполнять определенные функции в общем технологическом процессе. Одной из интересных задач в процессах обезвоживания сыпучих и капиллярно-пористых материалов является моделирование движения слоев жидкости во вращающихся аппаратах. В данной работе для представления движения жидкости в поровом пространстве остановимся на более простой задаче – опорожнении капиллярной трубки при вращении, когда ее ось совпадает с радиусом вращения обезвоживающего аппарата, представляющего собой сетчатый барабан.

Вывод основных уравнений

Учитывая актуальность капиллярных явлений в поле центробежных сил, рассмотрим эту задачу с более общих позиций, поэтому запишем основные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат z', r', φ' (рис. 1А), вращающейся совместно с телом и с учетом центробежных и кориолисовых сил [3, 4].

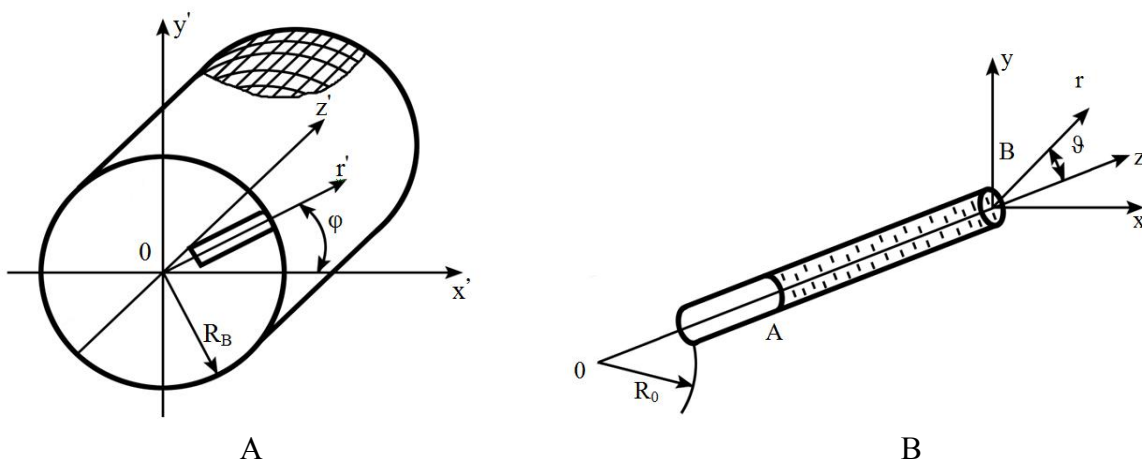


Рис. 1. Схема расположения капилляра и используемые системы координат

Гравітаційна сепарація

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} &= \left[\frac{u_\varphi^2}{r} + (r\omega^2 + 2\omega u_\varphi) \right] - \frac{\partial p}{\rho \partial r} + \\
 &+ \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial u_r}{r \partial r} - 2 \frac{\partial u_\varphi}{r^2 \partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} \right), \\
 \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} &= -2\omega u_r - \frac{\partial p}{\rho r \partial \varphi} + \\
 &+ \nu \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial r} + 2 \frac{\partial u_r}{r^2 \partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right), \\
 \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial u_z}{r \partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial z} - g + \\
 &+ \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\partial u_z}{r \partial r} \right), \\
 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где t – время; ρ – плотность жидкости; p – давление; ω – угловая скорость; u_z , u_r , u_φ – компоненты скорости, соответствующие осям z' , r' , φ' . В уравнениях (1) штрихи для удобства опущены.

Для определения параметров течения, необходимо перейти из этой системы координат в другую цилиндрическую систему координат x , r , ϑ , показанную на рис. 1Б, в которой ось капилляра x совпадала бы с радиусом вращения r , а остальные две находились в плоскости поперечного сечения капилляра. Для этого перейдем из системы координат z' , r' , φ' в декартову систему x , y , z с сохранением ее вращения и указанных выше сил, а затем перейдем в систему x , r , ϑ . В результате получим следующие уравнения движения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{r \partial \vartheta} &= \frac{v^2 \text{Cos}^2 \vartheta - 2vw \text{Sin} \vartheta \text{Cos} \vartheta + w^2 \text{Sin}^2 \vartheta}{x} + \\
 &+ x\omega^2 + 2\omega(v \text{Cos} \vartheta - w \text{Sin} \vartheta) - \frac{\partial p}{\rho \partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \vartheta^2} \right), \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{r \partial \vartheta} + \frac{w^2}{r} &= -2\omega u \text{Cos} \vartheta - g \text{Sin} \vartheta - \frac{\partial p}{\rho \partial r} +
 \end{aligned}$$

$$+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r\partial r} + \frac{\partial^2 v}{r^2\partial \vartheta^2} - 2\frac{\partial w}{r^2\partial \vartheta} - \frac{v}{r^2}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{r\partial \vartheta} + \frac{vw}{r} = 2\omega u \sin \vartheta - g \cos \vartheta - \frac{\partial p}{\rho r \partial \vartheta} +$$

$$+v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{r\partial r} + 2\frac{\partial v}{r^2\partial \vartheta} - \frac{w}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{r\partial \vartheta} = 0,$$

где u, v, w – компоненты скорости, соответствующие осям x, r, ϑ .

Из системы (2) видно, что в отличие от неподвижной цилиндрической капиллярной трубки, в которой при постоянном расходе жидкости возникает стабилизированное течение, здесь течение значительно сложнее. Однако для капиллярных трубок можно воспользоваться упрощенной системой. Из уравнения неразрывности видно, что для капилляра постоянного радиуса a

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r u dr \right) d\vartheta = Const, \quad (3)$$

т. е. как и для осесимметричного течения выполняется закон сохранения массы в капилляре. При условии, что кориолисовы силы меньше капиллярных ($\rho \omega a < \sigma/a$), течение в трубке будет слабо отличаться от осесимметричного. Отбросив поперечные скорости и градиенты давлений, запишем основное уравнение движения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = x\omega^2 - \frac{\partial p}{\rho \partial x} + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r\partial r}\right). \quad (4)$$

Используя теперь анализ, проделанный в работе [5], придем к следующему уравнению, описывающему движения мениска в капиллярной трубке, под действием центробежной силы

$$h\frac{d^2 h}{d\tau^2} + 8\frac{v\Gamma}{a^2} h\frac{dh}{d\tau} + 2\frac{\sigma\Gamma^2}{\rho a^3} \frac{\theta}{(1+\theta^2)^{1/2}} = -$$

$$-k\frac{\Gamma}{a}\frac{dh}{d\tau} + \frac{1}{2}\omega^2\Gamma^2 h(2R_B - h) + \frac{P_A - P_B}{\rho a^2}\Gamma^2, \quad (5)$$

Гравітаційна сепарація

где σ – коэффициент поверхностного натяжения; k – коэффициент сопротивления сетки, находящейся в конце капиллярной трубки; h – высота слоя жидкости в капилляре, отнесенная к его радиусу; $\theta = 1/\operatorname{tg}\alpha$, α – угол смачивания; p_A, p_B – давления в точках A (точка положения мениска) и B (конец капилляра); $R_B = R_B/a$ – безразмерный радиус, описываемый наружным срезом капилляра (черта для удобства опущена); τ – безразмерное время, T – временной масштаб, принятый равным 1 секунде. Если в уравнении (5) отбросить нестационарные члены, то получим стационарное состояние мениска. При $p_A = p_B$ толщина слоя не может быть равной нулю (при больших скоростях вращения она стремится к нулю). Однако, если принять, что внутренний срез трубки открыт, тогда, учитывая сжимаемость воздуха в поле центробежных сил, получим следующие соотношения для давления в точке A :

для адиабатически сжимаемого газа

$$p_A = p_B \left\{ 1 + \frac{k-1}{2k} \frac{\rho_B}{p_B} \omega^2 a^2 \left[(R_B - h)^2 - R_0^2 \right] \right\}^{k/k-1}, \quad (6)$$

для изотермически сжимаемого газа

$$p_A = p_B \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{\rho_B}{p_B} \omega^2 a^2 \left[(R_B - h)^2 - R_0^2 \right] \right\}. \quad (7)$$

Здесь принято, что конец капилляра в точке R_0 (безразмерный радиус начала капиллярной трубки) открыт и давление и плотность равны соответственно давлению и плотности в окружающей среде. Линеаризуя выражения (6), (7) получим, что

$$p_A - p_B = \frac{\rho_B \omega^2}{2} a^2 \left[(R_B - h)^2 - R_0^2 \right]. \quad (8)$$

Далее, считая, что толщина остающегося стационарного слоя значительно меньше R_B , будем иметь следующее выражение для h

$$h = 2 \frac{\sigma}{\rho a^3 \omega^2 R_B} \frac{\theta}{(1 + \theta^2)^{1/2}} - \frac{\rho_B R_B}{2\rho} \left(1 - \frac{R_0^2}{R_B^2} \right), \quad (9)$$

откуда следует, что остаточный слой жидкости, в принципе, может быть равен нулю, при этом

$$\omega = 2\pi n = \frac{2}{R_B} \left[\frac{\sigma}{\rho_B a^3} \left(1 - \frac{R_0^2}{R_B^2} \right)^{-1} \frac{\theta}{(1 + \theta^2)^{1/2}} \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Здесь n – число оборотов в секунду.

Применимость формулы (10) ограничивается условием $2 \frac{\sigma}{a \rho_B} \ll 1$, что для

воды при атмосферном давлении соответствует диаметру капиллярной трубки ~ 100 мкм, поэтому приведем более общую формулу, используя выражение (7),

$$\omega = 2\pi n = \left\{ \frac{2}{R_B^2} \frac{p_B}{\rho_B a^2} \left(1 - \frac{R_0^2}{R_B^2} \right)^{-1} \ln \left[1 + 2 \frac{\sigma}{a p_B} \frac{\theta}{(1 + \theta^2)^{1/2}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (11)$$

Из формулы (11) хорошо просматривается влияние основных параметров: радиуса трубки и радиуса описываемого наружным срезом капилляра на необходимую для полного опорожнения трубки угловую скорость. Таким образом, важной особенностью движения жидкости в капилляре является его возможное полное опорожнение под действием центробежной силы.

Результаты расчетов

На рис. 2, 3 показаны кривые движения мениска в капиллярной трубке длиной 240 мм и радиусом $a=0,25$ мм, расположенной радиально во вращающемся сечтатом барабане радиусом 250 мм.

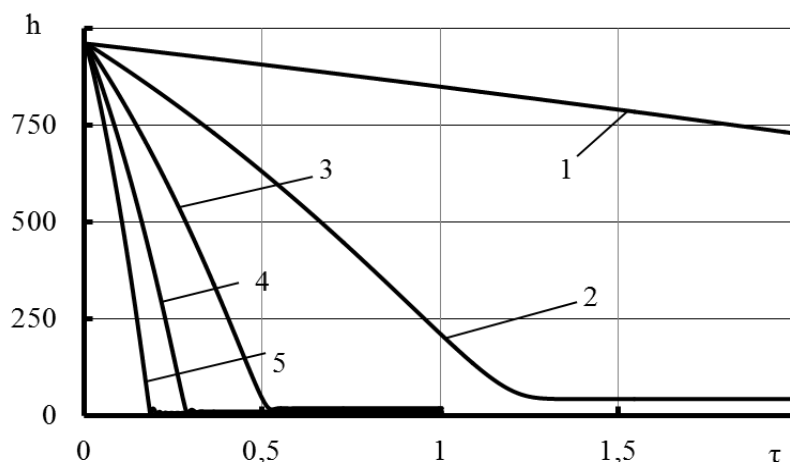


Рис. 2. Кривые движение мениска в капиллярной трубке $a=0,25$ мм, $\theta=1$:
 1 – $n=1$; 2 – $n=2$; 3 – $n=3$; 4 – $n=4$; 5 – $n=5$

Гравітаційна сепарація

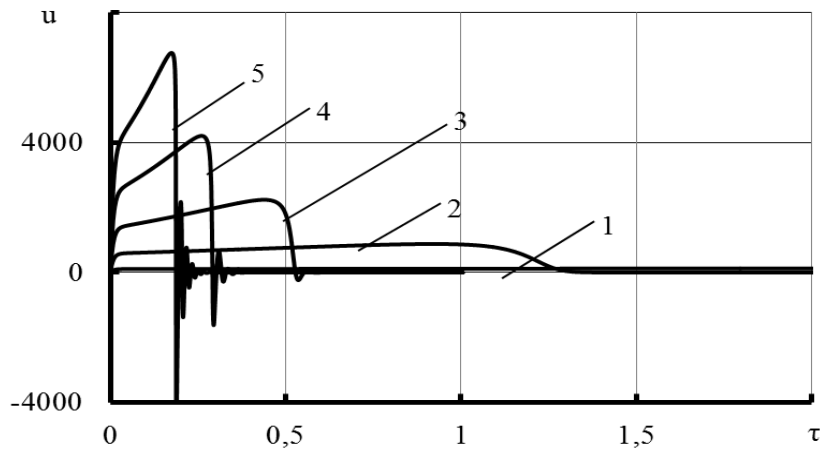


Рис. 3. Скорость движения мениска в капиллярной трубке радиусом $a = 0,25$ мм, $\theta = 1$:
1 – $n=1$; 2 – $n = 2$; 3 – $n = 3$; 4 – $n = 4$; 5 – $n = 5$

Из рисунков видно, что угловая скорость оказывает значительное влияние, как на скорость движения мениска, так и на остаточную величину жидкости. Интересно отметить, что в окрестности равновесной точки, описываемой формулой (9), возникают колебательные движения. С ростом угловой скорости барабана эта точка должна приближаться к выходному сечению трубки и при $n=15,66$ вода должна полностью покинуть капилляр. На следующих рисунках показано влияние сопротивления замыкающей капилляр сетки на процесс опорожнения капиллярной трубки.

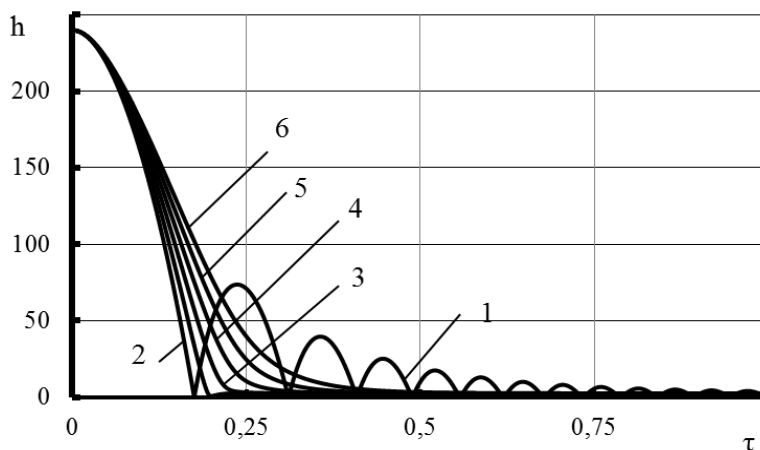


Рис. 4. Движение мениска в капиллярной трубке радиусом $a = 1,0$ мм с сеткой:
1 – $k=0$, 2 – $k=0,5$, 3 – $k=1$, 4 – $k=1,5$, 5 – $k=2,0$, 6 – $k=2,5$

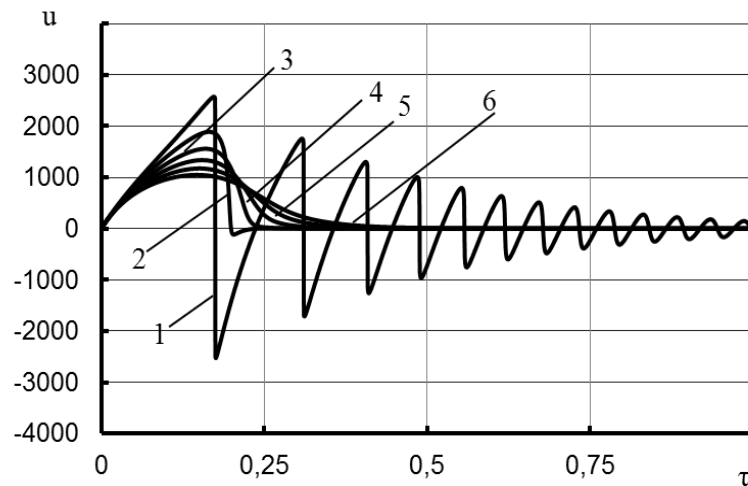


Рис. 5. Скорость движения мениска в капиллярной трубке радиусом $a=1,0$ мм с сеткой:
 1 – $k=0$; 2 – $0,5$; 3 – 1 ; 4 – $1,5$; 5 – $2,0$; 6 – $2,5$

При $k = 0$ (сетки нет) наблюдаются значительные колебания мениска в окрестности точки равновесия. С наличием сетки (кривая 2 на рис 5) колебания мениска практически незначительны. С дальнейшим увеличением сопротивления сетки колебания, как видно из рис. 4, 5, исчезают.

В заключение приведем кривые (рис. 6), рассчитанные по формуле (11), характеризующие влияние радиуса капилляра на угловую скорость, при которой происходит опорожнение трубки. Из этого рисунка видно, что при уменьшении радиуса трубки для ее опорожнения должна значительно возрасти скорость вращения барабана.

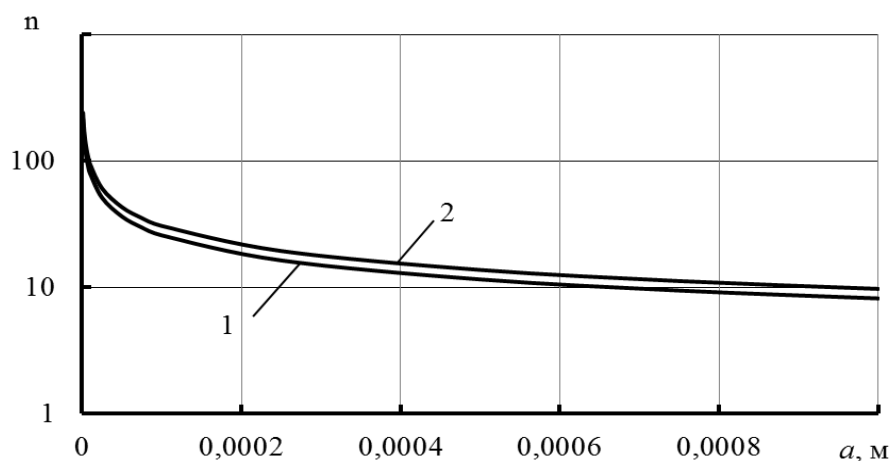


Рис. 6. Зависимость количества оборотов барабана для полного опорожнения капиллярной трубки радиусом a :
 1 – $\alpha = 45^\circ$; 2 – $\alpha = 0^\circ$

Выводы

Полученные решения показывают что:

1. Засасываемый в капиллярную трубку воздух оказывает влияние на про-
Збагачення корисних копалин, 2013. – Вип. 53(94)

Гравітаційна сепарація

цесс обезвоживания. Без учета дополнительного воздушного давления, создаваемого центробежными силами, увеличение количества оборотов барабана только уменьшает остаточный слой жидкости, но не обращает его в нуль. С учетом дополнительного давления воздуха толщина остаточного слоя может оказаться равным нулю при соответствующей конечной угловой скорости барабана.

2. Радиус капилляра оказывает существенное влияние на предельную угловую скорость, причем с уменьшением радиуса капилляра угловая скорость должна увеличиваться.

3. Полное обезвоживание зависит также от радиуса барабана, при этом необходимая угловая скорость обратно пропорциональна первой степени радиуса.

4. В случае, если угловая скорость меньше предельной величины, в конце трубки возникает остаточный слой жидкости, при этом установление состояния равновесия может сопровождаться колебаниями, что связано с инерционными процессами движения жидкости и действием сил поверхностного натяжения.

5. При наличии замыкающей сетки колебательные процессы в значительной мере ослабляются, а с увеличением ее сопротивления полностью затухают и мениск плавно переходит в состояние равновесия.

Список литературы

1. Соколов, В.И. Современные промышленные центрифуги. – М.: Машиностроение, 1967. – 523 с.
2. Халатов, А.А. Теория и практика закрученных потоков. – К.: Наук. думка, 1989. – 192 с.
3. Романков, П.Г., Курочкина М.И. Гидромеханические процессы химической технологии. – Л.: Химия, 1982. – 288 с.
4. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
5. Определение закономерностей опускания жидкости в поровых каналах влажной горной массы, лежащей на сетке / В.П. Надутый, В.И. Елисеев, В.И. Луценко и др. // Науковий вісник: Зб. наук. праць. НГУ – 2009. – № 2. – С. 71-74.

© Елисеев В.И., Луценко В.И., Лукиша А.П., 2013

*Надійшла до редколегії 29.04.2013 р.
Рекомендовано до публікації д.т.н. Є.В. Семененко*