Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Методичні рекомендації
до виконання лабораторної роботи ТЕЗ-2
з дисципліни «Теорія електричного зв’язку»
для студентів спеціальності
172 Телекомунікації та радіотехніка

Дніпро
2020

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра безпеки інформації та телекомунікацій

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Методичні рекомендації
до виконання лабораторної роботи ТЕЗ-2
з дисципліни «Теорія електричного зв’язку»
для студентів спеціальності
172 Телекомунікації та радіотехніка

Дніпро
НТУ «ДП»
2020

Перетворення Фур'є. Методичні рекомендації до виконання лабораторної роботи ТЕЗ-2 з дисципліни «Теорія електричного зв’язку» для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / В.І. Корнієнко, О.Ю. Гусєв, О.І. Нікольська, І.Г. Олішевський ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2020. – 19 с.

Автори:
В.І. Корнієнко, д-р техн. наук, проф.;
О.Ю. Гусєв, канд. фіз.-мат. наук, проф.;
О.І. Нікольська, ст. викл.;
І.Г. Олішевський, асист.

Затверджено методичною комісією за спеціальністю 172 Телекомунікації та радіотехніка (протокол № 1 від 15.10.2020) за поданням кафедри безпеки інформації та телекомунікацій (протокол № 3 від 13.10.2020).

Методичні рекомендації призначено для виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія електричного зв’язку» студентами спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка.

Орієнтовано на активізацію навчальної діяльності бакалаврів та закріплення практичних знань з даної дисципліни.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри безпеки інформації та телекомунікацій В.І. Корнієнко, д-р техн. наук, проф.

Зміст

Мета та програма роботи

Мета − дослідження безперервного та дискретного перетворень Фур'є різних сигналів.

Програма роботи

1. Попередня підготовка до роботи.
2. Короткі теоретичні відомості.
3. Дослідження безперервного перетворення Фур'є.
4. Дослідження дискретного перетворення Фур'є.

1. Попередня підготовка до роботи

Використовуючи конспект лекцій та літературу, засвоїти зміст та властивості перетворень Фур'є.

2. Короткі теоретичні відомості

2.1 Безперервне перетворення Фур'є

Почнемо з перетворення Фур'є безперервного в часі сигналу

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)dt \equiv F\{x(t)\}, \tag{1}$$

яке ідентифікує частоти та амплітуди тих комплексних синусоїд (експонент), на які розкладається деяке довільне коливання.

Зворотне перетворення:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\exp(j2\pi ft)df \equiv F^{-1}\{X(f)\}.$$

Існування прямого і зворотного перетворення Фур'є (яке в подальшому ми будемо називати безперервно-часовим перетворенням Фур'є – БЧПФ) визначається рядом умов. Достатня умова – абсолютна інтегрованість сигналу.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty .$$

Менш обмежувальна достатня умова – кінцевість енергії сигналу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty .$$

Наведемо ряд основних властивостей перетворення Фур'є та функцій, використовуваних далі, враховуючи, що прямокутне вікно визначається наступним виразом

$$w(x) = \begin{cases} 1, |x| < 1; \\ 1/2, |x| = 1; \\ 0, |x| > 1, \end{cases}$$

а функція sinc – виразом

$$\mathrm{sinc(x)} = \frac{\sin(\pi \mathrm{x})}{\pi x}.$$

Функція відліків (табл. 1) у часовій області визначається виразом

$$\Psi_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - nT).$$

Цю функцію іноді називають також *функцією періодичного продовження*.

Таблиця 1

Основні властивості БЧПФ і функції

Властивість функції	***Функція***	***Перетворення***
Лінійність	ag(t) + bh(t)	aG(f) + bH(f)
Зрушення за часом	h(t - t_0)	H(f)exp(-j2pf t_0)
Зрушення за частотою (модуляція)	(texp(j2pf_0 t)	H(f - f_0)
Масштабування	(1/|a|)h(t/a)	H(af)
Теорема згортання в часовій області	g(t)*h(t)	G(f)H(f)
Теорема згортання в частотній області	g(t) h(t)	G(f)*H(f)

Продовження табл. 1

Властивість функції	*Функція*	*Перетворення*
Функція вікна	Aw(t/T)	2ATsinc(2Tf)
Функція sinc	2AFsinc(2Ft)	Aw(f/F)
Імпульсна функція	Ad(t)	A
Функція відліків	ΨT(f)	FΨF(f), F=1/T

Ще одна важлива властивість встановлюється теоремою Парсеваля для двох функцій g(t) та h(t):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h^{+}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)H^{+}(f)dt.$$

Якщо покласти g(t) = h(t), то теорема Парсеваля зводиться до теореми для енергії

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|h(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(f)\right|^2 df .$$

Це, по суті, просто формулювання закону збереження енергії в двох областях (часовій і частотній). Зліва стоїть повна енергія сигналу, таким чином, функція

$$S(f) = |H(f)|^2 .$$

описує розподіл енергії за частотою для детермінованого сигналу h(t) і тому називається спектральною густиною енергії (СГЕ). За допомогою виразів

$$\left|H(f)\right| = \left[\mathrm{Re}^2\{H(f)\} + \mathrm{Im}^2\{H(f)\}\right]^{1/2},$$

$$q(f) = arctg\left[\mathrm{Im}\{H(f)\} / \mathrm{Re}\{H(f)\}\right]$$

можна обчислити амплітудний та фазовий спектри сигналу h(t).

2.2 Операції дискретизації та зважування

Розглянемо дискретно-часовий ряд Фур'є (ДЧРФ) або інакше – дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) як окремий випадок безперервно-часового перетворення Фур'є з використанням двох базових операцій обробки сигналів – взяття відліків (дискретизації) і зважування за допомогою вікна. Тут розглянемо вплив цих операцій на сигнал і його перетворення. У табл. 2 подано перераховані функції, за допомогою яких здійснюється зважування та дискретизація.

При рівномірних відліках з інтервалом T сек частота відліків F дорівнює 1/T Гц. Зауважимо, що зважуюча функція і функція відліків у часовій області позначаються відповідно TW (time windowing) і TS (time sampling), а в частотній області – FW (frequency windowing) і FS (frequency sampling).

Таблиця 2

Зважування та дискретизуючі функції

Операція	Функція часу	Перетворення
Зважування в часовій області (ширина вікна NT, сек)	TW=w (2t/NT - 1)	F{TW}=NTsinc(NTf)•exp(-jpNTf)
Зважування в частотній області (ширина вікна 1/T, Гц)	$\mathcal{F}^{-1}\{FW\} = \frac{1}{T}\mathrm{sinc}(t/T)$	FW=w(2Tf)
Відліки в часі (з інтервалом T, сек)	$TS=T\Psi_T(t)$	$\mathcal{F}\{TS\} = \Psi_{1/T}(f)$
Відліки за частотою (з інтервалом 1/NT, Гц)	$\mathcal{F}^{-1}\{FS\} = \Psi_{NT}(t)$	$FS = \frac{1}{NT}\Psi_{1/NT}(f)$

Припустимо, що беруться відліки безперервного дійсного сигналу x(t) з обмеженим спектром, верхня частота якого дорівнює F_0. Безперервно-часове перетворення Фур'є дійсного сигналу – це завжди симетрична функція з повною шириною $2F_0$, див. рис. 1. Відліки сигналу x(t) можуть бути отримані за допомогою множення цього сигналу на функцію відліків:

$$x_S(t) = x(t) \cdot TS = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

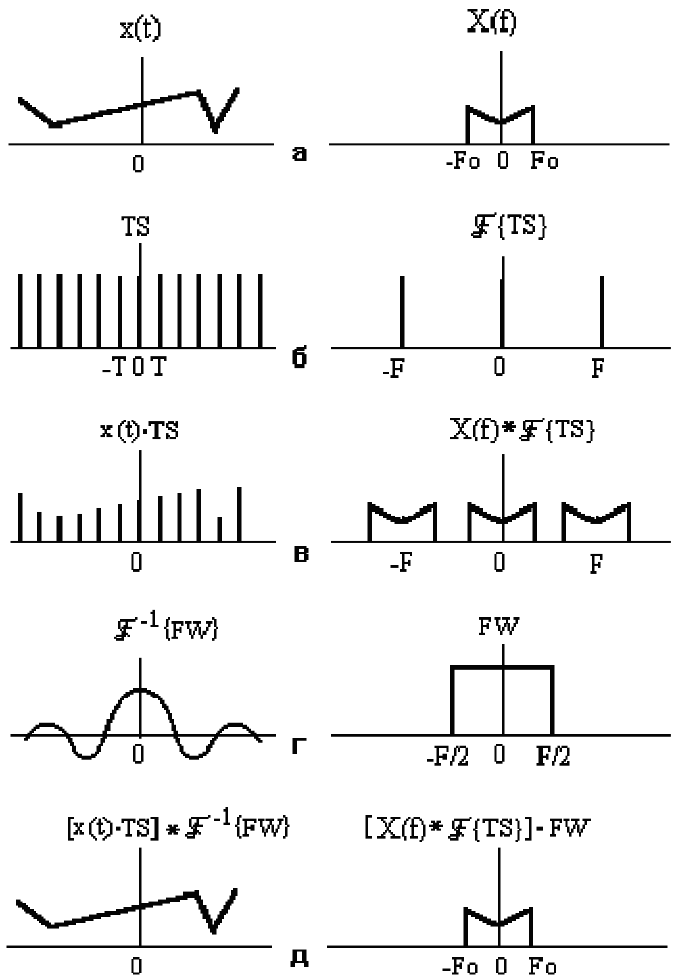

Рис. 1. Ілюстрація теореми відліків у часовій області для дійсного сигналу з обмеженим спектром: а – вихідна функція часу і її перетворення Фур'є; б – функція відліків у часі та її перетворення Фур'є; в – часові відліки вихідної функції та її періодично продовжене перетворення Фур'є для випадку Fo < 1/2T; г – частотне вікно (ідеальний фільтр нижніх частот) і його перетворення Фур'є (функція sinc); д – вихідна функція часу, відновлена за допомогою операції згортки з функцією sinc

Відповідно до теореми про згортку в частотній області, БЧПФ сигналу x(t) – це просто згортка спектра сигналу x(t) і перетворення Фур'є функції відліків за часом (TS):

$$X_S(f) = X(f)F(TS) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF).$$

Згортка X(f) с перетворенням Фур'є функції відліків F{TS} = Y1/T(f) просто періодично продовжує X(f) з частотним інтервалом 1/T Гц. Тому XS(f) являє собою періодично продовжений спектр X(f). У загальному випадку відліки в одній області (наприклад, часовій) приводять до періодичного продовження в області перетворення (наприклад, частотній). Якщо частота відліків обрана досить низькою (F < 2Fo), то періодично продовжені спектри будуть перекриватися з сусідніми. Це перекриття носить назву *ефекту накладення в частотній області*.

Для того щоб відновити вихідний часовий сигнал за його відліками, тобто здійснити інтерполяцію деякого континууму значень між цими відліками, можна пропустити дискретизовані дані через ідеальний фільтр нижніх частот з прямокутною частотною характеристикою (рис. 1, г)

$$X(f) = X_S(f)FW = [\,X(f)F(TS)\,]FW\,. \tag{2}$$

У результаті (див. рис. 1, д) відновлюється вихідне перетворення Фур'є. Використовуючи теореми про згортку в часовій і частотній областях, отримуємо

$$x(t) = x_S(t)F^{-1}\{\,FW\,\} = x(\,t\,)TSF^{-1}\{\,FW\,\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{sinc}([\,t - nT\,]/\,T)\,. \tag{3}$$

Вираз (3) являє собою *математичний запис теореми відліків у часовій області* (теореми Уіттекера, Котельникова, Шенона – УКШ), яка стверджує, що за допомогою інтерполяційної формули дійсний сигнал з обмеженим спектром може бути точно відновлений за нескінченною кількістю відомих часових відліків, узятих з частотою F та $2F_0$. Дуальною до теореми (3) є теорема відліків в частотній області для сигналів з обмеженою тривалістю.

Операції в часовій області, аналогічні (1), описуються виразом

$$x(t) = \left[x(t)F^{-1}\{ FS \} \right]TW,$$

а відповідні перетворення – виразами

$$X(f) = [X(fFS)]F\{TW\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n/2T_0)\operatorname{sinc}(2\mathrm{T}_0[f - n/2T_0]) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nF)\operatorname{sinc}([f - nF]/F).$$

Таким чином, БЧПФ X(f) деякого сигналу з обмеженою тривалістю може бути однозначно відновленим відповідно до еквідистантних відліків спектра такого сигналу, якщо обраний інтервал відліків за частотою задовольняє умову $F \leq 1/2T_0$ Гц, де T_0 – тривалість сигналу.

2.3 Співвідношення між безперервними та дискретними перетвореннями

Пара перетворень для звичайного визначення дискретного перетворення Фур'є N-точкової часової послідовності x[n] і відповідної їй N-точкової частотної послідовності X[k] задається виразами:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi kn/N),$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]\exp(j2\pi kn/N).$$

Щоб за відліком даних отримати спектральні оцінки у відповідних одиницях виміру енергії або потужності, запишемо дискретно-часовий ряд Фур'є, який можна розглядати як деяку апроксимацію безперервно-часового перетворення Фур'є, засновану на використанні кінцевого числа відліків даних:

$$X[k] = T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi k/N),$$

$$x[n] = \frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\exp(j2\pi kn/N).$$

Для того щоб показати характер відповідності ДЧРФ (*дискретні* функції і в часовій, і в частотній областях) і БЧПФ (*безперервні* функції і в часовій, і в частотній областях), нам буде потрібна послідовність з чотирьох лінійних комутативних операцій: зважування в часовій і частотній областях та взяття відліків або дискретизації як в часовій, так і в частотній областях. Якщо операція зважування виконується в одній з цих областей, то за теоремою згортки їй буде відповідати виконання операції фільтрації (згортки) в іншій області з функцією sinc. Точно також, якщо в одній області виконується дискретизація, то в інші – операція періодичного продовження.

Оскільки зважування і взяття відліків є лінійними і комутативними операціями, то можливі різні способи їх упорядкування, що дають однаковий кінцевий результат при різних проміжних результатах. На рис. 2 показані дві можливі послідовності виконання цих чотирьох операцій.

У результаті виконання операцій зважування і взяття відліків у вузлах 1, 4, 5 і 8 матимуть місце чотири різних типи співвідношень Фур'є. Вузли, у яких функція в частотній області *неперервна*, належать до перетворень Фур'є, а вузли, у яких функція в частотній області *дискретна* – до рядів Фур'є.

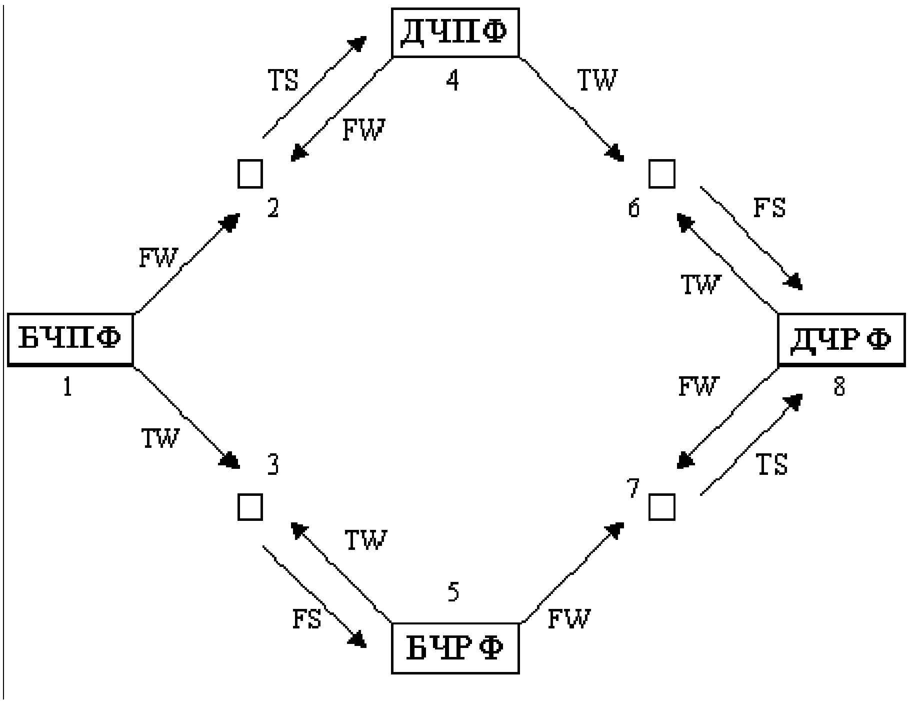

Рис. 2. Дві можливі послідовності з двох операцій зважування і двох операцій взяття відліків, що зв'язують БЧПФ і ДЧРФ: FW – застосування вікна в частотній області; TW – застосування вікна в часовій області; FS – взяття відліків в частотній області; TS – взяття відліків в часовій області.

1 – перетворення Фур'є з безперервним часом, рівняння (1);

4 – перетворення Фур'є з дискретним часом, рівняння (4);

5 – ряд Фур'є з безперервним часом, рівняння (5);

8 – ряд Фур'є з дискретним часом, рівняння (7)

Так, у вузлі 4 зважування в частотній і дискретизація в часовій області породжує дискретно-часове перетворення Фур'є (ДЧПФ), яке характеризується періодичною функцією спектра в частотній області з періодом 1/Т Гц:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp(-j2\pi fnT), \ -1/2T \le f \le 1/2T, \qquad (4)$$

$$x[n] = \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)\exp(j2\pi fnT)df, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm\infty.$$

Зауважимо, що вираз (4) визначає деяку періодичну функцію, яка збігається із заданою в вузлі 1 вихідною перетвореною функцією тільки на інтервалі частот від -1/2T до 1/2T Гц. Вираз (4) пов'язаний з Z-перетворенням дискретної послідовності x[n] співвідношенням

$$X(f) = TX(Z)\Big|_{Z=\exp(j2pft)}.$$

Таким чином, ДЧПФ – це просто Z-перетворення, обчислене на одиничному колі й помножене на T.

Якщо просуватися від вузла 1 до вузла 8 на рис. 2 по нижній гілці, у вузлі 5 операції зважування в часовій області (обмеження тривалості сигналу) і дискретизації в частотній області породжують безперервно-часовий ряд Фур'є (БЧРФ). Використовуючи наведені в табл. 1 і 2 властивості та визначення функцій, отримаємо таку пару перетворень:

$$x[n] = \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)\exp(j2\pi fnT)df,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm\infty, \quad (5)$$

$$x(t) = \frac{1}{NT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\exp(j2\pi kt / NT),\ 0 \le t \le NT. \quad (6)$$

Зауважимо, що вираз (6) визначає деяку періодичну функцію, яка збігається з вихідною (у вузлі 1) тільки на інтервалі часу від 0 до NT.

Незалежно від того, яка з цих двох послідовностей чотирьох операцій обрана, остаточний результат у вузлі 8 буде одним і тим же – *дискретно-часовим рядом Фур'є*, якому відповідає така пара перетворень, отриманих з використанням властивостей, зазначених у табл. 1:

$$X[k] = T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi kn / N), \quad (7)$$

де k=-N/2, ..., N/2-1;

$$x[n] = \frac{1}{NT}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X[k]\exp(j2\pi kn / N), \quad (8)$$

де n=0, ..., N-1.

Теорема про енергії для цього ДЧРФ має вигляд

$$T\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2 = \frac{1}{NT}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1}|X[k]|^2 \qquad (9)$$

і характеризує енергію послідовності з N відліків даних. Обидві послідовності x[n] і X[k] періодичні по модулю N, тому вираз (8) можна записати у формі

$$x[n] = \frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\exp(j\,2\pi\,kn/N), \qquad (10)$$

де $0 \le n \le N$. Множник T в (7) – (10) необхідний для того, щоб (7) і (8) були в дійсності апроксимацією інтегрального перетворення в області інтегрування

$$T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j\,2\pi\,nfT) \approx \int_0^{NT} x(t)\exp(-j\,2\pi\,ft)\,dt \, .$$

3 Дослідження безперервного перетворення Фур'є

Завантажте Matlab 6.5. Пройдіть шлях Start/Demos/Toolboxes/Signal processing/Transforms/Continuous Fourier transform і запустіть Run this demo. Перед вами відкриється інтерфейс (рис. 3).

Перед вами неперервна функція (верхній графік) та її перетворення Фур'є (нижній графік). Функція є імпульсом Гауса (f (x) = exp {- (x / 2) 2}), помноженим ("промодульованим") на косинус конкретної частоти.

Інтерфейс дозволяє змінювати частоту модуляції, а також амплітуди функції або її перетворення та негайно бачить ці зміни в обох областях.

Клацнувши по функції та перетягнувши точку на зазначених графіках, ви встановите нову частоту модуляції та амплітуди. Частота модуляції функції задається в текстовому вікні під графіками. Це число також коригується, коли ви перетаскуєте функцію.

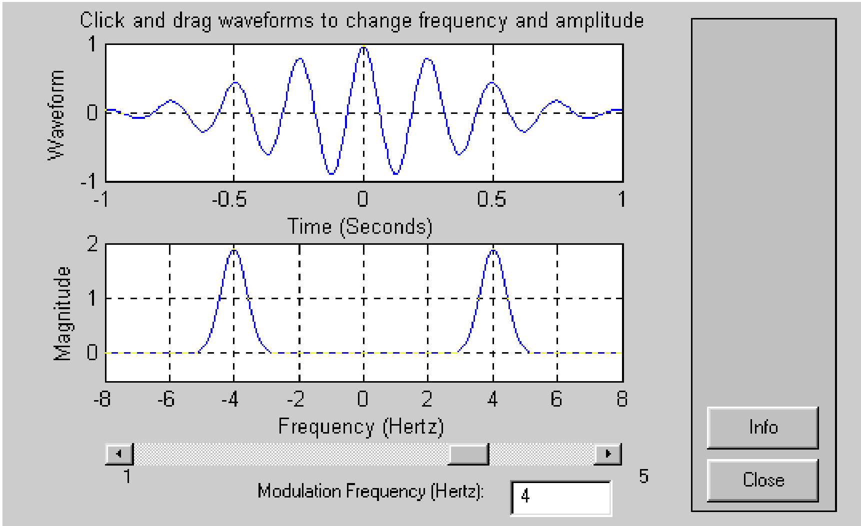

Рис. 3. Неперервна функція та її перетворення Фур'є

Для звіту зафіксуйте графіки функцій (не менше 3-х) для різних амплітуд та частот сигналу.

4 Дослідження дискретного перетворення Фур'є

Перейдіть до файлу Discrete Fourier Transform у тій же папці Transforms, що в розділі 3. Запустіть Run this demo і перед вами відкриється інтерфейс (рис. 4).

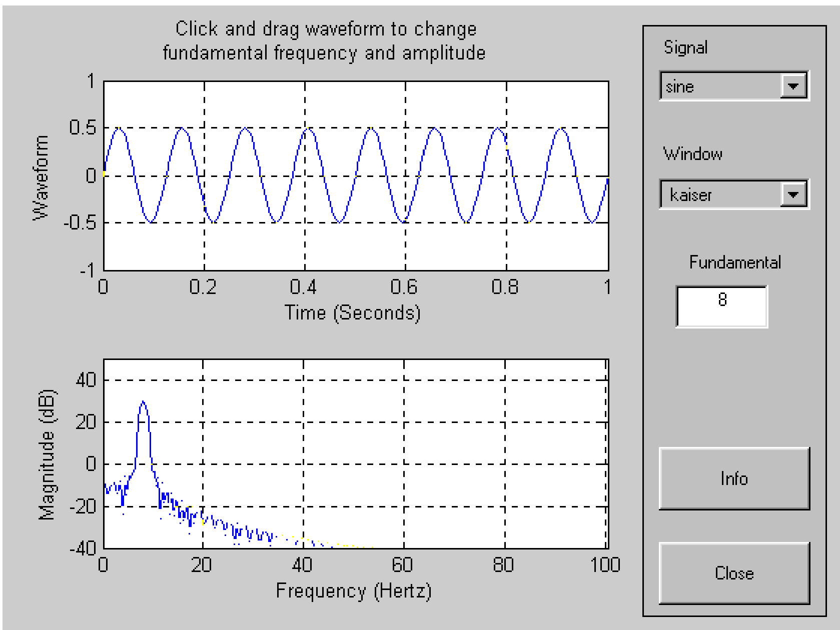

Рис. 4. Функція часу та її абсолютні значення дискретного перетворення Фур'є

Ви бачите функцію часу (верхній графік) та її абсолютні значення дискретного перетворення Фур'є (нижній графік).

На нижньому графіку частоти змінюються від 0 до 100 Гц. На негативних частотах – дзеркальне відображення ДПФ позитивних частот. Частота дискретизації – 200 Гц, що відповідає частоті Найквіста – 100 Гц.

Клацніть по зоні графіку і тягніть точку на функцію верхнього графіка, щоб перемістити цю точку на нову позицію. Це встановлює нові фундаментальні частоту та амплітуду.

Керуюче меню "Сигнал" дозволяє змінювати форму функції.

Меню "Вікна" дозволяє робити вибір між типами функцій згладжуючого вікна. Те значення, що з’явилося у вікні, множиться на часову функцію до обчислення її ДПФ.

Фундаментальна частота функцій також задається в текстовому блоці. Ви можете змінити цю частоту, клацаючи в текстовий блок, редагуючи там число і натискаючи ENTER.

Для звіту зафіксуйте графіки функцій та їх ДПФ (не менше 5-ти) для різних (за формою, амплітудою, частотою і згладжуючим вікном) сигналів. При цьому не менше одного графіка має бути для частоти сигналу, що перевищує частоту Найквіста.

Вимоги до оформлення звіту

Кожен студент повинен отримати допуск до захисту роботи. Для цього він виконує наведені далі завдання.

1. Подати викладачеві роздрукований звіт, що складається з титульного аркуша (див. додаток), **виконаних завдань** та **висновків.** Звіт має бути оформлений у текстовому редакторі MS Word. Текст потрібно набирати шрифтом Times New Roman, 14 pt, вирівнювати за шириною, формат сторінки A4, книжка, абзацний відступ 10 мм, поля 20 мм з кожного боку. Формули додавати за допомогою Microsoft Equation або редактора формул. Усі таблиці та рисунки мають бути підписані.

2. Відкрити на комп’ютері файл з виконаним завданням для перевірки.

3. Відповісти на всі питання стосовно виконаної роботи.

Звіт повинен містити:

1. Найменування та мету роботи.
2. Графіки безперервного перетворення Фур'є з висновками.
3. Графіки ДПФ функцій з висновками.

Контрольні питання

1. Дайте визначення частотного спектру.
2. У чому відмінність перетворення Фур'є від рядів Фур'є?
3. Що таке частота Найквіста?
4. Розкрийте зміст теореми Котельникова.

Список літератури

1. Теорія електричного зв’язку: навч. посіб. / О.Ю. Гусєв, Г.Ф. Конахович, В.І Корнієнко., Г.В. Кузнєцов, О.Ю. Пузиренко. – Львів: Магнолія, 2006, 2010. – 364 с.

2. Gusev O.Yu. Theory of adaptive filtration: tutoria / O.Yu. Gusev, V.M. Gorev, V.I. Kornienko; Ministry of Education and Science of Ukrain, National Technical University “Dnipro Polytechnic”. – Dnipro: NTU “DP”, 2019. – 156 p.

3. Рид Р. Основы теории передачи информации / Р. Рид. – Москва: Вильямс, 2005. – 320 с.

4. Бендат Дж. Применение корреляционного и спектрального анализа. Дж. Бендат, А. Пирсол. – Москва: Мир, 1983. – 312 с.

5. Дьяконов В. МАТЛАБ 6. Учебный курс / В. Дьяконов. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 592 с.

6. Friis H. T. Noise Figure of Radio Receivers / H.T. Friis // Prdc. IRE. – July. – 1994. – P. 419–422.

Додаток

Зразок титульного аркуша для лабораторних робіт

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

Факультет інформаційних технологій
Кафедра безпеки інформації та телекомунікацій

Лабораторна робота ТЕЗ-2
«Перетворення Фур'є»
Варіант № 1

Виконав: ст. гр. 172-20-1
Петров Іван Петрович
Перевірив: професор Гусєв О.Ю.

Дніпро
НТУ «ДП»
2021

Корнієнко Валерій Іванович
Гусєв Олександр Юрійович
Нікольська Олена Ігорівна
Олішевський Ілля Геннадійович

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Методичні рекомендації
до виконання лабораторної роботи ТЕЗ-2
з дисципліни «Теорія електричного зв’язку»
для студентів спеціальності
172 Телекомунікації та радіотехніка

Редактор Ю.В. Рачковська

Підписано до друку 11.11.2020. Формат 30x42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 1,0.
Обл.-вид. арк. 1,0. Тираж 8 пр. Зам. №

НТУ «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.