МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

В.М. Почепов, Л.Я. Фомичова, О.Р. Мамайкін

МАТЕМАТИКА 1

ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2022

УДК 517
Ф 45

Рекомендовано вченою радою університету як навчальний посібник для студентів спеціальності 184 Гірництво (протокол № 1 від 27. 01. 2022).

Рецензенти:
Т.С. Кагадій − д-р фіз.-мат. наук, проф., проф. кафедри вищої математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка»;
О.М. Кузьменко − д-р техн. наук, проф., проф. кафедри ГІО Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».

Почепов В.М.
П 45 Математика 1. Практикум : навч. посіб. / В.М. Почепов, Л.Я. Фомичова, О.Р. Мамайкін ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». − Дніпро: НТУ «ДП», 2022. − 120 с.

ISBN 978-966-350-761-3

Відповідає навчальній програмі дисципліни «Математика 1».
Містить матеріал для 15 практичних занять. Для кожного заняття наведено приклади, що розглядаються в аудиторії, з поясненнями та розв’язками. Підібрано завдання з відповідями для самостійної домашньої роботи.
Призначений для всіх форм навчання.

УДК 517

ISBN 978-966-350-761-3

ВСТУП

Загальний курс дисципліни «Математика 1» є підґрунтям освіти бакалаврів спеціальності 184 Гірництво за освітньо-професійною програмою підготовки «Гірництво», яка регламентує опанування фахівцем таких результатів навчання цієї дисципліни: застосовувати методи математики, для розв'язання складних спеціалізованих задач гірництва, розуміти наукові принципи і теорії, на яких базуються відповідні методи, області їх застосування та обмеження. Низка спеціальних курсів безпосередньо пов'язана із загальним курсом «Математика 1» та спирається на нього.

Мета запропонованого посібника – допомогти студентам оволодіти відповідними математичними поняттями, яких буде достатньо для опрацювання математичного апарату, на який спираються технічні дисципліни, а також для розв'язання складних спеціалізованих задач гірництва та застосування цих методів у відповідних галузях техніки.

Викладений матеріал буде особливо корисним для тих, хто самостійно, без регулярної кваліфікованої допомоги викладача, вивчає математичні дисципліни та бажає придбати необхідні навички у розв'язанні задач. Він стане у нагоді студентам і під час дистанційної освіти. Посібник допомагає також при узгодженні планів проведення лекцій та практичних занять.

Важливим фактором засвоєння математики й оволодіння її методами є самостійна робота студентів.

Призначенням цього посібника є саме підвищення ефективності самостійної роботи.

Результативність самостійної роботи забезпечується ефективною системою контролю, яка включає в себе вміння студентів відповідати на теоретичні питання та виконувати домашні завдання, що подані в посібнику. У роботі наведено розв'язки типових прикладів з докладними коментарями та поясненнями теоретичних положень, подано вказівки та відповіді на всі задачі з домашніх завдань, а на початку кожного практичного заняття − теоретичні питання, на які студент має відшукати відповіді. В кінці кожного заняття маємо достатню кількість методично підібраних задач для самостійного розв'язання з відповідями до них та необхідними поясненнями.

Посібник відповідає освітньо-професійній програмі «Гірництво» для бакалаврів спеціальності 184 Гірництво та компетентностям:

- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність до використання теорій, принципів, методів і понять фундаментальних і загальноінженерних наук для професійної діяльності.

Робота складається з 15-ти практичних занять за такими темами: лінійна алгебра; векторна алгебра; аналітична геометрія; диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Заняття 1. Матриці, дії над ними. Визначники

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається матрицею?
2. Які матриці можна додавати та за якою формулою?
3. Як знаходиться транспонована матриця?
4. Як помножити матрицю на число?
5. Які матриці можна множити та за якою формулою?
6. Що називається визначником, мінором та алгебраїчним доповненням до елементів визначника?
7. За якою формулою обчислюється визначник другого порядку?
8. Властивості визначника.

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Знайти $2A - 3B + 0{,}5D^T$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Дані матриці A, B, D однакового розміру 2×2, тому їх можна додати та отримати в результаті нову матрицю C розміром 2×2, елементи якої знаходяться за формулою $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, тобто елементи результативної матриці отримані шляхом додавання елементів заданих матриць, що стоять на однакових місцях (мають однакові індекси). Щоб помножити матрицю на число, треба кожен елемент матриці помножити на це число $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($\lambda -$ число). Транспонувати матрицю (знайти D^T) означає, що кожен рядок матриці треба записати у стовпець з тим же номером. Враховуючи все сказане, маємо

$$2A - 3B + 0{,}5D^T = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти $AB - BA$.

Розв'язання. Множити можна тільки узгоджені матриці, тобто матриці, у яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці (матриці розміру $m \times n$ та $n \times p$). Якщо не виконується така узгодженість, то добуток не має сенсу. В нашому прикладі матриці квадратні, тому обидва добутки AB та BA існують. Елементи матриці $C = AB$

знаходяться за формулою $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Отже, щоб знайти елемент c_{ij}, треба кожен елемент *i*-го рядка матриці A помножити на відповідний елемент *j*-го стовпця матриці B та результати додати. Наприклад, щоб знайти c_{11} виконаємо такі дії: $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 = 18$.

Для елемента c_{21} дістанемо $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (-3)(-2) + 2 \cdot 5 = 16$.

Отже, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+20 & 0+4 \\ 6+10 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$.

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 & -8+0 \\ 5-3 & 20+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 2 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 2 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 14 & -20 \end{pmatrix}.$$

Зафіксуємо: існують обидва добутки AB та BA, але вони не обов'язково рівні. Висновок: у добутку матриць не можна переставляти множники (не виконується закон комутативності).

Приклад 3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Щоб знайти $f(A)$, треба у вираз для $f(x)$ замість x підставити матрицю A, а замість вільного члена підставити цей вільний член, помножений на одиничну матрицю такого ж розміру, що і задана матриця A.

Отже,

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4-3 & 2+4 \\ -6-12 & -3+16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Обчислити AB^T, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо матрицю B^T, для чого перший рядок матриці записуємо в перший стовпець, а другий рядок – у другий стовпець, дістанемо

$B^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Тоді $AB^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Приклад 5. Знайти суму елементів 1-го стовпця матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Помножимо першу матрицю на другу, а потім результат помножимо на третю матрицю та знайдемо суму елементів першого стовпця:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} = 10 + 20 + 20 + 30 = 80.$$

Приклад 6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Маємо визначник другого порядку, який можна обчислити за формулою $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Отже,

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 5 + 6 = 11.$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x & -5 \\ 1 & x+6 \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язання. В лівій частині рівняння стоїть визначник другого порядку, розкриємо його: $x(x+6) - (-5) \cdot 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 6x + 5 = 0$.

Розв'язуючи отримане квадратне рівняння, дістанемо $x_1 = -1,\ x_2 = -5$.

Приклад 8. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ за допомогою розкладання його за елементами першого рядка.

Розв'язання. Використаємо формулу $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad (i = \overline{1,n})$, яка називається: розкладання визначника за елементами рядка.

У цій формулі покладемо $i = 1$, тому що будемо розкладати визначник за елементами першого рядка, індекс j буде для визначника третього порядку почергово набувати значення $1, 2, 3$, тобто

$$\Delta = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13},$$

де a_{11}, a_{12}, a_{13} – елементи першого рядка;

M_{11}, M_{12}, M_{13} – мінори до зазначених елементів.

Мінорами M_{11}, M_{12}, M_{13} до елементів визначника третього порядку будуть визначники другого порядку.

Наприклад, щоб знайти мінор M_{11}, треба викреслити з даного визначника перший рядок та перший стовпець, елементи, що залишилися, утворюють визначник другого порядку, який є мінором M_{11}. Отже,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-12+2) - 4(8+10) + (2+15) = -30 - 72 + 17 = -85.$$

Приклад 9. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ за допомогою розкладання його за елементами другого стовпця.

Розв'язання. Використаємо формулу розкладання визначника за елементами стовпця $\Delta = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad (j = 2, i = \overline{1,3})$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(8+10) - 3(12-5) - (-6-2) = -72 - 21 + 8 = -85.$$

З прикладів 8 та 9 наочно бачимо, що немає ніякої різниці, за яким рядком чи стовпцем розкладається визначник.

Приклад 10. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ за допомогою такої властивості: величина визначника не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи паралельного рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Розв'язання. З метою отримання у третьому стовпці нульових елементів кожен елемент першого рядка помножимо на 2 та додамо до відповідних елементів другого рядка, потім кожен елемент першого рядка помножимо на (−4) та додамо до відповідних елементів третього рядка, розкладемо визначник за елементами третього стовпця:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 0 \\ -7 & -15 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -7 & -15 \end{vmatrix} = -120 + 35 = -85.$$

Приклад 11. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 8442 & 5226 & 39730 \\ 2814 & 1741 & 13243 \\ 5628 & 3487 & 26488 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Скористуємося властивостями визначника, що суттєво полегшить його обчислення.

Враховуючи таку властивість: якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника, дістанемо $\begin{vmatrix} 8442 & 5226 & 39730 \\ 2814 & 1741 & 13243 \\ 5628 & 3487 & 26488 \end{vmatrix} = 2814 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5226 & 39730 \\ 1 & 1741 & 13243 \\ 2 & 3487 & 26488 \end{vmatrix}$.

Зважаючи на властивість, якою скористалися у попередньому прикладі, маємо $2814 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1741 & 13243 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2814 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -2814$.

Домашнє завдання

1. Обчислити $3A + 4B + \frac{1}{2}C^T - 2E$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти A^3, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Обчислити $A^T B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Знайти добутки AB та BA для матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

7**.** Знайти суму елементів 3-го рядка матриці A, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 5 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

8. Обчислити $ABC-3E$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

9. Обчислити $(AB)^T-C^2-2$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

10. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix}3 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{vmatrix}$.

11. Розв’язати рівняння $\begin{vmatrix}x^2-4 & -1\\ x-2 & x+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 2\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$.

12. Розв’язати нерівність $\begin{vmatrix}2 & x+2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 5 & -3 & x\end{vmatrix}>0$.

13. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 7 & 1 & 6\\ 6 & -2 & 5\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 2\end{vmatrix}$.

14. Розкласти визначник $\begin{vmatrix}6 & 33 & -5\\ 7 & -10 & 7\\ 7 & 3 & -4\end{vmatrix}$ за елементами першого рядка.

15. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього стовпця.

16. Обчислити визначник четвертого порядку $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$.

Відповіді

1. $\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ -25 & 37 \end{pmatrix}$. **2а.** $\begin{pmatrix} -48 & -45 \\ 33 & -120 \end{pmatrix}$; **2б.** $\begin{pmatrix} 28 & 27 & 8 \\ 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} -16 & 25 \\ -75 & 34 \end{pmatrix}$.

4. (1). **5.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **6.** AB – не існує, $BA = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 44 & 56 \\ 66 & 84 \end{pmatrix}$. **7.** 23.

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 34 & 0 & 82 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ 22 & 7 \end{pmatrix}$. **10а.** 24; **10б.** $4ab$. **11.** $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -2 \pm i$. **12.** $(-6; -4)$. **13а.** -46; **13б.** -30.

14. $6 \cdot \begin{vmatrix} -10 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 33 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -10 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2200$.

15.ж $-2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 36$. **16.** 10.

Заняття 2. Обернена матриця. Ранг матриці. Поняття та дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Для яких матриць існують обернені?
2. Що називається оберненою матрицею?
3. Що називається базисним мінором матриці?
4. Що називається рангом матриці?
5. Яка система називається сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?
6. Що називається розв’язком системи?
7. Який вигляд має матричний запис системи?
8. Сформулювати необхідну та достатню умову сумісності системи.
9. За якої умови сумісна система буде визначеною або невизначеною?
10. Які дії належать до елементарних перетворень матриці?
11. Якщо до матриці застосувати елементарні перетворення, чи зміниться її ранг?

Завдання для аудиторної роботи (з розв’язками)

Приклад 1. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 12 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Для якої з цих матриць існує обернена?

Розв’язання. Обернена матриця існує тільки для квадратних та невироджених матриць. Отже, матриця C не може мати обернену, тому що вона прямокутна. Визначник матриці A дорівнює нулю – матриця вироджена.

Матриця B квадратна та невироджена (її визначник відрізняється від нуля). Таким чином, обернена матриця існує тільки для матриці B.

Приклад 2. Знайти обернену матрицю для матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв’язання. Для оберненої матриці існує формула $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$,

де Δ − визначник матриці A;
A_{ij} − алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij} даної матриці.

Обчислимо визначник даної матриці $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=8+3=11$.

Алгебраїчні доповнення до елементів матриці a_{ij} обчислюються за формулою $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ (M_{ij} − мінори до елементів a_{ij}), тобто

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=a_{22}=4; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-a_{12}=-3;$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-a_{21}=1; \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=a_{11}=2.$$

Таким чином, $A^{-1}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Приклад 3. Для матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -2 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$ знайти обернену.

Розв'язання: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ -2 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-52$.

$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=6$; $\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=14$; $\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-10$;

$A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=22$; $\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=8$; $\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{vmatrix}=-2$;

$A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-8$; $\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-10$; $\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-4$.

За формулою для оберненої матриці маємо

$$A^{-1}=\frac{1}{-52}\begin{pmatrix}6 & 14 & -10\\ 22 & 8 & -2\\ -8 & -10 & -4\end{pmatrix}.$$

Для перевірки отриманого результату перемножимо дану та обернену матриці, якщо дістанемо одиничну матрицю, то результат правильний.

$$A^{-1}A=\frac{1}{-52}\begin{pmatrix}6 & 14 & -10\\ 22 & 8 & -2\\ -8 & -10 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -2 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{-52}\begin{pmatrix}-52 & 0 & 0\\ 0 & -52 & 0\\ 0 & 0 & -52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Приклад 4. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -3 & 3\\ -4 & 5 & -5 & 11\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо ранг матриці методом елементарних перетворювань, за якими можна: а) множити всі елементи будь-якого рядка (стовпця) на постійне число $\lambda\neq 0$; б) додавати до елементів будь-якого рядка (стовпця) числа, пропорційні елементам паралельного рядка (стовпця);

в) міняти місцями два рядки (стовпці); г) викреслювати рядок (стовпець), усі елементи якого дорівнюють нулю; д) транспонувати матрицю.

Ці перетворення не змінюють рангу матриці, а дають змогу отримати матрицю еквівалентну даній, яка буде квадратна, мати відмінний від нуля визначник. Цей визначник – базисний мінор заданої матриці, а його порядок буде її шуканим рангом.

Отже, $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \\ -4 & 5 & -5 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad RgA = 2.$$

Приклад 5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow RgA = 3.$$

Приклад 6. Записати основну та розширену матриці системи

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ -3x_2 + 5x_4 - 3x_5 = 10 \end{cases}.$$

Розв'язання. Основна матриця системи A складається з коефіцієнтів при невідомих, а розширену матрицю системи A^* отримаємо, якщо допишемо до основної матриці стовпець вільних членів. Таким чином,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^*=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & -3 & 10 \end{array}\right).$$

Приклад 7. Дослідити системи на сумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x+y=5, \\ -3x-5z=-4, \\ 4x-2y+3z=1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x+3y-4z=1 \\ 2x+y+2z=4 \\ -x-2y+2z=5 \end{cases}.$$

Розв'язання. На сумісність систему досліджують за теоремою Кронекера – Капеллі, тобто знаходять ранги основної та розширеної матриць, і якщо ранги однакові − система сумісна, якщо ранги різні, то система несумісна.

Визначимо ранги основної та розширеної матриць за допомогою метода елементарних перетворень:

$$\text{а) } A*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -5 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -5 & -4 \\ 8 & 0 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 13 & 0 & 1 & 18 \\ 8 & 0 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 1 & 18 \\ -31 & 0 & 0 & -43 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -31 & 0 & 0 & -43 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -31 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -31 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У результаті елементарних перетворень здобули матрицю з визначником третього порядку, який відрізняється від нуля, тобто являє собою базисний мінор третього порядку, а це означає, що $RgA^*=3$. Коли шукали ранг розширеної матриці, то помітили, що всі елементи стовпця вільних членів перетворилися на нулі, що дає змогу стверджувати − ранг основної матриці теж буде дорівнювати 3, тобто $RgA=RgA^*=3$ − система сумісна.

Можна ранги основної та розширеної матриць обчислювати окремо, що зробимо у такому прикладі:

$$\text{б) } A*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad RgA^*=3.$$

Уже зараз можна зробити висновок, що система несумісна (у другому рядку всі елементи обернулися на нуль, крім вільного члена). Перевіримо цей висновок, обчисливши ранг основної матриці:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-4\\2&1&2\\-1&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-4\\0&-5&10\\0&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-5&10\\0&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\quad RgA=2.$$

$RgA\neq RgA^*$, що підтверджує висновок − система несумісна.

Приклад 8. З'ясувати, чи буде система $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1\\-2x_1+x_2-3x_3=3\\-4x_1+5x_2-5x_3=11\end{cases}$ визначеною або невизначеною.

Розв'язання. Визначені та невизначені системи належать до сумісних систем, тому спочатку виконуємо дослідження на сумісність системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\-2&1&-3&3\\-4&5&-5&11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&3&1&5\\0&9&3&15\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&3&1&5\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$RgA=RgA^*=2\ \text{− система сумісна.}$$

Далі треба порівняти величину рангу з кількістю невідомих системи. Коли $RgA=RgA^*=n$, де n – кількість невідомих, – система визначена і має один розв'язок, коли $RgA=RgA^*<n$, – система невизначена і має безліч розв'язків.

У даному прикладі $RgA=RgA^*=2<n=3$ − система невизначена і має безліч розв'язків.

Приклад 9. Записати систему $\begin{cases}-x_1+3x_2+2x_3=5\\2x_1+5x_2-x_3=7\\3x_1-3x_2-5x_3=11\end{cases}$ у матричній формі.

Розв'язання. Матрична форма запису системи має вигляд $AX=B$. Отже,

$$\begin{pmatrix}-1&3&2\\2&5&-1\\3&-3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\11\end{pmatrix}.$$

Домашнє завдання

1. Знайти обернені матриці для матриць:

а) $\begin{pmatrix}-1&4\\8&0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}4&0&5\\0&1&-6\\3&0&4\end{pmatrix}$.

2. Знайти обернені матриці та перевірити результат для матриць:

$$а)\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad б)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриць:

$$а)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}; \quad б)\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 93 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1294 & 52 \end{pmatrix}; \quad в)\begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Записати основну та розширену матриці систем:

$$а)\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}; \quad б)\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 9 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}; \quad в)\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}.$$

5. Записати систему $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 4 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 + 8 = 0 \end{cases}$ у матричній формі.

6. Дослідити системи на сумісність:

$$а)\begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ 7x + 6y + 5z = -2 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \end{cases}; \quad б)\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}; \quad в)\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 5 \end{cases}.$$

7. З'ясувати, чи буде система $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -8 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$ визначеною.

Відповіді.

1. а) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **2.** а) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

2. б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$. **3.** а) 2. б) 3. в) 1. **4.** а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right);\text{ б) } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix},\ A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right);$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix},\ A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right).$$

5. $\begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}.$

6. а) несумісна; б) сумісна, невизначена; в) несумісна. **7.** Визначена.

Заняття 3. Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера, матричним методом, методом Гаусса

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається розв’язком системи?

2. Які системи можна розв’язувати за формулами Крамера або матричним методом?

3. Розв’язок системи матричним методом.

4. Записати формули Крамера.

5. Метод Гаусса.

6. Які невідомі називаються вільними?

7. Які значення надаються вільним невідомим?

8. За якої умови однорідна система має нетривіальний розв’язок?

9. Чи може однорідна система бути несумісною?

10. З чого складається фундаментальна система розв’язків (ФСР) однорідної системи?

Завдання для аудиторної роботи (з розв’язками)

Приклад 1. Розв’язати систему матричним способом

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_3 = 5 \\ 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}.$$

Розв’язання. Спочатку треба дослідити систему, але в цьому разі не будемо це робити, бо зазначено, що до розв’язання треба застосувати матричний метод, а його застосовують тільки для сумісних визначених систем.

Матрична форма запису системи має вигляд матричного рівняння $AX = B$, розв’язок якого можна записати так: $X = A^{-1}B$. Отже, треба знайти матрицю A^{-1}, яка являє собою обернену до основної матриці системи A. Далі обернену матрицю A^{-1} треба помножити на матрицю-стовпець вільних членів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 + !8 = 10;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

$$X=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&4&-1\\-8&-4&6\\12&6&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}20\\10\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=3.$$

Приклад 2. Розв'язати систему за формулами Крамера

$$\begin{cases}3x_1-3x_2+2x_3=2\\4x_1-5x_2+2x_3=1\\5x_1-6x_2+4x_3=3\end{cases}.$$

Розв'язання. Формули Крамера мають вигляд: $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta},\quad (i=\overline{1,n})$, де Δ – визначник основної матриці системи;

Δ_i – визначник, який утворено з визначника Δ шляхом заміни елементів i-го стовпця (коефіцієнтів при шуканих невідомих) на стовпець вільних членів (вільні члени системи). Обчислимо всі визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-3&2\\4&-5&2\\5&-6&4\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-5&2\\-6&4\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&2\\5&4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}4&-5\\5&-6\end{vmatrix}=-4;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2&-3&2\\1&-5&2\\3&-6&4\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-5&2\\-6&4\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1&-5\\3&-6\end{vmatrix}=-4;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&2&2\\4&1&2\\5&3&4\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&2\\5&4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}4&1\\5&3\end{vmatrix}=-4;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&-3&2\\4&-5&1\\5&-6&3\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-5&1\\-6&3\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&1\\5&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}4&-5\\5&-6\end{vmatrix}=-4.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1;\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1;\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1.$$

Приклад 3. Розв'язати систему методом Гаусса $\begin{cases}4x_1+2x_2+x_3=4\\x_1+3x_2+2x_3=2\\2x_1-x_2+x_3=5\end{cases}.$

Розв'язання. Метод Гаусса – це метод послідовного виключення невідомих. Краще за все виконувати таку роботу за допомогою розширеної матриці, до якої застосувати елементарні перетворення та звести її до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & \bigg| & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \bigg| & 2 \\ 2 & -1 & 1 & \bigg| & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & \bigg| & 4 \\ -7 & -1 & 0 & \bigg| & -6 \\ -2 & -3 & 0 & \bigg| & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & \bigg| & 4 \\ -7 & -1 & 0 & \bigg| & -6 \\ 19 & 0 & 0 & \bigg| & 19 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, у другому рівнянні відсутнє третє невідоме, а в третьому – немає третього та другого невідомих. Напишемо систему рівнянь, що відповідає останній матриці:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -7x_1 - x_2 = -6 \\ 19x_1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -7 - x_2 = -6 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2\cdot(-1) + x_3 = 4 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Приклад 4. Розв’язати систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$.

Розв’язання. У прикладі немає ніякої підказки щодо характеру системи, тому виконаємо дослідження:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & \bigg| & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & \bigg| & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & \bigg| & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & \bigg| & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & \bigg| & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & \bigg| & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & \bigg| & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & \bigg| & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigg| & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \bigg| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $RgA = RgA* = 2 < n = 5$, це дає змогу стверджувати, що система сумісна та невизначена. Третє рівняння можна вважати зайвим, а вільними невідомими будуть друге, четверте та п’яте. Вільним невідомим дамо значення: $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, $x_5 = C_3$ і дістанемо таку систему

$$\begin{cases} x_2 = C_1 \\ x_4 = C_2 \\ x_5 = C_3 \\ 2x_1 + 3x_3 = 1 + x_2 + 2x_4 - 4x_5 \\ 4x_1 + 5x_3 = 1 + 2x_2 - x_4 - 7x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = C_1 \\ x_4 = C_2 \\ x_5 = C_3 \\ 2x_1 + 3x_3 = 1 + C_1 + 2C_2 - 4C_3 \\ 4x_1 + 5x_3 = 1 + 2C_1 - C_2 - 7C_3 \end{cases}.$$

З останніх двох рівнянь знаходимо за формулами Крамера невідомі x_1, x_3:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + C_1 + 2C_2 - 4C_3 & 3 \\ 1 + 2C_1 - C_2 - 7C_3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5 + 5C_1 + 10C_2 - 20C_3 - (3 + 6C_1 - 3C_2 - 21C_3)}{-2};$$

$$x_1 = -1 + \frac{1}{2}C_1 - \frac{13}{2}C_2 - \frac{1}{2}C_3;$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+C_1+2C_2-4C_3 \\ 4 & 1+2C_1-C_2-7C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2+4C_1-2C_2-14C_3-(4+4C_1+8C_2-16C_3)}{-2};$$

$$x_3 = 1+5C_2-C_3.$$

Приклад 5. Розв'язати систему $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+2x_4=5 \\ -x_1+3x_2-7x_3+3x_4=-1 \\ 4x_1+6x_2-9x_3+5x_4=7 \\ x_1+3x_2-6x_3+4x_4=-4 \end{cases}$.

Розв'язання. Будь-яку систему можна розв'язати методом Гаусса, послідовно виключаючи невідомі з рівнянь системи. Це можна виконати за допомогою розширеної матриці:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -7 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & -6 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & -12 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & 11 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & -12 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & -12 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З останньої матриці бачимо, що четверте рівняння зайве, а x_4 − вільне невідоме. Цьому невідомому дамо значення довільної сталої: $x_4 = C$. Запишемо систему відповідно до зазначених тверджень та останньої матриці:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+2x_4=5 \\ 6x_2-12x_3+5x_4=4 \\ -x_3+2x_4=-9 \\ x_4=C \end{cases}.$$

Підставимо значення x_4 в третє рівняння, знайдемо x_3, потім x_4 та x_3 підставимо у друге рівняння, знайдемо x_2 й остаточно, підставивши у перше рівняння x_4, x_3 та x_2, знайдемо x_1:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+2C=5 \\ 6x_2-12x_3+5C=4 \\ -x_3+2C=-9 \\ x_4=C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=5-2C \\ 6x_2-12x_3=4-5C \\ x_3=9+2C \\ x_4=C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5(9+2C) = 5 - 2C \\ 6x_2 - 12(9+2C) = 4 - 5C \\ x_3 = 9 + 2C \\ x_4 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 - 2C + 45 + 10C \\ 6x_2 = 4 - 5C + 108 + 24C \\ x_3 = 9 + 2C \\ x_4 = C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3\left(\frac{112}{6} + \frac{19}{6}C\right) = 50 + 8C \\ x_2 = \frac{112}{6} + \frac{19}{6}C \\ x_3 = 9 + 2C \\ x_4 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 50 + 8C - 56 - \frac{19}{2}C \\ x_2 = \frac{112}{6} + \frac{19}{6}C \\ x_3 = 9 + 2C \\ x_4 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 - \frac{3}{2}C \\ x_2 = \frac{112}{6} + \frac{19}{6}C. \\ x_3 = 9 + 2C \\ x_4 = C \end{cases}$$

Приклад 6. Розв’язати систему $\begin{cases} x + y - 7z = 0 \\ x - 6y + z = 0 \\ 5x - y - z = 0 \end{cases}$.

Розв’язання. Усі вільні члени системи дорівнюють нулю, отже, система однорідна. Однорідна система завжди сумісна і може бути визначеною (мати один розв’язок) або невизначеною (мати безліч розв’язків). Система визначена, коли кількість невідомих збігається з рангом основної матриці. В такому випадку система має один розв’язок (усі невідомі дорівнюють нулю), його називають тривіальним.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -6 & 34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -26 \\ 0 & -6 & 34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 190 \end{pmatrix} \Rightarrow RgA = 3.$$

Ранг основної матриці збігається з кількістю невідомих – система має тільки тривіальний розв’язок: $x = y = z = 0$.

Приклад 7. Розв’язати систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$.

Розв’язання. Визначимо ранг основної матриці системи A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{Bmatrix} \Rightarrow RgA = 2.$$

Ранг основної матриці менший за число невідомих, тому система має не тільки тривіальний розв'язок, а і безліч інших.

За виглядом основної матриці після перетворення третє рівняння буде зайвим (відбулося обнуління всіх коефіцієнтів цього рівняння), та за вільні невідомі можна прийняти x_3, x_4 (відбулося обнуління всіх коефіцієнтів при цих невідомих).

Нехай $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, тоді

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3C_1 + 4C_2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3C_1 + 4C_2 \\ 7x_2 = 8C_1 - 7C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{7}C_1 + 2C_2 \\ x_2 = \dfrac{8}{7}C_1 - C_2 \end{cases}.$$

Отже, розв'язок системи можна записати так:

$$x_1 = -\frac{5}{7}C_1 + 2C_2, \quad x_2 = \frac{8}{7}C_1 - C_2, \quad x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2.$$

Надаючи довільним сталим різноманітні значення (їх може бути безліч), будемо отримувати безліч розв'язків цієї системи, але тільки $n - r$ (n – кількість невідомих у системі, r – величина рангу основної матриці системи) розв'язків будуть лінійно незалежними, саме вони утворюють фундаментальну систему розв'язків (ФСР) .

Приклад 8. Знайти фундаментальну систему розв'язків системи

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Визначимо ранг основної матриці системи A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow RgA = 3.$$

Ранг основної матриці збігається з кількістю невідомих − дана система має тільки тривіальний розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ФСР не існує.

Приклад 9. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальній розв'язок системи $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&-3&-4&-6&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-3&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\ RgA=2.$$

Система має безліч розв'зків, але тільки $n-r=5-2=3$ лінійно незалежні, які й утворюють ФСР.

$$\begin{cases}x_1+2x_2=-C_1-C_2-C_3\\x_1-x_2=3C_1+5C_2+C_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=-C_1-C_2-C_3\\-3x_2=4C_1+6C_2+2C_3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+2(-\frac{4}{3}C_1-2C_2-\frac{2}{3}C_3)=-C_1-C_2-C_3\\ x_2=-\frac{4}{3}C_1-2C_2-\frac{2}{3}C_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5}{3}C_1+3C_2+\frac{1}{3}C_3\\x_2=-\frac{4}{3}C_1-2C_2-\frac{2}{3}C_3\end{cases}.$$

Для знаходження лінійно незалежних розв'язків покладемо:

1) $C_1=1, C_2=0, C_3=0,$

2) $C_1=0, C_2=1, C_3=0,$

3) $C_1=0, C_2=0, C_3=1,$

після чого отримаємо три лінійно незалежних розв'язки, що утворюють ФСР, тобто

$$X_1=\begin{pmatrix}5/3\\-4/3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Тоді загальний роз'вязок системи має вигляд:

$$X=C_1\begin{pmatrix}5/3\\-4/3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Домашнє завдання

1. Розв'язати системи матричним методом:

$$\text{а)}\begin{cases}y+3z=-1\\2x+3y+5z=3\\3x+5y+7z=6\end{cases};\qquad \text{б)}\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2\\3x_1-2x_2+6x_3=-7\\2x_1+x_2-x_3=-5\end{cases}.$$

2. Розв'язати системи за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 2x+3y-7z=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=6 \\ x_1+5x_2=-3 \end{cases}$.

3. Розв’язати системи методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=5 \\ 3x_1-2x_2+3x_3=4 \\ 2x_1-3x_2+5x_3=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=30 \\ 3x_1+3x_2+4x_3+5x_4=34 \\ 4x_1+4x_2+4x_3+5x_4=41 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=10 \end{cases}$.

4. Дослідити системи рівнянь на сумісність та знайти загальний розв’язок (якщо існує):

а) $\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3+x_4=5 \\ 3x_1-7x_2+3x_3-x_4=-1 \\ 5x_1-9x_2+6x_3+4x_4=7 \\ 4x_1-6x_2+3x_3+x_4=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=3 \\ 3x_1-x_3+x_4=5 \end{cases}$.

5. Знайти загальні розв’язки та фундаментальні системи розв’язків однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$.

Відповіді

1 а) $x=1,\ y=2,\ z=-1$; б) $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=1$. **2** а) $x=3,\ y=1,\ z=-1$; б) $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=1$. **3** а) $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=0$; б) $x_1=4,\ x_2=3,\ x_3=2,\ x_4=1$. **4** а) Несумісна; б) $x_1=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}C_1-\frac{1}{3}C_2$, $x_2=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}C_1+\frac{2}{3}C_2$, $x_3=C_1$, $x_4=C_2$. **5** а) $x_1=x_2=x_3=0$, ФСР не існує; б) $X=C_1\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Заняття 4. Поняття вектора. Скалярний добуток

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається вектором?
2. Які вектори називаються рівними?
3. Що називається модулем вектора?
4. Що називається ортом вектора $\overline{a}$ та як орт позначається?
5. Як знайти проекцію вектора $\overline{a}$ на вісь l?
6. Як знайти проекції вектора на осі координат, якщо дано координати початкової та кінцевої точок вектора?
7. Що таке напрямні косинуси та як вони визначаються?
8. Який вигляд має розклад вектора за векторами ортонормованого базису?
9. Що називається скалярним добутком двох векторів?
10. Сформулювати властивості скалярного добутку.
11. Записати формулу для обчислення проекції одного вектора на напрям другого.
12. Як обчислюється довжина вектора, якщо відомі його координати?
13. Сформулювати необхідну та достатню умови перпендикулярності двох векторів.
14. Записати формулу для знаходження кута між векторами, заданими своїми координатами.
15. Записати формулу для знаходження скалярного добутку двох векторів, що задаються своїми координатами.

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Дано точки $A(3;-1;2)$ та $B(-1;2;1)$. Знайти координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{BA}$.

Розв'язання. Якщо дано координати початкової (x_1, y_1, z_1) та кінцевої (x_2, y_2, z_2) точок вектора $\overline{a}$, то координати вектора $\{a_x; a_y; a_z\}$ можна знайти за формулами: $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$. Отже,

$$\overline{AB} = \{-1-3; 2-(-1); 1-2\} \Rightarrow \overline{AB} = \{-4; 3; -1\};$$
$$\overline{BA} = \{3-(-1); -1-2; 2-1\} \Rightarrow \overline{BA} = \{4; -3; 1\}.$$

Приклад 2. Визначити точку N, з якою збігається кінець вектора $\overline{a} = \{3; -1; 4\}$, якщо його початок збігається з точкою $M(1; 2; -3)$.

Розв'язання. З формул, наведених у попередньому прикладі, знаходимо координати кінцевої точки вектора: $x_2 = a_x + x_1$, $y_2 = a_y + y_1$, $z_2 = a_z + z_1$. Таким чином, $N(3+1; -1+2; 4-3) \Rightarrow N(4;1;1)$.

Приклад 3. Дано модуль вектора $|\overline{a}| = 2$ та кути $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$. Обчислити проекції вектора на координатні осі.

Розв'язання. Проекція вектора $\overline{a}$ на будь-яку вісь l обчислюється за формулою $np_l\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$, де φ – кут між вектором та додатним напрямом осі.

Отже, $np_{Ox}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha = 2\cos 45^0 = \sqrt{2}$; $np_{Oy}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\beta = 2\cos 60^0 = 1$; $np_{Oz}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\gamma = 2\cos 120^0 = -1$.

Приклад 4. Дано два вектори $\overline{a} = \{3; -2; 6\}$ та $\overline{b} = \{-2; 1; 0\}$. Визначити проекції на координатні осі вектора $2\overline{a} + 3\overline{b}$.

Розв'язання. Проекція суми векторів дорівнює сумі однойменних проекцій цих векторів, проекція добутку вектора на число дорівнює добутку проекції вектора на це число. Отже, щоб помножити вектор на число, треба кожну його проекцію помножити на це число. Для того щоб знайти проекції суми векторів, треба додати їхні однойменні проекції. Виходячи з усього сказаного, маємо:

$$2\overline{a} = \{6; -4; 12\}; \quad 3\overline{b} = \{-6; 3; 0\}; \quad 2\overline{a} + 3\overline{b} = \{0; -1; 12\}.$$

Приклад 5. Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, при цьому $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$. Обчислити $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b})$.

Розв'язання. Виконаємо множення двочленів у шуканому виразі:

$$(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b}) = 3\overline{a}^2 + 6\overline{a}\overline{b} - 2\overline{b}\overline{a} - 4\overline{b}^2 = 3\overline{a}^2 + 4\overline{a}\overline{b} - 4\overline{b}^2.$$

За властивостями скалярного добутку маємо: скалярний квадрат дорівнює квадрату довжини вектора ($\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$); виконується закон комутативності. За означенням скалярного добутку маємо $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$. Тоді дістанемо

$$3|\overline{a}|^2 + 4\overline{a}\overline{b} - 4|\overline{b}|^2 = 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3\cdot 4\cos\frac{2}{3}\pi - 4\cdot 4^2 = 27 - 34 - 64 = -61.$$

Приклад 6. Записати розклад вектора $\overline{a} = \{4; -5; 3\}$ за ортонормованим базисом $\overline{i}; \overline{j}; \overline{k}$.

Розв'язання: $\overline{a} = 4\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$.

Приклад 7. Дано вектори $\overline{a} = \{4; -2; -4\}$, $\overline{b} = \{6; -3; 2\}$. Обчислити $\overline{a}\overline{b}$.

Розв'язання. Вектори задано своїми координатами, а знайти треба скалярний добуток векторів. Використаємо формулу для знаходження скалярного добутку векторів, заданих своїми координатами:

$$\overline{a}\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

За наведеною формулою маємо $\overline{a}\overline{b} = 4\cdot 6 + (-2)\cdot(-3) + (-4)\cdot 2 = 22$.

Приклад 8. Знайти довжину вектора $\overline{a} = -2\overline{i} + 6\overline{j} + 3\overline{k}$.

Розв'язання. Довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$. Координати вектора – це коефіцієнти при векторах $\overline{i}; \overline{j}; \overline{k}$ у розкладанні вектора за векторами ортонормованого базису, тобто $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 3^2} = 7$.

Приклад 9. Знайти відстань між точками $A(3;-2;4)$ та $B(0;4;6)$.

Розв'язання. Відстанню між точками A та B можна вважати довжину вектора $\overline{AB}$, яка обчислюється за формулою

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Отже, $d = \sqrt{(0-3)^2 + (4+2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{49} = 7$.

Приклад 10. Визначити, при якому значенні α вектори $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ та $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - \alpha\overline{k}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Два вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. Знайдемо $\overline{a}\overline{b}$ та прирівняємо отриманий вираз до нуля:

$$\overline{a}\overline{b} = \alpha \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 2(-\alpha) = -\alpha - 6 \Rightarrow -\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = -6.$$

Приклад 11. Знайти кут, який утворюють вектори $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{k}$ та $\overline{b} = 7\overline{i} + \overline{k}$.

Розв'язання. З означення скалярного добутку випливає, що кут між векторами дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на їх довжини: $cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}$, тобто $cos\varphi = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}}$.

Таким чином, дістанемо

$$cos(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 1}{\sqrt{9+16}\sqrt{49+1}} = \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 12. Знайти напрям вектора $\overline{a} = \{12; -15; -16\}$.

Розв'язання. Напрям вектора в просторі задають напрямні косинуси, які обчислюються за формулами:

$$cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}; \quad cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}; \quad cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}.$$

Підставляючи у формули координати заданих векторів, дістанемо

$$cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{12^2 + (-15)^2 + (-16)^2}} = \frac{12}{25}; \quad cos\beta = \frac{-15}{25}; \quad cos\gamma = \frac{-16}{25}.$$

Приклад 13. Знайти орт вектора $\overline{a} = \{3; 4; -12\}$.

Розв'язання. Орт вектора $\overline{a}$ − це одиничний вектор $\overline{a^0}$, напрям якого збігається із заданим вектором, знаходять його за формулою $\overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$. Оскільки

$|\overline{a}| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$, то $\overline{a^0} = \{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\}$.

Приклад 14. Чи може вектор складати з координатними осями такі кути: $\alpha = 45^0$, $\beta = 135^0$, $\gamma = 60^0$?

Розв'язання. Напрямні косинуси зв'язані між собою формулою $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Якщо ця рівність не виконується, то вектор не утворюватиме з осями координат такі кути. Перевіримо цю рівність у нашому випадку: $\cos^2 45^0 + \cos^2 135^0 + \cos^2 60^0 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \neq 1.$

Отже, заданий вектор не може утворювати зазначені кути.

Приклад 15. Обчислити $np_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a}$, якщо $\overline{a} = \{1; -3; 4\}$, $\overline{b} = \{3; -4; 2\}$, $\overline{c} = \{-1; 1; 4\}$.

Розв'язання. Проекцію одного вектора на інший знаходять, як скалярний добуток цих векторів, поділений на довжину того вектора, на напрям якого шукають проекцію, тобто $np_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a} = \frac{\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})}{|\overline{b}+\overline{c}|}$. Обчислимо $\overline{b}+\overline{c} = \{2; -3; 6\}$,

$\overline{a}(\overline{b}+\overline{c}) = 2 + 9 + 24 = 35$, $|\overline{b}+\overline{c}| = \sqrt{4+9+36} = 7$, тоді $np_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a} = \frac{35}{7} = 5$.

Приклад 16. Обчислити $np_{\overline{c}}(3\overline{a} - 2\overline{b})$, якщо $\overline{a} = -2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 5\overline{j}$, $\overline{c} = 4\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$.

Розв'язання: $3\overline{a} - 2\overline{b} = \{-8; -7; 3\}$; $|\overline{c}| = \sqrt{16+16+4} = 6$;

$$np_{\overline{c}}(3\overline{a} - 2\overline{b}) = \frac{\overline{c}(3\overline{a} - 2\overline{b})}{|\overline{c}|} = \frac{-32-28-6}{6} = -11.$$

Домашнє завдання

1. Дано точки $A(-4;1;2)$ та $B(3;2;-2)$. Знайти координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{BA}$.

2. Визначити початок вектора $\overline{a} = \{2; -3; -1\}$, якщо його кінець збігається з точкою $\{1; -1; 2\}$.

3. Дано модуль вектора $|\bar{a}| = 4$ та кути $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 90^0$. Обчислити проекції вектора на координатні осі.

4. Дано два вектори $\bar{a} = \{6; -3; 9\}$ та $\bar{b} = \{-2; 1; 0\}$. Визначити проекції на координатні осі вектора $\frac{1}{3}\bar{a} - \bar{b}$.

5. Вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$, при цьому $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2$. Обчислити $(\bar{a} - \bar{b})^2$.

6. Записати розклад вектора $\bar{a} = \{-1; 4; -2\}$ за базисом $\bar{i}; \bar{j}; \bar{k}$.

7. Дано вектори $\bar{a} = \{-3; 1; 6\}$, $\bar{b} = \{-2; -5; 4\}$. Обчислити $\bar{a}\bar{b}$.

8. Знайти довжину вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$.

9. Знайти відстань між точками $A(1; -2; 3)$ та $B(2; -4; 5)$.

10. Визначити, при якому значенні α вектори $\bar{a} = 2\bar{i} + \alpha\bar{j} + 5\bar{k}$ та $\bar{b} = -2\bar{i} - 4\bar{j} + \alpha\bar{k}$ взаємно перпендикулярні.

11. Знайти кут, який утворюють вектори $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}$ та $\bar{b} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$.

12. Знайти напрям вектора $\bar{a} = \{2; 1; 2\}$.

13. Знайти орт вектора $\bar{a} = \{6; -2; -3\}$.

14. Чи може вектор складати з координатними осями такі кути: $\alpha = 90^0$, $\beta = 150^0$, $\gamma = 60^0$?

15. Обчислити проекцію вектора $\bar{a} = \{5; 2; 5\}$ на вісь вектора $\bar{b} = \{2; -1; 2\}$.

16. Обчислити $пр_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b})$, якщо

$$\bar{a} = 3\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}, \quad \bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}, \quad \bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}.$$

Відповіді

1. $\overline{AB} = \{7; 1; -4\}$, $\overline{BA} = \{-7; -1; 4\}$. **2.** $\{-1; 2; 3\}$. **3.** $\bar{a} = \{2\sqrt{3}; 2; 0\}$.
4. $\{4; -2; 3\}$. **5.** 12. **6.** $\bar{a} = -\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$. **7.** 25. **8.** 3. **9.** 3. **10.** 4.
11. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **12.** $cos\alpha = \frac{2}{3}$; $cos\beta = \frac{1}{3}$; $cos\gamma = \frac{2}{3}$. **13.** $\overline{a^0} = \{\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}\}$.
14. Може. **15.** 6. **16.** -4.

Заняття 5. Векторний та мішаний добутки векторів

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається векторним добутком двох векторів?

2. Сформулювати властивості векторного добутку.

3. Сформулювати необхідну та достатню умову колінеарності двох векторів.

4. Записати формулу для обчислення векторного добутку векторів, заданих своїми координатами.

5. Чому дорівнює площа паралелограма, побудованого на двох векторах як на сторонах?

6. Що називається мішаним добутком трьох векторів?

7. Записати формулу для обчислення мішаного добутку векторів, заданих своїми координатами.

8. Сформулювати умову компланарності трьох векторів.

9. Чому дорівнює об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах як на сторонах?

10. Як за допомогою мішаного добутку визначити орієнтацію трійки векторів?

11. Сформулюйте умову, при якій чотири точки лежатимуть на одній площині.

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Дано $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 2$ та $\bar{a}\bar{b} = 12$. Обчислити $\left|[\bar{a}\bar{b}]\right|$.

Розв'язання. За означенням векторного добутку маємо $\left|[\bar{a}\bar{b}]\right| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між даними векторами. З означення скалярного добутку ($\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$) дістанемо: $12 = 10 \cdot 2 \cdot \cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \dfrac{3}{5}$. Таким чином,

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5} \;\Rightarrow\; \left|[\bar{a}\bar{b}]\right| = 10 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = 16.$$

Приклад 2. Яку умову мають задовольняти вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, щоб вектори $\bar{a} + \bar{b}$ та $\bar{a} - \bar{b}$ були колінеарними?

Розв'язання. На підставі умови колінеарності вектори $\bar{a} + \bar{b}$ та $\bar{a} - \bar{b}$ будуть колінеарними тоді й тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнюватиме нульовому вектору. Знайдемо векторний добуток цих векторів:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a} \times \bar{a} + \bar{b} \times \bar{a} - \bar{a} \times \bar{b} - \bar{b} \times \bar{b} = -2(\bar{a} \times \bar{b}).$$

Тут враховано: векторний добуток двох колінеарних векторів дорівнює нулю ($\bar{a} \times \bar{a} = 0, \quad \bar{b} \times \bar{b} = 0$) та у векторному добутку не можна переставляти місцями множники ($\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$).

Отже, вектори $\bar{a}+\bar{b}$ та $\bar{a}-\bar{b}$ будуть колінеарними, якщо $\bar{a}\times\bar{b}=0$, а при виконанні такої рівності вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ – колінеарні.

Таким чином, вектори $\bar{a}+\bar{b}$ та $\bar{a}-\bar{b}$ будуть колінеарними тоді, коли вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ – колінеарні.

Приклад 3. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=\bar{m}-2\bar{n}$ та $\bar{b}=2\bar{m}+3\bar{n}$, якщо $|\bar{m}|=2$, $|\bar{n}|=3$, $(\widehat{\bar{m},\bar{n}})=\dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Площу паралелограма, побудованого на заданих векторах, знаходять за формулою $S=|\bar{a}\times\bar{b}|$, де $\bar{a}\times\bar{b}=(\bar{m}-2\bar{n})\times(2\bar{m}+3\bar{n})$. Обчислимо векторний добуток $\bar{a}\times\bar{b}$, враховуючи його властивості: $\bar{n}\times\bar{m}=-\bar{m}\times\bar{n}$, $\bar{m}\times\bar{m}=\bar{n}\times\bar{n}=0$.

Помножимо вектори, як двочлени, і дістанемо:

$$\bar{a}\times\bar{b}=(\bar{m}-2\bar{n})\times(2\bar{m}+3\bar{n})=2(\bar{m}\times\bar{m})+3(\bar{m}\times\bar{n})-4(\bar{n}\times\bar{m})-6(\bar{n}\times\bar{n})=7(\bar{m}\times\bar{n}).$$

За означенням векторного добутку знайдемо

$$|\bar{a}\times\bar{b}|=7|\bar{m}\times\bar{n}|=7|\bar{m}||\bar{n}|\sin\frac{\pi}{6}=7\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=21, \text{ тобто } S=21.$$

Приклад 4. Знайти $\bar{a}\times\bar{b}$, якщо $\bar{a}=\{4;-3;-1\}$, $\bar{b}=\{-7;2;3\}$.

Розв'язання. Використаємо формулу для знаходження векторного добутку векторів, заданих своїми координатами:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Підставляючи у формулу координати даних векторів, дістанемо

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -3 & -1\\ -7 & 2 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}4 & -1\\ -7 & 3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}4 & -3\\ -7 & 2\end{vmatrix}=-7\bar{i}-5\bar{j}-13\bar{k}.$$

Приклад 5. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1;2;0)$, $B(0;-2;1)$, $C(-1;0;2)$.

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ ($S_\Delta=\dfrac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$). Оскільки $\overline{AB}=\{-1;-4;1\}$, $\overline{AC}=\{-2;-2;2\}$, то за формулою для обчислення векторного добутку векторів, заданих своїми координатами, маємо:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=-6\bar{i}-6\bar{k}.$$

Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку, тобто $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{2}$.

Приклад 6. При яких значеннях α та β вектори $\overline{a} = \{3;\alpha;-6\}$, $\overline{b} = \{-9;6;\beta\}$ будуть колінеарними?

Розв'язання. Вектори будуть колінеарні, якщо їхні координати пропорційні. Складемо пропорції з координат заданих векторів:

$$\frac{3}{-9} = \frac{\alpha}{6} = \frac{-6}{\beta}, \text{ тобто } \frac{3}{-9} = \frac{\alpha}{6}, \ \frac{3}{-9} = \frac{-6}{\beta} \ \Rightarrow \ \alpha = -2, \ \beta = 18.$$

Приклад 7. Дано вектори $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = -2\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}$. Обчислити $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Розв'язання. За формулою для мішаного добутку трьох векторів $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ маємо $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 3 - 18 + 2 - 10 = -7$.

Приклад 8. Перевірити компланарність векторів

$$\overline{a} = \{2;3;-1\}, \ \overline{b} = \{1;-1;3\}, \ \overline{c} = \{1;9;-11\}.$$

Розв'язання. Вектори компланарні, якщо їхній мішаний добуток дорівнює нулю. Обчислимо $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 22 - 9 + 9 - 1 - 54 + 33 = 0$.

Отже, вектори компланарні.

Приклад 9. Довести, що точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ – компланарні. Знаходимо зазначені вектори: $\overline{AB} = \{-1;-1;6\}$, $\overline{AC} = \{-2;0;2\}$, $\overline{AD} = \{1;-1;4\}$ та перевіряємо їх умову компланарності, тобто

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Оскільки мішаний добуток дорівнює нулю, то вектори компланарні. Це означає, що точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Приклад 10. Яку трійку утворюють вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, якщо $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{i} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}$?

Розв'язання. Якщо трійка векторів права, то мішаний добуток цих векторів додатний. Якщо трійка векторів ліва, то їхній мішаний добуток від'ємний. Обчислимо мішаний добуток даних векторів:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=24>0.$$

Величина мішаного добутку більша за нуль, тому вектори утворюють праву трійку.

Приклад 11. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, якщо $A(3;-2;5)$, $B(1;3;1)$, $C(-1;-1;3)$, $D(4;3;4)$.

Розв'язання. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, обчислюється за формулою $V=\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|$. Визначивши вектори $\overline{AB}=\{-2;5;-4\}$, $\overline{AC}=\{-4;1;-2\}$, $\overline{AD}=\{1;5;-1\}$, знаходимо їх мішаний добуток:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -4\\ -4 & 1 & -2\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}=36. \qquad \text{Остаточно } V=36.$$

Домашнє завдання

1. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, якщо ці вектори утворюють кут 45^0 та $\bar{a}\bar{b}=4$.

2. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$. Знайти координати векторного добутку $(\overline{BC}-2\overline{CA})\times\overline{CB}$.

3. При яких значеннях α та β вектори $\bar{a}=\bar{i}+\alpha\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=\beta\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$ будуть колінеарними?

4. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=8\bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}$ та $\bar{b}=2\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$.

5. Знайти $\bar{a}\times\bar{b}$, якщо $\bar{a}=\{3;-2;-5\}$, $\bar{b}=\{-7;6;-3\}$.

6. Дано вектори $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{c}=3\bar{i}-5\bar{j}+2\bar{k}$. Обчислити $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

7. Перевірити компланарність векторів

$$\bar{a}=\{-1;-1;6\},\ \bar{b}=\{-2;0;2\},\ \bar{c}=\{1;-1;4\}.$$

8. З'ясувати, чи лежать точки $A(2;1;-1)$, $B(4;4;-2)$, $C(3;0;2)$, $D(3;10;-12)$ в одній площині.

9. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, якщо $A(1;2;1)$, $B(3;0;-2)$, $C(5;2;7)$, $D(-6;-5;8)$.

Відповіді

1. 2. **2.** $-12\bar{i}+8\bar{j}+12\bar{k}$. **3.** $\alpha=-6$, $\beta=-0{,}5$. **4.** $18\sqrt{2}$. **5.** $36\bar{i}+44\bar{j}+4\bar{k}$. **6.** 20. **7.** Вектори компланарні. **8.** Точки лежать в одній площині. **9.** 308.

Заняття 6. Площина

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Рівняння якого степеня визначає площину?

2. Який вигляд має рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та має нормальний вектор $\bar{n}=\{A;B;C\}$?

3. Який вигляд має загальне рівняння площини?

4. Записати рівняння площини, що проходить через початок координат.

5. Записати рівняння площини, яка проходить через три точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$.

6. Як виглядає рівняння площини у відрізках на осях?

7. Записати формулу для знаходження відстані від точки до площини.

8. Навести формулу для знаходження кута між площинами.

9. Сформулювати умови паралельності та перпендикулярності двох площин.

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(2;-3;1)$ та має нормальний вектор $\bar{n}=\{2;1;-3\}$.

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та має нормальний вектор $\bar{n}=\{A;B;C\}$, має вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Підставимо у наведене рівняння числові дані, отримаємо

$$2(x-2)+(y+3)-3(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+y-3z+2=0 \ .$$

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3;4;-5)$ паралельно векторам $\bar{a}=\{3;1;-1\}$ та $\bar{b}=\{1;-2;1\}$.

Розв'язання. Для того щоб записати рівняння площини, треба знати точку, через яку вона проходить, та нормальний (перпендикулярний до площини) вектор. Точка, через яку проходить шукана площина, відома. Отже, треба знайти нормальний вектор цієї площини $\bar{n}$, ним буде вектор, перпендикулярний до двох даних векторів. З означення векторного добутку відомо, що таким вектором буде вектор, який дорівнює векторному добутку даних векторів $(\bar{n}=\bar{a}\times\bar{b})$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}(1-2)-\bar{j}(3+1)+\bar{k}(-6-1)=-\bar{i}-4\bar{j}-7\bar{k}\ .$$

За нормальний вектор можна взяти $\bar{n}=\{1;4;7\}$ і тоді рівняння шуканої площини буде $(x-3)+4(y-4)+7(z+5)=0 \quad \Rightarrow \quad x+4y+7z+16=0$.

Приклад 3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3;-2;-7)$ паралельно площині $2x-3z+5=0$.

Розв'язання. Якщо площини паралельні, то їхні нормальні вектори або однакові, або мають пропорційні координати, тобто за нормальний вектор можна взяти вектор $\overline{n}=\{2;0;-3\}$, тоді рівняння площини набуває вигляду $2x-3z+D=0$. Далі відомо, що точка $M_1(3;-2;-7)$ лежить на площині, у такому випадку координати точки задовольняють рівняння площини, це означає, що при підстановці координат точки в рівняння площини останнє перетворюється на тотожність. Отже, $2\cdot 3-3\cdot(-7)+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=-27.$

Остаточно рівняння шуканої площини буде $2x-3z-27=0$.

Приклад 4. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;3;-1)$, $M_2(1;4;-1)$, $M_3(-3;-2;5)$.

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через три точки, має вигляд $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$. Підставимо координати даних точок у наведене рівняння, дістанемо

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 1-2 & 4-3 & -1+1 \\ -3-2 & -2-3 & 5+1 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(x-2)6-(y-3)(-6)+(z+1)10=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6y+10z-12-18+10=0.$$

Остаточно рівняння шуканої площини буде $3x+3y+5z-10=0$.

Приклад 5. Знайти відрізки, які площина $4x-2y+3z-12=0$ відсікає на осях координат.

Розв'язання. Рівняння площини у відрізках на осях має вигляд $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, де a, b, c – відрізки, які площина відсікає на осях координат. Для того щоб записати рівняння заданої площини у відрізках на осях, перенесемо в праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння: $\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{4}=1$. Таким чином, відрізки, які площина відсікає на осях координат, будуть $a=3; \quad b=-6; \quad c=4.$

Приклад 6. Знайти кут між площинами $2x-y-3z-12=0$, $3x+2y-z+6=0$.

Розв'язання. Формула для знаходження кута між площинами має вигляд: $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$. За умовою задачі, нормальні вектори площин будуть: $\overline{n_1}=\{2;-1;-3\}$, $\overline{n_2}=\{3;2;-1\}$. Підставимо їхні координати в наведену вище формулу, дістанемо

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 3-1\cdot 2+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{2},\text{ тобто } \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Приклад 7. Визначити, при якому значенні m площини $x+3y+2z+5=0$ та $3x-5y+mz-3=0$ будуть перпендикулярні.

Розв'язання. Площини будуть перпендикулярні, якщо будуть перпендикулярні їхні нормальні вектори. Дані площини мають такі нормальні вектори: $\overline{n_1}=\{1;3;2\}$, $\overline{n_2}=\{3;-5;m\}$. Ці вектори будуть перпендикулярні, коли їхній скалярний добуток дорівнюватиме нулю. Отже, маємо $1\cdot 3+3\cdot(-5)+2m=0 \Rightarrow m=6$.

Приклад 8. Знайти відстань від точки $P(5;1;-1)$ до площини $x-2y-2z+4=0$.

Розв'язання. Відстань від точки $P(x_1;y_1;z_1)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою $d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. У цю формулу підставимо числові дані задачі, дістанемо:

$$d=\frac{|5-2\cdot 1-2\cdot(-1)+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{9}{3}=3.$$

Приклад 9. Обчислити висоту трикутної піраміди h_N з вершинами у точках $N(-5;-4;8)$, $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$**.**

Розв'язання. Об'єм піраміди, побудованої на заданих векторах як на сторонах, обчислюється за формулою $V_{пір.}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AN}\right|$. З іншого боку, об'єм піраміди можна знайти за формулою $V_{пір.}=\frac{1}{3}S_{осн.}h_N$. Знаючи величину об'єму та площу основи піраміди, визначимо висоту. Спочатку обчислимо координати векторів, що виходять з однієї точки (наприклад, точки A): $\overline{AN}=\{-7;-7;7\}$, $\overline{AB}=\{2;-2;-3\}$, $\overline{AC}=\{4;0;6\}$. Враховуючи, що шукаємо висоту, яка виходить з точки N, за основу піраміди беремо трикутник ABC і визначаємо його площу за допомогою векторного добутку: $S_{осн.}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\bar{i}(-12)-\bar{j}(12+12)+\bar{k}(8)=-12\bar{i}-24\bar{j}+8\bar{k};$$

$$S_{осн.} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16(9+36+4)} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14;$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AN} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7(-12-20-12) = 308;$$

$$V_{пір.} = \frac{308}{6} = \frac{154}{3}; \qquad \frac{154}{3} = \frac{1}{3} \cdot 14 \cdot h_N; \qquad h_N = 11.$$

Домашнє завдання

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;1;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{OM_2}$, якщо $M_2(2;3;4)$.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(-2;-2;-2)$ паралельно векторам $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$, якщо $M_2(-3;2;-4)$, $M_3(2;-2;1)$, $M_4(4;4;4)$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(4;2;5)$ паралельно площині $7x-4y+3z-8=0$.

4. Записати рівняння площини, яка проходить через вісь Oz та точку $M_1(3;-2;1)$.

5. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(0;1;-2)$, $M_2(-2;3;-4)$, $M_3(3;-2;-4)$.

6. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(-1;2;-3)$ та відсікає на осях координат однакові відрізки.

7. Знайти кут між площинами $x-2y+2z-8=0$, $x+z-6=0$.

8. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно двом площинам $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$.

9. Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до площини $2x-2y+4z-5=0$ та відсікає на координатних осях Ox та Oy відрізки $a=-2$, $b=\frac{2}{3}$.

10. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z-1=0$, $2x-2y+z+5=0$. Обчислити об'єм цього куба.

Відповіді

1. $2x+3y+4z-9=0$. **2.** $42x+5y-38z+18=0$. **3.** $7x-4y+3z-35=0$. **4.** $2x+3y=0$. **5.** $x+y-1=0$. **6.** $x+y+z+2=0$. **7.** $\frac{\pi}{4}$. **8.** $7x-y-5z=0$. **9.** $x-3y-2z+2=0$. **10**. 8.

Заняття 7. Пряма у просторі

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Написати загальні рівняння прямої у просторі.

2. Записати канонічні рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно заданому вектору $\bar{s} = \{m; n; p\}$.

3. Який вектор називається напрямним вектором прямої?

4. Записати параметричні рівняння прямої.

5. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві точки?

6. За якою формулою знаходять кут між прямими?

7. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

8. Як перейти від загальних рівнянь прямої до канонічних?

9. За якою формулою обчислюють відстань від точки до прямої у просторі?

10. Навести формулу для обчислення кута між прямою та площиною.

11. Умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

12. Як знайти точку перетину прямої та площини?

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Знайти канонічні рівняння прямої, заданої загальними рівняннями $\begin{cases} x + 2y + 3z - 8 = 0, \\ 2x + y - 2z - 2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Канонічні рівняння прямої у просторі мають вигляд: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, де m, n, p − координати напрямного вектора $\bar{s}$; x_0, y_0, z_0 − координати точки, через яку проходить пряма. Знайдемо на прямій будь-яку точку M_0. Покладемо $x_0 = 1$, тоді з даних рівнянь отримаємо систему для обчислення y_0 та z_0: $\begin{cases} 2y_0 + 3z_0 = 7, \\ y_0 - 2z_0 = 0, \end{cases}$ звідки $y_0 = 2$, $z_0 = 1$. Напрямний вектор $\bar{s} = \{m; n; p\}$ буде перпендикулярним до нормальних векторів заданих площин $\overline{n_1} = \{1; 2; 3\}$ та $\overline{n_2} = \{2; 1; -2,\}$ (рис. 1), тобто $\bar{s}\,\overline{n_1} = 0$ та $\bar{s}\,\overline{n_2} = 0$, або в координатній формі маємо $\begin{cases} m + 2n + 3p = 0, \\ 2m + n - 2p = 0. \end{cases}$ Ця система сумісна та невизначена, розв'язуючи яку дістанемо загальний

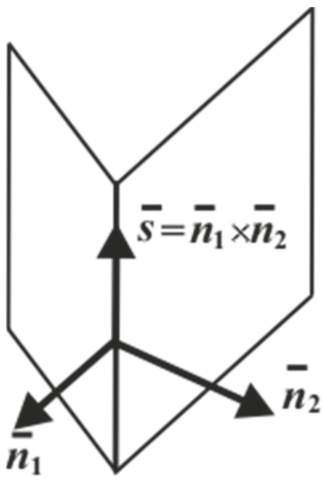


Рис. 1

розв'язок $m = \dfrac{7}{3}C$, $n = -\dfrac{8}{3}C$, $p = C$. Покладемо $C = -3$, тоді $\bar{s} = \{-7; 8; -3\}$ і канонічні рівняння прямої будуть $\frac{x-1}{-7}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-1}{-3}$.

Приклад 2. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-1;3;0)$ паралельно вектору $\bar{s}=\{4;0;-3\}$.

Розв'язання. Параметричні рівняння прямої у просторі мають вигляд: $x=mt+x_0$, $y=nt+y_0$, $z=pt+z_0$, де m, n, p – координати напрямного вектора $\bar{s}$; x_0, y_0, z_0 – координати точки, через яку проходить пряма; t – параметр прямої. Підставляючи координати точки та напрямного вектора в наведені рівняння, маємо $x=4t-1$, $y=3$, $z=-3t$.

Приклад 3. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-1;2;3)$ та $M_2(2;6;-2)$.

Розв'язання. Рівняння прямої, що проходить через дві точки M_1 та M_2, має вигляд: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, де (x_1, y_1, z_1) та (x_2, y_2, z_2) – координати точок M_1, M_2 відповідно. Підставимо координати даних точок у рівняння і дістанемо: $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-3}{-2-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$.

Приклад 4. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x=2t, \\ y=2-t, \\ z=3t-2 \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x+y-z-1=0, \\ 2x-y+3z+5=0. \end{cases}$

Розв'язання. Косинус кута між прямими в просторі шукають за формулою $\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$, де m_1, n_1, p_1 та m_2, n_2, p_2 – координати напрямних векторів даних прямих. Напрямний вектор першої прямої можна записати прямо з її рівнянь: $\bar{s}_1=\{2;-1;3\}$, Знайдемо напрямний вектор другої прямої, він перпендикулярний до двох нормальних векторів площин, які задають пряму, тобто: $\bar{s}_2=\bar{n}_1\times\bar{n}_2$, де $\bar{n}_1=\{2;1;-1\}$, $\bar{n}_2=\{2;-1;3\}$ і $\bar{s}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=2\bar{i}-8\bar{j}-4\bar{k}$. Таким чином, за наведеною формулою маємо $\cos\varphi=\frac{2\cdot2-8\cdot(-1)-4\cdot3}{\sqrt{4+64+16}\sqrt{4+1+9}}=0$, а кут буде $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Приклад 5. При яких значеннях m та n прямі $\frac{x}{m}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{4}$ та $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+5}{n}=\frac{z+3}{-2}$ паралельні?

Розв'язання. Прямі будуть паралельні, коли паралельні їхні напрямні вектори $\overline{s_1} = \{m; 2; 4\}$ та $\overline{s_2} = \{-1; n; -2\}$. Умовою паралельності векторів є пропорційність їхніх координат. Отже, $\dfrac{m}{-1} = \dfrac{2}{n} = \dfrac{4}{-2} \Rightarrow \dfrac{m}{-1} = \dfrac{4}{-2},\ \dfrac{2}{n} = \dfrac{4}{-2}$. Звідси $m = 2,\ n = -1$.

Приклад 6. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1; 2; 2)$ паралельно до прямої $\begin{cases} x - y = 2, \\ y = 2. \end{cases}$

Розв'язання. Для того щоб записати рівняння прямої у просторі, треба знати точку, що лежить на прямій та напрямний вектор. Точка, яка лежить на прямій, задана, а напрямним вектором шуканої прямої буде напрямний вектор даної прямої, тому що коли прямі паралельні, то їх напрямні вектори збігаються.

Отже, $\bar{s} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$, де $\overline{n_1} = \{1; -1; 0\}$, $\overline{n_2} = \{0; 1; 0\}$, $\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{k}$ і, використовуючи канонічні рівняння прямої $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, де m, n, p − координати напрямного вектора $\bar{s}$; x_0, y_0, z_0 − координати точки, через яку проходить пряма, дістанемо $\dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{1}$.

Приклад 7. Знайти відстань від точки $P(1; 0; 2)$ до прямої $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{x-1}{3}$.

Розв'язання. Відстань від точки $P_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ обчислюється за формулою $d = \dfrac{\left|\overline{M_o P} \times \bar{s}\right|}{|\bar{s}|}$ (рис. 2). З рівняння заданої прямої маємо напрямний вектор прямої $\bar{s} = \{6; 2; 3\}$ та точку, яка лежить на цій прямій $M_0(-1; -2; 1)$. Тоді $\overline{M_0 P} = \{2; 2; 1\}$, $|\bar{s}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$;

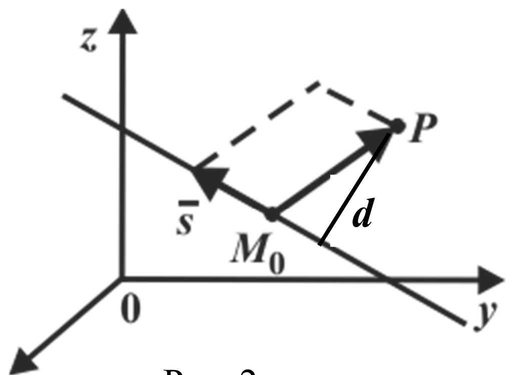


Рис. 2

$$\overline{M_0 P} \times \bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{r} \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\bar{i} - 8\bar{k}; \quad \left|\overline{M_0 P} \times \bar{s}\right| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

і за наведеною формулою $d = \dfrac{4\sqrt{5}}{7}$.

Приклад 8. Яке значення має величина m, якщо площина $mx - 2y + z - 3 = 0$ та пряма $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{m}$ паралельні?

Розв'язання. Якщо площина та пряма паралельні, то нормальний вектор площини повинен бути перпендикулярним до напрямного вектора прямої. За умови перпендикулярності векторів (скалярний добуток дорівнює нулю) маємо $2m - 6 + m = 0 \;\Rightarrow\; m = 2$.

Приклад 9. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-3;1)$ перпендикулярно до площини $5x - 4y - z + 5 = 0$.

Розв'язання. Якщо пряма перпендикулярна площині, тоді напрямним вектором прямої буде нормальний вектор площини. Отже, $\bar{s} = \bar{n} = \{5;-4;-1\}$ і канонічні рівняння прямої набувають вигляду: $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-1}{-1}$.

Приклад 10. Знайти точку перетину площини $x + y - z = 0$ та прямої, яка проходить через точки $A(0;0;4)$ і $B(2;2;0)$.

Розв'язання. Напрямний вектор прямої буде $\overline{AB} = \{2;2;-4\}$, тоді рівняння прямої має вигляд $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{-4}$, або в параметричному вигляді $x = 2t, \quad y = 2t, \quad z = -4t + 4$. Підставимо вирази для x, y, z у рівняння площини: $2t + 2t + 4t - 4 = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{2}$. При отриманому значенні t, величини x, y, z набувають таких значень: $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2$. Отже, точкою перетину прямої та площини буде точка $K(1;1;2)$.

Приклад 11. Знайти кут між прямою $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{-3}$ та площиною $2x + y + z - 4 = 0$.

Розв'язання. Кут між прямою та площиною – це кут між прямою та її проекцією на площину (рис. 3). Його обчислюють за формулою

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

де m, n, p – координати напрямного вектора прямої; A, B, C – координати нормального вектора площини. За умовами задачі: $\bar{s} = \{2;6;-3\}$; $\bar{n} = \{2;1;1\}$, тобто

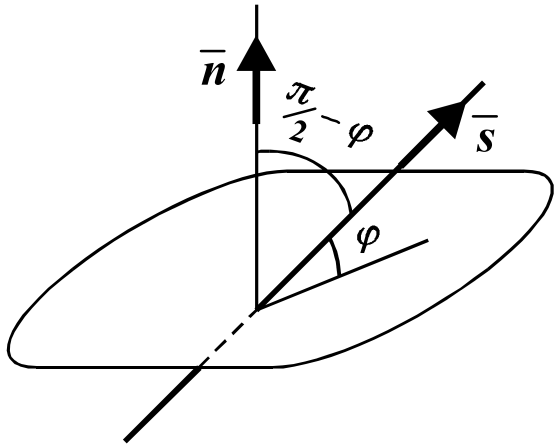


Рис. 3

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot 2 + 6\cdot 1 + (-3)\cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{7\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$ Звідси $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Домашнє завдання

1. Записати канонічні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-2;-2;-2)$ та $M_2(2;-2;1)$.

2. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-3;2;-4)$ паралельно вектору $\overline{M_2M_3}$, якщо $M_2(2;-2;1)$, $M_3(4;4;4)$.

3. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-3;2;-4)$ перпендикулярно площині $3x-2y+4z=0$.

4. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-2;-2;-2)$ параллельно прямій $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z+4}{3}$.

5. Визначити кут між прямими $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z+2}{3}$ та $x=2t-3,\ y=6t+2,\ z=3t-4$.

6. Обчислити кут між прямою $x=2t-3,\ y=6t+2,\ z=3t-4$, та площиною $3x-2y+4z+10=0$.

7. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(4;4;4)$ перпендикулярно прямій $x=2t-3,\ y=6t+2,\ z=3t-4$.

8. Знайти відстань від точки $M_1(-2;-2;-2)$ до прямої $x=2t-3,\ y=6t+2,\ z=3t-4$.

9. Знайти канонічні рівняння прямої, яка є лінією перетину площин $3x-2y+4z+10=0$ та $12x-5y-16z=18$.

10. При якому значенні m пряма $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ паралельна площині $3x-2y+4z+10=0$?

11. При якому значенні C та B пряма $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z+4}{3}$ перпендикулярна площині $3Bx-2y+Cz+1=0$?

Відповіді

1. $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z+2}{3}$. **2.** $\begin{cases} x=2t-3, \\ y=6t+2, \\ z=3t-4. \end{cases}$ **3.** $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+4}{4}$.

4. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z+2}{3}$. **5.** $\cos\varphi=\dfrac{17}{35}$. **6.** $\sin\varphi=\dfrac{6}{7\sqrt{29}}$.

7. $2x+6y+3z-44=0$. **8.** $d=\sqrt{773}/7$. **9.** $\dfrac{x+2}{52}=\dfrac{y+2}{96}=\dfrac{z+2}{9}$.

10. $m=\dfrac{1}{2}$. **11.** $B=-\dfrac{2}{9}$, $C=-1$.

Заняття 8. Криві другого порядку

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається лінією другого порядку?

2. Що називається колом?

3. Записати рівняння кола з центром у точці $M_0(x_0;y_0)$ та радіусом R.

4. Який вигляд має рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R?

5. Що називається еліпсом? Написати канонічне рівняння еліпса.

6. Написати рівняння еліпса з центром у точці $M_0(x_0;y_0)$ та півосями a і b.

7. Що називається гіперболою? Написати канонічне рівняння гіперболи, яка не перетинає вісь Oy, має дійсну піввісь a, уявну піввісь b та центр у початку координат.

8. Написати канонічне рівняння гіперболи, яка не перетинає вісь Ox, має уявну піввісь a, дійсну піввісь b та центр у початку координат.

9. Яка пряма називається асимптотою гіперболи?

10. Записати формули, що визначають залежність між півосями та половиною фокальної відстані для еліпса та гіперболи.

11. За якою формулою обчислюється ексцентриситет еліпса та гіперболи?

12. Що називається параболою? Записати канонічне рівняння параболи.

Завдання для аудиторної роботи (з розв’язками)

Приклад 1. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(2;2)$, яке дотикається до прямої $3x+y-18=0$.

Розв’язання. Нормальне рівняння кола має вигляд $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, де $(x_0;y_0)$ – координати центра кола; R – радіус кола. Координати центра кола відомі, а радіус – це відстань від центра до даної прямої. Оскільки, відстань від точки до прямої обчислюється за формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де A,B – координати нормального вектора прямої, то $R=\dfrac{|3\cdot 2+1\cdot 2-18|}{\sqrt{3^2+1^2}}$ і $R=\sqrt{10}$. Зрозуміло, що шукане рівняння кола набуває вигляду $(x-2)^2+(y-2)^2=10$.

Приклад 2. Написати рівняння кола, якщо точки $A(-1;4)$ та $B(3;2)$ є кінцями його діаметра.

Розв’язання. Центр кола поділяє відрізок AB навпіл, тому для його визначення треба обчислити координати точки, яка лежить посередині відрізка

AB за формулами $x_0 = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_0 = \dfrac{y_A + y_B}{2}$. Враховуючи умови задачі, координати центра кола будуть $x_0 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$, $y_0 = \dfrac{4+2}{2} = 3$.

Діаметр кола ─ це довжина відрізка AB, тобто $d = |AB| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$. Таким чином, $R = \sqrt{5}$, $R^2 = 5$ і шукане рівняння буде $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

Приклад 3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат симетрично відносно початку координат, його велика вісь $2b = 10$, а відстань між фокусами $2c = 8$.

Розв'язання. Якщо фокуси лежать на осі Oy симетрично відносно точки $(0;0)$ і $2c = 8, 2b = 10,$ то $c = 4,$ $b = 5.$ За формулою $c^2 = b^2 - a^2$ маємо $16 = 25 - a^2 \Rightarrow a^2 = 9.$ Шукане рівняння набуває вигляду $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ (рис. 4).

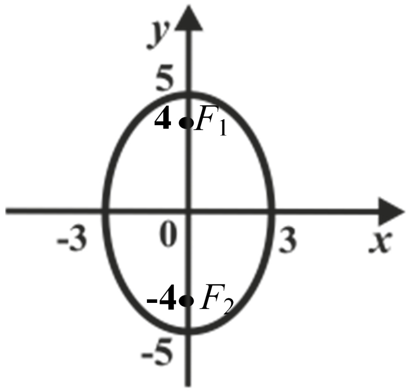


Рис. 4

Приклад 4. Скласти рівняння еліпса, ексцентриситет якого дорівнює 0,7 та відстань між фокусами, розміщеними на осі Ox симетрично точки $(0;0)$, дорівнює 14.

Розв'язання. Оскільки канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ містить довжини півосей, то саме їх треба знайти. За умовами задачі $2c = 14$, тоді $c = 7$. За формулою для обчислення ексцентриситету $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ дістаємо $\dfrac{7}{10} = \dfrac{7}{a} \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 10$. Враховуючи зв'язок півосей з половиною фокусної відстані: $b^2 = a^2 - c^2$, маємо $b^2 = 100 - 49 = 51$. Рівняння еліпса буде $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{51} = 1$.

Приклад 5. Обчислити фокальні радіуси точки $M_1(-4;2{,}4)$, що лежить на еліпсі $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Розв'язання. Фокальні радіуси r_1 та r_2 точки M_1 (рис. 5) обчислюються за формулами $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$, де $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – ексцентриситет еліпса. З рівняння еліпса маємо $a^2 = 25$ та $b^2 = 16$, тобто $a = 5$, $b = 4$ і за формулою $c^2 = a^2 - b^2$ обчислюємо $c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$.

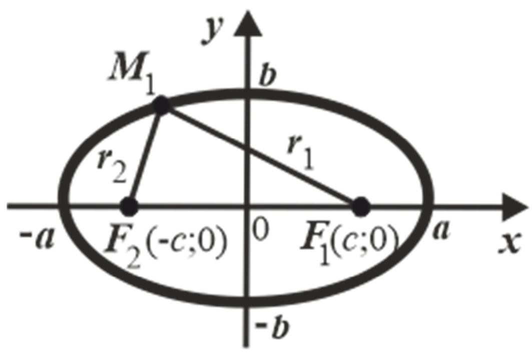


Рис. 5

Отже, $r_1 = 5 + \frac{3}{5}(-4) = \frac{13}{5}$. $r_2 = 5 - \frac{3}{5}(-4) = \frac{37}{5}$.

Приклад 6. Обчислити відстань між фокусами гіперболи $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{15} = 1$.

Розв'язання: $a^2 = 49$, $b^2 = 15$ $\Rightarrow$ $c^2 = a^2 + b^2 = 49 + 15 = 64$ $\Rightarrow$ $c = 8$. Отже, відстань між фокусами гірноболи буде $2c = 16$.

Приклад 7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат і відстань між ними $2c = 20$, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Розв'язання. Оскільки канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат (рис. 6), має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, шукаємо півосі. Порівнявши рівняння асимптот будь-якої гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$ та рівняння асимптот даної гіперболи $y = \pm\frac{4}{3}x$, маємо $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ $a = \frac{3b}{4}$. З умови задачі $2c = 20$ $\Rightarrow$ $c = 10$ і за формулою $c^2 = a^2 + b^2$ дістанемо $100 = \frac{9b^2}{16} + b^2$ $\Rightarrow$ $b^2 = 64$, тоді $a^2 = 36$ і остаточно шукане рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

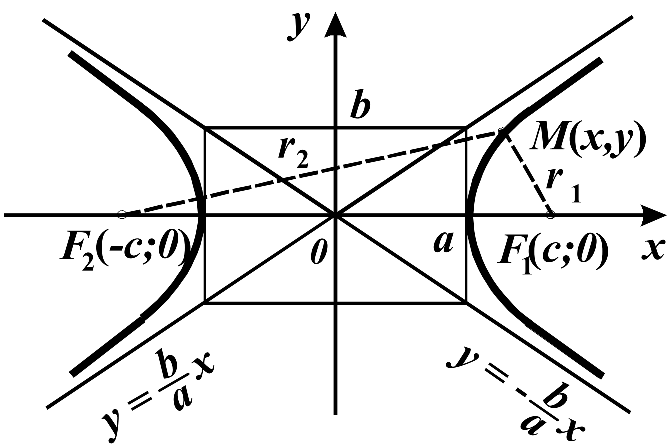


Рис. 6

Приклад 8. Скласти рівняння параболи, якщо дано фокус $F(7;0)$ та рівняння директриси $x + 7 = 0$.

Розв'язання. Фокус та вершина параболи завжди лежать на одній, перпендикулярній до директриси прямій, яка є віссю симетрії параболи. Враховуючи, що фокус даної параболи лежить на осі Ox, а директриса перпендикулярна до осі Ox, можна стверджувати, що вершина теж лежить на цій осі. Вершина поділяє відстань між фокусом та директрисою навпіл, тобто згідно з умовами задачі вершина лежить у точці $(0;0)$. Гілки параболи завжди

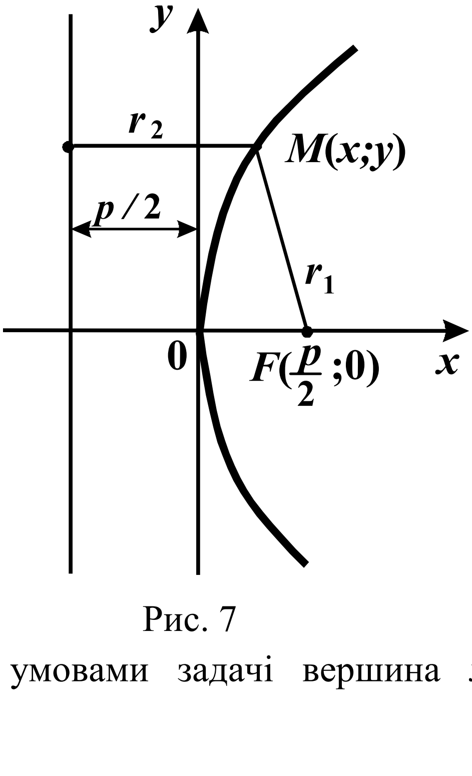


Рис. 7

напрямлені у протилежний бік від директриси. Директриса лежить ліворуч від фокуса, тому гілки параболи напрямлені у правий бік, у додатному напрямку осі Ox (рис. 7), і тоді канонічне рівняння такої параболи буде $y^2 = 2px$. Таким чином, щоб записати рівняння параболи, треба знайти її параметр p. Для параболи даного типу рівняння директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$, а координати фокуса будуть $F(\frac{p}{2};0)$. Це дає змогу визначити параметр параболи з рівності $\frac{p}{2} = 7 \;\Rightarrow\; p = 14$. Підставляючи визначений параметр параболи у її канонічне рівняння, отримаємо $y^2 = 28x$.

Приклад 9. Скласти рівняння параболи, якщо її фокус $F(-1;0)$, а рівняння директриси $x - 1 = 0$.

Розв'язання. Відстань від фокуса до директриси – це параметр параболи і знайти його можна як відстань від точки $F(-1;0)$ до прямої $x - 1 = 0$, тобто параметр параболи буде $p = \left|\frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 - 1}{\sqrt{1}}\right| = 2$. Директриса лежить праворуч від фокуса, який лежить на осі Ox $(y = 0)$, тобто гілки параболи напрямлені у від'ємному напрямку осі Ox. Вершина ділить відстань між фокусом та директрисою навпіл, тобто знаходиться у початку координат. Канонічне рівняння описаної параболи має вигляд $y^2 = -2px$. Підставимо значення параметра $p = 2$ і дістанемо шукане рівняння параболи $y^2 = -4x$.

Приклад 10. Скласти рівняння параболи, яка симетрична відносно осі Oy, проходить через точку $C(4;-8)$ та її вершина розташована у початку координат.

Розв'язання. Якщо парабола симетрична відносно осі Oy, має вершину в точці $(0;0)$ та проходить через точку з від'ємним значенням $y = -8$, то її канонічне рівняння буде $x^2 = -2py$. Щоб знайти p, підставимо у рівняння параболи координати точки $C(4;-8)$: $16 = -2p(-8) \;\Rightarrow\; 16 = 16p \;\Rightarrow\; p = 1$. Остаточно рівняння параболи буде $x^2 = -2y$.

Приклад 11. Скласти рівняння параболи, вершина якої збігається з точкою $(-3;4)$, параметр дорівнює 5, вісь паралельна осі Oy та парабола простирається у нескінченність у від'ємному напрямку осі Oy.

Розв'язання. Канонічне рівняння шуканої параболи, має вигляд $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$, де $(x_0; y_0)$ – координати вершини. Мінус після знаку рівності з'явився тому, що гілки параболи напрямлені у від'ємному напрямку осі Oy. Підставимо у наведене рівняння числові дані задачі, отримаємо шукане рівняння параболи $(x + 3)^2 = -10(y - 4)$.

Домашнє завдання

1. Скласти рівняння кола, яке проходить через точку $A(2;6)$, а його центр збігається з точкою $C(-1;2)$.

2. Скласти рівняння кола, якщо кінці одного з його діаметрів лежать у точках $A(3;2)$ та $B(-1;6)$.

3. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо $a=5;\ c=4$.

4. Скласти рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси лежіть у точках $F_1(-10;0)$, $F_2(14;0)$.

5. Написати рівняння еліпса з півосями $a=5$ та $b=4$ і центром у точці $C(-6;7)$.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ та відстань між фокусами $2c=20$.

7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі ординат симетрично відносно початку координат, відстань між фокусами $2c=10$ та ексцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

8. Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між її вершинами дорівнює 24, а фокуси лежать в точках $F_1(16;2)$, $F_2(-10;2)$.

9. Обчислити відстань між фокусами гіперболи $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{15}=1$.

10. Скласти рівняння параболи, вершина якої збігається з точкою $(2;-1)$, параметр дорівнює 3, вісь паралельна осі Ox та парабола простирається у нескінченність у від'ємному напрямку осі Ox.

11. Скласти рівняння параболи, яка проходить через точку $B(-4;2)$ симетрично відносно осі Oy, а її вершина знаходиться у початку координат.

12. Написати рівняння параболи з фокусом $F(4;3)$ та директрисою $y+1=0$.

Відповіді

1. $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. **2.** $(x-1)^2+(y-4)^2=8$. **3.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

4. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$. **5.** $\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y-7)^2}{16}=1$. **6.** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$. **7.** $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

8. $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$. **9.** 16. **10.** $(y+1)^2=-6(x-2)$. **11.** $x^2=8y$.

12. $(x-4)^2=8(y-1)$.

Заняття 9. Зведення загального рівняння кривої до канонічного вигляду

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Який вигляд має загальне рівняння кривої другого порядку?

2. Що треба зробити, щоб із загального рівняння отримати канонічне рівняння кривої?

3. Якими формулами зв'язані координати точки при паралельному перенесенні системи координат?

4. Якими формулами зв'язані координати точки при повертанні осей координат на кут α?

5. Яким повинен бути вираз $AC-B^2$, щоб загальне рівняння кривої $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ визначало криву центрального типу?

6. Яким повинен бути вираз $AC-B^2$, щоб загальне рівняння кривої $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ називалося рівнянням еліптичного типу?

7. Яким повинен бути вираз $AC-B^2$, щоб загальне рівняння кривої $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ називалося рівнянням гіперболічного типу?

8. Яким повинен бути вираз $AC-B^2$, щоб загальне рівняння кривої $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ називалося рівнянням параболічного типу?

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Визначити тип рівняння $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$, звести його до канонічного вигляду та встановити, який геометричний образ воно визначає?

Розв'язання. Щоб визначити тип рівняння, треба обчислити вираз $AC-B^2$. В даній задачі маємо $A=4$, $B=0$, $C=9$. Таким чином, $AC-B^2=36>0$, рівняння еліптичного типу.

Дане рівняння не містить члена з добутком змінних, а це вказує на те, що звести його до канонічного вигляду можна завдяки тільки паралельному переносу осей координат. Виділимо повні квадрати відносно змінних у заданому рівнянні, для цього виконаємо групування змінних та винесемо за дужки загальний множник:

$$4x^2+9y^2-40x+36y+100=0 \;\Rightarrow\; 4(x^2-10x)+9(y^2+4y)=-100;$$

вирази у дужках доповнимо до повних квадратів, тобто у дужках треба додати величину, яка дорівнює квадрату половини коефіцієнта при змінній, що стоїть у першому степені, та щоб вираз рівняння не змінився, зразу віднімемо таку ж величину:

$$4(x^2-10x+25-25)+9(y^2+4y+4-4)=-100.$$

Вирази, що являють собою повні квадрати треба згорнути, розкрити дужки та підрахувати отримані величини:

$$4((x-5)^2-25)+9((y+2)^2-4)=-100;$$

$$4(x-5)^2-100+9(y+2)^2-36=-100 \;\Rightarrow\; 4(x-5)^2+9(y+2)^2=36.$$

Згадавши, що наше рівняння еліптичного типу, тобто в правій частині рівняння повинна стояти одиниця, розділимо рівняння на праву частину, дістанемо рівняння, яке має вигляд $\dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$. Виконуємо заміну змінних $X=x-5$, $Y=y+2$, що відповідає зсуву по кожній координаті, отримаємо рівняння $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{4}=1$. Таке рівняння описує еліпс з півосями $a=3$, $b=2$. Центр еліпсу лежить у точці $X=0$ та $Y=0$ $\Rightarrow$ $0=x-5$, $0=y+2$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $x=5$, $y=-2$. Отже, центр еліпса лежить у точці $(5;-2)$.

Приклад 3. Знайти центр та радіус кола $x^2+y^2+4x-6y-3=0$.

Розв'язання. Центр та радіус кола можна знайти з нормального рівняння кола $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, де $(x_0;y_0)$ – координати центра; R – радіус кола. Для того щоб отримати таке рівняння, треба, як у попередньому прикладі, у даному рівнянні виділити повні квадрати відносно змінних величин. Отже,

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0 \;\Rightarrow\; (x^2+4x)+(y^2-6y)=3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x^2+4x+4-4)+(y^2-6y+9-9)=3 \;\Rightarrow\; (x+2)^2-4+(y-3)^2-9=3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x+2)^2+(y-3)^2=16.$$

Дістали рівняння кола з центром у точці $(-2;3)$ та радіусом 4.

Приклад 4. Знайти координати фокусів кривої

$$9x^2-16y^2-54x-64y-127=0.$$

Розв'язання. Фокуси кривої можна знайти, якщо перейти до канонічного рівняння та визначити тип кривої. За умовами задачі маємо $A=9$, $B=0$, $C=-16$, тобто $AC-B^2=-144<0$, отже, маємо рівняння гіперболічного типу. Аналогічно попереднім прикладам зведемо дане рівняння до канонічного вигляду:

$$9x^2-16y^2-54x-64y-127=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 9(x^2-6x+9-9)-16(y^2+4y+4-4)=127 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 9(x-3)^2-81-16(y+2)^2+64=127 \;\Rightarrow\; 9(x-3)^2-16(y+2)^2=144 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1 \text{ або } \frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1, \text{ де } X=x-3,\; Y=y+2.$$

Отримали рівняння, яке вказує на те, що дана крива – це гіпербола, що не перетинає вісь Oy з півосями $a=4$, $b=3$ та центром у точці $(3;-2)$. Якщо гіпербола не перетинає вісь Oy, то її фокуси лежать на прямій, яка паралельна до осі Ox та проходить через центр гіперболи $(3;-2)$, тобто координати фокусів по осі Oy будуть дорівнювати (-2). Координати фокусів по осі Ox знайдемо, якщо до координати центра по осі Ox додати та відняти половину відстані між фокусами.

Визначимо половину відстані між фокусами: $c^2=a^2+b^2=16+9=25 \Rightarrow$ $c=5$ і тоді $F_1(3+5;-2)$, $F_2(3-5;-2)$. Остаточно $F_1(8;-2)$, $F_2(-2;-2)$.

Приклад 5. Визначити, який геометричний об'єкт описує рівняння

$$4x^2-y^2+8x-2y+3=0.$$

Розв'язання: $A=4$, $B=0$, $C=-1$, тобто $AC-B^2=-4<0$, маємо рівняння гіперболічного типу. Зведемо це рівняння до канонічного вигляду:

$$4x^2-y^2+8x-2y+3=0 \;\Rightarrow\; 4(x^2+2x+1-1)-(y^2+2y+1-1)+3=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4(x+1)^2-4-(y+1)^2+1+3=0 \;\Rightarrow\; 4(x+1)^2-(y+1)^2=0.$$

Отримане рівняння розпадається на два нових: $2(x+1)-(y+1)=0$, $2(x+1)+(y+1)=0$ або $2x-y+1=0$, $2x+y+3=0$ та визначає вироджену гіперболу – пару прямих, що перетинаються у точці $(-1;-1)$.

Приклад 6. Визначити тип рівняння $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$ та геометричний об'єкт, який воно описує.

Розв'язання: $A=2$, $B=0$, $C=3$, тобто $AC-B^2=6>0$ – еліптичне рівняння. Зведемо його до канонічного вигляду:

$$2x^2+3y^2+8x-6y+11=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2(x^2+4x+4-4)+3(y^2-2y+1-1)+11=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2(x+2)^2-8+3(y-1)^2-3+11=0 \;\Rightarrow\; 2(x+2)^2+3(y-1)^2=0.$$

Це рівняння визначає вироджений еліпс (одну точку з координатами $(-2;1)$).

Приклад 7. Визначити тип рівняння $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$ та геометричний об'єкт, який воно описує.

Розв'язання: $A=9$, $B=0$, $C=4$, тобто $AC-B^2=36>0$ – еліптичне рівняння. Зведемо його до канонічного вигляду:

$$9x^2+4y^2+18x-8y+49=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 9(x^2+2x+1-1)+4(y^2-2y+1-1)+49=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 9(x+1)^2-9+4(y-1)^2-4+49=0 \;\Rightarrow\; 9(x+1)^2+4(y-1)^2=-36 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=-1 \text{ або } \frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=-1, \text{ де } X=x+1,\; Y=y-1.$$

Отримане рівняння не визначає жодного геометричного об’єкта (воно є рівнянням «уявного еліпса»).

Приклад 8. Визначити тип рівняння

$$9x^2-12xy+16y^2-20x+110y-50=0.$$

Розв’язання: $A=9$, $B=-12$, $C=16$, тобто $AC-B^2=144-144=0$ рівняння параболічного типу.

Приклад 9. Знайти координати вершини кривої $x^2+8x-9y-29=0$.

Розв’язання: $A=1$, $B=0$, $C=0$, тобто $AC-B^2=0$ – рівняння параболічного типу і його канонічний вигляд буде:

$x^2+8x-9y-29=0 \;\Rightarrow\; (x^2+8x+16-16)=9y+29 \;\Rightarrow\; (x+4)^2=9y+45 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; (x+4)^2=9(y+5)$ – координати вершини $(-4;-5)$.

Приклад 10. Знайти координати вершини та параметр параболи $x^2-4x+2y-2=0$.

Розв’язання: $x^2-4x+2y-2=0 \;\Rightarrow\; (x^2-4x+4-4)+2y-2=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; (x-2)^2=-2y+6 \;\Rightarrow\; (x-2)^2=-2(y-3) \;\Rightarrow$ координати вершини $(2;3)$, параметр знайдемо з рівності $2p=2 \;\Rightarrow\; p=1$.

Приклад 11. Звести загальне рівняння лінії другого порядку $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$ до канонічного вигляду за допомогою ортогонального перетворення базису та паралельного перенесення осей координат. Визначити тип кривої та виконати схематичний рисунок лінії у початковій системі координат.

Розв’язання. Знайдемо ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму старших членів ($f(x,y)=9x^2-4xy+6y^2$) до канонічного вигляду.

Виписуємо матрицю цієї квадратичної форми $A=\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ та знаходимо її власні числа з характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \lambda^2-15\lambda+50=0 \;\Rightarrow\; \left|\begin{aligned} \lambda_1&=5, \\ \lambda_2&=10. \end{aligned}\right.$$

Таким чином, канонічний вигляд розглянутої квадратичної форми буде $f(x,y)=5x^2{}_1+10y_1^2$.

Щоб знайти базис, у якому квадратична форма має такий вигляд, треба визначити власні вектори матриці A, для цього складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (9-\lambda)x_1-2y_1=0, \\ -2x_1+(6-\lambda)y_1-0, \end{cases}$$

де $\{x_1,y_1\}$ – координати шуканих власних векторів.

Підставимо в отриману систему рівнянь замість λ власне число $\lambda_1 = 5$, дістанемо

$$\begin{cases} 4x_1 - 2y_1 = 0, \\ -2x_1 + y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C, \\ y_1 = 2C \end{cases} \Rightarrow \overline{x_1} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

де $\overline{x_1}$ – власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 5$; $C \neq 0$ – довільна стала.

Аналогічно знаходимо власні вектори для $\lambda = \lambda_2 = 10$

$$\begin{cases} -x_1 - 2y_1 = 0, \\ -2x_1 - 4y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2C, \\ y_1 = C \end{cases} \Rightarrow \overline{y_1} = C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектори $\overline{x_1}$, $\overline{y_1}$ ортогональні, бо відповідають різним значенням власних чисел однієї матриці. Нормуємо ці вектори (для цього кожен вектор ділимо на його довжину) та позначаємо нормовані вектори як $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$:

$$\overline{|x_1|} = \overline{|y_1|} = \sqrt{C^2 2^2 + C^2} = C\sqrt{5}; \Rightarrow \overline{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \overline{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Здобута система векторів становить шуканий ортонормований базис та визначає головні осі квадратичної форми.

Перехід до нової системи координат відбувається поворотом осей координат на кут α такий, що $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ і $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

При переході до нового базису $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ координати змінюються за законом

$$X = PY, \quad \text{де} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

$$\text{тобто } x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1).$$

Отже,

$$16x - 8y = \frac{16}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) - \frac{8}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) = \frac{8}{\sqrt{5}}(2x_1 - 4y_1 - 2x_1 - y_1) = -8\sqrt{5}y_1.$$

Враховуючи канонічний вигляд квадратичної форми та останню рівність, маємо рівняння лінії другого порядку в базисі $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$

$$5x_1^2 + 10y_1^2 - 8\sqrt{5}y_1 - 2 = 0.$$

Виділимо повний квадрат у лівій частині останнього рівняння

$$5x_1^2+10(y_1^2-\frac{4\sqrt{5}}{5}y_1+\frac{4}{5}-\frac{4}{5})-2=0 \quad \Rightarrow \quad 5x_1^2+10(y_1-\frac{2}{\sqrt{5}})^2-10=0.$$

Виконаємо паралельне перенесення координатних осей. Покладемо $X=x_1;\quad Y=y_1+\frac{2}{\sqrt{5}}$, рівняння кривої набуває канонічного вигляду

$$5X^2+10Y^2=10 \quad \text{або} \quad \frac{X^2}{2}+Y^2=1$$

у новій системі координат XO_1Y. Це рівняння еліпса з півосями $a=\sqrt{2},\quad b=1$ у новій системі координат (рис. 8). Щоб отримати нову систему координат, треба стару систему координат xOy повернути на кут α, тангенс якого дорівнює 2. Результуюче перетворення координат має вигляд:

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1-2y_1),\quad y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1+y_1);$$

$$x_1=X,\quad y_1=Y+\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Підставимо x_1 та y_1 у вираз для x та y, дістанемо результуюче перетворення системи координат:

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}(X-2Y-\frac{4}{\sqrt{5}})=\frac{1}{\sqrt{5}}(X-2Y)-\frac{4}{5},$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y+\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y)+\frac{2}{5}.$$

Таким чином, рівняння даної кривої у канонічному вигляді буде в канонічній системі координат $(O_1,\overline{e_1},\overline{e_2})$, де $O'(-\frac{4}{5};\frac{2}{5})$, $\overline{e_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$, $\overline{e_2}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

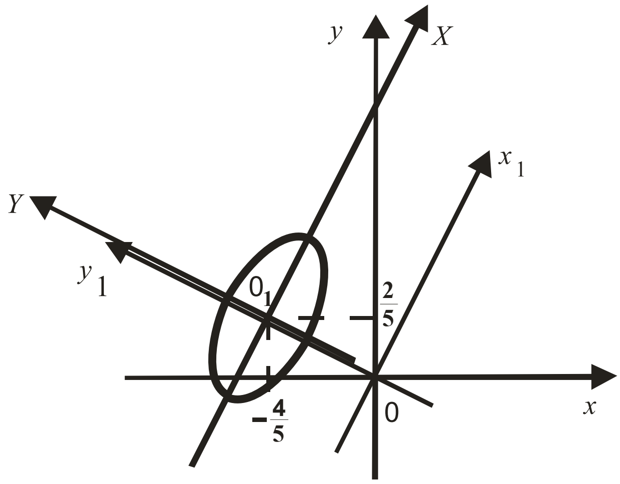


Рис. 8

Домашнє завдання

1. Визначити центр та радіус кола $x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

2. Визначити який геометричний об'єкт описує рівняння

$$9x^2-4y^2+18x+8y-31=0.$$

3. Визначити геометричний об'єкт, що описує рівняння

$$x^2+y^2-6x-8y+25=0.$$

4. Визначити параметр параболи та координати вершини

$$y^2+3x-10y+46=0.$$

5. Записати канонічне рівняння кривої $-y^2+16x+6y-25=0$.

6. Визначити геометричний об'єкт, що описується за допомогою рівняння $y^2+3x-10y+46=0$.

7. Записати канонічне рівняння кривої $2x^2+3y^2-4x+6y-7=0$.

8. Написати рівняння прямої, що проходить через лівий фокус гіперболи $5x^2-4y^2+30x+8y+21=0$ паралельно прямій $y=2x$.

9. Обчислити відстань від вершини параболи $x^2+10x+6y-5=0$ до прямої $4x-3y+5=0$.

10. Обчислити відстань від центра кола $x^2+y^2+6x+12y-5=0$ до асимптот гіперболи $9x^2-16y^2=144$.

Відповіді

1. $C(2;-3)$, $R=4$. **2.** $\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$. **3.** Точка $(3;4)$.

4. Вершина в точці $(-7;5)$, параметр дорівнює $3/2$. **5.** $(y-3)^2=16(x-1)$.

6. $(y-5)^2=-3(x+7)$. **7.** $\dfrac{(x-1)^2}{6}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$.

8. $2x-y+13=0$. **9.** 6. **10.** 3; $6{,}6$.

Заняття 10. Вступ до математичного аналізу

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається границею функції $f(x)$ в точці x_0?

2. Скільки різних границь має функція $f(x)$ в одній точці x_0?

3. Чому дорівнює границя сталої величини?

4. За якої умови функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \to a$?

5. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Яке з наведених нижче рівнянь виконується лише за додаткової умови та що це за умова?

а) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a)$; **б)** $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a)$;

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$.

6. Нерівність $u(x) \le f(x) \le v(x)$ виконується для будь-якого x. Чому дорівнює границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = b$?

7. Чому може дорівнювати границя $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ за умови, що $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$?

8. Яку функцію $f(x)$ називають неперервною в точці x_0?

9. Вказати умови, за яких функція $f(x)$ має розрив першого роду в точці x_0.

10. За якої умови нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ будуть еквівалентні?

11. Пряма $x = a$ являє собою вертикальну асимптоту графіка функції $f(x)$. Який тип розриву буде мати графік цієї функції в точці $x = a$?

12. Які з нижченаведених умовних виразів є невизначеностями?

а) $\dfrac{0}{0}$; **б)** $\dfrac{\infty}{\infty}$; **в)** $\infty + \infty$; **г)** $\infty - \infty$; **д)** $\infty \cdot \infty$; **е)** $0 \cdot 0$;

ж) $0 \cdot \infty$; **и)** 1^{∞}; **к)** 0^0; **л)** 0^{-1}; **м)** $\dfrac{\infty}{0}$.

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 2} (3x^2 - 2x + 7)$. **2.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2 - 1}{2x^3 + 6x^2 - 5}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2 + 3x - 1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+2x^2-x}{3x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{3x^2+2x-1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{2x+x^5-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)$. **11.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. **12.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{4x}-2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$. **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$. **16.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$.

Розв'язання. **1.** Використовуючи теореми про границі: границя сталої дорівнює саме цій сталій величині ($\lim\limits_{x\to a}C=C$) ($C=const$); якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ та $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$, то границя суми цих функцій дорівнює сумі границь кожного доданка ($\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=$ $=A\pm B$); постійний множник виноситься за знак ліміту ($\lim\limits_{x\to a}[Cf(x)]=$ $=C\lim\limits_{x\to a}f(x)=CA$), ($C=const$), дістанемо

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-2x+7)=3\lim_{x\to 2}x^2-2\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}7=12-4+7=15.$$

2. У даному прикладі існують границі чисельника та знаменника і границя знаменника не дорівнює нулю, тому, використовуючи теорему про границю частки (якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ та $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq 0$, то існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$), отримаємо

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-1}{2x^3+6x^2-5}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x^3+6x^2-5)}=\frac{27-1}{54+54-5}=\frac{26}{103}.$$

3. Границі чисельника та знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю. Використовуючи теорему про границю частки (якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ та $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq 0$, то існує 0 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$), дістанемо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+3x-1}=\frac{0}{9}=0.$$

Отриманий результат можна записати так: $\dfrac{x-2}{x^2+3x-1} \to 0$, коли $x \to 2$.

Отже, величина $\dfrac{x-2}{x^2+3x-1}$ – нескінченно мала, коли $x \to 2$.

4. У цьому прикладі безпосередньо застосувати теорему про границю частки не можна, тому що границя знаменника дорівнює нулю (у знаменнику стоїть нескінченно мала величина, коли $x \to 3$). У чисельнику маємо обмежену величину, яка відрізняється від нуля. Таким чином, під знаком границі стоїть добуток обмеженої величини x^2-2x+1, що відрізняється від нуля, на нескінченно велику величину $\dfrac{1}{x-3}$ при $x \to 3$, що є величиною оберненою до нескінченно малої $x-3$ при $x \to 3$.

Тому $\dfrac{x^2-2x+1}{x-3} \to \infty$ при $x \to 3$. Це можна записати так:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\{\frac{4}{0}\}=\infty.$$

Отже, величина $\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ – нескінченно велика при $x \to 3$.

5. У цьому прикладі не можна безпосередньо застосувати теорему про границю частки, тому що границі знаменника та чисельника дорівнюють нулю, маємо невизначеність виду $\{\frac{0}{0}\}$. У подібних прикладах чисельник та знаменник необхідно розкласти на множники, виконати скорочення та перейти до границі. Зробимо це:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3+2x^2-x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(5x^2+2x-1)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+2x-1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Треба зазначити, що x прямує до нуля, але не дорівнює нулю, проте границя його дорівнює нулю.

6. В цьому прикладі теж маємо невизначеність $\{\frac{0}{0}\}$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)}{(x-1)}=\frac{2}{3}.$$

7. Теорему про границю частки в цьому прикладі застосовувати не можна, тому що чисельник та знаменник прямують до нескінченності. Отже, маємо невизначеність виду $\{\frac{\infty}{\infty}\}$. У подібних прикладах для розкриття невизначеності доцільно чисельник та знаменник поділити на степінь x з найбільшим показником, а потім перейти до границі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}=\{\frac{\infty}{\infty}\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(5+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{5}.$$

8. Чисельник та знаменник прямують до нескінченності, маємо невизначеність $\{\frac{\infty}{\infty}\}$. Винесемо в чисельнику та знаменнику степінь x з найбільшим показником. У чисельнику це буде x^3, а у знаменнику – x^2. Далі скорочуємо дріб на x^2 та переходимо до границі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{3x^2+2x-1}=\{\frac{\infty}{\infty}\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^2(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3}=\infty.$$

9. Маємо невизначеність $\{\frac{\infty}{\infty}\}$. Винесемо в чисельнику та знаменнику степінь x з найбільшим показником. У чисельнику це буде x^3, а у знаменнику – x^5. Далі скорочуємо дріб на x^3 та переходимо до границі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2x+x^5-1}=\{\frac{\infty}{\infty}\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^5(\frac{2}{x^4}+1-\frac{1}{x^5})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{x^2(\frac{2}{x^4}+1-\frac{1}{x^5})}=0.$$

10. Легко побачити, що в цьому прикладі маємо різницю двох нескінченно великих додатних величин, тобто невизначеність виду $\{\infty-\infty\}$. Ця невизначеність розкривається шляхом зведення її до невизначеності $\{\frac{\infty}{\infty}\}$ або $\{\frac{0}{0}\}$. Зведення відбувається кожного разу різними методами залежно від виду функції, яка стоїть під знаком границі.

У цьому прикладі переносимо ірраціональність із чисельника у знаменник, помноживши та розділивши вираз, що стоїть під знаком границі, на спряжений, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0.$$

11. У цьому прикладі маємо різницю двох нескінченно великих додатних величин, тобто невизначеність виду $\{\infty-\infty\}$, перейдемо до невизначеності $\{\frac{0}{0}\}$:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{-(x+2)}{(1+x+x^2)}\right)=-1.$$

12. Невизначеність виду $\{\frac{0}{0}\}$ з присутністю ірраціональностей. Щоб позбавитися від ірраціональності в чисельнику, множимо чисельник та знаменник на вираз, спряжений до чисельника, а потім множимо знаменник та чисельник на вираз, спряжений до знаменника, отриманий дріб скорочуємо та переходимо до границі:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{4x}-2}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{1+8x}-3)(\sqrt{1+8x}+3)}{(\sqrt{4x}-2)(\sqrt{1+8x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1+8x-9)(\sqrt{4x}+2)}{(\sqrt{4x}-2)(\sqrt{1+8x}+3)(\sqrt{4x}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{(8x-8)(\sqrt{4x}+2)}{(4x-4)(\sqrt{1+8x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{8(x-1)(\sqrt{4x}+2)}{4(x-1)(\sqrt{1+8x}+3)}=\lim_{x\to1}\frac{8(\sqrt{4x}+2)}{4(\sqrt{1+8x}+3)}=\frac{4}{3}.$$

13. Приклад аналогічний до попередніх. Позбавляємося від ірраціональності, скорочуємо дріб та переходимо до границі

$$\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to2}\frac{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-3x+2)}{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}=\frac{1}{16}.$$

14. Підставимо у вираз під знаком границі нуль замість x, дістанемо невизначеність $\{\frac{0}{0}\}$. Позбавимося від ірраціональності, скоротимо дріб та перейдемо до границі

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to0}\frac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}.$$

15. Позбавляючись від ірраціональності, невизначеність $\{\infty-\infty\}$ зводимо до дробу та отримаємо результат

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

16. Маємо невизначеність виду $\{\frac{\infty}{\infty}\}$. Поділивши чисельник та знаменник на n, отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}=\{\frac{\infty}{\infty}\}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-1}=\frac{1}{-1}=-1.$

З попередніх прикладів можна зробити висновок, що для розкриття невизначеностей виду:

$\{\frac{\infty}{\infty}\}$ **− доцільно чисельник та знаменник поділити на степінь x з найбільшим показником, а потім перейти до границі;**

$\{\infty-\infty\}$ **− треба перейти до дробу та спочатку позбавитися від ірраціональності, якщо така присутня;**

$\{\frac{0}{0}\}$**, якщо у чисельнику та знаменнику стоять многочлени, − треба поділити чисельник та знаменник на вираз $x-x_0$, де x_0 − це число, до якого прямує x.**

Розглянемо невизначеність виду $\{\frac{0}{0}\}$, якщо у виразі під знаком границі стоять тригонометричні функції. Тут використовують першу важливу границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, де кут x виражений у радіанах. Важливо пам’ятати, що аргумент синуса прямує до нуля, тобто є нескінченно малою величиною, а в знаменнику стоїть така ж сама нескінченно мала величина. Тільки тоді границя буде дорівнювати одиниці.

Обчислити границі:

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$. **18.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$. **19.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. **20.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$. **22.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 2x}$. **23.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$. **24.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin\dfrac{n}{2^x}$. **26.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$.

Розв'язання. **17.** Встановлюємо, що дана функція не визначена в граничній точці, що при даному зміненні аргументу вона являє собою відношення двох нескінченно малих величини (випадок $\{\dfrac{0}{0}\}$). Після цього перетворимо функцію так, щоб стало можливим використати першу важливу границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

18. Перетворимо даний вираз так, щоб задача була зведена до першої важливої границі: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}=\{\dfrac{0}{0}\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 4x}{4x}4x}{\dfrac{\sin 5x}{5x}5x}=\dfrac{4}{5}\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\dfrac{4}{5}.$

Тут враховано, що у формулі першої важливої границі у знаменнику повинна стояти нескінченно мала величина, яка збігається з аргументом синуса. Саме тому кожен синус треба поділили на його аргумент. На цю ж величину його помножили, щоб у кількісному значенні нічого не змінилося.

19. Формулу першої важливої границі використовують, коли під символом границі стоять $\sin x$ або tgx. В нашому прикладі стоїть $\cos x$, тому за формулою $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$ перейдемо до $\sin\dfrac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{x\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{4\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Для того щоб стало можливим використати першу важливу границю, врахували, що $\sin^2\dfrac{x}{2}=\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}$, $x^2=x\cdot x$, знаменник поділили на $2\cdot 2$ та помножили на 4, дістали добуток двох перших важливих границь.

20. За тригонометричною формулою $tgx=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot$$

У подальшому можна користуватися результатом наведеного прикладу ($\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$).

21. За допомогою заміни змінної перейдемо до першої важливої границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\{\frac{0}{0}\}=\left\{\begin{matrix} t=\arcsin x & \\ x=\sin t & t\to 0\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=1.$$

22. Тут, щоб використати першу важливу границю, чисельник розділимо та помножимо на $3x$, знаменник поділимо та помножимо на $2x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 2x}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{tg3x}{3x}3x}{\frac{\sin 2x}{2x}2x}=\frac{3x}{2x}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3}{2}.$$

23. Треба перейти від $\cos x$ до $\sin x$. Це можна зробити за допомогою тригонометричних формул зведення:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{-(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{1}{-1}=-1.$$

24. Використовуємо тригонометричну формулу $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{\sin x}{2}\cdot}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2\cdot\sin\frac{\sin x}{2}\cdot\sin\frac{\sin x}{2})\cdot\frac{\sin x}{2}\cdot\frac{\sin x}{2}}{x^2\cdot\frac{\sin x}{2}\cdot\frac{\sin x}{2}}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\sin x}{2}}{\frac{\sin x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\sin}{2}}{\frac{\sin x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{2}}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{2}}{x}=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

25. Встановивши, що при вказаному зміненні аргументу функція являє собою добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику (випадок $\{0\cdot\infty\}$), перетворимо її на дріб, чисельник та знаменник якого одночасно прямують до нуля, тобто перейдемо до невизначеності $\{\frac{0}{0}\}$.

$$\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{n}{2^x} = \{\infty\cdot 0\} = \lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot\sin\frac{n}{2^x}}{\frac{n}{2^x}} = \{\frac{0}{0}\} = n\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{n}{2^x}}{\frac{n}{2^x}} = n.$$

26. У цьому прикладі перейдемо до невизначеності виду $\{\frac{0}{0}\}$, використавши тригонометричі формули зведення:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2} = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2})} = 1\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}(1-x))} = \frac{2}{\pi}\cdot$$

Якщо функція має вигляд $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ і коли $x\to a\ (x\to\infty)$, $f(x)\to 1$, а $\varphi(x)\to\infty$, то кажуть, що маємо невизначеність виду $\{1^\infty\}$. Для розкриття такої невизначеності застосовують другу важливу границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Обчислити границі :

27. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x$. **28.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+2})^{2x+1}$. **29.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}$. **30.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Розв'язання. **27.** Вираз під знаком границі перетворимо так, щоб задача зводилася до другої важливої границі.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = \{1^\infty\} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}}\right]^{\frac{a}{x}\cdot x} = e^a,$$

тому що $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}} = e,$ а показник степеня $\frac{a}{x}\cdot x = a$.

28. Вираз, який стоїть у дужках, прямує до 1, а показник степеня – до ∞, коли $x\to\infty$. Отже, маємо невизначеність $\{1^\infty\}$, яку розкривають за допомогою другої важливої границі. Перетворимо функцію так, щоб стало можливим використати другу важливу границю. Основу даного виразу подамо у вигляді суми одиниці та нескінченно малої величини: $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+2-2-1}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}$ (дріб не змінюється, якщо до чисельника додати та відняти від нього 2).

Тепер маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+2}\right)^{2x+1}=\{1^{\infty}\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-3}}\right]^{\frac{-3}{x+2}(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x-3}{x+2}}=e^{-6}.$$

Показник степеня не змінюється, якщо його помножити та поділити на множник $\frac{x+2}{-3}$, який потрібен для використання другої важливої границі.

29. Вираз під знаком границі перетворимо так, щоб задача зводилася до другої важливої границі

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}=\{1^{\infty}\}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{3x\cdot\frac{1}{x}}=e^{3}.$$

30. Тут також невизначеність $\{1^{\infty}\}$:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x-1)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+(\cos 2x-1))^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right]^{\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+(\cos 2x-1))^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right]^{\frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 x}}=e^{-2}.$$

Якщо $x<a$ та $x\to a$, то пишуть $x\to a-0$. Якщо $x>a$ та $x\to a$, то пишуть $x\to a+0$. Границі $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=f(a-0)$ та $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a+0)$ (якщо вони існують) називаються відповідно **границею зліва** функції $f(x)$ в точці a та **границею справа** функції $f(x)$ в точці a.

Рівність $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ **є необхідною та достатньою умовою для існування границі функції** $f(x)$ **в точці** a.

Приклад 31. Знайти однобічні границі функції

$$f(x)=arctg\frac{1}{x-1}\quad (x\neq 1),\ \text{коли}\quad x\to 1.$$

Розв'язання: $f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1+0\\(x>1)}} arctg\dfrac{1}{x-1}=\left\{\begin{matrix} z=\dfrac{1}{x-1} \\ z\to+\infty\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{z\to+\infty} arctg\, z=\dfrac{\pi}{2}.$

$$f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1-0\\(x<1)}} arctg\frac{1}{x-1}=\left\{\begin{matrix} z=\dfrac{1}{x-1} \\ z\to-\infty\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{z\to-\infty} arctg\, z=-\frac{\pi}{2}.$$

Границі виявилися різними, отже, границі функції в точці $x=1$ не існує.

Приклад 32. Знайти ліву та праву границі функції

$$f(x)=\frac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}\quad (x\neq 0),\qquad \text{коли}\quad x\to 0.$$

Розв'язання: $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}=\left\{\begin{matrix} z=\dfrac{1}{x} \\ z\to+\infty\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{1}{5+3^{z}}=0.$

$$f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}=\left\{\begin{matrix} z=\dfrac{1}{x} \\ z\to-\infty\end{matrix}\right\}=\frac{1}{5}.$$

Границі виявилися різними, отже, границі функції в точці $x=0$ не існує.

Функція $f(x)$ неперервна в точці $x=x_0$, якщо вона визначена в околі цієї точки та існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Існування останньої рівності можна замінити такими умовами:

1) функція визначена в околі точки $x=x_0$;

2) існують скінченні однобічні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

3) однобічні границі рівні $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

4) однобічні границі збігаються зі значенням функції у цій точці

$$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Дослідити на неперервність функції:

33. $f(x)=x^2+3$. **34.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$. **35.** $y=\dfrac{1}{x^2+4}$.

36. $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. **37.** $y=\dfrac{x^2-16}{x-4}$. **38.** $y=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\le 0, \\ x+1 & \text{при } x>0.\end{cases}$

Розв'язання. **33.** Можна піти двома шляхами: 1) дана функція визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$, крім того, вона елементарна, а всі елементарні функції в області визначення неперервні; 2) дослідити на неперервність за допомогою означення неперервної функції.

Обчислимо ліву та праву границі даної функції

$$\lim_{x\to 3-0}(x^2+3)=12,\quad \lim_{x\to 3+0}(x^2+3)=12,\quad f(3)=(x^2+3)_{x=3}=12.$$

Значення однобічних границь та функції в даній точці збігаються, тобто функція неперервна в точці $x=3$. Так буде в будь-якій точці з $(-\infty;+\infty)$.

34. Функція алгебраїчна дробова, визначена на всій множині дійсних чисел, за винятком точок, у яких знаменник дробу дорівнює нулю: $x^2-4=0$ $\Rightarrow$ $x_1=2$, $x_2=-2$.

Перевіримо неперервність функції в точці $x_1=2$:

$$\lim_{\substack{x\to 2-0\\(x<2)}}\frac{1}{x^2-4}=\left\{\begin{matrix} z=x^2-4\\ z\to -0\end{matrix}\right\}=\lim_{z\to -0}\frac{1}{z}=-\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to 2+0\\(x>2)}}\frac{1}{x^2-4}=\left\{\begin{matrix} z=x^2-4\\ z\to +0\end{matrix}\right\}=\lim_{z\to +0}\frac{1}{z}=+\infty.$$

Не виконується друга умова неперервності, в точці $x_1=2$ функція має нескінченний розрив другого роду.

Перевіримо неперервність функції в точці $x_2=-2$:

$$\lim_{\substack{x\to -2-0\\(x<-2)}}\frac{1}{x^2-4}=\left\{\begin{matrix} z=x^2-4\\ z\to +0\end{matrix}\right\}=\lim_{z\to +0}\frac{1}{z}=+\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to -2+0\\(x>-2)}}\frac{1}{x^2-4}=\left\{\begin{matrix} z=x^2-4\\ z\to -0\end{matrix}\right\}=\lim_{z\to -0}\frac{1}{z}=-\infty.$$

У точці $x_2=-2$ функція теж має розрив другого роду.

35. Функція елементарна, область її визначення – проміжок $(-\infty;+\infty)$. А відомо, що елементарні функції неперервні в області своєї визначеності. Отже, дана функція неперервна на проміжку $(-\infty;+\infty)$.

36. Функція визначена на всій числовій осі, за винятком точки $x=1$, у якій знаменник даної дрібно-лінійної функції дорівнює нулю. Саме в цій точці досліджуємо функцію на неперервність, для чого обчислюємо однобічні границі:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x+3}{x-1}=\left\{\frac{4}{+0}\right\}=+\infty;\qquad \lim_{x\to 1-0}\frac{x+3}{x-1}=\left\{\frac{4}{-0}\right\}=-\infty.$$

Таким чином, функція в точці $x=1$ має розрив другого роду.

37. Функція елементарна, визначена на всій множині дійсних чисел, за винятком точки $x=4$, отже, ця точка підозріла на розрив.

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4-0}(x+4)=8, \qquad \lim_{x\to 4+0}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4+0}(x+4)=8.$$

Однобічні границі однакові та дорівнюють скінченній величині, але їх величина не збігається зі значенням функції в точці $x=4$ (у цій точці функція невизначена). Таким чином, у точці $x=4$ дана функція має усувний розрив. Якщо цю функцію доозначити в точці $x=4$, поклавши $f(x)=8$, то функція буде неперервною на всій числовій осі.

38. Функція елементарна, визначена на всій числовій прямій. У точці $x=0$ аналітичний вираз функції змінюється, отже, у цій точці функція може мати розрив. Дослідимо неперервність функції в точці $x=0$. Знайдемо ліву границю функції в точці $x=0$:

$$f(-0)=\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}x^2=0.$$

Тепер знайдемо праву границю функції в точці $x=0$:

$$f(+0)=\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(x+1)=1.$$

Таким чином, $f(+0)\neq f(-0)$.

Отже, у точці $x=0$ функція $f(x)$ має розрив першого роду. Стрибок функції в точці дорівнює різниці $f(+0)-f(-0)=1-0=1$.

У всіх інших точках числової прямої функція $f(x)$ неперервна, оскільки обидві формули, якими вона задана, означають елементарні (алгебраїчні) неперервні функції.

Домашнє завдання

1. Яку з нижченаведених границь функції $f(x)$ можна проілюструвати за допомогою рис. 9?

а) $\lim\limits_{x\to A}f(x)=x_0$; **б)** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$; **в)** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\sqrt{A}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=A$; **д)** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

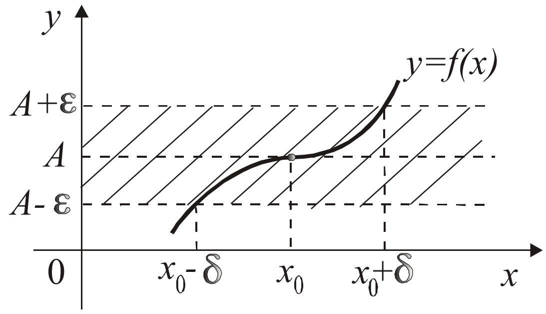


Рис. 9

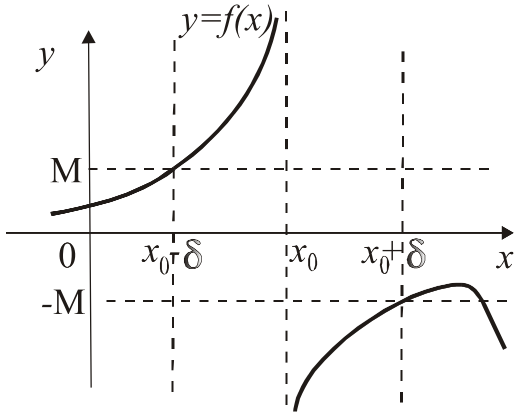


Рис. 10

2. За графіком функції $y = f(x)$ (рис. 10), укажіть правильно обчислені границі.

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = M$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = M$; **в)** $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$; **д)** $\lim\limits_{x\to x_0+\delta} f(x) = \infty$; **е)** $\lim\limits_{x\to x_0-\delta} f(x) = x_0$.

3. Як називаються нескінченно малі α та β, якщо виконується рівність $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta} = 1$? Який запис у цьому випадку роблять?

4. За графіком функції $y = f(x)$ (рис. 11), указати правильно обчислені границі.

а) $\lim\limits_{x\to N} f(x) = A$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; **г)** $\lim\limits_{x\to A} f(x) = N$.

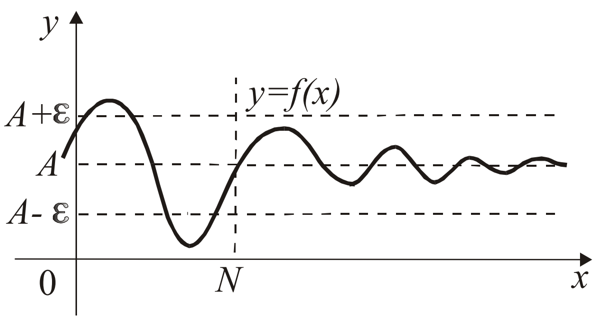


Рис. 11

5. Для якої з функцій на рис. 12 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$?

а) **б)** **в)** **г)**

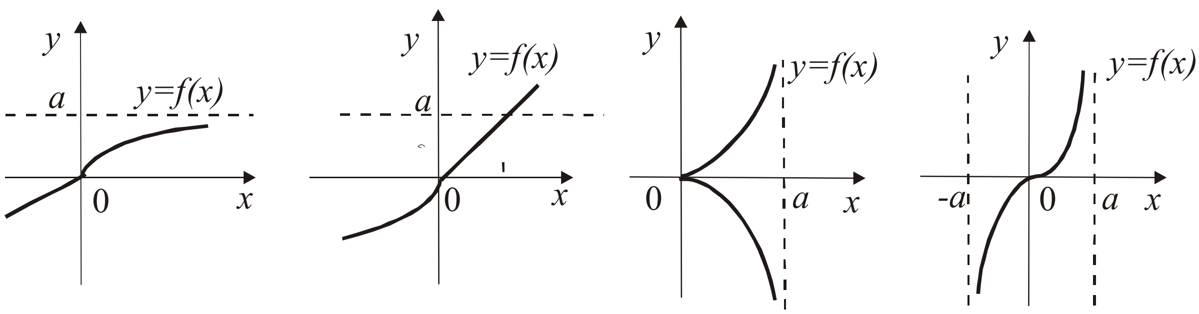


Рис. 12

6. Якщо α та β □ еквівалентні нескінченно малі функції при $x \to x_0$, то чому дорівнює $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}$?

Обчислити границі:

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x^4+20}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+100x^2-3x+1}{27x^3-91x^2+2}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+7}{x(2-5x)}$. **10.** $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{2x^2-x+5}{2x^2-3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty} 9^{\frac{6x^3+2x^2-4}{3x^3-5}}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{9x^3+9x^2-x-1}$. **14.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$. **16.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$. **18.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}$.

19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-1}{\sqrt{5+x}-2}$. **20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} x ctg 2x$. **22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$. **24.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{arctg(x+2)}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$. **26.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 6x}{5x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x-2)}{x^2-4}$. **28.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg 2x}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{3}{x})^x$. **30.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$. **32.** $\lim\limits_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}}$.

33. $\lim\limits_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}}$. **34.** $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt{\sin x}$. **35.** $\lim\limits_{x\to -0}\sqrt{\sin x}$.

36. Нехай $f(x)=\begin{cases} x^2, & якщо\quad x<3, \\ x+6, & якщо\quad x\ge 3. \end{cases}$ Знайти $f(3+0)$; $f(3-0)$.

Дослідити на неперервність функції:

37. $y=\cos 3x$. **38.** $y=\dfrac{1}{x-2}$. **39.** $y=\begin{cases} 3x & при\ \ x\ne 2, \\ 1 & при\ \ x=2. \end{cases}$ **40.** $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

Відповіді

1. б). **2.** в); г). **3.** Еквівалентні, $\alpha\sim\beta$. **4.** а); б). **5.** а). **6.** 0.

7. 0. **8.** ∞. **9.** $-\dfrac{1}{5}$. **10.** 0. **11.** 81. **12.** $\dfrac{1}{8}$. **13.** $-\dfrac{1}{2}$. **14.** 0.

15. $\frac{1}{2}$. **16.** $\frac{5}{2}$. **17.** 7. **18.** -6. **19.** 4. **20.** -4. **21.** $\frac{1}{2}$. **22.** 3. **23.** 2.
24. -4. **25.** $\frac{3}{4}$. **26.** $\frac{6}{5}$. **27.** $\frac{1}{2}$. **28.** e^{-1}. **29.** e^{-3}. **30.** e^{-2}. **31.** e^{-10}.
32. $+\infty$. **33.** 0. **34.** 0. **35.** Границя не існує. **36.** $f(3+0)=f(3-0).=9$.
37. Функція елементарна, тобто неперервна в області визначення – на проміжку $(-\infty;+\infty)$. **38.** У точці $x=2$ маємо розрив другого роду. **39.** У точці $x=2$ маємо усувний розрив. **40.** У точці $x=1$ функція має розрив першого роду. Стрибок функції в цій точці дорівнює 2.

.

Заняття 11. Похідні основних елементарних функцій. Похідна суми, добутку та частки функцій

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Дати означення похідної заданої функції.
2. Охарактеризувати символи $f'(x), \quad f'(x_0)$.
3. Записати таблицю похідних основних елементарних функцій.
4. Які функції можна диференціювати?
5. Записати основні правила знаходження похідних функцій

$(C)', \quad (Cu)', \quad (\frac{C}{v})'$, де $C = const, \quad u = u(x), \quad v = v(x) \neq 0$.

6. Записати правила знаходження похідної суми, добутку та частки функцій.

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Згадаємо таблицю похідних основних елементарних функцій:

$$(C)' = 0 \quad (C = const); \tag{1}$$

$$(x)' = 1; \tag{2}$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1} \quad (\mu = const); \tag{3}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x; \tag{4}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}; \tag{5}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{6}$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \tag{7}$$

$$(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{8}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{9}$$

Основні правила знаходження похідних:

I. $(Cu)' = Cu' \quad (C = const)$;
II. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
III. $(uv)' = u'v + uv'$;
IV. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$;
V. $(\frac{C}{v})' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

Користуючись формулами таблиці та правилами диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1. $y = 7x^6 - \sqrt{3x} + \sqrt{2}$. **2.** $y = x^{\frac{5}{6}} + 4$.

3. $y = \dfrac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \dfrac{9}{\sqrt[3]{x^2}} + 2\sqrt[6]{x^5}$. **4.** $y = x\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 0{,}1x^{10}$.

5. $y = (2x^3 + \sqrt{5})7^x$. **6.** $y = \dfrac{x}{2 - \cos x} - \dfrac{x^3}{\sqrt{7}}$.

7. $y = \dfrac{5}{\sin x} + \dfrac{\ln x}{x^2}$. **8.** $y = xtgx + ctgx$.

9. $y = x^3 \log_5 x$. **10.** $y = e^x \sin x$.

11. $y = \sqrt{x}arctgx$. **12.** $y = \sin x \arcsin x$.

13. $y = \dfrac{\arccos x}{\arccos x + 1}$. **14.** $y = \dfrac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}$.

Розв'язання. **1.** Користуючись правилами і формулами $[\text{II};(3);(1)]$, дістанемо $y' = 7(x^6)' - \sqrt{3}(x^{\frac{1}{2}})' + (\sqrt{2})' = 42x^5 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

2. За правилами і формулами $[\text{II};(3);(1)]$ маємо $y' = \dfrac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}$.

3. Перейдемо до дробових показників та згідно з правилами і формулами $[\text{II};(1);(3)]$ обчислимо похідну заданої функції:

$$y' = (3x^{\frac{13}{5}})' - (9x^{-\frac{2}{3}})' + (2x^{\frac{5}{6}})' = \frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}} + 6x^{-\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{6}}.$$

4. Спростимо вигляд функції для того, щоб можна було використати формулу (3) таблиці похідних: $y = x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + 0{,}1x^{10}$.

Використавши $[\text{I};\text{II};(3)]$, дістанемо:

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + x^9 = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + x^9.$$

5. Приклад вміщує добуток двох функцій, тому використовувати будемо правило [III]. Похідна суми функцій обчислюється за правилом [II]. Постійний множник виноситься за знак похідної за правилом [I]

$$y' = (2x^3 + \sqrt{5})'7^x + (2x^3 + \sqrt{5})(7^x)',$$

а тепер за формулами (1). (3), (4), маємо

$$y' = 6x^2 \cdot 7^x + (2x^3 + \sqrt{5})7^x \ln 7.$$

6. За правилами диференціювання суми та дробу функцій і формул таблиці похідних $\left[\text{II}; \text{IV}; \text{I}; \text{II}; (2); (1); (7); (3)\right]$ дістанемо:

$$y' = \left(\frac{x}{2-\cos x}\right)' - \left(\frac{x^3}{\sqrt{7}}\right)' = \frac{(x)'(2-\cos x) - x(2-\cos x)'}{(2-\cos x)^2} - \frac{1}{\sqrt{7}}(x^3)' =$$

$$= \frac{2-\cos x - x\sin x}{(2-\cos x)^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{7}}.$$

7. Послідовно вживаючи правила диференціювання та формули таблиці, отримаємо

$$y' = \left(\frac{5}{\sin x}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = -\frac{5(\sin x)'}{\sin^2 x} + \frac{x^2(\ln x)' - (x^2)'\ln x}{x^4} =$$

$$= -\frac{5\cos x}{\sin^2 x} + \frac{x^2\frac{1}{x} - 2x\ln x}{x^4} = -\frac{5\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

8. Тут застосуємо такі правила і табличні формули $\left[\text{II}; \text{Ш}; (2); (8); (9)\right]$ та отримаємо

$$y' = (xtgx)' + (ctgx)' = (x)'tgx + x(tgx)' + (ctgx)' = tgx + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

9. Диференціюємо добуток функцій

$$y' = (x^3)'\log_5 x + x^3(\log_5 x)' = 3x^2\log_5 x + x^3\frac{1}{x\ln 5} = x^2(3\log_5 x + \frac{1}{\ln 5}).$$

10. $y' = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' = e^x\sin x + e^x\cos x = e^x(\sin x + \cos x)$.

11. $y' = (\sqrt{x})'arctgx + \sqrt{x}(arctgx)' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}arctgx + \sqrt{x}\dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $y' = (\sin x)'\arcsin x + \sin x(\arcsin x)' = \cos x \cdot arctgx + \sin x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. Диференціюємо дріб за такими правилами та формулами $\left[\text{IV}; \text{II}; (8)\right]$:

$$y'' = \frac{(\arccos x)'(\arccos x + 1) - \arccos x(\arccos x + 1)'}{(\arccos x + 1)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arccos x + 1) - \arccos x(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})}{(\arccos x + 1)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arccos x + 1 - \arccos x)}{(\arccos x + 1)^2} = -\frac{1}{(\arccos x + 1)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

14. $$y' = \frac{(e^x - \ln x)'(e^x + \ln x) - (e^x - \ln x)(e^x + \ln x)'}{(e^x + \ln x)^2} =$$

$$= \frac{(e^x - \frac{1}{x})(e^x + \ln x) - (e^x - \ln x)(e^x + \frac{1}{x})}{(e^x + \ln x)^2} = \frac{2e^x(x\ln x - 1)}{x(e^x + \ln x)^2}.$$

15. Знайти $f'(8)$, якщо $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{\sqrt{x}} - 7x$.

Розв'язання. Запишемо дану функцію у вигляді $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 6x^{-\frac{1}{2}} - 7x$. За формулою таблиці похідних $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ візьмемо похідну від кожного доданка і, виносячи постійний множник за символ похідної, дістанемо

$$f'(x) = 3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 6(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} - 7 = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{x\sqrt{x}} - 7.$$

Підставивши в отриманий вираз значення $x = 8$, дістанемо результат

$$f'(8) = \frac{2}{\sqrt[3]{8}} + \frac{3}{8\sqrt{8}} - 7 = 1 + \frac{3}{8\cdot 2\sqrt{2}} - 7 = \frac{3\sqrt{2}}{32} - 6.$$

16. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена до параболи $f(x) = x^2 + 4$ в точці $(3;5)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо похідну в точці x: $f'(x) = 2x$.

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої у вказаній точці дорівнює значенню похідної у цій точці, тобто $k_д = f'(3) = 2\cdot 3 = 6$.

17. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2 - 4x + 3$ в точці $x_0 = 4$.

Розв'язання. Підставимо у рівняння функції значення абсциси x_0 точки дотику, визначимо відповідну ординату цієї точки $y_0 = 4^2 - 16 + 3 \Rightarrow y_0 = 3$. Знайдемо похідну даної функції та обчислимо її значення в точці дотику: $y' = 2x - 4$; $y'(4) = 8 - 4 = 4$. Підставляючи в рівняння дотичної $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ отримані значення, дістанемо рівняння дотичної $y - 3 = 4(x - 4) \Rightarrow 4x - y - 13 = 0$. Аналогічно, підставляючи в рівняння нормалі $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ координати точки дотику $(4;3)$ та $y'(4) = 4$, отримаємо рівняння нормалі $y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow x + 4y - 16 = 0$.

18. Обчислити кут, під яким перетинаються лінії $y = x^2 - 4x + 4$ та $y = -x^2 + 6x - 4$.

Розв'язання. Кутом між кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ у точці їх перетину називається кут між дотичними до цих кривих у цій точці.

Розв'язуючи систему $\begin{cases} y=-x^2+6x-4, \\ y=x^2-4x+4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x^2+6x-4, \\ 2x^2-10x+8=0, \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y=-x^2+6x-4, \\ x^2-5x+4=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=1; y_2=4 \\ x_1=1; x_2=4 \end{cases}$, визначимо точки перетину парабол: $A(1,1)$ та $B(4,4)$. Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до даних кривих у точці $A(1,1)$: $y_1'\big|_{x=1}=(-2x+6)\big|_{x=1}=-2+6=4$; $y_2'\big|_{x=1}=(2x-4)\big|_{x=1}=2-4=-2$, тоді $tg\varphi=\dfrac{y_2'(1)-y_1'(1)}{1+y_1'(1)y_2'(1)}=\dfrac{-2-4}{1+4\cdot(-2)}=\dfrac{6}{7}$. Аналогічно знаходимо, що під таким самим кутом перетинаються криві й у точці $B(4,4)$.

Домашнє завдання

Знайти похідні функцій:

1. $y=\dfrac{x^5}{5}-3x^3+4x-\dfrac{2}{3}$.

2. $y=2x^3-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{x^2}{3}+3$

3. $y=-\dfrac{2\sqrt{x}}{a^2}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}-7\pi$.

4. $y=a\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{b}{\sqrt{x^5}}$.

5. $y=\dfrac{m+bx}{e^2}$.

6. $y=\dfrac{3-2x^3}{\sqrt[3]{\pi}}-\dfrac{5tg1-3}{x^2}+\dfrac{1}{x}$.

7. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

8. $y=-\dfrac{a}{\sqrt{3x}}+\dfrac{4\sqrt[4]{x^3}}{b}$.

9. $y=(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2x})\cos x$.

10. $y=3^x(7-3^{-x}\sqrt[5]{x^2})$.

11. $y=\dfrac{7}{x^3+3x-1}$.

12. $y=(2\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x^4}$.

13. $y=(e^x+3)(\dfrac{1}{x}-ctgx)$.

14. $y=\dfrac{\cos x}{4+3tgx}$.

15. $y=7^x+\dfrac{1}{x^3}\arccos x$.

16. $y=\dfrac{2^x-5^x}{10^x}$.

17. $y=(5+x^3)\cos x+4xctgx$.

18. $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$.

19. $y=\sin e\ln x+\dfrac{5}{x}$.

20. $y=\dfrac{3^x+\cos x}{x^3+\ln x}$.

21. $y=\dfrac{3-\ln x}{x^2+2x-1}$. **22.** $y=\dfrac{arctgx}{x^3+\ln x}$. **23.** $y=\dfrac{x\sqrt{x}+e^x}{x-e}$.

Обчислити похідні функції $f(x)$ у точці x_0:

24. $f(x)=(tgx-x)\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

25. $f(x)=3x-2e^x$, $x_0=\ln 2$.

26**.** $f(x)=4\arcsin x-5tgx$, $x_0=0$.

Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=f(x)$ в точці (x_0,y_0) (або у точці, яка відповідає параметру t_0):

27. $y=x^3-3x^2+5x-6$, $x_0=-1$.

28. $y=\ln(2e-x)$, $x_0=e$.

29. $x^5+y^5-2xy=0$, $(1,1)$.

30. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Обчислити кути, під якими перетинаються дані лінії:

31. $y=8-x^2$ та $y=x^2$. .

32. $y=x^3-x$ та $y=\dfrac{12}{x}$.

33. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ та $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Відповіді

1. x^4-9x^2+4. **2.** $6x^2+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{2}{3}x$. **3.** $-\dfrac{1}{a^2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$. **4.** $\dfrac{3a}{5\sqrt[5]{x^2}}+\dfrac{5b}{2x^3\sqrt{x}}$.

5. $\dfrac{b}{e^2}$. **6.** $-\dfrac{6x^2}{\sqrt[3]{\pi}}+\dfrac{2(5tg1-3)}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$. **7.** $-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

8. $\dfrac{a}{2x\sqrt{3x}}+\dfrac{3}{b\sqrt[4]{x}}$. **9.** $(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x^2})\cos x-(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2x})\sin x$. **10.** $7\cdot 3^x\ln 3-\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$.

11. $\dfrac{-21(1+x^2)}{(x^3+3x-1)^2}$. **12.** $4x+10\sqrt[3]{x^2}$. **13.** $e^x(\dfrac{1}{x}-ctgx)+(e^x+3)(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sin^2 x})$.

14. $\dfrac{-2\sin 2x-3\sin^2 x-3}{(4+3tgx)^2\cos x}$. **15.** $7^x\ln 7-\dfrac{3\arccos x}{x^4}-\dfrac{1}{x^3\sqrt{1-x^2}}$.

16. $(\frac{1}{5})^x \ln\frac{1}{5} - (\frac{1}{2})^x \ln\frac{1}{2}$. **17.** $3x^2\cos x - (5 + x^3)\sin x + 4ctgx - \frac{4x}{\sin^2 x}$.

18. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$. **19.** $\frac{\sin e}{x} - \frac{1}{x^2}$.

20. $\frac{(3^x\ln 3 - \sin x)(x^3 + \ln x) - (3^x + \cos x)(3x^2 + \frac{1}{x})}{(x^3 + \ln x)^2}$.

21. $\frac{-\frac{1}{x}(x^2 + 2x - 1) - (3 - \ln x)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 1)^2}$. **22.** $\frac{\frac{x^3 + \ln x}{1 + x^2} - (3x^2 + \frac{1}{x})arctgx}{(x^3 + \ln x)^2}$.

23. $\frac{(3\sqrt{x} + 2e^x)(x - e) - 2(x\sqrt{x} + e^x)}{2(x - e)^2}$. **24.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$. **25.** (-1). **26.** (-1).

27. $14x - y - 1 = 0, \quad x + 14y + 211 = 0$. **28.** $x + ey - 2e = 0, \quad ex - y + 1 - e^2 = 0$.

29. $x + y - 2 = 0, \quad x - y = 0$. **30.** $x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0, \quad x + y - \frac{\pi}{2} = 0$.

31. $arctg\frac{8}{15}$. **32.** $arctg\frac{7}{16}$. **33.** $arctg\frac{175}{288}$.

Заняття 12. Похідні складеної, неявно заданої, параметрично заданої та степенево-показникової функцій. Похідні вищих порядків. Диференціал функції

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається складеною функцією?

2. За якою формулою обчислюється похідна складеної функції?

3. Яка функція називається неявно заданою та як обчислюється від такої функції похідна?

4. Яка функція називається задана параметрично та за якою формулою обчислюється похідна від неї?

5. Як знайти похідну третього порядку від функції $f(x)$?

6. Що називається диференціалом функції $f(x)$?

7. За якою формулою обчислюється диференціал функції $f(x)$?

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Нехай дана складена функція $y = f(u(x))$, тоді похідна обчислюється за формулою $y'_x = f'_u u'_x$. Отже, похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на похідну проміжного аргументу по кінцевому аргументу. Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів.

Якщо, наприклад, $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \phi(x)$, то $y'_x = f'_u u'_v v'_x$.

Зазначимо, що при диференціюванні складеної функції потрібно чітко уявляти собі, яка з дій, що приводить до значення складеної функції, є останньою. Та величина, над якою виконується остання дія, приймається за проміжний аргумент.

Наприклад, для функції $y = \sin^3 x$ останньою дією є піднесення до кубу, тому проміжний аргумент $u = \sin x$ і $y = u^3$.

Знайти похідні складених функцій:

1. $y = e^{\sin x}$. **2.** $y = (5x^2 - 3x + 1)^2$. **3.** $y = \ln(x^2 + 5\sqrt{x} - 3)$.

4. $y = \cos(x^3 - \dfrac{3}{x})$. **5.** $y = \ln(1 + \sin x)$. **6.** $y = \arcsin\sqrt[3]{x}$.

7. $y = \ln\sin(x^3 + 2)$. **8.** $y = arctg\, e^{\sin 3x}$. **9.** $y = \ln\ln\ln\dfrac{1}{x}$.

10. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$. **11.** $y = 3^{tgx}\cos^2 x$. **12.** $y = 7^{ctg\sqrt{x}}\sin^2\sqrt{x}$.

13. $y = \arccos\sqrt{1-x^2} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$. **14.** $y = \sin\cos^2 tg^3 x^4 + 10^{\frac{x}{2\pi}}$.

Розв'язання. **1.** Функція $y = e^{\sin x}$ – складена, вона може бути подана у вигляді $y = e^u$, де $u = \sin x$. Застосуємо формулу похідної від складеної функції $y'_x = f'_u u'_x$. Знайдемо $y'_u = e^u$, $u'_x = \cos x$. Отже,

$$y'_x = (e^u)'_u (\sin x)'_x = e^u \cos x = e^{\sin x}\cos x.$$

2. Нехай $y = u^2$, де $u = 5x^2 - 3x + 1$, тоді $y'_u = 2u$, $u'_x = 10x - 3$. Звідси

$$y'_x = 2u(10x-3) = 2(5x^2 - 3x + 1)(10x - 3).$$

3. Вважаючи, що $y = \ln u$, де $u = x^2 + 5\sqrt{x} - 3$, маємо $y'_u = \dfrac{1}{u}$, $u'_x = 2x + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$. Таким чином, $y'_x = \dfrac{1}{u}(2x + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}) = \dfrac{1}{x^2 + 5\sqrt{x} - 3}(2x + \dfrac{5}{2\sqrt{x}})$.

4. Функція складена, знайдемо $y'_u = (\cos u)'_u = -\sin u$ та $u'_x = (x^3 - \dfrac{3}{x})'_x = 3x^2 + \dfrac{3}{x^2}$ і, використовуючи правило диференціювання складеної функції ($y'_x = f'_u u'_x$), одержимо $y'_x = -\sin(x^3 - \dfrac{3}{x})(3x^2 + \dfrac{3}{x^2})$.

5. $y = \ln(1 + \sin x)$ – складена функція, вона може бути подана у вигляді $y = \ln u$, де $u = 1 + \sin x$, тоді $y'_u = \dfrac{1}{u}$, $u'_x = \cos x$. Тому

$$y'_x = \frac{1}{u}\cos x = \frac{1}{1 + \sin x}\cos x.$$

6. Функцію $y = \arcsin\sqrt[3]{x}$ записуємо у вигляді $y = \arcsin u$, $u = \sqrt[3]{x}$, тоді

$$y'_x = f'_u u'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt[3]{x})^2}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}}.$$

Складена функція може мати декілька проміжних аргументів.

7. У цьому прикладі функція $y = \ln\sin(x^3 + 2)$ має два проміжних аргументи $y = \ln u$, $u = \sin v$, $v = x^3 + 2$. Тому

$$y'_x = (\ln u)'_u (\sin v)'_v (v)'_x = \frac{1}{u}\cos v \cdot 3x^2 = \frac{1}{\sin v}\cos(x^3 + 2)\cdot 3x^2 = \frac{3x^2\cos(x^3+2)}{\sin(x^3+2)}.$$

8. Аналогічно попередньому прикладу для функції $y = arctg\, e^{\sin 3x}$ маємо $y = arctg\, u$, $u = e^{\sin 3x}$, $v = \sin 3x$, $w = 3x$. В такому разі

$$y'_x = (arctgu)'_u (e^v)'_v (\sin w)'_w (3x)'_x = \frac{1}{1+u^2} e^v \cos w \cdot 3 = \frac{3e^v \cos w}{1+u^2} = \frac{3e^{\sin 3x} \cos 3x}{1+e^{2\sin 3x}}.$$

На практиці проміжні аргументи не виписують, але похідні від них позначають штрихом.

9. Для функції $y = \ln\ln\ln\frac{1}{x}$ похідну можна записати так:

$$y'_x = \frac{1}{\ln\ln\frac{1}{x}}(\ln\ln\frac{1}{x})' = \frac{1}{\ln\ln\frac{1}{x}}\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}(\ln\frac{1}{x})' = \frac{1}{\ln\ln\frac{1}{x}}\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\frac{1}{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x\ln\ln\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}.$$

При достатній підготовці похідну знаходять зразу, не вводячи допоміжних позначень для похідних від проміжних аргументів.

10. $y'_x = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}))$.

11. У цьому прикладі маємо добуток двох складених функцій $y_1 = 3^{tgx}$ та $y_2 = \cos^2 x$, тому

$$y' = (3^{tgx})'\cos^2 x + 3^{tgx}(\cos^2 x)' = 3^{tgx}\ln 3(tgx)'\cos^2 x + 3^{tgx}2\cos x(\cos x)' = .$$

$$= 3^{tgx}\ln 3\frac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x + 3^{tgx}2\cos x(-\sin x) = 3^{tgx}(\ln 3 - \sin 2x).$$

12. $y'_x = 7^{ctg\sqrt{x}}\ln 7(-\frac{1}{\sin^2\sqrt{x}})\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin^2\sqrt{x} + 7^{ctgx}\cdot 2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = .$

$$= \frac{7^{ctg\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\sin 2\sqrt{x} - \ln 7).$$

13. $y'_x = (\arccos\sqrt{1-x^2})' - (\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) -$

$$-\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1} - \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2x}{x^2-1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2(1-\ln x)-1}{x(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

14. $y'_x = (\sin\cos^2 tg^3 x^4)' + (10^{\frac{x}{2\pi}})' =$

$$= \cos\cos^2 tg^3 x^4 \cdot 2\cos tg^3 x^4 \cdot (-\sin tg^3 x^4)\cdot 3tg^2 x^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4}\cdot 4x^3 + 10^{\frac{x}{2\pi}}\ln 10\cdot\frac{1}{2\pi} =$$

$$= \frac{\ln 10}{2\pi}10^{\frac{x}{2\pi}} - \frac{12x^3}{\cos^2 x^4}\cos(\cos^2 tg^3 x^4)\sin(2tg^3 x^4)tg^2 x^4.$$

Знайти похідні неявно заданих функцій:

15. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$. **16.** $y^3 - tgy + \cos x - x^3 = 0$.

Розв'язання. **15.** Функція неявно задана, тому візьмемо похідні по x обох частин даного рівняння, вважаючи, що y є функцією від x. Потім отримане рівняння розв'яжемо відносно похідної y':

$$2x + 2yy' - 2 + 6y' = 0 \;\Rightarrow\; yy' + 3y' = 1 - x \;\Rightarrow\; y'(y+3) = 1 - x \;\Rightarrow\; y' = \frac{1-x}{y+3}.$$

16. Диференціюючи обидві частини рівності по x, вважаючи y функцією від x, дістанемо

$$3y^2 y' - \frac{1}{\cos^2 y} y' - \sin x - 3x^2 = 0,$$

звідси $\quad (3y^2 - \frac{1}{\cos^2 y})y' = \sin x + 3x^2 \;\Rightarrow\; y' = \frac{(\sin x + 3x^2)\cos^2 y}{3y^2 \cos^2 y - 1}.$

Приклад 17. Знайти похідну від функції $e^y + xy = e$. Обчислити y' в точці $(0;1)$.

Розв'язання. Диференціюючи по x, одержимо

$$e^y y' + y + xy' = 0,$$

звідси $\quad y' = -\frac{y}{e^y + x}$. а $\quad y'(0) = -\frac{1}{e}$.

Знайти похідні степенево-показникових функцій:

18. $y = x^x$, $(x > 0)$. **19.** $y = (x+1)^{ctgx}$.

20. $y = (1 + x^2)^{arctg^2 x}$. **21.** $y = (\sin 5x)^{x^3 - 4}$.

Розв'язання. **18.** Спочатку логарифмуємо дану функцію (за основою e)

$$\ln y = x \ln x.$$

Тепер диференціюємо обидві частини рівності. Похідну від лівої частини рівняння знаходимо за правилом диференціювання складеної функції, а від правої – за правилом диференціювання добутку:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln x + x(\ln x)'$$

або

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x},$$

звідси

$$y' = y(\ln x + 1)$$

або

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

19. *Функція* $y=(x+1)^{ctgx}$ – степенево-показникова. Похідну такої функції можна знайти, користуючись методом логарифмічного диференціювання. Логарифмуючи обидві частини рівності, маємо $\ln y = ctgx\ln(x+1)$. Диференціюючи отриману неявно задану функцію, дістанемо $\frac{1}{y}y'=-\frac{\ln(x+1)}{\sin^2 x}+\frac{ctgx}{x+1}$, звідси $y'=(\frac{ctgx}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{\sin^2 x})(x+1)^{ctgx}$.

20. На відміну від розв'язання прикладів 18, 19, використаємо кінцеву формулу логарифмічного диференціювання $(u^v)'=u^v\ln u\, v'+v\,u^{v-1}u'$.

Отже,
$$((1+x^2)^{arctg^2 x})'=(x^2+1)^{arctg^2 x}\ln(1+x^2)\frac{2arctgx}{1+x^2}+$$
$$+2x\,arctg^2 x(1+x^2)^{arctg^2 x-1}.$$

Остаточно, $y'=2arctgx(\ln(1+x^2)+xarctgx)(x^2+1)^{arctg^2 x-1}$.

21. Використовуючи логарифмічне диференціювання, послідовно знаходимо:
$$\ln y=(x^3-4)\ln(\sin 5x);$$
$$\frac{y'}{y}=3x^2\ln(\sin 5x)+(x^3-4)\frac{1}{\sin 5x}\cos 5x\cdot 5;$$
$$y'=3x^2(\sin 5x)^{x^3-4}\ln\sin 5x+5(x^3-4)(\sin 5x)^{x^3-5}\cos 5x.$$

Якщо функція y от незалежної змінної x задана шляхом допоміжної змінної (параметра t) $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, тоді похідна від y по x визначається формулою $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ або $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

Знайти похідні параметрично заданих функцій:

22. $\begin{cases}x=2t+3t^2,\\ y=t^2+2t^3.\end{cases}$ **23.** $\begin{cases}x=\ln\sin\frac{t}{2},\\ y=\ln\sin t.\end{cases}$ **24.** $\begin{cases}x=3^{tgt},\\ y=\frac{\ln 3}{\cos t}.\end{cases}$

Розв'язання. **22.** Знаходимо похідні від x та y по параметру t
$$y'_t=2t+6t^2; \qquad x'_t=2+6t.$$

Шукана похідна від y по x знаходиться як відношення похідних від y та x по t: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2t+6t^2}{2+6t}$.

Остаточно, $y'_x=t$.

23. Знаходимо похідні від y та x по параметру t, а потім обчислюємо y'_x як відношення похідних y'_t та x'_t:

$$x'_t=\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}=\frac{cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}};\qquad y'_t=\frac{\cos t}{\sin t};$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2\cos t\sin\frac{t}{2}}{\sin t\cos\frac{t}{2}}=\frac{2\cos t\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\frac{\cos t}{\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}=1-tg^2\frac{t}{2}.$$

24. $x'_t=3^{tgt}\ln 3\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}$, $\qquad y'_t=\ln 3(-1)\cos^{-2}t(-\sin t)=\dfrac{\ln 3\,\sin t}{cos^2 t}$.

$$y'_x=\frac{\ln 3\,\sin t\cos^2 t}{3^{tgx}\ln 3\,\cos^2 t}=\frac{\sin t}{3^{tgt}}=3^{-tgt}\sin t.$$

Дференціал функції дорівнює добутку похідної на диференціал незалежної змінної ($dy=y'\,dx$).

Знайти диференціали функцій:

25. $y=\dfrac{\pi}{x}$. $\qquad$ **26.** $y=\ln\sin 3^{tg\sqrt[5]{x^4}}$. $\qquad$ **27.** $y=arctg\sqrt{x^2-1}$.

Розв'язання. **25.** Знаходимо похідну даної функції, помноживши її на диференціал незалежної змінної, отримаємо шуканий диференціал даної функції:

$$y'=-\frac{\pi}{x^2};\qquad dy=y'\,dx=-\frac{\pi}{x^2}dx.$$

26. $$dy=y'\,dx=\frac{1}{\sin 3^{tg\sqrt[5]{x^4}}}\cos 3^{tg\sqrt[5]{x^4}}\cdot 3^{tg\sqrt[5]{x^4}}\ln 3\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt[5]{x^4}}\cdot\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}dx=$$

$$=\frac{4\ln 3}{5\sqrt[5]{x}\cos^2\sqrt[5]{x^4}}3^{tg\sqrt[5]{x^4}}ctg3^{tg\sqrt[5]{x^4}}dx.$$

27. $$dy=y'\,dx=\left(\frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Знайти похідні третього порядку:

28. $y=x^3+\sin 2x$. $\qquad$ **29.** $y=\ln\cos x$.

30. $y=\sin^2 x$. $\qquad$ **31.** $y=x\,e^{-x}$.

Розв'язання. **28.** Похідна третього порядку – це похідна від похідної другого порядку, тому, щоб знайти y''', треба знайти похідну першого порядку, а потім похідну другого порядку і вже від цієї похідної взяти ще раз похідну, яка і буде похідною третього порядку від даної функції.

Отже, $y' = 3x^2 + 2\cos 2x \;\Rightarrow\; y'' = 6x - 4\sin 2x \;\Rightarrow\; y''' = 6 - 8\cos 2x$.

29. Аналогічно попередньому прикладу маємо:

$$y' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -tgx \;\;\Rightarrow\;\; y'' = -\frac{1}{\cos^2 x} \;\;\Rightarrow\;\; y''' = -2\frac{\sin x}{\cos^3 x}.$$

30. $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x \;\Rightarrow\; y'' = 2\cos 2x \;\Rightarrow\; y''' = -4\sin 2x$.

31. $y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} \;\Rightarrow\; y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\;\; y''' = e^{-x} - (x-2)e^{-x} = (3-x)e^{-x}.$$

Помічаємо, що треба спростовувати вирази попередніх похідних, щоб легше було знаходити наступні.

Знайти похідні другого порядку параметрично заданих функцій:

32. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ **33.** $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$

Розв'язання. **32.** Якщо функція задана параметрично, то похідні від y по x визначаються формулами: $y'_x = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, $y''_{xx} = \dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, $y'''_{xxx} = \dfrac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, …

Похідну другого порядку від параметрично заданої функції можна обчислювати за готовою формулою

$$y''_{xx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3},$$

де $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$.

Знайдемо першу похідну за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$: $y'_x = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$. Для знаходження другої похідної використаємо формулу $y''_{xx} = (y'_x)'_t \dfrac{1}{x'_t}$ і отримаємо

$$y''_{xx} = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin t \sin t}{(1-\cos t)^2} \cdot \frac{1}{1-\cos t} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

33. $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$; $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{1}{t^2}$; $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = 3t^2$; $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = 6t$.

$$y''_{xx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3} = \frac{6t\frac{1}{t} - 3t^2(-\frac{1}{t^2})}{(\frac{1}{t})^3} = 9t^3.$$

Знайти диференціали другого порядку функцій:

34. $y = \sin 5x + 3x^4$. **35.** $y = \cos x^3$. **36.** $y = 2x + tg 2x$.

Якщо функція $y = f(x)$, де x – незалежна змінна диференційовна на деякому проміжку, то її диференціали можна знайти за формулами:

$$dy = f'(x)dx, \quad d^2y = f''(x)dx^2, \quad d^3y = f'''(x)dx^3, \quad \ldots, \quad d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Розв'язання. **34.** Знаходимо другу похідну даної функції та, помноживши її на dx^2, отримаємо:

$$y' = 5\cos 5x + 12x^3; \quad y'' = -25\sin 5x + 36x^2;$$

$$d^2y = (-25\sin 5x + 36x^2)dx^2.$$

35. Шукаємо другу похідну, множимо її на dx^2, дістанемо другий диференціал.

$$y' = -\sin x^3 \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin x^3:$$

$$y'' = -3x(2\sin x^3 + 3x^3 \cos x^3):$$

$$d^2y = -3x(2\sin x^3 + 3x^3 \cos x^3)dx^2.$$

36. $y' = 2 + \dfrac{2}{\cos^2 x}$: $y'' = \dfrac{4\sin x}{\cos^3 x}$: $d^2y = \dfrac{4\sin x}{\cos^3 x}dx^2$.

Домашнє завдання

Знайти похідні складених функцій:

1. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$. **2.** $y = \ln ctg^2(\sqrt[5]{x^3} + 2)$. **3.** $y = e^{tgx}\cos^3 x$.

4. $y = (e^{arctg\sqrt[3]{x}} + 1)^3$. **5.** $y = (\arccos\sqrt{1 - 4x^2} + 1)^2$.

6. $y = (\frac{a}{b})^x (\frac{b}{x})^a (\frac{x}{a})^b$. **7.** $y = \ln\sqrt{1 + e^{2x}} + e^{-\pi} arcctg e^{x^2}$.

Знайти похідні неявно заданих функцій:

8. $2x - 3y + 1 = 0$. **9.** $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$.

10. $tgy - xy = 0$. **11.** $x^2 y + arctg\dfrac{x}{y} = 5x$.

Знайти похідні степенево-показникових функцій:

12. $y = (1 - x^2)^{\arccos\sqrt{x}}$. **13.** $y = (\cos x)^{\sin x}$.

14. $y = (\sin x)^{\ln x}$. **15.** $y = (arctgx)^{\arcsin^2 x}$.

Знайти похідні параметрично заданих функцій:

16. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$. **17.** $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}e^t, \\ y = (t-1)^2 e^t \end{cases}$. **18.** $\begin{cases} x = arcctg\dfrac{t}{4}, \\ y = \ln(t^2 + 16). \end{cases}$

Обчислити похідні $\dfrac{dy}{dx}$ при $t = t_0$, якщо функції $y(x)$ задані параметрично:

19. $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}, \end{cases}$ $t_0 = 1$. **20.** $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Знайти диференціали:

21. $d(xe^x)$. **22.** $d(\sqrt{a^2 - x^2})$. **23.** $d(\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}})$.

24. Функція $S(x)$ − це площа квадрата зі стороною x. Знайти приріст функції ΔS та її диференціал dS, що відповідають приросту Δx сторони x.

а) $\Delta S = (\Delta x)^2$, $dS = x^2 dx$; **б)** $\Delta S = 2x\Delta x$, $dS = xdx$;

в) $\Delta S = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, $dS = 2xdx$; **г)** $\Delta S = (x + \Delta x)^2$, $dS = xdx$.

25. Серед наведених функцій вказати ті, для яких у точці $x_0 = 0$ виконується рівність $dy = dx$.

а) $y = tgx$; **б)** $y = e^x$; **в)** $y = \sin x$; **г)** $y = \sqrt{x}$;

д) $y = \ln x$; **е)** $y = 2^{x+1}$; **ж)** $y = \cos x$; **и)** $y = \arcsin x$.

26. Яка з формул дає змогу обчислити диференціал функції однієї змінної n-го порядку?

а) $d^2 y = f^n(x)dx^2$. **б)** $d^n y = f^n(x)dx^2$.

в) $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$. **г)** $d^n y = f^n(x)dx$.

Знайти похідні другого порядку параметрично заданих функцій:

27. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^3}. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} x = 2^{\cos^2 t}, \\ y = 2^{\sin^2 t}. \end{cases}$

Знайти диференціали другого порядку функцій:

29. $y = (x^2 + 1)3^{-x}$. **30.** $y = xe^{-3x}$. **31.** $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$.

Відповіді

1. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. **2.** $\dfrac{12}{5\sqrt[5]{x^2}\sin(2\sqrt[5]{x^3} + 4)}$. **3.** $e^{tgx}(1 - \dfrac{3}{2}\sin 2x)\cos x$.

4. $\dfrac{(e^{arctg\sqrt[3]{x}} + 1)^2 e^{arctg\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}(1 + \sqrt[3]{x^2})}$. **5.** $\dfrac{4(\arccos\sqrt{1-4x^2} + 1)}{\sqrt{1-4x^2}}$.

6. $(\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x})$. **7.** $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-\frac{2xe^{x^2-\pi}}{1+e^{2x^2}}$.

8. $\frac{2}{3}$. **9.** $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$. **10.** $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **11.** $\frac{(5-2xy)(y^2+x^2)-y}{x^2(y^2+x^2)-x}$.

12. $(-\frac{\ln(1-x^2)}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}-\frac{2x\arccos\sqrt{x}}{1-x^2})(1-x^2)^{\arccos\sqrt{x}}$.

13. $(\cos x\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x})(\cos x)^{\sin x}$.

14. $(\sin x)^{\ln x}(\frac{\ln\sin x}{x}-\ln x\,ctgx)$.

15. $(arctgx)^{\arcsin^2 x}\ln arctgx\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin^2 x}{1+x^2}(arctgx)^{\arcsin^2 x-1}$.

16. $-tgt$. **17.** $t^2(t+1)$. **18.** $-\frac{t}{2}$. **19.** 1. **20.** $2+\sqrt{3}$.

21. $e^x(1+x)dx$. **22.** $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$. **23.** $\frac{3-2\ln x}{3x\sqrt[3]{x^2}}dx$.

24. в). **25.** а), б), в), и). **26.** в). **27.** $\frac{6(1+t^3)^3}{t(2-t)^3}$. **28.** $2^{2-3\cos^2 t}$.

29. $3^{-x}(2-4x\ln 3+(x^2+1)\ln^2 3)dx^2$. **30.** $3e^{-3x}(3x-2)dx^2$.

31. $\frac{-2\sin\ln x}{x}dx^2$.

Заняття 13. Застосування диференціального числення для дослідження функцій. Побудова графіка функції

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Сформулювати правило Лопіталя.

2. Як розкрити невизначеність $\{0\cdot\infty\}$ за правилом Лопіталя?

3. Сформулювати умови зростання (спаду) функції на проміжку.

4. Сформулювати необхідні умови існування екстремуму функції.

5. Сформулювати достатні умови існування екстремуму функції.

6. Які дії треба виконати, щоб знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$, де вона неперервна?

7. Чим характеризується напрям опуклості функції $y=f(x)$ в даному проміжку?

8. Що називається асимптотою кривої?

9. За якими формулами обчислюються величини k та b, якщо рівняння похилої асимптоти має вигляд $y=kx+b$?

10. Сформулювати загальну схему дослідження та побудови графіка функції.

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Знайти границі за правилом Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. **6.** $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

Розв'язання. **1.** У цьому прикладі маємо невизначеність типу $\{\frac{0}{0}\}$. За правилом Лопіталя (якщо частка $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ у точці x_0 являє собою невизначеність $\{\frac{0}{0}\}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$), отримаємо

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 4}\frac{2x}{2x-5}=\frac{8}{3}.$$

2. Маємо невизначеність типу $\{\frac{0}{0}\}$. Застосовуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\{\frac{0}{0}\}$$

і знову дістанемо невизначеність $\{\frac{0}{0}\}$. Отже, тут треба знову застосувати правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

Правило Лопіталя, якщо це потрібно, можна застосовувати декілька разів.

$$\textbf{3. }\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-6+6\cos x}{5x^4}=\{\frac{0}{0}\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-6\sin x}{20x^3}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos x}{60x^2}=\{\frac{0}{0}\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x}{120x}=\{\frac{0}{0}\}=\frac{6}{120}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{20}.$$

Тут правило Лопіталя застосували чотири рази.

4. Невизначеність типу $\{\frac{\infty}{\infty}\}$. В такому разі теж застосовують правило Лопіталя (якщо частка $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ у точці x_0 являє собою невизначеність $\{\frac{\infty}{\infty}\}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$).

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\{\frac{\infty}{\infty}\}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0.$$

5. У даному прикладі маємо невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$. Спочатку таку невизначеність зводять до невизначеності типу $\{\frac{0}{0}\}$ або $\{\frac{\infty}{\infty}\}$, а потім застосовують правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\{\frac{0}{0}\}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

Так само діють і при невизначеності типу $\{0\cdot\infty\}$.

6. Щоб розкрити невизначеності типу $\{0^0\}, \{\infty^0\}, \{1^\infty\}$, треба враховувати, що логарифм від таких функцій набуває невизначеності типу $\{0\cdot\infty\}$. Розкриємо цю невизначеність, знайдемо границю логарифма функції, звідси дістанемо і границю самої функції.

Покладемо $y = x^x$ та прологарифмуємо обидві частини цієї рівності, дістанемо

$\ln y = x\ln x \Rightarrow y = e^{x\ln x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} y = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x}$. Залишається знайти $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x} = -\lim_{x\to 0} x = 0. \text{ Отже, } \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1.$$

Приклад 7. Знайти екстремуми та проміжки монотонності функції $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$.

Розв'язання. Знаходимо першу похідну $y' = 6x^2 - 18x + 12$. Розв'язуємо рівняння $y' = 0$, тобто рівняння $6x^2 - 18x + 12 = 0$, і визначаємо критичні точки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Досліджуємо знак похідної в околі кожної з критичних точок, для цього розбиваємо область визначення (числову вісь) на інтервали $(-\infty;1)$, $(1;2)$, $(2;\infty)$, вибираємо всередині кожного з цих інтервалів довільну точку і визначаємо в ній знак першої похідної. Так, у першому інтервалі беремо точку $x = 0$, у другому – $x = 3/2$, у третьому – $x = 3$. Відповідно маємо: $y'(0) > 0$, $y'(\frac{3}{2}) < 0$,

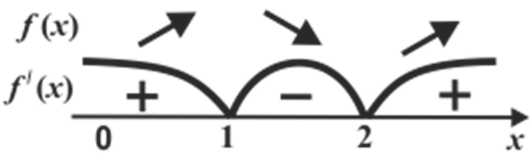


Рис. 13

$y'(3) > 0$ $y'(3) > 0$ (рис. 13). Таким чином, згідно з першою достатньою умовою існування екстремуму функції маємо: у критичній точці $x = 1$ функція має максимум, а у критичній точці $x = 2$ – мінімум. Екстремальні значення функції будуть такі: $y_{\max}(1) = -3$, $y_{\min}(2) = -4$. Дана функція зростає в інтервалах $(-\infty;1)$ і $(2;\infty)$ та спадає в інтервалі $(1;2)$.

Приклад 8. Знайти екстремуми функції $f(x) = xe^{-2x}$.

Розв'язання. Функція визначена та диференційована при $x \in R$. Щоб знайти критичні точки, шукаємо першу похідну цієї функції $f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$ та прирівнюємо її до нуля $e^{-2x}(1-2x) = 0$. Розв'язуємо останнє рівняння. Враховуючи, що завжди $e^{-2x} \neq 0$, маємо $1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$. Отже, критичною буде точка $x = 1/2$. Застосуємо другу достатню умову існування екстремуму функції. Знайдемо другу похідну $f''(x) = 4e^{-2x}(x-1)$ і визначаємо її знак у критичній точці: $f''(1/2) = -2/e < 0$. З того, що друга похідна від'ємна, випливає наявність максимуму функції в точці $x = 1/2$, причому $f_{\max}(1/2) = 1/2e$.

Приклад 9. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=x^3+3x^2-72x+90$ на відрізку $[-5;5]$.

Розв'язання. Знаходимо критичні точки, що належать даному відрізку. Перша похідна $f'(x)=3x^2+6x-72$. Корені рівняння $3x^2+6x-72=0$ – це точки $x_1=4$ та $x_2=-6$, але $x_2\notin[-5;5]$. Обчислюємо значення функції в критичній точці $x_1=4$ і на кінцях відрізка $[-5;5]$: $f(4)=-86$; $f(5)=-70$; $f(-5)=400$. З отриманих значень функції вибираємо найбільше та найменше. На даному відрізку найбільше значення функції $f_{найб}(-5)=400$, а найменше − $f_{найм}(4)=-86$.

Приклад 10. Знайти інтервали опуклості та вгнутості кривої $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, а також її точки перегину.

Розв'язання. Напрям опуклості та точки перегину кривої визначаються за допомогою другої похідної. Отже, знаходимо першу, а потім другу похідні $f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; $f''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$. Точками перегину можуть бути критичні точки другого роду, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує. Отже, прирівняємо другу похідну до нуля $f''(x)=0$, корені цього рівняння $x=\pm\,{}^{1}\!\!/\!{}_{\sqrt{3}}$ будуть критичними точками (точок, у яких $f''(x)$ не існує, немає). Визначаємо знаки другої похідної в околі знайдених точок $x_1={}^{1}\!\!/\!{}_{\sqrt{3}}$, $x_2=-\,{}^{1}\!\!/\!{}_{\sqrt{3}}$. $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;-\,{}^{1}\!\!/\!{}_{\sqrt{3}})\cup({}^{1}\!\!/\!{}_{\sqrt{3}};+\infty)$. Отже, на цих інтервалах графік функції вгнутий. Оскільки $f''(x)<0$ при $x\in(-\,{}^{1}\!\!/\!{}_{\sqrt{3}};{}^{1}\!\!/\!{}_{\sqrt{3}})$, то на цьому інтервалі графік опуклий (рис. 14). Точками перегину будуть точки, які відділяють опуклу частину кривої від вгнутої і навпаки. Отже, $x=\pm\,{}^{1}\!\!/\!{}_{\sqrt{3}}$ − це абсциси точок перегину, причому $f(\pm\,{}^{1}\!\!/\!{}_{\sqrt{3}})=\dfrac{3}{4}$.

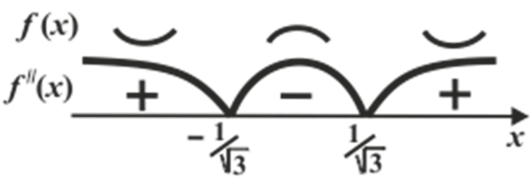


Рис. 14

Приклад 11. Знайти асимптоти графіка функції $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ Точка $x=1$ − точка розриву другого роду, бо $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2-2x}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^2-2x}{x-1}=-\infty$.

Отже, графік функції має вертикальну асимптоту $x=1$.

Шукаємо рівняння похилої асимптоти у вигляді $y=kx+b$, де

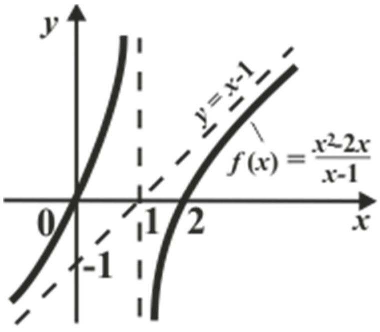


Рис. 15

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x(x-1)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-2x}{x-1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=-1.$$

Пряма $y=x-1$ − похила асимптота графіка функції, і графічно при $x\to\infty$ графік даної функції неухильно зближується з цією прямою (рис. 15).

Приклад 12. Дослідити та побудувати графік функції $f(x)=\frac{x^3-4}{(x-1)^3}$.

Розв'язання. Дослідження функції та побудова її графіка виконується за певною схемою, якої будемо дотримуватися.

1. Область визначення $(-\infty;1)\bigcup(1;\infty)$.

2. Функція загального вигляду (неперіодична, немає симетрії щодо осей координат).

3. Графік функції перетинає вісь абсцис у точці $(\sqrt[3]{4};0)$, а вісь ординат – у точці $(0;4)$.

4. Визначаємо неперервність та асимптоти графіка. Функція елементарна і тому неперервна в області визначення. Точка $x=1$ не входить до області визначення, тому перевіряємо поводження функції в околі цієї точки. Обчислимо однобічні границі: $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x^3-4}{(x-1)^3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x^3-4}{(x-1)^3}=-\infty$.

Вони дорівнюють нескінченності, що означає: точка $x=1$ – точка розриву другого роду. Отже, пряма $x=1$ – вертикальна асимптота графіка функції.

Рівняння похилих та горизонтальних асимптот шукаємо у вигляді $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4}{x(x-1)^3}=0$; $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4}{(x-1)^3}=1$. Оскільки $k=0$, то крива немає похилої асимптоти. З того, що $b=1$, випливає наявність горизонтальної асимптоти, рівняння якої має вигляд $y=1$.

5. Визначаємо екстремуми функції та інтервали монотонності.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^3-(x^3-4)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=-3\frac{x^2-4}{(x-1)^4}.$$

Для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$, тобто $x^2-4=0$, звідси $x=\pm2$. У точці $x=1$ похідної не існує, проте це значення не розглядаємо, оскільки воно не належить області визначення. Перша похідна від'ємна при $x<-2$ та $x>2$ і додатна для $|x|<2$; $x\neq1$ (рис. 16). Отже, на проміжках $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$ функція спадає, а на проміжках $(-2;1)$ та $(1;2)$ –

зростає; $x=-2$ – точка мінімуму функції, $x=2$ – точка максимуму. Відповідні екстремальні значення функції : $f_{\max}(-2)=\dfrac{4}{9}$; $f_{\max}(2)=4$.

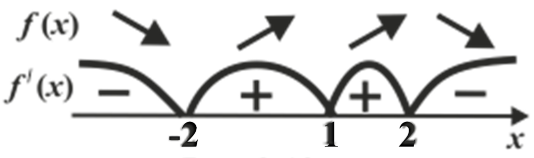


Рис. 16

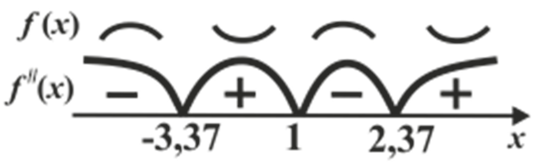


Рис. 17

6. Знаходимо точки перегину графіка функції та інтервали опуклості (вгнутості).

$$f''(x)=-3\frac{2x(x-1)^4-4(x^2-4)(x-1)^3}{(x-1)^8}=6\frac{x^2+x-8}{(x-1)^5}.$$

$f''(x)=0$, якщо $x^2+x-8=0$, або $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$ $\Rightarrow$ $x_1\approx-3{,}37$; $x_2\approx 2{,}37$.

Отже, $f''(x)=\dfrac{6(x+3{,}37)(x-2{,}37)}{(x-1)^5}$.

Друга похідна $f''(x)>0$, якщо $x\in(-3{,}37;1)\cup(2{,}37;\infty)$ (рис. 17). Тому в цих інтервалах графік функції вгнутий, а при $x\in(-\infty;-3{,}37)\cup(1;2{,}37)$ – опуклий, бо на цих інтервалах $f''(x)<0$. Зауважимо, що абсцисами точок перегину є лише $x_1=-3{,}37$ та $x_2=2{,}37$. При $x=1$ не може бути точки перегину, бо вона не входить в область визначення функції.

Використовуючи одержані відомості, проводимо асимптоти, наносимо всі знайдені точки та, враховуючи проміжки зростання, спаду, опуклості, вгнутості, будуємо графік функції (рис. 18).

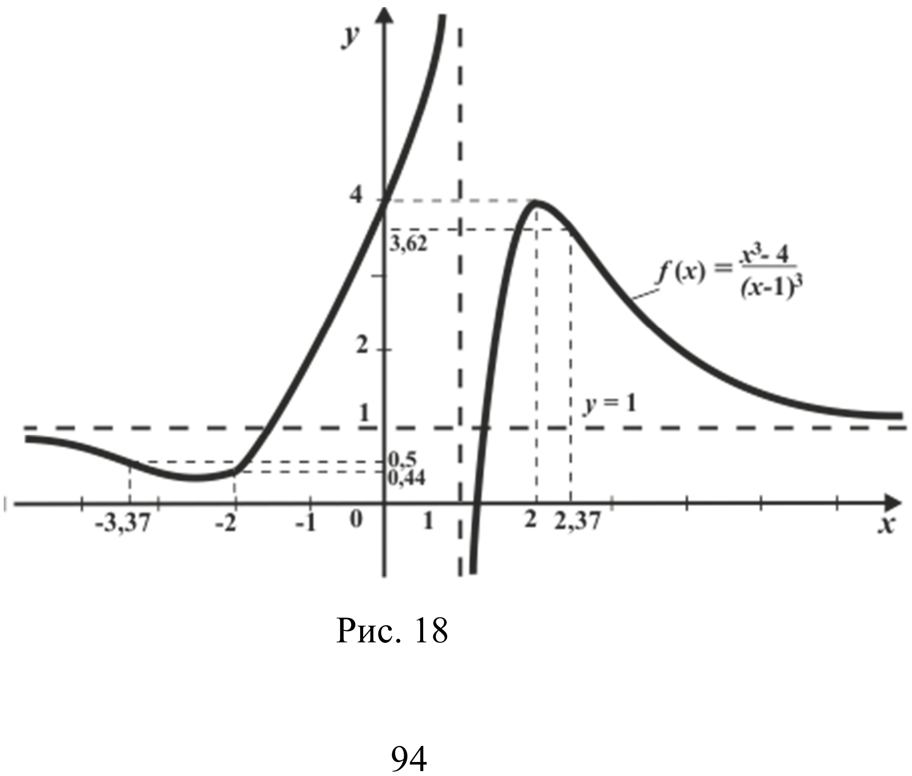


Рис. 18

Домашнє завдання

Знайти границі за правилом Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2+\ln(3-x)}{e^{x-1}-e}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot\ln tgx$. **4.** $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Визначити проміжки монотонності функції:

6. $y=x^2+x+1$. **7.** $y=3x-3x^2$.

Знайти екстремуми функцій:

8. $y=x^3-6x^2+9x-4$. **9.** $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+3$.

Знайти найменше та найбільше значення функцій:

10. $y=2x^3-3x^2-36x-8$ на проміжку $[-3;6]$.

11. $y=3x^4+4x^3+1$ на проміжку $[-2;1]$.

Знайти точки перегину та інтеграли опуклості (вгнутості) графіків функцій:

12. $y=x^4-6x^2+5$. **13.** $y=3x^4-8x^3+6x^2+12$.

Знайти асимптоти кривих:

14. $y=\dfrac{2x}{x-1}$. **15.** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+3}$.

Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

16. $y=\dfrac{2}{1-x^2}$. **17.** $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x$.

18. Серед наведених нижче функцій (рис. 19) вибрати ту, яка задовольняє всі умови теореми Ролля. Для інших функцій навести ту з умов теореми, яка не виконується.

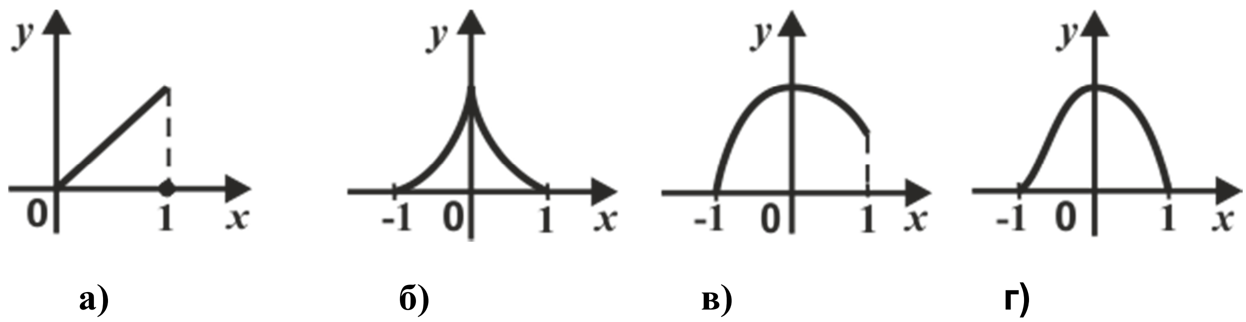
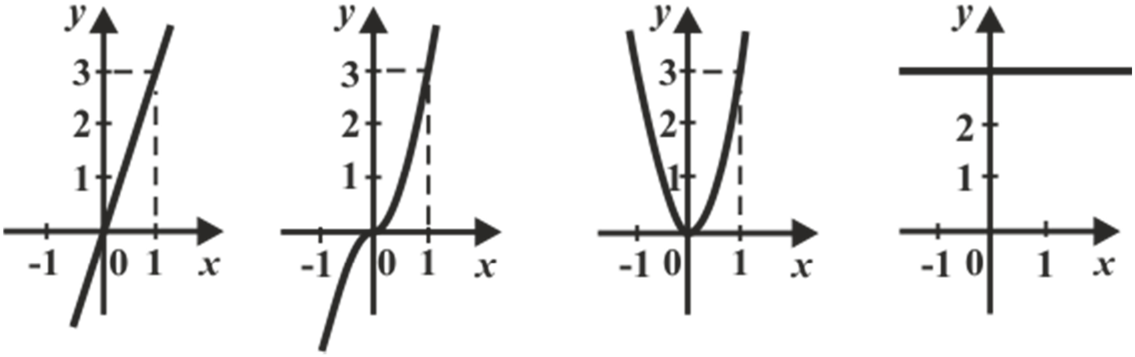


Рис. 19

19. Крива $y=x^2-4x$ сполучає точки $A(1,-3)$ і $B(4,0)$. На дузі AB знайти точку $M_0(x_0,y_0)$, у якій дотична паралельна хорді AB.

20. Як називається функція, якщо для $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$?

21. Який з графіків рис. 20 відповідає похідній функції $y = x^3$?



а) **б)** **в)** **г)**

Рис. 20

22. На рис. 21 наведено графік похідної $f'(x)$ функції $f(x)$. Чи буде ця функція мати екстремуми і якщо так, то визначити точки та характер екстремуму.

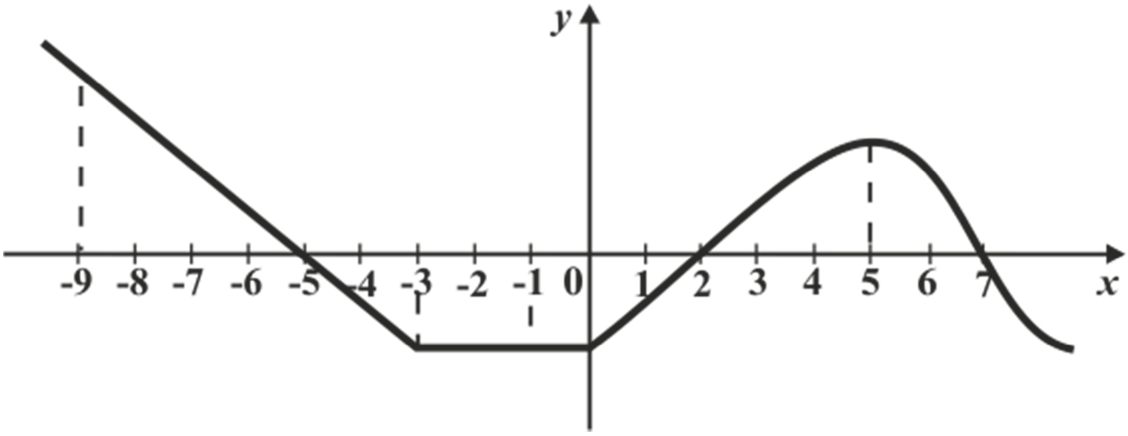


Рис. 21

а) $x = -9$ − точка максимуму;
б) $x = -5$ − точка максимуму;
в) $x = -3$ − точка мінімуму;
г) $x = -1$ − точка мінімуму;
д) $x = 0$ − точка мінімуму;
е) $x = 2$ − точка мінімуму;
ж) $x = 5$ − точка максимуму;
и) $x = 7$ − точка максимуму

23. Згідно з графіком функції $y = f(x)$ (рис. 22) визначити проміжки, у яких $f''(x) > 0$.

а) $(-\infty, -3]$; **б)** $[-3, -1]$;
в) $[-1, 0)$; **г)** $(0, 1]$;
д) $[1, \infty)$; **е)** $(1, 3]$;
ж) $(1, 5)$; **и)** $[3, 5)$.

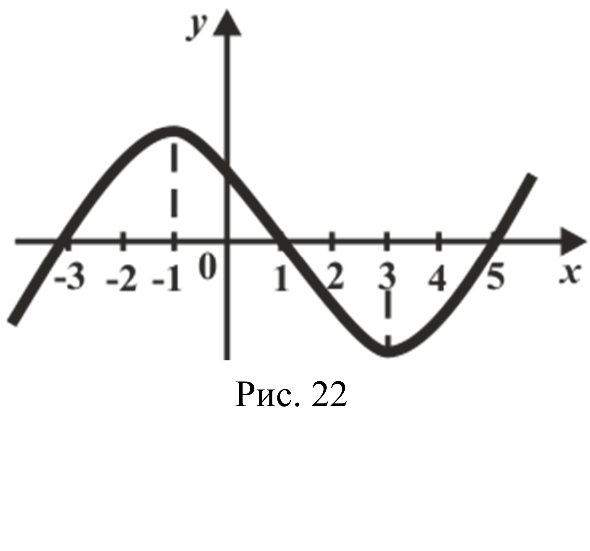


Рис. 22

24. Згідно з графіком другої похідної $f''(x)$ (рис. 23) визначити проміжки, на яких функція $f(x)$ вгнута.

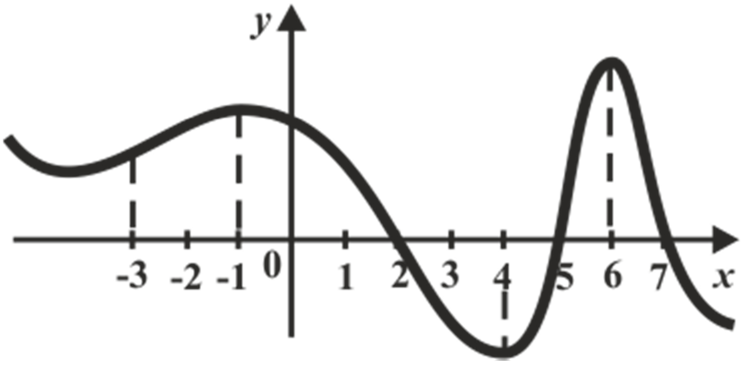


Рис. 23

а) $(-3,5)$; **б)** $(-1,4)$;
в) $(-\infty,2)$; **г)** $(7,+\infty)$;
д) $(5,7)$; **е)** $(2,7)$;
ж) $(4,6)$; **и)** $(0,4)$

Відповіді

1. $-\frac{1}{e}$. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** -1, **4.** 0. **5.** 1. **6.** На проміжку $(-\infty;-\frac{1}{2})$ функція спадає; а на $(-\frac{1}{2};\infty)$ – зростає. **7.** На проміжку $(-\infty;\frac{1}{2})$ функція зростає; а на $(\frac{1}{2};+\infty)$ – спадає. **8.** $y_{\min}(3)=-4$, $y_{\max}(1)=0$. **9.** $y_{\min}(-2)=-1$, $y_{\min}(2)=-1$, $y_{max}(0)=3$. **10.** $y_{найб}(6)=100$, $y_{найм}(3)=-89$. **11.** $y_{найб}(-2)=17$, $y_{найм}(-1)=0$.**12.** $(-1;1)$ – опуклість; $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$ – вгнутість; абсциси точок перегину $x_1=-1$, $x_2=1$. **13.** $(\frac{1}{3};1)$ – опуклість; $(-\infty;\frac{1}{3})$ та $(1;+\infty)$ – вгнутість; абсциси точок перегину $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$. **14.** $x=1$ – вертикальна асимптота; $y=2$ – горизонтальна асимптота. **15.** $x=-3$ – вертикальна асимптота; $y=x-5$ – похила асимптота. **18.** Умови теореми Ролля виконуються для функції варіанта г). Інші функції не задовольняють деякі умови теореми Ролля. У варіантах а) та в) функції мають різне значення в межових точках інтервалів ($f(0)\neq f(1)$, $f(-1)\neq f(1)$). У варіанті б) функція не має похідної в точці $x=0$. **19.** $M_0(\frac{5}{2};-\frac{15}{4})$. **20.** Спадає. **21.** в). **22.** б), е), и). **23.** ж). **24.** в), д).

Заняття 14. Диференціювання функцій багатьох змінних

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Дати означення функції багатьох змінних.

2. Що являє собою область визначення функції двох змінних $z = f(x, y)$?

3. Що називають границею функції $u = f(x; y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$?

4. Дати означення границі функції $u = f(M)$ в точці $M_0(a_1; a_2; \ldots; a_n)$.

5. Яку функцію $f(M)$ визначену в околі точки M_0 називають неперервною в точці M_0 та її околі?

6. Що називається похідною $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ функції $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$?

7. Скільки похідних першого порядку має функція $u = f(x; y; z)$?

8. Скільки похідних другого порядку має функція $u = f(x; y; z)$?

9. Що називається повним диференціалом першого порядку функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у точці M?

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$.

Розв'язання. Область визначення $D(f)$ знайдемо із системи нерівностей

$$\begin{cases} \ln(1 - x^2 - y^2) \neq 0; \\ 1 - x^2 - y^2 > 0; \\ 4x - y^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \neq 1; \\ x^2 + y^2 < 1; \\ y^2 \leq 4x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \neq 0; \\ x^2 + y^2 < 1; \\ y^2 \leq 4x. \end{cases}$$

Таким чином, $D(f) = \{x, y \in R : x^2 + y^2 < 1 \cap y^2 \leq 4x \cap x^2 + y^2 \neq 0\}$.

Зобразимо область визначення $D(f)$ на координатній площині xOy (рис. 24). Ця область відкрита. Точки, що лежать на параболі $y^2 = 4x$ та праворуч від неї у напрямі осі Ox, крім точки $(0;0)$, задовольняють нерівність $y^2 \leq 4x$. Точки, що лежать всередині одиничного кола, задовольняють нерівність $x^2 + y^2 < 1$.

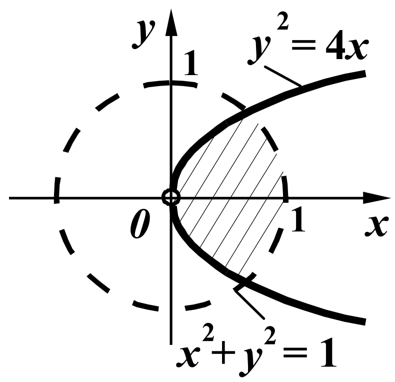


Рис. 24

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ та $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ для функції $f(x, y) = x + y \sin \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}(x+y\sin\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x-фікс}}(x+y\sin\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y-фікс}}(x+y\sin\frac{1}{x})$ не існує, тому що множник $\sin\frac{1}{x}$ не має границі при $x\to 0$ (у будь-якому малому околі точки $x=0$ функція $\sin\frac{1}{x}$ набуває всіх значень від -1 до 1).

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y\sin\frac{1}{x}) = 0.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+y)}{y}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+y)}{y} = \{y=kx\} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x+kx)}{kx} = \frac{\ln(1+k)}{k}$.

Таким чином, при русі довільної точки $M(x;y)$ по різних лініях (k набуває різних значень) дістали різні значення границі даної функції при $x\to 1$, $y\to 0$. Звідси випливає, що ця границя не існує.

Приклад 4. Знайти точки розриву функції $u=\frac{1-xyz}{2x+3y-z+4}$.

Розв'язання. Функцію $f(M)$, визначену в околі точки M_0, називають ***неперервною в точці*** M_0 та її околі, якщо $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$ (незалежно від способу прямування точки M до точки M_0).

Функція може бути розривною там, де вона невизначена. Функція $u=\frac{1-xyz}{2x+3y-z+4}$ невизначена коли знаменник перетворюється на нуль, тобто при $2x+3y-z+4=0$. Отже, функція має розрив у всіх точках, що лежать на поверхні розриву $2x+3y-z+4=0$.

Приклад 5. Дослідити на неперервність функцію $z=\frac{1}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Функція має розрив у точці $(0;0)$, тому що вона невизначена у цій точці. Оскільки

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{x^2+y^2} = \{\rho^2 = x^2+y^2\} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^2} = \infty,$$

точка $(0;0)$ є точкою розриву другого роду.

Приклад 6. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = x\sin(3x+y)$.

Розв'язання. При знаходженні частинної похідної за змінною x вважаємо y сталою величиною. Маємо: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=const} = (x)'_x \sin(3x+y) +$ $+x(\sin(3x+y))'_x = \sin(3x+y) + 3x\cos(3x+y)$. І навпаки, якщо визначаємо частинну похідну за змінною y, сталою величиною вважаємо x:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=const} = x(\sin(3x+y))'_y = x\cos(3x+y).$$

Приклад 7. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ для функції $z = \ln(x^2+y^2)$, де $x = u - v$, $y = uv$.

Розв'язання. Оскільки наша функція двох змінних складена, то використаємо формули $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

Шукаємо необхідні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -1; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

Потім за наведеними формулами маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot 1 + \frac{2y}{x^2+y^2}v = \frac{2(u-v)+2uv^2}{(u-v)^2+u^2v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot(-1) + \frac{2y}{x^2+y^2}u = \frac{-2(u-v)+2u^2v}{(u-v)^2+u^2v^2}.$$

Приклад 8. Знайти похідну $\dfrac{dz}{dt}$ функції $z = e^{xy}$, де $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$.

Розв'язання. Якщо у деякій області D визначена функція $z = f(x,y)$, кожна змінна якої, у свою чергу, залежить від змінної t, тобто $x = x(t)$, $y = y(t)$, тоді можна скористатися формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Згідно з цією формулою знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}; \quad \frac{dx}{dt} = 2\cos 2t; \quad \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t,$$

$$\frac{dz}{dt} = ye^{xy}2\cos 2t + xe^{xy}(-2\sin 2t) = 2e^{\sin 2t\cos 2t}(\cos^2 2t - \sin^2 2t) = 2e^{\frac{1}{2}\sin 4t}\cos 4t.$$

Приклад 9. Знайти повну похідну функції $z=\dfrac{x+e^{xy}}{y}$, якщо $y=\sqrt{x}$.

Розв'язання. Дана функція $z=f(x,y)$, а $y=y(x)$, тобто $z=f(x,y(x))$ – складена функція аргументу x, у цьому випадку маємо $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$.

Оскільки $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1+ye^{xy}}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xye^{xy}-x-e^{xy}}{y^2}$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

то за наведеною формулою маємо $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1+ye^{xy}}{y}+\dfrac{xye^{xy}-x-e^{xy}}{y^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Підставимо замість y його вираз через x, дістанемо $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x+e^{x\sqrt{x}}(3x\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}$.

Приклад 10. Знайти частинні похідні функції $\sin xyz-2e^{\frac{x}{y}}+3xz-5yz=0$.

Розв'язання. Функція двох змінних $z(x;y)$ задана рівнянням

$$F(x;y;z)=0,$$

не розв'язаним відносно z, тобто функція задана неявно. Для обчислення частинних перших похідних використовують формули

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)},$$

де $F=\sin xyz-2e^{\frac{x}{y}}+3xz-5yz$. Знаходимо $F'_x(x;y;z)=yz\cos xyz-\dfrac{2}{y}e^{\frac{x}{y}}+3z$;

$$F'_y(x;y;z)=xz\cos xyz+\frac{2x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}-5z; \qquad F'_z(x;y;z)=xy\cos xyz+3x-5y$$

та підставляємо отримані вирази у наведені формули, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz\cos xyz-\frac{2}{y}e^{\frac{x}{y}}+3z}{xy\cos xyz+3x-5y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz\cos xyz+\frac{2x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}-5z}{xy\cos xyz+3x-5y}.$$

Приклал 11. Обчислити значення повного диференціала функції $u=x^3+2y^2z-3xy-x+5$ у точці $M(1;2;-1)$.

Розв'язання. Маємо функцію трьох змінних. Повний диференціал такої функції знаходиться за формулою

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Обчислюємо частинні похідні даної функції

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y - 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 4yz - 3x, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2y^2.$$

Отже, повний диференціал набуває вигляду

$$du = (3x^2 - 3y - 1)dx + (4y - 3x)dy + (2y^2)dz.$$

Щоб обчислити значення повного диференціала в даній точці, знайдемо значення частинних похідних в точці M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = -4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -11, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 8.$$

Таким чином, $\left.du\right|_M = -4dx - 11dy + 8dz$.

Приклад 12. Знайти в точці $M(0;1)$ частинні похідні другого порядку функції $z = (x + 2y)\cos(x + y)$.

Розв'язання. Щоб знайти похідні другого порядку, треба знайти похідні першого порядку, а потім від них узяти ще раз похідні по кожній змінній:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + y) - (x + 2y)\sin(x + y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cos(x + y) - (x + 2y)\sin(x + y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x + y) - \sin(x + y) - (x + 2y)\cos(x + y) =$$
$$= -2\sin(x + y) - (x + 2y)\cos(x + y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\sin(x + y) - 2\sin(x + y) - (x + 2y)\cos(x + y) =$$
$$= -4\sin(x + y) - (x + 2y)\cos(x + y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x + y) - 2\sin(x + y) - (x + 2y)\cos(x + y) =$$
$$= -3\sin(x + y) - (x + 2y)\cos(x + y).$$

Знайдемо значення цих частинних похідних у точці $M(0;1)$:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M = -2\sin 1 - 2\cos 1 \approx -2{,}76; \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M = -4\sin 1 - 2\cos 1 \approx -4{,}44;$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M = -3\sin 1 - 2\cos 1 \approx -3{,}6.$$

Аналогічно визначаються частинні похідні порядку, вищого за другий.

Приклад 13. Знайти всі частинні похідні третього порядку функції $z = x^3 + 4xy^2 + y^3 + xy + x + 2y + 4$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4y^2 + y + 1; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 8xy + 3y^2 + x + 2.$$

Визначаємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = 6x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = 8y + 1; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = 8x + 6y.$$

Знаходимо частинні похідні третього порядку:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) = 6; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = 6;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = 8.$$

Приклад 14. Довести, що функція $z = y\ln(x^2 - y^2)$ задовольняє рівняння $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Розв'язання. Якщо функція задовольняє рівняння, це означає, що після підстановки функції у це рівняння воно перетвориться на тотожність.

Отже, для отримання результату треба знайти зазначені у рівнянні похідні, підставити їхні вирази та вираз функції у рівняння. Якщо дістанемо тотожність, то ця функція задовольняє дане рівняння:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2};$$

$$\frac{1}{x}\frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}(\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}) = \frac{y\ln(x^2 - y^2)}{y^2};$$

$$\frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} - \frac{2y}{x^2 - y^2}) = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y};$$

$$\frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} - \frac{2y}{x^2 - y^2}) - \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Отримана тотожність доводить те, що дана функція задовольняє дане рівняння.

Приклад 15. Довести, що функція $u = x(x+y)^2 + y(x+y)$ задовольняє рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Розв'язання. Для полегшення перепишемо функцію у вигляді

$$u = x^3 + 2x^2 y + xy^2 + xy + y^2.$$

Знаходимо похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + y^2 + y; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 + 2xy + x + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 4y; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x + 2; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4x + 2y + 1;$$

$$6x + 4y - 2\,(4x + 2y + 1) + 2x + 2 = 0;$$

$$6x + 4y - 8x - 4y - 2 + 2x + 2 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Задана функція задовольняє дане рівняння.

Домашнє завдання

1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x,y)$ для функції $f(x,y) = (x^2+y^2)^3 e^{-x^2-y^2}$.

2. Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

3. Дослідити на неперервність функцію $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

4. Дослідити на неперервність функцію $z = \dfrac{1}{\ln\left|1 - x^2 - 4y^2\right|}$.

5. Знайти розриви функції $u = \dfrac{\cos(x+y)}{x^2 + y^2 - z}$.

Знайти частинні похідні першого порядку даних функцій:

6. $z = x^2 + y^3 + 3x^5 y^3$. **7.** $z = xy^2$. **8.** $z = 2^x \ln y$.

9. $u = e^x\left(\cos y + x\sin y\right)$. **10.** $u = xy\ln(xy)$. **11.** $z = x\sin(3x+y)$.

Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ **даних функцій:**

12. $u = xy + yz + zx$. **13.** $u = \sin z - x^2 y$. **14.** $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

15. Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ функції $z = e^{xy}$, де $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$.

16. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = u + v^2$, де $u = x^2 + \sin y$ та $v = \ln(x + y)$.

17. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданої функції $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

18. Знайти в точці $(0;1)$ похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$ функції $u^3 + 3xyu + 1 = 0$.

19. Знайти повний диференціал dz функцій $xyz = x + y + z$.

20. Знайти диференціал du функції $u = \cos(xy + xz)$ в точці $N_0(1;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6})$.

21. На скільки зміниться діагональ та площа прямокутника зі сторонами $x = 6$ м і $y = 8$ м, якщо перша сторона збільшиться на 2 мм, а друга − зменшиться на 5 мм.

Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

22. $z = x^2 y^2 - 3x^3 y$. **23.** $z = x\sin(x + y)$. **24.** $z = \ln(x^2 + 4y^3)$.

Довести, що функції задовольняють відповідні рівняння:

25. $u = \sin(xy + yz)$, $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

26. $z = e^{xy}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

27. $z = \ln(x + e^{-y})$, $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

Відповіді

1. 0; 0; 0. **2.** Границі не існує. **3.** Функція на прямих $y = x$, $y = -x$ має розрив другого роду. **4.** У точці $(0;0)$ та на еліпсі $\frac{x^2}{2} + 2y^2 = 1$ функція має розрив другого роду. На еліпсі $x^2 + 4y^2 = 1$ розрив усувний. **5.** Функція має розриви в точках параболоїда $z = x^2 + y^2$. **6.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 15x^4 y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x^5 y^2$. **7.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$. **8.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2^x \ln 2 \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2^x \frac{1}{y}$.

9. $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(\cos y+(x+1)\sin y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(x\cos y-\sin y)$. **10.** $\frac{\partial u}{\partial x}=y(\ln xy+1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x(\ln xy+1)$. **11.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(3x+y)+3x\cos(3x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(3x+y)$.

12. $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$. **13.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-2xy$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\cos z$.

14. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

15. $\frac{dz}{dt}=2e^{\frac{1}{2}\sin 4t}(y\cos 2t-x\sin 2t)$. **16.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2(x+\frac{\ln(x+y)}{x+y})$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+\frac{2\ln(x+y)}{x+y}$. **17.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{6z-y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4y+z}{6z-y}$.

18. 1, 0. **19.** $dz=\frac{1-yz}{xy-1}dx+\frac{1-xz}{xy-1}dy$. **20.** $du_{N_0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\pi}{3}dx+dy+dz)$.

21. –0,9928, – 0,14. **22.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^2-18xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-9x^2+4xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2$.

23. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x\sin(x+y)$. **24.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{8y^3-2x^2}{(x^2+4y^3)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{24x^2y-48y^4}{(x^2+4y^3)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{24xy^2}{(x^2+4y^3)^2}$.

Заняття 15. Екстремуми функцій багатьох змінних

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається точкою локального максимуму функції $u = f(x, y)$?

2. Сформулювати необхідні умови існування екстремуму функції $u = f(x, y)$.

3. Які точки називаються критичними точками функції?

4. Чи може бути екстремум функції трьох змінних не в критичних точках?

5. Який вигляд матриця Гессе має для функції трьох змінних?

6. Сформулювати необхідні умови існування локального екстремуму функції двох змінних.

7. Де функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може мати найбільше або найменше значення?

8. У якому разі функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має умовний екстремум в точці $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ за умови зв'язку

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad j = \overline{1, m}; \quad m < n?$$

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Розв'язання. Неперервна функція може мати екстремум тільки в критичних точках, тобто точках, у яких функція визначена, а її частинні похідні дорівнюють нулю або не існують,

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y = 4(x^3 - x + y); \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y = 4(y^3 + x - y).$$

Критичні точки функції визначимо із системи:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, знайдемо $x^3 + y^3 = 0$, звідки $y = -x$.

Підставляючи $y = -x$ в перше рівняння, дістанемо $x^3 - 2x = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, тоді $y_1 = 0$, $y_2 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$.

Отже, функція має три критичні точки: $M_1(0;0)$, $M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Наявність екстремуму можна з'ясувати за знаком виразу

$$\Delta = AC - B^2, \text{ де } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

в кожній зазначеній точці.

Визначаємо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4.$$

Обчислюємо другі похідні та величину Δ в кожній критичній точці.

У точці $M_1(0;0)$ маємо

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = -4, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = -4, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{M_1} = 4,$$

тоді $\Delta = -4 \cdot (-4) - 4^2 = 0$. В такому разі треба з'ясувати поведінку функції поблизу критичної точки. Якщо $y = 0$, то $z = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ в околі точки M_1. Якщо $y = x$, то $z = 2x^4 > 0$. Таким чином, в околі точки M_1 значення z можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це значить, що точка M_1 не є точкою екстремуму.

У точці $M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ маємо

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 20, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 20, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{M_2} = 4,$$

тоді $\Delta = 20 \cdot 20 - 4^2 = 384$, $A > 0$. Отже, точка $M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ — точка мінімуму. В цій точці $z_{min} = -8$.

В точці $M_3(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ аналогічно маємо

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 20, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 20, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{M_2} = 4,$$

тоді $\Delta = 20 \cdot 20 - 4^2 = 384$, $A > 0$. Отже, точка $M_3(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ — точка мінімуму. В цій точці $z_{min} = -8$.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $z = \frac{1}{3}x^3 + y^2 - 4y + 4$.

Розв'язання. Неперервна функція може мати екстремум тільки в критичних точках, тобто точках, у яких функція визначена, а її частинні похідні дорівнюють нулю або не існують.

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 4$$

та прирівняємо їх до нуля. Отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими: $\begin{cases} x^2 = 0, \\ 2y - 4 = 0, \end{cases}$

звідси $x = 0$, $y = 2$.

Чи має в цій критичній точці $M_0(0;2)$ функція екстремум та який він, ми це дізнаємося, залучивши до розв'язку достатні умови існування екстремуму, які для функції двох змінних можна записати так: якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 локальний екстремум, а саме: мінімум при $A > 0$ та максимум при $A < 0$. За умови, що $\Delta = AC - B^2 < 0$, функція локального екстремуму в точці M_0 не має. В цьому виразі позначено $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$, $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$, $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$. Знайдемо другі похідні у критичній точці: $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 0$, $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 2$, $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{M_0} = 0$. тобто $AC - B^2 = 0$. В такому разі треба з'ясувати поведінку функції в околі критичної точки. В будь-яких точках $M(x;y)$, що відрізняються від точки $M_0(0;2)$ та розташовані поблизу цієї точки, значення функції більше нуля. Наприклад, нехай $x = 0$, $y = 1$, тоді $z(0;1) = 1 - 4 + 4 = 1 > 0$; нехай $x = -1$, $y = 3$, тоді $z(-1;3) = -\frac{1}{3} + 9 - 12 + 4 = \frac{2}{3} > 0$. В самій критичній точці маємо значення $f(0;2) = 4 - 8 + 4 = 0$. Таким чином, у критичній точці $M_0(0;2)$ функція має мінімум.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $u = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6y; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 4.$$

Критичні точки функції визначимо із системи:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0, \\ 2y + 6x = 0, \\ 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ 2y + 6x = 0 \\ 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 18x = 0 \\ y = -3x \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x(x-6) = 0 \\ y = -3x \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 6 \\ y_1 = 0,\ y_2 = -18 \\ z_{1,2} = 2 \end{cases}$$

дає критичні точки $M_1(6;-18;2)$ та $M_2(0;0;2)$.

Обчислюємо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0,$$

складаємо матрицю Гессе

$$H=\begin{pmatrix}6x & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

та шукаємо її головні мінори

$$\Delta_1=6x,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}6x & 6\\ 6 & 2\end{vmatrix}=12x-36,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}6x & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=24x-72.$$

Відомо, якщо в точці другий диференціал d^2u – знаковизначена квадратична форма від диференціалів dx, dy, dz, то функція матиме в цій точці локальний екстремум. Згідно з критерієм Сильвестра $d^2u>0$ тоді й тільки тоді, коли всі головні мінори матриці Гессе додатні, а $d^2u<0$ тоді й тільки тоді, коли всі головні мінори непарного порядку від'ємні, а парного – додатні.

У точці $(6;-18;2)$ її головні мінори будуть додатними:

$$\Delta_1=36>0;\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}36 & 6\\ 6 & 2\end{vmatrix}=36>0;\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}36 & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=72>0.$$

Отже, у цій точці функція має мінімум $u_{\min}(6;-18;2)=-112$.

Щодо дослідження функції у точці $(0;0;2)$, застосувати критерій Сильвестра тут неможливо, оскільки $\Delta_1=0$. Проте екстремуму в цій точці немає. Дійсно, $u(0;0;2)=-4$, а при малих ε приріст функції

$$\Delta u=u(\varepsilon;0;2)-u(0;0;2)=\varepsilon^3-4-(-4)=\varepsilon^3$$

знакозмінний, тобто $\Delta u>0$ при $\varepsilon>0$ та $\Delta u<0$ при $\varepsilon<0$.

Приклад 4. Знайти екстремуми функції $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6y;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=24y^2-6x.$$

Обидві похідні існують на всій області визначення, тобто критичні точки можуть бути тільки там, де похідні дорівнюють нулю.

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases}3x^2-6y=0,\\ 24y^2-6x=0,\end{cases}$

знайдемо дві точки $M_1(0;0)$ та $M_2(1;\frac{1}{2})$. Обидві точки є критичними, тобто в цих точках можуть бути екстремуми.

Для дослідження критичних точок знайдемо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=48y;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6.$$

У точці $M_1(0;0)$ маємо

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1}=0,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1}=0,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{M_1}=-6,\ \text{тобто}\quad AC-B^2=-36<0$$

Отже, екстремуму в цій точці немає.

Розглянемо точку $M_2(1;\frac{1}{2})$

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2}=6,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2}=24,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{M_2}=-6,\ \text{тобто}\quad AC-B^2=108>0,$$

при цьому $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2}=6>0$.

Отже, у точці $M_2(1;\frac{1}{2})$ функція має мінімум: $z_{min}(1;\frac{1}{2})=4$.

Приклад 5. Знайти найбільше та найменше значення функції $u=x^2y$ в області $x^2+y^2\le 1$.

Розв'язання. Спочатку шукаємо критичні точки функції відповідно до необхідних умов існування екстремуму. Знаходимо перші похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2.$$

Прирівняємо їх до нуля та отримаємо систему $\begin{cases}2xy=0,\\ x^2=0.\end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, дістаємо єдину критичну точку $O(0;0)$, яка належить даній області (рис. 25). Далі досліджуємо поведінку функції на межі області – на колі $x^2+y^2=1$, для чого виражаємо x^2 через y та підставляємо у рівняння даної функції $u=(1-y^2)y \Rightarrow u=y-y^3$; $y\in[-1,1]$. Похідна цієї функції $u'=1-3y^2$. За умови $u'=0$ дістаємо $1-3y^2=0$, звідки знаходимо критичні точки $y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Відповідними точками на колі будуть точки

$$M_1(\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}}),\quad M_2(-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}}),\quad M_3(-\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{1}{3}}),\quad M_4(\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{1}{3}}).$$

Свого ж найбільшого та найменшого значень функція може досягти у кінцевих точках відрізку $y\in[-1,1]$, яким на межі області відповідатимуть точки $M_5(0;1)$ та $M_6(0;-1)$. Обчислюємо значення функції $u=x^2y$ у здобутих точках: $u(0;0)=0$; $u(0;\pm 1)=0$; $u(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}$; $u(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{1}{3}})=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Очевидно, найбільшим значенням функції в даній області буде $u_{найб}(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, а найменшим – $u_{найм}(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{1}{3}})=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

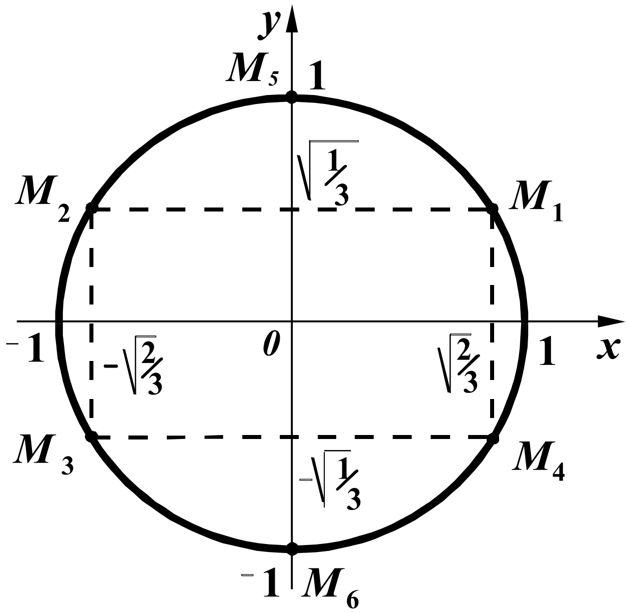


Рис. 25

Приклад 6. Знайти найбільше та найменше значення функції $z(x;y)=x^2-y^2+2a^2$ в області $x^2+y^2\le a^2$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції $z(x;y)$, що лежать всередині круга, та обчислимо її значення в цих точках: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$, розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases}2x=0,\\-2y=0,\end{cases}$ знайдемо критичну точку $M_0(0;0)$, яка лежить всередині круга. Значення функції $z(x;y)$ у цій точці буде $z(M_0)=2a^2$.

Досліджуємо поведінку функції на колі $x^2+y^2=a^2$. Рівняння кола зв'язує між собою змінні x та y. Визначимо з цього рівняння одну змінну через іншу, наприклад $x=\pm\sqrt{a^2-y^2}$, та підставимо цей вираз у рівняння функції $z(x;y)$, що перетворить її у функцію однієї змінної:

$$z(y)=a^2-y^2-y^2+2a^2 \quad\Rightarrow\quad z(y)=3a^2-2y^2;\quad y\in[-a;a].$$

Далі шукаємо найбільше та найменше значення функції $z(y)$ на відрізку $[-a;a]$, які й будуть шуканими найбільшим та найменшим значеннями функції $z(x;y)$ на межі заданої функції – на колі.

Шукаємо критичні точки функції $z(y)$, що лежать всередині відрізка $[-a;a]$, та обчислюємо її значення в цих точках: $z'(y)=-4y$; $z'(y)=0$ в точці $y=0$. Ця єдина критична точка лежить всередині даного відрізка.

Значення $z(y)$ в цій точці $z(0)=a^2$.

Обчислюємо значення $z(y)$ на кінцях даного відрізку: $z(-a)=z(a)=3a^2$.

Порівнюючи обчислені значення $z(y)$ во внутрішній критичній точці $y=0$ та на кінцях відрізку $y=-a$ та $y=a$, робимо висновок: найбільше значення функції $z(y)$ на відрізку $[-a;a]$ (або, що теж саме, функції $z(x;y)$ на межі даної області – на колі $x^2+y^2=a^2$) дорівнює $3a^2$, а найменше значення $z(y)$ на даному відрізку (або, що теж саме, $z(x;y)$ на даній межі) дорівнює a^2.

Порівнюючи значення $z(x;y)$ во внутрішній критичній точці $M_0(0;0)$ з її найбільшим та найменшим значеннями на колі, робимо висновок: найбільше значення функції $z(x;y)$ у даній замкненій області (кругу) дорівнює $3a^2$ та досягається нею в межових точках $M_1(-a;0)$ та $M_2(a;0)$, а її найменше значення у цій області дорівнює a^2 та досягається в межових точках $M_3(0;-a)$, $M_4(0;a)$. Ординати точок M_1, M_2, M_3, M_4, які лежать на колі, обчислені з рівняння кола за їх відомими ординатами.

Приклад 7. Знайти умовний екстремум функції $z(x;y)=x^2+y^2+xy-5x-4y+10$ за умови зв'язку $x+y=4$.

Розв'язання. Рівняння зв'язку можна розв'язати відносно будь-якої змінної, наприклад $y=4-x$. Отже, знайдемо умовний екстремум методом виключення частини змінних. Підставимо в рівняння функції замість змінної y вираз $4-x$:

$$z=x^2+(4-x)^2+x(4-x)-5x-4(4-x)+10=x^2-5x+10,$$

зводимо задачу на пошук умовного екстремуму заданої функції $z(x;y)$ до дослідження функції $z(x)=x^2-5x+10$ на звичайний локальний (безумовний) екстремум.

Знаходимо критичні точки, тобто знаходимо першу похідну $z'(x)=2x-5$, прирівнюємо їх до нуля $2x-5=0$, звідки $x=\frac{5}{2}$; $z''(x)=2>0$ при будь-якому x, і тому в точці $x=\frac{5}{2}$ функція $z(x)$ має мінімум $z_{min}(\frac{5}{2})=\frac{15}{4}$.

Локальний екстремум функції $z(x)=x^2-5x+10$ буде умовним екстремумом функції $z(x;y)=x^2+y^2+xy-5x+-4y+10$.

Отже, $z(x;y)$ у відповідній точці $(\frac{5}{2};\frac{3}{2})$ має умовний мінімум $z_{\min}(\frac{5}{2};\frac{3}{2})=\frac{15}{4}$.

Приклад 8. Знайти умовні екстремуми функції $z = 5 - 3x - 4y$ за умови зв'язку $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа, яка є сумою цільової функції $z = 5 - 3x - 4y$ та функції зв'язку $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$, що помножена на незалежну сталу λ (її називають **множником Лагранжа**), а саме:

$$L(x; y; z) = 5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Очевидно, у точках $M(x; y)$, координати яких задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$, виконується рівність $L(M) = z(M)$, і тому умовні екстремуми функції $z(x; y)$ та локальні екстремуми функції Лагранжа збігаються. Для визначення критичних точок функції Лагранжа розв'язують систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -3 + 2x\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4 + 2y\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 3$; $y = 4$ при $\lambda = \frac{1}{2}$ та $x = -3$; $y = -4$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Таким чином, функція $z(x, y)$ може мати умовний екстремум у точках $(3; 4)$ та $(-3; -4)$. Обчислюємо другий диференціал функції Лагранжа: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$; $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow d^2L = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

Визначаємо перший диференціал функції $\varphi(x, y)$: $d\varphi = 2xdx + 2ydy$.

Тоді в точках $(\pm 3; \pm 4)$ маємо $6dx + 8dy = 0$ або $dy = -\frac{3}{4}dx$. Звідси $d^2L(3; 4; \frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2}(dx^2 + (-\frac{3}{4}dx)^2) = \frac{25}{16}dx^2 > 0$ і другий диференціал d^2L є додатною визначеною квадратичною формою, а відтак функція $z(x, y)$ у точці $(3; 4)$ має умовний мінімум $z_{\min}(3, 4) = 5 - 9 - 16 = -20$.

Аналогічно знаходимо $d^2L(-3, -4, -\frac{1}{2}) = -\frac{25}{16}dy^2 < 0$ і d^2L у другій точці є від'ємно визначеною квадратичною формою. Отже, функція $z(x, y)$ у точці $(-3; -4)$ матиме умовний максимум $z_{\max}(-3; -4) = 30$.

Домашнє завдання

Дослідити на екстремум функції:

1. $z = x^2 + y^2$. **2.** $z = (x-1)^2 + y^2$. **3.** $z = xy$. **4.** $z = e^{-(x^2+y^2)}$.

Знайти найбільше та найменше значення функцій:

5. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ у квадраті $0 \le x \le 4,\quad 0 \le y \le 4.$

6. $z = 3xy$ в області $x^2 + y^2 \le 2$.

7. Знайти найбільше значення функцій $z = xy(4 - x - y)$ у трикутнику, що обмежений прямими $x = 1,\ y = 0, x + y = 6.$

Знайти умовний екстремум функцій:

8. $u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ при рівнянні зв'язку $x + y + z = 13$.

9. $u = x - 2y + 2z$ за умови зв'язку $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

10. $u = x - y + 2z$ за умови $x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$.

Відповіді

1. $z_{\min}(0;0) = 0$. **2.** $z_{\min}(1;0) = 0$. **3.** Екстремуму немає. **4.** $z_{\max}(0;0) = 1$.
5. $z_{найб} = z(4;0) = z(0;4) = 91$, $z_{найм} = z(3;3) = 0$.
6. $z_{найб} = z(1;1) = z(-1;-1) = 3$, $z_{найм} = z(1;-1) = z(-1;1) = -3$.
7. $z_{найб} = z(\frac{4}{3};\frac{4}{3}) = \frac{64}{27}$.
8. $u_{\min}(6;4;3) = 156$.
9. $u_{\max}(1;-2;2) = 9$, $u_{\min}(-1;2;-2) = -9$.
10. $u_{\min}(-2;2;-2) = -8$, $u_{\max}(2;-2;2) = 8$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П. Вища математика : навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 640 с.

2. Овчинников П.П. Вища математика : підручник : у 3-х ч. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко ; під заг. ред. П.П. Овчинникова. – Київ : Техніка, 2000. – Ч. 1. – 591 с.

3. Сушко С.О. Математика для економічних спеціальностей : навч. посіб. / С.О. Сушко, Л.Я. Фомичова, Т.С. Кагадій ; М-во освіти і наки України, Нац. гірн. акад. України. – Дніпропетровськ : НГА України, 2000. – 375 с.

4. Вища математика. Диференціальне числення у прикладах та задачах : навч. посіб. / Л.Я. Фомичова, В.М. Почепов, С.О. Сушко, В.В. Фомичов. – Дніпропетровськ: ЛізуновПрес, 2012. – 156 с.

5. Лінійна алгебра у прикладах та задачах : навч. посіб. / Л.Я. Фомичова, В.В. Фомичов, В.М. Почепов та ін.; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – 2-е вид., випр. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2010. – 123 с.

6. Фомичова Л.Я. Математика 1 : навч. посіб. / Л.Я. Фомичова, В.М. Почепов, В.В. Фомичов ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2019. – 158 с.

.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Н а в ч а л ь н е в и д а н н я

Почепов Віктор Миколайович
Фомичова Людмила Яківна
Мамайкін Олександр Рюрікович

МАТЕМАТИКА 1

ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Підписано до друку 31.01.2022. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 6,6.
Обл.-вид. арк. 6,6. Тираж 50 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.