Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

В.М. ГОРЄВ

ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Методичні рекомендації до практичних занять та лабораторних робіт з дисципліни для бакалаврів галузі знань 17 Електроніка та телекомунікації

Дніпро
2019

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ
Факультет інформаційних технологій
Кафедра безпеки інформації та телекомунікацій

В.М. ГОРЄВ

ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

**Методичні рекомендації до практичних занять та лабораторних робіт
з дисципліни для бакалаврів
галузі знань 17 Електроніка та телекомунікації**

Дніпро
НТУ «ДП»
2019

Горєв В.М.
Технічна електродинаміка. Методичні рекомендації до практичних занять та лабораторних робіт з дисципліни для бакалаврів галузі знань 17 Електроніка та телекомунікації / В.М. Горєв ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т "Дніпровська політехніка". – Дніпро : НТУ "ДП", 2019. – 43 с.

Автор:
В.М. Горєв, канд. фіз.-мат. наук, асист.

Затверджено методичною комісією зі спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка (протокол № 2 від 29.10.2019) за поданням кафедри безпеки інформації та телекомунікацій (протокол № 5 від 29.10.2019).

Надано методичні рекомендації до практичних занять та лабораторних робіт з дисципліни «Технічна електродинаміка» для бакалаврів галузі знань 17 Електроніка та телекомунікації.

Відповідальний за випуск зав. кафедри БІТ В.І. Корнієнко, д-р техн. наук, проф.

Зміст

1. Градієнт. Дивергенція. Ротор. Індексний запис…………………………… 4

1.1. Короткі теоретичні відомості……………………………………….. 4

1.2. Розбір задач…………………………………………………………... 6

1.3. Лабораторна робота 1………………………………………………... 12

2. Рівняння Максвела. Вектор Пойнтінга. Поведінка полів на межі двох середовищ. Метод комплексних амплітуд…………………………………… 14

2.1. Короткі теоретичні відомості……………………………………….. 14

2.2. Розбір задач…………………………………………………………... 15

2.3. Лабораторна робота 2………………………………………………... 21

3. Плоскі електромагнітні хвилі у відкритому середовищі……………...….. 24

3.1. Короткі теоретичні відомості……………………………………….. 24

3.2. Розбір задач…………………………………………………………... 25

3.3. Лабораторна робота 3………………………………………………... 31

4. Хвильовий процес у прямокутному хвилеводі……………………………. 33

4.1. Короткі теоретичні відомості……………………………………….. 33

4.2. Розбір задач…………………………………………………………... 35

4.3. Лабораторна робота 3………………………………………………... 39

5. Список рекомендованої літератури……………………………………... 42

1. Градієнт. Дивергенція. Ротор. Індексний запис

1.1. Короткі теоретичні відомості

Скалярним добутком векторів $\vec{a}=\vec{e}_x a_x+\vec{e}_y a_y+\vec{e}_z a_z$ та $\vec{b}=\vec{e}_x b_x+\vec{e}_y b_y+$ $+\vec{e}_z b_z$ є число

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha, \tag{1.1}$$

де α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $|\vec{a}|$ та $|\vec{b}|$ – модулі відповідних векторів; $\vec{e}_{x,y,z}$ є ортами декартової системи координат.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x\left(a_y b_z-a_z b_y\right)+\vec{e}_y\left(a_z b_x-a_x b_z\right)+\vec{e}_z\left(a_x b_y-a_y b_x\right). \tag{1.2}$$

Векторний добуток перпендикулярний до обох векторів: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$, напрямлений за правилом правого гвинта та його модуль дорівнює

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha, \tag{1.3}$$

α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Змішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є число

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right). \tag{1.4}$$

Змішаний добуток векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, що є побудованим на цих трьох векторах. Відповідно, змішаний добуток дорівнює нулю, якщо хоча б два з цих трьох векторів колінеарні один одному.

Осі декартової системи координат завжди обирають так, щоб вектори $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ утворювали праву трійку:

$$\left[\vec{e}_x,\vec{e}_y\right]=\vec{e}_z. \tag{1.5}$$

Радіус-вектором точки з координатами (x,y,z) є вектор, що проведено з початку координат до даної точки:

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z\,. \tag{1.6}$$

Відповідно, модуль радіус-вектора дорівнює

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1.7}$$

Нехай є скалярна функція $\varphi(x,y,z) = \varphi(\vec{r})$. Тоді її градієнтом є наступна векторна функція:

$$\operatorname{grad}\varphi(x,y,z) = \vec{e}_x \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\,. \tag{1.8}$$

Нехай є векторна функція $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x,y,z) = \vec{e}_x A_x(x,y,z) + \vec{e}_y A_y(x,y,z) +$ $+\vec{e}_z A_z(x,y,z)$. Тоді її дивергенцією є скалярна функція

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z} \tag{1.9}$$

та її ротором є векторна функція

$$\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \tag{1.10}$$

З виразами, які містять вище описані величини, зручно працювати у так званому індексному записі. Ідея цього запису наступна: x-координаті відповідає індекс 1, y-координаті відповідає індекс 2, z- координаті відповідає індекс 3. Іншими словами, компоненти будь-якого вектора $\vec{a}$ записуються наступним чином: $a_x = a_1$, $a_y = a_2$, $a_z = a_3$, самі координати записуються наступним чином: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$.

При цьому використовується правило підсумовування Ейнштейна: по індексах, що попарно повторюються та знаходяться по один бік від знаку рівності, проводиться підсумовування. Якщо ж індекс повторюється по різні боки від знаку рівності, то його називають «словомовним» (російською мовою – «говорящим»). По словомовному індексу підсумовування не проводиться, він означає покомпонентну рівність.

Відповідно, вище описані величини в термінах індексного запису мають наступний вигляд:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_i b_i,\ \left[\vec{a},\vec{b}\right]_i=\varepsilon_{ijk}a_j b_k,\ \left(\mathrm{grad}\varphi\right)_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\ \mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial A_i}{\partial x_i},\ \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j},$$
$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k,\ \ r=\sqrt{x_j x_j},\ \ \vec{r}=\vec{e}_i x_i,\ \vec{a}=\vec{e}_i a_i. \quad (1.11)$$

Тут ε_{ijk} – символ Леві–Чивіти, який вводиться наступним чином:

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{312}=\varepsilon_{231}=1,\ \varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=-1, \quad (1.12)$$

всі інші компоненти ε_{ijk}, тобто ті, для яких хоча б два індекси є однаковими, дорівнюють нулю. Він має наступні властивості:

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kij}=\varepsilon_{jki},\ \varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik},\ \varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj},\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{inm}=\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{kn}\delta_{jm}, \quad (1.13)$$

де

$$\delta_{jm}=\begin{cases}1, & j=m\\ 0, & j\neq m\end{cases} \quad (1.14)$$

є символом Кронекера. При підсумовуванні символ Кронекера «захоплює» індекси:

$$A_i\delta_{im}=A_m. \quad (1.15)$$

1.2. Розбір задач

Задача 1. Обчислити $\mathrm{grad}\varphi(r)$, де $\varphi(r)$ – деяка скалярна функція від модуля радіус-вектора.

Спочатку обчислимо даний градієнт безпосередньо за визначенням:

$$\mathrm{grad}\varphi(r)=\vec{e}_x\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}. \quad (1.16)$$

За властивостями похідної від складної функції маємо

$$\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}=\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}=\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}=\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}, \quad (1.17)$$

похідна $d\varphi(r)/dr$ є повною, бо функція φ залежить лише від r. На основі (1.7) знаходимо

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (1.18)$$

аналогічно

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad (1.19)$$

Тоді на основі (1.16)–(1.19) отримуємо

$$\mathrm{grad}\varphi(r)=\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (1.20)$$

звідки на основі (1.6) та (1.7) бачимо, що

$$\mathrm{grad}\varphi(r)=\frac{\vec{r}}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}. \qquad (1.21)$$

Тепер отримаємо таку ж відповідь на основі індексного запису.

$$\left(\mathrm{grad}\varphi(r)\right)_i=\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x_i}=\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i}. \qquad (1.22)$$

Порахуємо частинну похідну $\partial r/\partial x_i$. На основі (1.11) та маємо

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{\partial\sqrt{x_jx_j}}{\partial x_i}=\frac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}\frac{\partial x_jx_j}{\partial x_i}=\frac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}x_j+x_j\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right). \qquad (1.23)$$

Так як

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i}=\delta_{ij}, \qquad (1.24)$$

то на основі (1.23) та (1.15) маємо

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}\left(\delta_{ij}x_j+x_j\delta_{ij}\right)=\frac{2x_i}{2\sqrt{x_jx_j}}=\frac{x_i}{\sqrt{x_jx_j}}=\frac{x_i}{r}. \qquad (1.25)$$

Відповідно, згідно (1.22),

$$\left(\mathrm{grad}\varphi(r)\right)_i=\frac{x_i}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}, \qquad (1.26)$$

та

$$\operatorname{grad}\varphi(r)=\vec{e}_i\left(\operatorname{grad}\varphi(r)\right)_i=\frac{\vec{e}_i x_i}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}=\frac{\vec{r}}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}, \tag{1.27}$$

Відповідь: $\operatorname{grad}\varphi(r)=\dfrac{\vec{r}}{r}\dfrac{d\varphi(r)}{dr}$.

Задача 2. Обчислити $\operatorname{div}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)$, де $\varphi(r)$ – деяка скалярна функція від модуля радіус-вектора.

Спочатку обчислимо дану дивергенцію безпосередньо за визначенням:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)=\frac{\partial x\varphi(r)}{\partial x}+\frac{\partial y\varphi(r)}{\partial y}+\frac{\partial z\varphi(r)}{\partial z}= \\ =\varphi(r)+x\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}+\varphi(r)+y\frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}+\varphi(r)+z\frac{\partial\varphi(r)}{\partial z},\end{gathered} \tag{1.28}$$

далі на основі (1.28), (1.17)–(1.19) бачимо, що

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)=3\varphi(r)+\frac{d\varphi(r)}{dr}\left(x\frac{x}{r}+y\frac{y}{r}+z\frac{z}{r}\right)= \\ =3\varphi(r)+\frac{x^2+y^2+z^2}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}=3\varphi(r)+r\frac{d\varphi(r)}{dr}.\end{gathered} \tag{1.29}$$

Тепер отримаємо ту ж саму відповідь на основі індексного запису (див. (1.11)):

$$\operatorname{div}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)=\frac{\partial x_i\varphi(r)}{\partial x_i}=\frac{\partial x_i}{\partial x_i}\varphi(r)+x_i\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x_i}=\frac{\partial x_i}{\partial x_i}\varphi(r)+x_i\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i}. \tag{1.30}$$

Розглянемо вираз $\partial x_i/\partial x_i$ (див. (1.24)):

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i}=\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=1+1+1=3. \tag{1.31}$$

Тоді на основі (1.30) та (1.25) маємо

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)=3\varphi(r)+x_i\frac{x_i}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}=3\varphi(r)+\frac{x_ix_i}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}= \\ =3\varphi(r)+\frac{r^2}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}=3\varphi(r)+r\frac{d\varphi(r)}{dr}.\end{gathered} \tag{1.32}$$

Відповідь: $\operatorname{div}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)=3\varphi(r)+r\dfrac{d\varphi(r)}{dr}$.

Задача 3. Обчислити $\operatorname{rot}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)$, де $\varphi(r)$ – деяка скалярна функція від модуля радіус-вектора.

Спочатку обчислимо безпосередньо за визначенням:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)=\vec{e}_x\left(\frac{\partial z\varphi(r)}{\partial y}-\frac{\partial y\varphi(r)}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial x\varphi(r)}{\partial z}-\frac{\partial z\varphi(r)}{\partial x}\right)+$$

$$+\vec{e}_z\left(\frac{\partial y\varphi(r)}{\partial x}-\frac{\partial x\varphi(r)}{\partial y}\right)=\vec{e}_x\left(z\frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(x\frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}-z\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}\right)+$$

$$+\vec{e}_z\left(y\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}-x\frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}\right)=\vec{e}_x\left(z\frac{\partial r}{\partial y}-y\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{d\varphi}{dr}+\vec{e}_y\left(x\frac{\partial r}{\partial z}-z\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{d\varphi}{dr}+ \tag{1.33}$$

$$+\vec{e}_z\left(y\frac{\partial r}{\partial x}-x\frac{\partial r}{\partial y}\right)\frac{d\varphi}{dr}.$$

Звідси на основі (1.7), (1.18), (1.19) бачимо, що

$$\operatorname{rot}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)=\vec{e}_x\left(\frac{zy}{r}-\frac{yz}{r}\right)\frac{d\varphi}{dr}+\vec{e}_y\left(\frac{xz}{r}-\frac{zx}{r}\right)\frac{d\varphi}{dr}+\vec{e}_z\left(\frac{yx}{r}-\frac{xy}{r}\right)\frac{d\varphi}{dr}=0. \tag{1.34}$$

Тепер отримаємо ту ж саму відповідь на основі індексного запису:

$$\left(\operatorname{rot}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)\right)_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_k\varphi(r)}{\partial x_j}=\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\varphi(r)+x_k\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x_j}\right)=$$

$$=\varepsilon_{ijk}\left(\delta_{kj}\varphi(r)+x_k\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{d\varphi}{dr}\right)=\varepsilon_{ijk}\left(\delta_{kj}\varphi(r)+\frac{x_kx_j}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)= \tag{1.35}$$

$$=\varepsilon_{ijk}\delta_{kj}\varphi(r)+\varepsilon_{ijk}x_jx_k\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}=\varepsilon_{ijj}\varphi(r)+\varepsilon_{ijk}x_jx_k\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}.$$

За визначенням символ Леві–Чивіти з двома однаковими індексами дорівнює нулю: $\varepsilon_{ijj}=0$. Розглянемо вираз $\varepsilon_{ijk}x_jx_k$. За визначенням векторного добутку (1.11) бачимо, що

$$\varepsilon_{ijk}x_jx_k=\left[\vec{r},\vec{r}\right]_i. \tag{1.36}$$

Очевидно, що вектор $\vec{r}$ є паралельним сам собі: $\vec{r}\parallel\vec{r}$, та кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{r}$ дорівнює нулю. Тоді згідно (1.3) бачимо, що

$$\varepsilon_{ijk}x_jx_k=\left[\vec{r},\vec{r}\right]_i=0. \tag{1.37}$$

Тож на основі (1.35) та вище розглянутих виразів приходимо до висновку, що

$$\operatorname{rot}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)=0. \tag{1.38}$$

Відповідь: $\operatorname{rot}\left(\vec{r}\varphi(r)\right)=0$.

Надалі при розв'язанні задач будемо використовувати лише індексний запис, бо обчислення «в лоб» за визначеннями є надто громіздкими.

Задача 4. Обчислити $\operatorname{grad}\dfrac{e^{(\vec{a},\vec{r})}}{r}$, декартові компоненти вектора $\vec{a}$ не залежать від координат.

За визначенням градієнта та властивостями похідних маємо

$$\left(\operatorname{grad}\frac{e^{(\vec{a},\vec{r})}}{r}\right)_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\cdot e^{(\vec{a},\vec{r})}\right)=e^{(\vec{a},\vec{r})}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{(\vec{a},\vec{r})}\right)=$$

$$=e^{(\vec{a},\vec{r})}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i}+\frac{1}{r}e^{(\vec{a},\vec{r})}\frac{\partial\left(\vec{a},\vec{r}\right)}{\partial x_i}=-e^{(\vec{a},\vec{r})}\frac{1}{r^2}\frac{x_i}{r}+\frac{1}{r}e^{(\vec{a},\vec{r})}\frac{\partial a_j x_j}{\partial x_i}= \tag{1.39}$$

$$=-e^{(\vec{a},\vec{r})}\frac{x_i}{r^3}+\frac{1}{r}e^{(\vec{a},\vec{r})}a_j\frac{\partial x_j}{\partial x_i}=-e^{(\vec{a},\vec{r})}\frac{x_i}{r^3}+\frac{1}{r}e^{(\vec{a},\vec{r})}a_j\delta_{ij}=e^{(\vec{a},\vec{r})}\left(\frac{a_i}{r}-\frac{x_i}{r^3}\right),$$

звідки

$$\operatorname{grad}\frac{e^{(\vec{a},\vec{r})}}{r}=\vec{e}_i e^{(\vec{a},\vec{r})}\left(\frac{a_i}{r}-\frac{x_i}{r^3}\right)=e^{(\vec{a},\vec{r})}\left(\frac{\vec{e}_i a_i}{r}-\frac{\vec{e}_i x_i}{r^3}\right)=e^{(\vec{a},\vec{r})}\left(\frac{\vec{a}}{r}-\frac{\vec{r}}{r^3}\right). \tag{1.40}$$

Відповідь: $\operatorname{grad}\dfrac{e^{(\vec{a},\vec{r})}}{r}=e^{(\vec{a},\vec{r})}\left(\dfrac{\vec{a}}{r}-\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)$.

Задача 5. Обчислити $\operatorname{div}\left[\dfrac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]$, декартові компоненти вектора $\vec{a}$ не залежать від координат.

За визначенням дивергенції та векторного добутку маємо

$$\operatorname{div}\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]_i\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ijk}\,\frac{a_j x_k}{r}\right)=\varepsilon_{ijk}a_j\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_k\cdot\frac{1}{r}\right)=$$

$$=\varepsilon_{ijk}a_j\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\frac{1}{r}+x_k\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)\right)=\varepsilon_{ijk}a_j\left(\delta_{ik}\,\frac{1}{r}+x_k\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)= \qquad (1.41)$$

$$=\varepsilon_{ijk}a_j\left(\delta_{ik}\,\frac{1}{r}-x_k\,\frac{1}{r^2}\frac{x_i}{r}\right)=\varepsilon_{iji}a_j\,\frac{1}{r}-\varepsilon_{ijk}x_i a_j x_k\,\frac{1}{r^3}.$$

За визначенням символу Леві–Чивіта $\varepsilon_{iji}=0$. Розглянемо вираз $\varepsilon_{ijk}x_i a_j x_k$. Згідно (1.11) бачимо, що цей вираз є змішаним добутком векторів:

$$\varepsilon_{ijk}x_i a_j x_k=\left(\vec{r},\vec{a},\vec{r}\right)=0, \qquad (1.42)$$

бо два з цих трьох векторів є колінеарними $\vec{r}\parallel\vec{r}$. Тож на основі (1.41) бачимо, що

$$\operatorname{div}\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]=0. \qquad (1.43)$$

Відповідь: $\operatorname{div}\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]=0$.

Задача 6. Обчислити $\operatorname{rot}\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]$, декартові компоненти вектора $\vec{a}$ не залежать від координат.

За визначенням ротора та векторного добутку маємо

$$\left(\operatorname{rot}\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]\right)_i=\varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]_k\right)=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{a_m x_n}{r}\right). \qquad (1.44)$$

За властивостями (1.13) маємо

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kmn}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}, \qquad (1.45)$$

тож

$$\left(\operatorname{rot}\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]\right)_i=\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)a_m\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_n}{r}\right)=$$

$$=\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)a_m\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_j}\frac{1}{r}+x_n\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)\right)=\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)a_m\left(\frac{\delta_{nj}}{r}-\frac{x_n x_j}{r^3}\right)= \qquad (1.46)$$

$$=a_m\left(\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)\delta_{nj}\frac{1}{r}-\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)x_n x_j\frac{1}{r^3}\right)=$$

$$=a_m\left(\left(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{nj}-\delta_{nj}\delta_{in}\delta_{jm}\right)\frac{1}{r}-\left(\delta_{im}\delta_{jn}x_n x_j-\delta_{in}\delta_{jm}x_n x_j\right)\frac{1}{r^3}\right)=$$

$$=a_m\left(\left(3\delta_{im}-\delta_{im}\right)\frac{1}{r}-\left(\delta_{im}x_j x_j-x_i x_m\right)\frac{1}{r^3}\right),$$

Тут враховано, що

$$\delta_{jn}\delta_{nj}=\delta_{jj}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=1+1+1=3 \tag{1.47}$$

та

$$\delta_{nj}\delta_{in}\delta_{jm}=\delta_{ij}\delta_{jm}=\delta_{im}. \tag{1.48}$$

Тоді на основі (1.46) маємо

$$\left(\operatorname{rot}\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]\right)_i=a_m\left(2\delta_{im}\frac{1}{r}-\left(\delta_{im}x_j x_j-x_i x_m\right)\frac{1}{r^3}\right)=$$

$$=2a_m\delta_{im}\frac{1}{r}-\left(a_m\delta_{im}x_j x_j-x_i x_m a_m\right)\frac{1}{r^3}=2a_i\frac{1}{r}-\left(a_i x_j x_j-x_i x_m a_m\right)\frac{1}{r^3}= \tag{1.49}$$

$$=2a_i\frac{1}{r}-\left(a_i r^2-x_i\left(\vec{a},\vec{r}\right)\right)\frac{1}{r^3}.$$

Відповідно,

$$\operatorname{rot}\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]=\vec{e}_i\left(2a_i\frac{1}{r}-\left(a_i r^2-x_i\left(\vec{a},\vec{r}\right)\right)\frac{1}{r^3}\right)=2\frac{a_i\vec{e}_i}{r}-\frac{a_i\vec{e}_i r^2-x_i\vec{e}_i\left(\vec{a},\vec{r}\right)}{r^3}=$$

$$=2\frac{\vec{a}}{r}-\frac{\vec{a}r^2-\vec{r}\left(\vec{a},\vec{r}\right)}{r^3}=2\frac{\vec{a}}{r}-\frac{\vec{a}}{r}+\frac{\vec{r}\left(\vec{a},\vec{r}\right)}{r^3}=\frac{\vec{a}}{r}+\frac{\vec{r}\left(\vec{a},\vec{r}\right)}{r^3}. \tag{1.50}$$

Відповідь: $\operatorname{rot}\left[\frac{\vec{a}}{r},\vec{r}\right]=\frac{\vec{a}}{r}+\frac{\vec{r}\left(\vec{a},\vec{r}\right)}{r^3}$.

1.3. Лабораторна робота 1

1. Обчислити

1.1) $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}$, $\operatorname{rot}\frac{\vec{r}}{r}$. 1.2) $\operatorname{grad}\left(r^2\right)$, $\operatorname{div}\left(\vec{r}r^2\right)$, $\operatorname{rot}\left(\vec{r}r^2\right)$.

2. Декартові компоненти вектора $\vec{c}$ не залежать від координат. Обчислити

2.1) $\operatorname{grad}\left((\vec{c},\vec{r})r^3\right)$. 2.2) $\operatorname{grad}\left([\vec{c},\vec{r}],[\vec{c},\vec{r}]\right)$.

3. Декартові компоненти вектора $\vec{c}$ не залежать від координат. Обчислити

3.1) $\operatorname{div}\left([\vec{c},\vec{r}]\cdot\sin r\right)$. 3.2) $\operatorname{div}\left([\vec{c},\vec{r}]\cdot\operatorname{tg} r^2\right)$.

4. Декартові компоненти вектора $\vec{c}$ не залежать від координат. Обчислити

4.1) $\operatorname{rot}\left([\vec{c},\vec{r}]\cdot\sin r\right)$. 4.2) $\operatorname{rot}\left([\vec{c},\vec{r}]\cdot\operatorname{tg} r^2\right)$.

Студенти мають виконувати завдання по варіантам згідно таблиці 1. Номер варіанту – це залишок від ділення порядкового номера студента в алфавітному списку групи на 16.

Таблиця 1. Розподіл завдань по варіантам для лабораторної роботи 1

Номер варіанту	Які завдання робити
1	1.1, 2.1, 3.1, 4.1
2	1.1, 2.1, 3.1, 4.2
3	1.1, 2.1, 3.2, 4.1
4	1.1, 2.1, 3.2, 4.2
5	1.1, 2.2, 3.1, 4.1
6	1.1, 2.2, 3.1, 4.2
7	1.1, 2.2, 3.2, 4.1
8	1.1, 2.2, 3.2, 4.2
9	1.2, 2.1, 3.1, 4.1
10	1.2, 2.1, 3.1, 4.2
11	1.2, 2.1, 3.2, 4.1
12	1.2, 2.1, 3.2, 4.2
13	1.2, 2.2, 3.1, 4.1
14	1.2, 2.2, 3.1, 4.2
15	1.2, 2.2, 3.2, 4.1
16	1.2, 2.2, 3.2, 4.2

2. Рівняння Максвела. Вектор Пойнтінга. Поведінка полів на межі двох середовищ. Метод комплексних амплітуд

2.1. Короткі теоретичні відомості

Фундаментальними постулатами електродинаміки є рівняння Максвела:

$$\mathrm{div}\vec{D}=\rho,\ \mathrm{div}\vec{B}=0,\ \mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \mathrm{rot}\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j}, \tag{2.1}$$

де $\vec{D}$ – електрична індукція, $\vec{B}$ – магнітна індукція, $\vec{E}$ – напруженість електричного поля, $\vec{H}$ – напруженість магнітного поля, ρ – густина заряду та $\vec{j}$ – густина струму. У найпростіших середовищах (ізотропних, не феромагнітних та не сегнетоелектричних), у випадку не сильних полів, які не сильно змінюються у просторі і часі, індукції та напруженості полів пов’язані співвідношеннями

$$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E},\quad \vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}, \tag{2.2}$$

де ε_0 та μ_0 – електрична та магнітна константи:

$$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}},\ \varepsilon_0=\frac{1}{\mu_0c^2}, \tag{2.3}$$

$c=3\cdot10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі; ε та μ – діелектрична та магнітна проникності середовища, відповідно. Для таких середовищ вектором потоку енергії електромагнітного поля є вектор Пойнтінга $\vec{\Pi}$, що задається виразом

$$\vec{\Pi}=\left[\vec{E},\vec{H}\right]. \tag{2.4}$$

На межі двох середовищ виконуються наступні граничні умови для компонент полів:

$$D_{n1}-D_{n2}=\xi,\quad B_{n1}-B_{n2}=0,\quad H_{\tau1}-H_{\tau2}=\left|\vec{\eta}\right|,\quad E_{\tau1}-E_{\tau2}=0, \tag{2.5}$$

де ξ – поверхнева густина заряду, $\vec{\eta}$ – поверхнева густина струму, індекс 1 означає, що величина взята у першому середовищі, індекс 2 – у другому; індекс n означає нормальну компоненту відповідного вектора та індекс τ – тангенціальну. Нормальна компонента є перпендикулярною до поверхні розділу двох середовищ, а тангенціальна – паралельною.

У багатьох випадках, що розглядаються у технічній електродинаміці, всі характеристики поля та зарядів змінюються з часом з однаковою постійною частотою. Такий випадок називають випадком монохроматичного поля, та його зручно описувати в термінах комплексних амплітуд.

Єдиною скалярною величиною, що міститься у рівняннях Максвела, є густина заряду. Нехай вона залежить від часу за законом

$$\rho = \rho_m \cos(\omega t + \varphi), \tag{2.6}$$

тоді її комплексною амплітудою буде величина $\tilde{\rho}_m$:

$$\tilde{\rho}_m = \rho_m e^{i\varphi}. \tag{2.7}$$

Нехай задано векторну величину

$$\vec{A} = \vec{e}_x A_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + \vec{e}_y A_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + \vec{e}_z A_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z), \tag{2.8}$$

амплітуди компонент A_{mx}, A_{my}, A_{mz} та фази компонент φ_x, φ_y, φ_z можуть залежати від координат, проте не від часу. Тоді її комплексною амплітудою буде величина $\tilde{\vec{A}}_m$:

$$\tilde{\vec{A}}_m = \vec{e}_x A_{mx} e^{i\varphi_x} + \vec{e}_y A_{my} e^{i\varphi_y} + \vec{e}_z A_{mz} e^{i\varphi_z}. \tag{2.9}$$

Зауважимо, що комплексна амплітуда може залежати від координат, проте не від часу.

У випадку монохроматичного поля середнє за період значення вектора Пойнтінга задається виразом

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^* \right], \tag{2.10}$$

зірочка означає комплексне спряження.

2.2. Розбір задач

Задача 1. В деякій точці простору та в деякий момент часу $\vec{E} = A_2 \vec{e}_y$, $\vec{\Pi} = A_1 \vec{e}_x + A_3 \vec{e}_z$, $A_{1,2,3} = \mathrm{const}$. Знайти в цій точці простору в цей момент часу вектор $\vec{H}$, якщо $\vec{H} \perp \vec{E}$.

Так як $\vec{H} \perp \vec{E}$, а $\vec{E}$ має лише y-компоненту, то $H_y = 0$. За визначенням векторного добутку

$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right] \Rightarrow \Pi_i = \varepsilon_{ijk} E_j H_k, \tag{2.11}$$

звідки на основі визначення симолу Леві–Чивіти

$$\Pi_1 = \varepsilon_{1jk} E_j H_k = \varepsilon_{123} E_2 H_3 + \varepsilon_{132} E_3 H_2 = E_2 H_3, \tag{2.12}$$

бо за умовою $E_3 = E_z = 0$. Відповідно,

$$H_3 = \frac{\Pi_1}{E_2} = \frac{\Pi_x}{E_y} = \frac{A_1}{A_2}. \tag{2.13}$$

Також на основі (2.11) отримуємо, що

$$\Pi_3 = \varepsilon_{3jk} E_j H_k = \varepsilon_{312} E_1 H_2 + \varepsilon_{321} E_2 H_1 = -E_2 H_1, \tag{2.14}$$

бо за умовою $E_1 = E_x = 0$. Тоді

$$H_1 = -\frac{\Pi_3}{E_2} = -\frac{\Pi_z}{E_y} = -\frac{A_3}{A_2}. \tag{2.15}$$

Відповідь збираємо на основі (2.13), (2.15), а також факту $H_y = 0$.

Відповідь: $\vec{H} = -\dfrac{A_3}{A_2}\vec{e}_x + \dfrac{A_1}{A_2}\vec{e}_z$.

Задача 2. Дано, що напрям вектору $\vec{E}$ не змінюється. Довести, що $\vec{E} \perp \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Оберемо систему координат так, щоб вектор $\vec{E}$ був співнапрямленим з $\vec{e}_x$:

$$\vec{E} = E\vec{e}_x. \tag{2.16}$$

Порахуємо x-компоненту $\mathrm{rot}\vec{E}$:

$$\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{123} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} + \varepsilon_{132} \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0, \tag{2.17}$$

бо $E_3 = E_2 = 0$. Тоді за третім з рівнянь Максвела (2.1) матимемо

$$\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \alpha \vec{e}_y + \beta \vec{e}_z. \tag{2.18}$$

Тоді скалярний добуток

$$\left(\vec{E},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=\left(E\vec{e}_x,\alpha\vec{e}_y+\beta\vec{e}_z\right)=E\alpha\left(\vec{e}_x,\vec{e}_y\right)+E\beta\left(\vec{e}_x,\vec{e}_z\right)=0+0=0\,, \qquad (2.19)$$

тож $\vec{E}\perp\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$*, що і треба було довести.*

Задача 3. Два середовища з діелектричними проникностями ε_1 та ε_2 розділені плоскою межею. Напруженість електричного поля у першому середовищі утворює кут α_1 до нормалі к поверхні розділу середовищ. Поверхнева густина заряду дорівнює нулю. Знайти відповідний кут у другому середовищі.

За граничними умовами (2.5) та матеріальними рівняннями (2.2) маємо

$$D_{n1}=D_{n2}\Rightarrow\varepsilon_1\varepsilon_0E_{n1}=\varepsilon_2\varepsilon_0E_{n2}\Rightarrow\varepsilon_1E_{n1}=\varepsilon_2E_{n2}\,,\;\;E_{\tau1}=E_{\tau2}\,, \qquad (2.20)$$

бо поверхнева густина заряду дорівнює нулю.

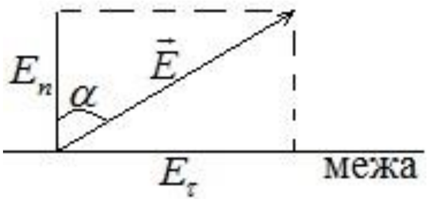

Рис. 2.1

Кут між вектором $\vec{E}$ та нормаллю до межі розділу середовищ пов'язан з компонентами вектора наступним чином:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=E_\tau/E_n\,, \qquad (2.21)$$

див. рис. 2.1. Відповідно,

$$\mathrm{tg}\,\alpha_2=\frac{E_{\tau2}}{E_{n2}},\;\;\mathrm{tg}\,\alpha_1=\frac{E_{\tau1}}{E_{n1}}, \qquad (2.22)$$

звідки на основі (2.20) маємо

$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2}{\mathrm{tg}\,\alpha_1}=\frac{E_{\tau2}}{E_{n2}}\frac{E_{n1}}{E_{\tau1}}=\frac{E_{\tau2}}{E_{\tau1}}\frac{E_{n1}}{E_{n2}}=1\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\Rightarrow\alpha_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\mathrm{tg}\,\alpha_1\right). \qquad (2.23)$$

Відповідь: $\alpha_2=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\mathrm{tg}\,\alpha_1\right)$.

Задача 4. Дано комплексну амплітуду напруженості електричного поля: $\tilde{\tilde{E}}_m = 5\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot e^{1,3i} \cdot \vec{e}_x - 9\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot e^{0,3i} \cdot \vec{e}_y + 14\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot e^{-1,8i} \cdot \vec{e}_z$. Знайти вектор напруженості електричного поля в момент часу 0,02 нс, а також модуль напруженості електричного поля в цей момент часу. Частота коливань дорівнює 10 ГГц.

Перепишемо комплексну задану комплексну амплітуду наступним чином:

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{E}}_m &= 5\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot e^{1,3i} \cdot \vec{e}_x + 9\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot e^{0,3i} \cdot e^{i\pi} \cdot \vec{e}_y + 14\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot e^{-1,8i} \cdot \vec{e}_z = \\ &= 5\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot e^{1,3i} \cdot \vec{e}_x + 9\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot e^{(0,3+\pi)i} \cdot \vec{e}_y + 14\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot e^{-1,8i} \cdot \vec{e}_z,\end{aligned} \tag{2.24}$$

тут використано тотожність

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1. \tag{2.25}$$

З формул (2.8) та (2.9) бачимо, що відповідна залежність від часу «реальної живої» напруженості електричного поля є

$$\begin{aligned}\vec{E}(t) = 5\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \cos(\omega t + 1,3) \cdot \vec{e}_x + 9\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \cos(\omega t + 0,3 + \pi) \cdot \vec{e}_y + \\ +14\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \cos(\omega t - 1,8) \cdot \vec{e}_z.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Кутова частота ω та частота f пов'язані співвідношенням

$$\omega = 2\pi f, \tag{2.27}$$

тоді на основі (2.26) та (2.27) маємо, що у момент часу 0,02 нс

$$\begin{aligned}\vec{E}(t = 0,02\text{нс}) &= 5\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10 \cdot 10^9\,\text{с}^{-1} \cdot 0,02 \cdot 10^{-9}\,\text{с} + 1,3\right) \cdot \vec{e}_x + \\ &+9\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10 \cdot 10^9\,\text{с}^{-1} \cdot 0,02 \cdot 10^{-9}\,\text{с} + 0,3 + \pi\right) \cdot \vec{e}_y + \\ &+14\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10 \cdot 10^9\,\text{с}^{-1} \cdot 0,02 \cdot 10^{-9}\,\text{с} - 1,8\right) \cdot \vec{e}_z \approx \\ &\approx -4,17\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \vec{e}_x - 0,13\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \vec{e}_y + 11,98\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \vec{e}_z,\end{aligned} \tag{2.28}$$

та відповідний модуль напруженості поля

$$\left|\vec{E}\left(t=0{,}02\text{нс}\right)\right| \approx \sqrt{\left(-4{,}17\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)^2 + \left(-0{,}13\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)^2 + \left(11{,}98\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)^2} \approx 12{,}69\frac{\text{В}}{\text{м}} \tag{2.29}$$

Відповідь: $\vec{E} \approx -4{,}17\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot\vec{e}_x - 0{,}13\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot\vec{e}_y + 11{,}98\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot\vec{e}_z$, $\left|\vec{E}\right| \approx 12{,}69\frac{\text{В}}{\text{м}}$ в момент часу $t = 0{,}02\text{нс}$.

Задача 5. Задано залежності від координат та часу для напруженостей електричного та магнітного полів: $\vec{E} = A_2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\omega t - bz\right)\vec{e}_y$,

$\vec{H} = -A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\omega t - bz\right)\vec{e}_x + A_3 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\omega t - bz\right)\vec{e}_z$, $A_{1,2,3}, a, b$ – дійсні константи. Знайти середнє за період значення вектора Пойнтінга. Обчислення провести двома способами: безпосередньо інтегруванням за часом та за допомогою метода комплексних амплітуд.

Спершу зробимо безпосереднім інтегруванням за часом. Порахуємо залежності від часу компонент вектора Пойнтінга на основі формули (2.11):

$$\begin{gathered}\Pi_1 = A_2 A_3 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\omega t - bz\right)\cos\left(\omega t - bz\right),\\ \Pi_2 = 0,\ \Pi_3 = A_1 A_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\omega t - bz\right),\end{gathered} \tag{2.30}$$

а далі знаходимо відповідь за визначенням середнього. Очевидно, що $\langle \Pi_2 \rangle = 0$. Знайдемо $\langle \Pi_1 \rangle$:

$$\langle \Pi_1 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \Pi_1\, dt = \frac{\omega A_2 A_3}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\int_0^{2\pi/\omega} dt \sin\left(\omega t - bz\right)\cos\left(\omega t - bz\right) =$$

$$= \left\{\omega t = \beta\right\} = \frac{A_2 A_3}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\int_0^{2\pi} d\beta \sin\left(\beta - bz\right)\cos\left(\beta - bz\right) = \tag{2.31}$$

$$= \frac{A_2 A_3}{4\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\int_0^{2\pi} d\beta \sin\left(2\beta - 2bz\right) = 0$$

та $\langle \Pi_z \rangle$:

$$\langle \Pi_z \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \Pi_z\, dt = \frac{\omega}{2\pi} A_1 A_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\int_0^{2\pi/\omega} dt \sin^2(\omega t - \beta z) = \{\omega t = \beta\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} A_1 A_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\int_0^{2\pi} dt\left(1 - \cos(2\beta - 2\beta z)\right) = \frac{2\pi}{4\pi} A_1 A_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \tag{2.32}$$

$$= \frac{1}{2} A_1 A_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Тоді на основі (2.31) та (2.32) бачимо, що

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} A_1 A_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot \vec{e}_z . \tag{2.33}$$

Тепер отримаємо ту ж відповідь на основі метода комплексних амплітуд. Перепишемо поля в умові задачі наступним чином:

$$\begin{gathered} \vec{H} = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_x + A_3 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - \beta z)\vec{e}_z , \\ \vec{E} = A_2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_y , \end{gathered} \tag{2.34}$$

тут враховано відомі тригонометричні формули

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha , \quad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha . \tag{2.35}$$

Відповідно до формул (2.8) та (2.9), комплексні амплітуди полів (2.34) є наступними:

$$\begin{gathered} \vec{H}_m = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta z\right)}\cdot \vec{e}_x + A_3 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta z}\cdot \vec{e}_z , \\ \vec{E}_m = A_2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \beta z\right)}\cdot \vec{e}_y , \end{gathered} \tag{2.36}$$

тоді комплексне спряження

$$\vec{H}_m^* = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \beta z\right)}\cdot \vec{e}_x + A_3 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\beta z}\cdot \vec{e}_z , \tag{2.37}$$

і, відповідно, середній за період вектор Пойнтінга (див. (2.10)):

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_m, \vec{H}_m^*\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[A_2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \beta z\right)}\vec{e}_y,\ A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\left(\beta z - \frac{\pi}{2}\right)}\vec{e}_x + A_3 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\beta z}\vec{e}_z\right] =$$

$$= \frac{1}{2}A_2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\vec{e}_y, \vec{e}_x\right]\mathrm{Re}\left\{\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2} - \beta z\right)\right)\exp\left(i\left(\beta z - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right\} + \tag{2.38}$$

$$+ \frac{1}{2}A_2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) A_3 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\vec{e}_y, \vec{e}_z\right]\mathrm{Re}\left\{\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2} - \beta z\right)\right)\exp(i\beta z)\right\}.$$

Так як

$$\mathrm{Re}\left\{\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2} - \beta z\right)\right)\exp\left(i\left(\beta z - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\exp(-i\pi)\right\} = -1,$$

$$\mathrm{Re}\left\{\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2} - \beta z\right)\right)\exp(i\beta z)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 0,\ \left[\vec{e}_y, \vec{e}_x\right] = -\vec{e}_z, \tag{2.39}$$

то на основі (2.38) отримуємо

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2}A_2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{e}_z = \frac{1}{2}A_1 A_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{e}_z. \tag{2.40}$$

Відповідь: $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2}A_1 A_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\vec{e}_z$.

2.3. Лабораторна робота 2

1. Довести, що якщо напрям вектора $\vec{H}$ не змінюється, то $\vec{H} \perp \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$.

2. Два середовища з магнітними проникностями μ_1 і μ_2 розділені плоскою межою. Магнітна індукція у першому середовищі утворює кут α_1 до нормалі к поверхні розділу середовищ. Поверхнева густина струму дорівнює нулю. Знайти відповідний кут у другому середовищі.

3. В деякій точці простору в деякий момент часу

3.1) $\vec{E} = A_1\vec{e}_x$, $\vec{\Pi} = A_2\vec{e}_y + A_3\vec{e}_z$;

3.2) $\vec{E} = A_3\vec{e}_z$, $\vec{\Pi} = A_1\vec{e}_x + A_2\vec{e}_y$;

$A_{1,2,3}$ – задані константи. Знайти в цій точці простору в цей момент часу вектор $\vec{H}$, якщо $\vec{H} \perp \vec{E}$.

4. Задано комплексну амплітуду напруженості електричного поля:

4.1) $\dot{\vec{E}}_m = 7\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot e^{i\cdot 0,9}\cdot\vec{e}_x + 5\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot e^{i\cdot 0,6}\cdot\vec{e}_y - 3\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot e^{i\cdot 1,2}\cdot\vec{e}_z$;

4.2) $\dot{\vec{E}}_m = 1\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot e^{i\cdot 1,2}\cdot\vec{e}_x - 4\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot e^{i\cdot 0,5}\cdot\vec{e}_y - 2\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot e^{i\cdot 0,8}\cdot\vec{e}_z$.

Знайти вектор напруженості електричного поля в момент часу 1 нс, а також модуль напруженості електричного поля в цей момент часу. Частота коливань дорівнює 1 ГГц.

5. Задано залежності від координат та часу для напруженостей електричного та магнітного полів:

5.1) $\vec{H} = A_1\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(\omega t - \beta z)\cdot\vec{e}_x + A_2\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - \beta z)\cdot\vec{e}_y$,

$\vec{E} = A_3\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(\omega t - \beta z)\cdot\vec{e}_z$;

5.2) $\vec{H} = A_2\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(\omega t - \beta z)\cdot\vec{e}_y + A_3\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - \beta z)\cdot\vec{e}_z$,

$\vec{E} = A_1\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(\omega t - \beta z)\cdot\vec{e}_x$.

$A_{1,2,3}, a, b$ – дійсні константи. Знайти середнє за період значення вектора Пойнтінга. Обчислення провести двома способами: безпосередньо інтегруванням за часом та за допомогою метода комплексних амплітуд.

Студенти мають виконувати завдання по варіантам згідно таблиці 2. Номер варіанту – це залишок від ділення порядкового номера студента в алфавітному списку групи на 16.

Таблиця 2. Розподіл завдань по варіантам для лабораторної роботи 2

Номер варіанту	Які завдання робити
1	1, 3.1, 4.1, 5.1
2	1, 3.1, 4.1, 5.2
3	1, 3.1, 4.2, 5.1
4	1, 3.1, 4.2, 5.2
5	1, 3.2, 4.1, 5.1
6	1, 3.2, 4.1, 5.2
7	1, 3.2, 4.2, 5.1
8	1, 3.2, 4.2, 5.2
9	2, 3.1, 4.1, 5.1
10	2, 3.1, 4.1, 5.2
11	2, 3.1, 4.2, 5.1
12	2, 3.1, 4.2, 5.2
13	2, 3.2, 4.1, 5.1
14	2, 3.2, 4.1, 5.2
15	2, 3.2, 4.2, 5.1
16	2, 3.2, 4.2, 5.2

3. Плоскі електромагнітні хвилі у відкритому середовищі

3.1. Короткі теоретичні відомості

Плоска монохроматична хвиля у відкритому середовищі з нульовими густинами заряду і струму є поперечною хвилею, вектори $\vec{n}_0$, $\tilde{\vec{E}}_m$ та $W\tilde{\vec{H}}_m$ утворюють праву трійку:

$$\tilde{\vec{H}}_m = \frac{1}{W}\left[\vec{n}_0, \tilde{\vec{E}}_m\right], \tag{3.1}$$

де $\vec{n}_0$ – одиничний вектор, в напрямку якого розповсюджується хвиля, $\tilde{\vec{E}}_m$ – комплексна амплітуда напруженості електричного поля у хвилі, $\tilde{\vec{H}}_m$ – комплексна амплітуда напруженості магнітного поля у хвилі, W – хвильовий опір вільного простору, що визначається виразом

$$W = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}\mu_0}{\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0}}, \tag{3.2}$$

де $\tilde{\mu}$ – комплексна магнітна проникність середовища, $\tilde{\varepsilon}$ – комплексна діелектрична проникність середовища; комплексні амплітуди індукцій та напруженостей пов'язані рівняннями

$$\tilde{\vec{B}}_m = \tilde{\mu}\mu_0\tilde{\vec{H}}_m, \quad \tilde{\vec{H}}_m = \tilde{\mu}\mu_0\tilde{\vec{E}}_m. \tag{3.3}$$

Спрямуємо систему координат так, щоб хвиля розповсюджувалась у додатному напрямку Oz: $\vec{n}_0 = \vec{e}_z$. Тоді комплексна амплітуда напруженості електричного поля у хвилі буде мати вигляд

$$\tilde{\vec{E}}_m = \vec{e}_x\tilde{a}_{Ex}e^{-ikz} + \vec{e}_y\tilde{a}_{Ey}e^{-ikz}, \tag{3.4}$$

$\tilde{a}_{Ex}$, $\tilde{a}_{Ey}$ – деякі комплексні константи; відповідна величина для магнітного поля обчислюється за формулою (3.1). Тут k – хвильове число, що визначається наступним чином:

$$k = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}\varepsilon_0\mu_0}, \tag{3.5}$$

де ω – кругова частота хвильового процесу.

У випадку середовища без втрат хвиля є незгасаючою, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\tilde{\mu} = \mu \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, $W \in \mathbb{R}$. У випадку середовища з втратами всі ці величини є комплексними, та хвиля експоненційно згасає з координатою.

Фазова швидкість хвилі у середовищі без втрат обчислюється за формулою

$$\upsilon_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k}. \qquad (3.6)$$

3.2. Розбір задач

Задача 1. Плоска монохроматична лінійно-поляризована електромагнітна хвиля розповсюджується у вільному простоті без втрат з $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$. Густини заряду і струму дорівнюють нулю. Амплітуда напруженості електричного поля $E = 50$ мВ/м, кругова частота хвильового процесу $\omega = 10^8\,\text{с}^{-1}$. Знайти хвильове число, фазову швидкість хвилі, хвильовий опір простору, амплітуду напруженості магнітного поля та модуль середнього за період вектора Пойнтінга.

Хвильове число та фазову швидкість хвилі знаходимо за формулами (3.5) та (3.6), відповідно:

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu \cdot \frac{1}{c^2}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{10^8\,\text{с}^{-1}}{3 \cdot 10^8\,\text{м/с}} \cdot \sqrt{4 \cdot 1} = \frac{2}{3}\,\text{м}^{-1},$$
$$\upsilon_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{10^8\,\text{с}^{-1}}{2/3\,\text{м}^{-1}} = 1{,}5 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}, \qquad (3.7)$$

у обчисленнях використано факт

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \qquad (3.8)$$

що є наслідком (2.3).

Хвильовий опір знайдемо за формулою (3.2):

$$W = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0^2}{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0^2}{\varepsilon}c^2} = c\mu_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} =$$
$$= 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \approx 188{,}5\ \text{Ом}. \qquad (3.9)$$

Лінійно-поляризованою є поперечна хвиля, в якій коливання напруженостей полів мають місце лише в одній площині. Оберемо систему координат так, щоб хвиля розповсюджувалась у додатному напрямку Oz: $\vec{n}_0 = \vec{e}_z$, а вектор напруженості електричного поля був весь час колінеарним до $\vec{e}_x$. Тоді вектор напруженості електричного поля

$$\vec{E} = E\cos\left(\omega t + \varphi - kz\right)\vec{e}_x\,, \tag{3.10}$$

та його комплексна амплітуда

$$\tilde{\vec{E}}_m = Ee^{i\varphi}e^{-ikz}\vec{e}_x\,, \tag{3.11}$$

E – амплітуда вектора напруженості електричного поля. Знайдемо тоді $\tilde{\vec{H}}_m$ за формулою (3.1):

$$\tilde{\vec{H}}_m = \frac{1}{W}\left[\vec{n}_0, \tilde{\vec{E}}_m\right] = \frac{1}{W}\left[\vec{e}_z, Ee^{i\varphi}e^{-ikz}\vec{e}_x\right] = \frac{Ee^{i\varphi}e^{-ikz}}{W}\left[\vec{e}_z, \vec{e}_x\right] = \frac{Ee^{i\varphi}e^{-ikz}}{W}\vec{e}_y\,, \tag{3.12}$$

Відповідний вектор напруженості магнітного поля

$$\vec{H} = \frac{E}{W}\cos\left(\omega t - kz\right)\vec{e}_y\,, \tag{3.13}$$

звідки бачимо, що амплітуда вектора напруженості магнітного поля

$$H = \frac{E}{W} = \frac{50\,\text{мВ/м}}{188{,}5\,\text{Ом}} = \frac{5\cdot 10^{-2}\,\text{В/м}}{188{,}5\,\text{Ом}} \approx 2{,}65\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}\,. \tag{3.14}$$

Середній за період вектор Пойнтінга

$$\begin{aligned}\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^*\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[Ee^{i\varphi}e^{-ikz}\vec{e}_x, \frac{Ee^{-i\varphi}e^{ikz}}{W}\vec{e}_y\right] = \\ &= \frac{E^2}{2W}\left[\vec{e}_x, \vec{e}_y\right] = \frac{E^2}{2W}\vec{e}_z\,,\end{aligned} \tag{3.15}$$

звідки його модуль

$$\left|\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle\right| = \frac{E^2}{2W} = \frac{\left(5\cdot 10^{-2}\,\text{В/м}\right)^2}{2\cdot 188{,}5\,\text{Ом}} \approx 6{,}63\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\,. \tag{3.16}$$

Відповідь: $k = \frac{2}{3}\,\text{м}^{-1}$, $\upsilon_{\text{ф}} = 1{,}5\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $W \approx 188{,}5$ Ом, $\left|\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle\right| \approx 6{,}63\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$, $H \approx 2{,}65\cdot 10^{-4}$ А/м.

Задача 2. Електромагнітна хвиля розповсюджується у вакуумі в додатному напрямку Oz. Частота хвильового процесу $f = 10^{10}$ Гц. Знайти різницю фаз між координатами $z_1 = 5\text{см}$ та $z_2 = 5,7\text{см}$.

Нехай напруженість електричного поля має вигляд

$$\vec{E} = E_{mx}\cos\left(\omega t - kz + \varphi_x\right)\vec{e}_x + E_{my}\cos\left(\omega t - kz + \varphi_y\right)\vec{e}_y, \tag{3.17}$$

Звідки шукана різниця фаз

$$\begin{gathered}\Delta\varphi = \text{Фаза}\left(E_x\big|_{z=z_1}\right) - \text{Фаза}\left(E_x\big|_{z=z_2}\right) = \\ = \text{Фаза}\left(E_y\big|_{z=z_1}\right) - \text{Фаза}\left(E_y\big|_{z=z_2}\right) = -kz_1 + kz_2 = k\left(z_2 - z_1\right),\end{gathered} \tag{3.18}$$

У вакуумі $\varepsilon = \mu = 1$, відповідно порахуємо хвильове число (див. (3.7)):

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{3.19}$$

та

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\left(z_2 - z_1\right) = \frac{2\pi\cdot 10^{10}\,\text{с}^{-1}}{3\cdot 10^{8}\,\text{м/с}}\sqrt{1\cdot 1}\cdot\left(5,7\cdot 10^{-2}\,\text{м} - 5\cdot 10^{-2}\,\text{м}\right) \approx 1,466. \tag{3.20}$$

Відповідь: $\Delta\varphi \approx 1,466$ радіан.

Задача 3. Електромагнітна хвиля розповсюджується у середовищі без втрат з $\varepsilon = 9$, $\mu = 1$. Густини заряду і струму дорівнюють нулю. Модуль середнього за період вектора Пойнтінга дорівнює $\left|\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle\right| = 2\cdot 10^{-6}\,\text{Вт/м}^2$. Знайти амплітудні та діяльні значення напруженостей електричного та магнітного полів.

Нехай хвиля розповсюджується у додатному напрямку Oz. Знайдемо вираз, який пов'язує середній за період вектор Пойнтінга з напруженістю електричного поля на основі виразів (3.1) та (2.10):

$$\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^*\right] = \frac{1}{2}\text{Re}\left[\tilde{\vec{E}}_m, \frac{1}{W}\left[\vec{e}_z, \tilde{\vec{E}}_m^*\right]\right] = \frac{1}{2W}\text{Re}\left[\tilde{\vec{E}}_m, \left[\vec{e}_z, \tilde{\vec{E}}_m^*\right]\right], \tag{3.21}$$

бо для середовища без втрат $W \in \mathbb{R}$.

Розглянемо в загальному вигляді подвійний векторний добуток:

$$\begin{gathered}\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]_i = \varepsilon_{ijk} a_j \left[\vec{b},\vec{c}\right]_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} a_j b_m c_n = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kmn} a_j b_m c_n = \\ = \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) a_j b_m c_n = a_n b_i c_n - a_j b_j c_i = b_i\left(\vec{a},\vec{c}\right) - c_i\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right),\end{gathered} \tag{3.22}$$

звідки на основі (3.21)

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2W}\operatorname{Re}\left(\vec{e}_z\left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{E}}_m^*\right) - \tilde{\vec{E}}_m^*\left(\tilde{\vec{E}}_m, \vec{e}_z\right)\right). \tag{3.23}$$

Нехай

$$\vec{E} = E_x \cos\left(\omega t + \varphi_x - kz\right)\vec{e}_x + E_y \cos\left(\omega t + \varphi_y - kz\right)\vec{e}_y, \tag{3.24}$$

z-компонента поля $\vec{E}$ відсутня, бо хвиля є поперечною. Тоді

$$\tilde{\vec{E}}_m = \left(E_x e^{i\varphi_x}\vec{e}_x + E_y e^{i\varphi_y}\vec{e}_y\right)e^{-ikz},\ \tilde{\vec{E}}_m^* = \left(E_x e^{-i\varphi_x}\vec{e}_x + E_y e^{-i\varphi_y}\vec{e}_y\right)e^{ikz}, \tag{3.25}$$

та

$$\left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{E}}_m^*\right) = E_x^2 + E_y^2, \tag{3.26}$$

остання рівність має місце тому, що

$$\left(\vec{e}_x, \vec{e}_x\right) = \left(\vec{e}_y, \vec{e}_y\right) = 1,\ \left(\vec{e}_x, \vec{e}_y\right) = 0. \tag{3.27}$$

Скалярний добуток (3.26), який є сумою квадратів амплітуд компонент поля, називають квадратом амплітуди поля, а амплітуда поля – це корінь квадратний з відповідного скалярного добутку:

$$\left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{E}}_m^*\right) = E_x^2 + E_y^2 = E^2,\ E = \sqrt{\left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{E}}_m^*\right)}. \tag{3.28}$$

Хвиля є поперечною, тому

$$\tilde{\vec{E}}_m \perp \vec{e}_z,\ \left(\tilde{\vec{E}}_m, \vec{e}_z\right) = 0. \tag{3.29}$$

Тоді на основі (3.29), (3.28) та (3.23) маємо

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2W}\operatorname{Re}\left(\vec{e}_z E^2\right) = \frac{E^2}{2W}\vec{e}_z \Rightarrow \left|\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle\right| = \frac{E^2}{2W}, \tag{3.30}$$

Знайдемо хвильовий опір простору (див. (3.9)):

$$W = c\mu_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,, \tag{3.31}$$

звідки на основі (3.30) знаходимо

$$\begin{gathered} E = \sqrt{2c\mu_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\left|\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle\right|} = \sqrt{2\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}} \approx \\ \approx 2,2\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{В}}{\text{м}}, \end{gathered} \tag{3.32}$$

Діяльне значення напруженостей полів вводиться аналогічно діяльним значенням струму та напруги в колах змінного струму:

$$E_{\text{д}} = \frac{E}{\sqrt{2}} \approx \frac{2,2\cdot 10^{-2}}{\sqrt{2}}\,\frac{\text{В}}{\text{м}} \approx 1,6\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{В}}{\text{м}}. \tag{3.33}$$

Знайдемо тепер амплітудне значення напруженості магнітного поля:

$$H^2 = \left(\tilde{\vec{H}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^*\right) = \left(\frac{1}{W}\left[\vec{e}_z, \tilde{\vec{E}}_m\right], \frac{1}{W}\left[\vec{e}_z, \tilde{\vec{E}}_m^*\right]\right) = \frac{1}{W^2}\left(\left[\vec{e}_z, \tilde{\vec{E}}_m\right], \left[\vec{e}_z, \tilde{\vec{E}}_m^*\right]\right). \tag{3.34}$$

Розглянемо вираз

$$\begin{gathered} \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right) = \left[\vec{a},\vec{b}\right]_i\left[\vec{c},\vec{d}\right]_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k \varepsilon_{imn}c_m d_n = \left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right)a_j b_k c_m d_n = \\ = a_m b_k c_m d_k - a_n b_m c_m d_n = \left(\vec{a},\vec{c}\right)\left(\vec{b},\vec{d}\right) - \left(\vec{a},\vec{d}\right)\left(\vec{b},\vec{c}\right), \end{gathered} \tag{3.35}$$

звідки бачимо, що

$$H^2 = \frac{1}{W^2}\left(\left(\vec{e}_z,\vec{e}_z\right)\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_m^*\right) - \left(\vec{e}_z,\tilde{\vec{E}}_m^*\right)\left(\tilde{\vec{E}}_m,\vec{e}_z\right)\right) = \frac{1}{W^2}\left(1\cdot E^2 - 0\right) = \frac{E^2}{W^2}, \tag{3.36}$$

звідки з урахуванням (3.31) отримуємо

$$\begin{gathered} H = \frac{E}{W} = \frac{E}{c\mu_0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{2,2\cdot 10^{-2}\,\text{В/м}}{3\cdot 10^8\,\text{м/с}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\text{Гн/м}}\sqrt{\frac{9}{1}} \approx 1,8\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}, \\ H_{\text{д}} = \frac{1,8\cdot 10^{-4}}{\sqrt{2}}\,\frac{\text{А}}{\text{м}} \approx 1,3\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}. \end{gathered} \tag{3.37}$$

Відповідь: $E \approx 2,2\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$, $E_{\text{д}} \approx 1,6\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$, $H \approx 1,8\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$, $H_{\text{д}} \approx 1,3\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Задача 4. Середня потужність, що переноситься хвилею через площадку $S = 0,2\text{м}^2$, дорівнює $10^{-2}\,\text{Вт}$. Знайти амплітуди напруженостей електричного та магнітного полів, якщо напрям розповсюдження хвилі становить кут $\theta = 30^0$ з нормаллю до площадки. Середовище без втрат з нульовими густинами струму та заряду, $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$.

Нехай хвиля розповсюджується у додатному напрямку Oz. Середній вектор Пойнтінга дорівнює

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2W}\operatorname{Re}\left(\vec{e}_z E^2\right) = \frac{E^2}{2W}\vec{e}_z, \tag{3.38}$$

див. виведення цієї формули при розв'язанні задачі 3 (див. (3.30)). Середня потужність, що переноситься через відповідну площадку, дорівнює

$$\left\langle P \right\rangle = \left\langle \int_S \left(\vec{\Pi}, \overrightarrow{dS}\right) \right\rangle = \int_S \left(\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle, \overrightarrow{dS}\right), \tag{3.39}$$

так як площадка є плоскою, то відповідний інтеграл

$$\left\langle P \right\rangle = \left(\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle, \vec{n}\right) S = \left|\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle\right| \left(\vec{e}_z, \vec{n}\right) S = \left|\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle\right| S\cos\theta = \frac{E^2}{2W} S\cos\theta, \tag{3.40}$$

звідки з урахуванням (3.31) матимемо

$$\begin{gathered} E^2 = \frac{2W\left\langle P \right\rangle}{S\cos\theta} = 2c\mu_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\left\langle P \right\rangle}{S\cos\theta} = \\ = 2\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\frac{10^{-2}\,\text{Вт}}{0,2\text{м}^2\cdot\sqrt{3}/2} \approx 21,8\,\frac{\text{В}^2}{\text{м}^2} \end{gathered} \tag{3.41}$$

та

$$E \approx \sqrt{21,8\,\frac{\text{В}^2}{\text{м}^2}} \approx 4,7\,\frac{\text{В}}{\text{м}}. \tag{3.42}$$

Згідно (3.37) отримуємо амплітуду напруженості магнітного поля:

$$H = \frac{E}{W} = \frac{E}{c\mu_0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{4,7\,\text{В/м}}{3\cdot 10^8\,\text{м/с}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\text{Гн/м}}\sqrt{\frac{4}{1}} \approx 2,5\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}. \tag{3.43}$$

Відповідь: $E \approx 4,7\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$, $H \approx 2,5\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$.

3.3. Лабораторна робота 3

Для всіх задач плоска електромагнітна хвиля розповсюджується у вільному просторі. Простір заповнено середовищем без втрат, густина заряду і густина струму у середовищі, що заповнює простір, дорівнюють нулю.

1. Хвиля є лінійно-поляризованою. Задано проникності середовища ε, μ; амплітуду напруженості магнітного поля H та частоту хвилі f. Знайти хвильове число, фазову швидкість хвилі, хвильовий опір простору, амплітуду напруженості електричного поля та модуль середнього за період вектора Пойнтінга.

1.1) $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $H = 10^{-6}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$, $f = 200\text{МГц}$

1.2) $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$, $H = 10^{-5}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$, $f = 300\text{МГц}$

Примітка: не забувати, що задано частоту, а не кругову частоту хвилі.

2. Хвиля розповсюджується у додатному напрямку Oz. Задано проникності середовища ε, μ та частоту хвилі f. Знайти різницю фаз між точками з координатами z_2 та z_1.

2.1) $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$, $f = 1{,}8\text{ГГц}$, $z_1 = 5{,}2\text{см}$, $z_2 = 5{,}8\text{см}$

2.2) $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$, $f = 900\text{МГц}$, $z_1 = 1{,}2\text{см}$, $z_2 = 1{,}3\text{см}$

3. Задано проникності середовища ε, μ та діяльне значення напруженості магнітного поля $H_\text{д}$. Знайти амплітудні значення напруженостей електричного та магнітного полів, діяльне значення напруженості електричного поля і модуль середнього за період вектора Пойнтінга.

3.1) $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$, $H_\text{д} = 20\,\frac{\text{мкА}}{\text{м}}$

3.2) $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $H_\text{д} = 50\,\frac{\text{мкА}}{\text{м}}$

4. Середня потужність, що переноситься хвилею через площадку S дорівнює $\langle P \rangle$. Знайти амплітуди напруженостей електричного та магнітного полів, якщо напрям розповсюдження хвилі становить кут θ з нормаллю до площадки. Проникності середовища ε, μ.

4.1) $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$, $\theta = 0^0$, $S = 0{,}1\text{м}^2$, $\langle P \rangle = 10^{-3}$ Вт

4.2) $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$, $\theta = 60^0$, $S = 0{,}3\text{м}^2$, $\langle P \rangle = 10^{-1}$ Вт

Студенти мають виконувати завдання по варіантам згідно таблиці 3. Номер варіанту – це залишок від ділення порядкового номера студента в алфавітному списку групи на 16.

Таблиця 3. Розподіл завдань по варіантам для лабораторної роботи 3

Номер варіанту	Які завдання робити
1	1.1, 2.1, 3.1, 4.1
2	1.1, 2.1, 3.1, 4.2
3	1.1, 2.1, 3.2, 4.1
4	1.1, 2.1, 3.2, 4.2
5	1.1, 2.2, 3.1, 4.1
6	1.1, 2.2, 3.1, 4.2
7	1.1, 2.2, 3.2, 4.1
8	1.1, 2.2, 3.2, 4.2
9	1.2, 2.1, 3.1, 4.1
10	1.2, 2.1, 3.1, 4.2
11	1.2, 2.1, 3.2, 4.1
12	1.2, 2.1, 3.2, 4.2
13	1.2, 2.2, 3.1, 4.1
14	1.2, 2.2, 3.1, 4.2
15	1.2, 2.2, 3.2, 4.1
16	1.2, 2.2, 3.2, 4.2

4. Хвильовий процес у прямокутному хвилеводі

4.1. Короткі теоретичні відомості

Розглядається лише хвилевід з ідеально провідними стінками та з середовищем без втрат всередині. Хвиля з індексами l, n розповсюджується хвилеводом, якщо виконується умова

$$\tilde{\gamma}_{ln}^2 = \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - k^2 < 0, \tag{4.1}$$

де k – хвильове число, a, b – поперечні розміри хвилеводу, $a > b$; $\tilde{\gamma}_{ln}$ – коефіцієнт розповсюдження відповідної хвилі. Критична частота хвилі з індексами l, n обчислюється за формулою

$$f_{ln\text{кр}} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \tag{4.2}$$

ε, μ – проникності внутрішнього середовища хвилеводу, c – швидкість світла у вакуумі. При частоті, меншій за критичну, хвиля розповсюджуватись хвилеводом не може.

Для хвиль, що розповсюджуються хвилеводом, коефіцієнт розповсюдження має бути суто уявним:

$$\tilde{\gamma}_{ln} = i\beta_{ln}, \tag{4.3}$$

відповідно, для таких хвиль

$$\tilde{\vec{E}}_{mnl}, \tilde{\vec{H}}_{mln} \sim e^{i(\omega t - \beta_{ln} z)} \tag{4.4}$$

та фазова швидкість хвилі

$$\upsilon_{\text{ф}ln} = \frac{\omega}{\beta_{ln}}; \tag{4.5}$$

тут і надалі вважається, що хвилевід витягнуто вздовж Oz та хвиля розповсюджується в додатному напрямку Oz. Відповідно, за 1 період фазовий фронт пройде відстань, що дорівнює довжині хвилі:

$$\lambda_{ln} = \upsilon_{\text{ф}ln} T = \frac{\omega}{\beta_{ln}}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta_{ln}}. \tag{4.6}$$

Хвилевід є одномодовим, якщо в ньому може поширюватись лише основна хвиля, а всі інші хвилі поширюватись не можуть. Основною хвилею у плоскому хвилеводі є хвиля H_{10}. Хвилевід є одномодовим, якщо для частоти хвильового процесу у хвилеводі виконуються нерівності

$$\frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} < f < \min\left(\frac{c}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}, \frac{c}{2b\sqrt{\varepsilon\mu}}\right). \tag{4.7}$$

Плоским хвилеводом можуть поширюватись E- та H- хвилі. Поля у E_{ln}-хвилі задаються виразами

$$\begin{gathered}
\tilde{E}_{mz_ln} = \tilde{E}_{ln}^{0}\sin\left(\frac{\pi l}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b}x\right)e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z},\ \tilde{H}_{mz_ln} = 0,\\
\tilde{E}_{mx_ln} = -\tilde{E}_{ln}^{0}\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2+\tilde{\gamma}_{ln}^2}\frac{\pi l}{a}\cos\left(\frac{\pi l}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right)e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z},\\
\tilde{E}_{my_ln} = -\tilde{E}_{ln}^{0}\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2+\tilde{\gamma}_{ln}^2}\frac{\pi n}{b}\sin\left(\frac{\pi l}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right)e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z},\\
\tilde{H}_{mx_ln} = \frac{1}{W_{Eln}}\tilde{E}_{ln}^{0}\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2+\tilde{\gamma}_{ln}^2}\frac{\pi n}{b}\sin\left(\frac{\pi l}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right)e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z},\\
\tilde{H}_{my_ln} = -\frac{1}{W_{Eln}}\tilde{E}_{ln}^{0}\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{k^2+\tilde{\gamma}_{ln}^2}\frac{\pi l}{a}\cos\left(\frac{\pi l}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right)e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z},\\
\tilde{\gamma}_{ln}^2 = \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - k^2,\ W_{Eln} = \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{i\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0},\\
\tilde{E}_{ln}^{0} = \mathrm{const},\quad l,n\in\mathbb{Z},\ \ l,n>0,
\end{gathered} \tag{4.8}$$

та поля у H_{ln}-хвилі задаються виразами

$$\begin{gathered}
\tilde{H}_{mz_ln} = \tilde{H}_{ln}^{0}\cos\left(\frac{\pi l}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right)e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z},\ \tilde{E}_{mz_ln} = 0,\\
\tilde{H}_{mx_ln} = \tilde{H}_{ln}^{0}\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2+k^2}\frac{\pi l}{a}\sin\left(\frac{\pi l}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right)e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z},\\
\tilde{H}_{my_ln} = \tilde{H}_{ln}^{0}\frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2+k^2}\frac{\pi n}{b}\cos\left(\frac{\pi l}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right)e^{-\tilde{\gamma}_{ln}z},
\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$\tilde{E}_{mx\_ln} = \tilde{H}_{ln}^0 W_{Hln} \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \frac{\pi n}{b} \cos\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z},$$

$$\tilde{E}_{my\_ln} = -\tilde{H}_{ln}^0 W_{Hln} \frac{\tilde{\gamma}_{ln}}{\tilde{\gamma}_{ln}^2 + k^2} \frac{\pi l}{a} \sin\left(\frac{\pi l}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-\tilde{\gamma}_{ln} z},$$

$$\tilde{\gamma}_{ln}^2 = \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - k^2, \quad W_{Hln} = \frac{i\omega\tilde{\mu}\mu_0}{\tilde{\gamma}_{ln}},$$

$$l, n \in \mathbb{Z}, \quad l, n \geq 0, \quad \tilde{H}_{ln}^0 = \text{const},$$

l, n *не дорівнюють нулю одночасно.*

4.2. Розбір задач

Задача 1. У прямокутному хвилеводі з поперечними розмірами $a = 5$см, $b = 2{,}5$см проходе хвильовий процес з частотою $f = 7{,}5$ГГц. Всередині хвилеводу повітря, стінки є ідеально провідними. Параметри повітря прийняти за параметри вакууму: $\varepsilon = \mu = 1$.

1.1. Перелічити всі типи хвиль, що можуть розповсюджуватись даним хвилеводом.

1.2. Знайти їх коефіцієнти розповсюдження

1.3. Знайти їх довжини хвиль.

1.4. Знайти критичні частоти даних хвиль. У якому діапазоні частот хвильового процесу даний хвилевід буде одномодовим?

1.5. Якою повинна бути довжина меншої з поперечних стінок b, щоб для частоти хвильового процесу 7,5 ГГц хвилевід був одномодовим? Вважати, що виконується рівність $a = 2b$.

Розв'язання:

1.1. Згідно (4.1) та (3.19) маємо, що хвиля з індексами l, n поширюється хвилеводом, якщо

$$\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - \frac{4\pi^2 f^2}{c^2}\varepsilon\mu < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 < \frac{4 f^2}{c^2}\varepsilon\mu, \tag{4.10}$$

підставляючи числа, маємо

$$\left(\frac{l}{5\cdot10^{-2}\,\text{м}}\right)^2+\left(\frac{n}{2{,}5\cdot10^{-2}\,\text{м}}\right)^2<\frac{4\cdot\left(7{,}5\cdot10^{9}\,\text{Гц}\right)^2}{\left(3\cdot10^{8}\,\text{м/с}\right)^2}\cdot1\cdot1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{l^2}{4}+n^2<1{,}5625. \tag{4.11}$$

Для Е-хвиль допустимі значення $l,n\geq1$, тож нерівність (4.11) виконується лише для хвилі E_{11}. Для Н-хвиль допустимий один з індексів, що дорівнює нулю, тож нерівність (4.11) виконується для хвиль H_{10}, H_{01}, H_{20}, H_{11}.

Відповідь: хвилеводом розповсюджуються п’ять хвиль: H_{10}, H_{01}, H_{20}, H_{11}, E_{11}.

1.2. Згідно (4.1) та (3.19) маємо

$$\tilde{\gamma}_{10}=\sqrt{\left(\frac{\pi\cdot1}{a}\right)^2-\frac{4\pi^2f^2}{c^2}\varepsilon\mu}=\sqrt{\left(\frac{\pi\cdot1}{5\cdot10^{-2}\,\text{м}}\right)^2-\frac{4\cdot\left(7{,}5\cdot10^{9}\,\text{Гц}\right)^2}{\left(3\cdot10^{8}\,\text{м/с}\right)^2}\cdot1\cdot1}\approx$$

$$\approx i\cdot144\text{м}^{-1},$$

$$\tilde{\gamma}_{20}=\sqrt{\left(\frac{\pi\cdot2}{a}\right)^2-\frac{4\pi^2f^2}{c^2}\varepsilon\mu}=\sqrt{\left(\frac{\pi\cdot2}{5\cdot10^{-2}\,\text{м}}\right)^2-\frac{4\cdot\left(7{,}5\cdot10^{9}\,\text{Гц}\right)^2}{\left(3\cdot10^{8}\,\text{м/с}\right)^2}\cdot1\cdot1}\approx$$

$$\approx i\cdot94{,}2\text{м}^{-1},$$

$$\tilde{\gamma}_{01}=\sqrt{\left(\frac{\pi\cdot1}{b}\right)^2-\frac{4\pi^2f^2}{c^2}\varepsilon\mu}=\sqrt{\left(\frac{\pi\cdot1}{2{,}5\cdot10^{-2}\,\text{м}}\right)^2-\frac{4\cdot\left(7{,}5\cdot10^{9}\,\text{Гц}\right)^2}{\left(3\cdot10^{8}\,\text{м/с}\right)^2}\cdot1\cdot1}\approx \tag{4.12}$$

$$\approx i\cdot94{,}2\text{м}^{-1},$$

$$\tilde{\gamma}_{11}=\sqrt{\left(\frac{\pi\cdot1}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi\cdot1}{b}\right)^2-\frac{4\pi^2f^2}{c^2}\varepsilon\mu}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\pi\cdot1}{5\cdot10^{-2}\,\text{м}}\right)^2+\left(\frac{\pi\cdot1}{2{,}5\cdot10^{-2}\,\text{м}}\right)^2-\frac{4\cdot\left(7{,}5\cdot10^{9}\,\text{Гц}\right)^2}{\left(3\cdot10^{8}\,\text{м/с}\right)^2}\cdot1\cdot1}\approx i\cdot70{,}2\text{м}^{-1},$$

Відповідь: коефіцієнт розповсюдження основної хвилі H_{10} $\tilde{\gamma}_{10} \approx i \cdot 144\text{м}$; коефіцієнти розповсюдження хвиль H_{01} та H_{20} $\tilde{\gamma}_{01} = \tilde{\gamma}_{20} \approx i \cdot 94{,}2\text{м}$; коефіцієнт розповсюдження хвиль H_{11} та E_{11} $\tilde{\gamma}_{11} = i \cdot 70{,}2\text{м}^{-1}$.

1.3. Згідно (4.3) та (4.12) маємо

$$\beta_{10} \approx 144\text{м}^{-1},\ \beta_{01} = \beta_{20} \approx 94{,}2\text{м}^{-1},\ \beta_{11} \approx 70{,}2\text{м}^{-1}. \tag{4.13}$$

Тоді згідно (4.6)

$$\begin{gathered}\lambda_{10} = \frac{2\pi}{\beta_{10}} \approx \frac{2\pi}{144\text{м}^{-1}} \approx 4{,}4\text{см},\ \lambda_{01} = \frac{2\pi}{\beta_{01}} \approx \frac{2\pi}{94{,}2\text{м}^{-1}} \approx 6{,}7\text{см},\\ \lambda_{20} = \frac{2\pi}{\beta_{20}} \approx \frac{2\pi}{94{,}2\text{м}^{-1}} \approx 6{,}7\text{см},\ \lambda_{11} = \frac{2\pi}{\beta_{11}} \approx \frac{2\pi}{70{,}2\text{м}^{-1}} \approx 9\text{см}.\end{gathered} \tag{4.14}$$

Відповідь: довжина основної хвилі H_{10} $\lambda_{10} \approx 4{,}4\text{см}$; довжини хвиль H_{01} та H_{20} $\lambda_{01} = \lambda_{20} \approx 6{,}7\text{см}$; довжини хвиль H_{11} та E_{11} $\lambda_{11} \approx 9\text{см}$.

1.4. Згідно (4.2)

$$\begin{gathered} f_{10\text{кр}} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{3\cdot 10^8\,\text{м/с}}{2\cdot 5\cdot 10^{-2}\text{м}\cdot\sqrt{1\cdot 1}} = 3\text{ГГц},\\ f_{01\text{кр}} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{3\cdot 10^8\,\text{м/с}}{2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2}\text{м}\cdot\sqrt{1\cdot 1}} = 6\text{ГГц},\\ f_{20\text{кр}} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{c}{a\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{3\cdot 10^8\,\text{м/с}}{5\cdot 10^{-2}\text{м}\cdot\sqrt{1\cdot 1}} = 6\text{ГГц},\\ f_{11\text{кр}} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} =\\ = \frac{3\cdot 10^8\,\text{м/с}}{2\cdot\sqrt{1\cdot 1}}\sqrt{\left(\frac{1}{5\cdot 10^{-2}\text{м}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.5\cdot 10^{-2}\text{м}}\right)^2} \approx 6{,}7\text{ГГц}.\end{gathered} \tag{4.15}$$

Критичні частоти даних хвиль є меншими за 7,5 ГГц, тому вони поширюються хвилеводом. Критичні частоти всіх інших хвиль є більшими за 7,5 ГГц, тому інші хвилі хвилеводом не поширюються.

Хвилевід буде одномодовим тоді, коли по ньому зможе поширюватись лише основна хвиля. Відповідно, частота хвильового процесу у ньому повинна бути більшою за 3 ГГц, щоб основна хвиля поширювалась хвилеводом. Одночасно, ця частота має бути меншою за 6 ГГц, щоб хвилеводом не могли поширюватись інші хвилі. Тож даний хвилевід буде одномодовим для частоти хвилевого процесу $f \in (3\text{ГГц}; 6\text{ГГц})$.

Відповідь: $f_{10\text{кр}} = 3\text{ГГц}$, $f_{01\text{кр}} = f_{20\text{кр}} = 6\text{ГГц}$, $f_{11\text{кр}} = 6{,}7\text{ГГц}$; хвилевід буде одномодовим для частоти хвилевого процесу $f \in (3\text{ГГц}; 6\text{ГГц})$.

1.5. Згідно (4.7) та умови задачі маємо

$$\frac{c}{4b\sqrt{\varepsilon\mu}} < f < \frac{c}{2b\sqrt{\varepsilon\mu}} \Leftrightarrow \frac{c}{4f\sqrt{\varepsilon\mu}} < b < \frac{c}{2f\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{4.16}$$

підставивши числа, отримуємо

$$\frac{3\cdot 10^8 \text{ м/с}}{4\cdot 7{,}5\cdot 10^9 \text{ Гц}\cdot\sqrt{1\cdot 1}} < b < \frac{3\cdot 10^8 \text{ м/с}}{2\cdot 7{,}5\cdot 10^9 \text{ Гц}\cdot\sqrt{1\cdot 1}} \Leftrightarrow 1\text{см} < b < 2\text{см}. \tag{4.17}$$

Відповідь: $b \in (1\text{см}; 2\text{см})$.

Задача 2. Знайти вираз для середнього за період вектора Пойнтінга для хвилі H_{10}.

Спочатку випишемо комплексні амплітуди полів на основі (4.9), враховуючи $l = 1$ та $n = 0$:

$$\tilde{\vec{H}}_{m10} = \tilde{H}_{10}^0 \frac{\tilde{\gamma}_{10}}{\tilde{\gamma}_{10}^2 + k^2}\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-\tilde{\gamma}_{10}z}\cdot\vec{e}_x + \tilde{H}_{10}^0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-\tilde{\gamma}_{10}z}\cdot\vec{e}_z,$$

$$\tilde{\vec{E}}_{m10} = -\tilde{H}_{10}^0 W_{H10}\frac{\tilde{\gamma}_{10}}{\tilde{\gamma}_{10}^2 + k^2}\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-\tilde{\gamma}_{10}z}\cdot\vec{e}_y, \tag{4.18}$$

$$\tilde{\gamma}_{10} = i\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = i\beta_{10},\ W_{H10} = \frac{i\omega\mu\mu_0}{\tilde{\gamma}_{10}},\ \tilde{H}_{10}^0 = \text{const}.$$

Звернемо увагу на те, що

$$\tilde{\gamma}_{10}^2 = -k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow \tilde{\gamma}_{10}^2 + k^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \qquad (4.19)$$

та звідси перепишемо (4.18):

$$\begin{gathered}\tilde{\vec{H}}_{m10} = \tilde{H}_{10}^0 \frac{i\beta_{10}}{\pi^2} a^2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_x + \tilde{H}_{10}^0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_z = \\ = \tilde{H}_{10}^0 \frac{i\beta_{10}a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_x + \tilde{H}_{10}^0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_z, \\ \tilde{\vec{E}}_{m10} = -\tilde{H}_{10}^0 \frac{i\omega\mu\mu_0}{\tilde{\gamma}_{10}} \frac{\tilde{\gamma}_{10}}{\pi^2} a^2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_y = \\ = -\tilde{H}_{10}^0 i\omega\mu\mu_0 \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_y.\end{gathered} \qquad (4.20)$$

Згідно (2.10)

$$\begin{gathered}\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{H}}_m^*\right] = \\ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\tilde{H}_{10}^0 i\omega\mu\mu_0 \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_y, \tilde{H}_{10}^{0*} \frac{-i\beta_{10}a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_x\right] + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\tilde{H}_{10}^0 i\omega\mu\mu_0 \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_y, \tilde{H}_{10}^{0*} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i\beta_{10}z} \cdot \vec{e}_z\right] = \\ = -\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_{10}^0\right|^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \omega\mu\mu_0 \frac{a}{\pi} \frac{\beta_{10}a}{\pi}\left[\vec{e}_y, \vec{e}_x\right] + 0 = \\ = \frac{1}{2}\left|\tilde{H}_{10}^0\right|^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \omega\mu\mu_0 \beta_{10} \frac{a^2}{\pi^2} \vec{e}_z.\end{gathered} \qquad (4.21)$$

Відповідь: $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\left|\tilde{H}_{10}^0\right|^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \omega\mu\mu_0 \beta_{10} \frac{a^2}{\pi^2} \vec{e}_z$.

4.3. Лабораторна робота 4

1. У прямокутному хвилеводі з заданими поперечними розмірами a, b проходе хвильовий процес з частотою f. Всередині хвилеводу повітря, стінки є ідеально провідними. Параметри повітря прийняти за параметри вакууму: $\varepsilon = \mu = 1$.

Перелічити всі типи хвиль, що можуть розповсюджуватись даним хвилеводом. Знайти їх коефіцієнти розповсюдження. Знайти їх довжини хвиль.

1.1) $a = 4\text{см}$, $b = 2\text{см}$, $f = 8\text{ГГц}$. 1.2) $a = 6,2\text{см}$, $b = 3,1\text{см}$, $f = 7\text{ГГц}$.

2. Поперечні розміри a, b прямокутного хвилеводу задані. Всередині хвилеводу повітря, стінки є ідеально провідними. Параметри повітря прийняти за параметри вакууму: $\varepsilon = \mu = 1$. У якому діапазоні частот даний хвилевід є одномодовим?

2.1) $a = 4\text{см}$, $b = 2\text{см}$. 2.2) $a = 6\text{см}$, $b = 3\text{см}$.

3. Між поперечними розмірами a, b прямокутного хвилеводу виконується рівність $a = 2b$. Всередині хвилеводу повітря, стінки є ідеально провідними. Параметри повітря прийняти за параметри вакууму: $\varepsilon = \mu = 1$. Дано, що частота хвильового процесу у хвилеводі дорівнює f. Яким має бути менший з поперечних розмірів b, щоб хвилевід був одномодовим?

3.1) $f = 1\text{ГГц}$. 3.2) $f = 6\text{ГГц}$.

4. Знайти вираз для середнього за період вектора Пойнтінга для хвилі

4.1) H_{20}. 4.2) H_{01}.

Студенти мають виконувати завдання по варіантам згідно таблиці 4. Номер варіанту – це залишок від ділення порядкового номера студента в алфавітному списку групи на 16.

Таблиця 4. Розподіл завдань по варіантам для лабораторної роботи 4

Номер варіанту	Які завдання робити
1	1.1, 2.1, 3.1, 4.1
2	1.1, 2.1, 3.1, 4.2
3	1.1, 2.1, 3.2, 4.1

4	1.1, 2.1, 3.2, 4.2
5	1.1, 2.2, 3.1, 4.1
6	1.1, 2.2, 3.1, 4.2
7	1.1, 2.2, 3.2, 4.1
8	1.1, 2.2, 3.2, 4.2
9	1.2, 2.1, 3.1, 4.1
10	1.2, 2.1, 3.1, 4.2
11	1.2, 2.1, 3.2, 4.1
12	1.2, 2.1, 3.2, 4.2
13	1.2, 2.2, 3.1, 4.1
14	1.2, 2.2, 3.1, 4.2
15	1.2, 2.2, 3.2, 4.1
16	1.2, 2.2, 3.2, 4.2

5. Список рекомендованої літератури

1. В. М. Горєв, Технічна електродинаміка: навчальний посібник / В. М. Горєв; Міністерство освіти і науки України, Національний технічний університет “Дніпровська політехніка” – Дніпро : НТУ “ДП”, 2019. – 91 с.

2. О. О. Дробахін, Д. Ю. Салтиков, «Електродинаміка НВЧ», Дніпро: РВВ ДНУ, 2015. – 88 с.

3. Н. А. Семенов, «Техническая электродинамика. Учебное пособие для вузов», М: Связь, 1973, 480с.

4. А. М. Малышев, Г. М. Максимова, «Основы векторного и тензорного анализа для физиков», Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 101 с.

Горєв В'ячеслав Миколайович

ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Методичні рекомендації до практичних занять та лабораторних робіт з дисципліни для бакалаврів галузі знань 17 Електроніка та телекомунікації

Видано в редакції автора

Підписано до друку 04.12.2019. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,3.
Обл.-вид. арк. 2,3. Тираж 15 пр. Зам. №

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.