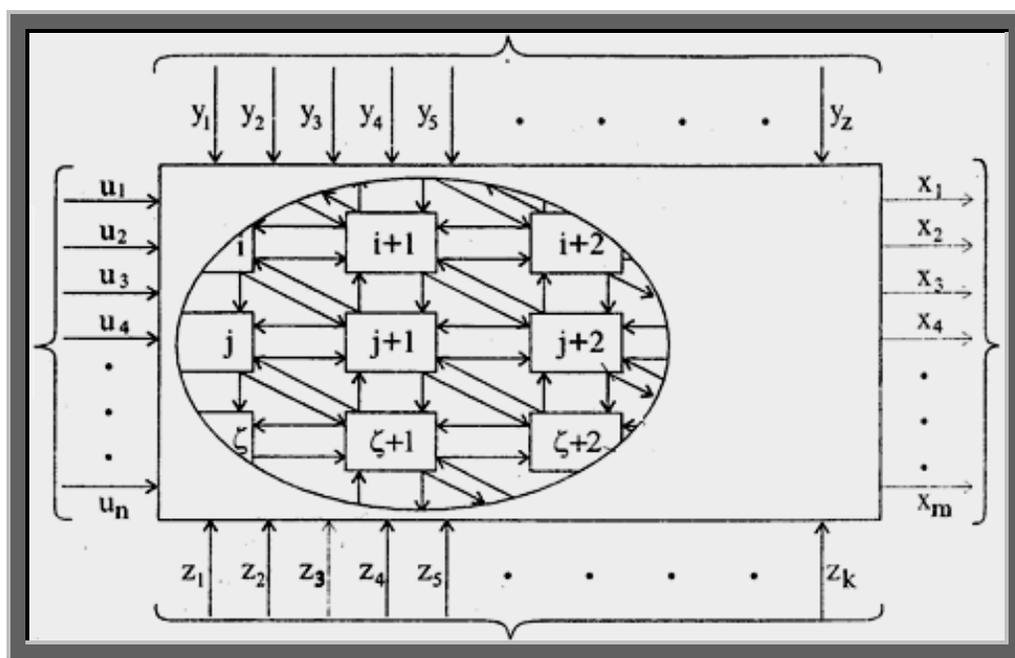


I.M. IIICYHOB

*EKOHOМИЧНА
КІБЕРНЕТУКА*



2009

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

До 110-річчя НГУ

І.М. Пістунов



ЕКОНОМІЧНА КІБЕРНЕТИКА

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2009

УДК 330.46(075.8)
ББК 65в6я73
ПЗ4

*Затверджено вченою радою Національного гірничого університету
як навчальний посібник для студентів очної та заочної форм
навчання в циклі професійної підготовки спеціаліста зі спеціальності
6.050102 «Економічна кібернетика»
(протокол № від .10.2009)*

Рецензенти:

О.М.Марюта, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри економічної інформатики і статистики (Дніпропетровський національний університет);
Б.І.Мороз, д-р. техн. наук, проф., начальник кафедри інформаційних систем і технологій (Академія митної служби України).

Н.К.Васильєва, д-р екон. наук, проф., завідувач кафедри інформаційних систем і технологій (Дніпропетровський державний аграрний університет).

Пістунов І.М.

ПЗ4 Економічна кібернетика: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: НГУ, 2009.
– 154 с.

У посібнику розглянуто теоретичні і практичні аспекти щодо аналізу, синтезу, моделювання та знайдення оптимальних рішень для економічних систем засобами економічної кібернетики.

Подано приклади застосування теоретичних розробок, наведено методи виконання розрахунків із застосуванням комп'ютерних додатків, таких як електронні таблиці та математичні процесори. Контрольні запитання, індивідуальні завдання та завдання для курсової роботи дозволяють глибше опанувати поданий матеріал і забезпечують впевнене використання кібернетичних методів в реальній економіці.

Посібник базується на літературних джерелах вітчизняних та зарубіжних авторів та на досвіді викладання дисципліни «Економічна кібернетика» в Національному гірничому університеті.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів спеціальності «Економічна кібернетика».

ББК 65в6я73)

© І.М. Пістунов, 2009

© Національний гірничий університет, 2009

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1. ПРЕДМЕТ, МЕТОДИ І ПОНЯТІЙНИЙ АПАРАТ ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ.....	8
1.1. Методи економічної кібернетики.....	8
1.2. Об'єкт. Його параметри і фактори.....	10
1.3. Система	12
1.4. Класифікація систем.....	15
1.5. Соціально-економічна система	18
1.6. Зворотній зв'язок	22
1.7. Інформація	23
1.8. Основні закони та принципи кібернетики.....	25
1.9. Індивідуальні завдання № 1	28
2. МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ ЯК ОСНОВНИЙ МЕТОД ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ.....	33
2.1. Модель.....	33
2.2. Математичне моделювання.....	35
2.3. Приклади кібернетичних моделей соціально-економічних систем	39
2.3.1. Модель нарахування відсотків.....	39
2.3.2. Моделі фінансових розрахунків.....	40
2.3.3. Моделі теорії корисності.....	41
2.3.4. Виробнича модель	43
2.3.5. Моделі Кобба-Дугласа та Лоренца.....	43
2.3.6. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)	45
2.3.7. Використання динамічних моделей в економіці.....	46
2.3.8. Моделі банкрутства	50
2.4. Індивідуальні завдання №2.....	51
3. АНАЛІЗ ЯК КАТЕГОРІЯ ПІЗНАННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ДОСЛІДЖЕННЯХ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ.....	53
3.1. Статистичний аналіз соціально-економічних систем	54
3.2. Дисперсійний аналіз факторів соціально-економічних систем.....	59
3.3. Аналіз соціально економічних систем методом експертних висновків	62
3.4. Аналіз запізнювання впливу вхідних факторів на вихідні.....	64
3.5. Спектральний аналіз	66
3.6. Кластерний аналіз	69
3.6.1. Місце кластерного аналізу серед інших методів автоматичної класифікації	69
3.6.2. Вимірювання відстаней між об'єктами	70
3.6.3. Кластеризація повним перебором об'єктів	72
3.7. Індивідуальні завдання №3.....	75
3.8. Індивідуальні завдання №4.....	78

4. МЕТОДОЛОГІЯ І МЕТОДИ СИНТЕЗУ МОДЕЛЕЙ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ	82
4.1. Синтез статистичних лінійних та квазілінійних моделей	82
4.2. Синтез авторегресійних моделей	87
4.3. Синтез періодичних моделей соціально-економічних систем.....	87
4.4. Синтез статистичних моделей методом нейронних сіток.....	89
4.5. Оцінка адекватності апроксимації та якості прогнозування статистичних моделей	94
4.6. Синтез динамічних моделей соціально-економічних систем	95
4.7. Синтез моделей на формальній мові (нечіткі моделі).....	97
4.8. Індивідуальні завдання № 5	103
5. ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЦІ	105
5.1. Числові методи знаходження оптимального рішення статистичних моделей.....	106
5.2. Математичне програмування.....	108
5.2.1. Лінійне програмування.....	108
5.2.2. Цілочислове програмування.....	110
5.2.3. Нелінійне програмування	110
5.2.4. Транспортна задача.....	111
5.2.5. Динамічне програмування.....	115
5.3. Багатокритеріальні задачі.....	117
5.3.1. Формальна постановка багатокритеріальної задачі	117
5.3.2. Зведення до задачі математичного програмування.....	118
5.3.3. Метод гарантованого результату.....	119
5.3.4. Метод згортки часткових критеріїв.....	119
5.3.5. Складання зведеної таблиці.....	122
5.4. Оптимізація конфліктних ситуацій в економіці (теорія ігор).....	123
5.4.1. Антагоністична гра	123
5.4.2. Кооперативна гра.....	125
5.4.3. Ігри з природою.....	127
5.5. Оптимізація управління соціально-економічної системи, заданої нечіткою моделлю.....	130
5.6. Індивідуальні завдання №6	133
6. ЗАВДАННЯ І ТЕМИ КУРСОВОЇ РОБОТИ	146
ПІДСУМКИ.....	150
ЛІТЕРАТУРА	151
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	154

ВСТУП

Слово «економіка» (гр. *οικονομια*) запровадив у вжитку давньогрецький мислитель Аристотель (384—322 до н.е.). Це слово походить від грецьких слів *οικος* – будинок і *νομος* – закон. Буквально це слово означає правила господарювання господарська діяльність (виробництво розподіл, обмін і споживання товарів, а також наука, що вивчає закономірності її розвитку).

Економічна дійсність є об'єктом економічних наук, які підрозділяється на наукові і прикладні. Наукову економіку також називають економічною теорією наукою про те, як люди і суспільство вибирають спосіб використання ресурсів, що мають багатоцільове значення. Прикладна економіка вивчає можливості додатку законів, теорій, пропозицій, розроблених економічною теорією безпосередньо для функціонування окремих елементів економічних систем. Для пізнання економічної дійсності застосовуються не тільки економічні дисципліни, але і міждисциплінарні дослідження, наприклад прикладна статистика і теорія ухвалення рішень. Як самостійна наука економіка виділяється в XVIII столітті з виходом в світ книги Адама Сміта «Дослідження про природу і причину багатства народів» у 1776 року.

Кібернетика (від грець. *Κυβερνήτικ* – мистецтво управління, *Κυβερνήτης* – правлю кермом, управляю, *Κυβερνήτης* – керманіч) наука про загальні закономірності процесів управління і передачі інформації в машинах, живих організмах і суспільстві. Слово «кібернетика» як назва науки про управління і інформацію в науковий ужиток ввів американський вчений Норберт Вінер (1894-1964) – один із творців першої у світі електронно-обчислювальної машини. Кібернетика – це наука про закони управління в усіх сферах людської діяльності.

Економічна кібернетика ж, як один з наукових напрямів кібернетики, – займається додатком ідей і методів кібернетики до економічних систем. У розширеному сенсі під словами економічна кібернетика розуміють область науки, що виникла на стику математики і кібернетики з економікою, включаючи математичне програмування, дослідження операцій, економіко-математичні моделі, економетрику і математичну економіку. Економічна кібернетика розглядає економіку, а також її структурні і функціональні частини як складні системи, в яких протікають процеси регулювання і управління, що реалізуються рухом і перетворенням інформації. Методи економічної кібернетики дають можливість стандартизувати і уніфікувати цю інформацію, раціоналізувати отримання, передачу і обробку економічної інформації, обґрунтувати структуру і склад технічних засобів її обробки.

Економічна кібернетика розвивається за такими основними напрямками, які щонайтісніше ув'язуються один з одним.

Теорія економічних систем і моделей розробляє: методологію системного аналізу економіки і її моделювання, віддзеркалення структури і функціонування економічних систем в моделях; питання класифікації і побудови комплексів економіко-математичних моделей; проблеми економічного регулювання, спів-

відношення і взаємного узгодження різних стимулів і дій у функціонуванні економічних систем; питання поведінки людей і колективів. При дослідженні цих проблем До. э. перш за все спирається на політичну економію і загальну теорію систем, а також на соціологію і теорію регулювання, узагальнює результати розробки економіко-математичних методів і моделей.

Теорія економічної інформації розглядає економіку як інформаційну систему. Вона вивчає: потоки інформації, які циркулюють в народному господарстві як комунікації між його елементами і підсистемами, характеристики інформаційних каналів і переданих ним повідомлень; економічні вимірювання і взагалі знакові системи в економіці, тобто мови економічного управління, включаючи розробку комплексів господарських показників, правил їх розрахунку (ці питання виділяються в економічну семіотику); процеси ухвалення рішень і обробки даних в інформаційних системах народного господарства на всіх його рівнях і питання якнайкращої організації цих процесів.

Навчальний посібник містить наступні розділи, які є темами, визначеними в ГСВО МОН України:

1. Предмет, методи і понятійний апарат економічної кібернетики
2. Моделювання соціально-економічних систем як основний метод економічної кібернетики
3. Аналіз як категорія пізнання та його застосування в дослідженнях соціально-економічних систем
4. Методологія і методи синтезу моделей соціально-економічних систем і структур управління ними
5. Теорія оптимальних систем та її застосування в оптимізації процесів управління в економіці
6. Завдання для курсової роботи

Кожен з цих розділів закінчується контрольними запитання, знаходячи відповідь на які, студент зможе поглибити свої знання з теми, що вивчається.

Розділи з другого по п'ятий містять індивідуальні завдання, які студент має виконати в процесі вивчення предмету. Всі розрахунки потрібно проводити на комп'ютері.

Завдання треба здавати в електронному вигляді на будь яких носіях у конвертах, які потрібно підписувати таким чином. Допускається здавати всі завдання на одному носії.

Задачу спочатку треба розв'язати в загальному вигляді з представлення формули рішення, в яку потім підставлені конкретні числові дані для свого варіанта. В деяких завданнях числові значення потрібно визначити за простою формулою. Наприклад, якщо в таблиці навпроти позначення C стоїть число 17, а числове значення в умові задачі подано як $0,01 \cdot C$, то це означає, що потрібно брати число $0,01 \cdot 17 = 0,17$.

Кожну тему супроводжують приклади вирішення із застосування таких прикладних пакетів як Open Office Calc, Microsoft Office Excel, Macsima та

Економічна кібернетика Індивідуальне завдання № 1 Варіант задач №0, варіант числових даних № 17 Виконав: студент групи ЕЕ-00-1 Петренко Семен

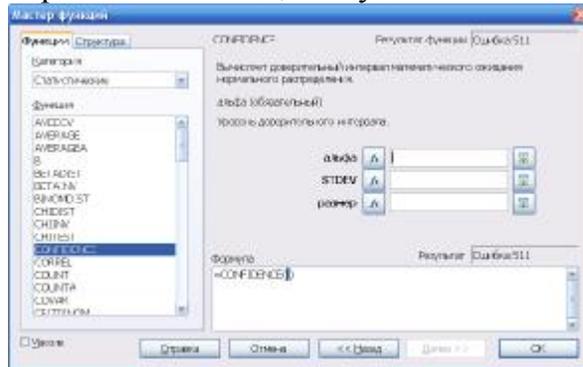
MathCad. При цьому припускається, що студенти вже знайомі з порядком використання як електронних таблиць так і математичних процесорів.

Наприклад, якщо потрібно провести розрахунки за формулою $A = \frac{B-C}{D}$,

для наступних числових значень параметрів $B = 10$, $C = 5$, $D = 8$, то в підрозділі буде наведено малюнок, в якому видно фрагмент вікна електронної таблиці, де колонку A займають тестові визначення невідомих у формулі, колонку B – їх числові значення. Вікно f_x містить саму формулу розрахунку, де вказано адреси клітинок, які містять числові дані.

Якщо будуть застосовані функції електронних таблиць, то буде показано їх вікно з

	B4	$f_x = (B1-B2)/B3$		
	A	B	C	D
1	B=	10		
2	C=	5		
3	D=	8		
4	A=	0,625		



уведеними туди параметрами.

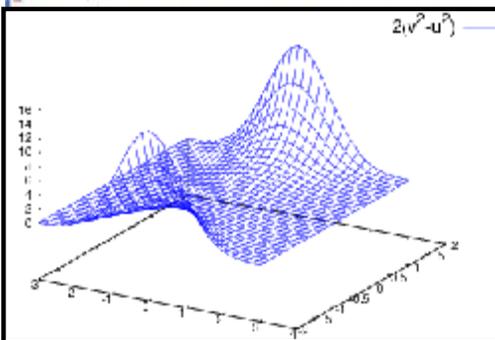
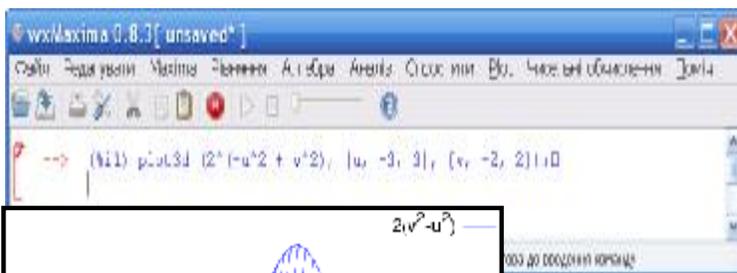
При використанні у прикладі математичних процесорів буде показано їх вікно з прикладом вирішення тих моделей, які розглядалися у прикладі, як побудова об'ємних графіків в Maxima або знайдення похідної, як в

MathCad. Для скорочення пояснень в тексті посібника застосовано відповідні емблеми  _

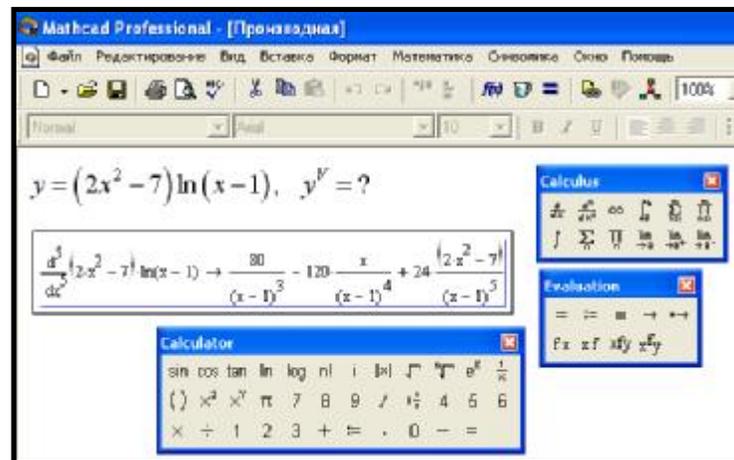
Maxima або  _ Mathcad,

 _ Open Office Calc,

 _ Microsoft Office Excel.



Метою навчального посібника є засвоєння знань з основ фундаментальних досліджень систем і процесів управління в економіці. Завданням – вивчення концептуальних понять, їх теоретичних засад; набуття практичних навичок аналізу, синтезу та оптимізації систем і процесів управління в економіці



1. ПЕРЕДМЕТ, МЕТОДУ І ПОНЯТТІЙНИЙ АПАРАТ ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТУКИ

В розділі наведено понятійний апарат економічної кібернетики, опанування якого дозволить розуміти і вивчати подальші розділи посібника.

Предметом економічної кібернетики є закони, принципи та інформаційні процеси управління соціально-економічними системами. Вивчення цих законів та методів, дозволяє сучасним економістам знаходити найкращі з усіх можливих рішення, передбачати економічні явища та процеси, керувати соціально-економічними об'єктами.

1.1. Методи економічної кібернетики

У розширеному сенсі під словами *економічна кібернетика* розуміють область науки, що виникла на стику математиків і кібернетики з економікою, включаючи математичне програмування, дослідження операцій економіко-математичні моделі, економетрику і математичну економіку. Економічна кібернетика розглядає економіку, а також її структурні і функціональні частини як складні системи, в яких протікають процеси регулювання і управління, що реалізуються рухом і перетворенням інформації.

Математичне програмування – це математична дисципліна, що вивчає теорію і методи вирішення завдань про знаходження екстремумів функцій на множині скінченномірною векторного простору, визначуваній лінійними і нелінійними обмеженнями (рівністю і нерівностями).

Формально, завдання математичного програмування формулюється так:

Знайти $\operatorname{argmin}_{x \in X} f(x)$.

В залежності від природи множини X завдання математичного програмування класифікуються як:

- завдання дискретного програмування (або комбінаторної оптимізації) якщо X звичайне або рахункове;
- завдання цілочисельного програмування якщо X – підмножина множини цілих чисел;
- завданням нелінійного програмування якщо обмеження або цільова функція містять нелінійні функції і X є підмножиною скінченномірною векторного простору.
- Якщо ж всі обмеження і цільова функція містять лише лінійні функції, то це завдання лінійного програмування.

Дослідження операцій – це дисципліна, що займається розробкою і застосуванням методів знаходження оптимальних рішень на основі математичного моделювання, статистичного моделювання і різ-

них евристичних підходів в різних областях людської діяльності. Іноді використовується позначення **математичні методи дослідження операцій**.

Дослідження операцій починається тоді, коли для обґрунтування рішень застосовується тій або іншій математичний апарат. Операція – це всякий захід (система дій), об'єднаний єдиним задумом і направлене до досягнення якоїсь мети. Завжди є керованим заходом, тобто, від залежить від людини, яким способом вибрати параметри, що характеризують її організацію (у широкому сенсі, включаючи набір технічних засобів, вживаних в операції). Рішення (вдалі, невдалі, розумні, безрозсудні) – всякий певний набір залежних від людини параметрів. Оптимальні - рішення, по тихий або інших ознаках переважно перед іншими. Мета *дослідження операцій* – попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень. Саме ухвалення рішення виходить за рамки дослідження операцій і відноситься до компетенції відповідальної особи. Елементи *рішення* – параметри, сукупність яких утворює рішення: числа, вектори, функції, фізичні ознаки і так далі. Якщо елементами рішення можна розпоряджатися в певних межах, то задані умови (обмеження) фіксовані відразу і порушені бути не можуть (вантажопідйомність, розміри, вага). До таких категорій відносяться засоби (матеріальні, технічні, людські), якими людина має право розпоряджатися і інші обмеження, що накладаються на рішення. Їх сукупність формує множину *можливих рішень*.

Приклад: складається план перевезень вантажів з пунктів відправлення A_1, A_2, \dots, A_m в пункти призначення B_1, B_2, \dots, B_n . Елементи рішення - числа x_{ij} , що показують, яка кількість вантажу буде відправлена з i -го пункту відправлення A_i в j -й призначення B_j . Рішення - сукупність чисел $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}$.

Економетрика наука, що вивчає кількісні і якісні економічні взаємозв'язки за допомогою математичних і статистичних методів і моделей. Теоретична економетрика розглядає статистичні властивості оцінок і випробувань тоді як прикладна економетрика займається застосуванням економетричних методів для оцінки економічних теорій. Економетрика дає інструментарій для економічних вимірювань, а також методологію оцінки параметрів моделей мікро- і макроекономіки. Крім того, економетрика активно використовується для прогнозування економічних процесів як в масштабах економіки в цілому, так і на рівні окремих підприємств. При цьому економетрика є частиною економічної теорії, разом з макро- і мікроекономікою.

Головними елементами економічної кібернетики є:

1. Системний аналіз.
2. Складні системи ієрархічні системи ієрархія моделей.
3. Управління в ієрархічних системах.
4. Узгодження цілей в ієрархічних системах. Графи цілей.
5. Інформація і ентропія.
6. Оптимізація потоків інформації у завданнях управління
7. Контроль і управління в організаційних системах
8. Завдання класифікації.
9. Комплексна оцінка системи і оцінки підсистем. Інтегральні оцінки.
10. Кібернетичні моделі соціальних і економічних систем

1.2. Об'єкт. Його параметри і фактори

Об'єктом прийнято називати деяке явище, підприємство, механізм, технологічний процес, які є предметом вивчення дослідника.

Частіше, об'єкт зображується як прямокутник до якого проведені стрілки, деякі з яких входять у прямокутник, а деякі виходять. Ці стрілки позначають ті явища, які можна спостерігати і вимірювати за межами об'єкта. Ці явища називаються факторами. Розрізняють вхідні (позначаються стрілками до прямокутника) і вихідні (від прямокутника) фактори або входи та виходи. На рис. 1.1 показано приклад зображення об'єкта та вхідних (X_i) і вихідних (Y_i) факторів. Вхідні фактори розділяються на фактори управління – такі фактори, значеннями яких може керувати дослідник за власним розсудом; збурення – фактори, значеннями яких керувати не можна, але їх можна виміряти; перешкоди – фактори, значеннями яких не тільки не можна керувати, але і величину перешкод частіше виміряти теж неможливо. Для того, щоб розділити ці вхідні фактори за змістом, інколи вживають окремі позначення для кожної з цих груп, наприклад, $\overset{\psi}{U}, \overset{\psi}{Y}, \overset{\psi}{Z}$ відповідно. Тоді вихідні фактори позначаються як $\overset{\psi}{X}$.

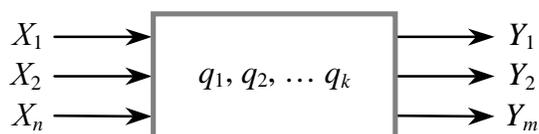


Рис. 1.1. Графічна схема об'єкта

Кожен об'єкт має власну структуру, яка, після взаємодії зі вхідними факторами, перетворює їх на вихідні фактори за певними правилами. Ці правила можуть бути виражені як вербально (словами) так і так допомогою системи рівнянь. Внутрішня структура об'єкта характеризується параметрами, які представляють собою як правила перетворення вхідних факторів так і чисельні значення. На рис.1.1 вони позначаються як q_i , але існують і інші позначення такі як a_i, h_i тощо. Довільний реальний об'єкт має незліченну кількість властивостей (характеристик), і за кожною з них його можна віднести до тієї чи іншої системи як її елемент. Якщо, скажімо, розглядати університет як окрему систему, то з погляду його ректора, проректора з фінансово-господарських питань, головного бухгалтера, начальника служби охорони він складатиметься з різних підсистем та елементів, наділених неоднаковими функціональними властивостями.

Іншим прикладом може бути такий об'єкт як прибуток після сплати податків. Факторами управління для нього будуть – дохід та витрати, факторами збурення – ставки податків, а фактори перешкод у цьому випадку можна вважати економічну кон'юнктуру, яка наперед невизначеним чином впливає на витрати та доходи. Вихідним же фактором розглянутого об'єкту є сума чистого прибутку.

Введемо ще одне поняття – *внутрішній стан об'єкту*. З його допомогою кількісно характеризуються його істотні властивості. Так, з внутрішнім станом об'єкту – цеху, можуть бути співставлені наявні потужності, трудові ресурси, запаси предметів праці і т. д. Отже, внутрішній стан елемента відображає те, що цікавлять нас потенційні характеристики реального об'єкту - кількість речовини, енергії, інформації, його пропускну спроможність і ін. Зіставимо з ним n –

вимірний вектор g (з безперервними або дискретними компонентами) так, що попарно помітним станам відповідають відповідні значення цього вектора. Його компоненти інколи (g_1, g_2, \dots, g_k) називають координатами стану або точками елементу, що відображає в n - вимірному просторі станів. Вектори і множина допустимих значень їх компонентів характеризують можливі стани елементів і інтенсивності їх входів і виходів.

Кількісні характеристики властивостей реального об'єкту в загальному випадку залежать від зовнішніх дій, і їх зміни обумовлюють зміни його стану. Так, виробнича потужність цеху змінюється з інтенсивністю, визначуваною інтенсивністю капітальних вкладень, що направляються на її приріст. Інтенсивність зміни стану оперативного накопичувача ЕОМ визначається інтенсивністю надходження в нього інформації.

Організована (керована) виробнича система повинна функціонувати таким чином: при зміні компонент y_1, \dots, y_r вектора збурень $\overset{U}{Y}$ компоненти u_1, \dots, u_n вектора управління $\overset{U}{U}$ змінюються так, щоб компоненти x_1, x_2, \dots, x_m вектора стану $\overset{X}{X}$ відповідали плановим значенням. Такий об'єкт називається керованим.

З погляду математики будь-який об'єкт описує рух точки у так званому фазовому просторі, або просторі станів. Найважливіша характеристика цього простору – його розмірність, тобто кількість величин, які необхідно задати для визначення стану системи. При цьому не так вже й істотно, що це за величини – вони можуть характеризувати кількість різних представників фауни на певній території, або являти собою змінні, що описують сонячну активність чи кардіограму, або подавати частку виборців, які підтримують президента, і т. ін.

Якщо за координатні осі взяти параметри системи, то значення цих параметрів будуть фазовими координатами, а утворений ними вектор z — станом системи.

Кожному стану системи відповідає певна точка фазового простору – *зображувальна точка*, а кожному процесу зміни стану (руху) системи відповідає певна *траєкторія*. Сім'ю цих траєкторій називають *фазовим портретом системи*. Здебільшого фазовий портрет являє собою сім'ю неперервних кривих (рис. 1.2)

Фазова траєкторія, характеризуючи переміщення зображувальної точки, відбиває водночас поведінку об'єкту під впливом деяких факторів. Отже, за допомогою фазової траєкторії можна графічно подавати його поведінку.

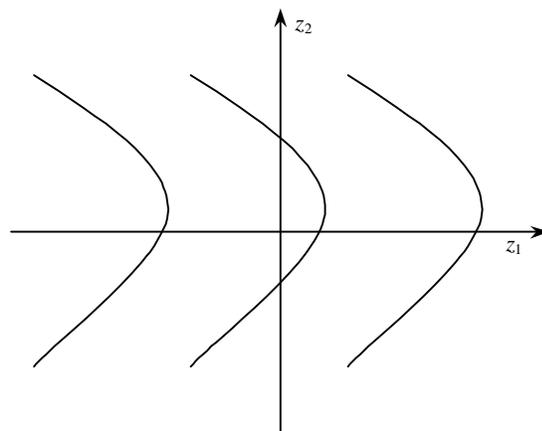


Рис. 1.2. Фазовий портрет (траєкторія) об'єкта у двовимірному просторі

Нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – функції відповідно входів, виходів та стану об'єкту, тоді цю систему формально можна описати рівняннями спостереження та стану об'єкту:

$$y = f(z(t), t), \quad z = g(z(\tau), x(\tau)), \quad \tau \leq t,$$

де f, g – деякі функції.

Коли ці функції та функції зміни входів і виходів неперервні, поведінка таких динамічних об'єктів часто описують за допомогою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, x, z), \quad \frac{dz}{dt} = g(t, x, z).$$

Для дискретних об'єктів зміна станів визначається загальним розв'язком рівняння:

$$z(t_{k+1}) = g(t_k, z(t_k), x(t_k)).$$

1.3. Система

Системою є сукупність об'єктів і процесів, званих компонентами або елементами, взаємозв'язаних і таких, що взаємодіють між собою, які утворюють єдине ціле, таке, що володіє властивостями, не властивими складовим його компонентам, узятим окремо.

Функціонування елементів системи як єдиного цілого забезпечується зв'язками між її елементами. У технічній системі вони формуються при її проектуванні, в біологічній вони виникають природним чином в процесі зародження і розвитку організму., У економічних системах зв'язки можуть організуватися в плановому порядку або складатися стихійно під впливом ринкового механізму. Склад елементів і спосіб їх об'єднання визначають структуру системи.

Кажучи про систему, зазвичай мають на увазі сукупність елементів (об'єктів), яка реалізовує між ними певні відносини, що цікавлять нас, з фіксованими властивостями. Економічною системою є, наприклад, підприємство як сукупність цехів, біологічною – система кровообігу, що включає серце і кровоносні судини, технічною – електронно-обчислювальна машина, що складається з комплексу пристроїв для обробки інформації.

Ці приклади ілюструють інтуїтивні уявлення про систему як об'єкт, об'єднуючий множину матеріальних елементів, які функціонують як єдине ціле.

Будь-який об'єкт, прийнятий як відправний, може бути представлений як елемент (або підсистема) деякої системи вищого рангу і як система по відношенню до деякої сукупності підсистем нижчого рангу. Рухаючись вгору по ступенях цієї ієрархії, ми прийдемо до «універсальної» системи – Всесвіту, рух вниз приведе нас до її первинного елемента – елементарної частинки. Тому при аналізі і проектуванні конкретної системи виникає проблема визначення тієї «ділянки» ієрархії, яка входить в її компетенцію, і вибору елемента, що приймається як «первинний».

Взаємодії реальних об'єктів, що охоплюються конкретною системою, і її взаємодії із зовнішнім середовищем такі ж різноманітні, як властивості об'єкту і середовища. Система має входні та вихідні фактори, має і свої параметри, але ці останні вже визначаються параметрами об'єктів, які складають систему. Систему також можна описати словесно, математично і графічно.

При аналізі і проектуванні системи беруть до уваги лише ті зв'язки, які істотно впливають на її функціонування; останніми нехтують, а у разі потреби систему захищають від їх «паразитного» впливу, що розглядається як обурення (перешкоди). Вживаючи поняття входних факторів (входів) елементу мають на увазі, що вони відображають найбільш істотні зв'язки (матеріально-речові і інформаційні) між об'єктами. Таким чином, поняття «система» є абстракцією не тільки відносно властивостей охоплених нею реальних об'єктів, але і відносно зв'язків між ними.

При описі системи для кожного з її елементів треба брати відповідні йому рівняння зв'язку між його входами і виходами з тією обмовкою, що функціональні змінні перейменовуються відповідно до прийнятих в системі. Об'єднані таким чином рівняння складуть систему рівнянь, які дають математичний опис системи.

На рис. 1.3 представлена спрощена схема підприємства як об'єкту управління. Аналіз таких об'єктів заснований на комплексному його розгляді як єдиного цілого, такого, що складається з взаємозв'язаних елементів, а також на з'ясуванні впливу цих елементів на функціонування всієї системи.

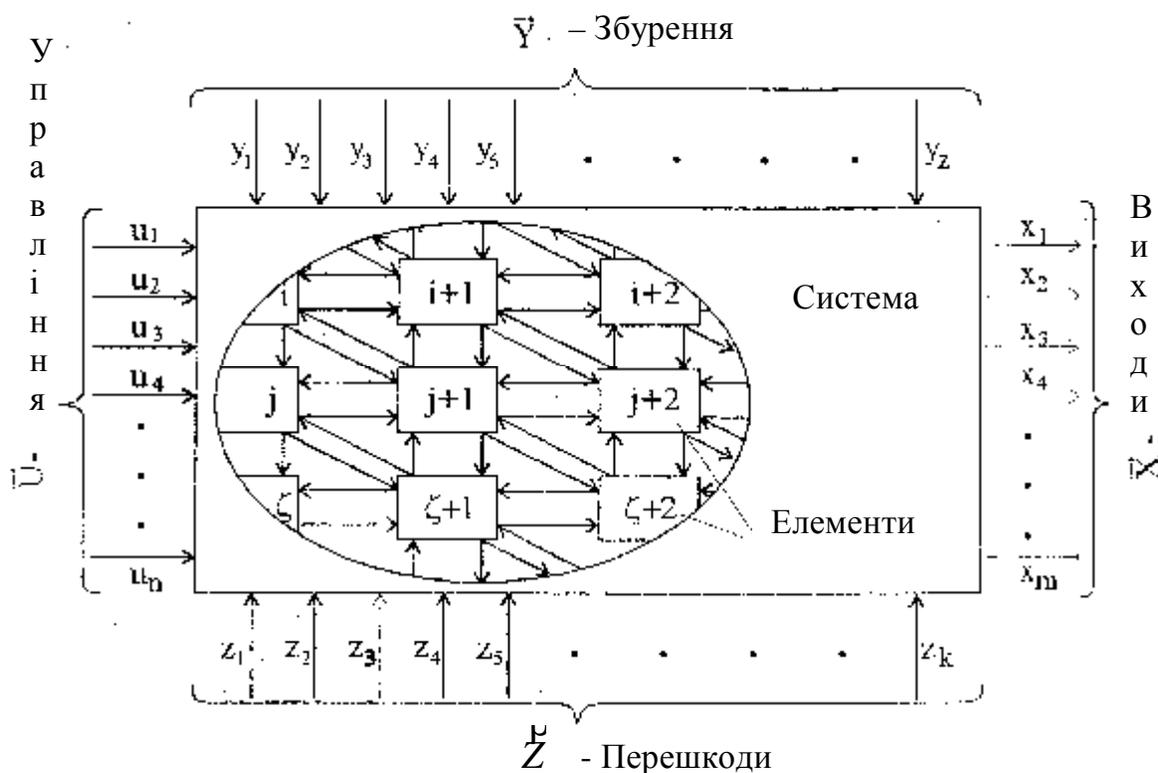


Рис. 1.3. Спрощена схема підприємства як об'єкту управління.

Частина системи, яка сприймає дію навколишнього середовища, називається входом системи, частина, яка впливає на навколишнє середовище і інші системи, називається виходом.

На вхід системи поступає три типи дій:

– вхідні керовані змінні $\vec{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ є вектором управління. У виробничо-економічних системах це, як правило, цілеспрямовано змінні ресурси (трудові, енергетичні, матеріальні);

– вхідні некеровані (але контрольовані) змінні $\vec{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ під якими у виробничій економіці розуміють, як правило, якість змінних цілеспрямовано ресурсів (якість сировини, кваліфікація фахівців, види енергетичних ресурсів і ін.):

– неконтрольовані чинники $\vec{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ є вектором перешкод. По суті, це вектор обурень, про який менеджеріві відомо дуже мало або взагалі нічого не відомо. Тоді цей вектор взагалі не враховується. Якщо деякі статистичні характеристики компонентів вектора відомі, то їх слід враховувати при розробці моделі системи.

Будь-яка економічна, виробничо-економічна система призначена для перетворення векторів вхідних дій $\vec{Y}, \vec{U}, \vec{Z}$ у вектор вихідний змінної $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. У цьому і полягає суть виробничих процесів, що перетворюють матеріальні, енергетичні і трудові ресурси в продукт, що оцінюється економічними показниками (наприклад, собівартістю).

На рис. 1.3 вихідні змінні x_1, x_2, \dots, x_m характеризують результати роботи досліджуваної системи, а вектор \vec{X} носить назву вектора стану.

Промислове виробництво, представлене у вигляді структури на мал. 1.2 можна розглядати як керований об'єкт. Процес виробництва тієї або іншої продукції завжди порушуватиметься унаслідок зміни вектора обурень \vec{Y} об'єкту, що діє на вході. На практиці обуреннями є все ті випадкові дії на об'єкт, які відхиляють параметри виробничого процесу від заданих рівнів. На сучасних виробництвах можна виділити певні групи обурень:

y_1 – технологічні, такі, що характеризують відхилення параметрів процесів і засобів праці;

y_2 – психофізичні і медичні, пов'язані із захворюванням працівників і коливаннями їх індивідуальної продуктивності праці залежно від зовнішніх умов;

y_3 – соціальні, пов'язані з порушенням трудової дисципліни;

y_4 – кліматичні;

y_5 – організаційні і інформаційні, пов'язані з недосконалістю організації виробництва, планування, обробки і відображення інформації і ін. Таким чином, можна записати, що $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$.

Необхідно відзначити, що перераховані вище обурення діють на об'єкт із зовнішнього середовища, тому можуть бути охарактеризовані як первинні обурення (чинники, що збурюють). Треба також сказати, що дія первинних збурень породжує вторинні збурення, точка додатку яких вже не співпадає з первинними обуреннями із-за наявності внутрішніх зв'язків між елементами, що входять в об'єкт

Важливою властивістю складних систем є **емерджентність** – тобто наявність таких специфічних властивостей системи, які не впливають з властивостей, притаманних її елементам, а виникають у процесі їхньої взаємодії як наслідок відповідних кооперативних ефектів. Саме емерджентні властивості економічних систем є найменш доступними для спостереження та вимірювання, що вельми утруднює дослідження таких систем та управління ними. Загальні закономірності появи нових властивостей, породжуваних об'єднанням економічних об'єктів, явищ та процесів, можна виявити та кількісно описати, лише проаналізувавши значний обсяг інформації. Емерджентність легко зрозуміти на прикладах статистичної рівноваги: деякі ознаки можуть бути характерними для всієї статистичної сукупності явищ, не будучи характерними по окремих об'єктах і для виведення його властивостей на основі розглянутих властивостей складових його частин.

1.4. Класифікація систем

Частями, складовими різного роду складні утворення, тобто системи, можуть бути не тільки якісь фізичні предмети, але і деякі уявні, ідеальні об'єкти. Тому всі системи можна підрозділити на **фізичні** (або емпіричні) і **абстрактні** (або концептуальні). Фізичні складаються з реально існуючих (природних або штучних) об'єктів: машин, виробів, устаткування, працівників і так далі. Абстрактні – з об'єктів, що існують лише в думці людини: поняття, ідеї, гіпотези, плани і тому подібне. Наприклад, абстрактними системами будуть сукупність принципів, складових підстава якого-небудь учення, сукупність вживаних в дослідженнях методів, створюючих певну методологію, і так далі. Є також і системи змішаного типу. Так, уявляючи собі особу якої-небудь людини як систему, ми розглядаємо сукупність його фізичних даних і індивідуально виражених психологічних властивостей (характер, темперамент, здібності і інші), що є абстрактними поняттями.

Як друга ознака класифікації систем можна прийняти їх походження. Системи, які виникають в природних процесах, називають природними: Галактика, сонячна система, клімат, гірські системи і тому подібне. Якщо людина змінила систему шляхом перетворення складових її об'єктів, властивостей і взаємозв'язків, тоді вони називаються системами, зробленими людиною (штучними): транспорт, телефон, телеграф, конвеєр, ракетна система. **Природні і штучні** системи можуть бути фізичними або абстрактними.

Системи можна розділити на види також за ознакою структури їх побудови і значущості тієї ролі, яку грають і них окремі складові частини порівняно з роллю інших частин тієї ж системи. У деяких системах одному з складових їх об'єктів або однією з частин може належати домінуюча роль. Значення цього підрозділу системи набагато перевершує значення інших частин. Такий компонент системи виступатиме як центральний, такий, що визначає функціонування системи. Інші частини системи підкоряються дії центрального підрозділу. Такі системи називаються **централізованими**. Серед природних фізичних систем прикладом централізованої системи служить атом, в якому електрони обертаються навколо того, що займає центральне положення в системі ядра, а також сонячна

система. Із зроблених людиною систем централізованою назвемо систему виробництва, в якому всі цехи працюють ради забезпечення безперебійної роботи одного з цехів, наприклад складального конвеєра на машинобудівному заводі. У інших системах всі складові їх об'єкти приблизно однаково значущі. Структурно вони розташовуються не навколо деякого центрального об'єкту, як супутники, а взаємозв'язані послідовно або паралельно і мають приблизно однакове значення для функціонування системи. Такі системи називаються децентралізованими. Система транспорту в масштабі країни, що включає що раціонально поєднуються всі його види (железнодорожний, автомобільний, повітря, річковий, морський), може розглядатися як **децентралізована** система. Нецентралізованою (у технічному аспекті) є також система електростанцій, що працюють на єдине енергетичне кільце.

Системи можна класифікувати також по ступеню визначеності їх дії (функціонування). Якщо складові систему об'єкти (частини) і зв'язки між ними функціонують чином, що точно передбачається, систему називають **детермінованою** (визначеною). Будь-яке подальший стан такої системи можна точно передбачити, знаючи попередній стан і програму переходу системи в наступний стан. Системи, в яких складові їх об'єкти (частини) і зв'язки між ними функціонують так, що не можна точно затверджувати про послідовність їх станів, детально передбачати їх поведінку, називають **стохастичними**, тобто випадковими, імовірнісними або такими, що нерегулярно функціонують. У таких системах майбутні стани, тобто поведінка їх, описується (передбачається) за допомогою методів теорії вірогідності і математичної статистики. Саме такі системи частіше зустрічаються у виробничій практиці, в економіці. Їх важче досліджувати і описувати. Ними, в першу чергу, і займається економічна кібернетика.

Системи існують в певному навколишньому їх середовищі, обумовлюються нею і можуть і більшою або в меншій мірі обмінюватися з нею речовиною, енергією, інформацією. У зв'язку з цим вони діляться на **відкриті і закриті**. Ті, які з певною регулярністю і позаднім чином обмінюються з навколишнім середовищем речовиною, енергією або інформацією, називаються відкритими (незамкнутими) по якомусь з цих ознак (відкриті для енергії, відкриті для інформації, для речовини). Якщо такий обмін з навколишнім середовищем не спостерігається або ж він незначний і їм нехтують, системи будуть закритими (замкнутими).

Системи можуть по-різному реагувати на дію зовнішнього середовища: одні залишаються пасивні по відношенню до неї, інші пристосовуються до її дій, до зовнішніх змін. Залежно від цього їх ділять ще на дві групи: пасивні до змін зовнішнього середовища називають **неадаптивними**, а реагуючі на ці зміни, здатні пристосовуватися до них, називають **адаптивними**.

Системи, що складаються з людей, називають **соціальними** системами. Природно, в такі системи входять і різні об'єкти, з яких складаються фізичні неживі системи – машини, будівлі, споруди. Проте найбільш важлива, така, що визначає роль в них належить організаційній структурі і поведінці людей. Як приклад приведемо такі системи: виробничий колектив, громадські організації, технічні, спортивні і інші суспільства.

Системами, що складаються з одних тільки машин і механізмів і що діють

автоматично, без участі людей, є **машинні** системи. Виділення їх майже завжди до певної міри умовно, оскільки вони не здатні виробляти свій власний початковий стан і підтримувати своє функціонування. При більш загальному розгляді ці системи виступають зазвичай як частини більші, що включають і людей.

Для сучасного виробництва і для інших областей нашого життя характерна наявність совокупностей машин, що виконують певні складні функції за участю людини, причому основне навантаження лягає не на його м'язи, а на психічні процеси сприйняття, запам'ятовування, мислення. Такі системи виділяють в самостійну групу **людино-машинних** систем. Сюди ж відносяться і людино-машинні системи, що управляють, в яких в процесі взаємодії людини і обчислювальних машин виробляються рішення – сигнали, що управляють.

Системи, що існують тривалий час в порівнянні з обмеженим періодом діяльності людей в них, називають **постійними**. Наприклад, підприємство можна розглядати як постійну систему при розробці планів його розвитку на перспективу. Системи, які створюються на заданий період премою, а потім ліквідовуються, називаються **тимчасовими**. Група, створена для розробки деякого науково-дослідного проекту, а потім розформована, є тимчасовою системою.

Якщо властивості і функції системи протягом тривалого часу істотно не змінюються або змінюються у формі циклів, що повторюються, її називають **стабільною**. Система з властивостями, що змінюються, і функціями і без циклів, що строго повторюються, в цих змінах називається **нестабільною**.

Залежно від кількості об'єктів, включених в системи, їх підрозділяють на **великі** і **малі**.

Прості системи мають просту структуру і виконують якісь нескладні функції. **Складні** системи складаються з великої кількості взаємозв'язаних і взаємодіючих між собою частин (мають складну структуру) і виконують якусь достатньо складну функцію. Приналежність тієї або іншої конкретної системи до класу простих або складних є відносною. Іноді мета і завдання досліджень дозволяють абстрагуватися і розглядати складну систему як просту. Причому результати від цього не страждають, а проводити дослідження легко.

Отже, окрім описаних вже в подразд. 2.2 ділень систем на види їх можна класифікувати на статичних і динамічних. Ті системи, в яких показники, характеризують стан елементів, постійні в часі (параметри), а зв'язки між елементами жорсткі, називаються статичними. Тс же системи, в яких показники, що характеризують стан елементів, змінні в часі, а зв'язки між елементами – динамічні, називаються динамічними.

Ті системи, в яких показники, що характеризують стан елементів, постійні в часі (параметри), а зв'язки між елементами жорсткі, називаються **статичними**. Тс же системи, в яких показники, що характеризують стан елементів, змінні в часі, а зв'язки між елементами – динамічні, називаються **динамічними**.

У загальному випадку в будь-якій складній системі всі кількісні показники (і ті, що характеризують стан елементів, і ті, що визначають стан їх входів і виходів) змінюються в часі, тобто набір їх є $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, a_N\}$ якась функція від часу t : $A = f(t) = \{a_1(t), a_2(t), a_3(t), \dots, a_n(t), \dots, a_N(t)\}$. (1.1)

Якщо показниками набору виступають величини, що характеризують стан елементів системи, і відомий конкретний вираз функції $f(t)$, то можна вивчити

зміни, що відбуваються в системі зі збігом часу. Таким чином, функція (1.1) як би відображає рух системи в часі, через що її називають траєкторією або лінією поведінки системи. Значення цієї функції при $t = 0$ визначає стан системи на початку даного періоду, а при якомусь значенні стану $t = t_i$ її стан через t одиниць часу.

Деякі з показників a_i у відрізку часу, впродовж якого досліджується система, можуть не змінюватися або змінюватися настільки мало, що при прийнятій точності розрахунків цими змінами нехтують. Такі показники називаються **параметрами**. Показники, які змінюються в часі істотно і ці зміни враховуються в дослідженнях, називають **змінними**. Показники, що характеризують зв'язки між елементами системи, завдяки яким здійснюється їх узгоджене функціонування, тобто показники стану входів і виходів елементів, також можуть змінюватися з часом або ж залишатися незмінними. Зв'язки, що не змінюються, називаються **жорсткими, постійними або статичними**. Для набору показників a_i , що характеризують жорсткі зв'язки, функція, що визначає лінію поведінки системи, постійна: $A = f(t) = [a_1(t), a_2(t), a_3(t), \dots, a_n(t), \dots, a_N(t)] = \text{const}$, (1.2)

а її перша похідна дорівнює нулю:

$$A' = f'(t) = [a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t), \dots, a_n'(t), \dots, a_N'(t)] = 0. \quad (1.3)$$

Зв'язки, що змінюються з часом, між елементами називаються **гнучкими, змінними або динамічними**. Для таких зв'язків функція траєкторії руху системи в часі не є постійною, а її похідна не рівна нулю.

1.5. Соціально-економічна система

Соціально-економічна система це цілісна сукупність взаємозв'язаних і взаємодіючих соціальних і економічних інститутів (суб'єктів) і відносин з приводу розподілу і споживання матеріальних і нематеріальних ресурсів, виробництва, розподілу, обміну і споживання товарів і послуг.

Соціально-економічну систему, як, втім, і всяку іншу, характеризують системні якості. У їх ряду можна відзначити особливі економічні відносини, які зв'язують єдністю походження всі останні, з якого потім розвиваються все більш складні відносини. Воно є найпростішим для даних умов способом розподілу ресурсів і підтримки пропорцій.

Соціально-економічна система неминуче локалізована в економічному часі і просторі, а також по відношенню до її альтернативних варіантів. Вона має певні історичні, географічні, етнічні, духовні, політичні і економічні межі. Це у свою чергу означає, що вона може утілюватися в конкретних державно-політичних утвореннях або у формі інших, менших по масштабу, суспільно-господарських організацій. У міру посилення ефекту глобалізації як соціально-економічна система правомірно розглядати все людство. Цим обумовлюється історичність дослідження: будь-яка система, що вивчається, з одного боку, неминуче історично обумовлена, а, з іншою, історично обумовлені всі категорії і закони цієї системи.

Не всі риси даної системи виникають одночасно, а спочатку розвиваються прості соціальні і економічні форми, а на їх основі все більш і більш складні.

Складність економічної системи полягає передусім у тому, що зміна структури, зв'язків та поводження довільного економічного суб'єкта впливає на решту економічних суб'єктів і спричиняє зміну системи в цілому. Водночас будь-яка зміна в системі на макрорівні позначається на структурі, зв'язках та поводженні економічних суб'єктів.

Ще однією ознакою складності економічної системи є наявність великої кількості як прямих, так і зворотних зв'язків (матеріальних, інформаційних) між її елементами та підсистемами.

Основні властивості, притаманні соціально-економічним системам, які необхідно враховувати під час їх дослідження:

1. Цілісність, яка означає, що зміна будь-якого компоненту системи впливає на її інші компоненти і приводить до зміни системи в цілому. Таке явище можна, наприклад, прослідкувати у разі діалектичної взаємодії продуктивних сил і виробничих відносин, коли при зміні засобів виробництва міняються відповідно виробничі відносини і система в цілому. Тобто, ми в даному випадку маємо справу з взаємозалежністю компонентів економічної системи.

2. Ієрархічність. Це означає, що кожна система може бути розглянута як елемент вищого порядку. Наприклад, економіка України, як перехідна, може бути розглянута як один з елементів системи-світу.

3. Інтегративність (емерджентність), яка припускає, що система в цілому володіє властивостями, відсутніми у її елементів (наприклад, розподіл праці, який можливий тільки за наявності деякої кількості виробників). Вірно і зворотне, тобто, елементи можуть володіти властивостями, які не властиві системі в цілому.

4. Динамічність економічних процесів, що полягає у зміні параметрів та структури економічних систем під впливом зовнішніх і внутрішніх факторів.

5. Стохастичний характер економічних явищ, з огляду на який для їх опису застосовуються статистичні методи дослідження, а це означає, що поводження економічних систем не піддається точному детальному опису та прогнозуванню.

6. Закономірності економічних процесів можна виявити тільки на підставі достатньої кількості спостережень.

7. Здатність до самоорганізації, тобто здатність без регулюючого впливу покращувати свої показники.

8. Її підсистеми не мають чітких меж: один і той самий елемент (економічний суб'єкт) може одночасно брати участь у різних процесах функціонування економіки, може бути елементом багатьох її підсистем.

9. Економічні процеси не можна ізолювати від зовнішнього середовища та спостерігати їх у «чистому» вигляді.

При аналізі і розробці кібернетичних соціально-економічних систем потрібно одразу визначити певну класифікацію підсистем, аналіз структури і зв'язків яких дозволить точніше їх описати і створити.

Для прикладу табл. 1.1 представлена ієрархія і деталізація управління виробництвом, розбита на підсистеми.

При виконанні курсової роботи рекомендується обирати для дослідження одну з цих підсистем.

Таблиця 1.1

Зразковий перелік об'єктів управління і типових завдань економіко-організаційного управління підприємством

Індекс підсистеми	Підсистема	Супутні процеси об'єктів управління і функціональних завдань
А	Основні фонди	<ol style="list-style-type: none"> 1. Придбання, надходження, зведення. 2. Стан нових, відновлених, готівки. 3. Наявність. 4. Розподіл і внутрішні переміщення. 5. Використання і завантаження. 6. Вибуття. 7. Знос, амортизація і плата за фонди. 8. Поточний ремонт. 9. Капітальний ремонт
В	Оборотні фонди	<ol style="list-style-type: none"> 1. Надходження, придбання, освіта. 2. Якість тих, що поступили, готівки відновлених. 3. Наявність. 4. Розподіл і внутрішні переміщення. 5. Використання. 6. Вибуття. 7. Відновлення
С	Трудові ресурси	<ol style="list-style-type: none"> 1. Надходження. 2. Атестація тих, що поступили, навчилися і є в наявності. 3. Розподіл, внутрішні переміщення, використання трудових ресурсів. 4. Використання робочого часу. 5. Використання фонду зарплати. 6. Вибуття. 7. Навчання і підвищення кваліфікації
І	Інтелектуальні ресурси	Виконання сторонніми організаціями для виробничого підприємства: 1) наукові досліджень; 2) спеціального математичного забезпечення; 3) конструкторських розробок; 4) технологічних розробок; 5) нормативних даних
ЕІ	Відвантаження і реалізація продукції	<ol style="list-style-type: none"> 1. Маркетинг. 2. Продукція, що підлягає відвантаженню. 3. Відвантаження і постачання готовій продукції. 4. Реалізація продукції. 5. Відвантаження і реалізація неліквідів (надлишків основних і оборотних фондів)
Е2	Фінансова діяльність	Наявність і використання: 1) держбюджетні асигнування; 2) платежі до держбюджету; 3) кредити банку; 4) розрахунки за кредити банку; 5) надходження грошей на рахунок підприємства в банці; 6) витрати з рахунку підприємства в банці; 7) розрахунок за відвантажену продукцію; 8) розрахунок за надані послуги; 9) розрахунок за отриману продукцію; 10) розрахунок за отримані послуги; 11) надходження грошей в касу; 12) витрата грошей з каси і повернення в банк
ДІ	Виробнича діяльність по випуску продукції	<ol style="list-style-type: none"> 1. Запуск-випуск товарної продукції (основною і допоміжною). 2. Якість продукції, сортність. 3. Випуск продукції для своїх підрозділів

Індекс підсистеми	Підсистема	Супутні процеси об'єктів управління і функціональних завдань
D2	Виробнича діяльність обслуговуючого типу	1. Виконання сервісних послуг своїм підрозділам. 2. Поточна конструкторська підготовка виробництва. 3. Поточна технологічна підготовка виробництва. 4. Розрахунково-обчислювальні роботи. 5. Оперативне коректування норм і нормативів. 6. Функціонування інформаційно-довідкової служби. 7. Господарське обслуговування
D3	Виробнича діяльність по виконанню інших операцій	1. Будівництво. 2. Послуги стороннім організаціям. 3. Конструкторські розробки 4. Технологічні розробки для випуску нової продукції. 5. Розробка нових форм. 6. Науково-дослідні роботи. 7. Спеціальне математичне забезпечення.
P	Розвиток виробництва	1. Впровадження нової техніки 2. Впровадження нових матеріалів. 3. Оргтехмероприяття. 4. Зростання продуктивності купа і НОТ. 5. Формування і розподіл: 1) повернення і собівартість; 2) балансовий прибуток і рентабельність; 3) інтегральні показники діяльності підприємства; 4) фонди економічного стимулювання; 5) фінансовий план і його використання.

Таблиця 1.2

Компоненти тіла об'єктів систем життєзабезпечення А, В, С

Перший ярус тіла об'єкту управління	Компоненти другого ярусу тіла об'єкту управління								
А - основні фонди	Будівлі	Спо-руди	Ма-шини і уста-ткування	Пере-даточні за-соби	Транс-портні за-соби	Інстру-менти	Виробничий інвентар	Госпо-дарський інвен-тар	Інші осно-вні фонди
В - оборотні фонди	Сировина, основні ма-теріали, на-півфабрика-ти	Допо-міжні мате-ріали	Пали-во, елек-трое-нергія	Тара і упа-ковка	Запас-ні час-тини	Неза-вер-шене вироб-ництво	Малоцінні предмети і ті, що швидко зношуються		
С - трудо-ві ресурси	Кадри	Зар-плата основ-на	Зар-плата дода-ткова	Кале-ндар-ний час	-	-	-	-	-

1.6. Зворотній зв'язок

Якщо до об'єкта або системи (A) додано інший об'єкт або систему (B) таким чином, що вихідні фактори з A поступають до вхідних факторів B , а вихідні фактори B поступають на входи A – це називається зворотнім зв'язком об'єкта чи системи A . На рис 1.4 представлено спрощену схему зворотного зв'язку, коли об'єкти A і B мають тільки по одному входу та виходу, але в загальному випадку кількість входів та виходів A і B може бути великим і зворотній зв'язок може здійснюватися з декількома входами і виходами.

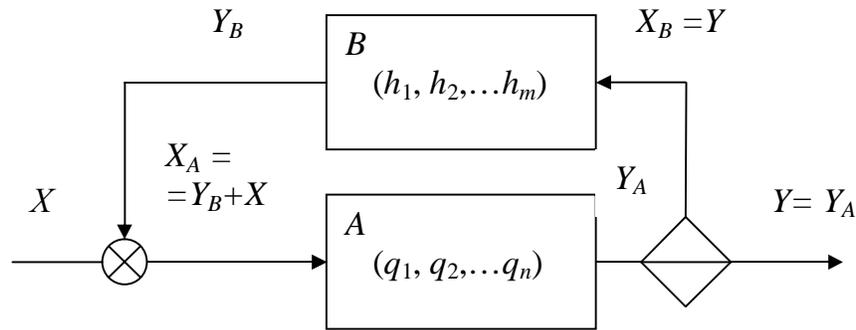


Рис. 1.4. Принципова схема зворотного зв'язку
(q_i , h_j – параметри об'єктів A та B)

Якщо об'єкт A описується таким зв'язком поміж входом і виходом як $Y_A = f(X_A, q_1, q_2, \dots, q_n)$, а об'єкт $B - Y_B = g(X_B, h_1, h_2, \dots, h_m)$, де f, g – якісь відомі функції, що зв'язують входи та виходи об'єктів і залежать від параметрів та входів об'єктів. Тоді у загальному випадку така система буде описуватися залежністю

$$Y = f(X_A + g(Y, h_1, h_2, \dots, h_m), q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (1.4)$$

Для прикладу, нехай

$$Y_A = 5 \frac{dX_A}{dt} + 3X_A - 10, \quad Y_B = -8X_B + 4.$$

Тоді система буде описуватися виразом

$$Y = 5 \frac{d[X + (-8Y + 4)]}{dt} + 3[X + (-8Y + 4)] - 10,$$

який після перетворення прийме вигляд

$$40 \frac{dY}{dt} + 25Y = 5 \frac{dX}{dt} + 3X + 2. \quad (1.5)$$

Вирішення нелінійного диференційного рівняння можна виконати за допомогою математичного процесора **M** у графічному вигляді, отримавши фазову траєкторію як на рис.1.2.

Зворотній зв'язок розділяють на **позитивний** (коли зі збільшенням $Y_A - Y_B$ теж збільшується) і **негативний** (коли навпаки, зі збільшенням $Y_A - Y_B$ зменшується).

Механізм негативного зворотного зв'язку забезпечує відновлення та підтримання рівноваги (порядку) в системі. Цей механізм існує в системах різних типів: природних, технічних, біологічних, економічних тощо. Принцип регулювання за допомогою зворотних зв'язків є одним із ключових у кібернетиці. Якщо значення параметрів регулювання відхиляються на виході від заданих, що свідчить про порушення рівноваги в системі або про неоптимальний режим її

функціонування, то завдяки механізму зворотного зв'язку відбувається таке коригування входів системи, щоб рівновага в ній відновилась.

У складніших системах, зокрема біологічних, соціально-економічних, за допомогою механізму негативних зворотних зв'язків підтримується стан *динамічної рівноваги*. Так, у біології відоме явище *гомеостазису* – підтримання стійкої рівноваги між життєво важливими функціями організму, що еволюціонує. У загальнішому сенсі йдеться про підтримання програми функціонування системи.

Наприклад, «невидима рука», що в ринковій економіці збалансовує попит і пропозицію, встановлюючи рівноважні ціни, і є механізмом гомеостазису. Щодо ринкової рівноваги, то вона означає встановлення спонтанного порядку, оскільки немає управляючого органу, який дістає інформацію про відхилення від рівноваги між попитом і пропозицією та коригує ціни, повертаючи систему до рівноважного стану. Спонтанна рівновага встановлюється на ринку внаслідок взаємодії продавців і споживачів. Кожний із них діє свідомо, маючи власні цілі, але в результаті їхніх спільних дій виникає єдиний для всіх порядок, що полягає у встановленні рівноважних цін та обсягів продукції.

Негативні зворотні зв'язки, компенсуючи відхилення, не завжди повертають систему до вихідних параметрів рівноваги (зокрема, до вихідних значень рівноважних цін та обсягів продукції). Це й означає, що йдеться про динамічну рівновагу.

Згідно з принципом позитивних зворотних зв'язків деякі зміни в системі не пригнічуються, а нагромаджуються та підсилюються, що може призводити до кумулятивних ефектів – переходу системи до нерівноважного стану. Далі система або руйнується, або принципово перебудовується зі зміною структури, функцій тощо.

1.7. Інформація

Інформація - абстрактне поняття, що має різні значення залежно від контексту. Походить від латинського слова «*informatio*», яке має декілька значень:

- ♣роз'яснення; виклад фактів, подій; витлумачення;
- ♣представлення, поняття;
- ♣ознайомлення, просвіта.

Загальне поняття інформації подано у філософії, де під нею розуміють відображення реального світу.

Інформація – це нові відомості, які прийняті, зрозумілі і оцінені її користувачем як корисні. Іншими словами, **інформація** – це нові знання, які отримує споживач (суб'єкт) у результаті сприйняття і переробки певних відомостей.

Теорія інформації – це розділ математики, який досліджує процеси зберігання, перетворення і передачі інформації. Теорія інформації тісно пов'язана з такими розділами математики як теорія ймовірностей і математична статистика. Вона пов'язана з інформаційною ентропією, комунікаційними системами, криптографією, корекцією помилок і іншими важливими областями. В основі теорії інформації лежить обчислення кількості інформації у випадковій величині відносно іншої випадкової величини.

Приклад. Фахівець, що виїжджає у відрядження на два підприємства і охочий потрапити на виробничі наради, які проводяться там щонеділі, запитав у представників цих підприємств, що знаходилися в цей час в його установі, в які дні скликаються наради. Представник першого підприємства відповів: «У нас наради проводяться по п'ятницях», інший повідомив: «А у нас по п'ятницях ніяких нарад не скликають. П'ятниця у нас – передсвятковий день, вільний від всяких нарад». Скільки інформації передав фахівцеві кожен з представників в своєму повідомленні, хоча перший з них сказав 6 слів, а другий – 18, тобто в три рази більше?

Представимо день наради як систему здатну, (при п'ятиденному робочому тижні) знаходитися в кінцевому числі дискретних станів ($n - 5$). Система X може прийняти один з п'яти можливих станів: x_1 – понеділок, x_2 – вівторок, x_3 – середа, x_4 – четвер, x_5 – п'ятниця. Вважаючи кожен із станів рівноімовірним, ступінь невизначеності системи H можна прийняти рівною кількості можливих невідомих нам станів n системи, тобто 5 одиниць для першого і другого підприємств. Вважатимемо, що кількість інформації у вислові кожного з представників дорівнює тій величині, на яку зменшилася невизначеність системи в результаті отриманого повідомлення про неї. Після повідомлення представника першого підприємства система, що цікавить фахівця, стала повністю визначеною: невідомих днів проведення наради немає ($n = 0$) і ступінь невизначеності її став рівний $H_1 = 0$. Після повідомлення представника другого підприємства невизначеність другої системи зменшилася всього лише на одну одиницю (фахівець тепер точно знає, що система не може потрапити в стан x_5 , тобто п'ятниця немає в день нарад), по чотири стани залишилися, невизначені і, отже, невизначеність системи $H_2 = 4$. Розрахуємо кількість інформації, переданої в повідомленні кожного з представників, як різницю між невизначеністю систем, що цікавлять фахівця, до отримання ним повідомлення H і невизначеністю після повідомлення: $I = H - H'$; у повідомленні представника першого підприємства $I_1 = 5 - 0 = 5$, у повідомленні представника другого підприємства $I_2 = 5 - 4 = 1$. Отже, в повідомленні представника першого підприємства, що складається з шести слів, інформації, вимірюваної числом можливих невизначених станів системи, що цікавить нас, міститься в п'ять разів більше, ніж в повідомленні другого, що складається з вісімнадцяти слів.

Для вимірювання кількості інформації найбільш придатна логарифмічна функція. Позначивши число можливих невідомих нам станів системи до отримання повідомлення через n , а після получения – через n' , невизначеність H стану системи X до повідомлення $H(X)$ і після – $H'(X)$, знаходимо як

$$H(X) = \log n; \quad H'(X) = \log n'. \quad \text{Кількість інформації, отриманої при цьому, можна розрахувати як різницю невизначеності стану системи до повідомлення про неї і після нього, тобто як величину}$$

$$I = H(X) - H'(X) = \log n - \log n' = \log \frac{n}{n'}, \quad (1.8)$$

При повному з'ясуванні стану системи, ($n' = 1$), в якому знаходиться система, кількість інформації в повідомленні буде рівна логарифму числа можливих станів системи до повідомлення:

$$I = \log n - \log n' = \log n - \log 1 = \log n - 0 = \log n.$$

Як міра невизначеності системи в теорії інформації беруть не число мож-

ливих станів системи n , як в розглянутому раніше прикладі, і не логарифм його $\log n$, а суму добутку вірогідності p_i настання кожного i -го з n станів на логарифми цієї вірогідності $\log p_i$, узяті із зворотним знаком:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i. \quad (1.9)$$

Цю величину називають ентропією системи. Максимальне значення при однаковій кількості станів n вона приймає в тих системах, у яких стани рівноімовірні; величина її в цьому випадку рівна логарифму числа станів:

$$H(X) = -n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -(\log 1 - \log n) = \log n.$$

При семантичному підході до дослідження економічної інформації вивчаються її зміст і способи знакового уявлення. Економічна інформація у такому разі повністю ототожнюється з економічними даними. Важливою характеристикою інформації є також її цінність, корисність для споживача. Часто на практиці різні приймачі отримують одні і ті ж потрібні ним відомості, які зменшують невизначеність їх знань про стан деякої системи, що цікавить його, але інтерес і ступінь корисності інформації для кожного з одержувачів неоднакові.

Крім того, цінність інформації характеризується її актуальністю, надійністю, достовірністю отримуваних відомостей. Такий аналіз можна проводити кількісно, якщо вказані якості вдається виразити у вигляді конкретних чисел. Застосовні також і інші методи визначення корисності економічної інформації. Таким чином, дослідження економічної інформації з погляду її корисності є найбільш конкретними і узагальнюють в якійсь мірі кількісний і смисловий аспекти її розгляду.

Отже, інформація є складним явищем, що характеризується принаймні з трьох різних сторін: кількісною, змістовною (або смисловий) і прагматичною. Тому останнім часом отримує розвиток ідея з'єднання різносторонніх оцінок інформації в одному показнику, що представляється у вигляді

$$I_{ij}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)], \quad (1.10)$$

де— x_1, x_2, x_3, x_4 координати вектора у момент часу t , причому x_1 — координата, що характеризує кількість інформації в повідомленні; x_2 — характеристика якості інформації; x_3 — показник змістовності інформації; x_4 — характеристика корисності інформації.

1.8. Основні закони та принципи кібернетики

При організації і виконанні управлінської роботи із застосуванням кібернетики необхідно враховувати і використовувати виведені в ній наукові закони, закономірності і принципи.

Закон необхідної різноманітності.

Для його розуміння цього закону уявимо собі систему, яка знаходиться в багатьох різних станах або, іншими словами, володіє певною різноманітністю. Окремі стани цієї системи небажані, шкідливі для неї. Пристрій системи, що управляє, покликаний перешкоджати попаданню її в такі стани. Він може зробити це, прийнявши деякий свій стан, що перешкоджає попаданню керованої системи в небажаний стан. Розгляд такої системи приводить до наступних ви-

водів: щоб скоротити кількість можливих попадань системи в небажані стани (тобто зменшити її різноманітність), необхідно збільшити кількість станів керуючого пристрою (його різноманітність), якими воно перешкоджає цьому. Щоб пристрій, що управляє, міг ефективно управляти системою, різноманітність станів його, якими він перешкоджає попаданню керованої системи в небажаний стан, повинна бути не меншою, ніж різноманітність можливостей системи потрапити у вказаний стан.

Отже тільки різноманітність в одній підсистемі може зменшити різноманітність, що створюється в іншій. І тільки різноманітність може знищити різноманітність.

Економічні системи (підприємства, об'єднання і т. п.). достатньо різноманітні по станах вироблюваної продукції, яка може виступати як валова, готова, товарна, реалізована, чиста (нормативна, умовна). Звідси труднощі і підбори вимірника, коюрий був би у всіх випадках задовільним. Для ефективного управління випуском продукції, що має значну різноманітність своїх станів, потрібний необхідну різноманітність і керівників нею вимірників. Як один з основних директивних узагальнювальних показників промислового виробництва введений показник чистої (нормативною) продукції. Але не усуваються і показники валової продукції (як один з основних вимірників, що характеризують об'єм промислового виробництва), а також готовій, товарній, реалізованій продукції. Складною системою представляється поняття рентабельності підприємства. Велика різноманітність різних його аспектів вимагає необхідної різноманітності показників, що оцінюють рентабельність і керівників нею. Отже, окрім показника рентабельності, що обчислюється як відношення прибули від реалізації продукції до повної собівартості її, в даний час розраховують рентабельність як відношення балансового прибутку до суми основних виробничих фондів і нормованих оборотних коштів. Для всесторонньої оцінки рентабельності виявляють також відношення прибули до загальної трудомісткості (відпрацьованим трудочасам), до суми заробітної плати і так далі. Її рахують не тільки в сумарному вигляді по підприємству або цеху, але і по групах виробів в динаміці.

Принцип вибору рішень на підставі відбору і перетворення інформації.

Управління – це можливість вибору з багатьох альтернативних цілей якийсь одній, з багатьох засобів до досягнення її – якихось визначених, з багатьох шляхів до досягнення мети – найбільш відповідного. Мається на увазі вибір не випадковий, а розумний, доцільний. Там, де немає можливості вибору, немає і управління. Пристрій, що управляє, у такому разі діє як якийсь проміжний елемент в каналі зв'язку, передаючи виконуючій частині системи єдиний, вибраний у вищестоящому органі управління варіант рішення. У виконанні функції управління він не бере участі. Отже, для ефективного здійснення функції управління пристрою, що управляє, необхідна наявність альтернативних варіантів рішення і можливості вибору найбільш відповідного з якоїсь точки зору. Для цього кожен варіант рішення повинен характеризуватися деякими даними, порівнюючи і аналізуючи які, підсистема, що управляє, оцінює кожен з можливих варіантів і вибирає якнайкращий. Міркуючи таким чином, можна сформулювати постулат згідно якому будь-яка система, виконує відповідний відбір (наступінь вище випадкового), користуючись отриманою інформацією. Це і є суть

принципу вибору рішень на підставі відбору і перетворення інформації.

Сформульований принцип відображає фундаментальні кібернетичні положення про те, що управління є вибір рішення з багатьох альтернативних варіантів шляхом обробки необхідної і достатньої кількості інформації. На практиці він означає, що в процесі планування органи, що управляють, повинні розглянути декілька варіантів плану і вибрати якнайкращий. Це особливо чітко виявляється в процесі оптимального планування за допомогою економіко-математичних методів, коли в якійсь формі (у таблиці, на графіках, номограмах) цілеспрямовано перебираються багато можливих варіантів рішень і по прийнятому критерію знаходиться оптимальний.

Для економічних процесів взагалі характерна наявність протилежних тенденцій, оскільки на будь-якому з них відбивається протилежний вплив безлічі чинників: зростання капітальних вкладень, збільшуючи собівартість продукції, приводить в той же час до економії на поточних витратах; підвищення надійності продукції зазвичай викликає дорожчання її, але це вигідно споживачеві; непомірна економія витрат на зміст устаткування може привести до передчасного його зносу і до тих, що знизали з цим великим збиткам. З цього виникає необхідність зіставлення багатьох варіантів економічних рішень. У сучасному виробництві, для якого характерне збільшення кількості впливаючих чинників, ускладнення взаємозв'язків, підвищення економії від правильно вибраного рішення і зростання збитків від допущених помилок, значення принципу вибору рішень на підставі відбору і перетворення інформації різко зростає.

Принцип обов'язковості зворотного зв'язку.

При розгляді попереднього принципу про управління мовилося як про деякий разовий акт дії. Проте управління не обмежується одноразовим імпульсом, а є процесом, що протікає в часі. Первинна дія може не дати бажаних результатів, і його доведеться уточнювати, підсилювати або ослаблювати. У керованому підрозділі можуть змінитися умови і стати не такими як ті, на які був розрахований імпульс, що управляє. Крім того, за першою проблемою з'явиться друга, третя і так далі. Для вирішення кожною з них буде потрібно знання не тільки навколишніх умов, стани середовища, але і інформація про фактичне положення керованого підрозділу. Потреба в надходженні такої інформації відчуватиметься постійно, оскільки управління здійснюється як стійкий процес.

Отже, для ефективного управління в складних динамічних системах обов'язковий канал зв'язку, по якому поступає в орган управління інформація про фактичні стани функціонування керованої підсистеми і відповідно до якої орган, що управляє, виробляє, уточнює, порівнює або змінює ті, що виробляються їм дії, що управляють, – рішення. Це і є вироблений в кібернетиці принцип обов'язковості зворотного зв'язку.

В керівництві виробництвом цей принцип практично завжди прагнули дотримувати задовго до того, як в кібернетиці були виведені розглянуті поняття і доведений сам принцип. Дотримання його виявляється в існуванні в економіці таких вимог: показності звітних даних; обхвату звітними даними показників плану; методичної єдності планових і облікових показників; узгодженості звіту і плану по періодах часу. Стисло ці вимоги формулюються в плануванні як принцип єдності плану і обліку.

Принцип зовнішнього доповнення.

Аналіз процесів управління в системах виявив суперечності між необхідністю функціонування їх як відособлених, самоуправляемих по замкнутому контуру зв'язку об'єктів і неможливістю досягти цього із-за різного роду обурюючих впливів на систему з боку зовнішнього середовища, оскільки для стійкого і ефективного функціонування складної динамічної системи необхідне, щоб управління здійснювалося в ній по заздалегідь розробленому плану (тобто за певною програмою) з використанням зворотного зв'язку. Система, отже, повинна функціонувати автономно, відособлено від інших об'єктів. Проте дослідження учених в області математики, привели до виводу про те, що замкнута система не здатна різними шляхами, відправляючись від всіляких початкових умов, досягати певної мети. Вона не може тривалий час стійко і ефективно функціонувати із-за зовнішніх впливів, обурень зовнішнього середовища.

Вирішення вказаної суперечності знайдене англійським ученим Біром Ст., який сформулював так званий принцип зовнішнього доповнення. Він запропонував, не розриваючи ланцюг управління, включити в неї деякий додатковий елемент – «чорний ящик», покликаний задовольняти потреби управління в обліку впливу зовнішнього середовища. «Чорний ящик» в цій схемі управління повинен у випадковому порядку (на підставі законів розподілу вірогідності, за допомогою випадкових чисел або навіть інтуїтивно) знаходити рішення для тих випадків, коли у вирішеннях пристрою, що управляє, є недоліки з причини неврахованих зовнішніх збурень.

Стосовно управління в промисловому виробництві принцип зовнішнього доповнення формулюють так: у будь-якій системі план повинен враховувати можливість дії зовнішніх систем і чинників, не передбачених планом. Практично це означає, що навіть при найдосконалішій системі планування і добре організованому управлінні завжди залишаться якісь ділянки роботи, не охоплені планом і не регламентвані директивними показниками.

1.9. Індивідуальні завдання № 1.

Засвоєння поняття про інформацію та зворотній зв'язок

Завдання: для системи, зображеної на рис. 1.4, розрахувати її математичний опис, якщо дані описи об'єктів A та B . Визначити кількість інформації в системі, якщо відомі ймовірності всіх п'яти станів вхідного фактора X .

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки N_3 та номер за списком навчальної групи N_2 . Варіант функції A обирається з табл. 1.3 за N_3 , а варіант функції B – для студентів, чий номер за списком групи N_2 є непартним – за числом N_3 , якщо парний – за числом $(9 - N_3)$. Ймовірність станів обирається з табл. 1.4 за N_2 .

Методичні вказівки: 1) за (1.4) знаходиться математичний опис системи, що складається з двох об'єктів; Для цього одне рівняння підставляється

в інше і приводяться подібні. Аналітичний вираз знаходити за допомогою;

2) за знайденим аналітичним рівнянням побудувати фазову траєкторію системи для діапазону зміни X $[-50; +50]$ за допомогою **M**;

3) за (1.9) знайти ентропію системи.

Порядок використання M для вирішення диференціальних рівнянь:

Функція **odesolve** вирішує диференціальні рівняння, записані в загальноприйнятому в математичній літературі вигляді:

- $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = B(x)$.
- задачу Коші $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{0,1}$, $y''(x_0) = y_{0,2}$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$.
- просту граничну задачу $y^{(k)}(a) = y_{a,k}$, $y^{(m)}(b) = y_{b,k}$, $0 \leq k \leq n-1$; $0 \leq m \leq n-1$.

Щоб підготувати **M** для обчислення диференціальних рівнянь необхідно після запуску програми клацнути по пункту меню View (Вигляд), в меню, що відкрилося, навести мишу на рядок **Toolbar** (Панель інструментів) і помітити рядки **Graph** (Графік), **Boolean** (Булеве), **Calculus** (Калькуляція) і **Calculator** (Калькулятор).

Щоб знайти рішення диференціального рівняння за допомогою вбудованої функції **odesolve** потрібно:

– записати ключове слово **Given**, потім ввести рівняння і початкові або граничні умови. При введенні рівняння і умов задачі використовується знак символічної рівності **<Ctrl>+<=>** або знак **<=>** у панелі **Boolean** (Булеве). У записі виразу для функції можна використовувати знаки (імена) елементарних функцій, вводячи їх за допомогою клавіатури або за допомогою панелі **Calculator** (Калькулятор). Вставити у вираз букву грецького алфавіту можна за допомогою панелі **Greek** (Грецька). Для запису похідних можна використовувати як оператори диференціювання з панелі **Calculus** (Калькуляція), так і знак похідної (клавіша , яка знаходиться над клавішею Tab), наприклад, другу

похідну можна вводити у вигляді $\frac{d^2}{dx^2}y(x)$ або у вигляді $y''(x)$. При цьому необхідно обов'язково записувати в дужках аргумент шуканої функції;

– задати ім'я для розшукуваного вирішення **y** і знак привласнення **:=** (для введення знаку привласнення потрібно натиснути на клавіатурі комбінацію клавіш **<Shift> + <:=>** або клацнути по кнопці **< := >** панелі **Evaluation** (Обчислення));

– задати функцію **odesolve** із списку в пункті **Function** (Функція) меню **Insert** (Вставка). Функція **odesolve** вирішує поставлену задачу методом Рунге–Кутти з фіксованим кроком.

Для вирішення задачі методом Рунге–Кутти з автоматичним вибором кроку потрібно клацнути в робочому документі на ім'я функції правою кнопкою миші і помітити в спливаючому меню пункт **Adaptive**.

Звернення до функції має вигляд

$$y := \text{odesolve}(x, b, \text{step}) \text{ або } y := \text{odesolve}(x, b),$$

де y – ім'я функції, що містить значення знайденого рішення, x – змінна інтеграції, b – кінець проміжку інтеграції, $step$ – крок, який використовується при інтеграції рівняння методом Рунге–Кутти.

Зауваження: Якщо при введенні виразу була допущена помилка, виділіть неправильний символ кутовою рамкою (клацніть справа вниз біля символу), видаліть виділений символ за допомогою клавіші **Backspace** і введіть у поміченій позиції виправлення.

Для отримання графічного рішення потрібно:

- клацнути по відповідній кнопці в панелі **Graph** (Графік). У робочому документі відкриться вікно побудови графіків;

- ввести в поміченій позиції біля осі абсцис ім'я аргументу x , а в позиції біля осі ординат – ім'я функції з аргументом в круглих дужках $y(x)$. У позиціях зліва і праворуч від аргументу і функції ввести діапазон значень, які повинні приймати аргумент і функція;

- клацнути по робочому документу поза вікном графіків.

Для зміни параметрів зображення потрібно двічі клацнути по полю графіка. Ці параметри можна міняти не закриваючи вікно настройки, а тільки клацаючи по кнопці **Apply** (Застосувати), щоб подивитися результат настройки. Переміщення покажчика миші по полю графіка з натиснутою лівою кнопкою дозволяє повертати графік і розглядати його з усіх боків. Мишу з скролінгом дозволяє

збільшувати і зменшувати масштаб графіка.

Значення рішення в будь-якій точці проміжку інтеграції можна використовувати в подальших обчисленнях, достатньо ввести в потрібному місці ім'я функції y , вказавши в дужках значення аргументу і натиснувши звичайний знак рівності \Leftarrow на клавіатурі.

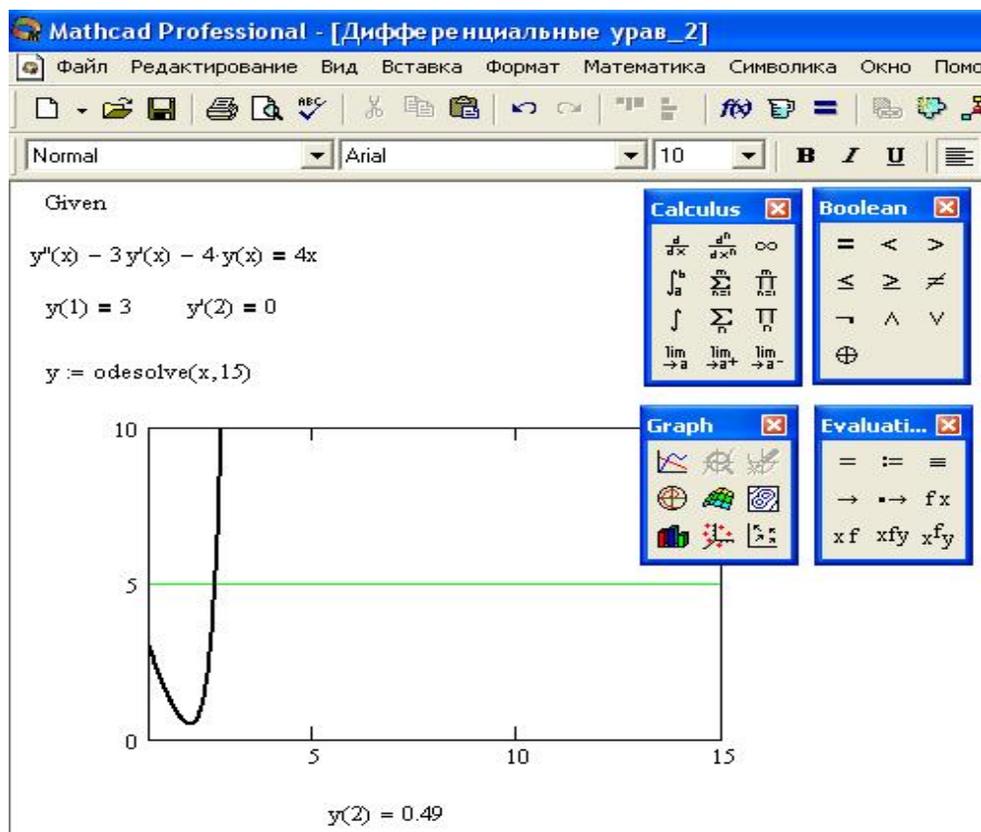


Рис. 1.5. Рішення диференціального рівняння $y'' - 3y' - 4y = 4x$ за допомогою вбудованої функції **odesolve**

Для прикладу знайдемо часткове рішення лінійного неоднорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами в точці $y(2)$.
 $y'' - 3y' - 4y = 4x$, початкові умови: $y(1) = 3; y'(2) = 0$. Спочатку пригадаємо як в середовищі MathCAD 2001 Professional будуються графіки функцій. Використовуючи панель **Graph** (Графік), побудуємо графік функції) рис. 1.5), який описує часткове рішення задачі і знайдемо значення функції в точці $y(2)$.

Таблиця 1.3

Варіанти математичного опису об'єктів A та B

Номер варіанту	Об'єкти	
	A	B
0	$4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx.$	$y = 5x^{-2} + 6.$
1	$6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx.$	$y = -4\sqrt{8 + x^2} - 27.$
2	$\sqrt{3 + y^2} dx - ydy = x^2 ydy.$	$y = e^{2x} - 40.$
3	$6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx.$	$y = -\sqrt{4 + x^2} + 20.$
4	$y(4 + e^x) dy - e^x dx = 0.$	$y = -x^3 + 2x.$
5	$(e^x + 8) dy - ye^x dx = 0.$	$y = \sqrt{1 + x^2}.$
6	$6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx.$	$y = 2x^2 - 3x.$
7	$\sqrt{5 + y^2} dx + 4(x^2 y + y) dy = 0.$	$y = x^2 - x.$
8	$3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2 + y^2} dx = 0.$	$y = -x^2 - 3x.$
9	$x\sqrt{1 + y^2} + y \frac{dy}{dx} \sqrt{1 + x^2} = 0.$	$y = -3x^2 + 5x.$

Таблиця 1.4.

Варіанти значень ймовірностей станів на вході системи

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Ймовірність	1	0,23	0,32	0,05	0,07	0,03	0,34	0,18	0,14	0,37	0,35	0,22	0,29	0,03	0,28	0,07
	2	0,24	0,08	0,34	0,34	0,11	0,06	0,27	0,08	0,04	0,15	0,07	0,22	0,05	0,13	0,08
	3	0,26	0,07	0,17	0,09	0,15	0,15	0,07	0,28	0,02	0,2	0,09	0,33	0,04	0,07	0,25
	4	0,27	0,27	0,22	0,26	0,1	0,3	0,36	0,02	0,16	0,17	0,35	0,31	0,13	0,22	0,17
	5	0,07	0,26	0,22	0,24	0,61	0,15	0,12	0,48	0,41	0,13	0,27	-0,15	0,75	0,3	0,43
Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Ймовірність	1	0,27	0,08	0,1	0,32	0,22	0,24	0,28	0,31	0,26	0,37	0,04	0,31	0,2	0,35	0,26
	2	0,17	0,14	0,04	0,07	0,14	0,1	0,11	0,28	0,19	0,11	0,21	0,01	0,11	0,14	0,22
	3	0,07	0,34	0,13	0,22	0,29	0,06	0,27	0,04	0,21	0,2	0,22	0,36	0,33	0,06	0,14
	4	0,06	0,17	0,32	0,2	0,04	0,34	0,24	0,22	0,14	0,29	0,26	0,01	0,29	0,26	0,34
	5	0,43	0,27	0,41	0,19	0,31	0,26	0,1	0,15	0,2	0,03	0,27	0,31	0,07	0,19	0,04

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте предмет та методи кібернетики.
2. Дайте визначення основних методів економічної кібернетики.
3. Чим економетрика відрізняється від економічної кібернетики?
4. Які головні елементи економічної кібернетики?
5. Що таке об'єкт?
6. Подайте поняття факторів та параметрів об'єкта.
7. Що таке фазовий портрет (траєкторія) об'єкта?
8. Поясніть умовність поділу на системи і об'єкти.
9. Визначте відміну управління, збурення, перешкод та виходів, як факторів системи.
10. Наведіть класифікацію та властивості систем.
11. У чому полягає динамічний опис систем?
12. Як ви розумієте термін «соціально-економічна система»?
13. Чим характеризуються соціально-економічні системи?
14. У чому полягають емерджентні властивості економіки?
15. Дайте опис соціально-економічних систем різних типів (підприємство, фінансово-кредитні установи, галузі економіки, органи державного управління, економіки в цілому) як кібернетичних систем.
16. Дайте поняття зворотного зв'язку.
17. Наведіть приклади негативних та позитивних зворотних зв'язків в економіці.
18. Визначте різні підходи до терміну «інформація».
19. Чим ентропія відрізняється від інформації?
20. Подайте сучасне поняття визначення інформації.
21. У чому сутність закону необхідної різноманітності?
22. Подайте положення принципу вибору рішень на підставі відбору і перетворення інформації.
23. Як принцип обов'язковості зворотного зв'язку позначається в соціально-економічних системах?
24. Що таке принцип зовнішнього доповнення?

Засвоївши матеріали розділу студенти опанують поняття методів економічної кібернетики, об'єкту і його властивостей, фазового портрету, системи та їх класифікації, емерджентності, зворотного зв'язку, соціально-економічної системи, інформації та основних законів кібернетики.

2. МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ, ЇХ ОСНОВНІ МЕТОДИ ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

В розділі наведено основні дані про модель та моделювання. Показано важливість моделювання соціально-економічних систем для економічної кібернетики.

2.1. Модель

Модель – речова, знакова або уявна (мислена) система, що відтворює, імітує, відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки та/або/ї характеристики об'єкта дослідження (оригіналу). Розрізняють фізичні, математичні та ін. моделі. Слово «модель» походить від латинського *modulus*, що означає міра, такт, ритм, величина. Воно пов'язане також із словом *modus* – копія, зразок.

Смислове навантаження терміна “модель” багатопланове:

- а) зразок, взірцевий примірник чогось;
- б) тип, марка конструкції;
- в) те, що є матеріалом, натурою для відтворення;
- г) зразок, з якого знімається форма для відливання в іншому матеріалі;
- д) комп'ютерна модель,
- е) розрахункова модель,
- ж) теоретична модель (процесу, конструкції тощо).

Наприклад, модель – опис об'єкта (предмета, явища або процесу) на якій-небудь формалізованій мові, складений з метою вивчення його властивостей. Такий опис особливий корисний у випадках, коли дослідження самого об'єкта ускладнене або фізично неможливе.

Найчастіше в ролі моделі виступає інший матеріальний або уявний об'єкт, що замінює в процесі дослідження об'єкт-оригінал. Процес побудови моделі називається моделюванням. Таким чином, модель виступає як своєрідний інструмент для пізнання, який дослідник ставить між собою і об'єктом, і за допомогою якого вивчає об'єкт, що його цікавить.

Макетна модель – це реально існуюча модель, що відтворює модельовану систему у деякому масштабі

Математична модель – система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище.

При одержанні математичної моделі використовують загальні закони природознавства, спеціальні закони конкретних наук, результати пасивних та активних експериментів, імітаційне моделювання за допомогою ЕОМ. Математична

модель дозволяє передбачити хід процесу, розрахувати цільову функцію (вихідні параметри процесу), керувати процесом, проектувати системи з бажаними характеристиками.

Для створення математичних моделей можна використовувати будь які математичні засоби – мову диференціальних або інтегральних рівнянь, теорії множин, абстрактної алгебри, математичну логіку, теорії ймовірностей та інші. Процес створення математичної моделі називається математичним моделюванням. Це найзагальніший та найчастіше використаний в науці, зокрема, в кібернетиці, метод досліджень.

Якщо відношення задаються аналітично, то їх можна розв'язати в замкнутому вигляді (явно) відносно шуканих змінних як функції від параметрів моделі, або в частково замкнутому вигляді (неявно), коли шукані змінні залежать від одного або багатьох параметрів моделі. До моделей цього класу належать диференціальні, інтегральні, різницеві рівняння, ймовірнісні моделі, моделі математичного програмування та інші.

Якщо не можна здобути точний розв'язок математичної моделі, використовуються чисельні (обчислювальні) методи або інші види моделювання.

У залежності від того, якими є параметри системи та зовнішні збурення математичні моделі можуть бути детермінованими та стохастичними. Останні мають особливо важливе значення при дослідженні і проектуванні великих систем зі складними зв'язками і властивостями, які важко врахувати. Математичний опис неперервного процесу (напр., диференціальними рівняннями) являє собою неперервну математичну модель

Якщо ж математична модель описує стан системи тільки для дискретних значень незалежної змінної і нехтує характером процесів, які протікають у проміжках між ними, то така модель є дискретною (тут важливим є вибір кроку дискретності, від якого залежить точність опису реального об'єкта його математична модель). Якщо параметри об'єкта, для якого розробляють Математичної моделі, можна вважати незалежними від часу, то така система описується стаціонарною моделлю, характерна особливість якої – постійні коефіцієнти. У протилежному випадку математична модель є нестаціонарною.

Дискретна модель - Математична чи імітаційна модель, змінні якої приймають тільки дискретні значення, тобто змінюються від одного значення до іншого і не приймають проміжних значень (наприклад, модель, що прогнозує рівні запасів організації, ґрунтуючись на відвантаженнях, які змінюються, і платежах). Протилежність: неперервна модель.

Алгебраїчна система (*алгебраїчна структура*) – в математиці це не порожня множина з заданим на ній набором операцій та відношень, що задовольняють деякій системі аксіом.

Основним завданням абстрактної алгебри є вивчення властивостей аксіоматично заданих алгебраїчних систем.

Формально: об'єкт $\langle A; \Omega_F; \Omega_R \rangle$, де:

- * A — не порожня множина,
- * Ω_F — множина алгебраїчних операцій визначених на A ,
- * Ω_R — множина відношень визначених на A .

Множина A називається **носієм** алгебраїчної системи. Множини Ω_F, Ω_R називається **сигнатурою** алгебраїчної системи.

Якщо алгебраїчна система не містить операцій, вона називається моделлю, якщо не містить відношень, то – алгеброю.

Якщо не розглядають ніяких аксіом, яким мають задовольняти операції, то алгебраїчна система називається універсальною алгеброю заданої сигнатури Ω_F .

Концептуальна модель – має такі ознаки:

1. Формулювання змістовного і внутрішнього представлення, що поєднує концепцію користувача і розробника моделі. Вона включає в явному виді логіку, алгоритми, припущення й обмеження.

2. Абстрактна модель, яка виявляє причинно-наслідкові зв'язки, властиві досліджуваному об'єкту в межах, визначених цілями дослідження. По суті, це формальний опис об'єкта моделювання, який відображає концепцію (погляд) дослідника на проблему.

Аналітична модель – один з класів математичного моделювання.

Перевагою аналітичної моделі є те, що розв'язки можна аналізувати математичними методами. Недоліком аналітичних моделей є спрощення реальних ситуацій з метою отримання аналітичних розв'язків.

В економіці - модель, що складається з системи розв'язних рівнянь, наприклад, система розв'язних рівнянь, що представляють закони попиту та пропозиції на світовому ринку.

2.2. Математичне моделювання

Математичне моделювання – метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей, дослідження цих моделей.

В основу методу покладено ідентичність форми рівнянь і однозначність співвідношень між змінними в рівняннях оригіналу і моделі, тобто, їх аналогії. Математичні моделі досліджуються, як правило, із допомогою аналогових обчислювальних машин, цифрових обчислювальних машин, комп'ютерів.

На початку 60-их років ХХ сторіччя було розроблено один із методів математичного моделювання – квазіаналогове моделювання. Цей метод полягає в дослідженні не досліджуваного явища, а явища або процесу іншої фізичної природи, яке описується співвідношеннями, еквівалентними відносно отримуваних результатів.

Розрізняють *геометричне (наочне) моделювання*, здійснюване на макетах або об'ємних моделях. Вони передають в наочній формі просторові властивості об'єкту, його зовнішній вигляд, співвідношення і взаємозв'язок його частин. Такі, наприклад, модель, відтворююча форми літака, і макет мікрорайону.

Методами *фізичного моделювання* вивчають фізико-хімічні, технологічні, економічні процеси, що відбуваються в оригіналі. Раніше ці процеси вивчалися за допомогою аналогових пристроїв, придатних для моделювання різноманітних динамічних і статичних процесів. Але поява персональних комп'ютерів з сучасним математичним забезпеченням має величезні можливостями для моделювання поведінки складних систем (технічних, біологічних і економічних). Як

правило, фізичне моделювання здійснюється на базі логіко-математичної моделі процесу, що вивчається, що грає роль проміжної ланки між об'єктом і його фізичною моделлю.

Фундаментальне значення у всіх областях науки і техніки має інформаційне моделювання. Як моделі тут використовуються схеми і графіки, креслення, а також символи, що формуються в слова, формули і рівняння. Ці матеріальні утворення можуть служити моделями лише у тому випадку, коли визначені допустимі для них операції перетворення і правила їх виконання. Найважливішу роль грає інформаційне моделювання, здійснюване засобами математичного і логічного апарату. Його називають логіко-математичним моделюванням. Використовувані при цьому символи (букви і цифри) і їх послідовності (формули, рівняння і нерівності) описують властивості оригіналу, що вивчається, і є його логіко-математичною (або математичною) моделлю.

На рис. 2.1 наведено класифікацію прийомів та методів моделювання.

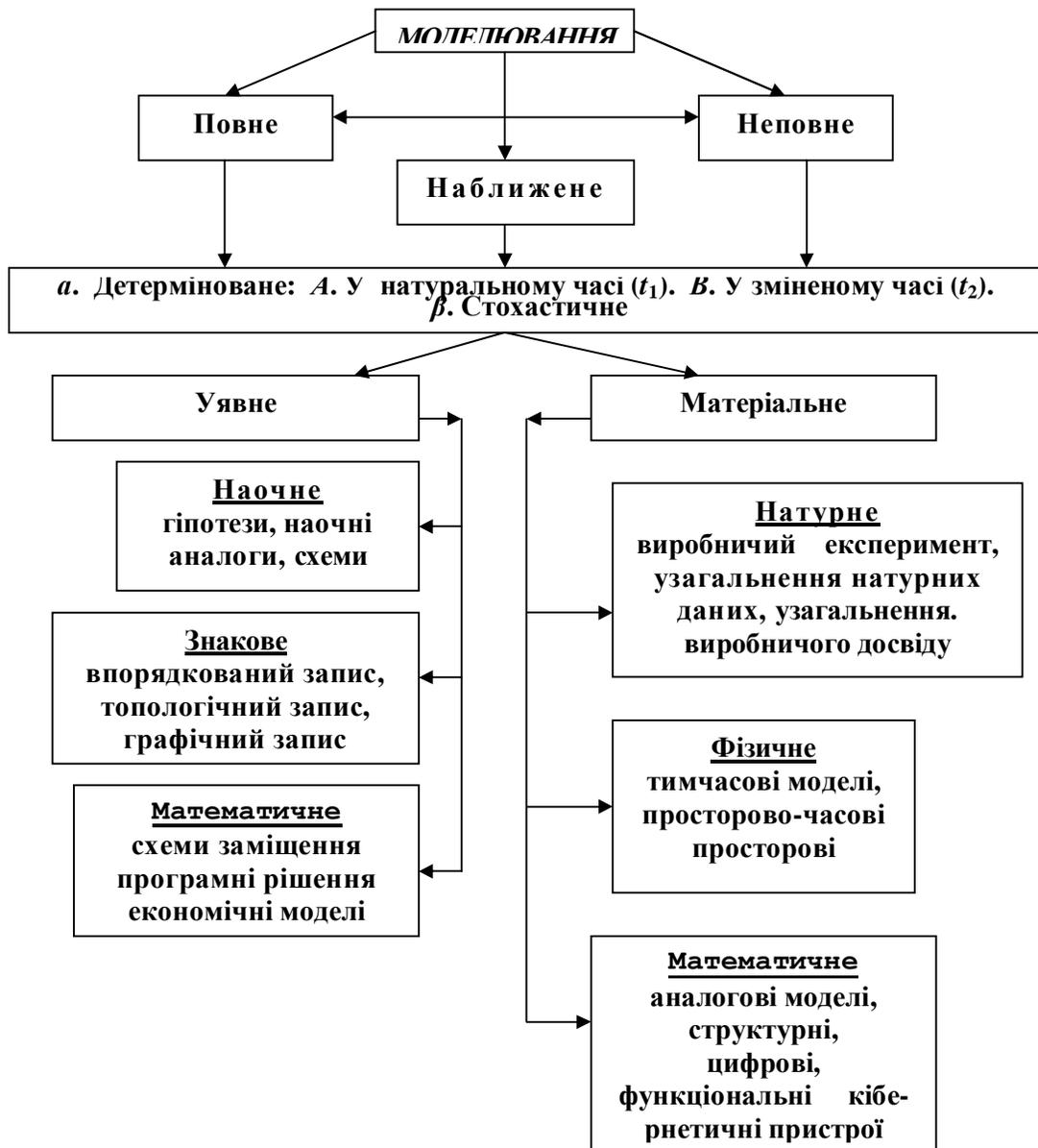


Рис. 2.1. Класифікація методів та прийомів моделювання

Аналіз економічних явищ, планування розвитку народного господарства, розробка ефективних методів управління, фізичне моделювання процесів в економічних системах і, нарешті, автоматизація планово-економічних розрахунків засновані на їх математичному або, як його зазвичай називають, економіко-математичному моделюванні. Точність і обґрунтованість аналізу і управління залежать від об'єктивності і точності віддзеркалення в моделях реальних економічних процесів, зв'язків між параметрами економічної системи, обмежень, що накладаються на неї зовнішніми умовами, достовірністю використовуваної інформації.

На рис. 2.2 представлено класифікацію методів моделювання соціально-економічних процесів і явищ.

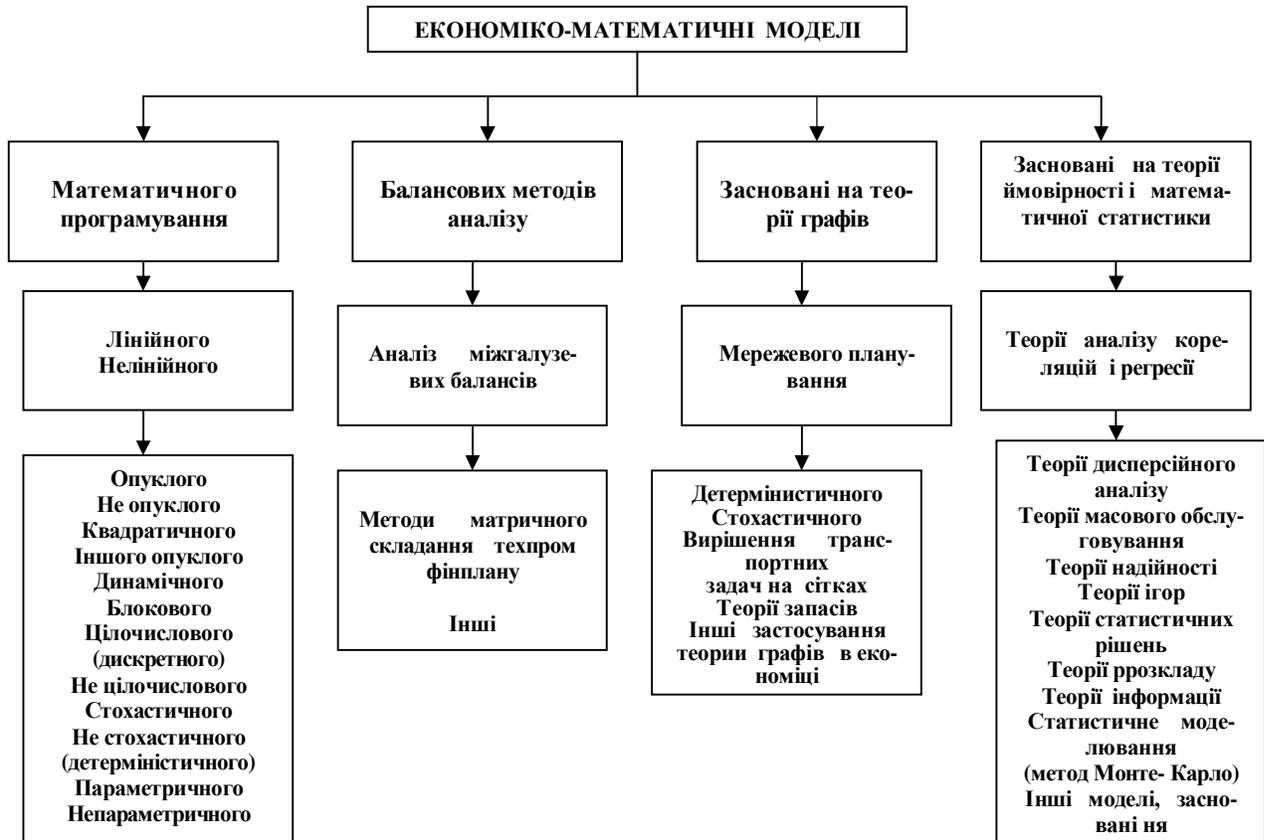


Рис. 2.2. Структура методів моделювання

Пояснимо наведені вище схеми для глибшого розуміння напрямків застосування методів моделювання при моделюванні соціально-економічних явищ.

Моделі лінійного програмування (параметричного, непараметричного, детерміністичного, стохастичного, цілочислового, не цілочислового) – вирішення завдань оперативно-календарного планування, технічної підготовки виробництва (складання карт, розкрою листових і смугових матеріалів, знаходження оптимальної шихти, виробничої суміші і т. п.), транспортних завдань і деяких завдань техніко-економічного планування (визначення оптимальної виробничої програми і т. і.);

- нелінійного програмування – ухвалення рішень в області техніко-економічного планування, оперативно-календарного планування, по питаннях

загальної господарської політики підприємства, фінансування і кредитування;

- динамічного програмування – вибір політики заміни устаткування, оптимальний розподіл амортизаційних відрахувань на заміну устаткування і відновлення його, визначення оптимальних умов розширеного відтворення;

- блокового програмування – вирішення завдань великого розміру шляхом розбиття їх на ряд моделей з меншим числом змінних і обмежень;

- балансових методів аналізу – вирішення проблем пропорційного розвитку виробництва на різних рівнях, складання техпромфінплану підприємства в матричній формі;

- мережевого планування – управління здійсненням крупних індивідуальних і рідше серійних розробок: є формою виразу ухваленого рішення (з вказівкою цілей, завдань, термінів виконання, виконавців, резервів), інструментом оперативного керівництва виконанням рішення і контролю за ходом виконання;

- транспортних завдань на мережі – розробка оптимальних схем прикріплення постачальників до споживачів;

- теорії аналізу кореляцій і регресії і теорії дисперсійного аналізу – вивчення статистичних взаємозв'язків в економічних процесах встановлення різних нормативів – трудових, вартісних, по витраті матеріалів і інших;

- теорії масового обслуговування – встановлення оптимальних співвідношень між розмірами основного і допоміжного виробництва і окремими частинами усередині кожного з них, якщо процеси в них мають елементи нерегулярності і можуть бути представлені як масове обслуговування;

- теорії надійності – вирішення проблем надійності і довговічності устаткування, підвищення якості продукції і роботи;

- теорії запасів – встановлення оптимальних розмірів оборотних фондів на підприємстві, вирішення деяких завдань оперативно-календарного планування в серійному і масовому виробництві, визначення оптимальних заділів;

- теорії ігор і теорії статистичних рішень – управління процесами взаємовідношення підприємства з ринком, страхування від стихійних лих, створення сезонних запасів сировини і матеріалів;

- теорії інформації – вдосконалення інформаційних потоків в управлінні, вирішення інших завдань, не інформаційних, але схожих за типом даних процесів;

- теорії розкладів – визначення раціональної послідовності запуску деталей у виробництво, встановлення оптимальної тривалості виробничого циклу виробів;

- статистичного моделювання – вирішення завдань теорій масового обслуговування, ігор, статистичних рішень, надійності, інформації, запасів, для яких немає власного математичного апарату.

- наочні і знакові – при оптимізації управлінських рішень всіх видів, як і взагалі у всій економічній роботі, тому виділити переважну область їх застосування важко. Такі, як натуральні, фізичні, застосовуються при оптимізації управлінських рішень ще рідко, епізодично, що також утрудняє можливість виділення якихось конкретних областей переважного їх застосування.

2.3. Приклади кібернетичних моделей соціально-економічних систем

Всі описані нижче моделі було створено із застосуванням методів математичного моделювання, тому при їх викладенні в деяких випадках буде показано і хід знайдення цих моделей.

2.3.1. Модель нарахування відсотків

Розглянемо звичайну фінансову операцію: надання у борг суми S_0 при умові, що через період часу T буде повернена сума S_T . Визначимо величину r відносного зростання формулою

$$r = \frac{S_T - S_0}{S_0}. \quad (2.1)$$

Тоді $S_T = S_0(1 + r)$.

При розрахунку по довгострокових кредитах, що охоплюють декілька повних років, використовується схема складних відсотків. $S_n = S_0(1 + r)^n$.

У фінансових розрахунках застосовуються схеми, де нарахування складних відсотків проводиться кілька разів в році. При цьому обумовлюється річна ставка r і кількість нарахувань за рік k . Як правило, нарахування проводяться через рівні проміжки часу, тобто довжина кожного проміжку T_k складає $\frac{1}{k}$ частина року. Тоді для терміну в T років (тут T не обов'язково є цілим числом) сума S_T розраховується за формулою

$$S_T = S_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^m \quad (2.2)$$

Тут $m = \left\lfloor \frac{T}{T_k} \right\rfloor$ — ціла частина числа $\frac{T}{T_k}$, яка співпадає з самим числом, якщо, наприклад, T — ціле число.

Хай річна ставка рівна r і проводиться n нарахувань в рік через рівні проміжки часу. Тоді за рік сума S_0 нарощується до величини, визначуваної формулою

$$S_1 = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \quad (2.3)$$

У теоретичному аналізі і в практиці фінансової діяльності часто зустрічається поняття відсоток, що “безперервно нараховується”. Щоб перейти до відсотка, що безперервно нараховується, потрібно у формулах (2.1) і (2.2) необмежено збільшувати відповідно, числа k і n (тобто спрямувати k і n до нескінченності) і обчислити, до якої границі прагнуть функції S_T і S_1 . Застосуємо цю процедуру до формули (2.3)

$$S_1^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = S_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = S_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \right)^r = S_0 \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \right\}^r.$$

Помітимо, що границя у фігурних дужках співпадає з другою чудовою границею. Звідси витікає, що при річній ставці r , при відсотку, що безперервно нараховується, сума S_0 за 1 рік нарощується до величини S_1^* , яка визначається з формули

$$S_1^* = S_0 e^r. \quad (2.4)$$

Хай тепер сума S_0 надається у борг з нарахуванням відсотка n раз на рік через рівні проміжки часу. Позначимо r_e річну ставку, при якій в кінці року сума S_0 нарощується до величини S_1^* з формули (1.6). В цьому випадку говоримо, що r_e – це річна ставка при нарахуванні відсотка n раз на рік, еквівалентна річному відсотку r при безперервному нарахуванні. З формули (1.5) одержуємо

$$S_1^* = S_0 \left(1 + \frac{r_e}{n} \right)^n. \quad (2.5)$$

Прирівнюючи праві частини останньої формули і формули (2.4), вважаючи в останній $T = 1$, можна вивести співвідношення між величинами r і r_e :

$$r = n \ln \left(1 + \frac{r_e}{n} \right), \quad r_e = n \left(e^{\frac{r}{n}} - 1 \right).$$

2.3.2. Моделі фінансових розрахунків

Чистий приведений дохід дозволяє одержати найбільш узагальнену характеристику результату інвестування, тобто його кінцевий ефект в абсолютній сумі. Під чистим приведеним доходом розуміється різниця між приведеними до дійсної вартості сумою чистого грошового потоку за період експлуатації інвестиційного проекту і сумою інвестиційних витрат на його реалізацію (рис. 2.3). Розрахунок цього показника при одноразовому здійсненні інвестиційних витрат здійснюється за формулою:

$$NPV = \sum_{t=0}^T \frac{In_t - Ot_t}{(1 + r_t)^t}, \quad (2.6)$$

де T – загальний період інвестиційного проекту, t – етап інвестиційного проекту, In_t , Ot_t – відповідно доходи та витрати на t -му етапі інвестиційного проекту, r_t – норма дисконту.

Аналіз цієї функції показує, що вона є нелінійною і залежить в першу чергу від T . Чим воно більше, тим дужче спадає NPV . Така ж залежність від параметру r_t .

Формула (2.6) визначає чистий прибуток на кінець проекту. Якщо нас цікавить чистий прибуток на початок проекту, то треба застосовувати вираз

$$NPTV = \sum_{t=0}^T [In_t - Ot_t] (1 + r_t)^t. \quad (2.7)$$

Обидві ці формули було отримано з математичного аналізу, аналогічно отриманню формули (2.5).

Рівняння ефективної лінії ринку визначається для середньої доходності інвестиційного портфелю цінних паперів:

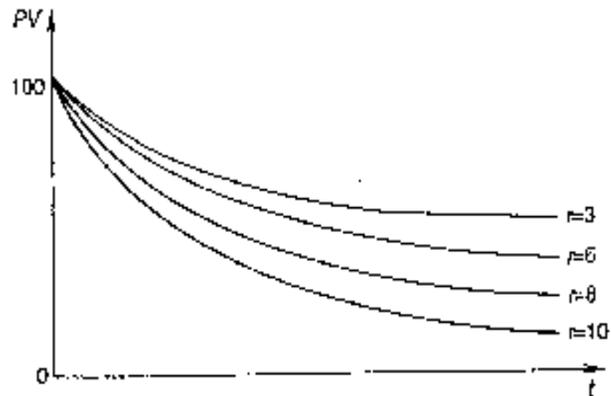


Рис. 2.3. Темпи спаду NPV в залежності від часу і коефіцієнта дисконтування

$$E(R_p) = R_F + \frac{[E(R_M) - R_F]}{SD(R_M)} SD(R_F), (2.8)$$

де R_M , R_F – відповідно доходність ризикових та без ризикових цінних паперів, $E(R_M)$ – середня доходність ризикових цінних паперів, $SD(R_M)$, $SD(R_F)$ – відповідно варіації стандартного відхилення ризикових та без ризикових цінних паперів.

Аналіз цього рівняння показує лінійну залежність середньої доходності від параметрів R_M , R_F , $SD(R_F)$ та параболічну – від параметру $SD(R_M)$.

На графіку, наведеному на рис. 2.4, можна бачити, як доходність змінюється від лінійного (верхні лінії) до нелінійного (нижня лінія) форматів.

Оцінка вартості облігацій. Ціна облігації може бути виражена у вигляді математичної функції від необхідної прибутковості

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^n} \quad (2.9)$$

де P – ціна; n – число періодів (число років помножена на 2); C – піврічна купонна виплата; r – процентна ставка на період (необхідна річна прибутковість поділена на 2); M – сума погашення; t – моменти купонних виплат.

Якщо ми хочемо оцінити, як змінюється ціна облігації при зміні необхідної прибутковості, то потрібно обчислити першу похідну цього рівняння.

Обчисливши першу похідну і розділивши її на початкову ціну, одержимо

$$\text{Дюрація Маколея} = \left[\frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n} \right] \frac{1}{P} \quad (2.10)$$

Величина в дужках – це модель середньозваженого терміну виплат по облігації, де вагами є їхній поточні вартості, ділені на початкову ціну (тут вони помножені на величини, зворотні цінам).

2.3.3. Моделі теорії корисності

У кількісній теорії корисності передбачається, що споживач може дати кількісну оцінку (у деяких одиницях вимірювання) корисності будь-якої кількості споживаного їм товару.

Це означає існування функції корисності TU аргументу Q – кількість купленого товару. Введемо поняття граничної корисності, як додаткової корисності, що додається кожною останньою порцією товару. Далі побудуємо двовимірну систему координат, відкладаючи по горизонтальній осі кількість споживаного товару Q , а по вертикальній осі – загальну корисність TU , як це зроблено на рис. 2.5. У цій системі координат проведемо графік функції $TU = TU(Q)$. Точка

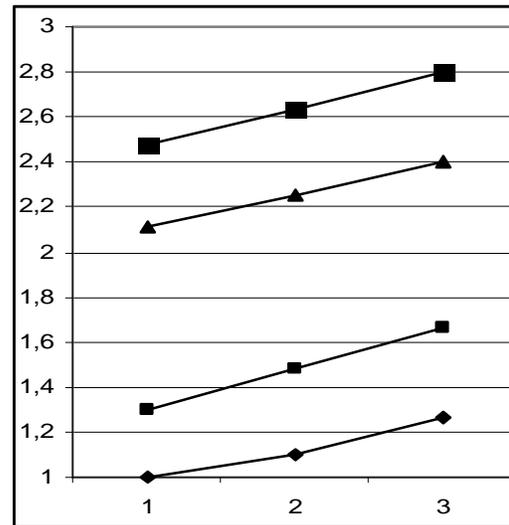


Рис. 2.4. Рівняння ефективної лінії ринку

Q_0 на горизонтальній осі означає кількість придбаного товару, величина ΔQ – додатково придбаний товар. Різниця $\Delta TU = TU(Q_0 + \Delta Q) - TU(Q_0)$ – додаткова корисність, одержана від покупки ΔQ . Тоді додаткова корисність від останньої придбаної порції (або одиниці кількості) товару обчислюється за формулою $\Delta TU / \Delta Q$. Цей дріб, як можна бачити, залежить від величини ΔQ . Якщо тут перейти до границі при $\Delta Q \rightarrow 0$, то вийде формула для визначення граничної корисності MU

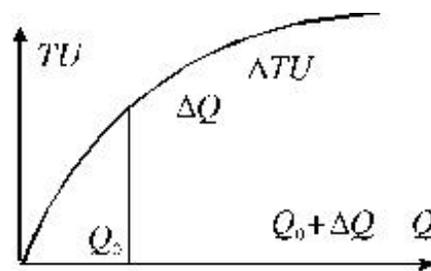


Рис. 2.5. Функція корисності

Це означає, що гранична корисність дорівнює похідній функції корисності $TU(Q)$. Закон граничної корисності, що убуває, зводиться до зменшення цієї похідної із зростанням величини Q . Звідси слідує опуклість графіка функції $TU(Q)$. Поняття функції корисності і представлення граничної корисності у вигляді похідної цієї функції широко використовується в математичній економіці.

Лінії рівня функції корисності (вони називаються кривими байдужості) дозволяють розглядати питання заміщення одного товару іншим і ілюструвати рішення задачі про оптимальне споживання. Лінія рівня витрат на придбання товарів x, y зображені на рис. 2.6. пунктиром. Оптимальне споживання забезпечується значенням (x_0, y_0) – координатами точки дотику кривої байдужості і лінії рівня витрат. У цій точці задана корисність досягається найбільш економічним чином.

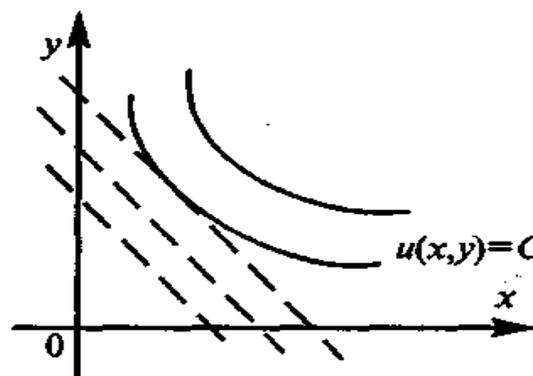


Рис. 2.6. Криві байдужості

Поняття часткової похідної також знаходить застосування в економічній теорії. Можна ввести поняття часткової еластичності функції декількох змінних

$z=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ щодо змінної x_i

$$E_{x_i}(z) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x_i z}{z} : \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i} \quad (2.11)$$

Так, наприклад, у **виробничій функції Кобба–Дугласа** $z=b_0 x^{b_1} y^{b_2}$, як неважко переконатися, $E_x(z)=b_1$, $E_y(z)=b_2$, тобто показники b_1 і b_2 приблизно показують, на скільки відсотків зміниться випуск продукції при зміні тільки витрат праці x або тільки об'єму виробничих фондів y на 1%.

Розглянемо тепер часткові похідні u'_x, u'_y – функції корисності. Вони називаються граничними корисності $M u_x, M u_y$. Якщо вимірювати кількість товару у вартісному виразі, то граничні корисності можна розглядати як функції попиту на супутній товар. Знайдемо граничні корисності для функції постійної еластичності

$$u(x,y) = \frac{a_1}{1-b_1} x^{1-b_1} + \frac{a_2}{1-b_2} y^{1-b_2}. \quad (2.12)$$

Маємо $M u_x = a_1 \cdot x^{-b_1}$, $M u_y = a_2 \cdot x^{-b_2}$, тобто функції попиту зі зростанням вартості кожного товару є такими, що убувають, а параметри b_1 і b_2 представляють часткові еластичності попиту на ці товари.

2.3.4. Виробнича модель

Значна частина економічних механізмів ілюструється на малюнках, що зображують лінії рівня функції двох змінних $z = f(x,y)$. Наприклад, лінії рівня виробничої функції називаються *ізоквантами*.

Хай розглядається функція випуску $z = f(x,y)$, де x і y – два різні чинники виробництва, а $f(x,y)$ – максимально можливий випуск продукції, який дозволяють значення чинників x і y . На рис. 2.7 заштрихована так звана *економічна область*, яка характеризується тим, що частини ізоквант, що відсікаються нею, є графіками функцій, що убувають, тобто збільшення кількості одного чинника дозволяє зменшити кількість іншого, не міняючи розміру випуску.

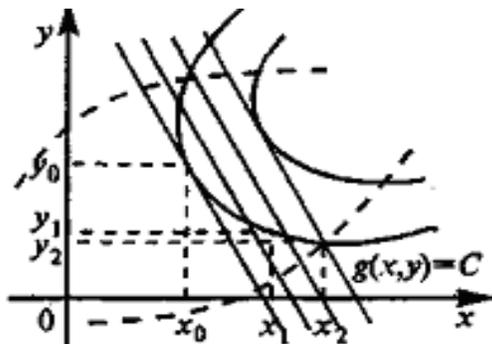


Рис. 2.7. Економічна область функції

Іншими словами, економічна область – це множина значень чинників, що допускають заміщення одного з них іншим. Очевидно, що всі "розумні" значення x і y належать економічній області.

Ізокванти дозволяють геометрично ілюструвати рішення задачі про оптимальний розподіл ресурсів. Хай $z = g(x,y)$ – функція витрат, що характеризує витрати, необхідні для забезпечення значень ресурсів x і y (часто можна вважати, що функція витрат лінійна

$$g(x,y) = p_x x + p_y y, \quad \text{де } p_x \text{ і } p_y - \text{"ціни" чинників } x \text{ і } y).$$

Лінії рівня цієї функції також зображені на рис. 2.7. Комбінації ліній рівня функції $f(x)$ і $g(x)$ дозволяють робити висновки про перевагу того або іншого значення чинників x і y . Очевидно, наприклад, що пара значень (x_1, y_1) більш переважна, ніж пара (x_2, y_2) , оскільки забезпечує той же випуск, але з меншими витратами. Оптимальними ж значеннями чинників будуть значення (x_0, y_0) – координати точки дотику лінії рівня функції випуску і функції витрат.

2.3.5. Моделі Кобба-Дугласа та Лоренца

Якщо у функції Кобба-Дугласа

$$z = b_0 x^{b_1} y^{b_2} \quad (2.13)$$

вважати, що витрати праці є лінійна залежність від часу, а витрати капіталу незмінні, то вона прийме вид $g(t) = (at + b)e^{gt}$.

Тоді об'єм продукції, що випускається за T років складе

$$Q = \int_0^T (at + b)e^{gt} dt$$

Досліджуємо криву Лоренца – залежність відсотка доходів від відсотка населення, що має їх (криву OBA , рис. 2.15.).

Ми можемо оцінити степінь нерівності в розподілі доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива Лоренца вироджується в пряму – бісектрису OA , тому площа фігури OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника OAC (коефіцієнт Джині), характеризує степінь нерівності в розподілі доходів населення.

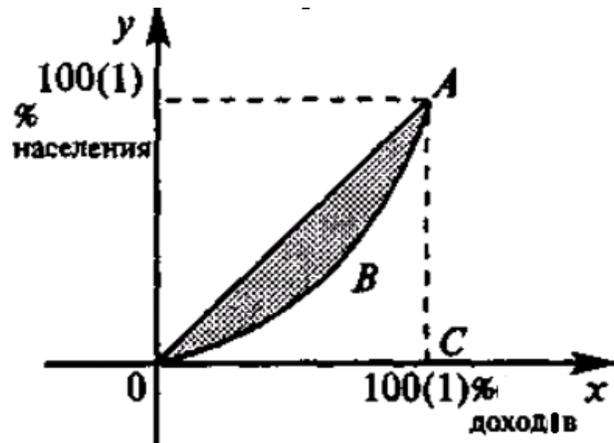


Рис. 2.8. Крива Лоренца

Нехай, за даними досліджень в розподілі доходів в одній з країн крива Лоренца OBA (рис. 2.15.) може бути описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x – частка населення, y – частка доходів населення. Обчисливши коефіцієнт Джині.

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2 \cdot S_{OBAC}, \text{ оскільки } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тому } k = 1 - 2 \left(1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \right) = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx - 1.$$

За допомогою заміни, наприклад, $x = \text{Sint}$ можна обчислити

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{p}{4}. \text{ Отже, коефіцієнт Джині } k = 2 \cdot \frac{p}{4} - 1 = \frac{p}{2} - 1 \approx 0,57.$$

Достатньо високе значення k показує істотно нерівномірний розподіл доходів серед населення в даній країні.

Визначення початкової суми по її кінцевій величині, одержаній через час t (років) при річному відсотку (процентній ставці) p , називається *дисконтуванням*. Задачі такого роду зустрічаються при визначенні економічної ефективності капітальних вкладень.

Хай відома функція $t = t(x)$, що описує зміну витрат часу t на виготовлення виробу залежно від степені освоєння виробництва, де x – порядковий номер виробу в партії. Тоді середній час t_{cp} , витрачене на виготовлення одного виробу в період освоєння від x_1 до x_2 виробів, обчислюється за теоремою про середнє

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx \quad (2.14)$$

Що стосується функції зміни витрат часу на виготовлення виробів $t = t(x)$, то часто вона має вигляд

$$t = ax^{-b}, \quad (2.15)$$

де a – витрати часу на перший виріб, b – показник виробничого процесу.

2.3.6. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Нехай маємо n країн S_1, S_2, \dots, S_n національний прибуток кожної з яких дорівнює відповідно x_1, x_2, \dots, x_n . Позначимо коефіцієнтами a_{ij} частину національного прибутку, що країна S_j витрачає на покупку товарів у країні S_i . Будемо вважати, що увесь національний прибуток витрачається на закупівлю товарів або усередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{K} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \text{K} & a_{2n} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{K} & a_{nn} \end{pmatrix}$, (2.16)

що одержала назву *структурної матриці торгівлі*. Відповідно до формули $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$, сума елементів будь-якого стовпця матриці A дорівнює 1.

Для будь-якої країни S_i ($i=1, 2, \dots, n$) виторг від внутрішньої і зовнішньої торгівлі складе

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \text{K} + a_{in}x_n.$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної країни S_i , тобто виторг від торгівлі кожної країни повинний бути не менше її національного прибутку: $p_i \geq x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Якщо вважати, що $p_i \geq x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), то одержуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \text{K} + a_{1n}x_n \geq x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \text{K} + a_{2n}x_n \geq x_2, \\ \text{K K K K K K K K K K K K}, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \text{K} + a_{nn}x_n \geq x_n. \end{cases} \quad (2.17)$$

Склавши і згрупувавши всі нерівності останньої системи, одержимо:

$$x_1(a_{11} + a_{21} + \text{K} + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \text{K} + a_{n2}) + \text{K} + x_n(a_{1n} + a_{2n} + \text{K} + a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + \text{K} + x_n.$$

З огляду на $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$, вирази в дужках рівні одиниці, і ми приходимо до суперечливої нерівності: $x_1 + x_2 + \text{K} + x_n \geq x_1 + x_2 + \text{K} + x_n$.

Таким чином, нерівність $p_i \geq x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) неможлива, і умова $p_i \geq x_i$ приймає вид $p_i = x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). З економічної точки зору це зрозуміло, тому що всі країни не можуть одночасно отримувати прибуток.

Уводячи вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \text{K} \\ x_n \end{pmatrix}$ національних прибутків країн, одержимо рів-

няння: $AX = X$, або $AX = IX$, (2.18)

тобто задача зветься до знаходження власного вектора матриці A , що відповідає власному значенню $I = 1$.

2.3.7. Використання динамічних моделей в економіці

Ці моделі описуються диференціальними рівняннями.

Логістична функція. Хай торговою фірмою реалізується деяка продукція, про яку у момент часу $t = 0$ з реклами одержали інформацію x_0 людина із загального числа N потенційних покупців. Далі ця інформація розповсюджується за допомогою спілкування людей, і у момент часу $t > 0$ число знаючих про продукцію людей рівне $x(t)$. Зробимо припущення, що швидкість росту числа знаючих про продукцію пропорційна як числу обізнаних в даний момент покупців, так і числу не інформованих покупців. Це приводить до диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x). \quad (2.19)$$

Тут k – позитивний коефіцієнт пропорційності. З рівняння одержуємо рівність диференціалів двох функцій аргументу t

$$\frac{dx}{x(N - x)} = k dt.$$

Інтегруючи ліву і праву частини, знаходимо загальне рішення диференціального рівняння

$$\frac{1}{N} \ln \frac{x}{N - x} = kt + C.$$

У загальне рішення входить невизначена константа C . Припускаючи, що $NC = D$, одержимо рівність $x/(N - x) = e^{Nkt + D}$, з якої визначимо функцію $x(t)$

$$x = \frac{N}{1 + Ee^{-Nkt}}. \quad (2.20)$$

Тут $E = e^{-D}$. Функція такого вигляду називається логістичною, а її графік – логістичною кривою.

Якщо тепер врахувати, що $x(0) = x_0$ і покласти $x_0 = N/a$, де $a > 0$, то можна знайти значення константи E . Логістична функція прийме вигляд

$$x = \frac{N}{1 + (a - 1)e^{-Nkt}}. \quad (2.21)$$

На рис. 2.9 приведені приклади логістичних кривих, одержаних при різних значеннях a . Тут величина N умовно приймалася за 1, а величина k бралася рівною 0,5.

За допомогою логістичної функції описуються багато економічних, соціальних, технологічних і біологічних процесів, наприклад, постійне зростання продажів, розповсюдження чуток, розповсюдження технічних новин, зростання популяції певного виду тварин і ін.

Динамічна модель стійкості ринку Вальраса.

Вона формулюється таким чином. Є декілька продавців і декілька покуп-

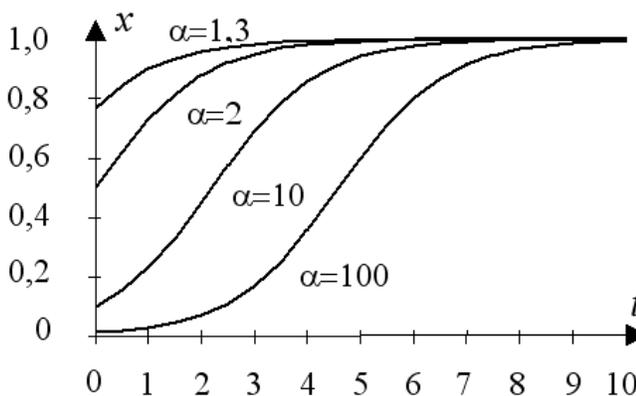


Рис. 2.9. Логістичні криві

ців деякого товару. Якийсь посередник оголошує ціну p на товар, після чого кожен продавець повідомляє, скільки товару він може продати при такій ціні. Сумарна кількість товару, що виставляється на продаж при даній ціні, називається пропозицією і позначатиметься $S(p)$. Також кожен покупець повідомляє, скільки товару він збирається купити при даній ціні. Сума потреб покупців надалі називатиметься **попитом** і позначатиметься $D(p)$. Введемо поняття надмірного попиту $E(p)$ як різниці між попитом і пропозицією: $E(p) = D(p) - S(p)$. Якщо $E(p) \geq 0$, ціна росте до тих пір, поки не буде досягнута рівновага, яка визначається рівністю попиту і пропозиції, тобто рівністю $D(p) = S(p)$ або $E(p) = 0$. Якщо $E(p) \leq 0$, тобто має місце надмірна пропозиція, відбувається зниження ціни, поки не наступить рівновага. Тут доречно зробити найпростіше можливе припущення, яке полягає у тому, що швидкість зміни ціни в часі пропорційна надмірному попиту. Малий надмірний попит викличе повільне збільшення ціни товару, великий надмірний попит – швидке збільшення ціни, мала надмірна пропозиція – повільне пониження ціни і т.д. Звідси слідує рівняння

$$\frac{dp}{dt} = kE(p). \quad (2.22)$$

Тут k – позитивна константа, що відображає швидкість процесу.

Хай попит і пропозиція є лінійними функціями ціни: $D(p) = a + bp$ і $S(p) = g + dp$. Тоді, прийнявши початкову умову $p(0) = p_0$, матимемо рівняння

$$p'(t) = k(a + bp - g - dp) = k(b - d)p + k(a - g). \quad (2.23)$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами має рішення

$$p(t) = \frac{g - a}{b - d} + \left(p_0 - \frac{g - a}{b - d} \right) e^{k(b-d)t}, \quad (2.24)$$

яке стійке, якщо $b - d < 0$ і нестійке при $b - d > 0$. Але b – тангенс кута нахилу кривої попиту, а d – тангенс кута нахилу кривої пропозиції, і якщо виконується умова $b - d < 0$ (яке вірне при убутанні попиту і зростанні пропозиції із зростанням ціни), ринок стійкий, тобто надмірний попит знижується і остаточно усувається зростаючою ціною. Якщо $b - d > 0$, ринок нестійкий: матиме місце безперервна і необмежена інфляція.

Модель діяльності комерційного банку.

Тут прийняті наступні позначення: k_1, k_2, k_3 – функції, що характеризують управління активами. $k_1(t) = p(t) - r_c(t) - r_v(t)$, де $p(t)$ – непроцентні доходи, $r_c(t)$ – умовно постійні і $r_v(t)$ – умовно перемінні витрати. $k_2(t) = f(a_2(t), r_a(t), l(t))$, де a_2, r_a та l – коефіцієнти прибутковості, ризику та ліквідності відповідно; r – коефіцієнт резервування залучених коштів, що включає й нормативи резервування, встановлені Національним банком. k_3 визначено як функцію управління іммобілізацією при заданих параметрах: структура активів і пасивів, що дозволяє виділити кошти для довгострокових проєктів, не порушуючи при цьому встановлені коефіцієнти ризику та ліквідності; розмір банку, що характеризує необхідний обсяг основних засобів.

Тобто, $k_3(t) = f((X_1(t), X_2(t), X_3(t), W_1(t), W_2(t), a_3(t), r_a(t), l(t)))$.

d_1, d_2 – функції, що описують залучення пасивів.

$d_1(t) = f(e_c(t), j_{d_1}(t))$, де $e_c(t)$ – коефіцієнт, що відбиває залежність обсягу пасивів до запитання від витрат по обслуговуванню клієнтів, $j_{d_1}(t)$ – випадкова функція, що описує некеровану зміну обсягу пасивів до запитання.

$d_2(t) = f(c_f(t), c_p(t), c_r(t), j_{d_2}(t))$, де $c_f(t), c_p(t), c_r(t)$ – коефіцієнти, що відбивають залежність обсягу термінових пасивів від: банківських витрат по створенню мережі філій (політика розширення економічного простору банку); процентних витрат по депозитам та іншим терміновим пасивам (у даному випадку – це процентна ставка, встановлена банком); витрат, пов'язаних з проведенням рекламних кампаній та іншими небанківськими операційними витратами відповідно, а $j_{d_2}(t)$ – випадкова функція, що описує некеровану пропозицію термінових пасивів (рис. 2.10).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_1}{dt} = \frac{k_1 + (a_1 - 1)}{t_1} \cdot X_1 + \frac{a - k_2}{t_2} \cdot X_2 + \frac{1 - k_3}{t_3} \cdot X_3 + \\ + \frac{d_1 - b_1}{I_1} \cdot W_1 + \frac{r \cdot (d_2 - 1) - (b_2 - 1)}{I_2} \cdot W_2 \\ \frac{dX_2}{dt} = \frac{k_2 - 1}{t_2} \cdot X_2 + (1 - r) \cdot \frac{d_2 - 1}{I_2} \cdot W_2 \\ \frac{dX_3}{dt} = \frac{(k_3 - 1) + (a_3 - 1)}{t_3} \cdot X_3 \\ \frac{dW_1}{dt} = \frac{d_1 - 1}{I_1} \cdot W_1 \\ \frac{dW_2}{dt} = \frac{d_2 - 1}{I_2} \cdot W_2 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

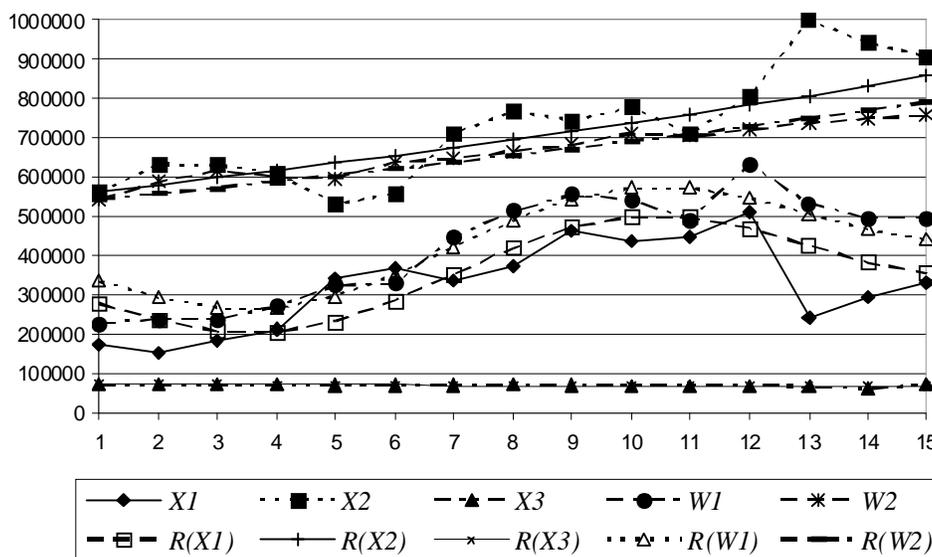


Рис. 2.10. Фактичні та прогнозні значення показників, X_1, X_2, X_3, W_1 і W_2 – фактичні та $R(X_1), R(X_2), R(X_3), R(W_1)$ і $R(W_2)$ – прогнозні значення показників.

Модель самоорганізації ринку праці, динаміка якої залежить від кількості зайнятих у галузі $N_1(t)$ у певний момент часу. Передбачається, що місткість ринку праці стала й дорівнює N , тоді $N - N_1(t)$ – кількість потенційних безробітних або кількість вільних робочих місць. Розглядаються ймовірність того, безробітний знайде роботу в проміжку часу $[t, t + 1]$, яка залежить від кількості вільних робочих місць $W_1(t) = k_1(N - N_1(t))$, та ймовірність звільнення, що залежить від кількості вільних робочих місць $W_2(t) = k_2 N_1(t) + k_3(N - N_1(t))$. Вважається, що $k_1, k_2 > 0, k_3 < 0$. Тоді рівняння моделі має вигляд:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = W_1(t)(N - N_1(t)) - W_2(t)N_1(t). \quad (2.26)$$

Можна показати, що існує лінійна заміна змінних, яка приводить рівняння (16.3) до класичного логістичного відображення (2.12).

Макроекономічна модель зростання, Хаавельмо.

$$\frac{dN}{dt} = N \left(a - \frac{bN}{Y} \right), \quad a, b > 0, \quad (2.27)$$

$$Y = AN^\alpha, \quad A > 0, 0 < \alpha < 1,$$

де N – чисельність населення; Y – реальний обсяг виробництва; a, b, A, α – константи. Після підставлення другого рівняння в перше отримаємо

$$\frac{dN}{dt} = N \left(a - \frac{bN^{1-\alpha}}{A} \right). \quad (2.28)$$

Увівши дискретний час та замінивши похідні першими різницями, після заміни змінних запишемо:

$$x_{t+1} = (1 + a)x_t(1 - x_t^{1-\alpha}), \quad (2.29)$$

де нова змінна визначається співвідношенням

$$N_t = x_t \left(\frac{A(1+a)}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.30)$$

Отже, можна побачити, що закон зростання являє собою узагальнення логістичного відображення.

Якщо взяти, скажімо, $a = 1/2$, то для $a < 4$ рівновага буде стійкою, тобто вона досягається будь-якою траєкторією, що починається в довільній точці. Але при $4 < a < 5,75$ траєкторії не будуть рівноважними, а залишатимуться в області, обмеженій нулем та одиницею. Фактично тільки-но параметр $a > 4$, нестійка точка рівноваги розпадається на дві стійкі точки з періодом два, тобто відбуваються біфуркації подвійного періоду. При значеннях параметра, що перевищують 4,8, двоперіодичний цикл стає нестійким, і кожна двоперіодична точка розпадається на дві чотириперіодичні точки.

Зі зростанням a цей процес триває, генеруючи невироджені орбіти періоду 2^k ($k = 2, \dots$). Область, усередині якої зароджуються стійкі орбіти періоду k , які далі стають нестійкими та розпадаються на $2k$ -періодичні орбіти, обмежена значенням параметра $a_c \approx 5,54$ (точне його значення невідоме). Інтервал $a_c < a < 5,75$ називають областю хаосу.

2.3.8. Моделі банкрутства

Система показників раннього попередження та реагування, прогнозування банкрутства підприємств включає наступні моделі.

Модель Альтмана являє собою функцію від деяких показників, які характеризують економічний потенціал підприємства та результати його роботи за минулий період. Застосування індексу Альтмана доцільне для оцінки ймовірності банкрутства великих акціонерних товариств, які торгують своїми акціями на біржах. Коефіцієнт ймовірності банкрутства (Z_A) розраховується за такою формулою

$$Z_A = 3,3K_1 + 1,4K_2 + 1,2K_3 + K_4 + 0,6K_5 \quad (2.31)$$

де K_1 – Балансовий прибуток / Середньорічна вартість активів; K_2 – Нерозподілений прибуток / Середньорічна вартість активів; K_3 – Власні оборотні активи / Середньорічна вартість активів; K_4 – Виручка від реалізації / Середньорічна вартість активів; K_5 – Ринкова вартість акцій / Залучений капітал. Якщо значення індексу Альтмана приймає значення менше 1,8 – то ймовірність банкрутства дуже висока, якщо знаходиться в діапазоні 1,81 – 2,70, то висока, 2,71-2,99, банкрутство можливе, при 3,00 і більше – дуже низька

Модель Спрінгейта

$$Z_C = 1,03A + 3,07B + 0,66C + 0,4D, \quad (2.32)$$

де A – робочий капітал/загальна вартість активів; B – прибуток до сплати податків та відсотків/загальна вартість активів; C – прибуток до сплати податків/короткострокова заборгованість; D – обсяг продажів /загальна вартість активів. Якщо Z_C менше 0,862. то підприємство є потенційним банкрутом.

Коефіцієнт вірогідності банкрутства доцільно застосовувати для акціонерних товариств, які не торгують своїми акціями на біржах

$$R = 8,38K_1 + K_2 + 0,054K_3 + 0,63K_4 \quad (2.33)$$

де, K_1 – Обіговий капітал / Середньорічна вартість активів; K_2 – Нерозподілений прибуток / Власний капітал; K_3 – Виручка від реалізації / Середньорічна вартість активів; K_4 – Нерозподілений прибуток/Загальні витрати. Якщо R менше 0, то ймовірність банкрутства 90 – 100%, якщо R знаходиться в діапазоні 0 - 0,18 ймовірність банкрутства 60 – 80%, при 0,18-0,32 – 35-50%, 0,32-0,42 – 15 - 20%, Більше 0,42 – 10)%.

Універсальна дискримінанта використовується для прогнозування банкрутства

$$Z_Y = 1,5x_1 + 0,08x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 0,3x_5 + 0,1x_6, \quad (2.34)$$

де x_1 – поточні активи + амортизація./зобов'язання; x_2 – валюта балансу/зобов'язання; x_3 - прибуток /валюта балансу; x_4 – прибуток/ виручка від реалізації; x_5 - виробничі запаси / виручка від реалізації; x_6 - виручка від реалізації/ валюта балансу. Якщо величина Z_Y менше 0, то підприємство є банкрутом на половину, якщо від 0 до 1, то підприємству загрожує банкрутство, якщо воно не здійснить санаційних заходів, якщо 1 - 2 – у підприємства порушено фінансову рівновагу (фінансову стійкість), але йому не загрожує банкрутство за умови переходу на антикризове управління, якщо більше 2, то підприємство є фінансове стійким і йому не загрожує банкрутство.

Коефіцієнт Бівера використовується для виявлення незадовільної структури балансу. Розраховується як відношення різниці між чистим прибутком і нарахованою амортизацією до суми довгострокових і поточних зобов'язань за формулою

$$Z_B = (\Phi_{220} - \Phi_{260}) / (\Pi_{480} + \Pi_{620}), \quad (2.35)$$

де Φ_{220} , Φ_{260} – чистий прибуток і амортизація; Π_{480} , Π_{620} – довгострокові поточні зобов'язання. Ознакою формування незадовільної структури балансу є таке фінансове становище підприємства, у якого протягом тривалого часу (1,5 - 2 роки) коефіцієнт Бівера не перевищує 0,2, що відображає небажане скорочення частки прибутку, який направляється на розвиток виробництва.

Модель банкрутства Мартиненка – це економіко-статистична модель визначення імовірності банкрутства підприємств громадського харчування

$$Ki.б. = Kn.л. + 3,33 Ka. + 5,71 Kp.в.з., \quad (2.36)$$

де $Ki.б.$ – коефіцієнт імовірності банкрутства; $Kn.л.$ – коефіцієнт поточної ліквідності; Ka – коефіцієнт автономії; $Kp.в.з.$ – коефіцієнт рентабельності власних засобів. Якщо $Ki.б. = 6,0$ і вище, то ймовірність банкрутства низька, якщо знаходиться в діапазоні 5,99-5,30, то можлива, якщо 5,29-3,49 – висока, а якщо 3,48 і нижче, то дуже висока.

Пістунова-Чухлєбової схильності до банкрутства торгово-транспортних підприємств Дніпропетровської області

$$Рейтинг = 0,9 \cdot \frac{ЧДР^{0,1} \cdot ВА^{0,63} \cdot СРП^{0,07}}{КЗ^{0,73} \cdot З^{0,07}} \left(\frac{ЧП(З)}{ВА} + 3 \right)^{0,29} \left(\frac{ЧП(З)}{ЧДР} + 4 \right)^{0,08}, \quad (2.37)$$

де $СРП$ – собівартість реалізації продукції; $ЧП(З)$ – чистий прибуток (збиток) ; $ЧДР$ – чистий доход від реалізації ; $ВА$ – вартість активів; $КЗ$ – кредиторська заборгованість ; $З$ – запаси. Чим ближче значення рейтингу до 1, ти більше ймовірність банкрутства, а чим ближче до 12 – тим менше.

2.4. Індивідуальні завдання № 2.

Застосування економічних моделей в розрахунках на комп'ютері

Завдання: провести розрахунки на комп'ютері за описаними вище моделями. Виконати їх дослідження за методами математичного аналізу, знайти критичні точки, побудувати графіки.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки N_3 та номер за списком навчальної групи N_2 . Варіант функції, за якою проводиться розрахунок, обирається з табл. 2.1 за N_2 .

Методичні вказівки: 1) за обраною з табл. 2.1 формулою будується формула у



, з посиланням на пусті клітинки.

- 2) за допомогою формули $=\text{RANDBETWEEN}((N_3+1)*N_2; (N_3+2)*(N_2+1))/341$ генерується 15 випадкових чисел, які в подальшому слугують константами у обраних формулах і використовуються у тому порядку, як вони були подані у поясненнях до відповідної формули.
- 3) за допомогою тієї ж формули генеруються пари чисел, які відповідають діапазону змін факторів у формулах.
- 4) використовуючи «Майстер діаграм» (рис. 2.11), побудувати сімейство кривих та зробити висновки за отриманими результатами.

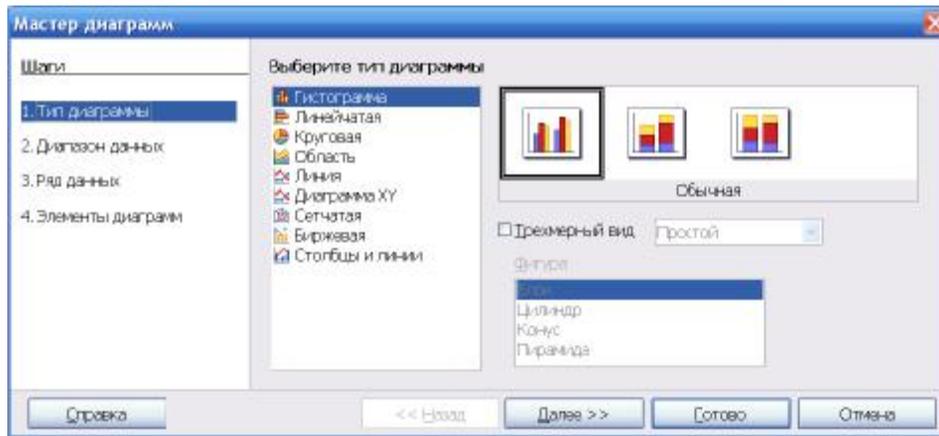


Рис. 2.11. Мастер диаграмм



Таблица 2.1.

Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанту	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номер формули	(2.5)	(2.7)	(2.8)	(2.10)	(2.11)	(2.13)	(2.15)	(2.37)	(2.21)	(2.24)

Контрольні запитання

1. Поясніть багатозначність терміну «модель».
2. Опишіть зміст поняття «математична модель».
3. Чим дискретна модель відрізняється від безперервної?
4. Які бувають види моделювання?
5. Які методи використовуються при створенні економіко-математичних моделей?
6. Яку задачу вирішують методи математичного програмування?
7. Поясніть зміст терміну «оптимальне споживання».
8. Що таке «ізокванта»?
9. Як доводиться неможливість одночасного отримання прибутку в моделі міжнародної торгівлі?
10. В яких випадках економічні явища моделюються динамічними моделями?
11. Коли настає «область хаосу» в моделі Хаавелмо?

Засвоївши матеріали розділу студенти опанують типи моделей і види моделювання, вивчать деякі з існуючих моделей економічних процесів, як статичних так і динамічних.

3. АНАЛІЗ, *ΥΠΟΚΑΤΕΓΟΡΙΑΚΗ* ΠΙΣΤΑΝΣΗ, ΤΑ *ΥΠΟ* ΖΑΣΤΟΣΥΒΑΝΣΗ В *ΔΟСІІІ* *І* *ЕНН* *СОУРІАІІВНО-ЕКОНОМІАНУХ СУСТЕМ*

В розділі наведено основні поняття про різні типи кібернетичних методів аналізу, приклади вирішення задач з аналізу соціально-економічних систем.

Спочатку розглянемо основні терміни та визначення.

Аналіз (від грець. *αναλυσις* – розклад) – розчленування предмета пізнання, абстрагування його окремих сторін. Під цим методом розуміють наступне.

1. Метод дослідження, який включає в себе вивчення предмета за допомогою мисленого або практичного розчленування його на складові елементи (частини об'єкта, його ознаки, властивості, відношення). Кожна із виділених частин аналізується окремо у межах єдиного цілого. Протилежне – синтез.

2. Уточнення логічної форми (будови, структури) міркування засобами формальної логіки.

3. Синонім наукового дослідження взагалі.

Економічний аналіз – взаємопов'язані й взаємозумовлені методи вивчення і наукового дослідження певних явищ, процесів, дій, результатів. У економіці застосовується з метою виявлення закономірностей і тенденцій розвитку економічних процесів, встановлення та оцінки основних факторів, що позитивно чи негативно впливають на показники ефективності. За допомогою економічного аналізу виявляють внутрішню структуру соціально-економічних систем, що дозволяє будувати більш точні моделі цих систем. Результати економічного аналізу використовують для прогнозування і перспективного планування економічних процесів, а також для розробки програм і рекомендацій подальшого ефективного розвитку, прибуткової діяльності.

Об'єктом статистичного економічного аналізу можуть бути дані про окреме підприємство, район, галузь, економіку держави в цілому, а також про сукупність об'єктів дослідження. Дані для статистичного економічного аналізу беруть із різних статистичних джерел, а також одержують в результаті соціологічних спостережень. Статистичний аналіз може бути повним (всебічне вивчення стану і розвитку явища в цілому) та частковим (з'ясування стану явища за даних умов, взаємозв'язку ознак, динаміки явищ тощо).

В цьому розділі буде розглянуто тільки кібернетичні аспекти аналізу соціально економічних систем, які базуються на припущенні, що окрім чисельних

вхідних та вихідних факторів, отриманих в результаті спостереження за цими системами, внутрішня структура самих систем невідома.

Будь-який вид аналізу починається з формування таблиці спостережень, в якій вхідні фактори розташовуються у лівих колонках, а вихідні – у правих. Запис чергового спостереження здійснюється в один рядок таблиці водночас усіх факторів. Якщо попередня гіпотеза про зв'язок вхідних і вихідних факторів включає в себе і час, цей фактор записується у першій колонці. Таким чином, загальний вид таблиці спостережень наступний (табл. 3.1). Така таблиця називається вибіркою числових значень факторів соціально-економічної системи.

Таблиця 3.1

Приклад формату таблиці спостережень за факторами соціально-економічної системи

Час або дата спостереження	Вхідні фактори				Вихідні фактори			
	X_1	X_2	...	X_n	Y_1	Y_2	...	Y_m

З таблиці видно, що кількість вхідних факторів – n , а вихідних – m . Саме для таблиць такого виду і буде вестися подальше викладення матеріалу, причому, всі фактори – вхідні і вихідні – будуть позначатися як X_i .

3.1. Статистичний аналіз соціально-економічних систем

Цей аналіз проводиться окремо для кожного фактора полягає у визначенні декількох параметрів, що їх характеризують. Це середнє, дисперсія, стандарт та варіація.

Середнє – це один з найбільш розповсюджених прийомів узагальнень. Правильне розуміння сутності середньої визначає її особливу значимість в умовах ринкової економіки, коли середнє через одиночне і випадкове дозволяє виявити загальне і необхідне, виявити тенденцію закономірностей економічного розвитку.

$$M_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad (3.1)$$

де X_i – окреме значення фактору; N – число одиниць сукупності (кількість вимірів цього фактору).

Але середня величина – це абстрактна, узагальнююча характеристика ознаки досліджуваної сукупності, вона не показує будівлі сукупності, що дуже істотно для її пізнання. Середня величина не дає представлення про те, як окремі значення досліджуваної ознаки групуються навколо середньої, чи зосереджені вони поблизу чи значно відхиляються від неї. У деяких випадках окремі значення ознаки близько примикають до середньої арифметичної і мало від неї відрізняються. У таких випадках середня добре представляє всю сукупність. В інші, навпаки, окремі значення сукупності далеко знаходяться від середньої, і середня погано представляє всю сукупність.

Коливання окремих значень характеризують показники варіації, через яку виявляється більшість статистичних закономірностей. Під варіацією в статистиці розуміють такі кількісні зміни величини досліджуваної ознаки в межах однорідної сукупності, що обумовлені перехресним впливом дії різних факторів.

Аналіз систематичної варіації дозволяє оцінити ступінь залежності змін у досліджуваній ознаці від визначаючих її факторів. Наприклад, вивчаючи силу і характер варіації у сукупності, можна оцінити, наскільки однорідною є дана сукупність у кількісному, а іноді і якісному відношенні, а отже, наскільки характерною є обчислена середня величина. Ступінь близькості даних окремих одиниць до середнього вимірюється низкою абсолютних, середніх і відносних показників. Серед них:

Дисперсія – показник, що характеризує розсіювання значень ознаки щодо його середньої величини

$$D_X = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N X_i^2 - M_X^2, \quad (3.2)$$

де X_i – окреме значення ознаки; M_X – середня арифметична ознаки; N – число значень ознаки.

Середнє квадратичне відхилення (або математичний стандарт чи просто стандарт)– це узагальнююча характеристика абсолютних розмірів варіації ознаки в сукупності. Середнє квадратичне відхилення є мірилом надійності середньої. Чим менше середнє квадратичне відхилення, тим краще середня арифметична відбиває собою всю вибірку. Середнє квадратичне відхилення – це квадратний корінь з дисперсії.

$$s_X = \sqrt{D_X}, \quad (3.3)$$

де D_X – дисперсія ознаки.

Незважаючи на логічну подібність, дисперсія є більш чуттєвим до варіації, а, отже, й частіше застосовуваним показником.

Оскільки числові характеристики випадкової величини ми знаходимо за вибіркою кінцевого розміру, то ми не можемо визначити їх точно, а знаходимо тільки якусь оцінку, виникає питання, а на скільки ж воно відрізняється від справжнього значення середнього чи дисперсії?

Нехай нас цікавить величина інтервалу ε на який відхилиться від справжньої оцінки числової характеристики, розраховане за результатами експериментальної вибірки. При цьому ми повинні наперед визначити ймовірність β , значення якої викликало б у нас довіру до цього інтервалу (тобто високу ймовірність – 0.8, 0.9, 0.95...). Цей інтервал так і називається – “довірчим”.

Отже нам треба зробити дію, зворотну визначенню ймовірності того, що справжнє значення числової характеристики випадкової величини ($Чх[X]$) буде відрізнятися від його оцінки $O[X]$ не більше ніж на величину ε

$$P(|Чх[X] - O[X]| < \varepsilon) = \beta. \quad (3.4)$$

Коли буде знайдено ε , то справжнє значення числової характеристики буде знаходитися в межах $O[X] - \varepsilon < Чх[X] < O[X] + \varepsilon$.

Розмір довірчого інтервалу для кожної числової характеристики можна знайти із застосуванням функції Лапласа

– для середнього
$$e_m = s_x \Phi^{-1}(b); \quad (3.5)$$

– для дисперсії
$$e_D = s_x \Phi^{-1}(b) \sqrt{\frac{0,8N+1,2}{N(N-1)}}, \quad (3.6)$$

де, $s_m = \sqrt{\frac{D_x}{N}}$; $\Phi^{-1}(\beta)$ – зворотне значення функції Лапласа, тобто таке значення аргументу (квантиля – t), при якому функція Лапласа дорівнює β .

Функція Лапласа має вигляд
$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (3.7)$$

але цей інтеграл у явному вигляді взяти неможливо, тому використовують таблиці його значень.

В деяких випадках перед початком статистичного аналізу потрібно виконати нормування чисельних значень нашої вибірки. Воно провадиться за формулою

$$X_i'' = \frac{X_i - M_x}{s_x}. \quad (3.8)$$

Таке нормування з імовірністю 98% переведе всі значення X у діапазон [-4;+4] з середнім, що дорівнює 0, та стандартом, що дорівнює 1.

Якщо в процесі розрахунків за нормованими даними виникає потреба виконати денормування, то потрібна формула
$$X_i = s_x X_i'' + M_x. \quad (3.9)$$

Мірою відносного відхилення значень випадкової величини відносно оцінки його середнього служить варіація та коефіцієнт варіації

$$\text{var}(X) = \frac{D(x)}{M(X)}; \quad K \text{ var}(X) = \frac{s(x)}{M(X)}. \quad (3.10)$$

Приклад. Економічний процес було досліджено за 4-ма параметрами. Було отримано 5 точок значень цих параметрів. Провести нормування цих параметрів.

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4
1	87	0,39	560	2770
2	25	0,82	430	2590
3	67	0,29	270	2870
4	62	0,52	860	1920
5	53	0,54	790	2770

Рішення цієї задачі будемо виконувати у .

Розрахуємо середні для кожного параметра із застосуванням функції AVERAGE(), у дужках через двокрапку вкажемо діапазон адрес клітинок, які містять зміни значення першого фактора для всіх 5-ти точок. Далі знаходимо стандарт, використовуючи функцію STDEVA(), де так само подано діапазон клітинок для 1-го фактора.

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1,25	-0,61	-0,09	0,48
2	-1,49	1,54	-0,62	0,02
3	0,36	-1,11	-1,27	0,74
4	0,14	0,04	1,13	-1,73
5	-0,26	0,14	0,85	0,48

І нарешті, за допомогою формули

STANDARDIZE($X; M_x; S_x$) виконуємо нормування. Тут перше число – адреса клітинки, яка має бути нормована, 2-е – адреса клітинки, де є середнє, 3-є – клітинка, де є стандарт.

Вікно функції STANDARDIZE представлено на рис. 3.1.

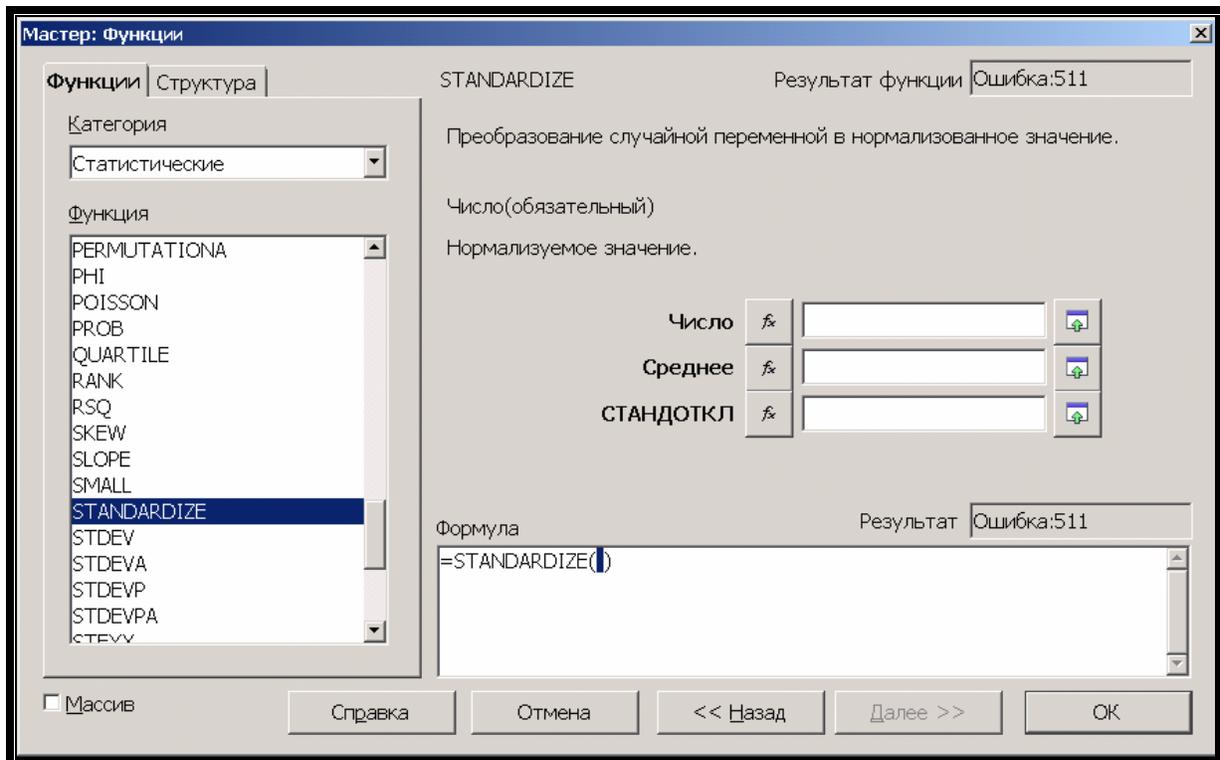


Рис. 3.1. Вікно функції STANDARDIZE з 

Знати закон розподілу кожного фактора соціально-економічної системи потрібно, щоб скористатися всіма вже раніше зробленими висновками щодо можливих характеристик цієї випадкової величини.

Для визначення того, якому закону підлягає випадкова величина, необхідно вибрати відомий закон (чи рівномірний, чи експоненціальний, чи нормальний, чи ще який) і висунути так звану «**нуль-гіпотезу**» про те, що математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення (чи дисперсія) для цього закону дорівнюють оцінкам цих величин, отриманих з результатів розрахунку за вибіркою випадкової величини (3.1)-(3.10) з певною довірчою ймовірністю p .

Далі, розбиваємо область існування випадкової величини на діапазони з урахуванням (4.2) і знаходимо відносні частоти k_i . Для кожного діапазону знаходимо ймовірності попадання випадкової величини в конкретний діапазон за формулою

$$P(x_i < x < x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i), \quad (3.11)$$

де x_i, x_{i+1} – значення випадкової величини на верхній і нижній межах i -го діапазону, $F(x)$ – прийнята ними як нуль-гіпотеза, функція розподілу, у якій параметрами математичного сподівання та дисперсії використовуються їхні оцінки, розраховані з експериментальної вибірки.

Нуль-гіпотеза приймається, якщо критерій узгодження Пірсона (або «хі-квадрат»)

$$C_P^2 = n \sum_{i=1}^d \frac{(p_i - k_i)^2}{p_i}, \quad (3.12)$$

буде менший або дорівнювати табличному значенню цього критерію при достатньо великому значенні довірчої ймовірності.. Тут n – розмір вибірки, k_i – частоти на відповідних діапазонах; p_i – імовірності попадання випадкової величини в той же діапазон, по якому розраховані і відносні частоти, розраховані за формулою (4.13): d – загальна кількість діапазонів, на які розбита область існування випадкової величини.

Табличні значення критерію Пірсона $\chi^2(r, p)$ можна отримати, скориставшись функцією  **ХИ2ОБР(довірча ймовірність;число степенів свободи)** або  **СНПІNV(довірча ймовірність;число степенів свободи)**

Інколи цю задачу вирішують через визначення рівня довірчої ймовірності. Тобто, за розрахованим значенням χ^2 та за числом степенів свободи знаходять, якій імовірності вони відповідають. А потім приймають рішення, чи можна довіряти отриманим результатам з такою ймовірністю. Для таких розрахунків існує функція  **ХИ2РАСП(розраховане значення χ^2 ;число степенів свободи)**

або  **СНІDIST(розраховане значення χ^2 ;число степенів свободи)**

На рис. 3.2 наведено приклад розрахунку за критерієм Пірсона. Вибірка значень фактора, що досліджується, не наведена.

	A	B	C	D	E	F
7	мін=	9	маx=	43		
8	k=	4	del=	8,5		
9	Діапазони		K	k	P	(k-P)^2 / P
10	мін	маx				
11	9	17,5	3	0,3	0,1866	0,0689
12	17,5	26	1	0,1	0,1391	0,011
13	26	34,5	1	0,1	0,1036	0,0001
14	34,5	43	5	0,5	0,0772	2,3144
15					Хі-кв. =	23,944
16	r=	2				
17	P=	0,95				
18	Хі таб=	0,10259				

Рис. 3.2. Приклад розрахунку 

3.2. Дисперсійний аналіз факторів соціально-економічних систем

Завданням дисперсійного аналізу є вивчення впливу одного або декількох чинників на дану ознаку. Часто дослідник має у своєму розпорядженні не одну вибірку даних, а декілька. Наприклад, можна визначати зміну у часі валюти балансу підприємств роздрібною торгівлі, та металургійних комбінатів. При побудові математичної моделі потрібно вирішити для себе, чи можливі ці вибірки поєднати в одну чи ні? Вирішенням цієї задачі займається декілька додаткових статистичних характеристик.

Коефіцієнт кореляції – параметр, який характеризує ступінь лінійного взаємозв'язку між двома вибірками, розраховується за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.13)$$

Коефіцієнт кореляції змінюється від -1 (строго обернена лінійна залежність) до 1 (строго пряма пропорційна залежність). При значенні 0 лінійної залежності між двома вибірками немає.

Незважаючи на те, що задовільного рівня коефіцієнта кореляції по усім видам інвестування не було отримано, ми не можемо казати про повну відсутність зв'язку між досліджуваними змінними. Тому виникає необхідність визначення значимості отриманих коефіцієнтів шляхом отримання границь надійного інтервалу, в який потрапляє окремо досліджуваний коефіцієнт.

Для значимих параметрів зв'язку ці границі визначають надійні інтервали з наперед заданою надійністю γ . Для цього використовують z -перетворення Фішера.

Перетворення виконується за формулою
$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad (3.14)$$

де z – z -перетворення Фішера, r – коефіцієнт кореляції.

Надійний інтервал для z визначається як

$$z' - t_g \sqrt{\frac{1}{n-1-3}} \leq z \leq z' + t_g \sqrt{\frac{1}{n-1-3}}, \quad (3.15)$$

де n – кількість спостережень.

В  є функції, що автоматично розраховують кореляцію

**CORREL(адреси клітинок першого масиву даних;
адреси клітинок другого масиву даних)**

Якщо потрібно дослідити взаємну кореляцію більше двох факторів, зручно

використовувати програму Кореляція пакету аналізу ,

Критерій Стюдента використовується, щоб визначити, наскільки вірогідно, що дві вибірки узяті з генеральних сукупностей, мають одне і те ж середнє.

Якщо ймовірність невелика ($<0,55$), можна вважати, що вибірки мають істотно відмінні середні, а отже, їх не можна поєднувати в одну для побудови математичної моделі.

Для реалізації цього закону розподілу існує функція ТТЕСТ

ТТЕСТ(Дані 1; Дані 2; Режим; Тип)

Тут: Дані 1 перший масив даних; Дані 2 другий масив даних; Режим = 1, то функція використовує односторонній розподіл, якщо Режим = 2, то двосторонній розподіл; Тип є типом t - тесту (для перевірки за критерієм Стьюдента). Тип 1 означає двосторонній. Тип 2 означає дві вибірки, рівну вірогідність. Тип 3 означає дві вибірки, нерівну вірогідність.

Приклад

Визначити відмінність дисперсій двох вибірок, представлених нижче

X_1	0,45	0,59	0,78	0,04	0,44	0,32	0,92
X_2	0,34	0,29	0,88	0,87	0,68	0,28	0,88

Скористаємося функцією FTEST  Результат розрахунку показано на рис. 3.3. Імовірність 0,88 означає, що ці вибірки статистично взяті з однієї генеральної сукупності. Отже, їх можна поєднати в одну для побудови економіко-математичної моделі.

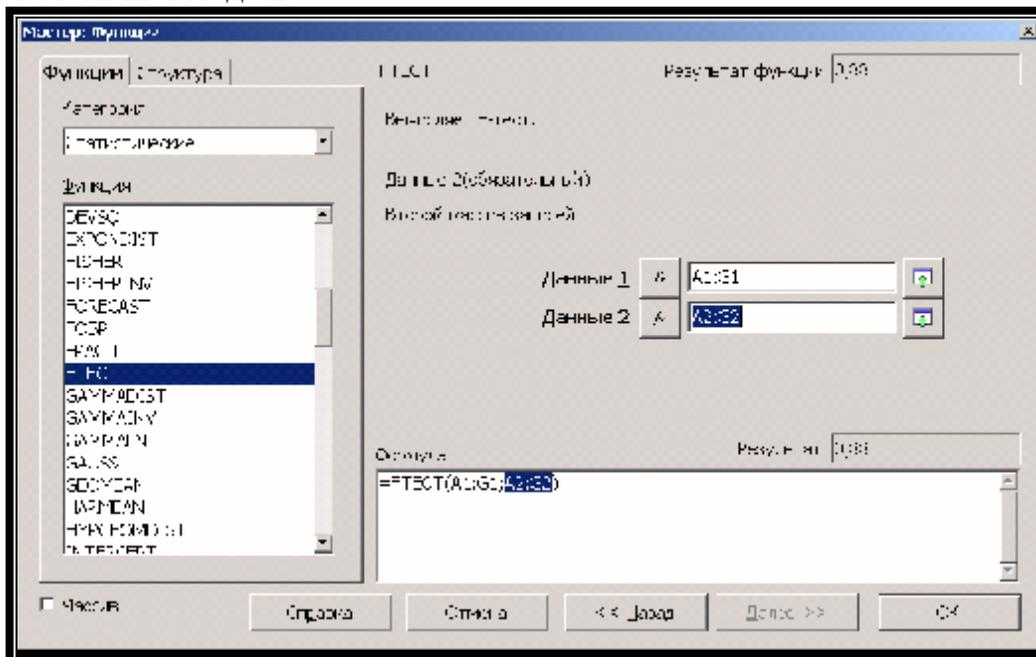


Рис. 3.3. Приклад роботи функції FTEST 

F-тест (Фішера) визначає односторонню вірогідність того, що дисперсії аргументів масив1 і масив2 розрізняються неістотно. Ця функція використовується для того, щоб визначити, чи мають дві вибірки різні дисперсії. Наприклад, якщо дані результати тестування для приватних і суспільних шкіл, то можна визначити, чи мають ці школи різні рівні різnorodності учнів за наслідками тестування.

Якщо ймовірність буде невеликою (<0,55), це означає, що за дисперсією вибірки відрізняються істотно, а отже, при імітаційному моделюванні не можна використовувати дані з вибірок водночас.

Для реалізації цього тесту існує функція FTEST



FTEST(масив1;масив2)

Пояснимо критерій Фішера.

Нехай є N нормально розподілених генеральних сукупностей з рівними дисперсіями та, можливо, з різними математичними сподіваннями.

Із кожної сукупності робимо вибірку об'єму $\{n_i\}, i = 1, 2, \dots, N,$

тоді $\sum_{i=1}^n n_i = n$ - об'єм усієї вибірки.

Позначимо j варіант випадкової величини X з i -тої сукупності x_{ij} . Тоді

середня арифметична вибірки із i -тої сукупності буде $x_i = \frac{1}{n_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, а се-

редня усієї вибірки буде $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot n_i$.

При рівні значущості α треба перевірити основну гіпотезу про рівність математичних сподівань сукупностей, що розглядаються

При рівності дисперсій статистична характеристика буде мати розподіл Фішера з $N - 1$ та $n - N$ степенів свободи. Тому в якості статистичної характери-

стики для перевірки цієї гіпотези візьмемо функцію $F = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\frac{1}{n-N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2}$, (3.16)

Критичну область у цьому випадку знаходять з урахуванням умови $P(F > f_\alpha) = \alpha$, де f_α критичне значення розподілу Фішера.

Приклад. Є дані про вар-
тість (в тис. гривень) проданих
трьох видів виробів певним
магазином в окремі дні тижня

вівторок	середа	четвер	п'ятниця	субота
10.2	10.8	10.7	13.0	12.0
11.5	9.8	11.5	13.2	11.5
12.0	12.1	12.0	11.5	11.8

Припускаючи нормаль-
ний закон розподілу одержаної суми кожного дня та рівність дисперсій, переві-
рити гіпотезу $H_0: \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5$ при рівні значущості $\alpha = 0,05$,

Розв'язання. Умови прикладу дозволяють застосувати до розв'язання задачі
критерій дисперсійного аналізу.

У цьому випадку маємо: $N = 5; n_i = 3, i = 1, 2, \dots, 5; n = 15$. Знаходимо

$$x_1 = 11.2, x_2 = 10.8, x_3 = 11.4, x_4 = 12.6, x_5 = 11.8, \bar{x} = 11.6$$

Зробимо обчислення сум

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = 0.48 + 1.92 + 0.12 \cdot 3 + 0.12 = 5.64,$$

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - \bar{x})^2 = 1.96 + 0.01 + 0.16 + 1 + 3.24 + 0.25 + 0.81 + 0.01 +$$

$$+ 0.16 + 1.96 + 2.56 + 0.01 + 0.15 + 0.01 + 0.04 = 12.34.$$

Тепер за формулою (3.16) знайдемо значення статистичної характеристики

$$F_{\text{сн}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 5.64}{\frac{1}{10} \cdot 12.34} = 1.14$$

Із таблиці критичних значень розподілу Фішера зі степенями вільності $N - 1 = 5 - 1 = 4$ та $n - N = 15 - 5 = 10$ і рівнем значущості $\alpha = 0,05$ знаходимо $F_{\text{кр}} = f_{0,05} = 3.48$.

Одержали, що $F_{\text{сн}} = 1.14 < F_{\text{кр}} = 3.48$, тому гіпотеза H_0 може бути прийнята.

Загальні принципи порівняння вибірок наступний:

1. Розраховуємо кореляцію, t-тест та F-тест для кожної пари вибірових значень.
2. Вибірки можна об'єднувати в одну якщо кореляцію позитивна, а тести дають значну ймовірність (>0.65).

3.3. Аналіз соціально економічних систем методом експертних висновків

У тих випадках, коли об'єктивній інформації виявляється не досить для визначення чисельних значень необхідного фактора при аналізі соціально економічної системи, треба використовувати суб'єктивні оцінки, засновані на накопиченому досвіді, знаннях, ідеях, думках і припущеннях фахівців, привернутих до вироблення суб'єктивної оцінки.

Отримання об'єктивних оцінок базується на наступних загальних положеннях:

- 1) **аксіома незміщеності**, яка стверджує, що думка більшості є компетентною;
- 2) **аксіома транзитивності**, яка стверджує, що суб'єктивні оцінки можуть бути переміщені.

З цього виходить, що мірою якості суб'єктивних оцінок є їх розсіяння.

Для визначення взаємозв'язку між ознаками, передусім на основі бальних оцінок, застосовуються методи рангової кореляції. Рангами називають числа натурального ряду, які згідно зі значеннями ознаки надаються елементам сукупності і певним чином упорядковують її. Ранжування проводиться за кожною ознакою окремо: перший ранг надається найменшому значенню ознаки, останній – найбільшому або навпаки. Кількість рангів дорівнює обсягу сукупності. З огляду на те, що рангова кореляція не потребує додержання будь-яких математичних передумов щодо розподілу ознак, зокрема вимоги нормальності розподілу, рангові оцінки щільності зв'язку доцільно використовувати для сукупностей невеликого обсягу, якими найчастіше і є економічні дані.

Для визначення міри зв'язку використовують коефіцієнт рангової кореляції, запропонований К. Спірменом

$$r = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n}, \quad (3.17)$$

де n – число одиниць сукупності, d_i – різниця рангів за ознакою x та за ознакою y для i -ої одиниці сукупності.

Цей коефіцієнт має такі самі властивості, як і лінійний коефіцієнт кореляції: змінюється в межах від - 1 до + 1, водночас оцінює щільність зв'язку та вказує на його напрям.

Але при наявності співпадаючих значень рангів вищенаведена формула не працює. Тому замість неї використовують коефіцієнт кореляції рангів Кенделла, який порівнює ранги для всіх пар одиниць сукупності, що заздалегідь підпорядковані по значенню позначки x .

$$W = \frac{12 \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^d r_{ij} - \frac{d(m+1)}{2})^2}{d^2(m^3 - m)}, \quad (3.18)$$

де d – кількість експертів, m – кількість критеріїв, r_{ij} – ранги.

Його використання доцільне, оскільки при розрахунку цього коефіцієнта не використовуються самі значення рангів, а тільки встановлюється більше або менше ранг даної одиниці, тобто немає необхідності при тотожності значень ознаки розраховувати середній ранг.

Але незважаючи на всі переваги традиційних методів, основаних на формулах Спірмена і Кенделла, вони часто не дають змоги отримати потрібний результат при недостатній погодженості об'єктів по одному з вимірювань та малому обсязі сукупності вимірювань. Крім того, подані формули потребують обробки при тотожності рангів об'єктів.

Для рішення даної проблеми пропонується використовувати модифікований коефіцієнт конкордації

$$W = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - x_i|}{n(k_i - 1)}, \quad (3.19)$$

де n – об'єм вибірки, k_i – кількість ознак по i -му елементу вибірки.

В разі, коли $\forall_i (k_i = n)$ вид (3.19) спрощується

$$W = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - x_i|}{n(n - 1)}, \quad (3.20)$$

Формула (3.19) є аналогом коефіцієнта Кенделла, але не має обмежень, що покладаються на неї. Наприклад, для знаходження кореляції між результатами, формула Кенделла потребує рангового перетворення з наступним усередненням показників для рівних рангів.

Модифікований коефіцієнт конкордації може працювати безпосередньо з вихідними даними. При цьому необхідно або зменшити все значення сукупності на величину мінімального значення, або привести (2.21) до виду

$$W = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|}{n(k - m)}, \quad (3.21)$$

де n - об'єм вибірки, k - максимально можливе значення ознаки, m - мінімально можливе значення ознаки.

Щоб можна було скористатися цими формулами, в  є функція автоматично визначення рангів чисел у вибірці

RANK(Число;Адреси клітинок масиву;Тип)

Адреси клітинок масиву треба задавати як константи, тобто додавати до них символ \$. Тип = 0, якщо ранжування виконується у зростаючому порядку і Тип = 1, – якщо в убуючому.

Приклад. Сім експертів подали свої оцінки чисельного значення економічних факторів X_1 та X_2 . Знайти міру узгодженості їх думок.

Чисельні значення експертних висновків наведено в таблиці. Там же подано ранжування у зростаючому порядку їх значень за допомогою функції RANK електронних таблиць Calc. На рис. 3.5 подано фрагмент цих розрахунків.

	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
Параметри	X_1	0,55	0,06	0,54	0,92	0,27	0,32	0,6
	X_2	0,78	0,77	0,98	0,14	0,93	0,29	0,78
Ранги	X_1	3	7	4	1	6	5	2
	X_2	3	5	1	7	2	6	4

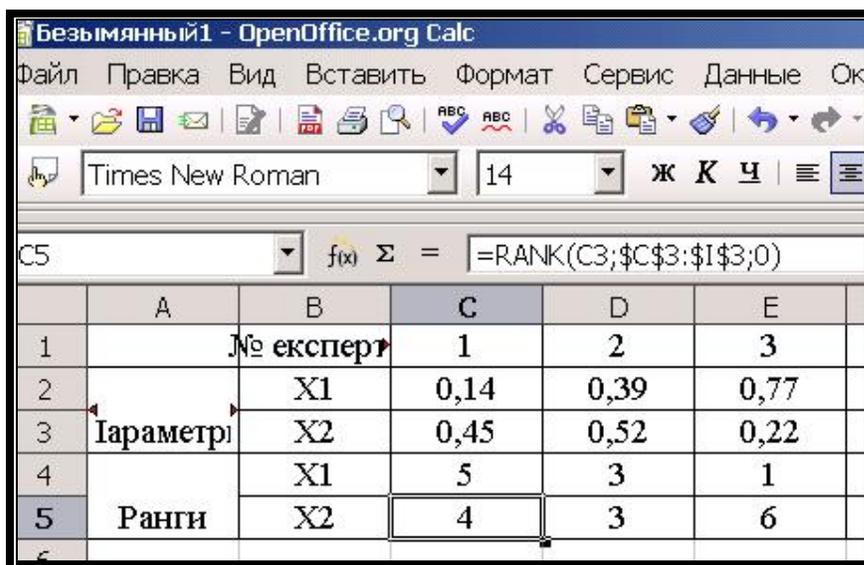


Рис. 3.4. Приклад визначення рангів експертних оцінок

Для вирішення подальшої задачі, скористаємося коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена (3.17). Число одиниць сукупності $n = 7$. Суму різниць рангів в квадраті знайдемо, використавши функцію



SUMXMY2(масив1; масив2).

Вона дорівнює 67. Тоді, коефіцієнт Спірмена дорівнює -0,2.

Отже, міра узгодженості експертних оцінок двох економічних параметрів показує нам, що думки експертів не узгоджені, а отже, їх не можна використовувати для побудови економіко-математичної моделі.

3.4. Аналіз запізнювання впливу вхідних факторів на вихідні

Деяким соціально-економічним системам властива інерція, що виявляється в тому, що зміна їх стану супроводжується перехідним процесом. Тобто, при зміні вхідного фактора, вихідні, що пов'язані з ним, не одразу приймають нове значення. Для цього потрібен деякий час.

Якісні особливості властивостей економічного об'єкту, які можуть трактуватися як інерційні, і недолік апріорної інформації про їх характеристики приводять до необхідності їх статистичної оцінки шляхом належної обробки інформації про спостереження траєкторії (зміни у часі) входів і виходів об'єкту.

Спостережуваним ефектом «інерції» є запізнювання виходу або стану елемента щодо моменту зміни вхідної дії. Так, «запізнюється» випуск готової продукції щодо моменту реалізації витрат, приріст потужностей щодо моменту виділення для цієї мети капітальних вкладень, зміна попиту, обумовлена зміною ціни на товари і послуги, і так далі. Звичайно, в кожному з приведених прикладів природа запізнювання різна: у першому воно викликане тривалістю виробничого циклу; у другому – складається з ряду етапів – проектування, створення і монтаж устаткування, освоєння потужностей, що вводяться; у третьому – породжується інерцією споживачів.

Проте у всіх вказаних і інших випадках запізнювання в елементах і зв'язках економічної системи істотно впливає на її функціонування і розвиток, і тому його облік має важливе теоретичне і практичне значення. Розглянемо деякі лінійні моделі запізнювання, якими зазвичай користуються при аналізі функціонування економічних об'єктів.

У таких системах вихідна змінна може бути представлена у вигляді суперпозиції її «ідеального» значення (відповідного не інерційного елемента) і складової, породжуваної інерцією об'єкту. Тому при аналізі запізнювання і його впливу на поведінку елемента зручно розрізняти потенційні значення запізнювання вихідної змінної. Перше – $y^0(t) = c_1 x(t)$ для «ідеального» виходу, друге – $y(t)$ для виходу із запізнюванням. На рис. 3.5 зображена схема системи, що

інтерпретує взаємодію обох виходів. Тут F^0 – «ідеальний» перетворювач; його вихідний полюс ототожнений зі вхідним полюсом інерційної ланки

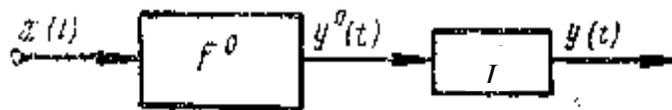


Рис. 3.5. Ідеальна схема системи з запізнюванням

I , що моделює запізнювання. Внутрішній стан цієї ланки визначається $g_e(t)$ накопиченим у ній запасом речовини, енергії або інформації.

Для характеристики запізнювання важливо дві оцінки його впливу на поведінку об'єкту. Перша характеристика – *тривалість запізнювання (часовий лаг) T* ; вона достатня для опису сталого режиму функціонування об'єкту, при якому y , y^0 і g_e зберігають постійні значення, а $y = y^0$ (із заданою точністю). Часовий лаг може бути регламентований (скажімо, тривалість транспортування продукту, час передачі інформаційного повідомлення, термін будівництва) або визначений шляхом спостережень. Очевидно, що в сталому режимі

$$g_e = y^0 T \quad (3.22)$$

На рис. 3.6 представлено два типи графіків запізнювання, які найчастіше зустрічаються в соціально-економічних системах при зміні значення на вході.

Перший тип (а) визначає криву, яка поступово підходить від значення y^0 до y^0 за час T . Час T , після закінчення якого різниця $y(t) - y^0$ перевершує деяку

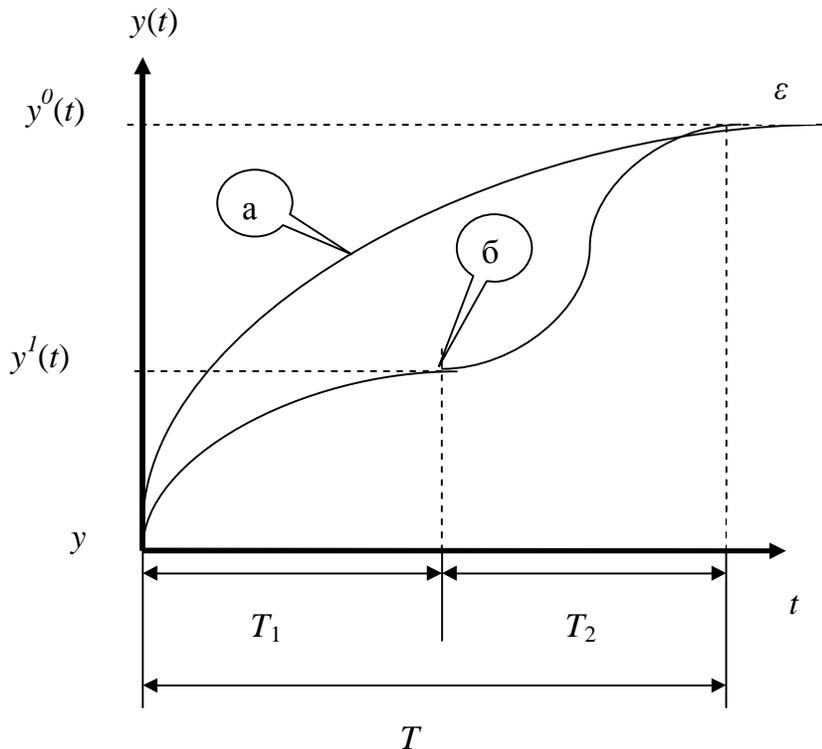


Рис. 3.6. Типи інерційних процесів у соціально-економічних системах

ти власні параметри констант

$$I_1 = \frac{1}{T_1}; I_2 = \frac{1}{T_2}. \quad (3.25)$$

Відповідно маємо два відхилення $e_1 \approx 0.379 y_1$; $e_2 \approx 0.379(y_0 - y_1)$. (3.26)

задану величини ε , визначається співвідношенням $T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y^0}{\varepsilon}$

З цього співвідношення можна визначити величину ε . Оскільки

$$\lambda = \frac{1}{\bar{T}}, \quad (3.23)$$

то при $t = \bar{T}$ відхилення

$$\varepsilon = \frac{y^0}{e} \approx 0.379 y^0. \quad (3.24)$$

Для графіку другого типу (б) характерним є наявність двох вигинів кривої зміни в часі вихідного фактора. Дослідник має

розділити ці вигини на дві ділянки з відповідним часом T_1 та T_2 . Кожна з цих ділянок дозволяє визначити

3.5. Спектральний аналіз

Цей вид аналізу застосовується у випадку дослідження періодичних процесів в соціально-економічних системах. Тобто тоді, коли припускається, що вони можуть бути описані періодичними функціями. Періодичні функції визначаються так. Для кожної з них існує число $T > 0$ таке, що при всіх x , що належать області визначення функції f , значення $x + T$ і $x - T$ також належать цій області і виконується рівність $f(x+T) = f(x)$.

Такі функції називаються T - періодичними.

Для визначення періодичності серед отриманих даних використовується спектральний аналіз. Спектр виходить в результаті розкладання початкової функції, залежної від часу (часовий ряд) або просторових координат (наприклад, зображення) в базис деякої періодичної функції. Найчастіше для спектральної обробки використовується спектр Фур'є, що отримується шляхом розкладання початкової функції в базис синуса (розкладання Фур'є, перетворення Фур'є).

Основний сенс перетворення Фур'є в тому, що початкова неперіодична функція довільної форми, яку неможливо описати аналітично і в загальному

випадку важка для обробки і аналізу, представляється у вигляді сукупності синусів або косинусів з різною частотою і амплітудою. Іншими словами, складна функція представляється у вигляді сукупності простіших (розкладання). Кожна синусоїда (або косинусоїда) з певною частотою і амплітудою, отримана в результаті розкладання Фур'є, називається спектральною складовою або гармонікою. Спектральні складові утворюють спектр Фур'є.

Візуально спектр Фур'є представляється у вигляді графіка, на якому по горизонтальній осі відкладається кругова частота, а по вертикалі – амплітуда спектральних складових, що зазвичай позначається латинською буквою A . Тоді кожна спектральна складова може бути представлена у вигляді відліку, положення якого на горизонтальній осі відповідає частоті складової, а висота – її амплітуді. Гармоніка з нульовою частотою називається постійною складовою (у тимчасовому уявленні це пряма лінія).

Навіть простий візуальний аналіз спектру може багато сказати про характер функції, на основі якої він був отриманий.

Довжина хвилі функцій синуса або косинуса, як правило, виражається числом циклів (періодів) в одиницю часу (Частота), часто позначається як η ; у деяких підручниках також використовують f). Наприклад, часовий ряд, що складається з кількості листів, що обробляються поштою, може мати 12 циклів в році: першого числа кожного місяця відправляється велика кількість кореспонденції (багато рахунків приходять саме першого числа кожного місяця); потім, до середини місяця, кількість кореспонденції зменшується; і потім знов зростає до кінця місяця. Тому кожен місяць коливання в кількості кореспонденції, що обробляється поштовим відділенням, проходить повний цикл. Таким чином, якщо одиниця аналізу - один рік, то буде дорівнювати 12 (оскільки є 12 циклів в році). Звичайно, можуть бути і інші цикли з різними частотами. Наприклад, річні цикли ($\nu = 1$) і, можливо, тижневі цикли ($\nu = 52$ тижні в рік).

Модель лінійної множинної регресії може бути записана як

$$x_t = a_0 + \sum (\alpha_k \cdot \cos(\lambda_k \cdot t) + b_k \cdot \sin(\lambda_k \cdot t)), \quad (3.27)$$

(для λ_k до $k=1$ до q)

Наступне загальне поняття класичного гармонійного аналізу в цьому рівнянні λ_k – (лямбда) – це кругова частота, виражена в радіанах в одиницю часу,

тобто $\lambda = 2 \cdot \pi \cdot \eta_k$, де π – константа (3.1416) і $\eta_k = \frac{k}{q}$.

Тут важливо усвідомити, що обчислювальне завдання підгонки функцій синусів і косинусів різних довжин до даних може бути вирішена за допомогою множинної лінійної регресії. Відмітимо, що коефіцієнти при косинусах і коефіцієнти при синусах – це коефіцієнти регресії, що показують ступінь, з яким відповідні функції корелюють з даними (відмітимо, що самі синуси і косинуси на різних частотах не корельовані або, іншою мовою, ортогональні. Таким чином, ми маємо справу з окремим випадком розкладання по ортогональних поліномах). Всього існує q різних синусів і косинусів; інтуїтивно ясно, що число функцій синусів і косинусів не може бути більше числа даних в ряду. Не вдаючись

до подробиць, відзначимо, якщо N – кількість даних, то буде $N/2+1$ функцій косинусів і $N/2-1$ функцій синусів. Іншими словами, різних синусоїдальних хвиль буде стільки ж, скільки даних, і ви зможете повністю відтворити ряд по основних функціях. (Відмітимо, якщо кількість даних у ряді непарно, то останнє спостереження зазвичай опускається. Для визначення синусоїдальної функції потрібно мати, принаймні, дві точки: високого і низького піку).

У результаті, спектральний аналіз визначає найбільш характерні частоти чії періоди характеризують конкретну соціально-економічну систему.

Приклад. Файл містить частину відомих чисел сонячних плям з 1749 року по 1924 рік. Нижче показаний список перших декілька даних з файлу з прикладами розрахунку із застосуванням пакету прикладних програм STATISTICA (рис. 3.7).

Припускається, що кількість сонячних плям впливає на погоду на землі, а також на сільське господарст-

Wolfer's sunspot data	
1 SPOTS	
1749	809
1750	834
1751	477
1752	478
1753	307
1754	122
1755	96
1756	102
1757	324
1758	476
1759	540
1760	629
1761	859
1762	612
1763	451
1764	364
1765	209
1766	114

Рис.3.7. Файл даних.

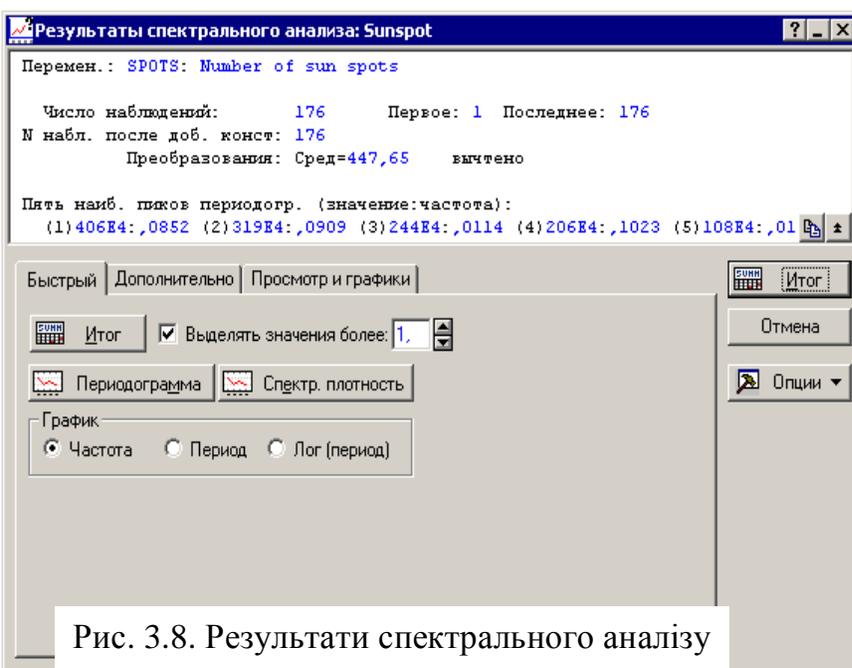


Рис. 3.8. Результаты спектрального анализа

во, на телекомунікації і так далі Застосовуючи цей аналіз, можна спробувати з'ясувати, чи дійсно активність сонячних плям має циклічну природу.

Розділ інформації у верхній частині діалогового вікна показує деякі підсумкові статистики ряду (рис. 3.8). Він також показує п'ять найбільших піків періодограми (по частоті). Найбільших три піки на частотах 0.0852, 0.0909 і 0.0114. Ця інформація часто корисна при аналізі дуже великих рядів (наприклад, з більш ніж 100,000 спостереженнями), які непросто надати на одному графіку.

На графіку періодограми видно два чіткі піки (рис. 3.9-10). Максимальний – на частоті приблизно 0.9. Нижче показана частина таблиці результатів з найбільшим піком, встановленим по періодограмі.

Таким чином, Частота 0.0909 відповідає значенню 11 Періоду (число одиниць часу, потрібних на повний цикл). Оскільки дані сонячних плям в

Sunspot.sta є річними спостереженнями, можна укласти, що існує яскраво виражений 11-річний (можливо трохи довше чим 11-річний) цикл в активно-

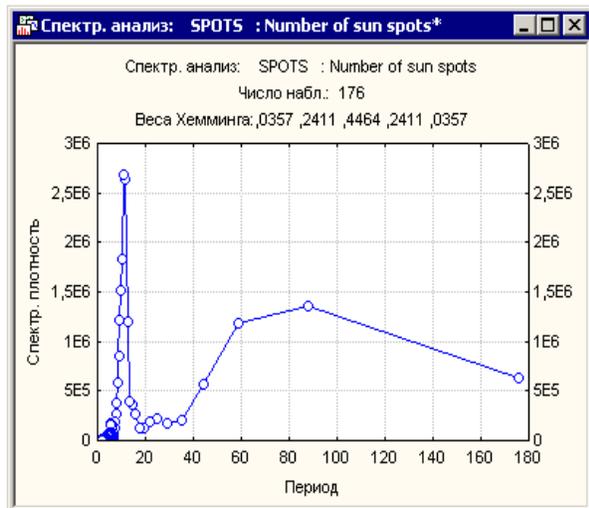


Рис. 3.10. Графік значень періодограми по періоду

одограми по періоду.

Знову видно, що існує яскраво виражений 11-річний цикл в активності сонячних плям; більш того, є ознаки існування тривалішого приблизно 80-ти - 90-річного циклу.

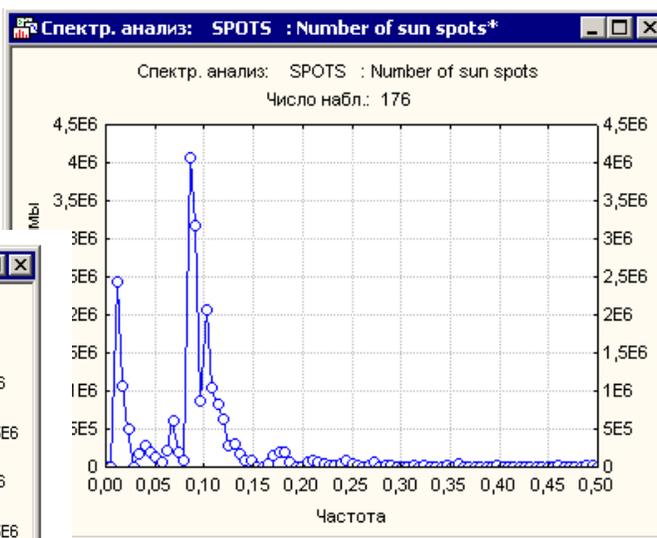


Рис. 3.9. Графік періодограми по частоті сті сонячних плям.

Спектральна щільність. Зазвичай для обчислення оцінок спектральної щільності періодограму згладжують, щоб прибрати випадкові коливання.

Два піки стали тепер навіть виразніше. Подивимося на значення пері-

3.6. Кластерний аналіз

При дослідженні різних соціально-економічних об'єктів, при отриманні вибірок про числові значення виникає питання про можливість угруповання цих даних. Така проблема вирішується методами автоматичної класифікації, серед яких найбільш зручним є кластерний аналіз.

3.6.1. Місце кластерного аналізу серед інших методів автоматичної класифікації

Розглянемо інші методи класифікації, щоб зрозуміти межу застосування кластерного аналізу.

РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ – процес, при якому на підставі численних характеристик (ознак) якогось об'єкта визначається одна або кілька нових, найістотніших його характеристик, зокрема, його приналежність до певного класу об'єктів. Розв'язати задачу розпізнавання образів – значить за непрямыми даними знайти правила, за якими кожному наборові значень ознак якогось об'єкта ставиться у відповідність одне рішення із заданої множини можливих рішень,

що визначають істотні характеристики цього об'єкта.

ДИСКРИМІНАНТНИЙ АНАЛІЗ – використовується для ухвалення рішення про те, які перемінні розрізняють (дискримінують) дві або більш виникаючі сукупності (групи). Наприклад, економіст може записати різні характеристики подібних типів (груп) підприємств, щоб потім провести аналіз дискримінантної функції, що щонайкраще розділяє типи або групи.

Як видно з викладеного вище, кластерний аналіз корисний у випадках, коли практично невідомо наперед про можливу структуру класів об'єктів. А саме такою, частіше всього, є економіка, з її складністю зв'язків, розмаїтістю видів об'єктів, невизначеністю наслідків від керуючого впливу. Тому кластерний аналіз є найбільш прийнятним при дослідженні економічних систем.

3.6.2. Вимірювання відстаней між об'єктами

Кожен економічний об'єкт може бути представлений одним і тим же набором факторів або параметрів. Наприклад, торгове підприємство може бути охарактеризоване такими факторами як виторг, обсяг реалізації, валюта балансу, кількість працівників, кількість торгових точок тощо. Позначимо кожен з цих факторів чи параметрів економічного об'єкта як X_i . Тут i – номер фактора, який характеризує об'єкт. Тобто, кожен об'єкт може бути представлений вектором

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_{N_f}) \quad (3.28)$$

де N_f – кількість факторів. Цей вектор являє собою точку в гіперпросторі, який має розмірність N_f . Наприклад, якщо три об'єкти характеризуються двома факторами які мають значення відповідно, (1;2), (2;3) та (3;1) то їх можна представити як три точки на плоскому графіку (рис. 1.1).

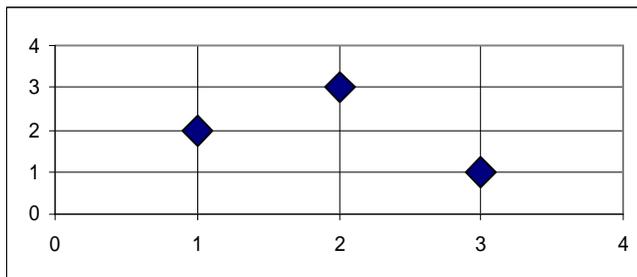


Рис. 3.11. Представлення трьох об'єктів, як точок на площині

І хоча фактори для всіх об'єктів, що розглядаються, є однаковими, їх числові значення будуть відрізнятися. Якщо охарактеризувати інший об'єкт аналогічним (1.1) вектором, який позначимо як Y , можна розрахувати міру близькості цих об'єктів.

Міра близькості або відстань між об'єктами розраховується за допомогою різних формул, які ще називаються метриками відстаней.

Відстань між двома об'єктами позначається як $d(x_i, y_i)$ – це ненегативна функція близькості задається при наступних умовах:

- 1) Вона завжди більше або дорівнює нулю.
- 2) Відстань від точки X до точки Y така сама, як і від Y до X .
- 3) Якщо числові значення факторів двох об'єктів однакові, відстань між ними дорівнює нулю.
- 4) Нехай існує третя точка U . Тоді сума відстаней між точками XU та YU завжди більша ніж відстань поміж точками XY .

Або у вигляді формули це записується так:

$$\left. \begin{array}{l} d(x_i, y_i) \geq 0 \\ d(x_i, y_i) = d(y_i, x_i) \\ d(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \\ d(x_i, y_i) \leq d(x_i, u_i) + d(u_i, y_i) \end{array} \right\} \forall \{i\} \in N \quad (3.29)$$

Найбільш розповсюдженою функцією відстані між двома об'єктами (X; Y)

– є відстань у **метриці Евкліда**
$$d_E(x_i; y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{Nf} (x_i - y_i)^2} \quad (3.30)$$

Метрика Евкліда дозволяє не враховувати знакові розходження, пропорційно збільшує відстань між об'єктами у випадку різних абсолютних значень показників. У результаті збільшується розмірність кластерного поля, об'єкти штучно віддаляються друг від друга, у результаті чого границі між кластерами стають більш чіткими і точними.

Другий по значимості функцією відстані прийнято вважати **міру несхожості Хемінга**
$$d_{HEM}(x_i; y_i) = \sum_{i=1}^{Nf} (x_i - y_i) \quad (3.31)$$

Метрика Хемінга може використовуватися в тих випадках, коли знакові розходження характеристик об'єктів мають принципове значення. За рахунок нівелювання знакових розходжень показників об'єкти виявляються сконцентрованими до області ядра кластера, але при цьому утрачаються важливі знакові характеристики розходжень.

Несуттєво від метрики Евкліда відрізняється і функція відстані в метриці **L-норма** (d_L), яка інколи ще називається відстанню міських кварталів або манхеттенською відстанню

$$d_L(x_i; y_i) = \sum_{i=1}^{Nf} |x_i - y_i| \quad (3.32)$$

Різниця у відстанях, обчислених за метриками у просторі Евкліда і L-норми, залежить від абсолютних числових значень і кількості розглянутих показників. У L - норми компактність вище, у середньому, на 3...10 відсотків, якщо $(x_i, y_i) \in [1;100]$, а при інтервалі [0;1] компактність менше, у тих же пропорціях. Але з урахуванням визначеної невірогідності вихідних показників подібна різниця може бути визнана несуттєвою.

У деяких умовах класифікації, коли компактність кластерів занадто велика і розділити їх на підмножини досить складно, застосовують метрику «норма - верхня границя» або **метрика Чебишева**

$$d_{SUP}(x_i; y_i) = SUP|x_i - y_i| \quad (3.33)$$

Цей запис означає, що з усіх різниць значень факторів, взятих по модулю, потрібно вибрати одну – найбільшу. І саме вона буде характеристикою відстані між об'єктами. Використання цієї міри відстані може неправомірно змінити картину класифікації через зневагу усіма факторами крім одного. Тут необхідно теоретичне обґрунтування коректності обраної міри (d_{sup}).

Узагалі, дослідник може використовувати безліч функцій відстані, запропонованих у різних роботах по кластерному аналізу, або власних. Відзначимо ще трохи функцій відстані, що згадуються часто.

Степенева відстань. Іноді бажають прогресивно збільшити або змен-

шити вагу, що відноситься до розмірності, для якої відповідні об'єкти сильно відрізняються. Це може бути досягнуто з використанням *степеневі відстані*:

$$d_s(x_i; y_i) = \left(\sum_{i=1}^{N_f} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.34)$$

де r і p - параметри, визначувані користувачем. Декілька прикладів обчислень можуть показати, як "працює" ця метрика. Параметр p відповідальний за поступове зважування різниць по окремих координатах, параметр r відповідальний за прогресивне зважування великих відстаней між об'єктами. Якщо обидва параметри - r і p , рівні двом, то ця відстань співпадає з відстанню Евкліда.

Функція відстані Джеффриса-Матусіти

$$d_M(x_i; y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_f} (\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i})^2} \quad (3.35)$$

Функція Махаланобіса. Ця функція узагальнює можливі варіанти використання метрики Евкліда. Вона задана в матричній формі. Перетворення T (транспонування матриці) кореляційної матриці інваріантно-невиродженим лінійним перетворенням $D^2 = (X_i, X_j) = (X_i - X_j)^T W^{-1} (X_i - X_j)$, (3.36)

де $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n_1} x_i / n_1$, $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n_2} y_i / n_2$ - статистичні відстані між кластерами. W^{-1} -

матриця, зворотна матриці розсіяння

$$W = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{X} - \bar{Y})(\bar{X} - \bar{Y})^T \quad (3.37)$$

Приклад. Побудувати матрицю відстаней для 4-х об'єктів, представлених двома факторами у наведеній нижче таблиці, за метрикою Махаланобіса.

№ об'єкта	X_1	X_2
1	1	2
2	1	3
3	2	2
4	3	1

Рішення цієї задачі будемо виконувати в пакеті MATLAB.

Задамо вхідні дані: $X = [1 \ 2; 1 \ 3; 2 \ 2; 3 \ 1]$

Для розрахунку відстані використовуємо функцію $Y = pdist(X, 'metric')$ - де X - вектор вхідних даних, 'metric' - вид функції відстані (можливі значення 'Euclid' - метрика

Евкліда, 'Mahal' - метрика Махаланобіса, 'CityBlock' - манхетенська відстань). Для розрахунку відстані за метрикою Махаланобіса скористаємося $Y = pdist(X, 'mahal')$, результати роботи функції наведені в наступній таблиці, де в заголовках рядку і стовпця стоять номери об'єктів.

	1	2	3	4
1	0	2.35	2.00	2.35
2	2.35	0	1.23	2.45
3	2.00	1.23	0	1.23
4	2.35	2.45	1.23	0

3.6.3. Кластеризація повним перебором об'єктів

Методично цей спосіб кластеризації найбільш простий і надійний, але досить трудомісткий. Вона виконується в такому порядку.

1. Складемо вихідну матрицю спостережень над об'єктами.

2. Одержимо матрицю значень відстаней від довільно обраного об'єкта (його числової характеристики).

3. Введемо поняття приналежності i -го об'єкта до k -го кластера. Це буде матриця Q розмірності $N_0 \times N_0$, де N_0 – кількість об'єктів, які розглядаються. В ній по стовпцям розташовані номери об'єктів, а по рядках – номери кластерів. Припускається, що кількість кластерів буде дорівнювати кількості об'єктів. Елементи цієї матриці представляють собою бінарні числа, тобто такі, які можуть приймати значення тільки 0 або 1.

4. Введемо цільову функцію, що відповідає обраному критерію внутрішньо групової однорідності об'єктів

$$Z = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} d_{ij} \rightarrow \min \quad (3.38)$$

де q_{ij} – елемент матриці Q , d_{ij} – метрика відстані поміж об'єктами ($1 \leq i, j \leq N_0$).

5. Додамо до цільової функції обмеження

$$\sum_{i=1}^{N_0} q_{ij} \leq N_0, \quad (3.39)$$

$$\sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = 1 \quad (3.40)$$

Перше обмеження означає, що сума елементів q_{ij} по рядку не повинна перевищувати числа об'єктів, друге – що один і той же об'єкт не може бути включений до двох чи більше кластерів.

6. Останнє обмеження показує, що число об'єктів, включених до різних кластерів має дорівнювати їх загальній кількості

$$\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = N_0 \quad (3.41)$$

Ознакою того, скільки об'єктів включено до кластера буде значення суми (2.3). Змінними параметрами задачі оптимізації будуть елементи матриці Q .

Приклад. Для матриці відстаней, розрахованої у прикладі з п.3.6.2, побудувати кластери методом повного перебору.

Перенесемо цю матрицю до . Там же утворимо чисту матрицю, теж розміром 5x5, в якій будуть знаходитися елементи матриці Q . При цьому ми припускаємо, що номери стовпців у ній відповідають номерам об'єктів, а номери рядків – номерам кластерів.

У матриці Q знайдемо суму по рядкам, що буде відповідати лівій частині обмеження (3.39), та по стовпцях – лівій частині обмеження (3.40). Далі знайдемо загальну суму елементів матриці Q згідно з (3.41). Сума знаходиться за допомогою функції $SUM(I:J)$, де I – адреса першої клітинки, яка містить масив чисел, а J – адреса останньої клітинки. Тепер сформуємо цільову функцію виду (3,38). Для цього скористаємося функцією $SUMPRODUCT(I:J;NN:MM)$, де $I:J$ – адреса масиву відстаней, а $NN:MM$ – адреса масиву матриці Q . Спочатку всі суми дадуть нуль, оскільки всі елементи матриці Q дорівнюють нулю. Застосувавши

	1	2	3	4	5
1	0	0,89	0,41	0,74	0,46
2	0,89	0	0,86	0,87	0,61
3	0,41	0,86	0	0,96	0,66
4	0,74	0,87	0,96	0	0,62
5	0,46	0,61	0,66	0,62	0

функцію Solver , інтерфейс якої представлено на рис. 3.12-3.13, ми позначаємо

елементи матриці Q , як змінні параметри, що мають бінарний характер, спрямовуємо функціонал до мінімуму, додаємо обмеження і отримуємо наступне оптимальне рішення, для якого функціонал дорівнює 4,36.

		Об'єкти					Сума по кластерам
		1	2	3	4	5	
Кластери	1	0	1	0	0	0	1
	2	1	0	0	0	0	1
	3	0	0	0	1	1	2
	4	0	0	1	0	0	1
	5	0	0	0	0	0	0
Сума по стовпцям		1	1	1	1	1	5

Аналіз результатів показує, що у перший кластер попав 2-й об'єкт, у другий кластер – 1-й, у третій кластер – 4-й та 5-й, у четвертий кластер – 3-й, у п'ятий – не включено жодного об'єкта.

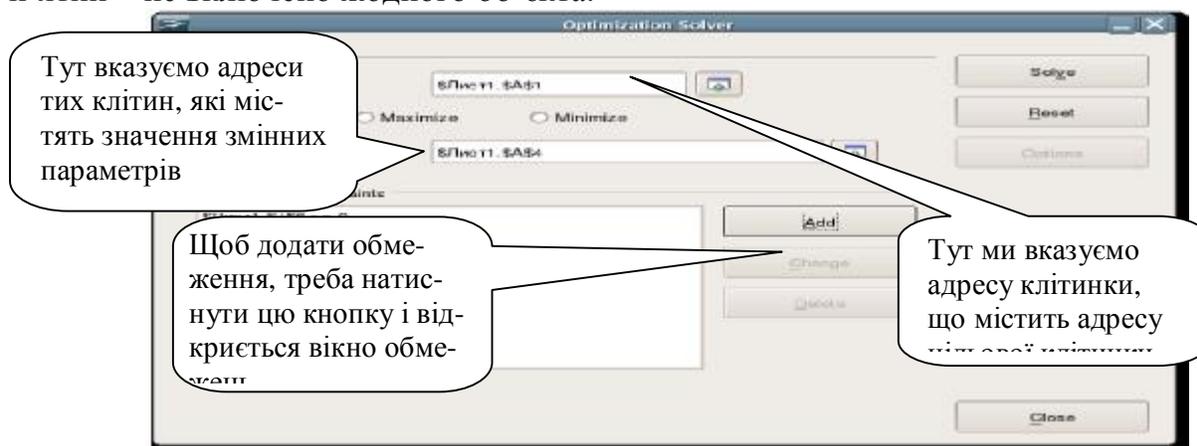


Рис. 3.12. Головне вікно функції Solver

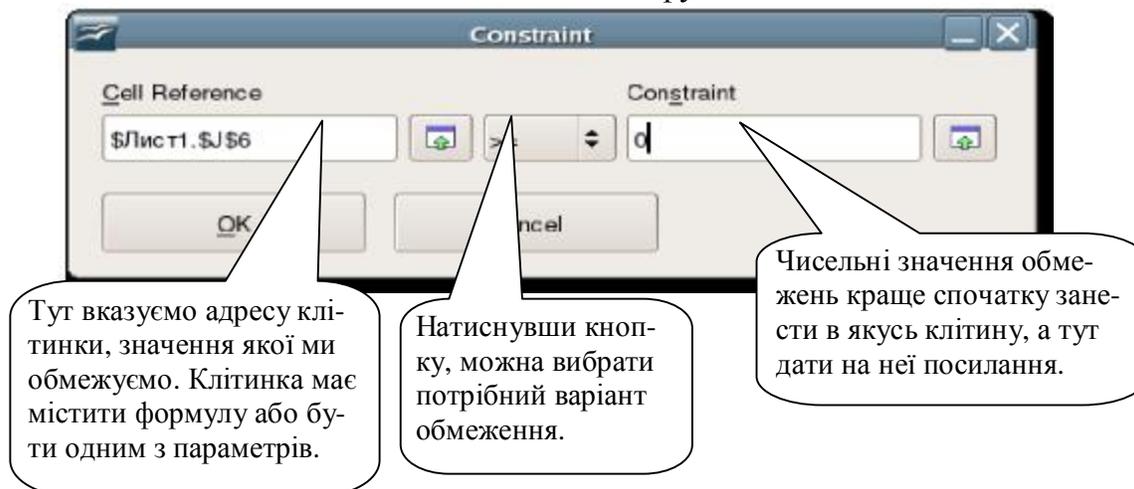


Рис. 3.13. Вікно введення обмежень функції Solver

3.7. Індивідуальні завдання №3. Статистичні розрахунки

Завдання: Вивчити методи розрахунків статистичних параметрів та міри узгодженості експертних оцінок.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує номер за списком навчальної групи N_2 і обирає дані з табл. 3.2

Методичні вказівки: Сім експертів подали свої думки щодо п'яти економічних параметрів. Визначити: 1) статистичні характеристики (середнє, стандарт) цих оцінок; 2) можливість поєднати ці вибірки в одну та міру узгодженості за модифікованим коефіцієнтом конкордації (через ранги та абсолютні значення).

Рекомендація: перед розрахунком проведіть нормування факторів X_i .

Таблиця 3.2.

Варіанти завдань

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
1	X_1	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939
	X_2	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	X_3	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	X_4	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	X_5	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
2	X_1	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	X_2	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	X_3	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	X_4	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	X_5	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151
3	X_1	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	X_2	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	X_3	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	X_4	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	X_5	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
4	X_1	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	X_2	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	X_3	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	X_4	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	X_5	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
5	X_1	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	X_2	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	X_3	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	X_4	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	X_5	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
6	X_1	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	X_2	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454
	X_3	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	X_4	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424
	X_5	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
7	X_1	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_2	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545
	X_3	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121
	X_4	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424
	X_5	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909
8	X_1	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272
	X_2	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909
	X_3	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757
	X_4	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909
	X_5	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303
9	X_1	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787
	X_2	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181
	X_3	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666
	X_4	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060
	X_5	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757
10	X_1	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878
	X_2	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424
	X_3	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272
	X_4	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393
	X_5	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333
11	X_1	0,51	610	2180	160,93	4786,2	7,78087	4,46969
	X_2	0,81	270	1580	453,99	2522,0	4,71039	3,07575
	X_3	0,79	730	2110	406,56	3353,2	8,09490	3,62121
	X_4	0,54	280	2890	311,69	4814,8	7,32728	3,5
	X_5	0,53	760	1190	176,17	7824,1	4,32658	3,98484
12	X_1	0,45	440	1390	359,12	8426,0	7,57152	2,51515
	X_2	0,83	540	1670	282,89	4012,4	10,3279	3,27272
	X_3	0,51	330	1200	489,56	7967,4	10,3279	2,90909
	X_4	0,3	500	2220	506,50	7222,3	4,60572	2,98484
	X_5	0,88	460	3060	237,16	6591,8	4,46615	1,77272
13	X_1	0,74	470	2290	411,64	3066,6	9,56036	1,63636
	X_2	0,6	660	2820	374,37	4069,7	9,59525	4,71212
	X_3	0,31	540	1290	425,19	4413,6	7,88555	1,80303
	X_4	0,82	680	1020	477,70	6219,2	6,38520	1,83333
	X_5	0,62	720	1690	340,49	6104,5	10,8513	3,63636
14	X_1	0,67	750	1980	238,85	6161,9	8,19958	3,86363
	X_2	0,5	800	2650	477,70	7766,8	9,69993	2,27272
	X_3	0,73	810	1910	421,80	3381,8	4,98953	1,60606
	X_4	0,67	700	2610	442,13	3496,5	9,66503	3,46969
	X_5	0,31	630	1740	333,71	5416,7	9,42079	2,75757
15	X_1	0,37	410	1260	362,51	8941,9	2,86113	2,28787
	X_2	0,88	850	1170	216,83	2206,8	5,58269	4,60606
	X_3	0,72	490	2410	413,33	7021,7	6,00139	2,30303
	X_4	0,5	570	1960	496,34	3553,8	7,43196	4,22727
	X_5	0,61	850	2380	513,28	4184,3	5,86182	2,16666
16	X_1	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_2	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	X_3	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	X_4	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	X_5	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
17	X_1	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	X_2	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	X_3	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	X_4	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	X_5	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151
18	X_1	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	X_2	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	X_3	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	X_4	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	X_5	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
19	X_1	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	X_2	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	X_3	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	X_4	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	X_5	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
20	X_1	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	X_2	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	X_3	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	X_4	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	X_5	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
21	X_1	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	X_2	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454
	X_3	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	X_4	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424
	X_5	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
22	X_1	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848
	X_2	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545
	X_3	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121
	X_4	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424
	X_5	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909
23	X_1	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272
	X_2	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909
	X_3	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757
	X_4	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909
	X_5	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303
24	X_1	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787
	X_2	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181
	X_3	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666
	X_4	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060
	X_5	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757
25	X_1	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_2	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424
	X_3	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272
	X_4	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393
	X_5	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333
26	X_1	0,51	610	2180	160,93	4786,2	7,78087	4,46969
	X_2	0,81	270	1580	453,99	2522,0	4,71039	3,07575
	X_3	0,79	730	2110	406,56	3353,2	8,09490	3,62121
	X_4	0,54	280	2890	311,69	4814,8	7,32728	3,5
	X_5	0,53	760	1190	176,17	7824,1	4,32658	3,98484
27	X_1	0,45	440	1390	359,12	8426,0	7,57152	2,51515
	X_2	0,83	540	1670	282,89	4012,4	10,3279	3,27272
	X_3	0,51	330	1200	489,56	7967,4	10,3279	2,90909
	X_4	0,3	500	2220	506,50	7222,3	4,60572	2,98484
	X_5	0,88	460	3060	237,16	6591,8	4,46615	1,77272
28	X_1	0,74	470	2290	411,64	3066,6	9,56036	1,63636
	X_2	0,6	660	2820	374,37	4069,7	9,59525	4,71212
	X_3	0,31	540	1290	425,19	4413,6	7,88555	1,80303
	X_4	0,82	680	1020	477,70	6219,2	6,38520	1,83333
	X_5	0,62	720	1690	340,49	6104,5	10,8513	3,63636
29	X_1	0,67	750	1980	238,85	6161,9	8,19958	3,86363
	X_2	0,5	800	2650	477,70	7766,8	9,69993	2,27272
	X_3	0,73	810	1910	421,80	3381,8	4,98953	1,60606
	X_4	0,67	700	2610	442,13	3496,5	9,66503	3,46969
	X_5	0,31	630	1740	333,71	5416,7	9,42079	2,75757
30	X_1	0,37	410	1260	362,51	8941,9	2,86113	2,28787
	X_2	0,88	850	1170	216,83	2206,8	5,58269	4,60606
	X_3	0,72	490	2410	413,33	7021,7	6,00139	2,30303
	X_4	0,5	570	1960	496,34	3553,8	7,43196	4,22727
	X_5	0,61	850	2380	513,28	4184,3	5,86182	2,16666

3.8. Індивідуальні завдання №4. Кластеризація об'єктів

Завдання: Вивчити методи розрахунків відстаней між об'єктами за допомогою різних метрики Евкліда та Джеффріса-Матусіти та прийоми по їх автоматичній кластеризації..

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки N_3 .

Методичні вказівки: 1) розрахувати матриці відстаней за метриками Евкліда, та Джеффріса-Матусіти; 2) Застосувавши функцію Solve електронних таблиць Calc з пакету Open Office вільного програмного забезпечення, потрібно вирішити оптимальні задачі включення до кластерів для

матриць відстаней, розрахованих за цими метриками. 3) порівняти результати кластеризації і зробити висновки.

Таблиця 3.2

Варіанти завдань

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
0	64	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939	19602
	31	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606	7194
	39	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909	9504
	44	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363	11814
	87	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848	15378
	74	0,76	360	1220	448,91	2866	8,72295	1,27272	5148
	54	0,54	710	2480	149,07	8110,7	5,1291	4,10606	18084
	74	0,64	770	1790	220,22	7652,2	6,28053	2,80303	13992
	78	0,85	300	1690	150,76	2780,0	9,35101	4,75757	17622
	87	0,39	560	2770	501,42	8311,4	6,07117	3,96969	19074
1	25	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969	20262
	67	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484	7326
	62	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697	13530
	53	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151	13068
	42	0,42	610	1100	232,07	5474,0	4,29169	1,72727	6270
	64	0,29	700	2860	267,65	7107,6	9,69993	2,45454	14916
	30	0,57	550	2150	531,91	6305,2	8,72295	2,18181	8646
	41	0,88	800	1840	499,73	6276,5	6,28053	2,10606	12342
	68	0,37	740	1220	381,15	6047,2	5,82693	4,50000	20592
	49	0,58	490	2430	474,32	4384,9	4,57083	4,22727	8976
2	76	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121	11616
	35	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121	5214
	43	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848	14916
	52	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787	10164
	72	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939	6270
	73	0,28	460	1360	470,93	7824,1	6,62944	2,62121	8844
	88	0,37	750	2230	433,66	8712,6	10,8513	3,96969	9438
	42	0,59	770	1520	252,40	7795,5	10,6420	3,92424	5412
	69	0,72	740	990	320,16	3983,7	3,66364	4,45454	6204
	75	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333	18150
3	33	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090	19338
	41	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909	20328
	69	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181	11352
	66	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575	13398
	38	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151	19536
	57	0,5	680	1230	476,01	7709,5	8,44382	3,06060	8316
	58	0,59	410	2620	367,59	2264,1	2,82623	2,16666	7326
	33	0,69	310	1280	513,28	8110,7	5,23377	3,72727	18216
	60	0,89	800	1630	215,13	6878,4	8,79274	2,31818	14058
	32	0,76	500	2370	216,83	2350,1	6,14096	1,40909	17028
4	59	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333	13464
	68	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090	8316
	34	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393	17754
	38	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606	19866

№ п/п	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉
	56	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545	5610
	84	0,43	870	1860	203,28	6591,8	4,08234	3,10606	13398
	86	0,65	540	820	166,01	2665,3	5,16399	4,09090	16500
	87	0,6	310	1740	481,09	7594,9	9,66503	3,33333	15840
	60	0,89	250	1230	370,98	7852,8	2,68667	4,43939	19602
	28	0,58	870	1670	210,05	4442,3	6,87369	4,03030	7062
5	86	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818	17094
	81	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454	18084
	58	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151	6336
	40	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424	11352
	55	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484	9306
	53	0,42	390	920	404,86	8110,7	5,09420	4,07575	9636
	44	0,78	400	2730	272,73	4155,7	4,81507	2,30303	11088
	59	0,79	310	980	143,99	4384,9	8,40893	1,59090	15246
	29	0,45	890	2230	164,31	4069,7	10,9211	1,60606	16962
88	0,7	330	1890	274,42	2722,7	5,02442	4,18181	7062	
6	25	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848	20790
	69	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545	10164
	74	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121	17490
	72	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424	7062
	86	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909	20460
	63	0,51	790	2460	442,13	2436,1	10,7815	1,25757	9108
	55	0,62	770	2740	171,09	2579,4	6,21074	2,68181	11946
	84	0,83	820	990	433,66	6047,2	10,3628	2,60606	12540
	51	0,54	740	1610	447,21	4127,0	5,05931	4,77272	15708
	87	0,31	490	870	509,89	2780,0	7,25750	4,34848	15642
7	53	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272	5214
	36	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909	19866
	32	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757	9504
	71	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909	7194
	67	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303	5940
	77	0,43	330	1290	225,30	5388,0	5,23377	1,46969	5280
	40	0,64	290	2840	465,85	5072,8	5,02442	3,71212	13926
	54	0,86	850	2720	354,04	4872,2	4,46615	1,68181	18612
	49	0,68	820	3130	182,95	3152,6	10,6769	2,62121	17754
49	0,71	250	2190	409,94	2436,1	7,85066	2,54545	19536	
8	48	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787	18480
	29	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181	16962
	82	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666	19932
	53	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060	13200
	68	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757	6534
	36	0,69	530	2480	188,03	3295,9	5,37334	1,74242	14520
	82	0,86	550	2700	304,92	8827,2	2,96580	1,57575	12408
	82	0,86	820	2980	389,62	6161,9	7,99023	2,37878	10296
	27	0,73	410	1200	514,97	6563,1	7,67620	3,09090	8712
	80	0,34	690	1380	409,94	8368,7	9,59525	4,65151	14916
9	80	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878	11352
	75	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424	15444
	83	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272	6204

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
	38	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393	7524
	72	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333	9240
	68	0,31	690	1370	437,05	3525,1	10,8164	3,45454	9570
	40	0,68	460	1940	269,34	3754,4	3,52407	2,74242	8052
	71	0,67	730	1400	367,59	6849,7	8,40893	3,68181	17160
	83	0,75	330	2550	479,40	7365,6	5,16399	4,74242	20394
	89	0,51	440	3110	260,87	7537,5	5,1291	3,53030	8976

Контрольні запитання

1. Що показує такий параметр як стандарт?
2. Що є мірою тісноти зв'язку двох різних вибірок?
3. Для чого використовується тест за критерієм Стюдента?
4. Які ви знаєте критерії міри узгодженості експертних оцінок?
5. Для чого потрібно нормування вибірових даних?
6. Чому кластерний аналіз більш прийнятний для класифікації економічних об'єктів?
7. Що таке метрика відстані?
8. Яка з метрик є найбільш популярною?
9. Як виконати нормування чисельних значень факторів?
10. Поясніть задачу дисперсійного аналізу.
11. Які коефіцієнти рангової кореляції ви знаєте?
12. Для чого вони застосовуються?
13. Як визначити параметри запізнювання вихідних факторів системи по відношенню до вхідних?
14. Як перетворення Фур'є допомагає визначити характерні частоти і періоди в соціально-економічних системах?
15. Для чого потрібне угруповання об'єктів?

Вивчивши матеріали цього розділу, студенти опанують основні методологічні принципи розрахунку статистичних характеристик вибірок, міру узгодженості експертних оцінок, можливість поєднання різних вибірок в одну, визначення параметрів запізнювання та принципи угруповання об'єктів..

4. METODOLOGIJA I METODE SINTETIZIRANJA MODELI SOCIJALNO-EKONOMIJSKIH SISTEMA

В розділі наведено основні методи синтезу моделей соціально-економічних систем з розподілом їх на динамічні, статистичні та нечіткі.

Синтез (від грец. συνθεσις – поєднання, з'єднання, складання) – поєднання абстрагованих сторін предмета і відображення його як конкретної цілісності; метод вивчення об'єкта у його цілісності, у єдиному і взаємному зв'язку його частин. У процесі наукових досліджень синтез пов'язаний з аналізом, оскільки дає змогу поєднати частини предмета, розчленованого у процесі аналізу, встановити їх зв'язок і пізнати предмет як єдине ціле.

Синтез моделей соціально-економічних систем полягає у з'єднанні результатів їх аналізу в єдиний комплекс математичного опису і/або формалізований опис системи на якійсь спеціальній мові. В цьому розділі буде подано інформацію про перший напрямок синтезу. Інколи замість терміну «синтез», вживається термін «ідентифікація», що в межах цього посібника буде розумітися як синонім.

Економічний об'єкт, що підлягає ідентифікації, найчастіше стає перед дослідником як «чорний ящик». Відомі тільки стани його вхідних та вихідних факторів та існує статистика їх значень. При викладенні матеріалу розділу припускається, що на етапі дослідження соціально-економічної системи було визначено ті вхідні фактори, які мають статистично достовірний зв'язок, і для побудови моделі було залишено тільки такі входи, що такого зв'язку між собою не мають. Включення до моделі взаємозалежних факторів викликає явище «мультиколінеарності», що погіршує якість створеної моделі. Отже вважатимемо, що всі входи взаємозалежні і тоді задачею синтезу є побудова моделі з багатьма входами і одним виходом. Якщо в реальній соціально-економічній системі виходів більше, то представлені нижче методи потрібно застосувати для кожного виходу окремо, а повна модель буде являти собою сукупність «чорних ящиків».

4.1. Синтез статистичних лінійних та квазілінійних моделей

Статистичні дослідження економічних систем і процесів, що відбуваються в них, провадяться для утворення їх результатів – таблиць з чисельними значеннями різних економічних факторів. Збирання даних провадиться частіше всього для різних моментів часу (пороках, кварталах місяцях) або для одного моменту часу, але для різних економічних об'єктів. Їх розташовують в одному

стовпці для одного моменту часу або для одного економічного об'єкту. Приклад таких статистичних таблиць в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Статистика по шахті № 7 за 2006 р Статистика по підприємствам за I квартал

Період	Рентабельність	Матеріали	Основні засоби	Підприємства	Рентабельність	Матеріали	Основні засоби
I квартал	5%	2500000	5200000	Вагоноремонтний завод	2%	25000	690000
II квартал	4%	2200000	5100000	Металургійний комбінат	15%	9900000	5800000
III квартал	1%	2800000	5400000	Шахта № 7	5%	2500000	5200000
IV квартал	12%	1200000	5800000	Трамвайне депо	-0,2%	12000	2800000

На першому етапі збирання статистичних даних всі фактори вважаються рівнозначними. Але для подальшої роботи по створенню математичних моделей, фактори треба розділити на вхідні і вихідні, або інакше, залежні і незалежні. Цей розподіл виконується довільно, згідно задач, які ставить перед собою дослідник. Наприклад, якщо потрібно побудувати модель впливу на рентабельність матеріалів та основних засобів, то рентабельність буде залежним фактором, а матеріали та основні засоби – незалежними. Залежних і незалежних факторів може бути декілька. Залежні позначаються як y_1, y_2, y_3, \dots , а незалежні як x_1, x_2, x_3, \dots .

Для зручності подальшої обробки даних на комп'ютері, залежні і незалежні фактори розташовуються у сусідніх стовпцях таблиці, – кожна група окремо. Приклад такого угруповання показано в табл. 3.1.

Алгоритм синтезу квазілінійних статистичних моделей базується на положеннях регресивного аналізу, який дозволяє знайти емпіричну формулу залежності вихідних факторів від вхідних

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^K a_i x_i, \quad (4.1)$$

де a_0 – коефіцієнти моделі, x_i – вхідні фактори, y – вихідний фактор.

На першому етапі розробки моделі довільної форми, висувається гіпотеза про можливий вигляд такої моделі.

Це може бути (тут і далі наводяться формули для одного залежного і одного незалежного фактора)

– поліном n -го порядку
$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x^i; \quad (4.2)$$

– експоненційна функція $y = a_0 \lambda^{a_i x_i}$; (4.3)

– логарифмічна функція по основі n $y = a_0 \log_n x$; (4.4)

– обернена степенна $y = a_0 + \sum_{i=-n}^{-1} a_i x^i$, (4.5)

де a_0 – константа, а a_i – коефіцієнти при вхідних факторах.

Якщо незалежних факторів декілька, можна утворити з них комплекси типу $x_1 x_2$, x_1/x_2 , x_1-x_2 , $\log x_1 x_2$, і т. д, об'єднуючи їх по двоє, троє і більше.

Другим етапом роботи є додавання до початкової таблиці стовпців результатів математичних перетворень вигляду (4.2) - (4.5). Рекомендується результати перетворення кожного фактора розташовувати в сусідніх колонках таблиці, поруч з самим фактором.

Третій етап вимагає нормування всіх факторів статистичної таблиці разом з їх перетвореннями згідно (3.8). Нормуванню піддаються також і всі математичні перетворення, для яких потрібно знайти свої значення середнього та стандарту..

Для відбору вхідних техніко-економічних параметрів, що істотно впливають на вихідні параметри, обчислюється матриця коефіцієнтів парної кореляції для всіх пар нормованих факторів згідно (3.13). Якщо цих факторів було N , то загальна кількість пар буде $N(N-1)/2$. Наприклад, якщо в початковій статистичній таблиці було 2 незалежних фактора і 1 залежний, а до них було додано 3 перетворення виду (4.2) - (4.5), то потрібно буде розрахувати кореляцію для $6(6-1)/2 = 15$ пар. Тепер потрібно провести аналіз величини отриманих коефіцієнтів кореляції залежних факторів з незалежними та їх перетвореннями на їх статистичну значимість за формулами (3.14-15). Якщо коефіцієнти кореляції вхідних факторів та їх математичних перетворень статистично не значимі, колонки з цими факторами потрібно вилучити з таблиці початкових даних.

Тепер таблиця підготовлена до розрахунку коефіцієнтів лінійної регресії

виду $y = a_0 + \sum_{i=1}^K a_i x_i$, (4.6)

де K – кількість вхідних факторів моделі. Оскільки при розрахунку коефіцієнтів регресії ми використовуємо чисельні значення не тільки самих вхідних факторів, але і їх математичні перетворення, фактично ми отримуємо нелінійну залежність y від x_i .

Для визначення параметрів лінійної регресії скористайтеся функцією



LINEST(Data_Y; Data_X; Linear_Type; Stats),

де **Data_Y** – масив даних вихідних факторів y . Має бути тільки один стовпець вихідного фактору; **Data_X** – масив вхідних параметрів, x , скільки потрібно стовпців; **Linear_Type** – ознака проходження лінії регресії через 0 (0 – про-

ходить, 1 – не проходить); **Stats** – потреба виводити статистичні дані про розрахунок параметрів лінійної регресії (1 – якщо потрібно, 0 – непотрібно).

Наприклад (табл.4.2), для таблиці значень вхідних факторів X_1 та X_2 , та стовпчика значень Y . Покажемо фрагмент електронної таблиці. В ній незалежні фактори займають стовпчик А та В, а залежний – С.

Запишемо тепер формулу з адресами конкретних клітинок

$$=LINEST(C2:C8;A2:B8;1;1)$$

тут, **Data_Y** - це C2:C8; **Data_X** - це A2:B8; **Linear_Type** і **Stats** обоє дорівнюють 1. Як тільки натиснемо кнопку **ОК**,  виведе результати розрахунку в наступні клітинки:

Таблица 4.2.

Приклад розрахунку коефіцієнтів лінійної регресії

E2 і F2: Коефіцієнти a_1 при вхідних параметрах залежності виду $y=a_0+a_1*x$ для значень X_1 і X_2 . Порядок подання цих коефіцієнтів зворотній – в E2 коефіцієнт для X_2 і в F2 коефіцієнт для X_1 .

G2: Коефіцієнт a_0 .

E3 і F3: Стандартна помилка значення коефіцієнтів a_1 .

G3: Стандартна помилка коефіцієнта a_0 .

F4: Стандартна помилка регресії, обчисленої для значення Y .

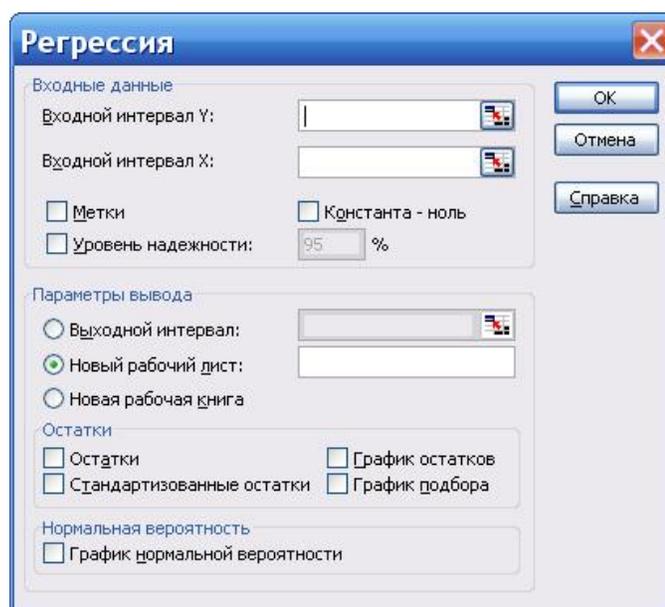
E5: Значення F - критерію для аналізу якості апроксимації.

F5: Ступені свободи для аналізу якості апроксимації.

E6: Сума квадратів відхилення оцінених значень Y від їх середнього.

F6: Сума квадратів відхилення оцінених значень Y від наданих значень Y .

	A	B	C	D	E	F	G
1	X1	X2	Y		Значення LINEST		
2	4	7	100		4,17	-3,48	82,33
3	5	9	105		5,46	10,96	9,35
4	6	11	104		0,87	5,06	#NA
5	7	12	108		13,21	4	#NA
6	8	15	111		675,45	102,26	#NA
7	9	17	120				
8	10	19	133				



У  в пакеті «Аналіз даних» є функція «Регресія» яка виконує аналогічні операції (рис.4.1). Для отримання експоненційних залежностей можна скористатися та-

Рис. 4.1. Функція «Регресія»



кож функцією **LOGEST**, яка обчислює коефіцієнти залежності виду $y = a_0 \cdot a_1^x$. Синтаксис її написання та розташування вихідних даних таке ж, як і у функції **LINEST**.

Після отримання числових значень коефіцієнтів квазілінійної статистичної моделі, виконаємо денормування коефіцієнтів при вхідних факторах та скорегуємо значення коефіцієнта a_0 .

Пояснимо на прикладі це положення. Нехай шукалася залежність виду

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (4.7)$$

Очевидно, що і для параметру x і для параметру x^2 було визначено своє середнє та стандарт, відповідно, M_x , σ_x , та M_{x^2} , σ_{x^2} . Нормувався також і вихідний параметр y . Параметри його нормування будуть M_y , σ_y . Тоді, для переходу від нормованих значень факторів до звичайних, потрібно у формулу (5.7) підставити формули їх нормування вигляду (3.8). Тоді одержимо

$$\frac{y - M_y}{\sigma_y} = a_0 + a_1 \frac{x - M_x}{\sigma_x} + a_2 \frac{x^2 - M_{x^2}}{\sigma_{x^2}}. \quad (4.8)$$

Після нескладних перетворень отримаємо таку корекцію розрахованих коефіцієнтів регресії

$$y = \left[M_y + \sigma_y \left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{\sigma_x} - \frac{a_2 M_{x^2}}{\sigma_{x^2}} \right) \right] + \frac{a_1 \sigma_y}{\sigma_x} x + \frac{a_2 \sigma_y}{\sigma_{x^2}} x^2. \quad (4.9)$$

Якщо всі фактори перед нормуванням було піддано логарифмуванню нормальними логарифмом, то початкова формула матиме вигляд (для двох вхідних факторів)

$$\text{Lny} = a_0 + a_1 * \text{Lnx}_1 + a_2 * \text{Lnx}_2. \quad (4.10)$$

Після денормування формула матиме вигляд

$$\text{Lny} = \left[M_y + \sigma_y \left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{\sigma_x} - \frac{a_2 M_{x^2}}{\sigma_{x^2}} \right) \right] + \frac{a_1 \sigma_y}{\sigma_x} \text{Lnx}_1 + \frac{a_2 \sigma_y}{\sigma_{x^2}} \text{Lnx}_2 \quad (4.11)$$

Але, враховуючи властивості логарифму, її можна перетворити на таку

$$y = \lambda \left[M_y + \sigma_y \left(a_0 - \frac{a_1 M_x}{\sigma_x} - \frac{a_2 M_{x^2}}{\sigma_{x^2}} \right) \right] x_1^{\frac{a_1 \sigma_y}{\sigma_x}} x_2^{\frac{a_2 \sigma_y}{\sigma_{x^2}}}. \quad (4.12)$$

Це і буде формула Кобба-Дугласа, якщо в якості вхідних факторів було взято обсяг праці та капіталу, вихідного – об'єм виробництва.

4.2. Синтез авторегресійних моделей

Інколи, економічні фактори спостерігаються поодиноці, тобто не має можливості поставити їм у відповідність якісь інші фактори, які можна було б позначити як незалежні, щоб побудувати модель. Буває й так, що такі фактори спостерігаються в залежності від часу, але інтервали спостереження дуже нерівномірні і кореляція між часом і цим фактором незначна. Тобто, час теж не можна вважати незалежним фактором, який впливає на фактор, що розглядається.

В цих випадках при побудові статистичної моделі в якості незалежних факторів беруть попередні значення фактора, зміна якого вивчається і для якого потрібно побудувати модель.

В залежності від кількості взятих попередніх значень фактора, модель може мати будь яку кількість вхідних факторів, але не більше ніж $N-2$, де N – кількість значень фактора, отриманих шляхом статистичних спостережень.

В загальному вигляді ця модель записується як

$$y = f(y_{-1}, y_{-2}, y_{-3} \dots y_{-N}), \quad (4.13)$$

тут N – кількість попередніх значень фактора, для якого будується така модель. Функція ж залежності може бути будь-якою, обраною згідно принципів, викладених у п.4.1.

Таблиця 4.3.

Для прикладу, користуємося табл. 4.1 і побудуємо табл. 4.3 для рентабельності, в залежності від її попереднього значення. Перенесемо попередні значення рентабельності в сусідній стовпець зі зміщенням на 1 позицію так, як це показують стрілочки. При цьому, загальна кількість даних, яка буде використана для розрахунку коефіцієнтів регресійної моделі буде зменшена на 1. Тепер попереднє значення рентабельності буде вхідним фактором такої моделі. Якщо враховувати більше попередніх значень, розмір таблиці буде зменшуватися

Рентабельність	Попереднє значення рентабельності
5%	-
4%	5%
1%	4%
12%	1%

4.3. Синтез періодичних моделей соціально-економічних систем

Якщо спектральний аналіз соціально-економічної системи (див. п.3.5) показав наявність деяких частот, що постійно присутні в різні моменти часу, коли проводився аналіз, рекомендується будувати періодичні моделі. Це такі моделі, в яких присутні тригонометричні періодичні функції. В деяких випадках дослідних може висунути гіпотезу про періодичність процесів априорі.

В якості апроксимуючої залежності пропонується наступна формула

$$y = Ax^B + C(1 - e^{Dx})\text{Sin}(Ex^F + G) + H, \quad (4.14)$$

де x – аргумент, y – функція, $A - H$ – константи, e – основа натурального логарифму. В залежності від чисельних значень констант, ця формула дає множину кривих, представлених на рис. 4.2.

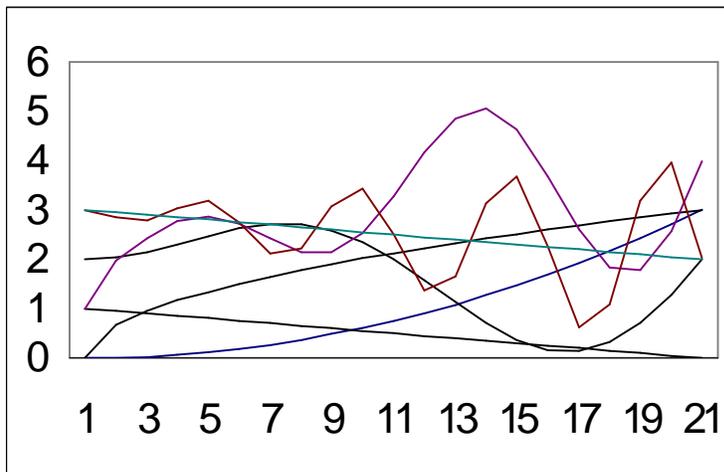


Рис. 4.2 Типи кривих, які можна створити за допомогою формули (5.14)

Вирішення задачі визначення числових значень коефіцієнтів такої моделі ускладнюється тим, що не існує таких математичних перетворень, які б дозволили лінеаризувати (4.14), щоб потім отримати значення констант $A - H$ методом регресії. Тому для вирішення цієї задачі був застосований підхід, який враховує відсутність чи наявність знань про значення

характерних частот чи періодів:

1. Встановити довільні значення констант $A - H$. Якщо відомі
2. Для всіх значень аргументу і довільних значень констант розрахувати величину y , яку позначимо як y_p за формулою (4.14).
3. Для кожного значення функції знайти $(y_p - y_\phi)^2$, де y_ϕ – фактичне значення функції, отримане за статистичними даними.
4. Вирішити оптимальну задачу з функціоналом виду

$$\sum_{i=1}^N (y_p - y_\phi)^2 \rightarrow \min, \quad (4.15)$$

а параметрами, що змінюються, будуть константи $A - H$. Де N – розмір статистичної вибірки.

Для збільшення точності розрахунку, рекомендується встановлювати обмеження на значення констант за наступним правилом:

1. На графіку, який було побудовано за статистичними даними, виділяється елемент кривої, що нагадує синусоїду і знаходиться проміжок значень аргументу, на якому ця синусоїда здійснює повне коливання – Δx . Тоді, для константи E треба встановити наступне обмеження

$$E \leq (0,5 - 1,5) 2\pi/\Delta x_1. \quad (4.16)$$

Якщо період знайдено за спектральним аналізом, то підставляти ці значення.

2. Початкові значення констант B та F рекомендується становити рівними одиниці, константи H – середньому арифметичному статистичного значення функції, константу – $D = 0.05$, $A = 0$.
3. Константа C визначається з максимальної амплітуди Δy тієї частини графіку, яка визначена як синусоїдальна, і має наступні обмеження

$$C \leq (0,4 - 0,6) \Delta y. \quad (4.17)$$

Якщо амплітуда знайдена за спектральним аналізом, то підставити її значення.

Розглянута вище методика для одного вихідного фактора може бути розповсюджена для будь-якої їх кількості. Це відбувається тоді, коли кількість ха-

рактерних частот більше ніж одна. При цьому утворюється сума з формул виду (4.14), а далі вся процедура аналогічна. Тільки кількість змінних параметрів у (4.15) збільшується на кількість вхідних факторів, які включені до такої моделі.

Для прикладу, наведемо авторегресійну модель собівартості граніту Торчинського родовища (Дніпропетровська область) в якій було взято собівартість за попередній рік ($c_{t-12,1}$) та за попередні два роки ($c_{t-24,1}$).

$$C_{t,1} = 1,342c_{t-12,1}^{0,887} + 0,525(1 - e^{-0,976c_{t-12,1}}) \sin(0,524c_{t-12,1}^{1,187} + 0,664) - 0,402c_{t-24,1}^{0,686} + 0,288(1 - e^{-0,106c_{t-24,1}}) \sin(0,524c_{t-24,1}^{0,808} + 0,195) - 0,146 \quad (4.18)$$

Як видно з рис. 4.3, отримана функція майже точно повторює фактичні значення собівартості.

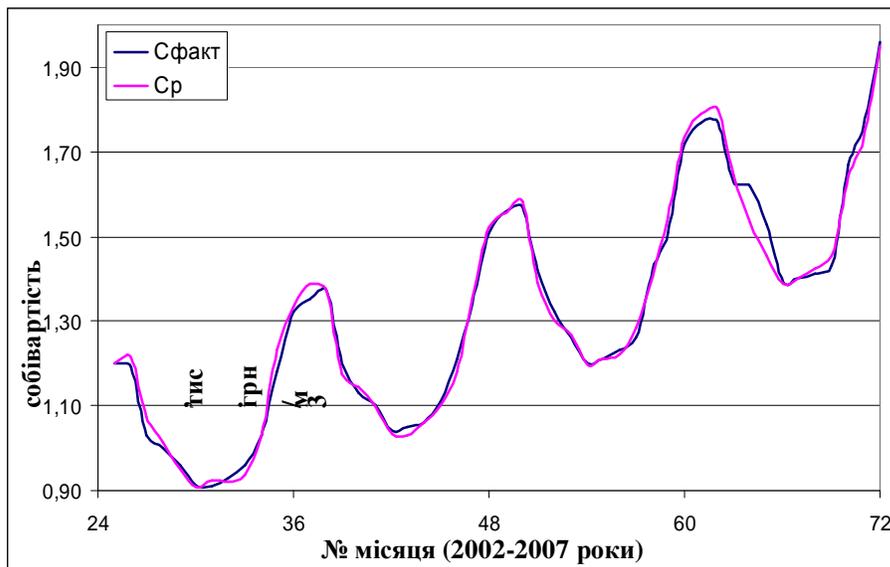


Рисунок 4.3. Порівняння фактичного та розрахованого значення собівартості Торчинського граніту

жайності зернових культур, тощо.

Для знайдення коефіцієнтів $A-H$ рекомендується використання функції «Пошук рішення» з . Використання функції аналогічно використанню функції Solver, показано на рис. 3.12-3.13.

4.4. Синтез статистичних моделей методом нейронних сіток

При моделюванні економічних процесів однією з найбільш складних задач є вибір виду функції апроксимації. Це пояснюється тим, що часто характер залежності одного економічного параметра від іншого є невідомим. Фактично, нам необхідно, знаючи певний набір значень вхідних параметрів, віднести значення вихідного параметра до певного класу чи значення.

Для вирішення поставленої задачі найбільш прийнятним є використання такого математичного методу як нейронні сітки.

Запропонована методика була успішно використана для створення моделей споживання палива енергогенеруючою компанією, потоку замовлень на підприємстві зв'язку, розрахунку середньорічних температур, визначення вро-

Нейронні сітки – це сітки, що складаються зі зв'язаних між собою простих елементів – формальних нейронів. Ядром використовуваних представлень є ідея про те, що нейрони можна моделювати досить простими формулами, а вся складність процесу моделювання визначається зв'язками між нейронами. Кожен зв'язок представляється як зовсім простий елемент, що служить для передачі

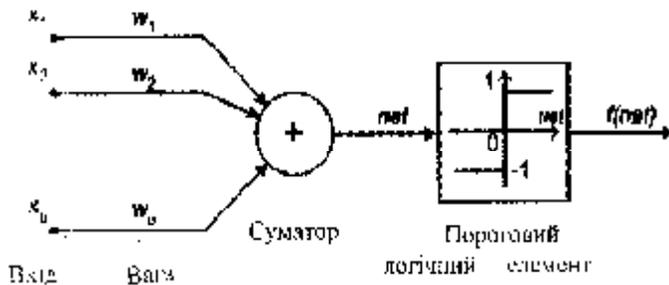


Рис. 4.4. Модель граничного нейрона МакКаллоха-Пітца

сигналу. Для опису кожного нейрону використовується проста і одна й та сама функція. Показана на рис. 4.4 модель нейрона, як найпростішого процесорного елемента, що виконує обчислення перехідної функції від скалярного добутку вектора вхідних сигналів x_i і вектора вагових коефіцієнтів w_i описується наступною системою рівнянь

$$net = \sum_{i=1}^n x_i w_i$$

$$f(net) = \text{sgn}(net) = \begin{cases} +1, & net > 0 \\ -1, & net < 0 \end{cases}$$
(4.19)

Інколи в (4.19) додається ще параметр θ – порогової чутливості, яка віднімається від суми зважених сигналів.

Функція $f(net)$, яку ще позначають як $OUT(net)$, називається активізуючою. Тому в штучних нейронних мережах використовують інші функції активації, найбільш популярною з яких є так звана логістична уніполярна сигмоїдальна функція (сигмоїд)

$$f(net) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda net}},$$
(4.20)

, $f(net) \in [0; +1]$, $\lambda > 0$ – коефіцієнт крутості безупинної функції $f(net)$ біля $net = 0,5$. Функція симетрична відносно $NET = 0$, $OUT = 1/2$.

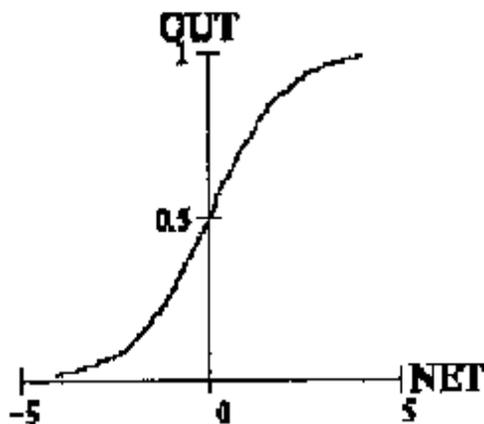


Рис. 4.5. Вид логістичної функції

Визначення коефіцієнтів λ та w_i називається навчанням, тому, існує задачник – набір прикладів із заданими відповідями. Ці приклади пред'являються системі. Нейрони одержують по вхідних зв'язках сигнали – «умови прикладу», перетворюють їх, кілька разів обмінюються перетвореними сигналами і, нарешті, видають відповідь – також набір сигналів. Відхилення від правильної відповіді штрафуються. Навчання складається в мінімізації штрафу як (неявної) функції зв'язків. Неявне навчання приводить до того, що структура зв'язків стає

«незрозумілою» – не існує іншого способу її прочитати, крім як запустити функціонування сітки. Стає складно побудувати зрозумілу людині логічну конструкцію, що відтворює дії сітки.

Режими навчання з учителем нейронних сіток можуть бути різними, але найбільш ефективним є так зване “дельта-правило”:

1. Початкові ваги можуть бути будь-якими. Корекція провадиться пропорційно величині похідної по даній координаті. Похідна береться від функції активації. Підстроювання j ваги для i нейрона здійснюється за

$$\Delta w_{ij} = \eta \cdot [d_i - f(\text{net}_i)] \cdot f'(\text{net}_i) \cdot x_j, \quad (4.21)$$

де $j=1,2,\dots,n$ $\eta > 0$ - коефіцієнт навчання, підбирається евристично

2. Помилка при навчанні на k кроці:
$$E_k = \frac{1}{2} [d_i - f(\text{net}_i)]^2, \quad (4.22)$$

де d_i - очікуваний вихід

3. Загальна помилка при навчанні:

$$E = \frac{1}{2 \cdot p} \sum_{k=1}^p [d_i - f(\text{net}_i)]^2, \quad (4.22)$$

де p - число прикладів у навчальній вибірці

4. Похідна від сигмоїди
$$f'(\text{net}) = \lambda \cdot f(\text{net}) \cdot [1 - f(\text{net})], \quad (4.23)$$

де p - число прикладів у навчальній вибірці.

Після проведення корекції коефіцієнтів моделей, їх пред'являється наступні дані із «задачника».

Приклад. Побудуємо нейронну сітку для двох варіантів економічних процесів. Перший стосується розпізнавання безперервних економічних процесів, а другий – дискретних.

Почнемо зі створення апроксимуючої залежності для даних про кількість замовлень підприємства зв'язку по годинах робочого дня.

В якості моделі було обрано одношаровий перцептрон з логістичною функцією активації та з одним нейроном на три входи. На кожен вхід подавалося значення трьох послідовних значень кількості викликів від початку доби. Кожне значення вхідного параметру x бралось з вагою w та з певним значенням порогової чутливості θ . Таким чином, математична модель такого перцептрона мала наступний загальний вигляд

$$OUT = \frac{1}{1 + \lambda^{-(w_1 x_i + w_2 x_{i+1} + w_3 x_{i+2})}}. \quad (4.24)$$

На кожному наступному кроці, підставлялося нове значення x , як $i+2$ -й елемент перцептрона, а i -е значення x відкидалось. Значення OUT порівнювалось зі значенням y з розрахунком погрішності прогнозування вигляду

$$x^e = \frac{(x - m_x)}{s_x}$$

порогової чутливості за правилом

$$\left. \begin{aligned} \Delta w_{ij} &= \varepsilon (d_j^s - y_j^s) x_{ij} \\ \Delta \theta_j &= -\varepsilon (d_j^s - y_j^s) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

де $d = y$, $y = OUT$, ε – число, яке характеризує швидкість навчання. Було встановлено наступне правило зменшення ε на кожному кроці розрахунку $\varepsilon' = \varepsilon / 1.5668$, де ε' – нове значення швидкості навчання.

Перед початком навчання перцептрона всі дані були нормовані за правилом (3.8). В результаті навчання перцептрона було отримано показане на малюнку співпадіння розрахованих і реальних значень y . При цьому, сама апроксимуюча формула для нормованих значень параметрів, має вигляд

$$OUT = \frac{1}{1 + \lambda^{-(1,58x_i + 0,37x_{i+1} + 1,15x_{i+2} + 1,62)}} \quad (4.26)$$

На рис. 4.5 показано графіки навчальної вибірки та кривої, яка реалізується за (5.26), в якій бралися три попередніх значення кількості викликів. Можна бачити, що точність апроксимації поступово збільшується, оскільки експериментальна і розрахована криві поступово зближуються.

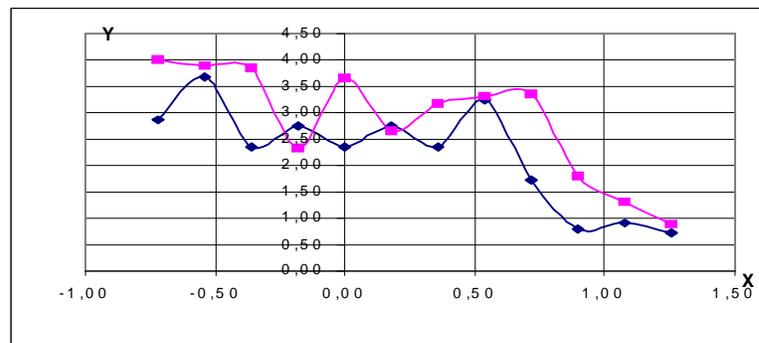


Рис. 4.5. Графік кількості викликів Y по годинам робочого дня X .

(♦ – експериментальна, ■ – розрахована крива)

Побудуємо тепер прогнозуючу модель зміни курсу австрійського шилінга

відносно австралійського долара (дані взяті по відомостям НБУ за період 01.02.2000 по 31.10.2000). В цьому випадку нас цікавить передбачення самого факту збільшення чи зменшення курсу.

Для вирішення цієї задачі було розроблено двошаровий перцептрон (тобто, модель системи, що складається з елементарний нейронів) (рис. 4.6), на вхід якого подавалося значення трьох попередніх значеннях курсу австрійського шилінга і робився прогноз вихідного параметра, який являє

собой функцію знаку числа

$$OUT = \text{Sign}(NET) = \begin{cases} 1, NET > 0 \\ 0, NET = 0 \\ -1, NET < 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

В якості активуючих функцій першого шару були взяті логістичні (4.20). Навчання перцептрона виконувалося так. На кожному наступному кроці, підставлялися нові значення x_i як для дієздатних так для недієздатних вузлів. Причому, вихідними значення d_i бралися числа: -1 – для випадку перебільшення курсу австрійського шилінга відносно австралійського долара, $+1$ – для протилежного випадку дієздатність якого експертами оцінюється як критична, $+1$ –

для випадку спів падіння курсів. Значення *OUT* порівнювалося зі значенням *di* з розрахунком погрішності прогнозування (7). На кожному кроці розрахунку провадилося корегування ваги та порогової чутливості за правилом (4.25). Було встановлено наступне правило зменшення ϵ на кожному кроці розрахунку t $\epsilon' = \epsilon / 1.5668$, де ϵ' – нове значення швидкості навчання.

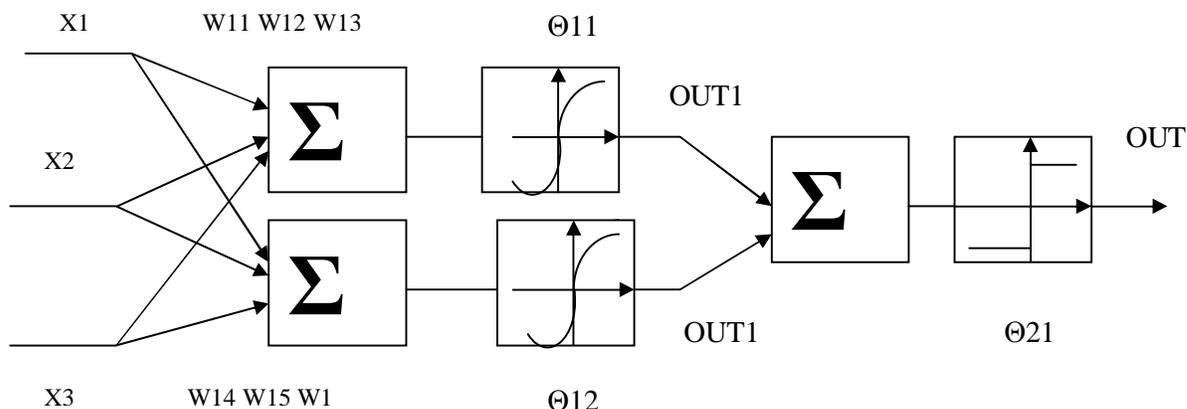


Рис. 4.6. Схема двошарового перцептрона з трьома входами на кожному нейроні.

Перед початком навчання перцептрона вхідні дані були нормовані за правилом (3.8). На рис. 4.7 представлено схему застосування  для розрахунків такого перцептрона.

X	W1	X*W1	SUM	TETA1	OUT1	W2	OUT1*W2	SUM	Teta2	OUT
X1	0,3	1	-0,3	-1,1	0,10545	2	0,21090802	0,21849	-1	-1
X2	0,5	2	0,61	-3,2	0,00558	1	0,00557715			
X3	0,1	4	0,25						Real	1
		5	1,21	Eps	3				Diff	2
		6	0,46	Sp	1					

Рис. 4.7. Фрагмент таблиці , яка реалізує перцептрон з рис. 4.6.

Стрілки на рис. 4.7 показують порядок передачі даних. Потім вхідні дані поновлювалися на один крок, тобто, використовувалися чергові значення вхідних параметрів для іншого вузла. Знаходилася розбіжність поміж значеннями, які видає перцептрон та справжньою оцінкою стану вузла. в порівнянні зі своїм попереднім значенням з корегуванням ваг та порогових функцій. Цей алгоритм показано на рис. 4.8.

В процесі навчання вже на 9-му кроці перцептрон давав більшість правильних відповідей на наступних значеннях курсу. Тому, процес навчання було припинено, а результуюча функція набула вигляду

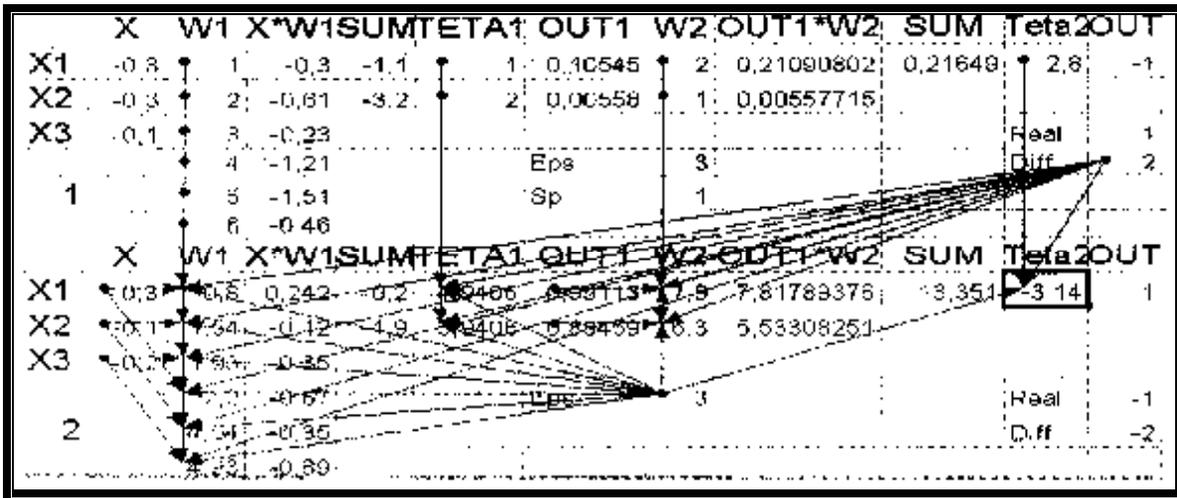


Рис. 4.8. Схема корегування ваг та порогів на наступному кроці, враховуючи

результати з попереднього

$$O U T = \text{Sign} \left[\begin{array}{c} \frac{10,37669298}{1 + \lambda \frac{-(-1,443525248X_1 + 1,561436345X_2 + 1,582503396X_3 + 4,683681367)}{2,883681367}} + \\ \frac{7,940045065}{1 + \lambda \frac{-(-1,556474752X_1 + 4,561436345X_2 + 4,582503396X_4 + -3,683681367)}{2,883681367}} + \\ 2,883681367 \end{array} \right] \cdot (4.28)$$

4.5. Оцінка адекватності апроксимації та якості прогнозування статистичних моделей

Слово «адекватність» означає відповідність статистичної моделі реальній соціально-економічній системі. В значенні апроксимації (тобто наближенню) вихідних факторів моделі до реальних значень, які було отримано в наслідок статистичних спостережень. Адекватність перевіряється для тих же реальних значеннях входів і виходів соціально-економічної системи, на яких було визначено коефіцієнти моделі.

Якщо потрібно визначити якість прогнозування, для розрахунків коефіцієнтів моделі використовується тільки частина даних, отриманих внаслідок статистичних спостережень. Друга частина даних використовується при визначенні якості прогнозування.

Найбільш зручним є перевірка за критерієм Пірсона, яка проводиться у наступному порядку:

1. Для перевірки адекватності апроксимації проводиться розрахунок вихідних значень математичної моделі, підставляючи в неї реальні вхідні значення, за якими ця модель була побудована. Для визначення якості прогнозування в модель підставляються ті значення вхідних факторів, які не було використано при розрахунках коефіцієнтів моделі.

2. Для кожної пари розрахованих $У_{Pi}$ та реальних $У_{Pi}$ значень розраховується критерій «хі-квадрат» за формулою

$$c_p^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_{Pi} - y_{Pi})^2}{y_{Pi}} \quad (4.29)$$

3. Визначається число ступенів свободи як $r = n - 2$.

4. Знаходиться теоретичне значення «хі-квадрат» за наперед визначеною довірчою ймовірністю. Ця довірча ймовірність має бути достатньо високою, щоб дослідник міг довіряти отриманим результатам (0,8-0,99). Якщо це значення більше розрахованого, модель вважається адекватною з визначеною довірчою ймовірністю. В іншому випадку – модель не адекватна, тобто, погано описує процес. Якість прогнозування теж розуміється з цією довірчою ймовірністю.

Для полегшення розрахунків можна звернутися до функцій , таких як **ХИ2ОБР(β ;r)** та **ХИ2РАСП(c_p^2 ;r)**, де β – довірча ймовірність, r – число ступенів свободи, c_p^2 – число, розраховане за (4.29). Перша з них повертає теоретичне значення розподілу «хі-квадрат» і дозволяє виконати розрахунки за означеним вище алгоритмом. Друга вираховує рівень ймовірності, з якою побудованій моделі можна довіряти.

4.6. Синтез динамічних моделей соціально-економічних систем

Якщо при аналізі соціально-економічної системи виявлено запізнювання, та вираховані його параметри за (3.24) - (3.24), існує можливість синтезувати динамічні моделі, які відрізняються від статистичних використання диференційного та інтегрального числення.

У таких моделях вихідна змінна може бути представлена у вигляді суперпозиції її «ідеального» значення (відповідного не інерційного елементу) і складової, породжувані інерцією об'єкту (див. рис. 3.5). Тому при аналізі запізнювання і його впливу на поведінку елементу зручно розрізняти потенційні значення запізнювання вихідний змінної. Перше – $y^0(t) = c_1 x(t)$ для «ідеального» виходу, друге – $y(t)$ для виходу із запізнюванням. Залежності для ідеального виходу можна отримати, синтезувавши статистичні моделі так, як це було описано вище, використовуючи значення вхідних і вихідних факторів, отримані після закінчення перехідного процесу.

Оскільки в процесі аналізу вже було отримано такі значення як \vec{T} ; ε та l , то подальший синтез динамічної складової моделі залежить від форми зв'язку між входами і виходами в перехідному режимі, залежна від динамічних властивостей об'єкту. Її вибір здійснюється на основі якісного аналізу спостережуваного перехідного процесу, логічних міркувань, оцінки можливості отримання необхідної інформації. Слід зазначити, що перехідні режими в економічних системах надзвичайно складні і різноманітні. Тому вибір відповідної функції, що апроксимує ціле сімейство різних запізнювань, що виникають в системі, – завдання виключно важке, тим паче, що доводиться обмежуватися порівняно

простими моделями, доступними з погляду інформаційного забезпечення і математичної обробки. Опишемо спочатку типові безперервні моделі запізнювання.

Простим є запізнювання у формі

$$y(t) = y^0(t - \hat{T}); \quad t \geq \hat{T}, \quad (4.30)$$

яка припускає, що вихід, що запізнюється, копіює вхід з лагом \hat{T} , обчислюваним в безперервній шкалі часу. Інерційна ланка функціонує як лінія затримки, а

$$g_n(t) = \int_0^{t+\hat{T}} y^0(t) dt. \quad (4.31)$$

Залежність (4.31) прийнятна для опису запізнювання в багатьох об'єктах зберігання і транспортування продукції. Нею користуються також як модель осередненого лага системи, що породжується безліччю запізнювань в її елементах (наприклад, середньою тривалістю виробничого циклу).

Найчастіше модель запізнювання будується в припущенні, що швидкість зміни виходу, що запізнюється, визначається величиною його відставання від потенційного виходу, тобто

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\lambda [y(t) - y^0(t)]. \quad (4.32)$$

Така гіпотеза досить добре узгоджується зі спостережуваною поведінкою економічних об'єктів і логікою перехідних режимів в інерційних елементах.

У диференціальному рівнянні (4.32) коефіцієнт λ , відповідає швидкості зміни змінної $y(t)$ при відставанні виходу, що запізнюється, щодо потенційного, рівному одиниці; його називають *швидкістю реакції*.

Описувана модель може бути представлена в наступній еквівалентній формі

$$y(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda \theta} y^0(t - \theta) d\theta. \quad (4.33)$$

Тут $f(\theta) = \lambda e^{-\lambda \theta}$ вагова функція, значення якої характеризують вплив попередніх вхідних дій на поточну величину виходу (ефект спадковості), що

запізнюється, причому треба врахувати, що $\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda \theta} d\theta = -e^{-\lambda \theta} \Big|_0^{\infty} = 1$.

Запізнювання у формі (4.30) або (4.33) називають *показовим (експоненціальним)*.

Якщо потенційний вихід є ступінчастою функцією:

$$\begin{aligned} y^0(t) &= 0; & t &\leq 0; \\ y^0(t) &= y^0; & t &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

що породжена стрибкоподібною зміною інтенсивності вхідної змінної $x(t)$ об'єкту. Тоді рівняння (4.32) запишеться так:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = \lambda y^0, \quad (4.35)$$

а його рішення за початкової умови $y(0) = 0$ має наступний вигляд:

$$y(t) = (1 - e^{-\lambda t}) y^0. \quad (4.36)$$

Показове запізнювання достатнє добре описує перехідні режими, властиві багатьом реальним економічним процесам. Такі, наприклад, як зміни попиту спо-

живання товару, викликані зниженням його ціни, процес освоєння капітальних вкладень на будівництво об'єкту і так далі Проте для моделювання запізнювання, наприклад, в попиті на новий товар, породжуваного психологічною інерцією споживачів, ця форма не підходить. Тут прийнятною є крива, показана на рис. 3.6. лінією b . Вона може бути отримана за допомогою моделі, утвореної двома послідовно сполученими інерційними ланками типу (4.32). Це запізнювання другого порядку описується системою з двох диференціальних рівнянь, коефіцієнти в яких визначаються з кривої b , а вихід однієї інерційної ланки є входом для іншої. Для деяких перехідних режимів синтез ланки запізнювання досягається за допомогою показових моделей третього і вищих порядків.

Опишемо тепер дискретні моделі запізнювання. Нехай $\tau, \dots = 1, 2, \dots$ номери часових інтервалів, а контрольовані моменти часу віднесені до їх кінців. Дискретна модель запізнювання, що функціонує як лінія затримки фіксованої тривалості T , описується співвідношенням (3.22), в якому час t і лаг T цілочислові

$$y_\tau = y_{\tau-T}^0; \quad \tau \geq T. \quad (4.37)$$

У окремому, але поширеному випадку T приймають рівним одиниці (скажімо, як лаг приймають річний виробничий цикл) і

$$y_\tau = y_{\tau-1}^0.$$

Разом з тим формула (4.37) сама є окремим випадком розподіленого запізнювання, при якому припускається, що вихід, що запізнюється, залежить від сукупності минулих значень потенційної змінної, узятих з вагами, що убувають

$$\beta_\theta. \quad \text{Тоді} \quad y_\tau = \beta_1 y_{\tau-1}^0 + \beta_2 y_{\tau-2}^0 + \dots = \sum_{\theta=1}^{\infty} \beta_\theta y_{\tau-\theta}^0, \quad (4.38)$$

$$\text{Причому} \quad \beta_\theta \leq \beta_{\theta+1}; \quad \sum_{\theta=1}^{\infty} \beta_\theta = 1.$$

Приймаючи в (4.38) ваги що убувають по геометричній прогресії зі знаменником r ($0 < r < 1$), отримуємо модель, що є дискретним аналогом показового запізнювання першого порядку:

$$y_\tau = (1-r) [y_{\tau-1}^0 + r y_{\tau-2}^0 + \dots] = (1-r) \sum_{\theta=1}^{\infty} r^{\theta-1} y_{\tau-\theta}^0, \quad (4.39)$$

$$\text{при цьому} \quad (1-r) \sum_{\theta=1}^{\infty} r^{\theta-1} = 1.$$

Відповідне цій формі кінцево-різницевого рівняння має вигляд:

$$\Delta y_\tau = \lambda [y_\tau^0 - y_\tau], \quad (4.40)$$

де $\lambda = 1 - r$, а $y_{\tau+1} = y_\tau + \Delta y_\tau$; $\tau = 1, 2, \dots$

4.7. Синтез моделей на формальній мові (нечіткі моделі)

Існують описові моделі на звичайній мові, які дозволяють зрозуміти якісні характеристики соціально-економічної системи. Але такі моделі не дозволяють отримати потрібні для їх вивчення, прогнозування і керування числові характеристики. В такому випадку варто застосувати синтез нечітких моделей, який базується на уявленні групи експертів про функціональну діяльність системи.

Нечіткі моделі базуються на поняттях нечітких множин, які представляють собою множину можливих значень нечіткої величини у формі функції приналежності виду $A = \{x/\square A(x)>0\}$.

Хай E - універсальна множина, x - елемент E , а R – певна властивість. Звичайна (чітка) підмножина A універсальної множини E , елементи якої задовольняють властивість R , визначається як множина впорядкованої пари $A = \{\mu_A(x)/x\}$, де $\mu_A(x)$ – характеристична функція, що приймає значення 1, коли x задовольняє властивості R , і 0 – в іншому випадку.

Нечітка підмножина відрізняється від звичайної тим, що для елементів x з E немає однозначної відповіді "ні" щодо властивості R . У зв'язку з цим, нечітка підмножина A універсальної множини E визначається як множина впорядкованою парі $A = \{\mu_A(x)/x\}$, де $\mu_A(x)$ - характеристична функція приналежності (або просто функція приналежності), що приймає значення в деякій впорядкованій множині M (наприклад, $M = [0,1]$).

Розглянемо множину X всіх чисел від 0 до 10. Визначимо підмножину A множини X всіх дійсних чисел від 5 до 8. $A = [5,8]$

Покажемо функцію приналежності множині A , ця функція ставить у відповідність число 1 або 0 кожному елементу в X , залежно від того, належить даний елемент підмножині A чи ні. Результат представлений на рис. 4.9.

Тепер опишемо множину молодих людей. Формально можна записати так $B = \{ \text{множина молодих людей} \}$.

Оскільки, взагалі, вік починається з 0, то нижня межа цієї множини повинна бути нулем. Верхню межу визначити складніше. Спочатку встановимо верхню межу, скажімо, рівну 20 рокам. Таким чином, маємо B як чітко обмежений інтервал, буквально: $B = [0,20]$. Виникає питання: чому хтось в свій двадцятирічний ювілей – молодий, а відразу наступного дня вже не молодий? Очевидно, це структурна проблема, і якщо пересунути верхню межу в іншу точку, то можна поставити таке ж питання.

Природніший шлях створення множини B полягає в ослабленні строгого ділення на молодих і не молодих. Зробимо це, виносячи не тільки чіткі думки "Так, він належить множині молодих людей" чи ні, вона не належить множині молодих людей", але і гнучкі формулювання "Так, він належить до досить молодих людей" чи ні, він не дуже молодий".

Розглянемо як за допомогою нечіткої множини визначити вираз "він ще молодий".

У першому прикладі ми кодували всі елементи множини за допомогою 0 чи 1. Простим способом узагальнити дану концепцію є введення значень між 0 і 1. Реально можна навіть допустити нескінченне число значень між 0 і 1, в одиничному інтервалі $I = [0, 1]$.

Для наочності приведемо характеристичну функцію множини молодих людей, як і в першому прикладі.

Хай $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0,1]$; A – нечітка множина, для якої $\mu_A(x_1)=0,3$; $\mu_A(x_2)=0$; $\mu_A(x_3)=1$; $\mu_A(x_4)=0,5$; $\mu_A(x_5)=0,9$

Тоді A можна представити у вигляді:

$A = \{0,3/x_1; 0/x_2; 1/x_3; 0,5/x_4; 0,9/x_5\}$ або
 $A = 0,3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0,5/x_4 + 0,9/x_5$
 (знак "+" є операцією не складання, а об'єднання) або

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A =$	0,3	0	1	0,5	0,9

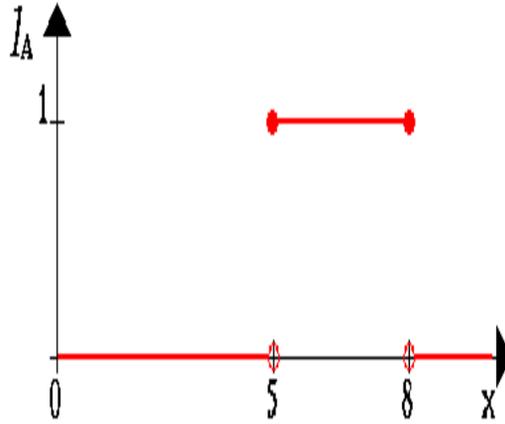


Рис. 4.9. Зображення приналежності звичайної (чіткої) множини

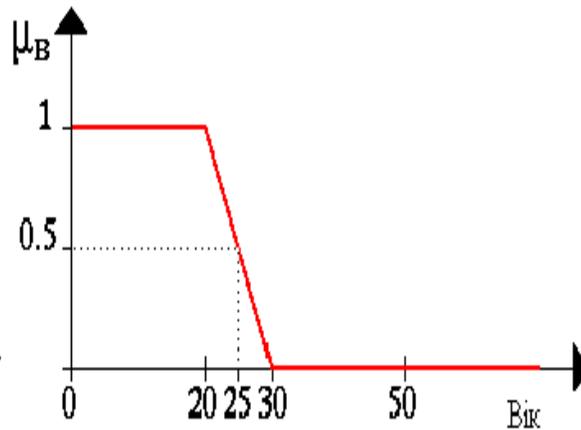


Рис. 4.10. Характеристична функція множини молодих людей

Сукупність функцій приналежності для кожного терма з базової термножини T зазвичай зображуються разом на одному графіку. На рис. 4.11

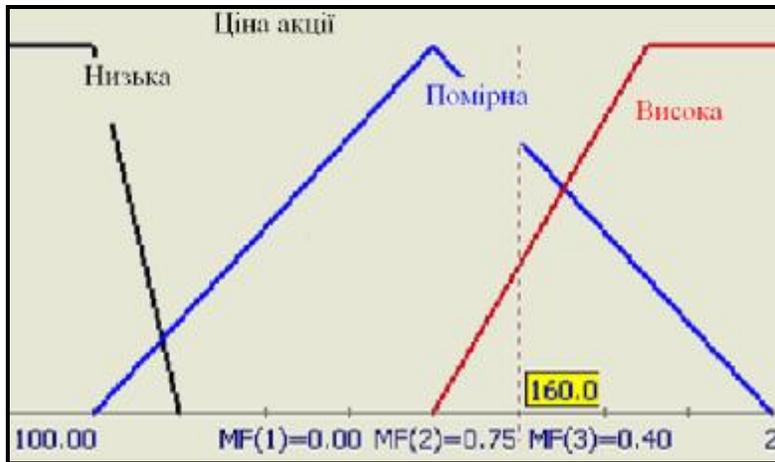


Рис. 4.11. Опис лінгвістичних змінних для категорії «Ціна акцій»: «низька», «помірна» та «висока».

приведений приклад описаної вище лінгвістичної змінної «Ціна акції».

Непрямі методи визначення значень функції приналежності використовуються у випадках, коли немає елементарних вимірних властивостей для визначення нечіткої множини. Як правило, це методи попарних порівнянь. Якби значення функцій приналежності

були відомі, наприклад, $\mu A(x_i) = w_i, i=1,2,\dots,n,$ тоді попарні порівняння можна представити матрицею відносин $A = \{a_{ij}\}$, де $a_{ij}=w_i/w_j$ (операція ділення).

Простіше всього створення таких функцій приналежності проводити з групою експертів, які для кожної функції приналежності виражають власну думку щодо приналежності, наприклад, ціни акцій до категорії «низька». Нехай їх було 10. Коли запитали про ціну в 100 одиниць – всі 10 сказали, що ціна низька. Тут $\mu A(100)=10/10 = 1,0$. Коли запитали про ціну 110 одиниць – тільки дев'ятеро сказали, що ціна ще низька, отже $\mu A(110)=9/10 = 0,9$. Коли їх було за-

пропоновано ціну в 115 грошових одиниць – п’ятеро сказали, що ціна ще низька, тобто $\mu_A(115)=5/10 = 0,5$. А для ціни в 120 – ніхто з експертів не погодився, що ціна є низькою, отже $\mu_A(120)=0/10 = 0,0$.

Такий алгоритм дозволяє побудувати функцію приналежності до певної характеристики соціально-економічної системи. Особливо актуальним є не чітке визначення критеріальних значень коефіцієнтів, що характеризують роботу підприємства, оскільки рекомендовані їх значення завжди подаються в певному діапазоні.

Існує понад десяток типових форм кривих для завдання функцій приналежності. Найбільшого поширення набули: трикутна, трапецеїдальна функції та функція приналежності Гауса.

Трикутна функція приналежності визначається трійкою чисел (a,b,c) , і її значення в точці x обчислюється згідно виразу:

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-c}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}, \quad (4.41)$$

При $(b-a)=(c-b)$ маємо випадок симетричної трикутної функції приналежності, яка може бути однозначно задана двома параметрами з трійки (a,b,c) .

Аналогічно для завдання трапецеїдальній функції приналежності необхідна четвірка

чисел (a,b,c,d)

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}, \quad (4.42)$$

При $(b-a)=(d-c)$ трапецеїдальна функція приналежності приймає симетричний вигляд.

Функція приналежності гауссова типу описується формулою

$$MF(x) = \exp \left[- \left(\frac{x-c}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (4.43)$$

і оперує двома параметрами. Параметр c позначає центр нечіткої множини, а параметр σ відповідає за крутизну функції.

Іноколи застосовують кругову функцію виду

$$m(x) = \frac{1}{1 + \frac{(x-a)^2}{b}} \quad \text{або} \quad m(x) = a \sqrt{\frac{x}{x_{max}} \left(1 - \frac{x}{x_{max}} \right)}, \quad (4.44)$$

Де a, b – діапазон значень x , в межах якого зображується півколо, x_{max} – найбільше значення аргументу, до якого сягає чверть кола. На рис. 4.12 представлено деякі з описаних функцій.

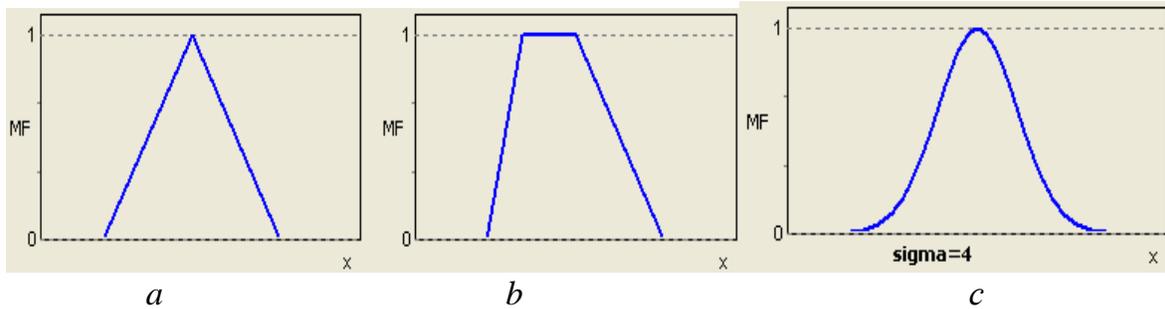


Рис. 4.12.. Типові кусочно-лінійні функції приналежності; трикутна (a) та трапецеїдальна (b), Гауса (c).

Визначимо деякі поняття нечітких множин. Хай $M = [0,1]$ і A – нечітка множина з елементами з універсальної множини E і з множиною визначення M

- Величина $\mu_A(x) = \sup_{x \in E} \mu_A(x)$ називається висотою нечіткої множини A . Нечітка множина A є нормальною, якщо її висота дорівнює 1, тобто верхня межа її функції приналежності дорівнює 1 ($\sup_{x \in E} \mu_A(x) = 1$). При $\mu_A(x) < 1$ нечітка множина називається субнормальною.

- Нечітка множина є порожньою, якщо $\forall x \in E \mu_A(x) = 0$. Не порожню субнормальну множину можна нормалізувати за формулою $\mu_A(x) := \frac{\mu_A(x)}{\sup_{x \in E} \mu_A(x)}$

- Нечітка множина є унімодальною, якщо $\mu_A(x) = 1$ лише для одного $x \in E$.
- Носієм нечіткої множини A є звичайна підмножина з властивістю $\mu_A(x) > 0$, тобто носій $A = \{x / \mu_A(x) > 0\} \forall x \in E$
- Елементи $x \in E$, для яких $\mu_A(x) = 0,5$ називаються точками переходу множини A .

Основні операції з функціями приналежності зводяться до операцій з їх інтервалами достовірності. А операції з інтервалами, у свою чергу, виражаються через операції з дійсними числами - межами інтервалів:

- операція "складання": $[a_1, a_2] (+) [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$ (4.45)

- операція "віднімання": $[a_1, a_2] (-) [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$ (4.46)

- операція "множення": $[a_1, a_2] (\times) [b_1, b_2] = [a_1 \times b_1, a_2 \times b_2]$, (4.47)

- операція "ділення": $[a_1, a_2] (/) [b_1, b_2] = [a_1 / b_2, a_2 / b_1]$, (4.48)

- операція "піднесення до ступеня": $[a_1, a_2] (^) i = [a_1^i, a_2^i]$. (4.49)

Аналізуючи властивості нелінійних операцій з нечіткими числами (наприклад, ділення), дослідники приходять до висновку, що форма функцій приналежності результируючих нечітких чисел часто близька до трикутної. Тобто, якщо

ми вводимо опис трикутного числа набором абсцис вершин (a, b, c) , то можна записати $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) \equiv (a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2)$ (4.50)

На такому ж принципі базується і синтез моделі управління соціально-економічними системами.

Основою для синтезу нечіткого логічного управління є база правил, що містить нечіткі вислови у формі «Якщо-то» і функції приналежності для відповідних лінгвістичних термів (тобто, нечітких множин, які визначають лінгвістичну змінну). При цьому повинні дотримуватися наступні умови:

1. Існує хоч би одне правило для кожного лінгвістичного терма вихідний змінної.

2. Для будь-якого терма вхідної змінної є хоча б одне правило, в якому цей терм використовується як передумова (ліва частина правила).

Інакше має місце неповна база нечітких правил.

Приклад. Групі експертів з 8 осіб було запропоновано визначити дії керівництва щодо прийнятного рівень коефіцієнтів швидкої ліквідності та платоспроможності, нижче якого робота підприємства вважається незадовільною. Такими діями було визнано збільшення статутного капіталу пропорційно величині зменшення означених показників. Тобто, потрібно синтезувати модель управління статутним капіталом підприємства.

Вирішення задачі почнемо з визначення діапазону значень аргументів x для трьох нечітких множин: A_1 – множина значень коефіцієнта швидкої ліквідності, A_2 – множина значень коефіцієнта платоспроможності, B – множина значень збільшення статутного капіталу на 10% відносно рівня зменшення суми двох означених коефіцієнтів. В спеціальній літературі було означено прийнятний рівень першого коефіцієнта 0.6 - 0.8, а для другого – більше 0.5. Тому діапазон можливих значень для обох коефіцієнтів було обрано 0,2 - 0,8. Діапазон можливих значень x для множини B – 0,4 – 1,6.

Потім було проведено опитування експертів щодо незадовільних значень обох коефіцієнтів. Результати опитування наведені в наведеній нижче таблиці.

Коефіцієнт	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	Кількість експертів, які вважають такий рівень коефіцієнту незадовільним						
швидкої ліквідності	8	8	8	7	4	1	0
платоспроможності	8	8	7	6	2	0	0

За цією таблицею можна побудувати нечіткі множини, розрахувавши степінь приналежності як результат ділення числа згодних експертів на їх загальну кількість:

$$A_1 = \{1,0/0,2; 1,0/0,3; 1,0/0,4; 0,875/0,5; 0,5/0,6; 0,125/0,7; 0/0,8\}.$$

$$A_2 = \{1,0/0,2; 1,0/0,3; 0,875/0,4; 0,75/0,5; 0,25/0,6; 0/0,7; 0/0,8\}.$$

Визначимо тепер прийнятний рівень збільшення рівня статутного капіталу в залежності від суми коефіцієнтів. Результати опитування наведені в наступній таблиці.

Сума коефіцієнтів	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
	Кількість експертів, які вважають, що при такому значенні суми двох коефіцієнтів, статутний капітал потрібно збільшити на 10%.						
швидкої ліквідності	8	7	5	1	0	0	0

За цією таблицею можна побудувати нечітку множину рішень збільшення статутного капіталу, розрахувавши степінь приналежності як результат ділення числа згодних експертів на їх загальну кількість:

$$B = \{1,0/0,4; 0,875/0,6; 0,625/0,8; 0,125/1,0; 0/1,2; 0/1,4; 0/1,6\}.$$

Визначення числових характеристик трьох нечітких множин дозволяє синтезувати структуру управління соціально-економічної системи, яка складається з двох коефіцієнтів у вигляді: ЯКЩО x_1 це A_1 . І . x_2 це A_2 , ТО y це B .

4.8. Індивідуальні завдання № 5.

Розрахунки статистичних квазілінійних моделей соціально-економічної системи та синтез структури управління

Задача 1

Завдання: синтезувати статистичні квазілінійні моделі.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки N_3 та номер за списком навчальної групи N_2 .

Методичні вказівки: 1) за допомогою функції



$$=RANDBETWEEN((N_3+1)*N_2; (N_3+2)*(N_2+1))/341$$

згенерувати три стовпці по 50 чисел. Перші два стовпці позначити як X_1 та X_2 (вхідні фактори), а третій – як Y (вихідний фактор);

2) застосувати методіку синтезу квазілінійних статистичних моделей для створення таблиці початкових розрахунків;

3) скористатися функцією LINEST  для розрахунку коефіцієнтів моделі;

4) записати одержану модель у вигляді формули;

5) додати до моделі блок запізнювання виду (4.36) для $\lambda = ((N_3+1)*N_2/0,12$ і побудувати графік зміни $y(t)$.

Задача 2

Завдання: синтезувати структуру управління соціально-економічної системи згідно прикладу з п.4.7.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки N_3 та номер за списком навчальної групи N_2 .

Методичні вказівки: 1) варіант першого коефіцієнта, обирається з табл. 4.1 за $21 - (N_2 + N_3)/5$, другого за $(N_2 + N_3)/5$;

- 2) побудова нечітких множин проводиться шляхом опитування студентів своєї групи кількістю не менше 4-х;
- 3) збільшення власного капіталу прийняти 10%;
- 4) прийнятний рівень фінансових коефіцієнтів узяти зі спеціальної літератури за курсом «Економіка підприємства».

Таблиця 4.1

Варіанти завдань	
№ п/п	Фінансові показники
1.	Коефіцієнт зносу основних засобів
2.	Коефіцієнт покриття
3.	Коефіцієнт швидкої ліквідності.
4.	Коефіцієнт абсолютної ліквідності.
5.	Чистий оборотний капітал, тис. грн.
6.	Коефіцієнт платоспроможності
7.	Коефіцієнт фінансування
8.	Коефіцієнт забезпеченості власними оборотними засобами
9.	Коефіцієнт маневреності власного капіталу
10.	Коефіцієнт оборотності активів
11.	Коефіцієнт оборотності кредиторської заборгованості
12.	Коефіцієнт оборотності дебіторської заборгованості
13.	Строк погашення дебіторської заборгованості, днів
14.	Строк погашення кредиторської заборгованості, днів
15.	Коефіцієнт оборотності матеріальних запасів
16.	Коефіцієнт оборотності основних засобів (фондовіддача)
17.	Коефіцієнт оборотності власного капіталу
18.	Коефіцієнт рентабельності активів
19.	Коефіцієнт рентабельності власного капіталу
20.	Коефіцієнт рентабельності діяльності
21.	Коефіцієнт рентабельності продукції

Контрольні запитання

1. Чи можна отримати модель у вигляді експоненційної залежності?
2. Як відрізнити циклічний економічний процес від не циклічного?
3. Коли треба будувати авторегресійні моделі?
4. Чи в усіх випадках можна застосовувати нейронні сітки?
5. Чим пояснюється потребу синтезу моделей на формальній мові?
6. Яким цілям слугують періодичні моделі соціально-економічних систем?

В розділі розглянуто синтез моделей соціально-економічних систем на підставі результатів статистичних досліджень, такі як регресійний, авторегресії, моделювання циклічних процесів, нейронні сітки, нечіткі множини.

5. ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЦІ

Вивчивши матеріал цього розділу студент опанує основні прийоми знайдення оптимальних рішень в залежності від типу моделі соціально-економічної системи.

Економіко-математичні моделі, що використовуються при оптимізації управлінських рішень, важко класифікувати, оскільки може бути декілька підходів до класифікації, наприклад по місцю їх застосування, складності, їх математичним основам, обліку або нехтуванню в них чинника часу, характеру отриманого результату і по інших ознаках.

Найбільш повно розробленими і вживаними на практиці моделями, що дозволяють оптимізувати управлінські рішення, є статистичні моделі. Вони дають можливість робити вибір сукупності чисел x_i (змінних в рівняннях), що забезпечують екстремум деякої функції Z (цільова функція або показник якості ухваленого рішення) при обмеженнях, визначуваних умовами роботи системи. Математично модель записується так: обчислити вектор, що обертає в максимум або мінімум $\bar{X} = x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n$, цільову функцію

$$z = f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n) \quad (5.1)$$

за умов

$$\left. \begin{aligned} q_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n) &= 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m_1); \\ q_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n) &\leq 0 \quad (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m); \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Вирази типу (5.2) називаються обмеженнями, які задають область рішень цільової функції (5.1). Саме цільова функція, почасти, і є моделлю соціально-економічної системи. Варто відмітити, що вид функцій f та q_i може бути як лінійний так і нелінійний. Для знайдення оптимуму моделей цього типу застосовуються числові методи. Вони описані нижче.

Іншим типом моделей є динамічні. В цьому випадку для знайдення їх екстремуму використовується відомий з математичного аналізу прийом знайдення першої похідної моделі, при рівняння нулю та розрахунок оптимальних значень змінних, що входять до неї. Тому спинятися на цих прийомах ми не будемо.

Якщо модель задано у вигляді нечітких множин і якщо задано також нечітку функцію управління такою системою, існують спеціальні методи, які дозволяють отримати чіткий висновок з таких нечітких моделей.

Особливий клас оптимізації складають прийоми, що базуються на теорії ігор, в яких оптимізація розуміється в сенсі взаємодії з іншими суб'єктами ринку.

5.1. Числові методи знаходження оптимального рішення статистичних моделей

До широкого розповсюдження комп'ютерів було розроблено велику кількість спеціальних методів, які дозволяють знайти рішення «вручну», без застосування ЕОМ, або з відносно простим математичним забезпеченням. З'явилися методи математичного програмування, які залежать від типу моделі. Моделі математичного програмування, в яких змінні в рівняннях по своєму фізичному сенсу можуть приймати лише обмежене число дискретних значень, складають групу моделей цілочислового програмування. Якщо початкові параметри при змінних в моделях завдань математичного програмування можуть змінюватися в деяких межах, їх називають моделями параметричного програмування. Моделі, за допомогою яких вирішуються умовно-екстремальні завдання за наявності випадкових параметрів в їх умовах, називають моделями стохастичного програмування.

В наш час ці методи практично вже стали непотрібними, оскільки персональні комп'ютери мають спеціальні програми, які дозволяють знайти оптимальне рішення числовими методами. Це стосується як



(рис. 5.1) так

і **М**. В обох програмах застосовано такі методи як метод Ньютона та метод зв'язаних градієнтів.

Розглянемо їх.

Метод Ньютона (також відомий як метод дотичних) – це ітераційний числовий метод знаходження кореня (нуля) заданої функції. Пошук рішення здійснюється шляхом побудови послідовних наближень і заснований на принципах простої ітерації.

Основна ідея методу полягає в наступному: задається початкове наближення поблизу гаданого кореня, після чого будується дотична до досліджуваної функції в точці наближення, для якої знаходиться перетин з віссю абсцис. Ця

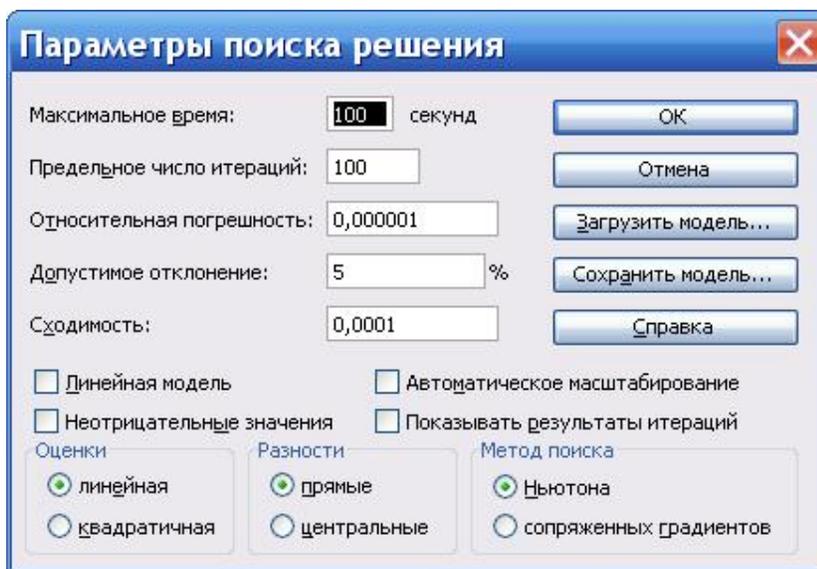


Рис. 5.1. Параметри функції «Пошук рішення»



точка і береться як наступне наближення. І так далі, поки не буде досягнута необхідна точність.

Нехай існує функція $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ визначена на відрізку $[a, b]$ і така, що піддається диференціюванню на ній. Тоді формула ітеративного числення наближень може бути виведена таким чином:

$$f'(x_n) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}, \quad (5.3)$$

де α кут нахилу дотичної в точці x_n .

Отже шуканий вираз для x_{n+1} має вигляд
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (5.4)$$

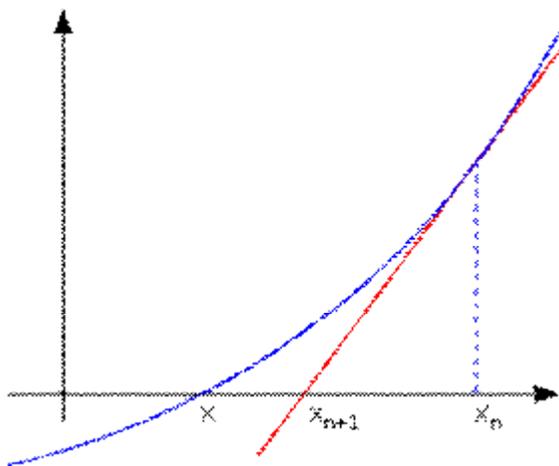


Рис. 5.2. Геометрична інтерпретація методу Ньютона

Ітераційний процес починається з якогось початкового наближення x_0 . Поки не виконана умова зупинки, яку можна узяти $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ або $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ (тобто погрішність в потрібних межах), обчислюють нове наближення: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Ілюстрація методу Ньютона (рис. 5.2, синім зображена функція $f(x)$ нуль якої необхідно знайти, червоним дотична в точці чергового на-

ближення x_n). Тут ми можемо побачити, що подальше наближення x_{n+1} краще попереднього x_n .

Метод зв'язаних градієнтів – метод знаходження локального мінімуму функції на основі інформації про її значення і її градієнту.

Визначимо термінологію:

Хай $\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_n \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$.

Введемо на \mathbb{X} цільову функцію $f(\vec{x}) \in C^2(\mathbb{X})$.

Вектори $\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_n$ називаються **зв'язаними**, якщо:

$$\vec{S}_i^T H \vec{S}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\vec{S}_i^T H \vec{S}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

де H – матриця Гессе $f(\vec{x})$.

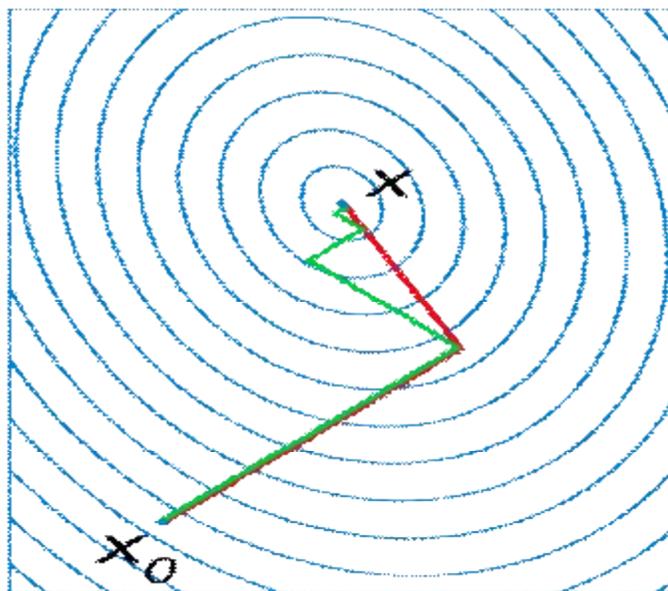


Рис. 5.3. Ілюстрація послідовних наближень методу найшвидшого спуску (зелена ламана) і методу зв'язаних градієнтів (червона ламана) до точки екстремуму.

Алгоритм розрахунку полягає в наступному.

Хай \vec{x}_0 – початкова точка, \vec{r}_0 – напрям антиградієнта і відшукується мінімум функції $f(\vec{x})$. Покладемо $\vec{S}_0 = \vec{r}_0$ і знайдемо мінімум уздовж напрямку \vec{S}_0 . Позначимо точку мінімуму \vec{x}_1 . Нехай на деякому кроці розрахунок знаходиться в точці \vec{x}_k , і \vec{r}_k – напрямок протилежний градієнту. Покладемо $\vec{S}_k = \vec{r}_k + \omega_k \vec{S}_{k-1}$, де вибирають або

Формально порядок розрахунку наступний:

1. Задаються початковим наближенням і погрішністю: $\vec{x}_0, \varepsilon, k = 0$
2. Розраховують початковий напрям: $j = 0, \vec{S}_k^j = -\nabla f(\vec{x}_k), \vec{x}_k^j = \vec{x}_k$
3. $\vec{x}_k^{j+1} = \vec{x}_k^j + \lambda \vec{S}_k^j, \lambda = \arg \min_{\lambda} f(\vec{x}_k^j + \lambda \vec{S}_k^j), \vec{S}_k^{j+1} = -\nabla f(\vec{x}_k^{j+1}) + \omega \vec{S}_k^j, \omega = \frac{\|\nabla f(\vec{x}_k^{j+1})\|^2}{\|\nabla f(\vec{x}_k^j)\|^2}$

Якщо $\|\vec{S}_k^{j+1}\| < \varepsilon$ або $\|\vec{x}_k^{j+1} - \vec{x}_k^j\| < \varepsilon$ то $\vec{x} = \vec{x}_k^{j+1}$, то розрахунок закінчено, потрібна точність досягнута.

Інакше якщо $(j + 1) < n$ то $j = j + 1$ і перехід до п.3;

інакше $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k^{j+1}, k = k + 1$ і перехід до п.2.

5.2. Математичне програмування

Оскільки власні методи математичного програмування з розвитком обчислювальної техніки стали не актуальним, в цьому пункті будуть наведені тільки постановки задач та приклади їх вирішення із застосування описаних вище числових методів функцією «Пошук рішення»  або функцією Solver .

5.2.1. Лінійне програмування

Загальна постановка задачі лінійного програмування має вигляд:

– Цільова функція $\sum C_i X_i \rightarrow Extr;$ (5.5)

– обмеження

$$\left. \begin{aligned} \sum a_{ij} X_i \{ = < ; = ; > = \} b_j, (j = \overline{1, m}) \\ d_i \leq X_i \leq D_i, (i = \overline{1, n}) \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Тут X_i – змінні вхідні фактори, оптимальне значення яких потрібно знайти; C_i – коефіцієнти моделі; a_{ij} – коефіцієнти обмежень; b_j – числова величина, яку обмеження не може перебільшувати (або навпаки менше якої не може бути); d_i, D_i – межі, в яких можуть змінюватися вхідні фактори, m – кількість обмежень; n – кількість вхідних факторів.

Приклад. Знайти оптимальний план випуску товарної продукції. Інші умови подані в процесі вирішення задачі. Цільова функція – це максимізація

доходу від випуску товарної продукції $\sum P_i \cdot C_i \rightarrow \max$, де P_i – ціна одиниці продукції, C_i – об'єм випуску кожного виду продукції.

Накладемо на цільову функцію набір обмежень. Основним буде недолік виробничих площ. Всього в наявності є 230 місць, кожне з яких займає 7,4 квадратних метрів, враховуючи проходи до них. Необхідно також розвернути мінімум 10 робочих місць для інженерів, кожне з яких займає 8,5 квадратних метрів. Загальна площа виробничих приміщень становить 2000 квадратних метрів. Одержуємо обмеження $7,4L + 8,5L_i \leq 2000$, $L_i \geq 10$, $L \leq 230$, де L – кількість робочих місць, L_i – кількість місць для інженерів.

Другою групою обмежень є обмеження по складських приміщеннях. Їх не можна пристосувати під виробничі, і крім того вони абсолютно необхідні для тимчасового зберігання випущеної продукції, а також займаються під склади деталей і матеріалів. Вважатимемо, що площа, необхідна для розміщення готової продукції кожного виду становить:

$0,3A$, де A – кількість телевізорів, що випускаються за місяць;

$0,35B$, де B – кількість відеомагнітофонів, що випускаються за місяць;

$0,4C$, де C – кількість музичних центрів, що випускаються за місяць.

Тоді для всього випуску потрібно складська площа у розмірі $0,35B + 0,3A + 0,4C$. Загальна площа обладнаних складських приміщень становить 600 квадратних метрів. Обмеження по об'єму складських приміщень

$$0,35B + 0,3A + 0,4C \leq 600.$$

Тепер розглянемо ціну товарної продукції: телевізор – 180 у.о., відеомагнітофон – 260 у.о., музичний центр - 420 у.о.

Собівартість складається з витрат на оренду площі – 4000 у.о., витрат на комплектуючі – 100, 170, 315 відповідно на випуск одного телевізора, відеомагнітофона та музичного центру; інших витрат – 4500 у. о. Необхідна зарплата інженерів складає 400, директора - 600, робітників на конвеєрі - 350. Для підприємства нашого масштабу необхідно 3 директори незалежно від випуску і 1 на кожні 150 одиниць продукції. Необхідно 1-2 інженери на кожні 150 одиниць випуску продукції

Одержуємо обмеження, що собівартість не може перевищувати доходів від продажу продукції

$$4000 + 100A + 170B + 315C + 4500 + 400L_i + 350L + 600 \leq AP_1 + BP_2 + CP_3,$$

$$P_1 \leq 180, P_2 \leq 260, P_3 \leq 420,$$

де P_1, P_2, P_3 – відповідно ціни одного телевізора, відеомагнітофона та музичного центру.

Фонд заробітної платні, обмежений через податкові проблеми у 260,5 млн. у.о. Обмеження на фонд зарплати

$$3 \cdot 600 + 600(A+B+C)/150 + 2 \cdot 400(A+B+C)/150 + 350L \leq 260500000.$$

Позначивши як вхідні фактори величини $A, B, C, P_1, P_2, P_3, L, L_i$, виконаємо розрахунки за допомогою функції Solwer. Одержуємо, що оптимальним випуском є виробництво 3800 телевізорів, 2000 відеомагнітофонів і 1500 музичних центрів в місяць за умови збереження наявної тактики поведінки на ринку.

5.2.2. Цілочислове програмування

Цілочислове програмування має таку ж постановку задачі як і лінійне, тобто його цільова функція та обмеження мають вигляд (5.5) – (5.6). Відмінною тут є те, що змінні параметри X можуть приймати тільки цілі значення. Це стосується, наприклад визначення кількості осіб, що працюють на підприємстві. Не можна ж призначити на роботу 1,5 особи.

Деякою відмінною є 0-1 програмування. В ньому параметри X можуть приймати тільки значення 0 та 1.

Приклад. Потрібно розмістити на складі якомога більше різних видів продукції, запакованої у ящики. Позначимо як S – загальну площу складських приміщень; X_i – кількість ящиків i -го виду продукції, N – кількість видів продукції, C_i – ціна одиниці продукції, K_i – кількість продукції i -го виду у одному ящику. S_1 – площа, що займає один ящик. Ящики можна розташовувати у три яруси. Цільова функція визначає максимізацію вартості продукції на складі

$$E = \sum_{i=1}^N C_i K_i X_i \rightarrow \max .$$

Тоді, – площа на складі, яку займає i -тий вид продукції $S_i = X_i S_1$, а загальна кількість ящиків, що можуть розміщатись на складі одночасно

$$X_3 = \sum_{i=1}^N X_i . \text{ Обмеження по площі мають вигляд } 3S \geq S_1 \sum_{i=1}^N X_i .$$

Ще одне обмеження визначає, що $X_i \geq 0$ та ще те, що всі X_i є цілочисловим. Вирішимо цю задачу для $S = 250$ кв. м, $N = 5$, $C_i = 2, 3, 5, 7, 15$ грн. відповідно, $K_i = 35, 40, 12, 55, 36$ штук відповідно, $S_1 = 2,5$ кв. метри.

Застосувавши функцію Solwer при змінних параметрах X_i , отримаємо наступне рішення $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 300$ ящиків. Отже, весь склад вигідніше всього завантажити продукцією 5-го типу.

5.2.3. Нелінійне програмування

Якщо функції f та q у (5.1) - (5.2) мають нелінійний характер, така постановка задачі називається нелінійним програмування. Наприклад, якщо параметр X буде зведено у квадрат.

Приклад. Попит на продукцію виражається залежністю $Q = 20 + 2.3C - 0.05C^2$, де Q – обсяг спожитої продукції, C – ціна одиниці продукції. Накладні витрати на виробництво продукції виражаються залежністю $P = 130 + 2.3Q$,

Знайти оптимальну ціну на продукцію при умові найбільшого прибутку.

Прибуток, це різниця між доходами та витратами. Остання умова вимагає, щоб ця різниця прагнула максимуму, отже, це і буде цільова функція

$$QC - 130 - 2.3Q \rightarrow \max .$$

Тоді, накладні витрати будуть обмеженням. Змінним параметром (вхідним фактором) буде ціна C , для якої теж є обмеження $C \geq 0$.

Вирішимо цю задачу за допомогою функції Solwer. В результаті отримаємо, що $Q = 39,2479$, $C = 35,00175$, $E = 1153,475$.

5.2.4. Транспортна задача

Транспортні задачі відомі у двох постановках: матричній і мережній.

Матрична постановка транспортної задачі:

Хай є ряд пунктів споживання і підприємств-постачальників деякої продукції, де:

A_i – ресурс i -го постачальника (запас продукції або план відвантаження з поточного виробництва).

B_j – потреби в тій же продукції в пунктах j .

C_{ij} – відстань або вартості перевезення з i в j .

Вимагається знайти такі розміри поставок від кожного постачальника кожному споживачу X_{ij} (змінні задачі), при яких загальна сума витрат або загальний пробіг будуть мінімальними.

Розрізняють наступні різновиди транспортних задач (рис. 5.4)

Система обмежень закритої задачі: передбачає поставку кожному споживачу кількість продукції, рівної потребі в ній (5.7) і вивіз продукції від кожного постачальника в кількості, рівній її ресурсу (5.8.)

$$\sum X_{ij} = B_j, (j=1,2, \dots n - \text{кількість постачальників}), \quad (5.7)$$

$$\sum X_{ij} = A_i, (i= 1,2, \dots t - \text{кількість споживачів}); \quad (5.8)$$

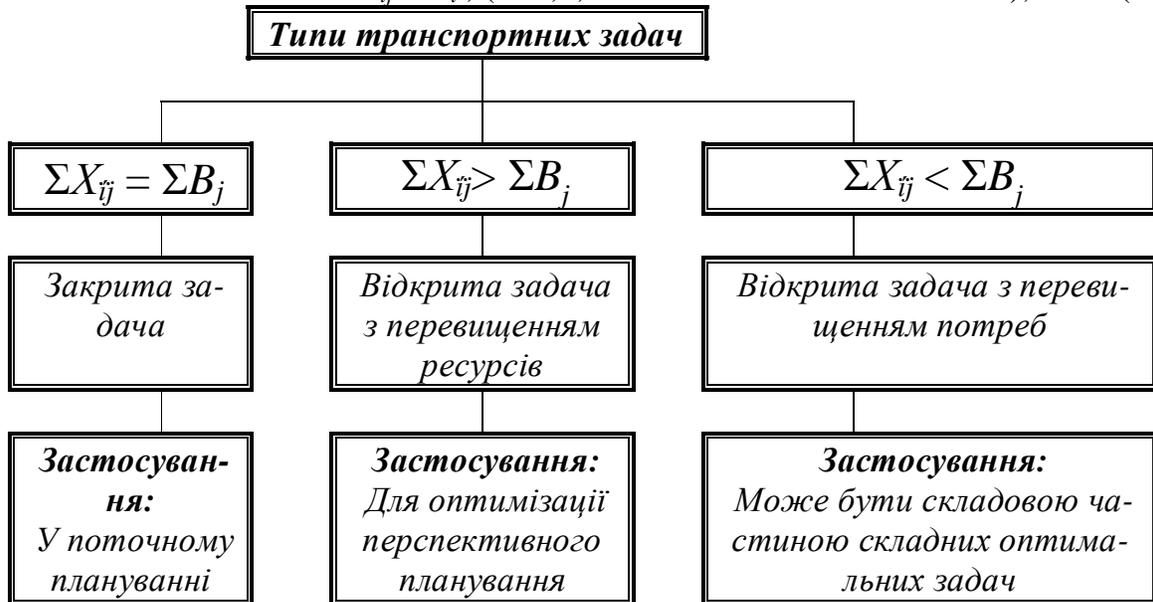


Рис. 5.4. Різновиди транспортних задач

У відкритій задачі з перевищенням ресурсів можливий вивіз менше наявності

$$\sum X_{ij} < A_i, \quad (5.9)$$

У відкритій задачі з перевищенням потреб можливе постачання менше наявності

$$\sum X_{ij} < \sum B_j, \quad (5.10)$$

Критерієм оптимальності рішення є мінімум загальних витрат по перевезенню або з пробігу в тонно-кілометрах (вагоно-кілометрах) по всіх планованих відправленнях. Якщо вартість перевезення (відстань) від i до j - позначити як C_{ij} те цільова функція визначиться таким чином

$$\sum \sum C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min, \quad (5.11)$$

Мережна транспортна задача:

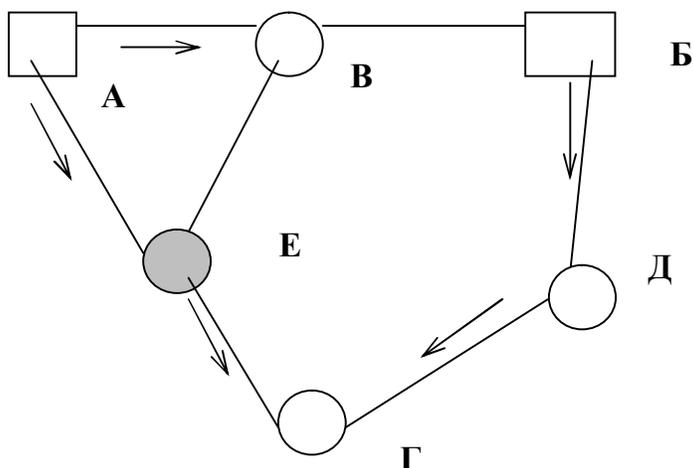


Рис. 5.5. Схема транспортної мережі:
 +10 □ Б - Пункти і розміри відправлення
 -8 ○ Д - Пункти і розміри прибуття
 — - лінії з'єднання – «дуги» або «ланки»
 ← - стрілка – потік вантажу
 $X_{AB} = 8$ - розмір вантажу

Оптимальне планування перевезень може бути проведено безпосередньо на схемі мережі шляхів сполучення (рис. 5.5). Схема складається з дуг і вузлів (або вершин). Вершинами є пункти або (центри агрегації) вантаження і вивантаження, а також всі реальні вузлові пункти мережі. Вершини без вантаження і вивантаження даного вантажу є транзитними. Кожну ділянку мережі між двома сусідніми вершинами звичайно розглядають як дві дуги протилежного напрямку з рухом в одну сторону по кожній дузі.

Кожна дуга характеризується показником відстані (або вартості) перевезення одиниці вантажу або довжині дуги. При рішенні задач за критерієм вартості довжина прямої і зворотної дуг звичайно різна (оскільки витрати перевезення по ділянці “туди і назад” не співпадають).

Змінними мережної транспортної задачі є потоки вантажу по кожній дузі. Потік може включати багато відправок, наприклад, потік по дузі Б-Д включає поставки з Б в Д – 8 одиниць вантажу, а з Б в Г – 7 одиниць вантажу.

До вирішення задачі, як правило, невідомо, в яку сторону перевозитиметься вантаж по ділянці в оптимальному варіанті. Тому в число змінних включаються потоки в обох напрямках, а загальне число змінних приймається рівним подвоєному числу ділянок мережі. (При значному числі постачальників і одержувачів число змінних при мережній постановці значне менше ніж при матричній, що полегшує рішення задачі, Наприклад, за наявності на мережі 600 ділянок, 50 пунктів відправлення і 200 пунктів призначення, число змінних при мережній постановці складе 1200 (600*2), а при матричній постановці воно буде набагато більше (200*50=10000 змінних).

Обов'язковою умовою мережної задачі є вимога балансування прибуття і відправлення вантажу в кожній вершині мережі: прийом вантажу зі всіх напрямів плюс власне вантаження рівні здачі на всі напрями власне вивантаження

$$\sum X_{ks} - \sum X_{kr} = R_k, \quad (5.12)$$

де K – довільна вершина; R_k – завантаження (+) або вивантаження (-) ($R_k = 0$ для транзиту) вершини K ; X_{ks} – потоки від K до всіх сусідніх вершин S ; X_{kr} –

потоки до K від сполучених вершин r ;

Цільова функція закритої мережної задачі має вигляд

$$\sum \sum C_{rs} X_{rs} \rightarrow \min. \quad (5.13)$$

Підсумовування виконується по всіх дугах мережі.

Описана модель мережної задачі не враховує пропускну спроможності ділянок мережі – для цього вводиться додаткове обмеження

$$X_{rs} < d_{rs}, \quad (5.14)$$

де d_{rs} – пропускна спроможність ділянки мережі $r-s$ в напрямі від r до s .

З урахуванням (5.12) - (5.14) одержуємо мережну транспортну задачу з обмеженням пропускну спроможності в простому вигляді (для перевезення одного вантажу).

Мережна і матрична моделі в більшості випадків взаємозамінні.

В деяких випадках обирається інший, ніж мінімум витрат на перевезення, критерій оптимальності. Вибір критерію залежить від: характеру проблеми, наявної інформації і необхідної точності знаходження оптимуму.

Прикладами локального критерію оптимальності транспортної задачі можуть служити:

а) критерій мінімуму сумарного пробігу (придатний тільки для вирішення закритих транспортних задач в межах одного виду транспорту).

б) при оптимізації перевезень в межах року звичним вартісним критерієм є сума залежних приведених витрат $E_{зав} + E_{неп} + E_n + (K_{nc} + C_{зр})$, (5.15)

де $E_{зав}$ – залежні від руху експлуатаційні витрати; K_{nc} – капітальні вкладення на пересувний склад; $C_{зр}$ – вартість вантажів, що знаходяться в процесі перевезення; $E_{неп}$ – витрати по перевалюваннях; E_n – вартість поставки вантажів.

в) При складанні оптимальних схем перевезень на перспективу можливе посилення пропускну спроможності ліній залежно від розміщення на них оптимальних вантажопотоків. Тому в критерії оптимальності враховується $K_{ност}$ – витрати на необхідний розвиток пропускну спроможності по постійних пристроях; $E_{нез}$ – незалежні експлуатаційні витрати.

$$E_{зав} + E_{неп} + E_{нез} + E_n + (K_{nc} + K_{ност} + C_{зр}), \quad (5.16)$$

г) в деяких випадках при рішення відкритих транспортних задач допускається використання як критерій – сума витрат виробництва і тарифної платні за перевезення.

д) у окремих задачах по оптимізації термінових перевезень як критерій виступає час: тонно-часи (вагони-годинник) перебування вантажу в процесі перевезення або загальний час завершення певної перевізної операції.

Приклад. У трьох постачальників, кожен з яких має наступні ресурси – 25, 75, 13, є п'ять споживачів, які потребують таку кількість ресурсів – 15, 35, 22, 18, 23. розробити схему оптимальних перевезень, якщо вартості перевезень C_{ij} , разом з обсягами запасів та споживання подані в наступній таблиці. Оскільки сума поставок та споживання однакова і дорівнює 113, ми маємо закрити транспортну задачу.

Сформуємо ці дані в . Відведемо окрему матрицю під значення обсягів перевезень X_{ij} з i -го постачальника до j -го споживача. Знайдемо суму всіх X_{ij} ,

оскільки це потрібно для формування обмежень виду (5.7) - (5.8). Знайдемо добуток всіх X_{ij} на C_{ij} та їх суму, щоб сформувавши цільову функцію виду (5.11).

		Споживачі, номер та обсяг споживання					
		1	2	3	4	5	
		15	35	22	18	23	
Постачальники, номер та обсяг поставок	1	25	2	6	3	4	6
	2	75	4	3	2	5	4
	3	13	6	4	3	4	3

Застосуємо функцію Solver і отримуємо рішення, яке показано в таблиці, що розташована нижче

		Споживачі					ΣX_{ij}
		1	2	3	4	5	
Постачальники	1	15	0	0	10	0	25
	2	0	35	22	5,1991	12,8009	75
	3	0	0	0	2,8009	10,1991	13
ΣX_{ij}		15	35	22	18	23	

Тут ми бачимо обсяги оптимальних перевезень з кожного постачальника на кожного споживача. Наприклад, з першого постачальника треба відправити на першого споживача 15 одиниць продукції, а на четвертого – 10. Мінімальна вартість усіх перевезень – 338 умовних одиниць.

Матрична постановка транспортної задачі виду (5.7) - (5.11) може бути сформульована як задача складення оптимального розкладу або задачу комівояжера. Проблема полягає у тому, щоб рух поміж точками маршруту було здійснено за мінімальний час або з мінімальними витратами, відвідуючи їх тільки один раз.

Введемо наступні умовні позначення: N - число секторів, з яких починається рух об'єкта; M – число секторів в яких закінчується рух об'єкта; C_{ij} – матриця витрат на перехід з i -го сектора в j -й, $j = 1..M$, $i = 1..N$; D_i – матриця кількості об'єктів, які мають вийти з i -го сектора; P_j – матриця кількості об'єктів, які мають прийти в j -й сектор; X_{ij} - матриця розкладу $X_{ij} = 1$, якщо здійснюється перехід з i -го сектора в j -й, Інакше $X_{ij} = 0$.

Критерій оптимальності – мінімум втрат на перехід з об'єкту на об'єкт

$$F(X) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M C_{ij} \cdot X_{ij} \cdot D_i \cdot P_j \rightarrow \min \quad (5.16)$$

$$\text{Обмеження} \quad \sum_{i=1}^N X_{ij} = P_j, i = 1..N \quad (5.17)$$

$$\sum_{j=1}^M X_{ij} = D_i, j = 1..M \quad (5.18)$$

$$X_{ij} = 0 \text{ або } 1 \quad (5.19)$$

Умова (5.17) означає, що установники з кожного сектора об'єкти виходять тільки один раз, умова (5.18) – в кожен сектор об'єкти заходять тільки один раз, умова (5.19) – матриця переходів має значення 0 або 1.

5.2.5. Динамічне програмування

Динамічне програмування – це математичний метод пошуку оптимального управління, спеціально пристосований до багатокрокових процесів.

Наприклад, хай планується діяльність групи підприємств на N років. Тут кроком є один рік. На початку 1-го року на розвиток підприємств виділяються кошти, які повинні бути якось розподілені між цими підприємствами. В процесі їх функціонування виділені кошти частково витрачаються. Кожне підприємство за рік приносить деякий дохід, залежний від вкладених засобів. На початку року наявні засоби можуть перерозподілятися між підприємствами. Кожному з них виділяється якась частка засобів.

Ставиться питання: як на початку кожного року розподіляти наявні засоби між підприємствами, щоб сумарний дохід від всіх підприємств за N років був максимальним?

Перед нами типова задача динамічного програмування, в якій розглядається керований процес – функціонування групи підприємств. Управління процесом полягає в розподілі (і перерозподілі) засобів. Управляючою дією (УД) є виділення якихось засобів кожному з підприємств на початку року.

УД на кожному кроці повинне вибиратися з урахуванням всіх його наслідків в майбутньому. Дійсно, припустимо, що в розглянутій групі підприємств одні зайняті випуском предметів споживання, а інші випускають для цього машини. Причому метою є отримання за N років максимального об'єму випуску предметів споживання.

У задачі динамічного програмування використовуватимуться наступні позначення: N – число кроків; $\bar{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$ – вектор, що описує стан системи на k -му кроці; \bar{x}_0 – початковий стан, тобто стан на 1-у кроці; \bar{x}_N – кінцевий стан, тобто стан на останньому кроці; X_k – область допустимих станів на k -му кроці; $\bar{u} = (u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{mk})$ – вектор УД на k -му кроці, який забезпечує перехід системи із стану x_{k-1} в стан x_k ; U_k – область допустимих УД на k -му кроці; W_k – величина виграшу, одержаного в результаті реалізації k -го кроку; S – загальний виграш за N кроків; $\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \dots, \bar{u}_N^*)$ – вектор оптимальної стратегії управління за N кроків; $S_{k+1}(\bar{x}_k)$ – максимальний виграш, одержуваний при переході з будь-якого стану \bar{x}_k у кінцевий стан \bar{x}_0 при оптимальній стратегії управління починаючи з k -го кроку; $S_1(\bar{x}_0)$ – максимальний виграш, одержуваний за N кроків під час переходу системи з початкового стану \bar{x}_0 у кінцеве \bar{x}_N при реалізації оптимальної стратегії управління \bar{u}^* . Очевидно, що $S = S_1(\bar{x}_0)$, якщо \bar{x}_0 – фіксовано.

Метод динамічного програмування спирається на умову відсутності післядії і умову адитивності цільової функції.

Умова відсутності післядії. Стан \bar{x}_k , в яке перейшла система за один k -й крок, залежить від стану \bar{x}_{k-1} і вибраної УД \bar{u}_k і не залежить від того, яким чином система прийшла в стан \bar{x}_{k-1} ,

$$\bar{x}_k = \bar{f}_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \quad (5.20)$$

Аналогічно, величина виграшу W_k залежить від стану \bar{x}_{k-1} і вибраного УД \bar{u}_k

$$W_k = W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \quad (5.21)$$

Умова адитивності цільової функції. Загальний виграш за N кроків обчислюється за формулою

$$S = \sum_{k=1}^N W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \quad (5.22)$$

Приклад. У таблиці, наведеній нижче, відображені п'ять проектів, яка конкурують між собою за отримання інвестиційних фондів компанії. Ми бачимо, яка готівка буде отримана на вкладення однієї гривні.

Рік	Ефективність інвестиційного проекту на одну вкладену гривню				
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
Перший	-1,00	0	-1,00	-1,00	0
Другий	+0,30	-1,00	+1,00	0	0
Третій	+1,00	+0,30	0	0	-1,00
Четвертий	0	+1,00	0	+1,75	+1,40

Наприклад, проект *A* - це інвестиції, які можна зробити на початку першого року на два наступних роки, причому в кінці цього ж року можна повернути 30 копійок на вкладений долар, а в кінці наступного року можна додатково отримати ще 1 грн. Максимальна сума, яка може бути вкладена в цей проект, становить 500 000 грн. Проект *B* – повністю аналогічний –, але вкладення грошей можна зробити тільки на початку наступного року і т.д.

Гроші, отримані внаслідок інвестицій, можна реінвестувати згідно з запропонованою схемою. У доповнення до цього компанія може отримувати по 6 % річних за короткостроковий внесок всіх грошей, які не були вкладені в інвестиції у даному році. У компанії є 1 000 000 грн. для інвестицій. Вона хоче максимізувати суму грошей, накопичених до кінцевого періоду. Сформулюємо задачу лінійного програмування.

Побудуємо економіко-математичну модель і приведемо отримане оптимальне рішення. Позначення: a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 - інвестиції в проекти *A, B, C, D, E* відповідно; індекси 1, 2, 3 вказують перший, другий і третій роки вкладення інвестицій; s_1, s_2, s_3 - суми, які можна покласти під короткострокові 6% відповідно в першому, другому, третьому роках.

Економіко-математична модель:

а) в проект *A* в перший рік не може бути вкладено більше за 500 000 грн.:

$$a_1 \leq 500\,000;$$

б) оскільки у компанії є 1 000 000 грн., то у всі проекти ця сума повинна бути вкладена в першому році (інакше до кінцевого періоду компанія не

- максимізує своїх накопичень): $a_1 + c_1 + d_1 + s_1 = 1\,000\,000$;
 в) аналогічний баланс на другий рік: $0,3a_1 + 1,1c_1 + 0,6s_1 = b_2 + s_2$
 г) аналогічний баланс на третій рік: $a_1 + 0,3b_2 + 1,06s_3 = e_3 + s_3$;
 д) максимальний прибуток до кінцевого періоду:

$$b_2 + 1,75d_1 + 14e_3 + 1,06s_3 \rightarrow \max;$$

Отримане оптимальне рішення: $a_1 = 500\,000$ грн.; $d_1 = 500\,000$ грн.; $e_3 = 659\,000$ грн.; $s_2 = 150\,000$ грн. Максимальний прибуток до кінцевого періоду є 1 797 600 грн., що вказує на високу ефективність інвестиційного процесу (приріст на 79,76 %). Інші не приведені значення вказаних змінних моделі дорівнюють нулю.

5.3. Багатокритеріальні задачі

Лише в окремих випадках мета, яку особа, що ухвалює рішення (ОУР) прагне досягти в планованій їм операції, вдається описати за допомогою одного кількісного показника. Різноманіття цілей ОУР адекватніше може бути описане за допомогою деякої сукупності часткових критеріїв (ч-критеріїв), що характеризують ступінь досягнення окремих цілей. Суперечливий характер цілей обумовлює, як правило, і суперечність ч-критеріїв. З формальної точки зору це призводить до того, що свої екстремальні значення ч-критерії одержують в різних точках області допустимих рішень (ОДР) – Dx . Отже, ОУР приймаючи рішення, завжди повинен йти на компроміс, в розумних межах допускаючи погіршення значень одних ч-критеріїв в ім'я поліпшення значень інших. Рішення, що приймається ОУР із залученням сукупності ч-критеріїв, називатимемо компромісним, раціональним або просто рішенням ОУР.

Основна ідея обґрунтування і ухвалення рішення ОУР в умовах багатокритеріальності полягає в послідовному звуженні ОДР Dx до мінімальних розмірів, що полегшує ухвалення остаточного рішення ОУР. Першим, найістотнішим кроком в цьому напрямі буде звуження ОДР Dx до деякої підмножини $Dx^p \subset Dx$.

5.3.1. Формальна постановка багатокритеріальної задачі

Формальна схема багатокритеріальної задачі математичного програмування від звичної відрізняється наявністю декількох цільових функцій

$$L^r(x) = \sum_{j=1}^n c_j^r \cdot x_j + c_0^r \rightarrow \max_x, \quad r = \overline{1; R}, \quad (5.23)$$

$$D_x \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq -b_i, \Rightarrow \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, i = \overline{1; m}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1; n}, \end{cases} \quad (5.24)$$

де e_i – ненегативні змінні, $i = 1; m$).

Знак \max означає той факт, що бажаним є збільшення кожного з критеріїв оптимізації $Lr(x)$, що відображає деяку r -у мету задачі.

Вимога тільки максимізації не звужує загальності задачі. Так, наприклад, вимога мінімізації витрат деяких ресурсів еквівалентна вимозі максимізації залишку від спочатку виділених ресурсів. Наявність багатьох ч-критеріїв дозволяє зробити модель (5.23)-(5.24) адекватній економіко-математичній системі, що вивчається, проте виводить її з класу задач математичного програмування і вимагає розробки нових способів її аналізу. Рішення x' домінує рішення x ($x' > x$), якщо при x' хоча б один ч-критерій має більше значення при рівності інших. Тому рішення x може бути виключене з подальшого розгляду, як явно гірше, ніж x' . Якщо рішення x , не домінує із жодним з рішень $x \in Dx$, то його називають Парето-оптимальним (π - оптимальним) або ефективним рішенням (π - рішенням). Таким чином, π -рішення – це не краще (таке, що не домінує) рішення, і ясно, що рішення задачі повинно володіти цією властивістю – інші рішення немає сенсу розглядати.

Формальне визначення π -оптимальності рішення x' записується як вимога про відсутність такого рішення $x \in Dx$, при якому б були виконані умови

$$L^r(x) \geq L^r(x'), \forall r, \quad (5.25)$$

і хоча б одне з них – строго (зі знаком $>$).

Іншими словами, умови (5.25) виражають вимогу неможливості поліпшення рішення x' в межах ОДР Dx ні по одному ч-критерію без погіршення хоча б по одному з інших.

5.3.2. Зведення до задачі математичного програмування

Щоб можна було перевірити умову (3.18) для деякої довільно узятої точки x' , не вдаючись до попарного порівняння з іншими, умову, сформулюємо її у вигляді наступної задачі математичного програмування

$$d^r = L^r(x) - L^r(x') = \sum_{j=1}^n c_j^r x_j - \sum c_j^r x'_j, \forall d^r, \quad (5.26)$$

$$\Delta = \Delta(x) = \sum_{r=1}^R d^r \rightarrow \max_x, \quad (5.27)$$

$$x \in D_x, \forall x_j \geq 0. \quad (5.28)$$

Значення задачі математичного програмування неважко зрозуміти, якщо врахувати, що d^r – це приріст ч-критерію Lr , одержаний при зсуві рішення x' в точку x . Тоді, якщо після рішення задачі виявиться $D_{max} = 0$, то це означатиме, що жоден з ч-критеріїв не можна збільшити, якщо не допускати зменшення будь-якого з інших ($\forall d^r \geq 0$). Але це і є умова π -оптимальності x' . Якщо ж при рішенні виявиться, що $D \geq 0$, то значить якийсь ч-критерій збільшив своє значення без погіршення значень інших ($\forall d^r \geq 0$), і значить $x' \notin D^p_x$.

Приклад. Дані цільові функції:

$$L_1 = -x_1 + 2x_2 + 2, \quad L_2 = x_1 + x_2 + 4, \quad L_3 = x_1 - 4x_2 + 20,$$

і система обмежень:

$$x_1 + x_2 \leq 15, \quad 5x_1 + x_2 \geq 1, \quad -x_1 + x_2 \leq 5, \quad x_2 \leq 20, \quad \forall x_j \geq 0.$$

Перетворимо цільові функції в одну, згідно з (5.26) - (5.28):

$$\delta^1 = x_1 - 2x_2 + 1, \quad \delta^2 = x_1 + x_2 - 8, \quad \delta^3 = -x_1 + 4x_2 - 7,$$

$$D = x_1 + 3x_2 - 14 \rightarrow \max.$$

Тепер ми маємо одну цільову функцію, яку і можемо вирішити за допомогою функції Solwer: $x_1 = 5, x_2 = 10, D = 21$.

5.3.3. Метод гарантованого результату

При будь-якому довільному рішенні $x \in Dx$ кожний з ч-критеріїв прийме певне значення і серед них знайдеться, принаймні, один, значення якого буде

$$\text{якнайменшим} \quad j = j(x) = \min_{1 \leq r \leq R} L^r(x) \rightarrow \max_x. \quad (5.29)$$

Метод гарантованого результату дозволяє знайти таке гарантоване рішення, при якому значення «якнайменшого» критерію стане максимальним. Таким чином, цільова функція (ЦФ) є деякою згортокою ч-критеріїв (5.29), а рішення зводиться до задачі частково-опуклого програмування при ОДР Dx , заданої лінійними обмеженнями.

Приклад. Для прикладу з п.5.3.2, застосувати метод гарантованого результату. Для цього вирішимо три задачі лінійного програмування з трьома різними критеріями оптимізації та з однаковими обмеженнями.

Застосувавши функцію Solwer, отримуємо, що при пошуку максимуму для L_1 та L_2 , значення змінних параметрів буде однаковим $x_1 = 5, x_2 = 10$. При цьому $L_1 = 17, L_2 = 19$. А при пошуку максимальних значень відносно L_3 , отримуємо $x_1 = 53687096, x_2 = -2,1 \cdot 10^8, L_3 = 9,1 \cdot 10^8$. Отже, згідно з принципу (5.29) останнє рішення треба відкинути і взяти перше.

5.3.4. Метод згортки часткових критеріїв

Лінійна згортка ч-критеріїв виходить як x сума з деякими ваговими кое-

$$\text{фіцієнтами } m_r \quad L(x) = \sum_{r=1}^R m_r L^r(x), \quad (5.30)$$

Коефіцієнти ваги звичайно знаходять шляхом опиту експертів з відповідної наочної області. Оскільки вектор $m = (m_r)$ – суть вектор-градієнт $L^m(x)$, то припускається, що він указує напрям до екстремуму невідомої функції корисності. Найкращою лінійна згортка ч-критеріїв може виявитися у тому випадку, коли ч-критерії однорідні і мають єдиний еквівалент, що погоджує їх найбільш природним чином. Позитивна сторона такого підходу – нескладність, не завжди компенсує його серйозний недолік – втрату фізичного значення лінійної згортки різнорідних ч-критеріїв. Це утрудняє інтерпретацію результатів, тому одержане таким шляхом рішення, слід розглядати тільки як можливий (альтернативний) варіант рішення задач лінійного програмування.

Для його порівняльного аналізу слід привертати будь-які інші варіанти і, звичайно, значення ч-критеріїв, одержувані при цьому.

Іноді при отриманні згортки ч-критеріїв заздалегідь нормуються наступним способом:

1. Знаходиться часткове рішення за кожним з критеріїв окремо.
2. Оптимальне значення кожного критерію $L_{OPT}^r(x)$ використовується для

$$\text{подальшого нормування критеріїв} \quad \frac{L^r(x) - L_{OPT}^r(x)}{L_{OPT}^r(x)} \quad (5.31)$$

Таке нормування зводить різні критерії в один масштаб.

3. Нормовані значення критеріїв зводяться в один функціонал, для якого і знаходиться його мінімальне значення.

Цей принцип можна застосовувати до будь-якого виду цільових функцій та обмежень: як лінійних так і нелінійних.

Принципи зведення не нормованих критеріїв в один функціонал залежать від того, куди прагне кожен ч-критерій:

1. Якщо всі критерії прагнуть максимуму, достатньо утворити їх суму з ваговими коефіцієнтами.
2. Якщо є критерії, що прагнуть мінімуму, потрібно їх перетворити на такі, що прагнуть максимуму $L_{MAX}^r(x) = \frac{1}{L_{MIN}^r(x) + 1}$. Далі утворюється сума ч-критеріїв з ваговими коефіцієнтами, яка буде цільовою функцією, що прагне максимуму.

Одиниця у знаменнику додана для випадку, коли $L_{MIN}^r(x)$ у своєму русі до оптимуму буде проходити через нуль, що викличе зупинку процесу пошуку екстремуму.

3. Як варіант, можливе утворення функціоналу виду (5.32), де в чисельнику стоять ч-критерії, що прагнуть максимуму, а у знаменнику, такі, що прагнуть мінімуму.

$$L(x) = \frac{\sum_{r=1}^R m_j L_{MAX}^r(x)}{\sum_{r=1}^R m_j L_{MIN}^r(x) + 1}, \quad (5.32)$$

Приклад.

Знайти оптимальний план співвідношень продукції (соків та вина), яку накопичує на складі торгова фірма, з урахуванням статистичних досліджень попиту. Умовні позначення: X_i - вид товарної групи (асортиментна позиція); m - кількість місяців; Q_1, Q_2 - нижня й верхня межі обсягів товарообігу для складу; P_{1i} - ціна покупки одиниці товару; P_{2i} - ціна реалізації одиниці товару; k_1 - собівартість плюс додаткові витрати на зберігання 1 шт продукту, який не був проданий у встановлений час, оскільки попит на нього виявився меншим від того, що прогнозується; k_2 - утрата прибутку на 1 шт продукту, зумовлена відсутністю товару, попит на який перевищив замовлену кількість; Параметри ящика: l - довжина; h - висота; w - ширина; $S_{од}$ - площа, що займає одиниця продукції (ящик); $X_{заг.ск}$ - загальна кількість ящиків, що можуть розміщатись на складі одночасно; $X_{опт}$ - оптимальний (розрахункова) кількість товару і-того виду на

складі; $C_{збі}$ – вартість зберігання товару i –того виду; $C_{прі}$ – прибуток від реалізації одиниці товару i –того виду.

Статистичний метод розрахунку оптимального запасу продукції базується на спостереженнях за попитом товару протягом певного часу.

На підставі цього спостереження будується емпірична функція розподілу вигляду

$$F(X) = P(x < X), \quad (5.33)$$

де P – імовірність того, що попит – x – буде менше наперед заданого значення X .

Тоді оптимальний попит (X_{opt}) буде знайдено за оптимальним значенням цієї функції, який розраховується за

$$F(X_{opt}) = C_{прі} / (C_{збі} + C_{прі}). \quad (5.34)$$

Потрібне вирішення відносно (X_{opt}). Оскільки, частіше всього емпірична функція розподілу описується логарифмічно функцією виду

$$F(X_{opt}) = a + b \ln(X_{opt}), \quad (5.35)$$

де a, b – константи,

рішення має вигляд

$$X_{opt} = \exp\left(\frac{1}{b} \left(\frac{C_{прі}}{C_{збі} + C_{прі}} - a \right)\right). \quad (5.36)$$

Торгове підприємство має обмежену площу складу (S) і номенклатуру продукції з n найменувань, які представлені на складі у кількості x_i . Для кожного найменування відомо площу, яку займає одиниця продукції s_i ($1 < i < n$).

В цих умовах задача стає багатокритеріальною. З одного боку потрібно, щоб прибуток

$$Pr = \sum_{i=1}^n k_{1i} x_i, \quad (5.37)$$

був максимальним. З іншого боку бажано, щоб різниця між оптимальним значенням запасу продукції і реальним

$$Oz = \sum_{i=1}^n \left| x_i - \exp\left(\frac{1}{b_i} \left(\frac{C_{прі}}{C_{збі} + C_{прі}} - a \right)\right) \right|, \quad (5.38)$$

була б мінімальною. Знак „по модулю” означає, що відхилення x_i від оптимального запасу може бути в обидва боки. Обмеженням тут виступає

загальна площа складу

$$S = \sum_{i=1}^n s_i x_i. \quad (5.39)$$

Для вирішення цієї задачі пропонується функціонал виду

$$\frac{Pr}{Oz + 1} \rightarrow \max \quad \text{або} \quad \frac{\sum_{i=1}^{19} k_{1i} x_i}{\sum_{i=1}^{19} \left[\frac{k_{1i}}{k_{1i} + k_{2i}} - (a + b \ln x_i) \right] + 1} \rightarrow \max \quad (5.40)$$

з обмеженнями на площу (загальна площа складських приміщень в цьому обмеженні множиться на 5, так як, піддони з ящиками можна ставити один на

один у висоту, але не більше 5 штук)
$$\sum_{i=1}^n s_i x_i \leq 5S, \quad (5.41)$$

та на ненегативні значення кількості кожного виду продукту.

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0 \\ (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Введемо додаткові обмеження на верхні та нижні межі товарообігу на складі

$$Q_{1i} \leq x_i \leq Q_{2i} \quad (3.40)$$

Вирішення подібної задачі для торгового підприємства, яке має номенклатуру з 19 продуктів і обмежений склад було виконано за допомогою функції «пошук рішення» . Емпіричні функції розподілу було розраховано за спостереженнями попиту продукту протягом 1 року. Результати рішення показали можливість отримання додаткового прибутку 125343 грн. за рік.

5.3.5. Складання зведеної таблиці

Як видно з пп. 5.3.1-5.3.4, остаточне прийняття рішення про те, як використовувати отримані результати вирішення оптимізації багатокритеріальних задач, має приймати особа, що ухвалює рішення.

Для цього всі рішення зводиться в таблицю, де записуються альтернативні варіанти. Розглядаючи таблицю, ОУР визначається з тим, який з варіантів влаштовує його найбільше, або найменш ризикованим.

Приклад . Зведена таблиця оптимізації багатокритеріальних задач за попередніми прикладами з пп. 5.3.1-5.3.4.

Метод	Оптимальні значення змінних параметрів, x_0	Критерії оптимізації			Сума оптимальних значень критеріїв L^S
		L_1	L_2	L_3	
Метод гарантованого результату	(27/2 ; 3/2)	25/2	19	25/2	44
Метод згортки	(28/3;17/3)	0	19	33 1/3	52 1/3
Оптимізація L_1	(15;0)	17	19	5	41
Оптимізація L_2, L_3	(28/3;17/3)	0	19	33 1/3	52 1/3
$x \notin D_x^\pi$	(5;3)	1	12	-13	0

Як видно з таблиці, метод згортки та оптимізація L_2, L_3 забезпечують найбільше значення суми оптимальних значень критеріїв. Такий результат може спонукати ОУР до вибору цих рішень, але при цьому L_1 дорівнює нулю, що порушує принцип π - оптимальності. Тому рішення, як це було сказано раніше, залишається на розсуд ОУР.

5.4. Оптимізація конфліктних ситуацій в економіці (теорія ігор)

Звичайно теорію гри визначають як розділ математики для вивчення конфліктних ситуацій. Це означає, що можна виробити оптимальні правила поведінки кожної сторони, що бере участь у рішенні конфліктної ситуації.

Гра – спрощена формалізована модель реальної конфліктної ситуації. Математично формалізація означає, що вироблені певні правила дії сторін в процесі гри: варіанти дії сторін; вихід гри при даному варіанті дії; обсяг інформації кожної сторони про поведінку всіх інших сторін. Виграш або програш сторін оцінюється чисельно. Гравець - це одна зі сторін в ігровій ситуації. Стратегія гравця - це його правила дії в кожній з можливих ситуацій гри.

Платіжна матриця (матриця ефективності, матриця гри) включає всі значення виграшів (в кінцевій грі). Нехай гравець 1 має m стратегій A_i гравець 2 - n стратегій B_j ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$). Гра може бути названа грою m/n . Подамо матрицю ефективності гри двох осіб.

Гравець 2	B_1	B_2	B_n	α_i
Гравець 1					
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	α_2
.....
A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	β_n	

У даній матриці елементи a_{ij} - значення виграшів гравця 1 - можуть означати й математичне сподівання виграшу (середнє значення), якщо виграш є випадковою величиною. Величини α_i , $i = \overline{1, m}$, и β_j , $j = \overline{1, n}$, - відповідно мінімальні значення елементів a_i по рядках і максимальні - по стовпцях.

Ігри діляться на кінцеві й нескінченні. У кінцевій грі кожний з гравців має кінцеве число можливих стратегій. Якщо хоч би один з гравців має нескінченне число можливих стратегій, гра є нескінченною.

Ще ігри діляться на кооперативні, коаліційні і некоаліційні. Якщо гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції, то така гра відноситься до некоаліційних; якщо гравці можуть вступати в угоди, створювати коаліції - коаліційних. Кооперативна гра – це гра, в якій заздалегідь визначені коаліції.

Ігри можна розділити на одноходові та багатходові. Одноходові ігри закінчуються після одного ходу кожного гравця. Так, в матричній грі після одного ходу кожного з гравців відбувається розподіл виграшів.

5.4.1. Антагоністична гра

Розглянемо антагоністичну гру, представлену матрицею виграшів $m \times n$, де число рядків $i = \overline{1, m}$, а число стовпців $j = \overline{1, n}$. Застосуємо принцип отримання максимального гарантованого результату при найгірших умовах. Гравець 1

прагне прийняти таку стратегію, яка повинна забезпечити максимальний програш гравця 2. Відповідно гравець 2 прагне прийняти стратегію, що забезпечує мінімальний виграш гравця 1. В цих умовах, якщо

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = v. \quad (5.41)$$

гра називається грою з «сідловою» точкою і гравці мають дотримуватися стратегій, які її забезпечують, і називаються «чистими», а v – називається ціною гри.

Якщо в матричній грі відсутня сідлова точка, то знаходять «змішану» стратегію гравців, тобто набір застосування його чистих стратегій при багаторазовому повторенні гри в одних і тих же умовах із заданими ймовірностями. Для гравця 1 змішана стратегія полягає в застосуванні чистих стратегій A_1, A_2, \dots, A_m з відповідними ймовірностями (частотою) p_1, p_2, \dots, p_m ,

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad \text{де } \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0 \quad (5.42)$$

Для гравця 2

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \quad \text{де } \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0; \quad (5.43)$$

q_j - імовірність застосування чистої стратегії B_j .

Чисті стратегії гравця є єдино можливими неспільними подіями. У матричній грі, знаючи матрицю A (вона відноситься й до гравця 1, і до гравця 2), можна визначити при заданих векторах \bar{p} і \bar{q} , середній виграш (математичне споді-

вання ефекту) гравця 1

$$M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j, \quad (5.44)$$

де \bar{p} і \bar{q} , - вектори; p_i і q_j - компоненти векторів.

Потрібно зазначити, що при виборі оптимальних стратегій гравцеві 1 завжди буде гарантований середній виграш, не менший, ніж ціна гри, при будь-якій фіксованій стратегії гравця 2 (і, навпаки, для гравця 2). Активними стратегіями гравців 1 і 2 називають стратегії, що входять до складу оптимальних змішаних стратегій відповідних гравців зі ймовірностями, відмінними від нуля. Значить, до складу оптимальних змішаних стратегій гравців можуть входити не всі апріорі задані їх стратегії.

Приклади. Приклад 1. Визначити верхню та нижню ціни при заданій матриці гри і указати максимінну і мінімаксу стратегії. Представимо матрицю гри з позначеннями стратегій, A_j, B_i ;

Визначимо нижню ціну гри: $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 4; \alpha = 4$ (див. стовпець α_i).

	B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_i					
A_1		1	1	3	1
A_2		4	5	6	4
β_j		4	5	6	

Визначимо верхню ціну гри: $\beta_1 = 4$; $\beta_2 = 5$; $\beta_3 = 6$; $\beta = 4$ (див. рядок β_j).
 Таким чином, $\alpha = \beta = 4$, тобто $\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = 4$.

Значить, $\alpha = \beta = v = 4$ - чиста ціна гри при стратегіях A_2 і B_1 . Отже, маємо гру з сідловою точкою.

Приклад 2. Дана матриця гри $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти її змішані стратегії.

Побудуємо цільову функцію згідно (5.44)

$$M(A, \bar{p}, \bar{q}) = 25p_1q_1 + p_1q_2 + 3p_2q_1 + 5p_2q_2 + p_3q_1 + 9p_3q_2 \rightarrow \max,$$

та враховуючи обмеження (5.42) - (5.43), знайдемо оптимальні значення ймовірностей застосування різних стратегій, застосувавши функцію Solver. Рішенням цієї гри є те, що всі ймовірності дорівнюють нулю, окрім $p_1 = 1$ $q_1 = 1$. Отже ця гра повинна виконуватися у чистих стратегіях.

5.4.2. Кооперативна гра

Оптимальні стратегії у випадку, коли учасники гри є співробітниками, знаходяться методами біматричної гри. По аналогії з матричними іграми двох осіб в біматричній грі кожен з гравців вибирає свою стратегію, робить один хід, після чого відбувається розподіл виграшів. Відмінність полягає в тому, що біматрична гра визначається не однією, а двома матрицями виграшів. Кожен з гравців має свою матрицю, і виграш один з них зовсім не означає програш іншого.

Хай матриці виграшів першого і другого гравців мають відповідно вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обидві матриці можуть бути представлені однією матрицею пар елементів

A і B , так званою біматрицею
$$C = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \dots & (a_{1j}, b_{1j}) & \dots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{i1}, b_{i1}) & (a_{i2}, b_{i2}) & \dots & (a_{ij}, b_{ij}) & \dots & (a_{in}, b_{in}) \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \dots & (a_{mj}, b_{mj}) & \dots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}.$$

При виборі першим гравцем i -го рядка, а другим гравцем j -го стовпця виграш кожного з них складе пару (a_{ij}, b_{ij}) .

Природно, інтерес представляють ігри, в яких матриці A і B не співпадають і елементами однієї матриці не є монотонні перетворення іншої. Якщо ця умова не дотримана, то деякому максимальному елементу a_{kl} матриці A відповідає максимальний елемент b_{kl} матриці B . Це означає, що існує пара чистих стратегій (k, l) при використанні яких обох гравців мають максимальний виграш і конфлікт відсутній. У решті випадків досягти максимуму свого виграшу відразу обидва гравці не можуть. Необхідно ввести деяку ознаку компромісної оп-

тимальності, якою є ситуація рівноваги. Під ситуацією маються на увазі конкретні використані змішані стратегії x, y .

Ситуація рівноваги для біматричної гри представляється парою таких змішаних стратегій x, y при яких дотримуються нерівності:

$$M_1^i \leq M_1, \quad i = \overline{1, m}; \quad M_2^j \leq M_2, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.45)$$

де M_1^i – математичне сподівання виграшу першого гравця при застосуванні ним тільки i -ї стратегії; M_2^j – математичне сподівання виграшу другого гравця при застосуванні j -ї чистій стратегії.

Змістовний сенс нерівностей (5.45) полягає в тому, що застосування чистих стратегій будь-яким з гравців дає не більший ефект, чим застосування змішаних стратегій (x, y) обома гравцями.

Оскільки (x, y) є розподілами вірогідності використання чистих стратегій гравцями, то очевидно, що

$$M_1^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i = \overline{1, m}; \quad M_2^j = \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.46)$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j; \quad M_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j.$$

Підставивши в нерівності (5.45) значення математичних сподівань з формул (5.46), отримаємо

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \quad i = \overline{1, m}; \quad (5.47)$$

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.48)$$

Відмітимо, що (x, y) є по фізичній суті вірогідністю вибору чистих стратегій, а можливі результати вибору стратегій кожним з гравців складають повну групу несумісних подій. Тому значення елементів (x, y) повинні задовольняти

умовам
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i = 1; & x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1; & y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (5.49)$$

Визначення ситуацій рівноваги здійснюється шляхом сумісного вирішення системи нерівностей і рівнянь (5.47) – (5.49).

Приклад. Нехай існують матриці виграшів кооперативної гри

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & 12 & 45 & 65 \\ \hline & 45 & 4 & 48 \\ \hline & 12 & 47 & 14 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & 122 & 752 & 124 \\ \hline & 456 & 485 & 459 \\ \hline & 478 & 258 & 254 \\ \hline \end{array}$$

Знайти оптимальні стратегії для обох гравців.

На рис. 5.6 представлено повний хід рішення цієї задачі, в якій було застосовано метод згортки часткових критеріїв (5.30)-(5.32). Жовтим виділено оптимальні частоти застосування стратегій для кожного гравця. При цьому виграш першого гравця складе 27, а другого – 459. Оптимальними стратегіями є $X = \{0; 0,88; 0,12\}$, $Y = \{0,6; 0,4; 0\}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Max(A)=	65										
2	Max(B)=	752			SX=	1		SY=	1			
3					X	$\Sigma A_{ij}Y_j$			Y	0,6	0,4	-0
4		12	45	65	0	26,3				122	752	124
5	A=	45	4	48	0,88	27,2			B=	456	485	459
6		12	47	14	0,12	27,2				478	258	254
7								$\Sigma B_{ij}X_i$ =		459	459	435
10	$\Sigma \Sigma A_{ij}X_iY_j$ =	27										
11	$\Sigma \Sigma B_{ij}X_iY_j$ =	459										
12	Функціонал=	1										

Рис. 5.6. Рішення біматричної задачі із застосуванням функції «Пошук рішення»

5.4.3. Ігри з природою

Нерідко економічна ситуація є унікальною, і рішення в умовах невизначеності повинно прийматися одноразово. Це породжує необхідність розвитку методів моделювання прийняття рішень в умовах невизначеності і ризику. Традиційно наступним етапом такого розвитку є гра з природою. Формальне вивчення гри з природою, так само як і стратегічних, повинно починатися з побудови платіжної матриці.

Помітна особливість гри з природою полягає в тому, що в ній свідомо діє тільки один з учасників, у більшості випадків званий гравцем 1. Гравець 2 (природа) свідомо проти гравця 1 не діє, а виступає як така, що не має конкретної мети і партнер по грі, що випадковим чином вибирає чергові «ходи». Тому термін «природа» характеризує деяку об'єктивну дійсність, яку не треба розуміти буквально, хоч цілком можуть зустрітися ситуації, в яких «гравцем» 2 дійсно може бути природа (наприклад, обставини, пов'язані з погодними умовами або з природними стихійними силами).

На перший погляд відсутність обдуманого протидії спрощує гравцеві задачу вибору рішення. Однак, хоч ОУР ніхто не заважає, їй важче обґрунтувати свій вибір, оскільки в цьому випадку гарантований результат не відомий.

Нехай гравець 1 має m можливих стратегій: A_1, A_2, \dots, A_m , а у природі є n можливих станів (стратегій): $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$. Тоді умови гри з природою задаються матрицею A виграшів гравця 1.

Платить, звичайно, не природа, а деяка третя сторона (або сукупність сторін, що впливають на прийняття рішень гравцем 1 і об'єднаних у поняття «природа»).

$$A = \begin{pmatrix} & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Можливий ще й інший спосіб завдання матриці гри з природою: не у вигляді матриці виграшів, а у вигляді так званої матриці ризиків $R = \|r_{ij}\|_{m,n}$ або матриці упущених можливостей. Величина ризику – це розмір плати за відсутність інформації про стан середовища. Матриця R може бути побудована безпосередньо з умов задачі або на основі матриці виграшів A . Ризиком r_{ij} гравця при використанні ним стратегії A_i і при стані середовища Π_j будемо називати різницю між виграшем, який гравець отримав би, якби він знав, що станом середовища буде Π_j , і виграшем, який гравець отримає, не маючи цієї інформації. Тобто,

$$R_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}. \quad (5.50)$$

Знаючи стан природи (стратегію) Π_j , гравець вибирає ту стратегію, при якій його виграш максимальний, тобто $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, де $\beta_j = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$ при заданому j .

Прийняття рішень, якщо відомі ймовірності стану природи. p_j , вибір оп-

тимальної стратегії активного гравця визначається як $a = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j$, (5.51)

Тобто, знаходиться середнє по рядку платіжної матриці гри і обирається та стратегія, яка дає найбільше середнє значення.

В деяких випадках ймовірності настання певних станів природи подаються обумовлені, що точність визначення цих ймовірностей менше 100%. Частіше, для кожного стану природи Π_j вказується своя точність розрахунку ймовірності його стану t_j , яка як і ймовірність змінюється в діапазоні від 0 до 1 (від 0% до 100%). У цьому випадку, вибір оптимальної стратегії активного гравця визна-

чається із залученням матриці ризиків r_{ij} $a = \max_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} p_j t_j - \sum_{j=1}^n r_{ij} p_j (1-t_j) \right)$, (5.52)

Тобто, при визначенні середнього, його складові коректуються на величину точності визначення його ймовірності. В той же час визначається середній ризик, скоректований на можливий рівень не точності визначення станів природи. Відповідні значення середнього виграшу і середнього ризику віднімаються по рядках, а потім обирається та стратегія, яка дає найбільший результат.

Прийняття рішень в умовах повної невизначеності, пов'язане з відсутністю інформації щодо ймовірності станів середовища (природи), називають «безнадійною» або «поганою». У таких випадках для визначення найкращих рішень використовуються наступні критерії.

Критерій максимакса. З його допомогою визначається стратегія, яка максимізує максимальні виграші для кожного стану природи. Це критерій

крайнього оптимізму. Найкращим признається рішення, при якому досягається максимальний виграш, рівний $M = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$. Потрібно зазначити, що ситуації, що вимагають застосування такого критерію, в економіці загалом нерідкі, і користуються ними не тільки оптимісти, але й гравці, поставлені в безвихідне становище, коли вони вимушені керуватися принципом «або пан, або пропав».

Максимінний критерій Вальда. З позицій даного критерію природа розглядається як агресивно настроєний і свідомо діючий противник типу тих, які протидіють у стратегічній грі. Вибирається рішення, для якого досягається значення $W = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$. Це перестраховочна позиція крайнього песимізму, розрахована на гірший випадок. Така стратегія прийнятна, наприклад, коли гравець не так зацікавлений у великому успіху, але хоче себе застрахувати від несподіваних програшів. Вибір такої стратегії визначається відношенням гравця до ризику.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Вибір стратегії аналогічний вибору стратегії за принципом Вальда з тією відмінністю, що гравець керується не матрицею виграшів A , а матрицею ризиків R):

$$S = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij}.$$

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца. Цей критерій при виборі рішення рекомендує керуватися деяким середнім результатом, що характеризує стан між крайнім песимізмом і нестримним оптимізмом. Згідно з цим критерієм стратегія в матриці A вибирається у відповідності зі значенням $H_A = \max_{1 \leq i \leq m} \{p \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} + (1-p) \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}\}$, де p - коефіцієнт песимізму ($0 \leq p \leq 1$). При $p=0$ критерій Гурвіца співпадає з максимаксним критерієм, а при $p=1$ - з критерієм Вальда.

Коли за прийнятим критерієм рекомендується до використання декілька стратегій, вибір між ними робиться за додатковим критерієм, наприклад в розрахунок можуть прийматися середні квадратичні відхилення від середніх виграшів при кожній стратегії. Вибір може залежати від схильності до ризику ОУР.

Приклади.

Приклад 1. Директор фірми повинен вирішити, скільки ящиків товару потрібно виробляти протягом місяця. Імовірності того, що попит на товар протягом місяця буде 6, 7, 8 або 9 ящиків, становить відповідно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1.

Витрати на виробництво одного ящика є 45 грн. Фірма продає кожний ящик по ціні 95 грн. Якщо ящик з товаром не продається протягом місяця, то він псується й фірма не отримує прибутку. Скільки ящиків потрібно виробляти протягом місяця?

Користуючись початковими даними, будуємо матрицю гри. Стратегіями гравця 1 (тобто, фірми) є різні показники числа ящиків, які йому, можливо, потрібно виробляти. Станами природи виступають величини попиту на аналогічне число ящиків. Обчислимо, наприклад, показник прибутку, який отримає виробник, якщо він зробить 8 ящиків, а попит буде тільки на 7. У результаті отримаємо наступну платіжну матрицю в грі з природою (див. таблицю). Як бачимо, найбільший середній очікуваний прибуток є 352,5 грн. Він відповідає виробництву 8 ящиків.

На практиці частіше за все в подібних випадках рішення приймаються виходячи з критерію максимізації середнього очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат. Обираючи такий підхід, можна зупинитися на рекомендації проводити 8 ящиків, і для більшості ОУР рекомендація була б обґрунтованою. Саме так поступаємо ми, коли розглядаємо різні прикладні задачі прийняття рішень у грі з природою.

Попит на ящики	6 (0,1)*	7 (0,3)	8 (0,5)	9 (0,1)	Середній очікуваний прибуток
Виробництво ящиків					
6	300	300	300	300	300
7	255	350	350	350	340,5
8	210	305	400	400	352,5
9	165	260	355	450	317

* У дужках приведена ймовірність попиту на ящики.

Приклад 2. В умовах повної невизначеності знайти найкращу стратегію за наведеною нижче матрицею. Наступна матриця – ризиків, розрахована за (5.50)

Для гравця 1 кращими є стратегії:

- за критерієм Вальда A_3 ;
- за критерієм Севіджа A_2 і A_3 ;
- за критерієм Гурвіца (при $p=0,6$) - A_3 ;
- за критерієм максимакса A_4

$$r = \begin{pmatrix} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ A_1 & 20 & 30 & 15 & 15 \\ A_2 & 75 & 20 & 35 & 20 \\ A_3 & 25 & 80 & 25 & 25 \\ A_4 & 85 & 5 & 45 & 5 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 65 & 50 & 30 & 10 \\ 10 & 60 & 10 & 5 \\ 60 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Оскільки стратегія A_3 фігурує як оптимальна за трьома критеріями вибору з чотирьох перевірених, міру її надійності можна визнати досить високою для того, щоб рекомендувати цю стратегію до практичного застосування.

5.5. Оптимізація управління соціально-економічної системи, заданої нечіткою моделлю

Для отримання чіткого висновки з нечіткої моделі соціально-економічної системи і системи управління нею, потрібно мати їх нечіткий опис у вигляді функцій приналежності, описаних у п. 4.7. Тоді процедура отримання чіткого результату з нечітких моделей на підставі чіткого значення вхідних факторів полягає у наступному.

Хай в базі правил є m правил вигляду:

R_1 : ЯКЩО x_1 це A_{11} . І . x_n це A_{1n} , ТО y це B_1 .

R_i : ЯКЩО x_1 це A_{i1} . І . x_n це A_{in} , ТО y це B_i .

R_m : ЯКЩО x_1 це A_{m1} . І . x_n це A_{mn} , ТО y це B_m .

де x_k , ($k = 1..n$) – вхідні змінні; y – вихідна змінна; A_{ik} – задані нечіткі множини з функціями приналежності для x_k , B_i – задані нечіткі множини з функціями приналежності для y .

Результатом нечіткого висновку є чітке значення змінної y^* на підставі заданих чітких значень x_k , $k=1..n$

У загальному випадку механізм логічного висновку включає чотири етапи: введення нечіткості (фазифікація), нечіткий висновок, композиція і приведення до чіткості, або дефазифікація (див. рис. 5.7).

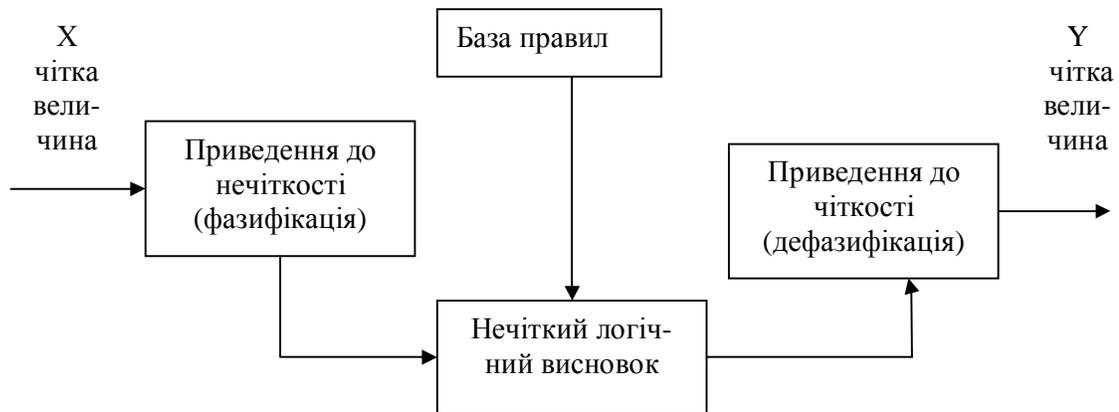


Рис. 5.7. Система нечіткого логічного висновку

Алгоритми нечіткого висновку розрізняються головним чином видом використовуваних правил, логічних операцій і різновидом методу дефазифікації. Розроблені моделі нечіткого виведення Мамдані, Сугено, Ларсена, Цукамото.

Розглянемо докладніше нечіткий вивід на прикладі механізму Мамдані (Mamdani). Це найбільш поширений спосіб логічного висновку в нечітких системах. У ній використовується мінімаксна композиція нечітких множин. Даний механізм включає наступну послідовність дій.

1. Процедура фазифікації така: визначаються ступені істинності, тобто значення функцій приналежності для лівих частин кожного правила (передумов). Для бази правил з m правилами позначимо ступені істинності як $A_{ik}(x_k)$, $i=1..m$, $k=1..n$.

2. Нечіткий висновок. Спочатку визначаються рівні «відсікання» для лівої частини кожного з правил:

$$a_i = \min_i(A_{ik}(x_k)) . \quad (5.53)$$

Далі знаходяться «усічені» функції приналежності:

$$B_i^*(y) = \min_i(a_i, B_i(y)) . \quad (5.54)$$

3. Композиція, або об'єднання отриманих усічених функцій, для чого використовується максимальна композиція нечітких множин:

$$MF(y) = \max_i(B_i^*(y)) , \quad (5.55)$$

де $MF(y)$ – функція приналежності підсумкової нечіткої множини.

4. Дефазифікація, або приведення до чіткості. Існує декілька методів дефазифікації. Наприклад, метод середнього центру, або центроїдний метод:

$$y = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} MF(y) dy = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \max(B_i^*(y)) dy, \quad (5.56)$$

Де y_{\max}, y_{\min} – діапазон значень B_i^* після композиції (5.55). Геометричний сенс такого значення – центр тяжіння для кривої $MF(y)$.

Приклад. Для соціально-економічної системи з двома вхідним факторами і одним вихідним було розроблено чотири функції приналежності: A_{11} та A_{21} для x_1 , A_{12} та A_{22} для x_2 , які описують відношення вхідних факторів до вирішальних правил R_1 та R_2 . Розроблено також нечіткі функції приналежності для системи управління B_1 та B_2 для вихідного фактора y . Було задано чіткі значення для вхідних факторів x'_1 та x'_2 . Знайти чітке значення y^* .

На рис. 5.8. показано процес нечіткого висновку за методикою Мамдані для двох вхідних змінних і двох нечітких правил R_1 і R_2 . Графіки функцій приналежності для x та y розташовуються у такому порядку: для кожного вирішального правила – в один ряд, для кожного вхідного фактора x – в одну колонку. На осі абсцис відмічаються значення x'_i і піднімається перпендикуляр до перетину з графіками функції приналежності. Для кожного вирішального правила R_1 та R_2 величини $MF(x'_i)$ порівнюються і вибирається їх менше значення. Ця величина відсікає на графіку B_1 та B_2 площу між абсцисою та лінією $\min(x'_i)$. Потім ці площі об'єднуються за правилом відкидання меншого значення і утворюється фігура, показана на лівому прямокутнику внизу. Центр тяжіння цієї фігури можна знайти, розділивши її на елементарні прямокутники і трикутники, і є чітким висновком з y^* з нечіткої моделі.

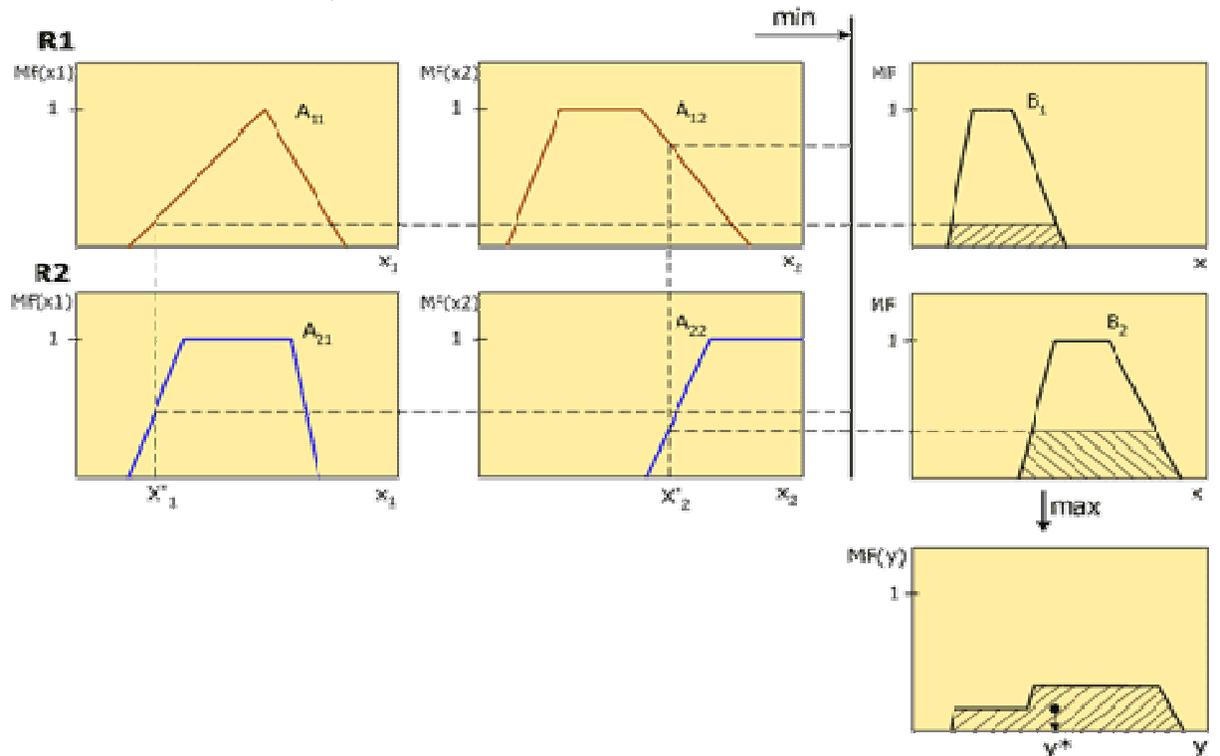


Рис. 5.8. Схема нечіткого висновку за Мамдані

5.6. Індивідуальні завдання № 6. Знайдення оптимального рішення економічних задач

Завдання: користуючись знаннями, набутими після вивчення матеріалу розділу, провести розрахунки оптимальних значень параметрів для соціально-економічних систем.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує номер за списком навчальної групи №2. Кожен студент вирішує всі задачі цього завдання.

Методичні вказівки: 1) провести визначення, яким методом вирішується поставлена задача: математичного програмування, теорії ігор чи нечітких множин?

2) скласти системи нерівностей та функціонала, чи матриці гри або функції приналежності;

3) вирішення провести із застосуванням можливостей  або **M**.

Задача 1

Підприємство випускає три види продукції А, Б і С (табл. 5.1) Для виробництва цієї продукції потрібні такі ресурси, як матеріали, праця робочих та ІТР. Для прийняття рішення оптимального випуску продукції, треба: визначити параметри оптимізації задачі та скласти якісну та математичну моделі задачі на основі операційної методології. Виконати формалізацію задачі, описати методи її рішення і методикау дослідження отриманої моделі.

Таблиця 5.1

Вхідні данні

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
1	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	295
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	60	300	
2	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,35	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	7	280
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	65	300	

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
3	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	6	275
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	
4	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,4	70
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	5	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	
5	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	0,45	0,4	80
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	6	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	270	
6	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	2	0,5	85
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	60	265	
7	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	110	265	
8	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	7	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	125	265	
9	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	6	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	125	75	
10	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	1	1	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	120	170	
11	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	185	125	170	
12	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	3	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	180	135	175	
13	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	130
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	135

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	4	5	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	140	180	
14	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	5	4	140
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	155
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	3	205
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	150	210	
15	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	3	145
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	6	7	160
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	6	210
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	205	155	215	
16	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	4	150
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	165
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	7	6	215
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	225	160	220	
17	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	4	7	155
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	5	6	230
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	215	165	210	
18	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	1	90
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	115
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	300

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	270	120	260	
19	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	125
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	4	2	250
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	260	180	270	
20	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	1	2	265
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	195	260	
21	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	145
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	245
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	275	255	
22	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	3	2	115
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	180
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	285	270	
23	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	265	275	

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
24	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	1	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	3	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	275	285	
25	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	135
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	140
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	200
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	265	280	285	
26	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	155
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	5	6	165
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	210
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	290	280	
27	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	165
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	205
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	260	245	
28	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	160
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	4	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	3	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	250	260	
29	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	6	170

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	5	180
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	240	250	255	
	30	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	4	7	4
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	185
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	210	195	

Задача 2

Для прийняття оптимального рішення по розподілу робітників комерційної галузі за операціями треба надати постановку задачі, визначити цільову функцію та розробити математичну модель згідно табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Хронометраж по витратам часу

Варіант	Комерсанти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
1	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 6$	$t_{13} = 5$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 3$	$t_{23} = 2$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 2$	$t_{33} = 5$
2	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 3$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
3	Іванов	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 2$	$t_{13} = 3$
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 4$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
4	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 7$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 3$	$t_{33} = 5$
5	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 4$	$t_{33} = 5$
6	Іванов	$t_{11} = 9$	$t_{12} = 10$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 8$	$t_{32} = 9$	$t_{33} = 7$
7	Іванов	$t_{11} = 15$	$t_{12} = 14$	$t_{13} = 9$
	Сидоров	$t_{21} = 17$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 10$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 8$

Варіант	Комерсанти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
8	Іванов	$t_{11} = 13$	$t_{12} = 15$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 20$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 18$
9	Іванов	$t_{11} = 23$	$t_{12} = 16$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 25$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 25$
	Петров	$t_{31} = 26$	$t_{32} = 15$	$t_{33} = 28$
10	Іванов	$t_{11} = 18$	$t_{12} = 12$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 21$
	Петров	$t_{31} = 19$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 17$
11	Іванов	$t_{11} = 17$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 14$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 27$
	Петров	$t_{31} = 18$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 28$
12	Іванов	$t_{11} = 33$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 22$
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 20$
13	Іванов	$t_{11} = 32$	$t_{12} = 27$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 33$	$t_{22} = 28$	$t_{23} = 26$
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 25$	$t_{33} = 28$
14	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 39$	$t_{22} = 24$	$t_{23} = 16$
	Петров	$t_{31} = 38$	$t_{32} = 22$	$t_{33} = 18$
15	Іванов	$t_{11} = 53$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 27$
	Петров	$t_{31} = 50$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
16	Іванов	$t_{11} = 55$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 57$	$t_{22} = 47$	$t_{23} = 36$
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 44$	$t_{33} = 38$
17	Іванов	$t_{11} = 51$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 27$
	Сидоров	$t_{21} = 53$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
18	Іванов	$t_{11} = 57$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 54$	$t_{22} = 46$	$t_{23} = 39$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 48$	$t_{33} = 38$
19	Іванов	$t_{11} = 54$	$t_{12} = 31$	$t_{13} = 26$
	Сидоров	$t_{21} = 55$	$t_{22} = 36$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 56$	$t_{32} = 35$	$t_{33} = 28$
20	Іванов	$t_{11} = 64$	$t_{12} = 51$	$t_{13} = 46$
	Сидоров	$t_{21} = 65$	$t_{22} = 56$	$t_{23} = 49$
	Петров	$t_{31} = 66$	$t_{32} = 55$	$t_{33} = 48$
21	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 39$
	Сидоров	$t_{21} = 75$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 32$
	Петров	$t_{31} = 74$	$t_{32} = 54$	$t_{33} = 30$
22	Іванов	$t_{11} = 72$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 59$
	Сидоров	$t_{21} = 83$	$t_{22} = 48$	$t_{23} = 56$
	Петров	$t_{31} = 84$	$t_{32} = 45$	$t_{33} = 58$
23	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 69$
	Сидоров	$t_{21} = 99$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 67$
	Петров	$t_{31} = 90$	$t_{32} = 58$	$t_{33} = 68$

Варіант	Комерсанти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
24	Іванов	$t_{11} = 34$	$t_{12} = 71$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 76$	$t_{23} = 89$
	Петров	$t_{31} = 36$	$t_{32} = 75$	$t_{33} = 88$
25	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 85$	$t_{13} = 96$
	Сидоров	$t_{21} = 72$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 93$
	Петров	$t_{31} = 76$	$t_{32} = 81$	$t_{33} = 95$
26	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 75$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 90$	$t_{22} = 74$	$t_{23} = 84$
	Петров	$t_{31} = 92$	$t_{32} = 77$	$t_{33} = 85$
27	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 67$	$t_{13} = 77$
	Сидоров	$t_{21} = 40$	$t_{22} = 68$	$t_{23} = 79$
	Петров	$t_{31} = 42$	$t_{32} = 65$	$t_{33} = 75$
28	Іванов	$t_{11} = 95$	$t_{12} = 83$	$t_{13} = 76$
	Сидоров	$t_{21} = 92$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 71$
	Петров	$t_{31} = 94$	$t_{32} = 85$	$t_{33} = 75$
29	Іванов	$t_{11} = 63$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 55$
	Сидоров	$t_{21} = 67$	$t_{22} = 44$	$t_{23} = 57$
	Петров	$t_{31} = 60$	$t_{32} = 46$	$t_{33} = 51$
30	Іванов	$t_{11} = 52$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 78$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 45$	$t_{23} = 80$
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 42$	$t_{33} = 79$

Задача 3

Підприємство випускає продукцію (продукція може бути швидко псуватися), яку можна: зразу відправити споживачу (стратегія A_1); відправити на склад для зберігання (стратегія A_2); підвергнути додатковій обробці для тривалого зберігання (стратегія A_3). Варіанти завдань обирати за табл.. 5.3

Споживач може купувати продукцію: негайно (стратегія B_1); у термін невеликого часу (стратегія B_2); після тривалого періоду часу (стратегія B_3).

У випадку стратегій A_2 та A_3 , підприємство несе додаткові витрати на зберігання та обробку продукції, які не потрібні для A_1 . Але, при виборі стратегії A_2 , слід взяти до уваги можливі збитки із-за псування продукції.

Визначити оптимальні пропорції продукції для застосування стратегій A_1 , A_2 та A_3 . Рекомендовано використовувати мінімаксний критерій (гарантований середній рівень збитку) при матриці витрат.

Таблиця 5.3

Вхідні данні

Варіант № 1			Варіант № 2			Варіант № 3					
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	8	7	11	A_1	6	8	9	A_1	8	10	11
A_2	11	10	8	A_2	7	11	12	A_2	12	9	14
A_3	5	4	3	A_3	12	9	10	A_3	7	8	9
Варіант № 4			Варіант № 5			Варіант № 6					
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	9	11	A_1	11	9	10	A_1	10	9	11

A ₂	13	12	8	A ₂	14	13	8	A ₂	13	14	15
A ₃	9	7	6	A ₃	10	8	7	A ₃	9	8	10
Вариант № 7				Вариант № 8				Вариант № 9			
	B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	10	8	11	A ₁	11	10	7	A ₁	11	7	12
A ₂	12	14	15	A ₂	14	12	13	A ₂	13	14	15
A ₃	8	7	9	A ₃	10	9	6	A ₃	10	6	11
Вариант № 10				Вариант № 11				Вариант № 12			
	B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	12	11	8	A ₁	11	9	12	A ₁	10	9	11
A ₂	13	12	14	A ₂	12	13	14	A ₂	11	13	15
A ₃	11	9	7	A ₃	9	8	10	A ₃	9	7	10
Вариант № 13				Вариант № 14				Вариант № 15			
	B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	10	9	12	A ₁	10	9	8	A ₁	11	9	8
A ₂	12	13	15	A ₂	14	12	13	A ₂	16	13	15
A ₃	9	8	10	A ₃	9	8	7	A ₃	10	8	7
Вариант № 16				Вариант № 17				Вариант № 18			
	B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	10	7	12	A ₁	12	8	14	A ₁	12	11	10
A ₂	14	15	16	A ₂	15	16	17	A ₂	16	14	15
A ₃	9	6	11	A ₃	10	7	12	A ₃	11	10	9
Вариант № 19				Вариант № 20				Вариант № 21			
	B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	12	11	13	A ₁	13	12	14	A ₁	12	10	14
A ₂	14	15	16	A ₂	14	15	16	A ₂	13	14	15
A ₃	11	10	11	A ₃	11	10	13	A ₃	10	9	12
Вариант № 22				Вариант № 23				Вариант № 24			
	B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	13	11	14	A ₁	14	13	12	A ₁	13	11	14
A ₂	14	16	17	A ₂	18	14	17	A ₂	15	17	18
A ₃	11	10	12	A ₃	12	11	10	A ₃	12	10	13
Вариант № 25				Вариант № 26				Вариант № 27			
	B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	14	12	15	A ₁	14	13	15	A ₁	16	15	14
A ₂	15	17	18	A ₂	15	18	19	A ₂	18	16	19
A ₃	11	10	13	A ₃	11	10	12	A ₃	15	13	12
Вариант № 28				Вариант № 29				Вариант № 30			
	B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃		B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	15	13	16	A ₁	15	14	16	A ₁	17	16	14
A ₂	17	19	20	A ₂	16	19	20	A ₂	20	17	19
A ₃	14	12	15	A ₃	13	12	14	A ₃	15	14	12

Задача 4

Підприємство може випускати три виду продукції (A_1 , A_2 та A_3), при цьому отримує прибуток, який залежить від попиту. Попит може бути в одному з чотирьох станів (B_1 , B_2 , B_3 або B_4). Дана матриця (табл. 5.4), її елементи a_{ij} характеризують прибуток, який отримає підприємство при випуску i -ої продукції з j -м змістом попиту.

Розробити математичну модель для визначення оптимальних пропорцій випуску продукції, які гарантують середню величину прибутку при різноманітному стані попиту. Зробіть висновки щодо прийняття оптимального рішення.

Таблиця 5.4

Вхідні данні

Варіант № 1					Варіант № 2				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	7	9	A_1	4	6	7	10
A_2	10	11	5	3	A_2	11	13	6	4
A_3	8	9	5	4	A_3	10	11	7	6
Варіант № 3					Варіант № 4				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	8	7	9	A_1	4	6	7	8
A_2	9	12	6	2	A_2	9	10	6	3
A_3	8	9	5	4	A_3	7	9	5	4
Варіант № 5					Варіант № 6				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	5	7	9	A_1	7	8	7	10
A_2	11	10	8	3	A_2	11	10	9	3
A_3	10	9	6	5	A_3	10	9	5	5
Варіант № 7					Варіант № 8				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	7	9	8	A_1	8	7	10	9
A_2	11	10	6	4	A_2	11	10	4	5
A_3	10	9	5	6	A_3	12	11	5	6
Варіант № 9					Варіант № 10				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	8	9	10	A_1	7	8	9	10
A_2	8	4	5	8	A_2	6	5	7	8
A_3	9	5	6	9	A_3	9	6	6	9
Варіант № 11					Варіант № 12				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	7	8	10	A_1	9	7	10	11
A_2	7	5	7	8	A_2	5	6	8	9
A_3	8	4	6	9	A_3	8	10	9	10
Варіант № 13					Варіант № 14				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	5	8	11	A_1	7	6	9	11
A_2	6	8	7	9	A_2	6	9	7	9
A_3	8	10	9	10	A_3	9	8	8	10
Варіант № 15					Варіант № 16				

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	10	6	11	12	A ₁	10	6	11	12
A ₂	8	10	9	11	A ₂	8	9	10	13
A ₃	7	9	8	10	A ₃	11	11	9	11
Варіант № 17					Варіант № 18				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	9	10	11	12	A ₁	11	7	10	11
A ₂	10	9	12	13	A ₂	10	8	12	13
A ₃	11	8	9	11	A ₃	7	10	9	10
Варіант № 19					Варіант № 20				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	11	9	11	12	A ₁	11	9	12	14
A ₂	10	8	9	13	A ₂	10	12	9	13
A ₃	7	11	10	11	A ₃	8	11	13	15
Варіант № 21					Варіант № 22				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	14	13	12	14	A ₁	14	11	13	14
A ₂	9	12	14	17	A ₂	11	12	15	17
A ₃	8	14	11	15	A ₃	15	14	11	15
Варіант № 23					Варіант № 24				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	10	11	13	14	A ₁	10	11	12	14
A ₂	11	9	7	10	A ₂	11	9	8	10
A ₃	15	14	12	15	A ₃	12	7	12	15
Варіант № 25					Варіант № 26				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	12	11	12	10	A ₁	12	11	12	10
A ₂	11	9	8	7	A ₂	11	10	8	9
A ₃	9	7	12	11	A ₃	10	8	13	11
Варіант № 27					Варіант № 28				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	12	11	10	8	A ₁	12	11	10	9
A ₂	11	7	8	9	A ₂	11	8	7	6
A ₃	10	8	11	11	A ₃	10	9	11	10
Варіант № 29					Варіант № 30				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	12	10	11	8	A ₁	12	10	11	9
A ₂	11	9	7	6	A ₂	13	11	8	6
A ₃	10	7	8	11	A ₃	11	9	10	11

Задача 5.

Задано наступну базу з трьох лінгвістичних правил:

R₁: ЯКЩО x_1 це A₁₁ . І . x_2 це A₁₂, І . x_3 це A₁₃, ТО y це B₁.

R₂: ЯКЩО x_2 це A₂₁ . І . x_2 це A₂₂, І . x_3 це A₂₃, ТО y це B₂.

R₃: ЯКЩО x_1 це A₃₁ . І . x_2 це A₃₂, І . x_3 це A₃₃, ТО y це B₃.

На вхід системи надійшло три чітких сигнали $x_1 = 0,7N + i$, $x_2 = 1,2N + 3i$, $x_3 = 1,7N_2 + 0.2i$. Знайти чіткий вихід системи y^* методом Мамдані.

Тут N_2 – номер студента за списком групи, i – номер групи.

Рішення знаходити графічно. Нечіткі множини задані наступними функціями приналежності, числові значення яких розраховуються за даним з табл. 5.5.

Таблиця 5.5

Варіанти завдань нечітких множин

X	$0,1N_2$	$0,9N_2+i$	$1,5N+i$	$2,1N+i$
A_{11}	0	$0,75+0,15i$	0	0
A_{12}	0	$0,3-0,08i$	0,6	0,9
A_{13}	0	0,1	0,5	1,0
A_{21}	0,2	0,4	0	0
A_{22}	0,8	$0,7+0,05i$	$0,3+0,22i$	0
A_{23}	0	0,3	0,8	0
A_{31}	0,2	0	0	0
A_{32}	0,1	0,3	$0,7+0,1i$	0,2
A_{32}	1,0	1,0	0,3	0
B_1	0	$0,5-0,3i$	0,5	0
B_2	0	0,7	$0,7-0,2i$	0
B_3	0	$0,8-0,15i$	0,8	0

Контрольні запитання

1. Чому теорія ігор відповідає процесу прийняття рішень в економіці?
2. Що таке платіжна матриця гри?
3. Що таке чиста і змішана стратегії?
4. Як знайти змішану стратегію за допомогою лінійного програмування?
5. Що таке „гра з природою”?
6. Назвіть критерії вибору стратегії при повній невизначеності.
7. Як уточнити імовірності настання станів природи?
8. Чому векторний спосіб постановки транспортної задачі більш економічний, аніж матричний?
9. Наведіть основні принципи формулювання багатокритеріальної задачі, як задачі математичного програмування.
10. Що таке цілочислове програмування?
11. Що є біматрична гра?
12. Що таке рівноважна ситуація?
13. Як представляється умова рівноваги?
14. Як знаходиться оптимальна змішана стратегія в біматричній грі?

В розділі розглянуто , основні принципи формулювання задач оптимізації, застосування теорії ігор до прийняття економічних рішень, визначено платіжну матрицю гри подальшого їх вирішення на комп'ютері.

6. ЗАВДАННЯ ДЛІ КУРСОВОЇ РОБОТУ

В розділі подано теми курсових робіт і порядок їх виконання і оформлення.

Курсова робота з економічної кібернетики виконується з метою поглиблення знань студентів з цього предмету.

6.1. Теми курсових робіт

Для вибору теми студент використовує останню цифру у номері залікової книжки, за якою обирається галузь економіки. Варіанти галузі економіки України наведено у табл.. 6.1.

Таблиця 6.1.

Варіанти галузі економіки

Варіант	Галузь економіки
0.	Вугільна промисловість
1.	Видобуток залізної руди
2.	Металургія
3.	Хімічна промисловість
4.	Сільське господарство
5.	Торгово-закупівельна діяльність
6.	Лісове господарство
7.	Транспорт
8.	Будівництво
9.	Туризм

Для вибору одного з методів економічної кібернетики, які треба застосувати до обраної галузі, потрібно використати номер студента за списком студентської групи, у якій він навчається згідно переліку тем, поданих у табл.. 6.2.

Таблиця 6.2.

Теми курсових робіт

Варіант	Тема
1	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей лінійного програмування.
2	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей динамічного програмування.
3	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей управління запасами.
4	Розробка і дослідження статистичних детермінованих моделей

	управління запасами.
5	Розробка і дослідження стохастичних моделей управління запасами.
6	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей планування і управління виробництвом.
7	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей оптимізації використання ресурсів.
8	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей систем масового обслуговування.
9	Розробка і дослідження імовірнісних моделей економічних систем.
10	Розробка і дослідження статистичних моделей економічних систем.
11	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей в умовах конфліктних ситуацій.
12	Розробка і дослідження нейросетевих моделей економічних систем.
13	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням теорії нечітких множин.
14	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням непараметричних методів статистичних досліджень.
15	Розробка і дослідження динамічних економіко-математичних моделей.
16	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей фінансово-економічних процесів.
17	Розробка і дослідження економіко-кібернетичної моделі розвитку народного господарства в територіальному аспекті.
18	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей інвестиційно-фінансових процесів.
19	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням кореляційно-регресійних методів.
20	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей для прогнозування і стратегічного розвитку виробництва.
21	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням марківських випадкових процесів.
22	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей з використанням теорії ігор.
23	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей системи продуктивності праці.
24	Розробка і дослідження економіко-математичних моделей, що враховують зв'язки між продуктивністю праці і основними фондами.
25	Розробка економіко-математичних моделей і дослідження міжгалузевих зв'язків.

6.2. Порядок виконання курсових робіт

Курсова робота виконується в час, призначений для індивідуальної роботи студентів. Для цього студент може скористатися як власним комп'ютером, так і комп'ютерами в лабораторіях кафедри.

Виконання курсової роботи починається з дослідження з літературних джерел у бібліотеках та Інтернеті. Це дозволяє визначити теоретичні напрямки подальших досліджень.

Не обов'язково використовувати всю галузь цілком, достатньо який напрямок цієї галузі, наприклад з галузі «Транспорт» можна взяти тільки напрямок «Трубопровідний транспорт для постачання нафти».

Далі потрібно описати обраний вами об'єкт словесно, далі подати його математичну модель у загальному вигляді та створити систему оптимізації об'єкта у вигляді цільової функції, і обмежень – рівнянь та нерівностей.

Останнім етапом роботи є знайдення оптимального рішення.

Для спрощення, рекомендується знайти чисельні значення всіх параметрів та факторів об'єкта за допомогою датчика випадкових чисел, який в Open Office Calc називається RANDOM, а в Microsoft Office Excel – СЛУЧМЕЖДУ.

Для цього потрібно створити допоміжний рядок даних, розміром у 40 клітинок, які містять наступну формулу

=СЛУЧМЕЖДУ((номер вашої залікової книжки – 50)*(ваш номер за списком групи); (номер вашої залікової книжки)*(ваш номер за списком групи+30))/100).

Відмітити цей допоміжний рядок і занести в пам'ять комп'ютера, натиснувши кнопку „Копировать” або сполучення кнопок “CTRL”+”C”.

Перенести курсор на вільний рядок і через головне меню „Правка-Спеціальная вставка-Только значения” занести туди числові значення, які і будуть чисельними значеннями параметрів та факторів об'єкта.

У вступі потрібно охарактеризувати можливі напрямки оптимізації діяльності обраної галузі, а у висновках – які результати було отримано при моделюванні та оптимізації.

6.3. Порядок оформлення курсових робіт

Курсова робота оформляється як документ, який подається в електронному або паперовому вигляді. Формат електронного документу має відповідати текстовому редактору Open Office або Microsoft Office.

Титульний лист оформлюється згідно прикладу на рис. 6.1.

Далі йде зміст, вступ, теоретична, частина, розрахунки, висновки та список літератури.

Береги листа – скрізь 2 см. Шрифт – Times New Roman, кегль – 14, інтервал – 1,5, нумерація сторінок – угорі праворуч, абзацний відступ – 1 см.

При використанні літератури, потрібно подавати посилання на номер цього джерела у списку літератури, поданому у квадратних дужках, наприклад

«...Але рідкі мастила вимагають складної системи мастильного обладнання на кожному механізмі [50, 132-133, 160-161, 211]....».

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет
Кафедра економічної кібернетики та інформаційних технологій

КУРСОВА РОБОТА З ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ
на тему «Розробка економіко-математичних моделей і дослідження міжгалузевих зв'язків в металургії»

Розробив ст. гр. ЕК-09-1 Петренко О.А.
Прийняв проф., д.т.н. Пістунов І.М.

Дніпропетровськ
2010

Рис. 6.1. Приклад оформлення титульного листа курсової роботи

:Розрахунки, проведені із застосуванням окремих програм ілюструвати фрагментами активних вікон цих програм, наприклад, так, як показано праворуч на рис. 6.2.

Список літератури потрібно оформляти за правилом : Автор, Назва роботи, видавництво, рік, кількість сторінок.

Наприклад, для:

– книги

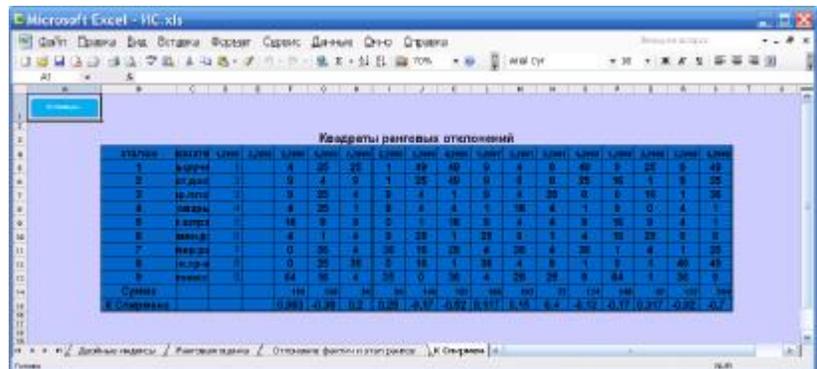
Пістунов І.М., Пістунова К.І. Оптимальні рішення в інвестиційному проектуванні : Навч. посібник. – Д.: НГУ, 2007.– 108 с.

– статті

Пістунов І.М., Кощев А.С. Застосування інформаційних технологій для визначення оптимального складу банківських послуг/ Науковий вісник НГУ. – №3, 2007. – С. 93-97.

– посилання в Інтернеті

Пістунов І.М., Антонюк О.П, Турчанінова І.Ю. Кластерний аналіз в економіці: Навч. посібник – <http://www.pistunovi.googlepages.com/train-aids.html/Ka.rar>



The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with a table of data. The table has 10 columns and 10 rows. The columns are labeled 'Квадраты ранговых отклонений' and the rows are labeled '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '10'. The data in the table is as follows:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
2	1	0	1	4	9	16	25	36	49	64
3	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49
4	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36
5	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
6	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16
7	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9
8	49	36	25	16	9	4	1	0	1	4
9	64	49	36	25	16	9	4	1	0	1
10	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0

Рис. 6.2. Приклад зображення активного вікна



Виконавши курсову роботу згідно завдання, студенти поглиблюють знання з використання кібернетичних методів при моделюванні та оптимізації економічних об'єктів різних галузей народного господарства України.

ПІДСУМКУ

У навчальному посібнику детально розглянуто матеріали з дисципліни «Економічна кібернетика» призначеного для бакалаврів з економічної кібернетики, які становлять основу знань з аналізу, синтезу моделей соціально-економічних систем та розрахунку оптимальних параметрів вхідних факторів для досягнення потрібних значень вихідних факторів.

В першому розділі розглянуто предмет, методи і понятійний апарат економічної кібернетики, подано поняття об'єкту і його параметрів і факторів, класифікацію систем і виділено особливості соціально-економічної системи, як об'єкту управління, подано поняття про зворотній зв'язок та інформацію, окреслено основні закони та принципи кібернетики.

У другому розділі детально подано інформацію про моделювання соціально-економічних систем, наведено приклади моделей нарахування відсотків, фінансових розрахунків, теорії корисності, виробничої, Моделі Кобба-Дугласа та Лоренца, обміну в міжнародній торгівлі, динамічних моделей та моделі банкрутства.

У розділі 3 ви ознайомилися з аналізом як категорією пізнання та його застосування в дослідженнях соціально-економічних систем. Було виділено такі напрямки аналізу як статистичний, дисперсійний, методом експертних висновків, запізнювання впливу вхідних факторів на вихідні, спектральний та кластерний.

У розділі 4 представлено опис значної кількості методів синтезу моделей соціально-економічних систем з розділенням їх по таким категоріям як статистичні, лінійні та квазілінійні, авторегресійні, динамічні, періодичні моделі та моделі, розроблені на формальній мові. Окремо виділено синтез статистичних моделей методом нейронних сіток. Визначена проблема оцінки адекватності апроксимації та якості прогнозування

У п'ятому, найбільшому, розділі детально описано принципи і прийоми оптимізації процесів управління в економіці, такі як лінійне, цілочислове, нелінійне та динамічне програмування і транспортна задача. Подано прийоми, які дозволяють знайти оптимальне рішення багатокритеріальних задач зведенням до задачі математичного програмування, методом гарантованого результату та згортки часткових критеріїв. Розглянуто оптимізацію конфліктних ситуацій в економіці через такі теми як антагоністична та кооперативна гра, ігри з природою. Для соціально-економічних систем, заданих нечіткою моделлю, окреслено прийоми їх оптимального управління.

Шостий розділ призначений для завдання на розробку курсової роботи з використанням навичок і прийомів, здобутих при вивченні предмету «Економічна кібернетика».

Кожен розділ мав індивідуальні завданнями, які можна використати як лабораторні роботи, або виконувати їх самостійно для поглиблення знань в області економічної кібернетики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cordon O., Herrera F., A General study on genetic fuzzy systems // Genetic Algorithms in engineering and computer science, 1995. – P. 33-57.
2. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transactions on Computers, vol. 43, No. 11, November 1994. – P. 1329-1333.
3. Алдохин И. П., Кулиш С. А. Экономическая кибернетика. – Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1983. – 224 с.
4. Ареф`єва О.В. Суперечності розвитку як основне джерело загрози безпеці рівноваги економічних систем/ О.В.Ареф`єва, О.С.Шнипко// Актуальні проблеми економіки.- 2006.- №3.- С. 57-64.
5. Бицок П. И., Половцев О. В. Анализ та математичне моделювання економічних процесів перехідного періоду. - К.: ПЛАБ-75, 1999. - 209 с.
6. Бібліотека економічної кибернетики – <http://cyber-library.org.ua/>
7. Бойко Є. Про становлення загальної теорії економічних систем// Економіка України.- 2001.- №6.- С.88-90.
8. Большие системы: моделирование организационных механизмов/ В.Н. Бурков и др. – М.: Наука, 1989. – 332 с.
9. Браславец М. Е., Гуревич Т. Ф. Кибернетика.– К.: Вища школа, 1977.– 325 с.
- 10.Веников В. А. Теория подобия и моделирование применительно к задачам электроэнергетики.– М.: Высш. школа, 1966.– 487с.
- 11.Вікіпедія: Економічна_кібернетика – <http://uk.wikipedia.org/wiki/>
- 12.Глушков В. М. Введение в кибернетику. – К.: Изд-во АН УССР , 1964. – 323 с.
- 13.Гринченко С. Н. История человечества с кибернетических позиций // История и Математика: Проблемы периодизации исторических макро-процессов.– М.: КомКнига, 2006. – С. 38-52.
- 14.Гусев В.В. Інноваційна реструктуризація регіональних економічних систем як фактор забезпечення економічної безпеки України в регіональному вимірі// Економіка та підприємництво. Держава та регіони.- 2006.- №4.- С. 109-113.
- 15.Диба М. Теоретико-методологічні основи господарського регулювання в сучасній економічній системі/ М.Диба, А.Ягодка, Л.Дзюбенко// Економіка України. – 2005.- №10.- С. 42-48.
- 16.Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем: Збірник наукових праць. Вип.3/ Відп. ред. Бакаєв О.О. – К.: МННЦ ІТІС, 2002. – 127 с.
- 17.Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем: Збірник наукових праць. Вип. 7/ Відп. ред. Бакаєв О.О. – К., 2003.– 158 с.
- 18.Захарченко Є. Вплив соціально-економічних умов життя на сім'ю як соціальний інститут/ Є.Захарченко, К.Захарченко, Е.Підлубна// Економіка України.- 2006.- №9.- С. 26-33.

- 19.Зятковський І.В. Концептуалізація суб`єктної структури економічної системи// Вісник Хмельницького національного університету.Економічні науки.- 2005.- №6,Т.2.- С. 48-55.
- 20.Інституційні засади формування економічної системи України: теорія і практика/ Ватаманюк, С.Панчишин, О.Дорош, Н.Гнатюк; За ред. З. Ватаманюка. – Львів: Новий Світ, 2000, 2005. – 648 с.
- 21.Касьяненко В.О. Моделювання та прогнозування економічних процесів: Конспект лекцій: Навч. посібник/ В.О.Касьяненко, Л.В.Старченко. – Суми: Університетська книга, 2006. – 185 с.
- 22.Кобринский Н. Е. Введение в экономическую кибернетику. Учеб. пособие./ Н.Е. Кобринский, Е.З. Майминас, А.Д. Смирнов. – М., «Экономика», 1975. 343 с.
- 23.Кобринский Н. Е., Майминас Е. З., Смирнов А. Д. Экономическая кибернетика.– М.: Экономика, 1982.– 408 с.
- 24.Концепції економічних систем та проблеми їх структурної трансформації// Вища школа.– 2003.- №2-3.– С.44-65.
- 25.Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. – М: Энергоатомиздат, 1987. – 494 с.
- 26.Кочура Е. В. Экономическая кибернетика. – Днепропетровск: ДУЕП, 2002. -138 с.
- 27.Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: Физматлит, 2002. – 350 с.
- 28.Кузин Л. Т. Основы кибернетики (в 2-х томах). – М.: Энергия, 1973
- 29.Кульчицький Б. Сучасні економічні системи: Навчальний посібник.– Львів: Афіша, 2004.– 279 с.
- 30.Леоленков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб., 2003. – 350 с.
- 31.Лиходій В.Г. Формування багатосуб`єктивної економічної системи - нова тема курсу економічної теорії// Актуальні проблеми економіки.- 2004.- №6.- С. 220-224.
- 32.Лысенко Ю. Г. Экономическая кибернетика. – Донецк, Дон ГУ, 1999. – 397 с.
- 33.Любимцева С. Законы структурной эволюции экономических систем// Экономист. – 2003. – №10. – С. 29-40.
- 34.Масалович А. Нечеткая логика в бизнесе и финансах. – www.toga-centre.ru/library/fuzzy/fuzzy-.htm
- 35.Пістунов І.М., Чухлебова М.Л. Розробка моделей банкрутства для підприємств оптово-роздрібної торгівлі Дніпропетровського регіону/ Науковий вісник НГУ. - №2, 2007. - С. 85-87.
- 36.Пістунов І.М. Застосування нейронних сіток до моделювання економічних процесів/ / Економічний вісник НГУ. -№2. - 2005. - С. 120-126.
- 37.Пістунов І.М. Корпоративна функція корисності/ Економіка: проблеми теорії та практики. - Вип.. 186, том. III.- Д.: ДНУ: 2003. - С.751-756.
- 38.Пістунов І.М. Обґрунтування критерію вибору інвестиційного проекту в

- умовах ризикованої економічної ситуації/ Держава та регіони. - №3. - ЗДМУ: 2003. - С.31-34.
39. Пістунов І.М. Побудова оптимального балансу на підставі фінансових коефіцієнтів/ Економіка: проблеми теорії та практики. - Вип.. 185, том.ІІІ.- ДНУ: 2003. - С.593-599.
40. Пістунов І.М. Стохастична К-модель управління підприємством з високим рівнем природного ризику/ Економіка: проблеми теорії та практики. - Вип.. 189, том.У.- Д.: ДНУ: 2004. - С.1530-1535.
41. Пістунов І.М., Авраменко С.В. Оптимальний вибір маркетингових заходів/ Науковий вісник НГУ. - №7, 2007. - С. 88-91.
42. Пістунов І.М., Грицюк В.О. Оптимальний перерозподіл об'єктів оренди / Науковий вісник НГУ. - №6, 2007. - С. 89-92.
43. Пістунов І.М., Кощєєв А.С. Застосування інформаційних технологій для визначення оптимального складу банківських послуг/ Науковий вісник НГУ. - №3, 2007. - С. 93-97.
44. Пістунов І.М., Мазуренко Д. С. Оптимальний перерозподіл виробничих обов'язків співробітників обслуговуючого підприємства / Науковий вісник НГУ. - №5, 2007. - С. 90-93.
45. Пістунов І.М., Плінська О.В. Оптимізація міжбанківських трансакцій/ Науковий вісник НГУ. - №5, 2007. - С. 90-93.
46. Пістунов І.М., Ручаєвський Д.О. Обґрунтування факторів формування заробітної плати логістиків методами експертних оцінок// Вісник академії митної служби України. – №3(39), 2008. – 32-41.
47. Пістунов І.М., Ситников В.В. Дослідження межі існування оптимальних рішень для портфеля Марковіца/ Економічний вісник НГУ. - №4. - 2003. С.114-119.
48. Пістунов І.М., Чернобаєв В.В. Багатофакторна модель управління інноваційною діяльністю//Вісник Дніпропетровської державної фінансової академії. – №1(19), 2008. – С.157-163.
49. Пономаренко Л. А. Основи економічної кібернетики: Підручник. – К.: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2002. – 432 с.
50. Принципи і методи пізнання економічного життя суспільства// Економічна теорія /Під.ред. Є.М. Воробйова.- К., 2001.- С.47-55.
51. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М., 2004.
52. Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления.– М.: Наука, 1989. – 112 с.
53. Теслер Г. С. Новая кибернетика.– Киев: Логос, 2004. – 401 с.
54. Шарапов О. Д., Дербенцев В. Д., Семьонов Д. Є. Економічна кібернетика: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2004. – 231 с.
55. Экономическая кибернетика: Учебное пособие / В.М. Косарев, Е.А. Паршина, Ю.И. Паршин – ДУЭП, 2005. – 104 с. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.

ІНДЕКС

- Аналіз запізнювання впливу вхідних факторів на вихідні 64
Аналіз соціально економічних систем методом експертних висновків 62
Антагоністична гра 123
Багатокритеріальні задачі 117
Використання динамічних моделей в економіці 46
Вимірювання відстаней між об'єктами 70
Виробнича модель 43
Динамічне програмування 115
Дисперсійний аналіз факторів соціально-економічних систем 59
Зведення до задачі математичного програмування 118
Зворотній зв'язок 22
Ігри з природою 127
Інформація 23
Класифікація систем 15
Кластеризація повним перебором об'єктів 72
Кластерний аналіз 69
Кооперативна гра 125
Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі) 45
Лінійне програмування 108
Математичне моделювання 35
Математичне програмування 108
Метод гарантованого результату 119
Метод згортки часткових критеріїв 119
Методи економічної кібернетики 8
Місце кластерного аналізу серед інших методів автоматичної класифікації 69
Моделі банкрутства 50
Моделі Кобба-Дугласа та Лоренца 43
Моделі теорії корисності 41
Моделі фінансових розрахунків 40
Модель 33
Модель нарахування відсотків 39
Нелінійне програмування 110
Об'єкт. Його параметри і фактори 10
Оптимізація конфліктних ситуацій в економіці (теорія ігор) 123
Оптимізація управління соціально-економічної системи, заданої нечіткою моделлю 130
Основні закони та принципи кібернетики 25
Оцінка адекватності апроксимації та якості прогнозування статистичних моделей 94
Приклади кібернетичних моделей соціально-економічних систем 39
Синтез авторегресійних моделей 87
Синтез динамічних моделей соціально-економічних систем 95
Синтез моделей на формальній мові (нечіткі моделі) 97
Синтез періодичних моделей соціально-економічних систем 87
Синтез статистичних лінійних та квазілінійних моделей 82
Синтез статистичних моделей методом нейронних сіток 89
Система 12
Складання зведеної таблиці 122
Соціально-економічна система 18
Спектральний аналіз 66
Статистичний аналіз соціально-економічних систем 54
Транспортна задача 111
Формальна постановка багатокритеріальної задачі 117
Цілочислове програмування 110
Числові методи знайдення оптимального рішення статистичних моделей 106

Навчальне видання

Пістунів Ігор Миколайович

ЕКОНОМІЧНА КІБЕРНЕТИКА

Навчальний посібник

Редакційно-видавничий комплекс

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка І.М. Пістунів

Pistunovi.googlepages.com/train-aids.html/EK.rar

Електронне видання
НГУ, просп.. К,Маркса, 19, м. Дніпропетровськ, 49005