

Благодаря этим инициативам Украина входит в ТОП-10 стран по продажам электромобилей [5]. Если тенденция сохранится, то в ближайших перспективах в процентном соотношении по количеству электрокаров от общего числа всех авто, Украина будет в числе самых экологичных государств.

Электротранспорт приходит в нашу жизнь хотим мы этого или нет. В не таком уж далеком будущем из вашего города пропадут все АЗС. Воздух станет чище, а город тише. Однажды в очередной раз выйдя из дома вы попадете в совершенно другой мир.

Это будет мир электрического транспорта. Начало новой эры промышленности и машиностроения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Norway Plug-in Sales Q3-2017 and YTD [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.ev-volumes.com/country/total-euefta-plug-in-vehicle-volumes/>
2. Падалко, Л.П. Альтернативные энергоносители на автотранспорте: эффективность и перспективы / Л.П. Падалко, Ф.Ф. Иванов, В.И. Кузьменко; под науч. ред. А.Е. Дайнеко; Нац. Акад. Наук Беларуси, Ин-т экономики. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 263 с.
3. Электромобили: плюсы, минусы, перспективы [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://greenbelarus.info/articles/05-02-2015/elektromobili-plyusy-minusy-perspektivy>
4. Электромобили: преимущества, недостатки, перспективы [Электронный ресурс] / Режим доступа: [http://innoeco.ru/posts/Elektromobili\\_11.html](http://innoeco.ru/posts/Elektromobili_11.html)
5. Перспективы развития рынка электромобилей в Украине [Электронный ресурс] / Режим доступа: <https://hevcars.com.ua/reviews/perspektiviyi-razvitiya-ryinka-ekstromobiley-v-ukraine/>

УДК 531.01

## ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ КАЧЕНИЮ ЦИЛИНДРА НА КАЧЕНИЕ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ

**Е.А. Лагошная<sup>1</sup>, С.В. Герасименко<sup>2</sup>, Л.Н. Бондаренко<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>асистент кафедры автомобилей и автомобильного хозяйства, Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет», г. Днепр, Украина, e-mail: [lenala@ua.fm](mailto:lenala@ua.fm)

<sup>2</sup>старший преподаватель кафедры прикладной математики Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», г. Днепр, Украина, e-mail: [sve\\_tlana@ukr.net](mailto:sve_tlana@ukr.net)

<sup>3</sup>доцент кафедры прикладной математики Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», г. Днепр, Украина, e-mail: [sve\\_tlana@ukr.net](mailto:sve_tlana@ukr.net)



**Аннотация.** В работе проведено теоретическое исследование определения значения реальной величины коэффициента трения качения при линейном и точечном контактах на качение без скольжения.

*Ключевые слова:* цилиндр, качение, скольжение, коэффициента трения качения.

## IMPACT OF ROLLING RESISTANCE CYLINDER FOR SLIDING WITHOUT SLIDE

Olena Lahoshna<sup>1</sup>, Svetlana Gerasimenko<sup>2</sup>, Leonid Bondarenko<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Assistant Professor of Automobiles and Automobile Economy Department, National Mining University, Dnepr, Ukraine, e-mail: [lenala@ua.fm](mailto:lenala@ua.fm)

<sup>2</sup>Senior Lecturer of Applied Mathematics Department, State Higher Educational Institution "Dnieper State Academy of Civil Engineering and Architecture", Dnepr, Ukraine, e-mail: [sve\\_tlana@ukr.net](mailto:sve_tlana@ukr.net)

<sup>3</sup>Ph.D., Associate Professor of Applied Mathematics Department, State Higher Educational Institution "Dnieper State Academy of Civil Engineering and Architecture", Dnepr, Ukraine, e-mail: [sve\\_tlana@ukr.net](mailto:sve_tlana@ukr.net)

**Abstract.** The theoretical investigation of the determination of the value of the real value of the friction coefficient of rolling with linear and point contacts on rolling without sliding is carried out in the work.

*Keywords:* cylinder, rolling, sliding, rolling friction coefficient.

**Введение.** Задача об определении ускорения центра тяжести цилиндра, скатывающегося без скольжения под действием силы тяжести по наклонной плоскости и условия, при котором возможно качение цилиндра без скольжения решены во многих учебниках по теоретической механике, но без учета сопротивления качению [1,2].

Такое решение связано с тем, что отсутствуют аналитические зависимости по определению сопротивления качению.

Было предложено много зависимостей как для определения непосредственно сопротивления качению (А.Ю. Ишлинский), так и коэффициента трения качения (Мэй, Морис, Этак), но обладая рядом достоинств, таких как простота экспериментального определения коэффициентов, ясность физической сущности процесса все эти зависимости, за исключением предложенной Кулоном, не получили широкого применения. Это связано как с многоэтапностью процессов вычисления, так и с необходимостью получать дополнительные экспериментальные данные в процессе вычисления.

Одной из удачных была аналитическая зависимость, полученная Д. Табором [3] по определению коэффициента трения качения, опирающаяся на теорию контактных деформаций Герца.

Табором получены следующие аналитические зависимости для определения коэффициента трения качения:  
при линейном контакте

$$k = \frac{2b}{3\pi} \alpha \quad (1)$$

при точечном контакте

$$k = \frac{3b}{16} \alpha \quad (2)$$

где  $b$  – полуширина статического пятна контакта;  
 $\alpha$  – коэффициент гистерезисных потерь.

В [4] предложены зависимости, определяющие  $k$  с использованием формул (1) и (2) и экспериментальных значений коэффициентов для крановых колес при плоском рельсе и с закругленной головкой [5].

Аналогично формулам (1) и (2) они предложены в виде:  
при плоской головке рельса

$$k = 0.225be^{-1/2R} \quad (3)$$

При закругленной головке

$$k = 0.16bee^{0.2R}, \quad (4)$$

где  $R$  – радиус колеса в метрах

Несовпадение числовых величин перед полушириной пятна контакта  $b$ , очевидно связано с округлением коэффициента  $k$  в экспериментах до десятых миллиметра, а также с тем, что их значение получены одинаковыми для, например, диаметров 400, 500, 560, 630 мм  $k=0.5$  мм - при плоском рельсе и  $k=0.6$  – при закругленной головке [6].

Поскольку коэффициенты перед  $b$  в этих формулах для такого класса задач можно считать близкими по величине, то общие значения  $k$  в этих формулах будем считать совпадающими [7], а поскольку в формулах Табора они точные, то величины  $\alpha$  найдем меняя коэффициент перед  $R$  в показателях экспоненты. Этого равенства можно достичь приняв величины  $\alpha$  в формулах (1) и (2) следующими:

$$\alpha = e^{-1/13R} \text{ и } \alpha = e^{0.23R}$$

Теперь формулы Табора (1) и (2) запишутся в следующем виде:  
при линейном контакте

$$k = \frac{2b}{3\pi} e^{-1.13R} \quad (5)$$

при точечном контакте

$$k = \frac{3b}{16} e^{0.23R} \quad (6)$$

Имея эти формулы можно поставленную задачу решить с использованием реальных величин коэффициентов трения качения.

**Цель работы.** Установить значение реальной величины коэффициента трения качения при линейном и точечном контактах на качение без скольжения.

**Материал и результаты исследований.** Линейный контакт. Для выявления более полного влияния сопротивления качению в поставленной задаче к массе катящегося цилиндра  $M_{кч}$  присоединим поступательно движущуюся массу  $M_{пс}$ , т.е.  $M = M_{кч} + M_{пс}$ .

На рисунке 1 показана расчетная схема, где  $P = mg$  – вес цилиндра с грузом;  $N$  – нормальная реакция плоскости, линия действия которой не совпадает с центром тяжести цилиндра на величину коэффициента трения качения;  $F$  – сила трения направленная вверх по наклонной плоскости.

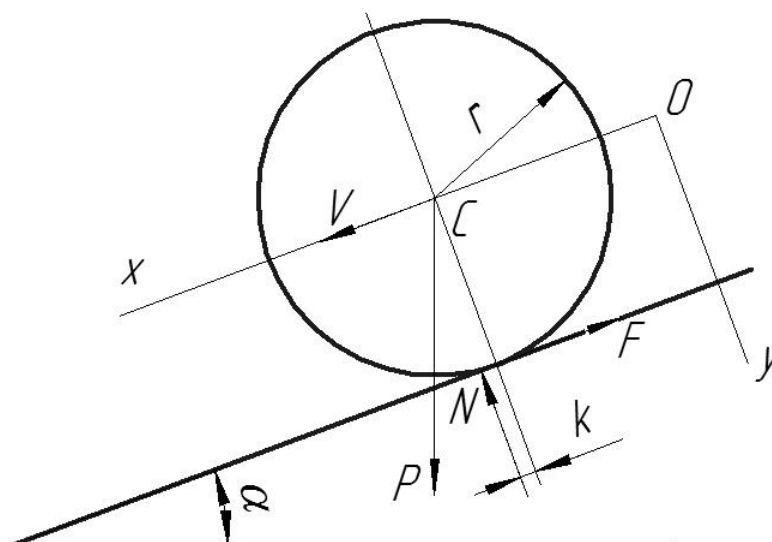


Рисунок 1 – Расчетная схема скатывания цилиндра без скольжения с учетом сопротивления качению

При координатных осях, указанных на рисунке, дифференциальные

уравнения движения запишутся в виде:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mgsin\alpha - F \quad (7)$$

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = Mgc\osin\alpha - N \quad (8)$$

$$J_c \frac{dw}{dt} = Fr - Nk \quad (9)$$

где  $J_c$  - момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его центр тяжести  $C$  и перпендикулярной к плоскости  $xOy$ .

Поскольку во время движения  $J_c = 0$ , то

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

и из уравнения (8) получим:  $N = (M_{кр} + M_{пс})gc\osin\alpha$ .

Поскольку цилиндр катится без скольжения, то  $V_c = rw$  и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = r \frac{dw}{dt}$$

то уравнение (7) принимает вид

$$\mu r \frac{dw}{dt} = \mu qsin\alpha - F$$

Исключив  $F$  из этого уравнения и уравнения (9) получим

$$(\mu r^2 + J_c) \frac{dw}{dt} = Mgrsin\alpha - Nk$$

или

$$r \left( \frac{3}{2} M_{кр} + M_{пс} \right) \frac{dw}{dt} = Mgsin\alpha - \frac{Nk}{r}.$$

поскольку для однородного цилиндра

$$J_c = M_{кр}r^2/2.$$

Отсюда

$$r \frac{dw}{dt} = \frac{Mgsin\alpha - Nk/r}{\left( \frac{3}{2} M_{кр} + M_{пс} \right)}$$

и искомое ускорение центра тяжести цилиндра, с учетом трения качения, будет равно

$$w_c = \frac{Mg \cos \alpha \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{k}{r} \right)}{\left( \frac{3}{2} M_{\text{кр}} + M_{\text{пс}} \right)} \quad (10)$$

Сила трения из уравнения (9)

$$F = \frac{J_c dw}{r dt} + \frac{Nk}{r} = \frac{M_{\text{кр}} r dw}{2 dt} + (M_{\text{кр}} + M_{\text{пс}}) g k \frac{\cos \alpha}{r} \quad (11)$$

Условия качения из закона Кулона

$$F \leq fN$$

откуда

$$f \geq \frac{M_{\text{кр}}}{2 \left( \frac{3}{2} M_{\text{кр}} + M_{\text{пс}} \right)} \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{k}{r} \right) \quad (12)$$

Это неравенство и является условием возможности качения цилиндра без скольжения.

Для расчета  $W_c$  и условия без скольжения примем цилиндр радиусом  $r = 100$  мм, шириной  $B = 50$  мм, допускаемое контактное напряжение  $[\sigma] = 800$  МПа (сталь 65Г ГОСТ 1050 – 74, режим работы механизма передвижения крана 4М [5]);  $\alpha = 10; 30; 50; 70^\circ$ .

Сила прижатия цилиндра

$$N = \frac{Br[\sigma]^2}{0.418^2 g E \cos \alpha} \quad (13)$$

и при, например,  $\alpha = 30^\circ$  составляет 66,8 кН. С учетом, что масса цилиндра  $M_{\text{кч}} = 11$  кг, масса груза составляет  $M_{\text{пс}} = 6700$  кг.

Полуширины пятен контакта [8]

$$b(\alpha) = 1.526 \sqrt{\frac{P(\alpha)r}{BE}} \quad (14)$$

коэффициенты трения качения  $k$  (1) определится из формулы (5).

Расчеты показывают, что несмотря на изменение коэффициента трения качения с  $k = 0,256$  мм до  $k = 0.15$  мм величина  $W_c$  увеличивается только

на 0,04%, при значительном увеличении величины  $f$ , с 0,00012 при  $\alpha = 10^\circ$  до 0,0019 при  $\alpha = 70^\circ$ .

Очевидно, что прижатие цилиндра при помощи связанной с ним массы практически не сказывается на ускорения цилиндра с изменением угла наклона плоскости качения, хотя значительно влияет на условие качения без скольжения и величина  $f$  при этом в десятки раз меньше реальных величин. Естественно, это относится к величине контактных напряжений близким к регламентируемым допустимым.

Точечный контакт. Рассмотрим аналогичную задачу при качении цилиндра по поверхности с закруглением радиусом  $R$ . Поскольку при точечном контакте величина контактных напряжений принимается в 2,0 ... 2,5 раза большей, чем при линейном, то примем  $[\sigma] = 1600$  МПа.

Силу прижатия цилиндра при этой величине  $[\sigma]$  найдем из формулы

$$N = \frac{[\sigma]^3 r^2 R^2}{0.245^3 n_p^3 E^2 (r + R)^2}. \quad (15)$$

Полуширина пятна контакта

$$b = 1.397 n_b \sqrt{\frac{N}{E} \frac{rR}{r + R}} \quad (16)$$

Коэффициент трения качения найдется из формулы (6), ускорение центра тяжести – из формулы (10), а минимальная величина коэффициента трения скольжения при котором происходит качение без скольжения – из формулы (12).

Величина  $k$ ,  $Wc$  и  $f$  при линейном и точечном контактах в зависимости от угла наклона  $\alpha$  графически представлены на рисунке 2, где 1 – коэффициент трения качения; 2- ускорения центра тяжести; 3 – минимального коэффициента трения скольжения, при котором происходит качение без скольжения (сплошные линии – линейный контакт, пунктирные – точечный при прижатии силой тяжести (а); б – то же при прижатии безмассовой силой (точками- без  $k$ ).

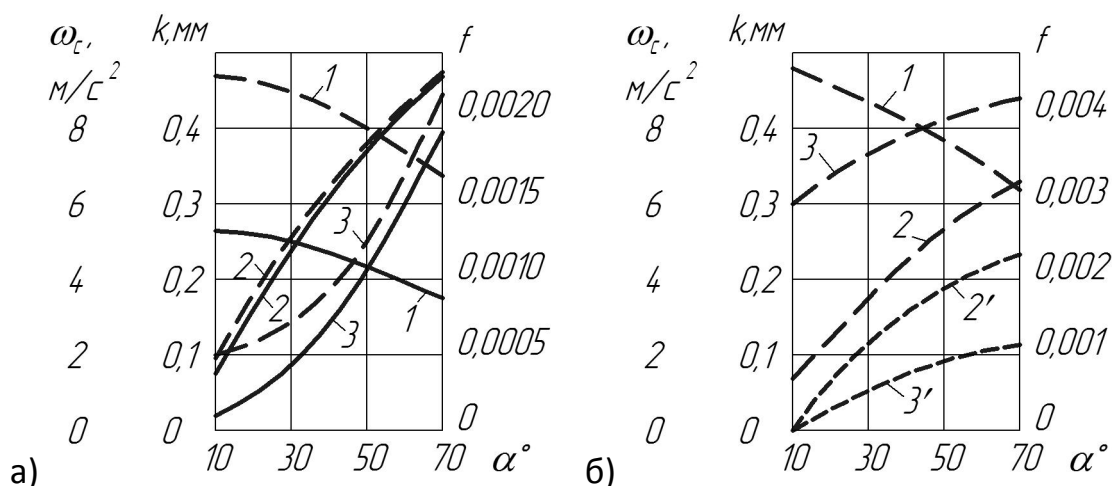


Рисунок 2 – Зависимость от угла наклона поверхности качения цилиндра

Отметим, что при точечном контакте, несмотря на увеличение контактных напряжений в 2 раза величина поступательной массы составила  $M_{пс} = 3124$  кг вместо  $M_{пс} = 6700$  кг при линейном контакте.

Из приведенных формул и приведенных расчетов можно заключить, что трение качения мало влияет на ускорение центра тяжести цилиндра как при линейном так и точечном контактах. Так же практически не влияет на минимальную величину коэффициента трения скольжения при котором происходит качение без скольжения. Поэтому кроме прижатия цилиндра с помощью силы веса целесообразно рассмотреть безмассовое прижатие.

Прижатие цилиндра с помощью безмассовой силы (точечный контакт). Пусть сила  $Q$ , создаваемая пружиной направлена нормально к поверхности качения. Уравнение (7) при этом запишется так же, а (8) и (9) принимают следующий вид:

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu g \cos \alpha - Q, \quad (17)$$

$$J_c \frac{dw}{dt} = Fr - (Mg \cos \alpha + Q)k, \quad (18)$$

здесь  $M$  – масса цилиндра.

Сила прижатия  $N = Mg \cos \alpha + Q$

Проделав выкладки, получим: ускорение центра тяжести цилиндра

$$w_c = \frac{2}{3} g \left[ \sin \alpha - \frac{k}{r} \cos \alpha \left( 1 + \frac{Q}{Mg \cos \alpha} \right); \right] \quad (19)$$

Качение цилиндра без скольжения при величине коэффициента трения скольжения



$$f \geq \frac{Mg \sin \alpha}{3(Q + Mg \cos \alpha)} \frac{2k}{3r}. \quad (20)$$

Зависимости  $W_c$  и  $f$  от  $\alpha$  показаны на рисунке 2б.

**Вывод.** Анализ проведенных расчетов и графиков на рисунке 2 позволяет сделать следующие выводы:

- на ускорение цилиндра, скатывающегося с наклонной не гладкой поверхности при линейном и точечном контактах и прижимающегося силой веса сопротивление качению практически не сказывается в отличие от прижатия безмассовой силой, где учет сопротивления качению приводит к значительным изменениям как ускорения, так и минимальной величины коэффициента скольжения, при котором происходит качение без скольжения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1964.
2. Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин. М.: Машиностроение, 1969.
3. Tabor D. The mechanism of rolling friction: the elastic range. – Proc.Roy.Soc., 1955.
4. Бондаренко Л.М., Довбня М.П., Ловейкін В.С. Деформаційні опори в машинах.- Дніпропетровськ: Дніпро – VAL, 2002.
5. Справочник по кранам: В 2 т. Т2 / Александров М.П., Гохберг М.М., 6. Ковин А.А. и др. Л.: Машиностроение, 1988.
6. Лагошная Е.А., Лагошный А.Ю., Симоненко А.И. Исследование устойчивости движения автомобиля со всеми управляемыми осями // «The development of Informational and Resource Providing of Science and Education in the Mining and Metallurgical and the Transportation Sectors 2016.-Днепропетровск.-2016.
7. Ходос О.Г, Пучков А.И, ЛитвинВ.В. Повышение устойчивости движения рельсового транспортного средства // Наукові праці ДонНТУ Вип.42.-2002.
8. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Матвеев В.В. – Киев: Наук. думка, 1988.

УДК 656

### МАРКОВСЬКА МОДЕЛЬ РОБОЧОГО ПРОЦЕСУ ПРОМИСЛОВИХ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ

**А.О. Логінова<sup>1</sup>, І.В. Вернер<sup>2</sup>, О.А. Ольховик<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>кандидат технічних наук, асистент кафедри основ конструювання механізмів і машин, Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», м. Дніпро, Україна, e-mail: [An.O.Loginova@gmail.com](mailto:An.O.Loginova@gmail.com)

<sup>2</sup>асистент кафедри основ конструювання механізмів і машин Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», м. Дніпро, Україна, e-mail: [dkhost@gmail.com](mailto:dkhost@gmail.com)