

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

М.А. Демиденко

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Дніпропетровськ
НГУ
2019

УДК 65.0.12.1:519.85

ББК 22.18-7я73

Д30

Затверджено вченою радою університету як навчальний посібник для студентів очної та заочної форм навчання в циклі професійної підготовки бакалавра для спеціальності 6.050100 Економічна кібернетика, 6.050104 Фінанси, 6.050106, Облік і аудит, 6.050104 Економіка підприємства, 6.050201 Менеджмент організацій, 6.050206 Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності (протокол № 8 від 10 жовтня 2009 р).

Рецензенти:

Марюта А.Н., д-р техн.наук, професор, кафедри економічної статистики та інформатики Дніпропетровського національного університету;

Корсун В.І., д-р техн.наук, завідувач кафедри електротехніки та метрології, професор кафедри системного аналізу та управління Національного гірничого університету.

Демиденко М.А.

Математичне програмування: Навч. посібник. – Дніпропетровськ:

Д30 Національний гірничий університет, 2009.– 110 с.

Викладено основи математичного програмування – науки, що займається оптимізаційними методами, які слугують кількісним обґрунтуванням оптимальних управлінських рішень в економіці. Розглянуто основні поняття і методологічні принципи математичного програмування, математичні методи оптимізації (лінійне, дробово-лінійне, цілочислове, нелінійне, динамічне програмування).

Матеріал викладено на порівняно елементарному рівні, доступному студентам, які знайомі з курсом математики для економістів. Методи, що розглядаються в посібнику, ілюструються великою кількістю прикладів. Посібник має на меті навчити студентів застосовувати математику та обчислювальну техніку для обґрунтування оптимальних економічних рішень.

ББК 22.18-7я73

© М.А. Демиденко, 2009

© Національний гірничий університет, 2009

ЗМІСТ

ВСТУП	5
ТЕМА 1: ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	6
1.1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	6
1.2. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	6
1.3. ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	7
1.4. АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДУ.....	8
1.5 МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСУ.....	12
1.6. ДВОЇСТІСТЬ В ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ	14
1.6 ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ.....	19
1.6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	27
ТЕМА 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ	28
2.1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ	28
2.2. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАКРИТОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ	29
2.3. ВІДШУКУВАННЯ ПЕРШОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ МЕТОДОМ «ПІВНІЧНО-ЗАХІДНОГО КУТА»	30
2.3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАКРИТОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ	31
2.5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ВІДКРИТОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ	38
2.5.1. <i>Стислі теоретичні зведення</i>	38
2.5.2. <i>Приклад розв'язання задачі</i>	40
2.6. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ	42
2.7. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	45
ТЕМА 3. ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	46
3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	46
3.2. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	46
3.3. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	48
3.4 ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ	52
3.5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	56
ТЕМА 4. ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	57
4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	57
4.2. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ ГОМОРІ	57
4.3 МЕТОД ГІЛОК І МЕЖ.....	60
4.4. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ.....	67
4.5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	69
ТЕМА 5. ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ІГОР	70
5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	70
5.2. РОЗВ'ЯЗОК ГРИ ІЗ СІДЛОВОЮ ТОЧКОЮ	70
5.3. РОЗВ'ЯЗОК ГРИ, ЩО НЕ МАЄ СІДЛОВОЇ ТОЧКИ	71
5.4. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ІГОР ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	72
5.5 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ	76
5.6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	78
ТЕМА 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	80
6.1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	80
6.2. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	80
6.3 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ	82
6.4 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	84
ТЕМА 7. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	85
7.1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	85
7.2 АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА	85
7.3 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ	87
7.4 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	89

ТЕМА 8. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	91
8.1. Градієнтний метод із дробленням кроку	91
8.2. Метод найкоршого спуску	93
8.3. Неградієнтні методи	94
8.4 Варіанти завдань	96
8.5 Контрольні запитання.....	97
ТЕМА 9. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	98
9.1 Алгоритм методу динамічного програмування	98
9.2 Варіанти завдань	102
9.3 Контрольні запитання.....	110
ПДСУМКИ	111
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	112
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	113

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для аудиторної і самостійної підготовки студентів по курсу "Математичне програмування"

Навчальна дисципліна "Математичне програмування" дає знання та уміння застосування методів математичного програмування, базових знань із математичного моделювання, використання пакетів прикладних програм при розв'язанні оптимізаційних задач за фахом.

Математичне програмування – складова навчально-методичного забезпечення підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за професійним спрямуванням 0501 Економіка і підприємництво, 0502 Менеджмент.

Дисципліна викладається студентам спеціальностей 6.050102 Економічна кібернетика, 6.050104 Фінанси, 6.050106, Облік і аудит, 6.050104 Економіка підприємництва, 6.050201 Менеджмент організацій, 6.050206 Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності.

Матеріал, що викладається в дисципліні "Математичне програмування" використовується дисциплінами "Моделювання економіки", "Економічна кібернетика", "Імітаційне моделювання", "Економетрика", "Економіка підприємства", "Економіко–математичні моделі управління фінансовими операціями", "Методи прийняття рішень" та ін.

При вивченні дисципліни "Математичне програмування" студенти розв'язують такі основні задачі:

- формулювання та постановка оптимізаційних задач;
- розв'язання оптимізаційних задач за допомогою математичних методів;
- вибору відповідних методів для розв'язування складних задач оптимізації;
- економічного обґрунтування оптимізаційних задач.

Вивчення дисципліни "Математичне програмування" формує у студентів знання, які дозволяють знаходити найкращі стратегії управління економічними об'єктами в умовах ринкової економіки.

ТЕМА 1: ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Вивчивши зміст теми, студент має опанувати графічні та аналітичні методи розв'язання лінійних оптимізаційних задач.

1.1. Загальна постановка задачі

Задачами лінійного програмування називають задачі оптимізації, що мають такі особливості:

- критерій оптимізації є лінійною функцією від невідомих задачі x_1, x_2, \dots, x_n ;
- обмеження, що накладаються на можливі розв'язки мають тип лінійних рівностей або нерівностей;
- змінні приймають не від'ємні значення.

1.2. Математична постановка задачі

Математична постановка задачі лінійного програмування в загальному випадку формулюється таким чином.

Нехай x_j - невідомі задачі, a_{ij} - коефіцієнти при невідомих, b_i -обмеження, Z - критерій оптимізації, c_j -коефіцієнти при невідомих у математичному формулюванні критерію оптимізації.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (I)$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \text{opt}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Необхідно визначити такі невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, що задовольняють умовам (I), при яких лінійна функція Z перетворюється в оптимум (мінімум або максимум у залежності від економічного змісту задачі).

1.3. Графічне розв'язання задачі лінійного програмування

Задача лінійного програмування (I) при кількості змінних x_i не більше трьох може бути розв'язана графічно.

Нехай маємо задачу

$$Z = 12x_1 + 15x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 & (2) \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10 & (3) \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 .$$

Обмеження (2, 3) системи (II) відкладають у відрізках на осях x_1 і x_2 .

Для обмеження (2) $4x_1 + 3x_2 \leq 12$ отримуємо розв'язання у такий спосіб: перетворюємо нерівність у рівність $4x_1 + 3x_2 = 12$. Знаходимо перетинання цього обмеження з осями x_1 і x_2 . Перетинання з віссю x_1 знаходимо, підставляючи в (2) $x_2 = 0$,

$$4x_1 = 12, x_1 = 3.$$

Перетинання з віссю x_2 знаходимо, підставляючи в (2) $x_1 = 0$,

$$3x_2 = 12, x_2 = 4.$$

З'єднуючи точки на осях $x_1 = 3$ і $x_2 = 4$ прямою відкладаємо обмеження(2) на рис.1.1. Таким само чином будуємо обмеження (3). Для побудови цільової функції (1) прирівняємо Z до певного значення h (нехай $h = 30$). Тоді одержимо: $12x_1 + 15x_2 = 30$.

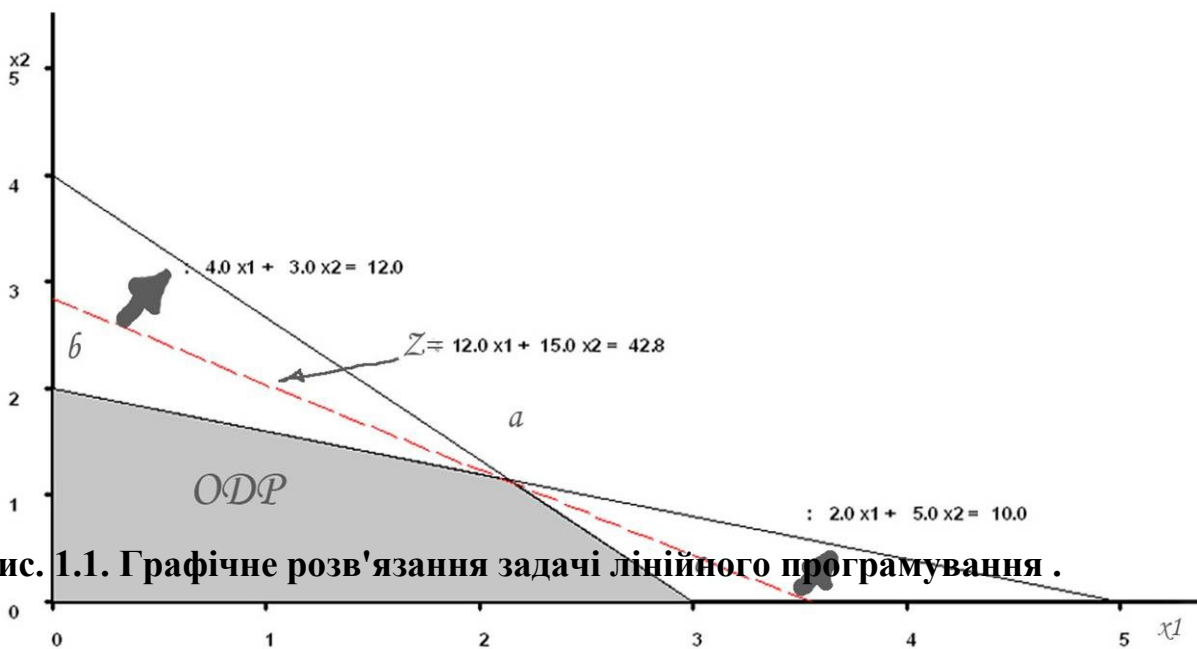


Рис. 1.1. Графічне розв'язання задачі лінійного програмування .

Будуємо цільову функцію почергово прирівнюючи до нуля x_1 і x_2 і відшукуючи перетинання з осями. У результаті цих побудов одержуємо простір розв'язків і цільову функцію (рис. 1.1).

Для того щоб визначити бік в який діє обмеження (2), беруть точку з однієї зі сторін (напівплощин) по відношенню до лінії обмеження, наприклад, $(x_1=1, x_2=1)$, відкладають її на графіку. Підставляють значення $x_1=1, x_2=1$ у формулу обмеження (2) і перевіряють чи виконується нерівність $4 + 3 \leq 12$. Нерівність виконується, тому точка $(1, 1)$ знаходиться в області дії обмеження, яка зазначена штрихуванням. Якщо б обмеження (2) не задовольнялося при $x_1=1$ і $x_2=1$, то це б означало, що воно діє в протилежний бік.

Виконавши побудову областей дії всіх обмежень, знайдемо область, яка задовольняє всім обмеженням одночасно. Ця область називається областю припустимих розв'язань (ОПР) - область (o, b, a, c) .

ОПР задач лінійного програмування опукла, тобто будь-який відрізок, що з'єднує дві довільно обрані точки даної множини, лежить усередині або проходить уздовж межі цієї області $(0, b, a, c)$.

Вершини $0, b, a, c$ називаються екстремальними точками - вони не можуть належати до внутрішньої частини жодного з відрізків, що з'єднують дві різні точки аналізованої множини.

Розв'язання задач лінійного програмування знаходяться або у вершинах o, a, b, c або на відрізках $[o, b]$, $[a, b]$, $[a, c]$, $[o, c]$.

Для того щоб визначити максимум функції цілі Z , необхідно переміщати пряму функції Z на графіку (Рис. 1.1) паралельно самій собі вгору (за напрямком зазначеним стрілкою) до граничної точки ОПР. Такою точкою є точка a . Тому максимум функції цілі досягається в точці a , де $x_1=2,14, x_2=1,14, Z=42,86$. Знайдене розв'язання є єдиним розв'язком задач лінійного програмування.

1.4. Аналітичне розв'язання задач лінійного програмування за допомогою симплексного методу

Для розв'язання задач лінійного програмування при довільному числі змінних x_j застосовуються обчислювальні методи, найбільш універсальним, серед яких є симплексний метод.

Розглянемо застосування цього методу на такому прикладі. Знайти максимум цільової функції

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \longrightarrow \max ; \quad (0)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 & (1) \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120 & (2) \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 & (3) \end{cases} ; \quad (III)$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 ; x_4 \geq 0.$$

Позначимо значення цільової функції x_0 і введемо додаткові змінні x_5, x_6, x_7 . Перетворимо нерівності (1),(2),(3) у рівності, додавши в них відповідно змінні x_5, x_6, x_7 . У результаті одержимо систему рівнянь (IV), що називають основною задачею лінійного програмування (ОЗЛП).

$$\begin{aligned} x_0 - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 &= 0 & (0) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15 & (1) \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 &= 120 & (2) \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 &= 100 & (3) \end{aligned} \quad (IV)$$

Уведення змінної x_0 (рядок 0) дозволяє записати цільову функцію у вигляді рівняння.

1 Розглянемо покрокове виконання симплексного методу.

1 На першому кроці вибирають початковий припустимий розв'язок системи рівнянь (IV). Існує безліч таких розв'язків, але зручніше усього почати з $x_0=0, x_5=15, x_6=120, x_7=100, x_1=x_2=x_3=x_4=0$. Це розв'язання називається початковим базисним розв'язком, а змінні x_0, x_5, x_6, x_7 – базисними змінними, інші змінні x_1, x_2, x_3, x_4 називаються небазисними.

2Базис - це максимальне число лінійно незалежних рівнянь у системі (IV). У нашому випадку це чотири рівняння і тому маємо чотири базисні змінні.

2 Крок 2 симплексного алгоритму дозволяє визначити змінну, яка ввійде у черговий базис, що дозволить збільшити значення цільові функції x_0 . Для цього виконаємо інтерпретацію коефіцієнтів у рядку 0 (цільової функції). Кожний елемент у рядку 0 визначає позитивний (якщо перед ним стоїть знак мінус) або негативний (якщо перед ним стоїть знак плюс) приріст x_0 при збільшенні на одиницю відповідної небазисної змінної.

Для визначення змінної, що повинна вийти з базису застосовують такий критерій: *Симплекс - критерій I (для максимізації).*

Якщо в рядку 0 є небазисні змінні, коефіцієнти при яких від'ємні, потрібно вибрати змінну з найбільшим абсолютним значенням коефіцієнта, що стоїть перед нею, тобто ту змінну, що забезпечує найбільше питоме збільшення значення цільової функції. Якщо всі небазисні змінні в рядку 0 мають позитивні або нульові коефіцієнти, то оптимальне розв'язання отримане.

Відповідно до симплекс - критерію I необхідно ввести в базис змінну x_4

3 Крок 3 дозволяє визначити змінну, яку виведуть із базису. Оскільки ми вводимо в базис змінну x_4 , то чим більше значення x_4 , тим сильніше зростає значення x_0 , але потрібно пам'ятати про обмеження (IV)

Збільшення x_4 можливо лише за рахунок зменшення базисних змінних у кожному рівнянні (IV), що містить x_4 із позитивним коефіцієнтом. Змінну x_4 можна збільшувати доти, поки одна з базисних змінних, що зменшується, досягне своєї нижньої межі, тобто нуля. Легко помітити, що змінна x_7 досягає такої межі першою при $x_4=100/15=6,67$. Отже x_7 вийде з базису, а x_4 увійде в базис із значенням рівним 6,67. Резюмуємо сказане в наступному правилі.

Симплекс - критерій II.

Розглядаємо відношення значень базисних змінних (базисне розв'язання) до відповідних коефіцієнтів при новій базисній змінній (крім нульових і від'ємних коефіцієнтів). Вибираємо найменше відношення. Дорівнюємо нову базисну змінну цьому відношенню. Змінна, що відповідає найменшому відношенню виходить із базису.

Результати обчислень наведені в таблиці 1.1

Застосування симплекс - критерію II

Таблиця 1.1

Базисні змінні	Базисний розв'язок	Коефіцієнти при x_4	Значення відношень	Мінімальне відношення.	Коментар
x_0	0				
x_5	15	1	15		у базис увійде $x_4=6,67$
x_6	120		60		вийде з базису
x_7	100	15	6,67	6,67	$x_7=0$

Обчислення за симплекс - методом зручніше виконувати у вигляді таблиці 1.2. У частині таблиці, що відповідає ітерації 0 переписані коефіцієнти системи IV, базисні змінні та їхні значення.

Стовпчик таблиці 1.2, якому відповідає змінна, що вводиться в базис називається *розв'язуючим стовпчиком*. Рядок цієї таблиці, якому відповідає змінна, що виводиться з базису - *розв'язуючим рядком*.

Елемент, що знаходиться на перетинанні розв'язуючого рядка і розв'язуючого стовпчика - називається *розв'язуючим елементом*.

Для ітерації 0 розв'язуючий стовпчик - x_4 , розв'язуючий рядок - x_7 , розв'язуючий елемент - 15.

4 Крок 4 Складається з операцій заміни базису. Змінна, що знаходиться в базисі, наприклад, x_5 для ітерації 0 у відповідному стовпчику таб. 1.2 має коефіцієнти рівні нулю для всіх рядків, крім рядка 1 (рядка x_5). У

наслідок заміни базису на першій ітерації x_4 ввійде в базис і у відповідному стовпчику x_4 коефіцієнти в рядках 0', 1', 2' повинні стати рівними нулю, а коефіцієнт рядка 3' цього стовпчика повинен стати рівним 1.

Розрахунки прикладу за симплекс-методом Таблиця 1.2

N	Базис	Базисний розв'язок	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	№ рядка
0	x0	0	-4	-5	-9	-11		0	0	0
	x5	15	1	1	1	1	1	0	0	1
	x6	120	7	5	3	2	0	1	0	2
	x7	100	3	5	10	15	0	0	1	3
1	x0	73 1/3	-1 4/5	-1 1/3	-1 2/3	0	0	0	11/15	0'
	x5	8 1/3	4/5	2/3	1/3	0	1	0	- 1/15	1'
	x6	106 2/3	6 3/5	4 1/3	1 2/3	0	0	1	- 2/15	2'
	x4	6 2/3	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15	3'
2	x0	92 1/12	0	1/6	- 11/12	0	2 1/4	0	7/12	0''
	x1	10 5/12	1	5/6	5/12	0	1 1/4	0	- 1/12	1''
	x6	37 11/12	0	-1 1/6	-1 1/12	0	-8 1/4	1	5/12	2''
	x4	4 7/12	0	1/6	7/12	1	- 1/4	0	1/12	3''
3	x0	99 2/7	0	3/7	0	1 4/7	1 6/7	0	5/7	0'''
	x1	7 1/7	1	5/7	0	- 5/7	1 3/7	0	- 1/7	1'''
	x6	46 3/7	0	- 6/7	0	1 6/7	-8 5/7	1	4/7	2'''
	x3	7 6/7	0	2/7	1	1 5/7	- 3/7	0	1/7	3'''

Виконаємо ці перетворення.

1. Розділимо всі елементи розв'язуючого рядка 3 на 15 і запишемо результат у розділ таблиці ітерації 1 - рядок 3'. У результаті ми домоглися того, що елемент на перетинанні рядка 3' і стовпчика x_4 став рівним 1.
2. Додамо поелементно рядок 3' помножений на 11 до рядка 0 і отримаємо рядок 0'. У результаті елемент на перетинанні рядка 0' і стовпчика x_4 став рівним нулю.
3. Додамо поелементно рядок 3' помножений на -1 до рядка 1 і одержимо рядок 1'. У результаті елемент на перетинанні рядка 1' і стовпчика x_4 став рівним нулю.
4. Додамо поелементно рядок 3' помножений на -2 до рядка 2 і отримаємо рядок 2'. У результаті елемент на перетинанні рядка 2' і стовпчика x_4 став рівним нулю.

5. На цьому заміна базису для першої ітерації закінчується. Для всіх наступних ітерацій викладені вище дії повторюються. Таким чином можна підсумувати кроки алгоритму.

Таким чином можна підсумувати кроки алгоритму.

Алгоритм симплексного методу

Крок 1. Знайти початкове припустиме розв'язання.

Крок 2. Застосувати симплекс - критерій 1. Якщо оптимальний розв'язок досягнуто, припинити розрахунки, інакше перейти до кроку 3.

Крок 3. Застосувати симплекс - критерій 2.

Крок 4. Виконати заміну базису.

Крок 5. Перейти до кроку 2.

Результати розрахунків приведені в таблиці 1.2. Оптимальний розв'язок : $x_1=71/7$, $x_2=0$, $x_3=76/7$, $x_6=63/7$, при цьому значення цільової функції дорівнює $Z=99\ 2/7$. Базисна змінна x_6 додаткова, тому її відкидаємо.

1.5 Метод штучного базису

Метод штучного базису – це метод вибору початкового базису. У загальному випадку задача лінійного програмування формулюється з обмеженнями типу \geq і \leq . Тому ОЗЛП буде формуватися не тільки з позитивними додатковими змінними, для обмежень типу \leq , але і з від'ємними додатковими змінними для обмежень типу \geq .

Якщо обмеження типу \leq , то додаткова змінна x_{j+1} входить у i -е рівняння ОЗЛП із коефіцієнтом рівним одиниці, і її можна включити до базису. Якщо обмеження типу \geq , то додаткова змінна x_{j+1} входить у i -е рівняння з коефіцієнтом мінус одиниця, і її включати в базис не можна (умова невід'ємності змінних задачі $x_{j+1} \geq 0$ не виконується). Тоді потрібно застосувати такий прийом. В рівняння ОЗЛП які відповідають обмеженням типу \geq чи $=$ вводяться штучні змінні y_i .

Перетворення має наступний вигляд:

$$\text{Нехай обмеження має вигляд } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$$

$$\text{Перетворимо його в рівняння } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{j+1} = b_i$$

Додамо штучну змінну y_i

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{j+1} + 1 \cdot y_i = b_i, \quad i=1, \dots, m,$$

де $y_i \geq 0$.

Змінну y_i називають штучною, тому що вона з'явилася в результаті математичного трюку. Вибираємо у якості базисної, позитивну штучну змінну y_i , замість від'ємної додаткової змінної x_{j+1} . Отриманий базис називають штучним базисом

Умова А. На заключній симплекс-ітерації y_i повинна вийти з базису (перетворитися в нуль). Якщо цього не відбулося і на останній симплекс ітерації, принаймні, одна з y_i увійде в базис із позитивним значенням, то це означає несумісність умов задачі.

Виконання умови А можна забезпечити методом штучного базису. Додамо до цільової функції суму всіх штучних змінних y_i із загальним коефіцієнтом M , значення якого виберемо достатньо великим.

$$x_0 - \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m M y_i = 0$$

Коефіцієнт M має сенс негативного питомого прибутку. Наступним кроком є виключення всіх змінних y_i з цільової функції. Помножимо рівняння обмежень з штучними змінними на $-M$. Додамо до цільової функції отримані рівняння. У результаті отримаємо

$$x_0 - \sum_{j=1}^n c_j x_j - M \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = -M \sum_{i=1}^m b_i,$$

На цьому перетворення за методом штучного базису закінчуються. Після цього до обмежень і перетвореної цільової функції, застосовується симплексний метод.

Розглянутий метод штучного базису можна пояснити за допомогою простого прикладу. Розглянемо наступну задачу:

Максимізувати $-3x_1 - 2x_2$

при обмеженнях

$$1 \begin{cases} x_1 + 1x_2 = 10 \\ 1x_1 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Після додавання в обмеження $1x_1 \geq 4$ додаткової змінній x_3 з коефіцієнтом -1 , модель може бути записано у вигляді

$$\begin{aligned} x_0 + 3x_1 + 2x_2 &= 0 & (\text{рядок } 0) \\ 1x_1 + 1x_2 &= 10 & (\text{рядок } 1) \\ 1x_1 - 1x_3 &= 4 & (\text{рядок } 2) \end{aligned}$$

Уведемо штучні змінні y_1 і y_2 і нехай $M = 10$. В результаті маємо

$$\begin{aligned} x_0 + 3x_1 + 2x_2 + 10y_1 + 10y_2 &= 0 & (\text{рядок } 0), \\ 1x_1 + 1x_2 + 1y_1 &= 10 & (\text{рядок } 1), \\ 1x_1 - 1x_3 + 1y_2 &= 4 & (\text{рядок } 2) \end{aligned}$$

Виключимо з цільової функції штучні змінні y_1 і y_2 шляхом віднімання рядків 1 і 2, помножених на 10 ($M = 10$), з рядка 0:

$$\begin{aligned} x_0 - 17x_1 - 8x_2 + 10x_3 &= -140 & (\text{рядок } 0), \\ 1x_1 + 1x_2 + 1y_1 &= 10 & (\text{рядок } 1), \\ 1x_1 - 1x_3 + 1y_2 &= 4 & (\text{рядок } 2). \end{aligned}$$

На цьому перетворення за методом штучного базису закінчуються. Наступним кроком є, перехід до обчислень відповідно до симплексного алгоритму, якій було розглянуто раніше.

1.6. Двоїстість в лінійному програмуванні

Кожній задачі лінійного програмування із змішаними обмеженнями, що мають вид

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m_i, \quad m_i \leq m,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_i + 1, m_i + 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

можна поставити у відповідність іншу задачу, яка називається двоїстою по відношенню до першої:

$$F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 \leq n$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, \quad j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad m_1 \leq m.$$

Спільний розгляд таких пар задач дозволяє досліджувати вплив змінних системи на значення цільової функції, проводити економічний аналіз результатів розрахунків.

Співставляючи форми запису прямої і двоїстої задач, можна встановити наступні взаємозв'язки:

1. якщо пряма задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації, і навпаки;
2. коефіцієнти цільової функції прямої задачі c_1, c_2, \dots, c_n стають вільними членами обмежень двоїстої задачі;
3. вільні члени обмежень прямої задачі b_1, b_2, \dots, b_m стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі;
4. матрицю обмежень двоїстої задачі знаходять транспонуванням матриці обмежень прямої задачі;
5. число змінних двоїстої задачі дорівнює числу обмежень прямої, а число обмежень двоїстої дорівнює числу змінних прямої задачі, і навпаки;
6. взаємно однозначна відповідність між змінними прямої задачі і обмеженнями двоїстої задачі задовольняє наступному положенню: j -е обмеження двоїстої задачі буде нерівністю, якщо на j -ю змінну початкової задачі накладена вимога позитивності, в протилежному випадку j -е обмеження буде рівністю.

Приклад

$$F(x) = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq 1,$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 14,$$

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Щоб записати задачу, двоїстої до даної задачі, приведемо систему обмежень до виду

$$F(x) = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq -1,$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 14,$$

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$-x_1 - x_2 \leq -10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Задача, двоїста до даної задачі, матиме вигляд

$$\tilde{F}(Y) = -y_1 + 14y_2 + 3y_3 - 10y_4 \rightarrow \min;$$

$$-2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1,$$

$$3y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 3,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Розв'язок прямої задачі $F(x) = 7, x_1 = 8, x_2 = 5$.

Розв'язок двоїстої задачі $\tilde{F}(Y) = 7, y_1 = 2, y_2 = 0, y_3 = 3, y_4 = 0$

Пара задач може бути несиметричною і симетричною. В симетричних задачах система обмежень задається у вигляді нерівностей і на змінні накладено умову позитивності.

В несиметричних задачах система обмежень прямої задачі задається рівністю, а в двоїстій — нерівностями. При цьому в двоїстій задачі змінні можуть бути від'ємними.

Оскільки систему нерівностей можна звести до системи рівності за допомогою додаткових змінних, то всяку пару симетричних задач можна зобразити у вигляді пари несиметричних задач.

Наведемо в матричному вигляді математичні моделі симетричних і несиметричних пар задач.

Симетричні пари задач

I Пряма

$$\begin{aligned} F(X) &= C^T X \rightarrow \max; \\ AX &\leq B, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Двоїста

$$\begin{aligned} \tilde{F}(Y) &= B^T Y \rightarrow \min; \\ A^T Y &\geq C, \\ Y &\geq 0. \end{aligned}$$

II. Пряма

$$\begin{aligned} F(X) &= C^T X \rightarrow \min; \\ AX &\geq B, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Двоїста

$$\begin{aligned} \tilde{F}(Y) &= B^T Y \rightarrow \max; \\ A^T Y &\leq C, \\ Y &\geq 0. \end{aligned}$$

Несиметричні пари задач

III Пряма

$$\begin{aligned} F(X) &= C^T X \rightarrow \max; \\ AX &= B, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Двоїста

$$\begin{aligned} \tilde{F}(Y) &= B^T Y \rightarrow \min; \\ A^T Y &\geq C, \\ - \end{aligned}$$

IV Пряма

$$\begin{aligned} F(X) &= C^T X \rightarrow \min; \\ AX &= B, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Двоїста

$$\begin{aligned} \tilde{F}(Y) &= B^T Y \rightarrow \max; \\ A^T Y &\leq C, \\ - \end{aligned}$$

Зв'язок між математичними моделями прямої і двоїстої задач дозволяє на підставі теорем двоїстості встановити залежність між оптимальним рішенням прямої задачі і значенням оптимальних змінних двоїстої задачі, і навпаки.

Оптимальні значення цільових функцій прямої і двоїстої задачі співпадають. Тому рішення двоїстої задачі може використовуватися для перевірки рішення прямої задачі.

Приклад. Знайти

$$\begin{aligned}
F &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min; \\
x_1 - 2x_2 &\leq 3, \\
2x_1 - x_2 &\leq 10, \\
3x_1 - x_2 &\geq -5, \\
-x_1 + x_2 &\geq 3; \\
x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Оскільки система обмежень задана у вигляді нерівностей, можна розглядати в даному випадку симетричну пару задач. Приведемо математичну модель прямої задачі до виду I:

$$\begin{aligned}
F' &= -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max; \\
x_1 - 2x_2 &\leq 3, \\
2x_1 - x_2 &\leq 10, \\
-3x_1 + x_2 &\leq 5, \\
x_1 - x_2 &\leq -3; \\
x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Двоїста задача матиме вигляд

$$\begin{aligned}
\tilde{F} &= 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4 \rightarrow \min; \\
y_1 + 2y_2 - 3y_3 + y_4 &\geq -3, \\
-2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 &\geq -2; \\
y_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 4.
\end{aligned}$$

Оптимальним рішенням прямої задачі буде, $F'_{\max} = -6$, ($F_{\min} = 6$), $x_1^{opt} = 0$, $x_2^{opt} = 3$

Оптимальним рішенням двоїстої задачі $\tilde{F}_{\min} = -6$, при $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, $y_4 = 2$.

Якщо i -а змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідне їй обмеження прямої задачі, на підставі теореми подвійності, виконується як строга нерівність. Якщо i -а змінна двоїстої задачі відмінна від нуля, то її значенням визначає приріст значення цільової функції при зміні b_i ;

$$\Delta F_{\max} = y_i \Delta b_i,$$

Змінні y_i називають **прихованими доходами**. Якщо праві частини b_i прямої задачі визначають об'єми наявних ресурсів, то y_i дорівнює збільшенню

прибутку за рахунок збільшення даного ресурсу на одиницю, за умови, що підприємство функціонує в оптимальному режимі.

1.6 Варіанти індивідуальних завдань

Порядок виконання роботи:

- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.
- вивчити постановку задачі;
- вирішити задачу графічно і симплексним методом відповідно до варіанта;
- проаналізувати отримане рішення й оформити звіт.

Зміст звіту

- ❖ На основі виконаного індивідуального завдання підготувати письмовий звіт який має містити наступні складові:

- стислі теоретичні положення;
- формулювання математичної моделі;
- результати розв'язання задачі, подані у вигляді графіка і таблиці;
- зробити висновки по роботі.

Варіант 1

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_3 \leq 8 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 3x_1 + 4x_2 \begin{cases} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{cases} ?$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 22 \\ x_1 + 7x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 2

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 4x_1 + 10x_2 + x_3 + 6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq x_3 \\ x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 9x_1 + 4x_2 \begin{cases} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{cases} ?$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 3

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 2x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 2x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 5x_1 + 7x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 28 \\ x_1 + 4x_2 \geq 26 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 4

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = x_1 + x_2 + 3x_3 - 4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq x_1 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ 4x_1 \geq x_3 + 2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 3x_1 + 2x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 5

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 2x_2 + 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\ x_2 + x_3 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = x_1 + 5x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 6

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 2x_1 - 2.5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 1.5x_2 \leq 3 \\ 4x_1 - 1.5x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 28 \\ 1.7x_2 + x_1 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 5x_1 + 3x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 17 \\ x_1 + 2x_2 \leq 34 \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 7

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_2 + x_3 \leq 2x_1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 9x_1 + 2x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 \geq 15 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 100 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 8

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 - 10 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3 \leq x_2 \\ x_1 + 2x_3 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 4x_1 + 3x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 23 \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 9

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 10 \\ x_2 + x_3 \leq 1.5x_1 \\ x_2 \leq x_1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 5x_1 + x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 53 \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 10

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \leq 2x_1 \\ x_1 - 2x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \end{cases}$$

в) Розв'язати графічно

$$f = x_1 + 8x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + 4x_2 \geq 26 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, 2, 3$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 11

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 25x_1 + 13x_2 + 0.5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2x_1 \\ x_1 - 2x_3 \leq -29 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 3x_1 + 2x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 12

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1 - 2x_3 \leq -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 3x_1 + 4x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 97 \\ x_1 + 7x_2 \leq 77 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 13

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 2x_1 + 13x_2 + 3.5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 32x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 23 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 \geq 15 \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 5x_1 + x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 53 \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 14

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 36x_1 + 26x_2 + 6.0x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 17x_1 + 12x_2 - 3x_3 \leq 133 \\ 32x_1 - 23x_2 - 7x_3 \geq 34 \\ 41x_1 + 11x_2 + 10x_3 \geq 50.5 \end{cases}$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 6x_1 + 4x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 15

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 12x_1 + 32x_2 + 4.0x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 \leq 24 \\ 3x_1 + 1x_2 - 1x_3 \leq 10 \\ 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 \geq 50.5 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 9x_1 + 2x_2 \begin{cases} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{cases} ?$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 11 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 16

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 16x_1 + 32x_2 + 16.0x_3 + 0.5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 17x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 133 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 \geq 24 \\ 41x_1 + 11x_2 + 10x_3 + 6x_4 \leq 55 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 9x_1 + 2x_2 \begin{cases} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{cases} ?$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 11 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 17

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 1x_1 + 2.5x_2 + 3.0x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ 4x_1 - 1.5x_2 + 4x_3 \leq 3 \\ 7x_1 + 6x_2 - 1x_3 \leq 28 \\ 1.7x_1 + 1x_2 + 2x_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 9x_1 + 2x_2 \begin{cases} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{cases} ?$$

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \geq 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 110 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 18

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 1x_1 + 1.0x_2 + 1.0x_3 \rightarrow \max$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 3x_1 + 8x_2 \begin{cases} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{cases} ?$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 2.0x_2 \leq 12 \\ 1x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ 1x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leq 36 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 19

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 25x_1 + 3.0x_2 + 6.5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2.0x_1 + 1.0x_2 + 1x_3 \geq 18 \\ 1x_1 + 2x_3 \leq 29 \\ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 3x_1 + 1.3x_2 \begin{cases} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{cases} ?$$

$$\begin{cases} 22x_1 - 6x_2 \geq 48 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 4x_2 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 20

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 25x_1 + 3.0x_2 + 6.5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 3.0x_2 + 6x_3 \geq 7 \\ 3x_1 + 0.0x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ 2x_1 + 12x_2 - 1x_3 \leq 78 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 4x_1 + 3x_2 \begin{cases} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{cases} ?$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 37 \\ 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 21

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 5x_1 + 0,15x_2 + 1.5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 2.0x_2 + 4x_3 \geq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 30 \\ 3x_1 + 10x_2 - 3x_3 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 7x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ -3x_1 + 11x_2 \geq 25 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 22

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 2x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 \rightarrow \max$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 2x_1 + 6x_2 \begin{cases} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{cases} ?$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6.0x_2 \leq 36 \\ 3x_1 + 6x_3 \geq 48 \\ 3x_1 + 6x_2 - 12x_3 \leq 45 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\begin{cases} -6x_1 + 4x_2 \leq 35 \\ 2.5x_1 - 3x_2 \leq 13 \\ 4x_1 + 8x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 23

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \leq 2x_1 \\ x_1 - 2x_3 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = x_1 + 8x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min ? \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 40 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 24

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 2x_2 + 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 12 \\ x_2 + x_3 \leq 17 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = x_1 + 5x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min ? \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 7 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 25 \\ -5x_1 + 4x_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 25

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 6 \leq 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_3 \leq 16 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 3x_1 + 6x_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min ? \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 37 \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 26

а) Розв'язати симплексним методом

$$15x_1 + 12x_2 + 0.5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ 4x_1 - 1.5x_2 + 4x_3 \leq 3 \\ 7x_1 + 6x_2 - 1x_3 \leq 28 \\ 1.7x_1 + 1x_2 + 2x_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 7x_1 + 4x_2 \begin{cases} \max \\ \min \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 28 \\ x_1 + 4x_2 \geq 26 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Варіант 27

а) Розв'язати симплексним методом

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \leq 2x_1 \\ x_1 - 2x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 2x_1 + 5x_2 \begin{cases} \max \\ \min \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 40 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Варіант 28

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_2 + x_3 \leq 2x_1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 2x_1 + 5x_2 \begin{cases} \max \\ \min \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 53 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 71 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 29

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = 16x_1 + 32x_2 + 16x_3 + 0.5x_4 \rightarrow \max$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 5x_1 + x_2 \begin{cases} \max \\ \min \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 95 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 \geq 22 \\ 41x_1 + 11x_2 + 10x_3 + 6x_4 \leq 50 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 54 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Варіант 30

а) Розв'язати симплексним методом

$$Z = x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq x_1 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \\ 4x_1 \geq 3x_3 + 2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

в) Розв'язати графічно

$$f = 3x_1 + 2x_2 \begin{cases} \max \\ \min \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 35 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

1.6 Контрольні запитання

- Сформулюйте загальну і математичну постановку задачі лінійного програмування.
- Що таке базисний розв'язок?
- Сформулюйте симплекс-критерій I та симплекс-критерій II.
- Сформулюйте кроки симплексного алгоритму.
- Для чого застосовується метод штучного базису?

В темі розглянуто розв'язання оптимізаційних задач симплексним та графічними методами, роз'яснені особливості розв'язків.

ТЕМА 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

Вивчивши зміст теми, студент має опанувати аналітичні методи розв'язання оптимізаційних розподільних транспортних задач закритого та відкритого типів.

2.1. Загальна постановка транспортної задачі

Транспортна задача лінійного програмування формулюється так. Маємо m пунктів відправлення A_1, A_2, \dots, A_m , у яких знаходяться запаси якогось однорідного вантажу в кількості відповідно a_1, a_2, \dots, a_m одиниць. Крім того, є n пунктів призначення B_1, B_2, \dots, B_n , що подали заявки відповідно на b_1, b_2, \dots, b_n одиниць вантажу. Передбачається, що сума всіх заявок дорівнює сумі всіх запасів, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2.1)$$

*Транспортні задачі в яких виконується умова (2.1) називаються за-
критими транспортними задачами. Якщо умова (2.1) не виконується
то задача називається закритою.*

Позначимо c_{ij} вартість перевезення одиниці товару від кожного пункту відправлення A_i до кожного пункту призначення B_j . Матриця вартостей C має вигляд

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Потрібно скласти такий план перевезень, при якому всі заявки були б виконані й загальна вартість усіх перевезень була мінімальною. Таким чином, у якості критерію обрана вартість перевезення вантажу. Критеріями в транспортній задачі можуть бути такі показники: відстань, час, потужність та ін. Транспортна задача, в якій виконується умова (2.1), називається закритою. Задача, у якій ця умова не виконується, називається відкритою.

2.2. Математична постановка закритої транспортної задачі

Математичне формулювання транспортної задачі може бути подано у такому вигляді: нехай x_{ij} — кількість вантажу, що відправляється з i -го пункту відправлення A_i в j -й пункт призначення B_j ($i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$), $x_{ij} \geq 0$. Змінні x_{ij} повинні задовольняти нерівностям (2.3. –2.9.).

Будь-яку сукупність значень x_{ij} ($i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$) називають планом перевезень. План, що задовольняє умовам (2.3) - (2.9), називають припустимим. Ранг системи (2.3) - (2.8) дорівнює $r = m + n - 1$, тоді в ній $(m + n - 1)$ базисних та $(m-1)(n-1)$ вільних змінних. Тому план, у якому відмінно від нуля не більш $m + n - 1$ змінних, а інші рівні нулю, називають опорним.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{1j} = a_1; \quad (2.3) \\ \sum_{j=1}^n x_{2j} = a_2; \quad (2.4) \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^n x_{mj} = a_m; \quad (2.5) \\ \sum_{i=1}^m x_{i1} = b_1; \quad (2.6) \\ \sum_{i=1}^m x_{i2} = b_2; \quad (2.7) \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^m x_{in} = b_n; \quad (2.8) \end{array} \right.$$

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (2.9)$$

Оптимальний план – це такий план, що серед усіх припустимих має найменшу вартість перевезень. Пошук оптимального плану виконується за допомогою транспортної таблиці 2.1.

Вартість перевезень c_{ij} поміщають у правому верхньому куті клітин таблиці. Клітини таблиці, у яких будемо записувати відмінні від нуля перевезення x_{ij} , називаються базисними. Таких клітин не більш ніж $m+n-1$. Порожні клітини називаються вільними, їх не менше $(m-1)(n-1)$.

Транспортна таблиця

Таблиця 2.1.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B ₁	B ₂	B ₃	...	B _n	
A ₁	c_{11}	c_{12}	c_{13}	...	c_{1n}	a ₁
A ₂	c_{21}	c_{22}	c_{23}	...	c_{2n}	a ₂
...
A _m	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	...	c_{mn}	a _m
Заявки	b ₁	b ₂	b ₃	...	b _n	$\sum a_i = \sum b_j$

Усі подальші дії з розв'язання транспортної задачі будуть зводиться до перетворення транспортної табл. 2.1, тобто до двох етапів:

- а) пошуку першого розв'язку методом «північно-західного кута»;
- б) пошуку оптимального розв'язку задачі за допомогою методу потенціалів.

2.3. Пошук першого розв'язку методом «північно-західного кута»

Продемонструємо застосування цього методу на прикладі транспортної табл. 2.2.

Вихідна таблиця для розрахунків

Таблиця 2.2

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
A ₁	13	7	14	7	5	30
A ₂	11	8	12	6	8	48
A ₃	6	10	10	8	11	20
A ₄	14	8	10	10	15	30
Заявки	18	27	42	15	26	128

Почнемо заповнення транспортної таблиці з лівого верхнього («північно-західного») кута. Пункт В1 подав заявку на 18 одиниць вантажу. Задовольнимо її із запасів А1 . Після цього в ньому ще залишиться $30 - 18 = 12$ одиниць вантажу. Віддаємо їх пункту В2. Але заявка цього пункту ще не задоволена. Виділимо відсутні 15 одиниць із запасів пункту А2 і т.д.. Застосовуючи таку методику, заповнимо до кінця перевезеннями x_{ij} транспортну табл. 2.3.

Розв'язок за методом північно-західного кута Таблиця 2.3

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	18	12	33	4	26	30
А2	11	15	9	11	26	48
А3	6	10	10	8	11	20
А4	14	8	10	10	15	30
Заявки	18	27	42	15	26	128

В отриманому опорному розв'язку маємо $r = n + m - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$ базисних клітин , та $(m - 1)(n - 1) = 3 \cdot 4 = 12$ вільних клітин .

Метод «північно-західного кута», як правило, дає не оптимальний опорний план. Тому для пошуку оптимального розв'язку застосовується метод потенціалів.

2.3. Розв'язання закритої транспортної задачі методом потенціалів

Після того як за допомогою методу «північно-західного кута» знайдений перший опорний план, виконаємо його поліпшення за допомогою метода потенціалів. Алгоритм метода показано на рис. 2.1. Поліпшення плану перевезень у цьому методі виконується за допомогою переміщення вантажів із клітини в клітину в транспортній таблиці без порушення балансу заявок і запасів. Переміщення вантажів у таблиці виконується за замкнутих циклом.

Циклом у транспортній таблиці називаються декілька клітин, сполучених замкнутою ламаною лінією, що повертає на 90° в окремих клітинах. Цикл будують так, щоб одна його вершина була у вільній клітині, інші вершини в базисних (заповнених) клітинах.

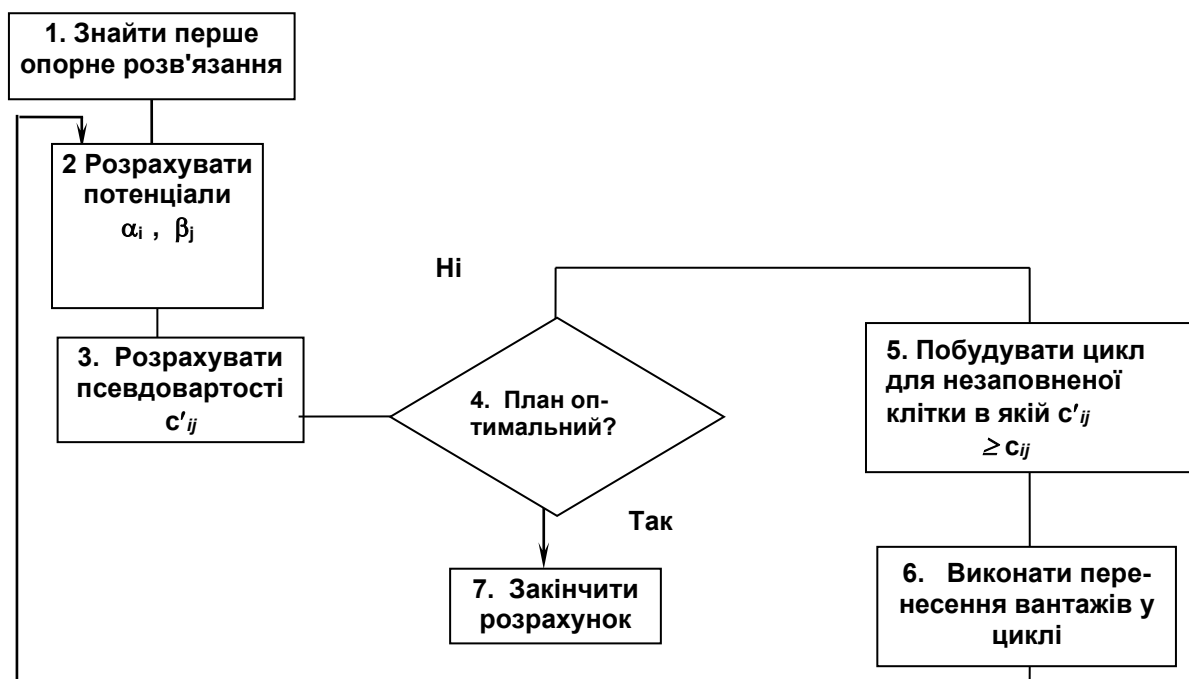


Рис. 2.1. Схема алгоритму методу потенціалів.

Існує теорема, відповідно до якої для будь-якої вільної клітини транспортної таблиці завжди існує цикл (притім єдиний), одна з вершин якого лежить у цій зведеній клітині, а всі інші (у базисних клітинах).

У кожному циклі замінюють одну вільну змінну на базисну, тобто заповнюють одну вільну клітину й натомість звільняють одну з базисних клітин. Цикл має парне число вершин. Будемо відзначати знаком «+» ті вершини, у яких у результаті переміщення вантажів перевезення збільшуються, а знаком «-», вершини, у яких вони зменшуються.

Перенести (перекинути) якусь кількість одиниць вантажу за циклом – це значить збільшити перевезення, що стоять у позитивних вершинах циклу, на цю кількість одиниць, а перевезення, що стоять у негативних вершинах, зменшити на ту ж кількість.

При переносі будь-якої кількості одиниць за циклом рівновага між запасами й заявками не змінюється. Кількість одиниць вантажу, що можна перемістити, визначається мінімальним значенням перевезень, що стоять у негативних вершинах циклу (якщо перемістити більше число вантажу, виникають негативні перевезення).

Зміна вартості перевезень при переміщенні однієї одиниці вантажу за циклом називають ціною циклу. Визначається ціна циклу як алгебраїчна сума вартостей перевезень, що стоять у вершинах циклу, причому, вартості, що стоять у позитивних вершинах, беруться зі знаком «+», а в негативних — із знаком «-». Для поліпшення плану перевезень доцільно переміщати вантажі тільки за тими циклами, ціна яких негативна.

Метод потенціалів дозволяє автоматично виділяти цикли з негативною ціною і визначити їхні ціни. Для цього поставимо у відповідність кожному пун-

кту відправлення (стовпчику) A_i число α_i , а кожному пункту призначення (рядку B_j) — число β_j . Ці числа називаються потенціалами. Визначимо значення α_i і β_j . Для цього складемо для базисних клітин $m + n - 1$ рівнянь с $m + n$ невідомими, тобто

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \quad (2.10)$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Система (2.10) має безкінечне число розв'язань. Тому для отримання одного з них приймемо $\alpha_1 = 0$. Розв'язуючи $m + n - 1$ рівнянь (2.10) методом підстановок, знаходимо інші потенціали

$$\alpha_i, \quad i = \overline{2, m}; \quad \beta_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Потім для незаповнених клітин обчислюють псевдовартості за формулою

$$c'_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

Для кожної незаповненої клітини ціна циклу перерахунку дорівнює різниці між вартістю c_{ij} та псевдовартістю c'_{ij} . Наступним кроком алгоритму є перевірка опорного розв'язання на оптимальність (рис.2.1). **Якщо для небазисних клітин плану ($x_{ij} = 0$)**

$$\alpha_i + \beta_j = c'_{ij} \leq c_{ij},$$

то план є оптимальним і в ніякий спосіб поліпшений бути не може. Це означає, що цикли з негативною вартістю відсутні. Якщо хоча б в одній вільній клітині псевдовартість більше вартості $|-c'_{ij}| > c_{ij}$, то план не є оптимальним і може бути поліпшений переносом вантажів за циклом, що відповідає даній вільній клітині.

Звичайно, для побудови циклу вибирають вільну клітину з найменшою негативною ціною $\gamma_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} = \min$. Далі на цій клітині будують цикл, виконують перекидання вантажів за циклом, у результаті чого визначають новий опорний план. Якщо отриманий опорний план усе ще не оптимальний, процедура поліпшення продовжується доти, поки не буде знайдений оптимальний план (2.1).

При розв'язанні транспортної задачі може бути отримано вироджене розв'язання, коли кількість базисних змінних менше ніж $m + n - 1$. У цьому випадку одна або декілька базисних клітин залишаються незаповненими, що утрудняє розрахунок потенціалів у розв'язку задачі. Тому для ліквідації виродження ставлять нуль у незаповнену базисну клітину (або клітини). Вважаємо цю клітину заповненою при обчисленнях у циклі.

Розв'яжемо задачу, сформульовану в табл.2.2. У результаті застосування методу «північно-західного кута» отримано перше опорне розв'язання, що занесене в табл.2.4 для подальших розрахунків.

Перша ітерація

Таблиця

2.4.

Пункти Відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	13 18	7 12	11 14	9 7	14 5	$\alpha_1=0$ 30
A2	14 11	8 15	12 33	10 6	15 8	$\alpha_2=1$ 48
A3	12 6	6 10	10 9	8 11	13 11	$\alpha_3=-1$ 20
A4	14 14	8 8	12 10	10 4	15 26	$\alpha_4=1$ 30
Заявки	18	27	42	15	26	128

$$\beta_1 = 13; \quad \beta_2 = 7; \quad \beta_3 = 11; \quad \beta_4 = 9; \quad \beta_5 = 14.$$

Значення цільової функції буде $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = 1442$.

Визначимо потенціали з рівнянь:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= 13; & \alpha_3 + \beta_3 &= 10; \\ \alpha_1 + \beta_2 &= 7; & \alpha_3 + \beta_4 &= 8; \\ \alpha_2 + \beta_2 &= 8; & \alpha_4 + \beta_4 &= 10; \\ \alpha_2 + \beta_3 &= 12; & \alpha_4 + \beta_5 &= 15. \end{aligned}$$

Прийнявши $\alpha_1 = 0$. Знайдемо $\alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1, \quad \alpha_4 = 1, \quad \beta_1 = 13;$
 $\beta_2 = 7; \quad \beta_3 = 11; \quad \beta_4 = 9; \quad \beta_5 = 14.$

Підрахуємо для незаповнених клітин псевдовартості за формулою

$$c'_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

Результати запишемо в табл.2.4. Псевдовартості будемо заносити в лівий верхній кут незаповнених клітин.

Аналізуючи табл.2.4 дійдемо висновку, що опорне розв'язання не оптимальне і може бути поліпшено. Найменша негативна ціна

$$\gamma_{ij}: \gamma_{15} = c_{15} - c'_{15} = 5 - 14 = -9.$$

Тому побудуємо на клітині (1, 5) цикл (табл.2.4). Виконаємо переміщення вантажів за циклом, результати помістимо в табл.2.5. Подальші розрахунки виконані в табл.2.5. - 2.10.

Друга ітерація

Таблиця

2.5

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	13 18	7 1	11 14	0 7	7 + 11	5	30 $\alpha_1 = 0$
A2	14 11	8 26 +	12 22	10 6	6 15	8	48 $\alpha_2 = 1$
A3	12 6	6 10	10 20	-1 8	4 4	11	20 $\alpha_3 = -1$
A4	23 14	17 8	21 + 10	10 15	10 - 15	15	30 $\alpha_4 = 10$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$$\beta_1 = 13; \quad \beta_2 = 7; \quad \beta_3 = 11; \quad \beta_4 = 9; \quad \beta_5 = 5.$$

$$Z = 1343$$

Третя ітерація

Таблиця 2.6.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	13 18 -	-4 7	0 14	0 7	7 + 12	5	30 $\alpha_1 = 0$
A2	25 11	8 27	12 21	12 6	6 17	8	48 $\alpha_2 = 12$
A3	23 6 +	6 10	10 20 -	10 8	8 15	11	20 $\alpha_3 = 10$
A4	23 14	6 8	10 + 1	10 15	10 - 14	15	30 $\alpha_4 = 10$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$$\beta_1 = 13; \quad \beta_2 = -4; \quad \beta_3 = 0; \quad \beta_4 = 0; \quad \beta_5 = 5.$$

$$Z = 1332$$

Четверта ітерація

Таблиця 2.7

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси						
	B1	B2	B3	B4	B5							
A1	13 4 -	7	17	14	17	7	17	7	5	26	30	$\alpha_1 = 0$
A2	8	11	27	8	21	12	12	6	0	8	48	$\alpha_2 = -5$
A3		6	6	10		10	10	8	-2	11	20	$\alpha_3 = -7$
A4	6	14	6	8	+ 15	10	-	10	-2	15	30	$\alpha_4 = -7$
Заявки	18		27		42		15		26		128	

$\beta_1 = 13; \beta_2 = 13; \beta_3 = 17; \beta_4 = 17; \beta_5 = 5.$

Z = 1094

П'ята ітерація

Таблиця 2.8


Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси							
	B1	B2	B3	B4	B5								
A1	3	13	7	7	14	7	4	7	5	26	30	$\alpha_1 = 0$	
A2	8	11		8	12	12	6		10	8	48	$\alpha_2 = 5$	
A3		6	6	10		10	10	8	8	11	20	$\alpha_3 = 3$	
A4	9	14	6	8		10	+	-	10	8	15	30	$\alpha_4 = 3$
Заявки	18		27		42		15		26		128		

$\beta_1 = 3; \beta_2 = 3; \beta_3 = 7; \beta_4 = 7; \beta_5 = 5.$

Z = 1054.

Шоста ітерація

Таблиця 2.9

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	9 13	9 7  4	7 7	7	5	26	$\alpha_1 = 0$
A2	11	8 27	12 10	6 11	4 8	48	$\alpha_2 = -1$
A3	6 18	6 10	10 2	4 8	2 11	20	$\alpha_3 = -3$
A4	14 6	8	10 30	4 10	2 15	30	$\alpha_4 = -3$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$\beta_1 = 9; \beta_2 = 9; \beta_3 = 13; \beta_4 = 7; \beta_5 = 5.$

$Z = 988.$

Розв'язок задачі

Таблиця 2.10

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	7 13	7 4	11 14	5 7	5	26	$\alpha_1 = 0$
A2	8 11	8 23	12 10	6 15	6 8	48	$\alpha_2 = 1$
A3	6 18	6 10	10 2	4 8	4 11	20	$\alpha_3 = -1$
A4	6 14	6 8	10 30	4 10	4 15	30	$\alpha_4 = -1$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$\beta_1 = 7; \beta_2 = 7; \beta_3 = 11; \beta_4 = 5; \beta_5 = 5.$

$Z = 980.$

2.5. Розв'язання відкритої транспортної задачі

2.5.1. Стислі теоретичні зведення

Розглянемо розв'язання транспортної задачі, у якій вимоги до балансу запасів і заявок не задовольняються

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{array}$$

a_i -запаси, b_j -заявки.

Баланс може порушуватися у двох напрямках:

1. Сума запасів у пунктах відправлення перевищує суму поданих заявок (надлишок запасів).

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j .$$

2. Сума поданих заявок перевищує наявні запаси (надлишок заявок),

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j .$$

Проаналізуємо ці випадки.

2.5.1.1. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З НАДЛИШКОМ ЗАПАСІВ

У пунктах A_1, A_2, \dots, A_m є запаси вантажу a_1, a_2, \dots, a_m ; пункти B_1, B_2, \dots, B_m подали

заявки b_1, b_2, \dots, b_m , причому $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$.

Потрібно знайти такий план перевезень x_{ij} , при якому всі заявки будуть виконані, а загальна вартість перевезень буде мінімальна.

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \min .$$

Очевидно, при цій постановці задачі деякі умови ТЗ перетворюються в нерівності, інші залишаються рівностями

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i; & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; & j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Цю задачу можна розв'язати просто, якщо її зводити до розглянутої класичної транспортної задачі з правильним балансом.

Для цього введемо ще один, фіктивний, пункт призначення B_ϕ якому припишемо фіктивну заявку, рівну надлишку запасів над заявками $b_\phi = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ і приймемо вартості перевезень із усіх пунктів відправлення у фіктивний пункт призначення тотожними нулю,

$$c_{i\phi} = 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Таким чином, відправлення якого або кількості вантажу $x_{i\phi}$ буде означати, що в пункті A_i залишилися невідправленими $x_{i\phi}$ одиниць вантажу.

Уведенням фіктивного пункту призначення ми зрівняли баланс транспортної задачі і тепер її можна розв'язувати відомим методом потенціалів.

2.5.1.2. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З НАДЛИШКОМ ЗАЯВОК

У пунктах A_1, A_2, \dots, A_m є запаси вантажу a_1, a_2, \dots, a_m ; пункти B_1, B_2, \dots, B_m подали заявки b_1, b_2, \dots, b_m , причому $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$. Таким чином наявних запасів недостатньо для задоволення всіх заявок.

Потрібно знайти такий план перевезень x_{ij} , при якому всі заявки будуть виконані, а загальна вартість перевезень буде мінімальна

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \min.$$

Очевидно, що цю задачу можна звести до звичайної транспортної задачі з правильним балансом, якщо ввести фіктивний пункт відправлення A_ϕ із запасом a_ϕ рівним відсутньому запасу $a_\phi = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ і прийняти вартості перевезень із пункту відправлення A_ϕ у будь-який пункт призначення рівними нулю $c_{\phi j} = 0, j = 1, \dots, n$.

При цьому частина заявок залишиться незадоволеною; будемо вважати, що вона як би покривається за рахунок фіктивного пункту відправлення A_f .

Таким чином, ми зводимо задачу до транспортної задачі з правильним балансом. Далі розв'яжемо цю задачу відомим методом потенціалів.

2.5.2. Приклад розв'язання задачі

Нехай необхідно розв'язати таку транспортну задачу.

Умови задачі

Таблиця 2.11

ПН				Запаси
ПО	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	7	6	50
A_2	6	6	5	40
A_3	8	4	5	20
Заявки	18	21	33	

У прикладі перше базисне розв'язання знайдене методом північно-західного кута. Задача розв'язана методом потенціалів.

Перша ітерація

Таблиця 2.12

ПН	B_1	B_2	B_3	B_f	Запаси	Потенціали
A_1	5 5 18	7 7 21	6 6	1 0	50	0
A_2	4 6	6 6	5 22	0 0 18	40	-1
A_3	4 8	6 4	5 5	0 0 20	20	-1
Заявки	18	21	33	38	110	
Потенціали	5	7	6	1		

Друга ітерація

Таблиця 2.13

ПН					Запаси	Потенціали
ПО	B1	B2	B3	Bф		
A1	5 5 18	7 7 21	5 6	0 0	50	0
A2	5 6	7 6	5 5 33	0 0	40	0
A3	5 8	7 4	5 5	0 0	20	0
Заявки	18	21	33	38	110	
Потенціали	5	7	5	0		

Третя ітерація

Таблиця 2.14

ПН					Запаси	Потенціали
ПО	B1	B2	B3	Bф	а	
A1	5 5 18	7 7 1	5 6	0 0	50	0
A2	5 6	7 6	5 5 33	0 0	40	0
A3	2 8	4 4 20	2 5	-3 0	20	-3
Заявки	18	21	33	38	110	
Потенціали	5	7	5	0		

Розв'язок задачі

Таблиця 2.15

ПН							Запаси	Потенціали
ПО	B1	B2	B3	Bф				
A1	5 5 18	5 7	5 6	0 0 32			50	0
A2	5 6	6 6 1	5 5 33	0 0 6			40	0
A3	3 8	4 4 20	3 5	-2 0			20	-2
Заявки	18	21	33	38			110	
Потенціали	5	6	5	0				

Оптимальне значення цільової функції дорівнює 335. Оптимальний план перевезень вказаний в таблиці 2.15.

2.6. Варіанти індивідуальних завдань

Порядок виконання роботи:

- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.
- вивчити постановку задачі;
- розв'язати задачу відповідно до варіанта;
- проаналізувати отримане рішення й оформити звіт.

Зміст звіту

- ❖ На основі виконаного індивідуального завдання підготувати письмовий звіт який має містити наступні складові:
 - стислі теоретичні положення;
 - формулювання математичної моделі;
 - результати розв'язання задачі, подані у вигляді таблиць;
 - зробити висновки по роботі.

2.6.1 Закрита транспортна задача

Для матриці вартостей, спільної для всіх варіантів виконати розрахунки відповідно до варіантів зазначених у таблиці 2.11

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 & 10 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Варіанти завдань

Таблиця 2.16

Варіанти	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
1	32	51	12	55	8	21	28	45	48
2	22	46	8	74	7	13	28	48	54
3	37	74	14	25	6	14	23	38	69
4	48	42	9	51	8	16	31	55	40
5	47	62	17	24	16	33	33	51	17
6	52	50	16	32	12	18	23	31	66
7	13	50	13	74	20	17	32	44	37
8	33	38	12	67	19	19	35	61	16
9	46	46	10	48	5	22	36	46	41
10	24	47	9	70	14	13	26	32	65
11	28	54	12	56	19	9	24	50	48
12	18	42	11	79	3	20	33	48	46
13	17	50	13	70	12	22	31	39	46
14	25	45	7	73	8	19	27	34	62
15	27	45	8	70	15	16	38	44	37
16	14	48	16	72	15	19	28	50	38
17	29	54	7	60	11	14	28	42	55
18	31	68	14	37	9	14	28	28	71
19	36	61	11	42	6	22	30	68	24
20	31	67	20	32	13	9	38	41	49
21	32	31	11	76	12	20	31	32	55
22	31	39	10	70	18	19	36	47	30
23	48	49	12	41	18	14	31	56	31
24	34	38	10	68	15	17	27	28	63
25	33	52	6	59	12	16	31	32	59
26	30	39	11	70	15	15	24	47	49
27	55	55	1	39	8	31	36	45	30
28	44	81	15	10	8	17	41	34	50
29	59	38	4	49	12	29	26	45	38
30	28	34	11	77	3	14	36	70	27

2.6.2 Відкрита транспортна задача

Вартості перевезень c_{ij} для усіх варіантів наведені в таблиці 2.17.

Таблиця 2.17

Постачальн. Споживач	В1	В2	В3
А1	3	9	4
А2	6	5	5
А3	7	4	6

Запаси й заявки для варіантів завдання

Таблиця 2.18

Номер варіанту	А ₁	А ₂	А ₃	В ₁	В ₂	В ₃
1	15	21	48	15	24	65
2	19	55	21	20	75	24
3	42	41	50	56	54	68
4	20	19	50	22	22	68
5	22	38	46	25	50	62
6	32	37	24	40	48	29
7	52	24	50	71	28	67
8	17	36	15	19	47	15
9	25	19	40	30	21	53
10	39	50	28	52	67	34
11	33	43	31	42	57	39
12	29	40	17	35	53	18
13	41	41	34	55	54	44
14	21	36	53	25	46	73
15	26	25	39	32	30	50
16	29	44	25	35	58	29
17	43	49	32	57	66	41
18	19	43	24	21	57	28
19	45	51	44	60	70	59
20	31	39	20	39	51	23
21	23	29	41	26	36	54
22	30	50	23	37	68	26
23	45	23	32	59	27	41

Номер варіанту	A ₁	A ₂	A ₃	B ₁	B ₂	B ₃
24	46	37	25	62	47	30
25	26	53	40	31	72	53
26	24	43	37	28	57	47
27	48	52	49	65	71	67
28	32	54	19	41	74	21
29	34	40	18	44	53	20
30	16	18	40	16	20	53

2.7. Контрольні запитання

1. Сформулюйте загальну і математичну постановки транспортної задачі.
2. Для чого застосовується метод північно-західного кута?
3. Сформулюйте основні кроки методу потенціалів для розв'язання транспортної задачі .
4. Сформулюйте правило створення циклу переміщення перевезень із клітини в клітину в транспортній таблиці
5. Скільки циклів можна побудувати для однієї незаповненої клітинки транспортної таблиці
6. Що таке відкрита транспортна задача?

В темі розглянуто методи розв'язання транспортних задач та особливості застосування цих методів для відкритих та закритих транспортних задач

ТЕМА 3. ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Вивчивши зміст теми, студент має опанувати графічні та аналітичні методи розв'язання спеціальних задач лінійного програмування.

3.1. Постановка задачі

Для певного класу практичних задач, цільова функція може являти собою відношення двох лінійних функцій. Обмеження при цьому є лійними. Це є задача дробово-лінійного програмування, що має вигляд

$$F = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} \rightarrow \max; \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m}; \quad (3.2)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

Тут c_j, d_j, a_{ij}, b_i - задані константи. Крім того, будемо вважати, що $\sum_{j=1}^n d_j x_j \neq 0$.

3.2. Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування

Геометричну інтерпретацію можна дати в тому випадку, коли кількість змінних задачі дорівнює двом, тобто задача має вигляд

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \rightarrow \max; \quad (3.4)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, i = \overline{1, m}; \quad (3.5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0; \quad (3.6)$$

$$d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0.$$

Як і у звичайній задачі лінійного програмування починати розв'язок необхідно з побудови області припустимих розв'язків, яка обумовлена (3.5) і (3.6). Потім, припускаючи значення цільової функції рівним деякому числу h (параметру), будемо сімейство прямих, що проходять через початок координат під різноманітними кутами (у залежності від h):

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = h. \quad (3.7)$$

Оптимальне розв'язання задачі (3.4) - (3.6) буде визначатися вершиною області припустимих розв'язань, через яку проходить пряма сімейства (3.7) із максимальним значенням h . Розглянемо розв'язання задачі на прикладі.

Приклад 1. Для виробництва двох видів виробів А і В використовується два види сировини - 1 і 2. Норми витрат сировини на випуск одного виробу кожного виду, а також загальні витрати на випуск одного виробу приведені у таблиці 3.1. Протягом місяця підприємству необхідно випустити не менше 10 виробів типу А і 15 виробів типу В.

Умови задачі

Таблиця 3.1

Вид сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, т	
	А	В
1	1	3
2	2	2
Загальні витрати на випуск одного виробу	5	8

Визначити скільки виробів кожного виду потрібно випустити підприємству протягом місяця, щоб забезпечити мінімальну собівартість продукції за умови, що сировини першого виду можна витратити не більше ніж 90 т, а другого виду – не більше ніж 80 т.

Позначимо: x_1 – кількість виробів типу А, x_2 – кількість виробів типу В.

Математична модель задачі має вигляд:

$$F = (5x_1 + 8x_2) / (x_1 + x_2) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 15 \end{cases}$$

У системі координат X_1OX_2 будуємо граничні прямі для кожного обмеження і визначаємо область припустимих розв'язань (ОПР) задачі (рис. 3.1). Очевидно, що ОПР - це чотирикутник ABCD.

Нехай значення цільової функції є рівним деякому числу, наприклад, $F_1 = 6,5$.

Тоді:

$$F_1 = (5x_1 + 8x_2) / (x_1 + x_2) = 6,5 ;$$

$$5x_1 + 8x_2 = 6,5x_1 + 6,5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Будуємо цю пряму $F_1 = 6,5$. Тепер нехай значення цільової функції буде рівним 7. Тоді:

$$F_2 = (5x_1 + 8x_2) / (x_1 + x_2) = 7,$$

$$5x_1 + 8x_2 = 7x_1 + 7x_2 \Rightarrow x_1 = 0,5x_2 .$$

Будуємо цю пряму. Оскільки $F_1 < F_2$, аналізуючи графіки рисунка, можна зробити висновок: значення цільової функції при обертанні прямої $F = h$ за

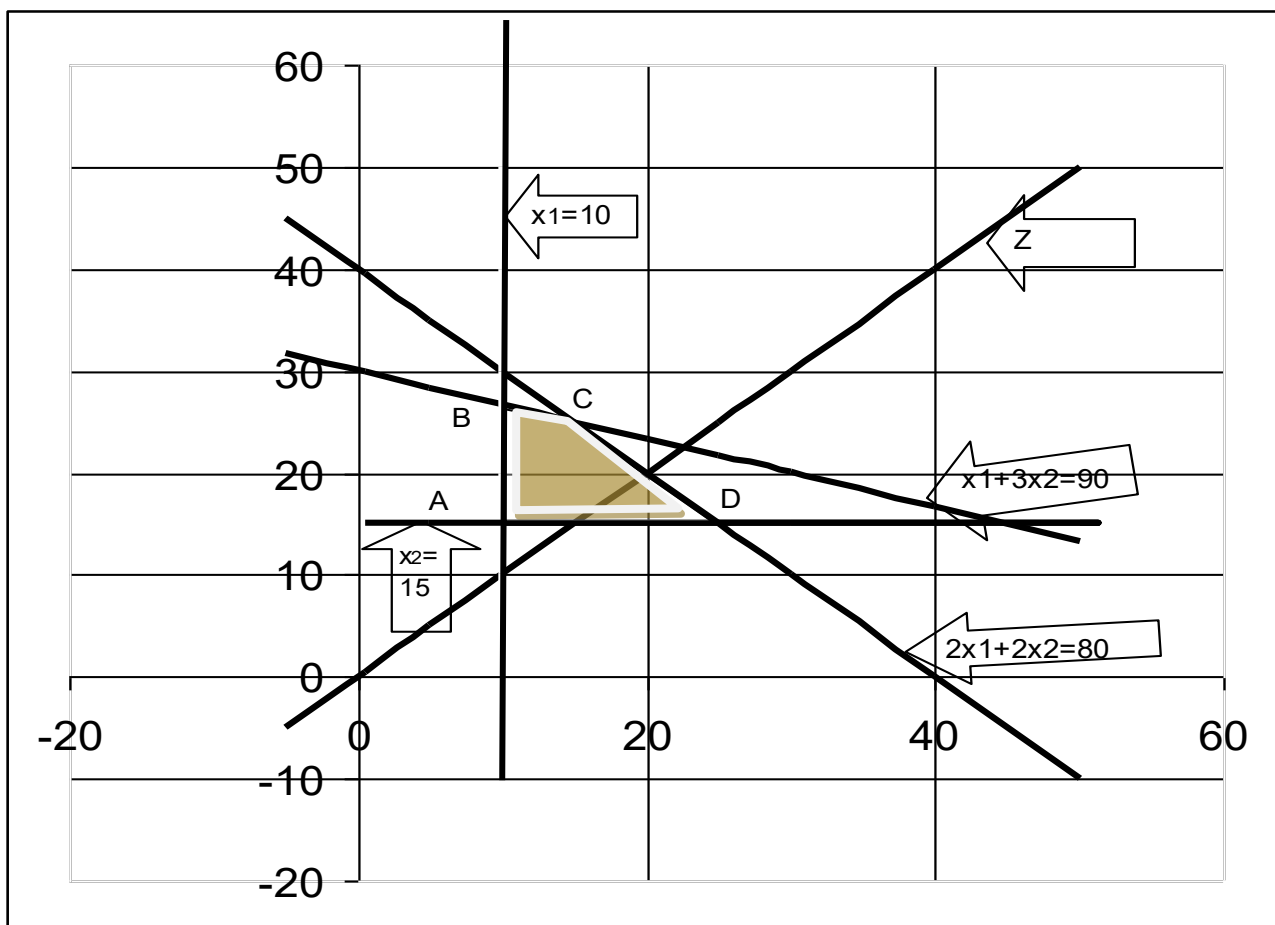


Рис 3.1 Графічний розв'язок задачі

годинниковою стрілкою зменшується. При цьому мінімальне значення, що належить ОПР цільова функція приймає в точці Д. Координати точки знайдемо, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 80 \\ x_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \text{точка } D(25;15).$$

Оптиміальне розв'язання : $x_1^* = 25; x_2^* = 15$. Мінімальне значення цільової функції (мінімальна собівартість):

$$F_{\min} = (5x_1^* + 8x_2^*) / (x_1^* + x_2^*) = 6,125.$$

3.3. Методика розв'язання задачі дробово-лінійного програмування

У загальному випадку задача дробово-лінійного програмування (3.1) – (3.3) може бути зведена до задачі лінійного програмування. Для цього введемо нові змінні

$$y_0 = \left(\sum_{j=1}^n d_j x_j \right)^{-1}; \quad (3.8)$$

$$y_j = y_0 x_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.9)$$

Використовуючи введені позначення (3.8), (3.9), початкову задачу (3.1) – (3.3) зводимо до наступної задачі:

$$F' = \sum_{j=1}^n c_j y_j \rightarrow \max; \quad (3.10)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=1}^n d_j y_j = 1; \quad (3.12)$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.13)$$

Задача (3.10) - (3.13) розв'язується одним із відомих методів. Отримавши розв'язок цієї задачі за допомогою співвідношень (3.8), (3.9), знаходимо розв'язок початкової задачі (3.1) – (3.3).

Приклад 2. Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три типи устаткування. Час обробки одного виробу видів А і В на кожному з типів устаткування приведено в табл. 3.2. У ній же зазначений прибуток від реалізації одного виробу кожного виду. Обладнання 1 і 3-го типів можна використовувати не більш 26 і 39 часів, а устаткування 2-го типу доцільно використовувати не менше 4 годин.

Умови задачі

Таблиця 3.2

Тип устаткування	Витрати часу на опрацювання одного виробу	
	А	Б
1	2	8
2	1	1
3	12	3
Прибуток від реалізації одного виробу	2	3

Визначити: скільки виробів кожного виду потрібно виготовити підприємству, щоб загальний питомий прибуток (прибуток, що припадає на один виріб) був би максимальним.

Позначимо: x_1 - кількість виробів типу А.

x_2 - кількість виробів типу В.

Математична модель задачі має вигляд

$$F = (2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2) \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leq 26 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ 12x_1 + 3x_2 \leq 39 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Представимо задачу в канонічному вигляді

$$F = (2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2) \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ 12x_1 + 3x_2 + x_5 = 39 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Зводимо зазначену задачу до задачі лінійного програмування (3.10) - (3.13), використовуючи співвідношення (3.8), (3.9).

Призначимо

$$\begin{cases} y_0 = (x_1 + x_2)^{-1} \\ y_j = y_0 x_j, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Тоді маємо задачу

$$F = 2y_1 + 3y_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + y_3 - 26y_0 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_4 - 4y_0 = 0 \\ 12y_1 + 3y_2 + y_5 - 39y_0 = 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} ;$$

$$y_j \geq 0, j = \overline{0,5}.$$

Ця задача лінійного програмування може бути розв'язана методом штучного базису. Для цього сформулюємо задачу у вигляді

$$F = 2y_1 + 3y_2 - My_6 - My_7 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + y_3 - 26y_0 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_4 + y_6 - 4y_0 = 0 \\ 12y_1 + 3y_2 + y_5 - 39y_0 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_7 = 1 \end{cases} ;$$

$$y_j \geq 0, j = \overline{0,7},$$

M – const.

З урахуванням того, що початковий базис утворюють вектори P_3, P_5, P_6, P_7 , складемо початкову симплекс-таблицю і виконаємо її перетворення до одержання оптимального розв'язку (табл. 3.3).

З останньої симплекс-таблиці отримаємо

$$y_0^* = \frac{1}{4}; y_1^* = \frac{1}{4}; y_2^* = \frac{3}{4}; y_3^* = y_4^* = 0; y_5^* = \frac{18}{4}; F_{\max} = \frac{11}{4}.$$

Використовуючи формули (3.14) знайдемо оптимальні значення змінних $x_j, j = \overline{1,5}$.

$$x_1^* = \frac{y_1^*}{y_0^*} = 1; x_2^* = \frac{y_2^*}{y_0^*} = 3; x_3^* = x_4^* = 0; x_5^* = 18.$$

Розв'язок задачі симплексним методом

Таблиця 3.3

i	базис	Сб	P0	2 P1	3 P2	0 P3	0 P4	0 P5	-M P6	-M P7	0 P0
1	P3	0	0	2	8	1	0	0	0	0	-26
2	P6	-M	0	1	1	0	-1	0	1	0	-4
3	P5	0	0	12	3	0	0	1	0	0	-39
4	P7	-M	1	1	1	0	0	0	0	1	0
5			0	-2	-3	0	0	0	0	0	0
6			-1	-2	-2	0	1	0	0	0	4

i	базис	Сб	P0	2 P1	3 P2	0 P3	0 P4	0 P5	-M P6	-M P7	0 P0
1	P3	0	0	-6	0	1	8	0	0	0	6
2	P2	3	0	1	1	0	-1	0	0	0	-4
3	P5	0	0	9	0	0	3	1	0	0	-27
4	P7	-M	1	0	0	0	1	0	0	1	4
5			0	1	0	0	-3	0	0	0	-12
6			-1	0	0	0	-1	0	0	0	-4

i	базис	Сб	P0	2 P1	3 P2	0 P3	0 P4	0 P5	-M P6	-M P7	0 P0
1	P0	0	0	-1	0	1/6	8/6	0	0	0	1
2	P2	3	0	-3	1	4/6	26/6	0	0	0	0
3	P5	0	0	-18	0	27/6	39	1	0	0	0
4	P7	-M	1	4	0	-4/6	-26/6	0	0	1	0
5			0	-11	0	2	13	0	0	0	0
6			-1	-4	0	4/6	26/6	0	0	0	0

i	базис	Сб	P0	2 P1	3 P2	0 P3	0 P4	0 P5	-M P6	-M P7	0 P0
1	P0	0	1/4	0	0	0	1/4	0	0	0	1
2	P2	3	3/4	0	1	1/6	13/12	0	0	0	0
3	P5	0	18/4	0	0	9/6	39/2	1	0	0	0
4	P1	2	1/4	1	0	-1/6	-26/24	0	0	0	0
5			11/4	0	0	1/6	13/12	0	0	0	0

3.4 Варіанти індивідуальних завдань

Порядок виконання роботи:

- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.
- вивчити постановку задачі;
- розв'язати задачу дробово-лінійного програмування спочатку геометрично, а потім шляхом зведення її до задачі лінійного програмування;
- проаналізувати отримане рішення й оформити звіт.

Зміст звіту

❖ На основі виконаного індивідуального завдання підготувати письмовий звіт який має містити наступні складові:

- стислі теоретичні положення;
- формулювання математичної моделі;
- результати розв'язання задачі, подані у вигляді таблиць;
- зробити висновки по роботі.

Варіанти завдань

Таблиця 3.4

Варіанти № 1 - 15	Варіанти № 16 - 30
$F = (2x_1 + 3x_2) / (x_1 + x_2) \rightarrow \max$ $1. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \geq 28 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$ $F = (5x_1 + 3x_2) / (x_1 + x_2) \rightarrow \min$ $2. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14 \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + x_2 \geq 21 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	$F = (-x_1 - x_2) / (x_1 + 2x_2) \rightarrow \min$ $16. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 4x_1 - x_2 \geq 12 \\ x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$ $F = (x_1 - 5x_2) / (2x_1 + 3x_2) \rightarrow \max$ $17. \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$

Варіанти № 1 - 15	Варіанти № 16 - 30
<p>$F = (x_1 + 4x_2) / (x_1 + x_2) \rightarrow \max$</p> <p>3. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 \geq 28 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 80 \end{cases}$</p> <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>$F = (3x_1 + 2x_2) / (4x_1 + x_2) \rightarrow \min$</p> <p>18. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$</p> <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>
<p>$F = (3x_1 + x_2) / (2x_1 + x_2) \rightarrow \min$</p> <p>4. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 4x_1 - x_2 \geq 12 \end{cases}$</p> <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>$F = (-x_1 + 4x_2) / (2x_1 + x_2) \rightarrow \min$</p> <p>19. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{cases}$</p> <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>
<p>$F = (3x_1 - x_2) / (x_1 + 2x_2) \rightarrow \max$</p> <p>5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \end{cases}$</p> <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>$F = (2x_1 - 5x_2) / (x_1 + x_2) \rightarrow \max$</p> <p>20. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$</p> <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>
<p>$F = (-x_1 + 2x_2) / (x_1 + x_2) \rightarrow \min$</p> <p>6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq -3 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$</p> <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>$F = (3x_1 - x_2) / (x_1 + 3x_2) \rightarrow \min$</p> <p>21. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 \geq 4 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$</p> <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>

Варианти № 1 - 15	Варианти № 16 - 30
<p>7. $F = (-2x_1 + x_2) / (x_1 + 2x_2) \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>22. $F = (x_1 - 4x_2) / (2x_1 + 2x_2) \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \geq 12 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>
<p>8. $F = (-x_1 - 4x_2) / (x_1 + x_2) \rightarrow \min$</p> $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>23. $F = (3x_1 - 2x_2) / (x_1 + 2x_2) \rightarrow \min$</p> $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>
<p>9. $F = (x_1 + 3x_2) / (-x_1 - 2x_2) \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>24. $F = (5x_1 + 2x_2) / (-x_1 - x_2) \rightarrow \min$</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -6 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>
<p>10. $F = (-2x_1 + 5x_2) / (x_1 + 3x_2) \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 \geq 28 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 80 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>25. $F = (3x_1 + x_2) / (4x_1 + 2x_2) \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 21 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>

Варианти № 1 - 15	Варианти № 16 - 30
<p>11. $F = (3x_1 - 2x_2) / (x_1 + 2x_2) \rightarrow \min$</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>26. $F = (6x_1 - 2x_2) / (3x_1 + 4x_2) \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>
<p>12. $F = (-x_1 - 3x_2) / (x_1 + 4x_2) \rightarrow \min$</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 4x_1 - x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 7x_2 \geq 7 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>27. $F = (3x_1 - 2x_2) / (-3x_1 - 5x_2) \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>
<p>13. $F = (5x_1 + 3x_2) / (4x_1 + x_2) \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>28. $F = (2x_1 - x_2) / (-x_1 - 3x_2) \rightarrow \min$</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>
<p>14. $F = (4x_1 - 3x_2) / (2x_1 + 3x_2) \rightarrow \min$</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq -3 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>	<p>29. $F = (4x_1 - 3x_2) / (x_1 + 3x_2) \rightarrow \min$</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$ <p>$x_1, x_2 \geq 0$</p>

Варіанти № 1 - 15	Варіанти № 16 - 30
$F = (3x_1 + 4x_2) / (2x_1 + x_2) \rightarrow \max$ $15. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 80 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$F = (2x_1 - 7x_2) / (2x_1 + 3x_2) \rightarrow \max$ $30 \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

3.5. Контрольні запитання

- 11 Сформулюйте загальну і математичну постановки задачі дробово-лінійного програмування?
- 21 Сформулюйте основні кроки розв'язання задачі дробово-лінійного програмування?
- 31 Сформулюйте методику зведення задачі дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування?

В темі розглянуто особливості методик розв'язання спеціальних задач лінійного програмування, вміти формулювати математичні моделі цього типу.

ТЕМА 4. ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Вивчивши зміст теми, студент має опанувати графічні та аналітичні методи розв'язання лінійних оптимізаційних задач.

4.1. Постановка задачі

Оптимізаційна задача, змінні якої за фізичним змістом можуть приймати лише цілочислові значення, називається *задачею цілочислового програмування*. Обмежимося розглядом випадку, коли цільова функція й система обмежень задачі є лінійними. При цьому математична модель задачі має вигляд

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max; \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (4.3)$$

$$x_j - \text{цілочислові}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.4)$$

Розв'язок задачі (4.1) - (4.3) можна знайти одним із розглянутих раніше методів. Проте розв'язання може виявитися як цілочисловим, так і ні. Тому у загальному випадку для визначення цілочислового розв'язку задачі (4.1) - (4.4) потрібно застосування спеціальних методів. Одним із найбільше поширених методів розв'язку задачі (4.1) - (4.4) є метод Гоморі.

4.2. Розв'язок задач цілочислового лінійного програмування методом Гоморі

Етапи розв'язку

1. Використовуючи один із відомих методів, знайти розв'язок задачі (4.1) - (4.3) без урахування вимог цілочисловості змінних.
2. Скласти додаткове обмеження для змінної x_i , яка в оптимальному плані задачі (4.1) - (4.3) має максимальне дробове значення, а в оптимальному плані задачі (4.1) - (4.4) повинна бути цілочисловою. Це додаткове обмеження має вигляд:

$$\sum_j f(a_{ij}^*) x_j \geq f(b_i^*), \quad (4.5)$$

a_{ij}^*, b_i^* - значення величин, взяті з i -го рядка останньої симплекс-таблиці;

$f(a_{ij}^*)$ і $f(b_i^*)$ - дробові частини чисел. (дробова частина числа є різниця між цим числом і найближчим до нього найменшим цілим.). Наприклад, $f(5, 3) = 0, 3$; $f(6, 0) = 0$; $f(-5, 1) = 0, 9$.

3. Використовуючи двоїтий симплекс-метод, знайти розв'язок задачі, що отримана з задачі (4.1) - (4.3) внаслідок приєднання до неї додаткового обмеження (4.5).

4. У разі потреби треба скласти ще одне додаткове обмеження (4.5) і продовжити ітераційний процес до отримання оптимального плану задачі (4.1) - (4.4) або встановлення її нерозв'язності.

Зауваження. Якщо вимога цілочисловості (4.4) ставиться лише до деяких змінних, то такі задачі називаються *частково цілочисловими*. У цьому випадку додаткове обмеження має вигляд

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \geq f(b_i^*) \quad (4.6)$$

Тут γ_{ij} визначається з таких співвідношень:

- для змінних x_j , що можуть приймати нецілочислові значення

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^* & \text{при } a_{ij}^* \geq 0 \\ \frac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} |a_{ij}^*| & \text{при } a_{ij}^* < 0 \end{cases};$$

- для змінних x_j , що можуть приймати тільки цілочислові значення

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}^*) & \text{при } f(a_{ij}^*) \leq f(b_i^*) \\ \frac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} [1 - f(a_{ij}^*)] & \text{при } f(a_{ij}^*) > f(b_i^*) \end{cases}.$$

Розглянемо розв'язок задачі на прикладі.

Для виробництва двох видів виробів А і Б використовується токарське й фрезерне устаткування. Витрати часу для кожного з типів обладнання на виготовлення одного виробу даного виду приведені у таблиці. Тут же зазначений добовий фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу.

Умови задачі

Таблиця 4.1

Тип устаткування	Витрати часу на опрацювання одного виробу		Добовий фонд робочого часу устаткування
	А	Б	
Токарське	2	1	19/3
Фрезерне	1	3	4
Прибуток від реалізації одного виробу	1	4	

Знайти добовий план випуску виробів А і Б, що забезпечує максимальний прибуток. Складемо математичну модель задачі. Позначимо: x_1, x_2 - кількість зроблених виробів А і Б відповідно. Тоді модель має вигляд:

$$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max; \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq \frac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \leq 4 \end{cases}; \quad (4.8)$$

$$x_1, x_2 \geq 0; \quad (4.9)$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}. \quad (4.10)$$

Представимо задачу у канонічній формі:

$$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \frac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \end{cases}; \quad (4.11)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4};$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}.$$

Ця задача є частково цілочисловою, тому що змінні x_3, x_4 за своїм фізичним змістом можуть приймати нецілочислові значення. Знайдемо симплексним методом розв'язання задачі (4.7) - (4.9):

Розв'язок задачі симплексним методом

Таблиця 4.2

i	базис	Сб	P0	1	4	0	0
				P1	P2	P3	P4
1	P3	0	19/3	2	1	1	0
2	P4	0	4	1	3	0	1
3			0	-1	-4	0	0
i	базис	Сб	P0	1	4	0	0
				P1	P2	P3	P4
1	P3	0	5	5/3	0	1	-1/3
2	P2	4	4/3	1/3	1	0	1/3
3			16/3	1/3	0	0	4/3

Оптимальний план $X^* = (0; 4/3; 5; 0)$. При цьому змінна x_2 прийняла нецілочислове значення. Тому для другого рядка останньої симплекс-таблиці складемо додаткове обмеження виду (4.6)

$$f\left(\frac{1}{3}\right)x_1 + f(1)x_2 + 0x_3 + f\left(\frac{1}{3}\right)x_4 \geq f\left(\frac{4}{3}\right);$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{1}{3};$$

$$x_1 + x_4 \geq 1;$$

$$x_1 + x_4 - x_5 = 1;$$

$$-x_1 - x_4 + x_5 = -1;$$

$$(x_5 \geq 0).$$

приєднаємо це додаткове обмеження до системи вихідних обмежень і розв'яжемо отриману задачу двоїтим симплекс-методом. При цьому доцільно використовувати останню симплекс-таблицю

Розв'язок задачі

Таблиця 4.3

i	Базис	Сб	P0	1	4	0	0	0
				P1	P2	P3	P4	P5
1	P3	0	5	5/3	0	1	-1/3	0
2	P2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0
3	P5	0	-1	-1	0	0	-1	1
4			16/3	1/3	0	0	4/3	0

i	Базис	Сб	P0	1	4	0	0	0
				P1	P2	P3	P4	P5
1	P3	0	10/3	0	0	1	-2	5/3
2	P2	4	1	0	1	0	0	1/3
3	P1	1	1	1	0	0	1	-1
4			5	0	0	0	1	1/3

Оптимальний план $X^* = (1; 1; 10/3; 0; 0;)$. Цей план є оптимальним планом вихідної задачі (4.7) - (4.10), тому що змінні x_1, x_2 приймають цілочислові значення. При $x_1^* = x_2^* = 1$ максимальне значення цільової функції дорівнює 5.

4.3 МЕТОД ГЛОК І МЕЖ

Цей метод можна застосовувати для розв'язання як цілком, так і частково цілочислових задач дискретного програмування. Припустимо, що модель має такий вигляд:

$$\text{Максимізувати } \sum_{j=1}^n c_j x_j . \quad (4.12)$$

При обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (4.13)$$

$$x_j - \text{цілі}, \\ j = 1, 2, \dots, p \quad (p \leq n), \quad (4.14)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = p+1, \dots, n. \quad (4.15)$$

Крім того, припустимо, що для кожної цілочислової змінної можна задати верхню і нижню межу, у границях котрих, безумовно, містяться її оптимальні значення

$$L_j \leq x_j \leq U_j, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (4.16)$$

Звичайно, $L_j \geq 0$. Користуючись загальним символом L_j , алгоритм простіше описати.

Розглянемо будь-яку змінну x_j і прийmemo, що I є деяке ціле число, де $L_j \leq I \leq U_j - 1$. Тоді оптимальне розв'язання задачі (4.12) - (4.16) буде задовольняти або лінійному обмеженню

$$x_j \geq I + 1, \quad (4.17)$$

або лінійному обмеженню

$$x_j \leq I. \quad (4.18)$$

Для ілюстрації можливості використання цієї дихотомії припустимо, що умова цілочисловості не враховується, і знайдемо оптимальне розв'язання задачі лінійного програмування (4.12), (4.13), (4.15) і (4.16), у якому $x_1 = 1\frac{2}{3}$. Далі поставимо й розв'яжемо ще дві задачі лінійного програмування, кожна з яких містить умови (4.12), (4.13) і (4.15). Проте в одній з цих задач умова (4.16) при $j = 1$ записується у вигляді $2 \leq x_1 \leq U_1$, а в іншій - у вигляді $L_1 \leq x_1 \leq 1$. Припустимо, далі, що кожна з цих задач має оптимальне розв'язання, що задовольняє умові цілочисловості. Тоді розв'язання, що доставляє більше значення цільової функції, насправді є оптимальним розв'язанням вихідної цілочислової задачі. Звичайно, одна (або обидві) із таких задач не має оптимального розв'язання, що задовольняє (4.14), унаслідок чого можуть знадобитися додаткові обчислення. Алгоритм, що викладається нижче визначає схему застосування (4.17) і (4.18), що забезпечує, у кінцевому рахунку, одержання оптимального розв'язання.

Деякі пояснення. Нижче дається формальний опис методу, а його обчислювальні аспекти обговорюються наприкінці розділу. Метод гілок і меж заснований на розв'язанні деякої множини задач лінійного програмування. Оптимальне розв'язання задачі цілочислового програмування не обов'язково повинно бути базисним розв'язанням, що задовольняє m лінійним обмеженням (4.13). Інакше кажучи, оптимальне розв'язання може містити більш m змінних, що мають строго позитивне значення. Межі (4.16) на кожну змінну x_j служать для розширення задач лінійного програмування в такому ступені, щоб у разі потреби в оптимальне розв'язання входили всі змінні. Таке розширення є свідченням того, що трудомісткість обчислень визначається, насамперед, числом цілочислових змінних, що містяться в задачі.

Алгоритм.

На кожній ітерації (означимо її t) є нижня межа (оцінка), скажемо x_0^t , оптимального значення цільової функції. Для спрощення викладу припустимо, що на першій ітерації значення x_0^1 або строго менше оптимального значення, або дорівнює значенню цільової функції, що відповідає фіксованому припустимому розв'язанню. При відсутності якоїсь додаткової інформації про особливості розглянутої задачі в самому несприятливому випадку можна прийняти $x_0^1 = -\infty$. Крім нижньої межі є основний список задач лінійного програмування, що підлягають розв'язанню. Єдина відмінність цих задач одна від одної пов'язана із зміною умов (4.16). На ітерації 1 основний список містить усього одну задачу (4.12), (4.13), (4.15) і (4.16).

На довільній ітерації t виконуються такі кроки.

Крок 1. Припинити обчислення, якщо основний список порожній. У протилежному випадку вибрати одну задачу лінійного програмування з основного списку.

Крок 2. Розв'язати обрану задачу. Якщо вона не має допустимого розв'язання або якщо отримане в результаті оптимальне значення цільової функції менше або дорівнює x_0^t , то прийняти $x_0^{t+1} = x_0^t$ і повернутися до кроку 1. У протилежному випадку перейти до кроку 3.

Крок 3. Якщо отримане оптимальне розв'язання задачі лінійного програмування задовольняє цілочисловим обмеженням, то зафіксувати його, прийняти x_0^{t+1} рівним відповідному оптимальному значенню цільової функції і повернутися до кроку 1. У протилежному випадку перейти до кроку 4.

Крок 4. Вибрати будь-яку змінну x_j , $j = 1, 2, \dots, p$, що не має цілого значення в отриманому оптимальному розв'язанні обраної задачі лінійного програмування. Нехай b_j відповідає цьому значенню, а $[b_j]$ визначає найбільше ціле число, менше або рівне b_j . Додати дві задачі лінійного програмування в основний список. Ці дві задачі ідентичні задачі, обраної на кроці 1, за винятком того, що в одній з них нижня межа x_j замінена на $[b_j] + 1$, а в іншій верхня межа x_j замінена на $[b_j]$. Прийняти $x_0^{t+1} = x_0^t$ і повернутися до кроку 1.

При припиненні алгоритму у випадку, коли фіксується допустиме розв'язання, що дає x'_0 , це розв'язання оптимально, у протилежному випадку припустимого розв'язання не існує. Як показує наведений нижче приклад, можна одержати цілочислове розв'язання, не дійшовши до останньої ітерації, проте при цьому не відомо, чи є воно дійсно оптимальним. З цієї причини алгоритм можна назвати приблизно діючим.

Приклад. Розглянемо приклад, який пояснює подробиці викладеного алгоритму. Візьмімо задачу

$$\text{Максимізувати } 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \text{при обмеженнях} \quad & -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8, \\ & 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8. \end{aligned} \quad (4.20)$$

де кожна змінна x_j повинна бути не від'ємним цілим. Припустимо, що задані наступні межі на кожен змінну

$$0 \leq x_j \leq 5, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.21)$$

Позначимо x'_0 значення цільової функції. (Знайдіть оптимальне розв'язання простим добром.)

На ітерації 1 прийемо нижню межу $x_0^1 = 0$, оскільки при усіх $x_j = 0$ маємо припустиме розв'язання. Основний список містить лише одну задачу лінійного програмування (4.19), (4.20) і (4.21), що назвемо задачею 1. Виберемо цю задачу на кроці 1 і знайдемо її оптимальне розв'язання на кроці 2:

$$x_0 = 16, \quad x_1 = x_2 = 2\frac{2}{3}, \quad x_3 = 0 \text{ (задача 1)}. \quad (4.22)$$

Оскільки розв'язання не є цілочисловим, перейдемо від кроку 3 до кроку 4 і виберемо x_1 . Внесемо, далі, в основний список

задачу 2: обмеження (4.20)

$$3 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 5, \quad 0 \leq x_3 \leq 5,$$

задачу 3: обмеження (4.20)

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 5, \quad 0 \leq x_3 \leq 5 \quad (4.23)$$

Повертаючись до кроку 1 при $x_0^2 = x_0^1 = 0$, виберемо задачу 2. Читач може переконатися в тому, що на кроці 2 виявляється відсутність допустимого розв'язання задачі 2. Тому прийемо $x_0^3 = x_0^2 = 0$ і повернемося до кроку 1.

Виберемо тепер задачу 3 і одержимо на кроці 2 оптимальне розв'язання

$$x_0 = 15\frac{5}{7}, \quad x_1 = x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{2}{7} \text{ (задача 3)}, \quad (4.24)$$

яке є не цілочисловим. Тому перейдемо від кроку 3 до кроку 4, де виберемо x_3 і внесемо до основного списку

задачу 4: обмеження (4.20)
 $0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 5, 1 \leq x_3 \leq 5,$

задачу 5: обмеження (4.20)
 $0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 5, 0 \leq x_3 \leq 0.$

Зауважимо, що задача 4 і 5 відрізняються від задачі 3 тільки межами x_3 .

Повертаючись до кроку 1 при $x_0^4 = 0$, виберемо задачу 4, оптимальне розв'язання котрої

$$x_0 = 15, x_1 = x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 1. \quad (\text{задача 4}).$$

Таким чином, приходимо до кроку 4. Припустимо, що вибирається x_2 , унаслідок чого одержуємо

задачу 6: обмеження (4.20)
 $0 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 5, 1 \leq x_3 \leq 5,$

задачу 7: обмеження (4.20)
 $0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 0, 1 \leq x_3 \leq 5.$

Зауважимо знову, що задача 6 і 7 відрізняються від задачі 4 тільки межами x_2 .

Повертаючись до кроку 1 при $x_0^5 = 0$, виберемо задачу 6. Читачеві варто переконатися в тому, що задача 5 і 7 залишаються в основному списку. На кроці 2 виявляється, що задача 6 не має допустимого розв'язання і тому потрібно повернутися до кроку 1, прийнявши $x_0^6 = 0$. Виберемо тепер задачу 7, оптимальне розв'язання котрої

$$x_0 = 14\frac{6}{7}, x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1\frac{1}{7} \quad (\text{задача 7}).$$

Оскільки значення x_3 дробове, на кроці 4 одержуємо задачу 8: обмеження (4.20)

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 0, 2 \leq x_3 \leq 5,$$

задачу 9: обмеження (4.20)
 $0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 0, 1 \leq x_3 \leq 1.$

Вибір задачі 9 на ітерації 8 призводить до розв'язання

$$x_0 = 13, x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1 \quad (\text{задача 9}). \quad (4.25)$$

на кроці 2. Тому на кроці 3 фіксується (4.25) і приймається $x_0^9 = 13$.

Повертаючись до кроку 1, знаходимо, що в основному списку залишилася тільки задача 5. Оптимальне розв'язання цієї задачі лінійного програмування дорівнює

$$x_0 = 13, x_1 = 2, x_2 = 2\frac{1}{3}, x_3 = 0 \quad (\text{задача 5}). \quad (4.26)$$

Оскільки значення x_0 в (4.26) дорівнює x_0^9 , повертаємося до кроку 1 і припиняємо обчислення, тому що основний список порожній. Оптимальним розв'язанням задачі цілочислового програмування є (4.25), зафіксоване на ітерації 8.

Відзначимо, що можливість довільного вибору виникає при реалізації алгоритму у двох місцях: вибір задачі, що викреслюється з основного списку на кроці 1, і вибір змінної, за якою формуються додаткові задачі на кроці 4. Число ітерацій, необхідних для розв'язання задачі, може істотно змінюватися в залежності від того, яким способом насправді провадиться вибір зазначених альтернатив. (Так, наприклад, вибір задачі 4 замість задачі 5 на ітерації 4 виявляється більш вигідним.) Для підвищення ефективності вибору були розроблені допоміжні обчислювальні процедури, що вирішують оцінити "якість" вибору, але вони тут не розглядаються, тому що становлять інтерес, головним чином, для вузьких спеціалістів. Точно так само вибір більш удакої межі x_0^t зменшує можливість того, що після кроку 2 прийдеться перейти до кроків 3 і 4.

Хід ітерацій можна представити графічно блок-схемою у вигляді дерева, показаного на рис. 4.1. Відзначимо, що кожна вершина дерева відображає задачу в основному списку, а кожна гілка ідентична одній із задач, що добавляється в основний список на кроці 4.

Стисле повторення.

Відзначимо, що кожна вершина дерева відображає задачу в основному списку, а кожна гілка ідентична одній із задач, що добавляється в основний список на кроці 4. Зв'язок із графічним представленням пояснює використання поняття «гілка» у назві методу, а поняття «межа» (оцінка) з'явилася в цій назві завдяки іспиту, виконуваному на кроці 2. (Метод можна було б також назвати методом обриву гілок.)

Зауважимо, що гілка, що веде до задачі 5, обривається, незважаючи на те, що оптимальне розв'язання цієї задачі не є цілочисловим. Це пояснюється тим, що при досягненні задача 5 на $t = 9$ вже утворюється допустиме розв'язання, при якому цільова функція приймає значення 13. Тому подальше розгалуження при накладенні більш сильних обмежень уже не може поліпшити отримане раніше допустиме розв'язання.

Метод гілок і меж поряд із методом відсікання з обчислювальної точки зору має істотні переваги. Метод гілок і меж ефективний при розв'язанні задач, що містять невелике число цілочислових змінних. Проте якщо число таких змінних велике або розв'язання задачі лінійного програмування далеко від оптимального розв'язання цілочислової задачі (як це мало місце в розглянутому прикладі), то число ітерацій, необхідних для одержання розв'язання, може виявитися занадто великим і для реалізації алгоритму будуть потрібні невиправдані з практичної точки зору витрати машинного часу.

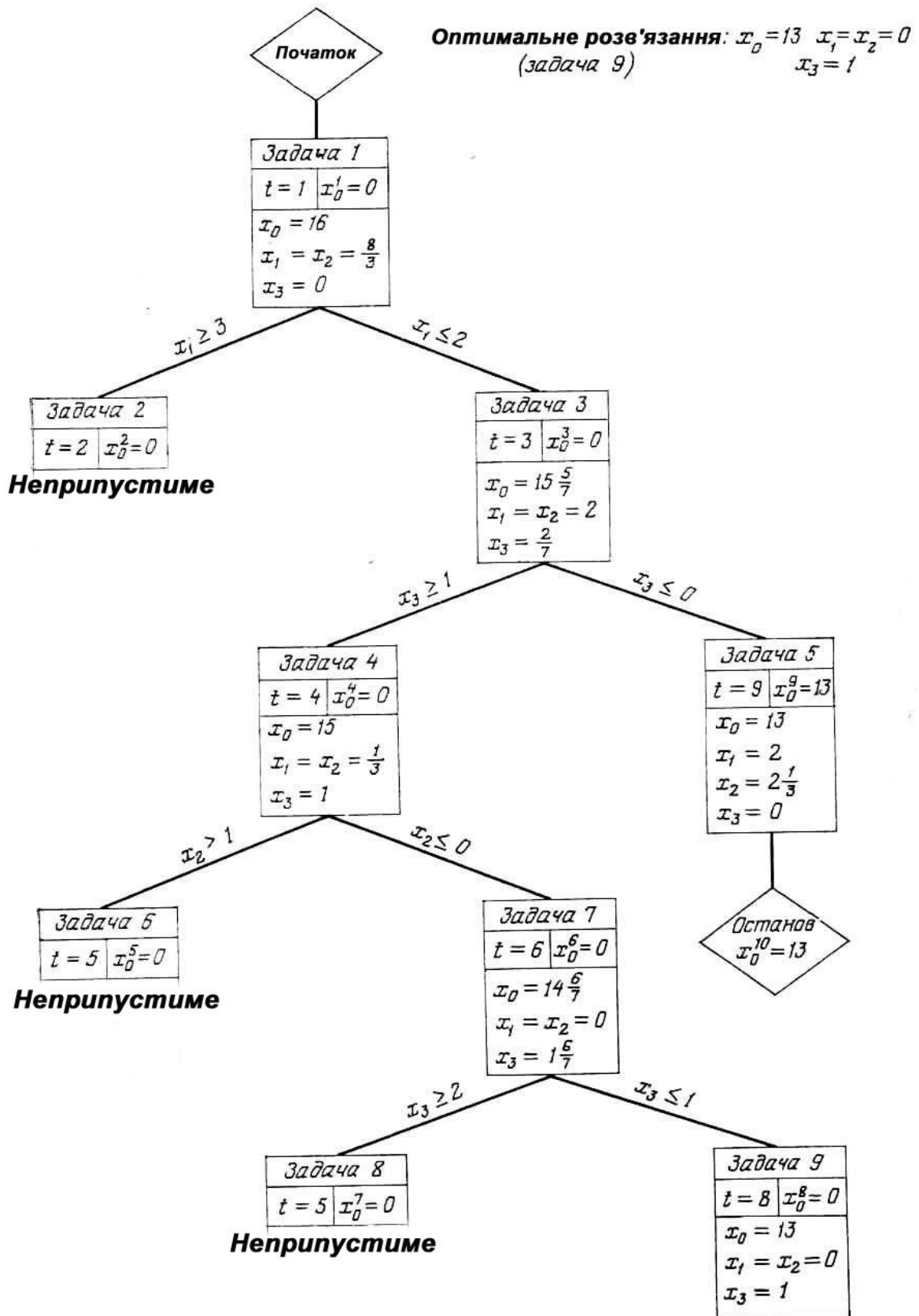


Рис. 4.1. Ітераційний процес за методом „Гілок і меж”.

Зрозуміло, що розглянутий метод можна застосувати для розв'язання комбінаторних задач, що містять тільки цілочислові булеві змінні. У цьому випадку будь-яка величина $L_j = 0$, а $U_j = 1$ і дві задачі, що добавляються на кроці 4, характеризуються альтернативами $x_j = 0$ і $x_j = 1$. Ефективність методу гілок і меж часто вдається підвищити, використовуючи структурні специфічні особливості конкретної моделі.

4.4. Варіанти індивідуальних завдань

Порядок виконання роботи:

- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.
- вивчити постановку задачі;
- для заданої цільової функції розв'язати задачу цілочисельного програмування, вважаючи що всі змінні задачі — цілі числа. В якості обмежень використовувати обмеження відповідних варіантів п. 3.5 теми „Задачі дробово-лінійного програмування”. Дати геометричну інтерпретацію розв'язку задачі;
- проаналізувати отриманий розв'язок й оформити звіт.

Зміст звіту

- ❖ На основі виконаного індивідуального завдання підготувати письмовий звіт який має містити наступні складові:
 - стислі теоретичні положення;
 - формулювання математичної моделі;
 - результати розв'язання задачі, подані у вигляді таблиць;
 - зробити висновки по роботі.

Варіанти завдань

таблиця 4.4

№ варіанту	Цільова функція	№ варіанту	Цільова функція
1	$F = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$	16.	$F = -4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$
2	$F = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$	17	$F = x_1 - 6x_2 \rightarrow \min.$

№ варіанту	Цільова функція	№ варіанту	Цільова функція
3	$F = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$	18.	$F = 2x_1 - 7x_2 \rightarrow \max$
4	$F = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$	19	$F = 3x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$
5	$F = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$	20.	$F = 8x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$
6	$F = 4x_1 - x_2 \rightarrow \min$	21	$F = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$
7	$F = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$	22.	$F = -7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max.$
8	$F = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$	23	$F = -6x_1 + x_2 \rightarrow \min$
9	$F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$	24.	$F = 3x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$
10	$F = 4x_1 + x_2 \rightarrow \min$	25	$F = -x_1 - 7x_2 \rightarrow \min.$
11	$F = 7x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$	26.	$F = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min.$
12	$F = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$	27.	$F = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max.$
13	$F = -3x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$	28	$F = 4x_1 - 7x_2 \rightarrow \min$
14	$F = -x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$	29	$F = 3x_1 - 6x_2 \rightarrow \max$
15	$F = -6x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$	30	$F = x_1 - 6x_2 \rightarrow \min$

4.5. Контрольні запитання

1. Сформулюйте математичну постановку задачі цілочислового програмування
2. Поясніть основні етапи розв'язку задачі цілочислового програмування за допомогою методу Гоморі.
3. Яка задача називається частково цілочисловою?
4. Сформулюйте основні етапи розв'язку задачі цілочислового програмування за допомогою методу гілок і меж.
5. Наведіть блок – схему алгоритма методу гілок і меж.

В темі розглянуто розв'язання цілочислових оптимізаційних методом Гоморі та гілок і меж, роз'яснені особливості застосування методів.

ТЕМА 5. ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ІГОР

Вивчивши зміст теми, студент має опанувати методи розв'язання задач зі стратегіями кількох учасників.

Гра — це дійсний або формальний конфлікт, у якому є принаймні два учасники (гравці), кожний із яких прагне досягнення власних цілей.

Однозначний опис вибору, який здійснює гравець у кожній з можливих ситуацій, називається *стратегією гравця*.

Стратегія гравця називається *оптимальною*, якщо при багатократному повторенні гри вона забезпечує гравцю максимальний середній виграш (мінімальний середній програш).

5.1. Постановка задачі

Нехай є два гравці, один із яких може вибрати i -ю стратегію з m -можливих ($i=1, m$), а другий, не знаючи вибору першого, вибирає j -ю стратегію з n -можливих ($j=1, n$). У результаті перший гравець виграє кількість $a(ij)$, а другий програє цю кількість. Матриця

$$A = a(ij) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

називається *матрицею гри*. Рядки матриці A відповідають стратегіям першого гравця, а стовпчикам-стратегіям другого. Ці стратегії називаються *чистими*.

Число $\alpha = \max_i (\min_j a_{ij})$ називається *нижньою ціною гри*, а відповідна α стратегія *максиміною*.

Число $\beta = \min_j (\max_i a_{ij})$ називається *верхньою ціною гри*, а відповідна β стратегія *мінімаксною*. Нижня ціна гри завжди не перевершує верхню, тобто $\alpha \leq \beta$.

5.2. Розв'язок гри із сідловою точкою

Якщо $\alpha = \beta = V$, то число V називається *ціною гри*, а сама гра є *гра із сідловою точкою*. Для гри із сідловою точкою її розв'язок складається у визначенні ціни гри, а також мінімальною й максимальною стратегіями гравців, що i є оптимальними. Таким чином, розв'язок у такому випадку шукається у чистих стратегіях.

Приклад 1. Знайти розв'язок гри заданою матрицею A .

Перший гравець має три можливі стратегії, а другий - чотири. Знайдемо нижню й верхню ціну гри.

$$\alpha = \max \{ \min (3; 4; 1; 5); \min (6; 3; 2; 4); \min (3; 1; 0; 7) \} = \max \{ 1; 2; 0 \} = 2;$$

$$\beta = \min\{\max(3;6; 3); \max(4;3; 1); \max(1;2; 0); \max(5;4; 7)\} = \min\{6; 4; 2; 7\} = 2.$$

$A = \begin{pmatrix} & \downarrow & & & \\ 3 & 4 & 1 & 5 & \\ \leftarrow & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 7 & \end{pmatrix}$
 Таким чином $\alpha = \beta = 2$, і маємо гру із сідловою точкою. Ціна гри дорівнює 2. Оптимальна стратегія першого гравця - третя, а оптимальна стратегія другого гравця - друга. Ці стратегії забезпечують максимальний гарантований виграш першому гравцю (рівний 2) і такий само гарантований мінімальний програш другому. Відхилення від оптимальної стратегії одним із гравців призводить до додаткових утрат.

5.3. Розв'язок гри, що не має сідлової точки

Коли гра, яка задана матрицею, не має сідлової точки, то $\alpha < V < \beta$, а для знаходження її розв'язку використовують змішані стратегії.

Вектор, кожна з компонент якого показує відносну частоту використання гравцем відповідної стратегії, називається *змішаною стратегією* даного гравця.

Позначимо: $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ $u_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$) - змішана стратегія першого гравця; $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ $z_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$) - змішана стратегія другого гравця.

Так як u_i і z_j - відносні частоти використання гравцями чистих стратегій,

$$\text{то } \sum_{i=1}^m u_i = 1 \text{ и } \sum_{j=1}^n z_j = 1 .$$

Якщо U^* і Z^* -оптимальні змішані стратегії першого й другого гравців, то ціна гри обчислюється за формулою:

$$V = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* z_j^* . \quad (5.2)$$

Визначення оптимальних змішаних стратегій V^* , Z^* і ціни гри складає процес розв'язку гри без сідлової точки.

Теорема 1. Якщо один із гравців застосовує оптимальну змішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри V незалежно від того, з якими частотами буде застосовувати другий гравець стратегії, що ввійшли в оптимальну (у тому числі і чисті стратегії).

За допомогою теореми 1 можна знайти розв'язок ігор без сідлової точки розміром 2×2 ; $2 \times n$; $n \times 2$.

Приклад 2. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

$\alpha = \max(-1; 2) = 2$ - нижня ціна гри;

$\beta = \min(4; 3) = 3$ - верхня ціна гри.

Значить маємо гру без сідлової точки, причому $2 < V < 3$.

$U = (u_1 \ u_2)$ - змішана стратегія першого гравця;

$Z = (z_1 \ z_2)$ - змішана стратегія другого гравця.

Якщо перший гравець застосовує оптимальну змішану стратегію, то за теоремою 1 можна скласти рівняння

$-1u_1^* + 4u_2^* = V$ - при застосуванні другим гравцем першої стратегії.

$3u_1^* + 2u_2^* = V$ - при застосуванні другим гравцем другої стратегії.

З урахуванням умови $u_1^* + u_2^* = 1$, маємо систему

$$\begin{cases} -u_1^* + 4u_2^* = V \\ 3u_1^* + 2u_2^* = V \\ u_1^* + u_2^* = 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Розв'язуючи її, знаходимо $u_1^* = 1/3$, $u_2^* = 2/3$, $V = 7/3$.

Аналогічно, застосовуючи теорему 1 для другого гравця, одержимо систему

$$\begin{cases} -z_1^* + 3z_2^* = V \\ 4z_1^* + 2z_2^* = V \\ z_1^* + z_2^* = 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

Звідки $z_1^* = \frac{1}{6}$, $z_2^* = \frac{5}{6}$, $V = \frac{7}{3}$. Таким чином, $U^* = (1/3; 2/3)$; $Z^* = (1/6; 5/6)$; $V = 7/3$.

Для першого гравця оптимальної буде стратегія, коли друга чиста стратегія застосовується у два рази частіше ніж перша, а для другого - коли друга застосовується в п'ять разів частіше, чим перша.

5.4. Розв'язок задач теорії ігор за допомогою методів лінійного програмування

Теорема 2. Для того щоб число V було ціною гри, а u^* і z^* - оптимальними стратегіями, необхідно й достатньо виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* \geq V, \quad j=\overline{1, n}; \quad (5.5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j^* \leq V, \quad i=\overline{1, m}. \quad (5.6)$$

За допомогою цієї теореми можна розв'язати задачу теорії ігор будь-якого розміру $m \times n$, попередньо претворивши її до задачі ЛП.

Розглянемо гру $m \times n$, обумовлену матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розділимо обидві частини нерівності (5.6) на V

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{u_i^*}{V} \geq 1 \quad j = \overline{1, n}.$$

Позначимо $\frac{u_i^*}{V} = y_i^* \quad i = \overline{1, m}$. Тоді

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq 1 \quad j = \overline{1, n} \quad y_i \geq 0, i = \overline{1, m}.$$

Використовуючи введене позначення, перепишемо умову $\sum_{i=1}^m u_i^* = 1$ у вигляді

$$\sum_{i=1}^m y_i^* = \frac{1}{V}.$$

Перший гравець прагне одержати максимальний виграш, то він повинен прагнути забезпечити мінімум $\frac{1}{V}$. Маємо задачу лінійного програмування

ня

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \rightarrow \min; \tag{5.7}$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq 1 \quad j = \overline{1, n}; \tag{5.8}$$

$$y_i^* \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5.9}$$

Міркуючи аналогічно у відношенні другого гравця, можна скласти задачу, двоїсту стосовно (5.3), (5.4), (5.5):

$$\sum_{j=1}^n x_j^* \rightarrow \max; \tag{5.10}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \leq 1 \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.11}$$

$$x_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

(5.12)

Використовуючи розв'язок пари двоїстих задач, одержуємо вираз для визначення стратегій і ціни гри:

$$V = \frac{1}{\sum_{j=1}^n x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m y_i^*}; \quad (5.13)$$

$$u_i^* = Vy_i^*, \quad i = \overline{1, m}; \quad z_j^* = Vx_j^*, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.14)$$

Приклад 3. Підприємство планує до випуску три види виробів А, В, С. Прибуток від реалізації виробів визначається попитом, що у свою чергу залежать від трьох можливих станів ринку: I, II, III. Прогноз показав, що для кожного виду виробів і стани ринку прибуток може бути задана матрицею

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 7 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Потрібно визначити, у яких співвідношеннях потрібно випускати вироби А, В, С, щоб гарантований прибуток при будь-якому стані ринку був максимальним. Маємо гру розміром 3x3. Спочатку знайдемо нижню й верхню ціни гри $\alpha = \max \{5; 5; 6\} = 6$, $\beta = \min \{9; 8; 10\} = 8$.

Це означає, що це гра без сідлової точки $6 < V < 8$ і розв'язок потрібно шукати у змішаних стратегіях $U = (u_1, u_2, u_3)$ і $Z = (z_1, z_2, z_3)$.

Відповідно до (5.3) - (5.8) складемо двоїсту пару задач ЛП:

$$F_2 = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 7y_2 + 9y_3 \geq 1 \\ 8y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 1 \\ 5y_1 + 6y_2 + 10y_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

$$F_1 = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 1 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_5 \leq 1 \\ 9x_1 + 6x_2 + 10x_3 + x_6 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, 6}.$$

Знайдемо розв'язок прямої і двоїстої задач симплексним методом:

Розв'язок двоїстої задачі

Таблиця 5.1

Двоїста задача

		Ітерація 0								
Ба зис	БАЗИСНІ ЗМІННІ	y 1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	z 1	z 2	z 3
y0	-3M	-19M+1	-18M+1	-25M+1	M	M	M	0	0	0

z1	1	6	7	9	-1	0	0	1	0	0
z2	1	8	5	6	0	-1	0	0	1	0
z3	1	5	6	10	0	0	-1	0	0	1
Ітерація 1										
Ба зис	БАЗИСНІ ЗМІННІ	y 1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	z 1	z 2	z 3
y0	-1/2M-1/10	-13/2M+1/2	-3M+2/5	0	M	M	-3/2M+1/10	0	0	5/2M-1/10
z1	1/10	3/2	8/5	0	-1	0	9/10	1	0	-9/10
z2	2/5	5	7/5	0	0	-1	3/5	0	1	-3/5
y3	1/10	1/2	3/5	1	0	0	-1/10	0	0	1/10
Ітерація 2										
Ба зис	БАЗИСНІ ЗМІННІ	y 1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	z 1	z 2	z 3
y0	-1/15M-2/15	0	59/15M-2/15	0	-10/3M+1/3	M	12/5M-1/5	13/3M-1/3	0	-7/5M+1/5
y1	1/15	1	16/15	0	-2/3	0	3/5	2/3	0	-3/5
z2	1/15	0	-59/15	0	10/3	-1	-12/5	-10/3	1	12/5
y3	1/15	0	1/15	1	1/3	0	-2/5	-1/3	0	2/5
Ітерація 3										
Ба зис	БАЗИСНІ ЗМІННІ	y 1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	z 1	z 2	z 3
y0	-7/50	0	13/50	0	0	1/10	1/25	M	M-1/10	M-1/25
y1	4/50	1	7/25	0	0	-1/5	3/25	0	1/5	-3/25
y4	1/50	0	-59/50	0	1	-3/10	-18/25	-1	3/10	18/25
y3	3/50	0	23/50	1	0	1/10	-4/25	0	-1/10	4/25

Розв'язок прямої задачі

Таблиця 5.1

Крок 0							
Базис	БАЗИСНІ ЗМІННІ	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6
x0	0	-1	-1	-1	0	0	0
x4	1	6	8	5	1	0	0
x5	1	7	5	6	0	1	0
x6	1	9	6	10	0	0	1
Крок 1							
Базис	БП	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6
x0	1/9	0	-1/3	1/9	0	0	1/9
x4	1/3	0	4	-5/3	1	0	-2/3
x5	2/9	0	1/3	-16/9	0	1	-7/9
x1	1/9	1	2/3	10/9	0	0	1/9
Крок 2							
Базис	БАЗИСНІ ЗМІННІ	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6
x0	5/36	0	0	-1/36	1/12	0	1/18
x2	1/12	0	1	-5/12	1/4	0	-1/6
x5	7/36	0	0	-59/36	-1/12	1	-13/18

x1	1/18	1	0	25/18	-1/6	0	2/9
Крок 3							
Базис	БАЗИСНІ ЗМІННІ	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6
x0	7/50	1/50	0	0	2/25	0	3/50
x2	1/10	3/10	1	0	1/5	0	-1/10
x5	13/50	59/50	0	0	-7/25	1	-23/50
x3	1/25	18/25	0	1	-3/25	0	4/25

З останньої таблиці видно, що двоїста задача має розв'язок: $-Y^* = (\frac{4}{50}; 0; \frac{3}{50})$,

а. пряма $X^* = (0; 1/10; 2/50)$

Тоді, ціна гри $V = \frac{1}{\sum x_j^*} = \frac{1}{\sum y_i^*} = \frac{50}{7}$, а оптимальні стратегії гравців перераховуються за виразами (5.10):

$$u_1^* = Vy_1^* = \frac{50}{7} \cdot \frac{4}{50} = \frac{4}{7}; \quad z_1^* = Vx_1^* = \frac{50}{7} \cdot 0 = 0;$$

$$u_2^* = Vy_2^* = \frac{50}{7} \cdot 0 = 0; \quad z_2^* = Vx_2^* = \frac{50}{7} \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{7};$$

$$u_3^* = Vy_3^* = \frac{50}{7} \cdot \frac{3}{50} = \frac{3}{7}; \quad z_3^* = Vx_3^* = \frac{50}{7} \cdot \frac{2}{50} = \frac{2}{7};$$

$$U^* = (\frac{4}{7}; 0; \frac{3}{7}); \quad Z^* = (0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}).$$

З урахуванням вихідної задачі інтерес представляє стратегія першого гравця, тобто вектор U^* . Оптимальною для підприємства буде наступна стратегія: виріб В узагалі не треба випускати, а вироби А і С необхідно випускати у співвідношенні 4 : 3 (на чотири вироби А три вироби С).

5.5 Варіанти завдань

Порядок виконання роботи:

- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.
- вивчити постановку задачі;
- Знайти розв'язок гри, що задана матрицею гри А;
- проаналізувати отриманий розв'язок й оформити звіт.

Зміст звіту

- ❖ На основі виконаного індивідуального завдання підготувати письмовий звіт який має містити наступні складові:

- стислі теоретичні положення;
- формулювання математичної моделі;
- результати розв'язання задачі, подані у вигляді таблиць;
- зробити висновки по роботі.

$$1. A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 & 7 \\ 8 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 11 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 & 12 \\ 6 & 4 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 & 12 \\ 5 & 11 & 6 & 8 \\ 9 & 13 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 6 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 8 & 15 \\ 6 & 7 & 10 & 9 \\ 8 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 11 & 6 \\ 9 & 12 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 6 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 11 & 10 \\ 4 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 4 & 10 \\ 6 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 6 & 11 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 & 7 \\ 8 & 6 & 11 & 9 \\ 10 & 8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 8 & 6 & 11 \\ 7 & 12 & 5 \\ 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 9 & 11 \\ 6 & 8 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 4 & 12 & 5 \\ 9 & 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 11 \\ 7 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 & 8 \\ 7 & 10 & 4 & 11 \\ 12 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 \\ 6 & 4 & 9 \\ 11 & 8 & 5 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 6 & 8 & 11 \\ 10 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 12 & 5 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 7 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 8 & 9 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 10 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 12 \\ 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 6 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 10 \\ 7 & 11 & 6 \\ 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 9 & 10 & 9 \\ 8 & 11 & 4 \\ 12 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 12 \\ 11 & 8 & 6 \\ 9 & 4 & 13 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 12 \\ 13 & 11 & 10 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 12 \\ 9 & 10 & 7 \\ 6 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

5.6 Контрольні запитання

1. Роз'ясніть поняття матриці гри
2. Яке число називається нижньою та верхньою цінами гри?
3. Яка гра називається грою з сідловою точкою?
4. Сформулюйте теорему для знаходження розв'язків ігор без сідлової точки розміром 2×2 ; $2 \times n$; $n \times 2$.
5. Сформулюйте методику розв'язку задачі зі змішаними стратегіями.

В темі розглянуто методи розв'язання задач теорії ігор, роз'яснені особливості застосування методів для задач з сідловою точкою та зі змішаними стратегіями.

ТЕМА 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Вивчивши зміст теми, студент має опанувати поняттям нелінійного програмування і наочними методами їх розв'язання.

6.1. Загальна постановка задач нелінійного програмування

У загальному випадку задача нелінійного програмування формулюється так: визначити екстремальне значення функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr} \quad (6.1)$$

за умови, що змінні x_1, x_2, \dots, x_n задовольняють обмеженням

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = \overline{1, k} \\ q_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_j, \quad j = \overline{k+1, m} \\ q_s(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_s, \quad s = \overline{m+1, n} \end{array} \right. , \quad (6.2)$$

f, q - функції n змінних, b_s - задані числа. ($s = i, j, l$).

Значення змінних x_i ($i = \overline{1, n}$), що задовольняють (6.2) називаються припустимими розв'язаннями, а припустиме розв'язання $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, яке доставляє в екстремум функцію f називається оптимальним розв'язанням задачі (6.1), (6.2). Якщо хоча б одна з функцій є нелінійною, то задача (6.1), (6.2) являє собою задачу *нелінійного програмування (НП)*. Універсальних методів розв'язання задач НП не існує. У залежності від вигляду функції (6.1) і обмежень (6.2) застосовується той або інший метод розв'язання.

6.2. Графічний метод розв'язання задач нелінійного програмування

Якщо f, q_i є функціями тільки двох або трьох змінних, то задача (6.1), (6.2) може бути розв'язана графічно.

Процес розв'язання налічує наступні етапи:

1. За формулами (6.2) визначається область припустимих розв'язань (ОПР) і виділяється на площині X_1OX_2 . Якщо система (6.2) несумісна, то це означає, що задача НП не має розв'язків.
2. На площині X_1OX_2 будується сімейство функцій $f(x_1, x_2) = h$, (h - параметр).
3. Визначається функція $f(x_1, x_2) = h^*$ із мінімальним або максимальним значенням h^* (у залежності від виду екстремуму (1)) на множині допустимих розв'язків. Якщо функція f на цій множині необмежена, то задача НП не має розв'язків.
4. Знаходиться точка (x_1^*, x_2^*) і значення функції у ній $f(x_1^*, x_2^*) = h^*$.

Приклад: Визначити мінімальне й максимальне значення функції

$$f = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2$$

при обмеженнях на змінні

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \\ x_2 \geq 3x_1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. На площині X_1OX_2 будемо область припустимих розв'язків (рис. 6.1). Заміняючи нерівності в обмеженнях на строги рівності, маємо граничні криві:

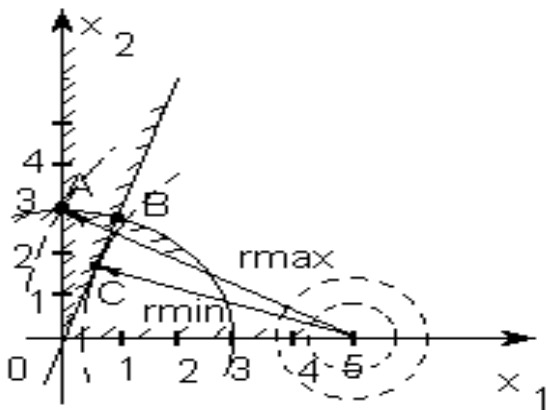


Рис. 6.1. Графічне розв'язання задачі

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 9 \\ x_2 = 3x_1 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

Для кожного обмеження позначимо допустиму область штрихуванням. Тоді область припустимих розв'язків задачі є фігура ОАВ.

1. Щоб побудувати сімейство кривих $f = h$, виділимо спочатку в цільовій функції повний квадрат по x_1
 $f = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 = x_1^2 - 2 \cdot 5x_1 + 25 + x_2^2 - 25 = (x_1 - 5)^2 + x_2^2 - 25 = h$

Цільова функція являє собою сімейство

концентричних кіл різноманітного радіуса (у залежності від значення параметра h), центр яких розташований у точці з координатами $(5; 0)$.

2. Мінімальне значення цільової функції на множині припустимих розв'язків відповідає колу з мінімальним радіусом r_{\min} , що дотикається ОПР у точці С. Максимальне значення функції f відповідає колу радіусом r_{\max} , що проходить через точку А.

3. Точка А має координати $(0; 3)$ $x_1 = 0, x_2 = 3$.

Тому $f_{\max} = 0^2 - 10 \cdot 0 + 3^2 = 9$ при $x_1^* = 0$ і $x_2^* = 3$.

Координати точки дотику кола і прямої (т. С) знайдемо, розв'язуючи спільно:

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 = h \\ x_2 = 3x_1 \end{cases}$$

Щоб до визначити цю систему, потрібно використовувати умову дотику прямої й кола, що формулюється у рівності нулю детермінанту квадратного рівняння. Виключимо x_2 із системи:

$$x_1^2 - 10x_1 + (3x_1)^2 = h;$$

$$x_1^2 - x_1 - 0,1h = 0;$$

$$x_1 = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + 0,1h} .$$

З умови дотику відшукуємо h

$$0,25 + 0,1h = 0 \rightarrow h = -2,5 .$$

Тоді $x_1 = 0,5$ і $x_2 = 1,5$ – точка С (0,5;1,5)

$$f_{\min} = 0,5^2 - 10 \cdot 0,5 + 1,5^2 = -2,5 \quad \text{при } x_1^* = 0,5 \text{ і } x_2^* = 1,5$$

6.3 Варіанти завдань

Порядок виконання роботи:

- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.
- Визначити графічним методом мінімальне і максимальне значення цільової функції f при обмеженнях на змінні;
- проаналізувати отриманий розв'язок й оформити звіт.

Зміст звіту

- ❖ На основі виконаного індивідуального завдання підготувати письмовий звіт який має містити наступні складові:
 - стислі теоретичні положення;
 - формулювання математичної моделі;
 - результати розв'язання задачі, подані у вигляді таблиць;
 - зробити висновки по роботі.

Варіанти з непарними номерами	Варіанти з парними номерами
$1. f = x_2 - x_1^2 + 4x_1 \rightarrow extr$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$2. f = x_1 x_2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
$3. f = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$	$4. f = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
$5. f = x_1 x_2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$6. f = x_1 - x_2^2 + 6x_2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
$7. f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 25 \\ x_1 x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$8. f = x_1 x_2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
$9. f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$10. f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 8x_1 - x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
$11. f = 2x_1 - 6x_2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 9 \\ (x_1 - 3)^2 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$12. f = -x_1 - x_2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 9 \\ x_2 \geq (x_1 - 4)^2 + 2 \\ x_2 \leq -(x_1 - 4)^2 + 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
$13. f = x_1 + x_2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 36 \\ x_2 \geq (x_1 - 4)^2 + 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$14. f = 2x_1 + x_2 \rightarrow extr$ $\begin{cases} x_1 x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq -(x_1 - 4)^2 + 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Варіанти з непарними номерами	Варіанти з парними номерами
15. $f = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}$ $\begin{cases} x_2 \geq (x_1 - 4)^2 + 2 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	

6.4 Контрольні запитання

1. Яка задача оптимізації називається задачею нелінійного програмування?
2. Сформулюйте методику розв'язання задачі нелінійного програмування графічним методом.
3. Чи існує універсальний метод аналітичного розв'язання задач нелінійного програмування?

В темі розглянуто математичну постановку задач нелінійного програмування, роз'ясненої розв'язання таких задач графічним методом

ТЕМА 7. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Вивчивши зміст теми, студент має опанувати метод розв'язання оптимізаційних задач нелінійного програмування та особливості його застосування.

7.1. Загальна постановка задачі

Якщо система обмежень на змінні x_1, x_2, \dots, x_n містить тільки рівняння, то це є окремий випадок задачі НП:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr}, \quad (7.1)$$

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7.2)$$

Функції $f, q_i (i = \overline{1, m})$ є такими, що диференціюються.

7.2 Алгоритм розв'язання задачі методом множників Лагранжа

Задача (7.1), (7.2) на умовний екстремум може бути розв'язана методом множників Лагранжа, що налічує такі основні етапи:

1. Уводиться набір допоміжних змінних $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ за кількістю обмежень (8.2), що називаються невизначеними множниками Лагранжа.
2. Укладається функція Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i] \quad (7.3)$$

3. Складається система рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= 0; & j &= \overline{1, n} \\ & \dots & & \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= 0; & i &= \overline{1, m} \end{aligned} \quad (7.4)$$

4. Система (7.4) містить $(n+m)$ рівнянь, розв'язуючи їх визначають невідомі $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$. Необхідною умовою того, що точка $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ є розв'язком задачі, має бути виконання рівностей (7.4). Система (7.4) має декілька розв'язань і вони по черзі безпосередньо підставляються в (7.1) для визначення виду екстремуму.

Приклад 1. На підприємстві існує два засоби виробництва деякого продукту. Визначимо через y_1 і y_2 кількість продукту, вироблених першим і

другим засобом відповідно. Витрати виробництва H для кожного засобу залежать від вироблених кількостей продукції y_1 і y_2 .

Таким чином

$$H_1(y_1) = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2, \quad a_0, a_1, a_2 > 0;$$

$$H_2(y_2) = b_0 + b_1 y_2 + b_2 y_2^2, \quad b_0, b_1, b_2 > 0.$$

За певний період часу необхідно зробити рівно C одиниць продукції, тобто $y_1 + y_2 = C$, розподіливши її між двома засобами так щоб мінімізувати загальні витрати.

Сформулюємо математичну модель задачі

$$H = H_1 + H_2 = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + b_0 + b_1 y_2 + b_2 y_2^2 \rightarrow \min;$$

$$y_1 + y_2 = C.$$

У цій задачі $n=2$ (кількість невідомих) і $m=1$ (кількість обмежень).

Уведемо невизначений множник Лагранжа λ і складемо функцію Лагранжа (7.3):

$$L(y_1, y_2, \lambda) = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + b_0 + b_1 y_2 + b_2 y_2^2 + \lambda(y_1 + y_2 - C)$$

Складемо систему рівнянь (7.4), вирахувавши часткові похідні по y_1 , y_2 , λ і дорівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y_1} = a_1 + 2a_2 y_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = b_1 + 2b_2 y_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y_1 + y_2 - C = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо кількості продуктів y_1 , y_2 :

$$y_1^* = \frac{b_2 C}{a_2 + b_2} + \frac{b_1 - a_1}{2(a_2 + b_2)}; \quad y_2^* = \frac{a_2 C}{a_2 + b_2} - \frac{b_1 - a_1}{2(a_2 + b_2)}$$

Приклад 2.

а) Знайти екстремальне значення функції

$$f = 3x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_2 x_3 + 5x_3^2 - 15 \rightarrow \text{extr};$$

б) при обмеженнях на змінні:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

с) Визначити вид екстремуму.

У задачі що розглядається є два обмеження, тому вводимо два множники Лагранжа λ_1, λ_2 . Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2 - 15 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(2x_2 + x_3 - 3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2 + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = -2x_2 + 10x_3 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 - 4 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x_2 + x_3 - 3 \end{cases}$$

Розв'язуючи отриману систему, знаходимо: $x_1^* = 2,4074$;

$$x_2^* = 1,5926;$$

Тоді

$$x_3^* = -0,1852 .$$

$$f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 3 \cdot 2,4074^2 + 2,4074 \cdot 1,5926 + 1,5926^2 - 2 \cdot 1,592 \cdot (-0,1852) + 5 \cdot (-0,1852) - 15 = 9,5185 .$$

Знайдемо значення функції $f(x_1, x_2, x_3)$ на однім із припустимих розв'язків. Наприклад, $x_1 = 4$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$ $f_{\text{дон}}(4, 0, 3) = 48 + 0 + 0 - 0 + 45 - 15 = 78$

Отже, вид екстремуму - **мінімум**. У реальних задачах вид екстремуму очевидний з фізичного змісту задачі. У загальному випадку варто мати на увазі, що особливими точками можуть бути і сідлові точки.

7.3 Варіанти завдань

Порядок виконання роботи:

- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.
- вивчити постановку задачі;

- Знайти екстремальні значення цільової функції з урахуванням обмежень на змінні.
- проаналізувати отриманий розв'язок й оформити звіт.

Зміст звіту

❖ На основі виконаного індивідуального завдання підготувати письмовий звіт який має містити наступні складові:

- стислі теоретичні положення;
- формулювання математичної моделі;
- результати розв'язання задачі, подані у вигляді таблиць;
- зробити висновки по роботі.

$$1. f = 5x_1^2 + x_1x_3 + 3x_2^2 - 3x_2x_3 + x_3^2 \rightarrow extr \quad 2. f = 6x_1^2 + x_1 + x_1x_2 + 3x_2^2 - x_3^2 - x_2x_3 \rightarrow extr$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 14 \\ 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$3. f = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2x_3 + 2x_3^2 - 15 \rightarrow extr \quad 4. f = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_3 + 5 \rightarrow extr$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_3 = 16 \end{cases}$$

$$5. f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_2x_3 + 2x_3^2 \rightarrow extr \quad 6. f = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2x_3 - 4x_3^2 \rightarrow extr$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

$$7. f = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 + 4x_1x_2 \rightarrow extr \quad 8. f = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5 \rightarrow extr$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 5x_3 = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 30 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$9. f = 3x_1^2 + x_1 - 2x_2^2 - x_1x_3 + 2x_3^2 + x_2x_3 \rightarrow extr \quad 10. f = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - x_1x_3 - 2x_1x_2 \rightarrow extr$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_3 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$11. f = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 - x_2x_3 + 4x_3^2 - 15 \rightarrow extr \quad 12. f = 2x_1^2 + x_1x_3 - 4x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \rightarrow extr$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 12 \\ 5x_2 + x_3 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -12 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

$$13. f = x_1^2 + 2x_1 + 5x_1x_2 + x_2^2 - 4x_3^2 - x_2x_3 \rightarrow extr \quad 14. f = 3x_1^2 + x_1x_3 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 3x_3^2 \rightarrow extr$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ 4x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 16 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 20 \end{cases}$$

$$15. f = 6x_1^2 + 5x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -8 \\ 4x_2 + 5x_3 = 18 \end{cases}$$

$$17. f = 2x_1^2 + x_2x_3 + x_2^2 - 3x_3^2 - x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

$$19. f = 4x_1^2 + x_1 + 5x_2^2 + x_1x_3 - 4x_3^2 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$$

$$21. f = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2x_3 - x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 12 \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$$

$$23. f = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 + x_1x_3 - 3x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 16 \end{cases}$$

$$25. f = x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_2x_3 + 5 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -10 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$27. f = 2x_1^2 + 4x_2 + 5x_1x_3 - x_2^2 + 3x_3^2 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$$29. f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 8 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$16. f = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2x_3 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 15 \\ 4x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$18. f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - x_2x_3 + 3x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$20. f = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 - x_2x_3 - 4x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 16 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 22 \end{cases}$$

$$22. f = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$24. f = 6x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + x_2x_3 + 4x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$26. f = 3x_1^2 + 5x_1 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 - 4x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 16 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

$$28. f = 4x_1 + 5x_1x_2 - 2x_2^2 + 3x_1x_3 - 2x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$30. f = 6x_1^2 + x_1x_2 - 3x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 6 \\ 7x_1 + x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$$

7.4 Контрольні запитання

1. Сформулюйте тип задач, до яких можна застосувати метод множників Лагранжа.
2. Сформулюйте етапи алгоритму методу множників Лагранжа.
3. Якими властивості повинні мати цільова функція та обмеження для застосування методу множників Лагранжа?
4. Для чого застосовуються невизначені множники Лагранжа?

5. Якого типу мають бути обмеження , для застосування методу множників Лагранжа?

В темі розглянуто метод Лагранжа для розв'язання задач нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями, роз'яснені особливості застосування цього методу .

ТЕМА 8. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Вивчивши зміст теми, студент має опанувати ітераційні методи розв'язання оптимізаційних задач та особливості їх застосування на практиці

Безумовною оптимізацією називаються задачі нелінійного програмування, що не містять обмежень

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr} \quad (8.1)$$

У певних випадках для розв'язання подібних задач доцільно використовувати числові методи. Ці методи мають такі особливості:

- вони орієнтовані на застосування ЕОМ і передбачають великий обсяг однотипних обчислень;
- дозволяють одержати наближене розв'язання з наперед заданою точністю;
- містять ітераційні співвідношення.

Процес розв'язання задачі (8.1) числовим методом виконується поетапно. Кожний такий етап (або ітерація) дозволяє перейти в нову точку в n -мірному просторі $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$... Для такого ітераційного процесу необхідно виконання співвідношень:

$$f(X^0) > f(X^1) > \dots > f(X^k) > \dots \quad (8.2)$$

Тут k - номер ітерації.

Надалі для визначеності будемо розглядати задачу на пошук мінімуму функції.

8.1. Градієнтний метод із дробленням кроку

Початкові дані: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функція n змінних;

$X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – координати початкової точки;

α - початкове значення кроку;

ε - точність обчислень.

Обчислення виконуються наступним чином:

1. Обчислюється значення функції у черговій точці $f(x_i)$.
2. Обчислюються координати такої точки: $x_j^{i+1} = x_j^i - \alpha \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{X^i}$; $j = \overline{1, n}$.
3. Якщо $f(X^{i+1}) > f(X^i)$, то слідує, зменшивши вдвічі α , повторити обчислення п.2.
4. Перевіряється умова досягнення точності

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{X^{i+1}} \right)^2} < \varepsilon.$$

Якщо точність не досягнута, переходять до п. 2.

Приклад. Градієнтним методом із дробленням кроку знайти координати точки мінімуму функції $f(x_1, x_2) = 1,5x_1 + \exp(2x_1^2 + 0,25x_2^2)$, якщо $\varepsilon = 0,1$; $\alpha = 0,5$; $X^0 = (0; 0)$.

Загальні формули для складового вектора градієнту:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1,5 + 4x_1 \exp(2x_1^2 + 0,25x_2^2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,5x_2 \exp(2x_1^2 + 0,25x_2^2).$$

1. $f(0,0) = 1;$

2. $x_1^1 = x_1^0 - \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{X^0} = 0 - 0,5 \cdot 1,5 = -0,75 .$

$$x_2^1 = x_2^0 - \alpha \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{X^0} = 0 - 0,5 \cdot 0 = 0$$

3. $f(-0,75; 0) = 1,5 \cdot (-0,75) + \exp[2(-0,75)^2 + 0,25 \cdot 0^2] = 1,955$

Якщо $f(-0,75; 0) > f(0; 0)$, то $\alpha = 0,5/2 = 0,25$.

Повторюємо обчислення п. 2.

2. $x_1^1 = 0 - 0,25 \cdot 1,5 = 0,375;$

$$x_2^1 = 0 - 0,25 \cdot 0 = 0 .$$

3. $f(-0,375; 0) = 0,7623;$

$$f(-0,375; 0) < f(0; 0) .$$

4. $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_1 = -0,375 \\ x_2 = 0}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_1 = -0,375 \\ x_2 = 0}} \right)^2} = \sqrt{(-0,487)^2 + 0^2} > \varepsilon .$

Якщо точність не досягнута, то переходимо до п. 2.

2. $x_1^2 = x_1^1 - \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{X^1};$

$$x_2^2 = x_2^1 - \alpha \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{X^1} \quad \text{і т.д.}$$

8.2. Метод найскорішого спуску

У цьому методі на кожній ітерації величина кроку вибирається з умови мінімуму функції у напрямку градієнту, тобто розв'язується задача

$$f(X^{i+1}) = f[X^i - \alpha \cdot \text{grad}f(X^i)] \rightarrow \min_{\alpha}$$

Незважаючи на додаткові обчислення на кожній ітерації цей метод забезпечує швидкий вихід в область екстремуму.

Початкові дані: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функція n змінних;

$X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – координати початкової точки;

ε – точність обчислень.

Кожна ітерація включає такі дії:

1. Обчислюється складові вектора градієнту в черговій i -тій точці.
2. Для визначних X^i і $\text{grad} f(X^i)$ складається функція $f[X^i - \alpha \text{grad} f(X^i)]$ однієї змінної α . Розв'язується задача $f[X^i - \alpha \text{grad} f(X^i)] \rightarrow \min_{\alpha}$ і визначається оптимальний крок α .
3. Визначаються координати чергової точки

$$x_j^{i+1} = x_j^i - \alpha_i^* \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{X^i}; j = \overline{1, n}.$$

4. Якщо умова $\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{X^{i+1}} \right)^2} < \varepsilon$ не виконується, то переходять до п. 2

Приклад. Методом найскорішого спуску знайти координати точки мінімуму функції

$$f(x_1, x_2) = \exp(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1 - 3,5x_2.$$

При $\varepsilon=0,01$ і $X^0=(0;0)$

Знайдемо формулу для складових вектора градієнта:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \exp(x_1^2 + x_2^2) + 2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 \exp(x_1^2 + x_2^2) - 3,5.$$

$$1. \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{X^0} = 2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{X^0} = -3,5;$$

$$2. f(x_1^1, x_2^1) = f\left(x_1^0 - \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{X^0}; x_2^0 - \alpha \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{X^0}\right) = f(0 - 2\alpha; \alpha(-3,5)) = f(-2\alpha; 3,5\alpha) = \\ = \exp[(-2\alpha)^2 + (3,5\alpha)^2] + 2(-2\alpha) - 3,5(-3,5\alpha) = \exp(16,25\alpha^2) - 16,25\alpha$$

Розв'язуючи задачу $f(-2\alpha; 3, 5\alpha) \rightarrow \min_{\alpha}$,

знаходимо $\alpha^* = 0,222$.

Обчислюємо :

$$3. \quad x_1^1 = x_1^0 - \alpha^* \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{X^0} = 0 - 0,2225 \cdot 2 = -0,445;$$

$$x_2^1 = x_2^0 - \alpha^* \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{X^0} = 0 - 0,2225 \cdot (-3,5) = 0,77875.$$

$$4. \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x_1 = -0,445 \\ x_2 = 0,77875}} = 0,0096; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_1 = -0,445 \\ x_2 = 0,77875}} = -0,0157; \quad \sqrt{0,0096^2 + (-0,0157)^2} > \varepsilon .$$

Продовжуємо обчислення з п. 2 доти поки не буде знайдене оптимальне розв'язання.

8.3. Негradientні методи

Ця група методів також орієнтована на ітераційний обчислювальний процес, проте, напрямок руху в черговій точці не визначається вектором градієнта. Найбільше поширеним із цієї групи методів є метод покоординатного спуску.

Початкові дані: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функція n невідомих;

$X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – початкова точка;

ε – точність обчислень.

На першій ітерації розв'язуються послідовно задачі одновимірної оптимізації для кожної змінної:

$$f(x_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0) \rightarrow \min_{x_1}; \quad \text{Точка оптимуму} - x_1^1;$$

$$f(x_1^1, x_2, x_3^0, \dots, x_n^0) \rightarrow \min_{x_2}; \quad \text{Точка оптимуму} - x_2^1;$$

.....

$$f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n) \rightarrow \min_{x_n}; \quad \text{Точка оптимуму} - x_n^1.$$

Перевіряється умова $\sum_{j=1}^n |x_j^1 - x_j^0| < \varepsilon$.

Якщо ця умова не виконується, переходять до другої ітерації.

$$f(x_1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1) \rightarrow \min_{x_1}; \quad \text{Точка оптимуму} - x_1^2;$$

$$f(x_1^2, x_2, x_3^1, \dots, x_n^1) \rightarrow \min_{x_2}; \quad \text{Точка оптимуму} - x_2^2;$$

.....

$$f(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) \rightarrow \min_{x_n}; \quad \text{Точка оптимуму} - x_n^2 .$$

Перевіряється умова

$$\sum_{j=1}^n |x_j^2 - x_j^1| < \varepsilon .$$

і так далі до отримання оптимального розв'язку.

Приклад. Методом покоординатного спуску розв'язати задачу мінімізації функції $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 15$, якщо $X^0(1, 0, 2)$ і $\varepsilon = 0,01$.

$$1. \quad f(x_1, x_2^0, x_3^0) = f(x_1; 0; 2) = 3x_1^2 - 7 \rightarrow \min_{x_1};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 = 0 \rightarrow x_1^1 = 0;$$

$$f(x_1^1, x_2, x_3^0) = f(0; x_2; 2) = x_2^2 - 4x_2 - 7 \rightarrow \min_{x_2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 = 0 \rightarrow x_2^1 = 2;$$

$$f(x_1^1, x_2^1, x_3) = f(0; 2; x_3) = 2x_3^2 - 4x_3 - 11 \rightarrow \min_{x_3};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 4x_3 - 4 = 0 \rightarrow x_3^1 = 1 .$$

У результаті маємо, $X^0 = (0, 2, 1)$.

Перевіряємо умову досягнення заданої точності обчислень

Переходимо до другої ітерації.

$$2. \quad |x_1^1 - x_1^0| + |x_2^1 - x_2^0| + |x_3^1 - x_3^0| = |0 - 1| + |2 - 0| + |1 - 2| > \varepsilon ;$$

$$f(x_1, x_2^1, x_3^1) = f(x_1; 2; 1) = 3x_1^2 + 2x_1 - 13 \rightarrow \min_{x_1};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 2 = 0 \rightarrow x_1^2 = \frac{1}{3};$$

$$f(x_1^2, x_2, x_3^1) = f\left(\frac{1}{3}; x_2; 1\right) = x_2^2 - \frac{5}{3}x_2 - 12\frac{2}{3} \rightarrow \min_{x_2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - \frac{5}{3} = 0 \rightarrow x_2^2 = \frac{5}{6};$$

$$f(x_1^2, x_2^2, x_3) = f\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; x_3\right) = 2x_3^2 - \frac{5}{3}x_3 - 13\frac{11}{36} \rightarrow \min_{x_3};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 4x_3 - \frac{5}{3} = 0 \rightarrow x_3^2 = \frac{5}{12} .$$

Перевіряємо умову досягнення заданої точності

$$\left|\frac{1}{3} - 0\right| + \left|\frac{5}{6} - 2\right| + \left|\frac{5}{12} - 1\right| > \varepsilon .$$

Переходимо до третьої ітерації, і так далі доти, поки не буде знайдено оптимальне розв'язання

8.4 Варіанти завдань

Порядок виконання роботи:

- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.

№ варіанту	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	№ варіанту	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1.	0.4	-1.4			16.	0.5	-1.3	0.29	0.11
2.	0.6	-1.2	0.28	0.12	17.	0.7	-1.1	0.27	0.13
3.	0.8	-1.0	0.26	0.14	18.	0.9	-0.9	0.25	0.15
4.	1.0	-0.8	0.24	0.16	19.	1.1	-0.7	0.23	0.17
5.	1.2	-0.6	0.22	0.18	20.	1.3	-0.5	0.21	0.19
6.	1.4	-0.4	0.2	0.2	21.	1.5	-0.3	0.19	0.21
7.	1.6	-0.2	0.18	0.22	22.	1.7	-0.1	0.17	0.23
8.	1.8	0	0.16	0.24	23.	1.9	0.1	0.15	0.25
9.	2.0	0.2	0.14	0.26	24.	2.1	0.3	0.13	0.27
10.	2.2	0.4	0.12	0.28	25.	2.3	0.5	0.11	0.29
11.	2.4	0.6	0.1	0.3	26.	2.5	0.7	0.09	0.31
12.	2.6	0.8	0.08	0.32	27.	2.7	0.9	0.07	0.33

№ варіанту	a	b	c	d	№ варіанту	a	b	c	d
13.	2.8	1.0	0.06	0.34	28.	2.9	1.1	0.05	0.35
14.	3.0	1.2	0.04	0.36	29.	3.1	1.3	0.03	0.37
15.	3.2	1.4	0.02	0.38	30.	3.3	1.5	0.01	0.39

- Виконати мінімізацію функції $f(x_1, x_2)$ застосовуючи розглянуті методи оптимізації, де ε - похибка обчислення мінімуму функції, X^0 - вихідна точка для пошуку екстремуму

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + \exp(cx_1^2 + dx_2^2)$$

$$\varepsilon = 0,1$$

$$X^0 = (0;0);$$

- проаналізувати отриманий розв'язок й оформити звіт.

Зміст звіту

- ❖ На основі виконаного індивідуального завдання підготувати письмовий звіт який має містити наступні складові:

- стислі теоретичні положення;
- формулювання математичної моделі;
- результати розв'язання задачі, подані у вигляді таблиць;
- зробити висновки по роботі.

8.5 Контрольні запитання

- Сформулюйте поняття безумовної оптимізації
- Особливості числових методів безумовної оптимізації.
- Сформулюйте основні етапи обчислень за градієнтним методом із доробленням кроку.
- Сформулюйте основні етапи обчислень за методом найшвидшого спуску.
- Сформулюйте особливості та відмінності не градієнтним методів.
- Поясніть основні кроки методу покоординатного спуску.

В темі розглянуто градієнтні та неградієнтні методи розв'язання безумовних задач нелінійного програмування, роз'яснені особливості застосування методів.

ТЕМА 9. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Вивчивши зміст теми, студент має опанувати принцип оптимальності Белмана та його практичну реалізацію для розв'язання економічних задач.

9.1 Алгоритм методу динамічного програмування

Розглянемо застосування методу динамічного програмування на прикладі розподілу капіталовкладень між чотирма підприємствами. Нехай загальна сума коштів, що інвестуються в розвиток складає не більш 5-ти мільйонів гривень. На основі техніко-економічних розрахунків встановлено, що в результаті реконструкції у залежності від кількості витрачених коштів підприємства будуть мати продуктивність, приведена в табл.9.1. Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між підприємствами, що забезпечує максимальне збільшення продуктивності підприємств. Таким чином, у цій оптимізаційній задачі використовується критерій - сумарна продуктивність підприємств.

Умови задачі

Таблиця 9.1

№ підприємства	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	0	1	2	3	4	5
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
1	400	500	550	700	750	1000
2	4000	4200	4300	4500	4600	4700
3	0	100	400	800	850	900
4	600	750	900	950	1100	1200

Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 — капіталовкладення в розвиток відповідно першого, другого, третього й четвертого підприємства, $0 \leq x_i \leq 5, i = 1, 4$. Позначимо $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ — функції зміни продуктивності першого, другого, третього і четвертого підприємства при вкладенні в їхній розвиток x млн. грн. Цим функціям відповідають рядки 1, 2, 3, 4 у табл. 9.1.

Визначимо максимум функції цілі

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x).$$

При цьому на капіталовкладення x_1, x_2, x_3, x_4 накладені обмеження

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = A,$$

$$A = 0,5 \text{ млн. грн.}$$

В основі методу динамічного програмування, використовуваного для розв'язання поставленої задачі, лежить принцип оптимальності Белмана.

Відповідно до цього принципу, обравши деякий початковий розподіл ресурсів, виконуємо багатокрокову оптимізацію, причому на найближчому кроці вибираємо такий розподіл ресурсів, щоб він у сукупності з оптимальним розподілом на всіх наступних кроках призводив до максимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний.

Виділимо в нашій задачі 3 кроки.

1. А млн. грн. вкладаються в перші, друге підприємства одночасно;
2. А млн. грн. вкладаються в перше, друге, третє підприємства разом;
3. А млн. грн. вкладаються в чотири підприємства одночасно.

Позначимо $F_{1,2}(A)$, $F_{1,2,3}(A)$, $F_{1,2,3,4}(A)$ відповідно умовно оптимальні розподіли коштів для першого, другого і третього кроків.

Алгоритм методу динамічного програмування складається з двох етапів. На першому етапі виконується умовна оптимізація, що полягає в тому, що для кожного з трьох кроків знаходять умовний оптимальний виграш $F_{1,2}(A)$, $F_{1,2,3}(A)$, $F_{1,2,3,4}(A)$ для $A = \bar{1,5}$. На другому етапі виконується безумовна оптимізація. Використовуючи результати першого етапу, знаходять величини капіталовкладень у розвиток підприємств x_1, x_2, x_3, x_4 , що забезпечують максимальну продуктивність групи підприємств.

Перший етап включає такі кроки:

1) Обчислення максимуму критерію оптимізації для різноманітних значень капіталовкладень $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, що використовуються тільки для підприємств 1 і 2. Розрахунок ведеться за формулою

$$F_{1,2}(A) = \max [f_1(x) + f_2(A - x)];$$

$$0 \leq x \leq 5;$$

$$0 \leq A \leq 5.$$

Результати розрахунку подані в табл. 9.2.

Перша ітерація

Таблиця 9.2

$x_2 = A - x$		$x_2 = A - x$					
		0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$		$f_2(A - x)$					
		4000	4200	4300	4500	4650	4700
0	400	<u>4400</u>	<u>4600</u>	<u>4700</u>	<u>4900</u>	<u>5050</u>	5100
1	500	4500	<u>4700</u>	4800	5000	<u>5150</u>	
2	550	4550	4750	4850	5050		
3	700	4700	4900	5000			
4	750	4750	4950				
5	1000	5000					



Наприклад, для того, щоб визначити $F_{1,2}(2)$, треба обчислити

$$f_1(2) + f_2(0) = 550 + 4000 = 4550;$$

$$f_1(1) + f_2(1) = 500 + 4200 = 4700;$$

$$f_1(0) + f_2(2) = 400 + 4300 = 4700.$$

Найбільше з отриманих значень буде $F_{1,2}(2)$. Інші $F_{1,2}(x)$ одержуються як найбільше значення кожної діагоналі в таблиці (ці значення в таблиці підкреслені).

$$F_2(0) = 4400; F_2(1) = \max(4600, 4500) = 4600;$$

$$F_2(2) = \max(4550, 4700, 4700) = 4700;$$

$$F_2(3) = \max(4700, 4750, 4800, 4900) = 4900;$$

$$F_2(4) = \max(4750, 4900, 4850, 5000, 5050) = 5050;$$

$$F_2(5) = \max(5000, 4950, 5000, 5050, 5100, 5100) = 5100.$$

2) Обчислення максимуму критерію оптимізації для різноманітних значень капіталовкладень $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, що використовуються тільки для підприємств 1,2 і 3.

Розрахунок ведеться за формулою

$$F_{1,2,3}(A) = \max [F_{1,2}(A - x) + f_3(A - x)];$$

$$0 \leq x \leq 5;$$

$$0 \leq A \leq 5.$$

Результати розрахунків занесемо в табл. 9.3, що аналогічна табл. 9.2, тільки замість $f_1(x)$ у ній указані значення $F_2(A)$, а $f_2(A - x)$ замінена на $f_3(A - x)$.

Друга ітерація

Таблиця 9.3

A	$F_{1,2}(A)$	$x_3 = A - x$					
		0	1	2	3	4	5
		$f_3(A - x)$					
		0	100	400	800	850	900
0	4400	<u>4400</u>	4500	<u>4800</u>	<u>5200</u>	5250	5300
1	4600	<u>4600</u>	4700	5000	<u>5400</u>	5450	
2	4700	4700	4800	5100	<u>5500</u>		
3	4900	4900	5000	5300			
4	5050	5050	5150				
5	5150	5150					



Значення $F_{1,2,3}(A)$ будуть такими:

$$F_{1,2,3}(0) = 4400; \quad F_{1,2,3}(1) = 4600; \quad F_{1,2,3}(2) = 4800;$$

$$F_{1,2,3}(3) = 5200; \quad F_{1,2,3}(4) = 5400; \quad F_{1,2,3}(5) = 5500.$$

3) Обчислення максимуму критерію оптимізації для різноманітних значень капіталовкладень $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, що використовуються для всіх підприємств.

Розрахунок ведеться за формулою

$$F_{1,2,3,4}(A) = \max [F_{1,2,3}(A - x) + f_4(A - x)];$$

$$0 \leq x \leq 5;$$

$$0 \leq A \leq 5.$$

Результати розрахунків заносимо в табл. 9.4.

Третя ітерація

Таблиця 9.4

A		$x_4 = A - x$					
		0	1	2	3	4	5
$F_{1,2,3}(A)$		$f_4(A - x)$					
		600	750	900	950	1100	1200
0	4400	<u>5000</u>	5150	5300	5350	5500	5600
1	4600	<u>5200</u>	5350	5500	5550	5700	
2	4800	<u>5400</u>	5550	5700	5750		
3	5200	<u>5800</u>	5950	6100			
4	5400	<u>6000</u>	<u>6150</u>				
	5500	6100	↑				

Значення $F_{1,2,3,4}(A)$ у результаті розрахунку будуть такими:

$$F_{1,2,3,4}(0) = 5000; \quad F_{1,2,3,4}(1) = 5200;$$

$$F_{1,2,3,4}(2) = 5400; \quad F_{1,2,3,4}(3) = 5800;$$

$$F_{1,2,3,4}(4) = 6000; \quad F_{1,2,3,4}(5) = 6150.$$

На цьому перший етап розв'язання задачі динамічного програмування закінчується. Перейдемо до другого етапу розв'язання задачі динамічного програмування – безумовної оптимізації. На цьому етапі використовуються табл. 9.4, 9.3, 9.2. Визначимо оптимальні капіталовкладення в розвиток підприємств для $A = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Для цього виконаємо наступні розрахунки.

Нехай обсяг капіталовкладень, виділених на розвиток підприємств, складає $A = 5$ млн. грн. Визначимо обсяг капіталовкладень на розвиток четвертого підприємства. Для цього використовуємо табл. 9.4. Виберемо на ній діагональ, що відповідає $A = 5$ — це значення 6100, 6150, 6100, 5750, 5700, 5600, з цих чисел візьмемо максимальне $F_{1,2,3,4}(5) = 6150$ тис. т. Відзначаємо стовпчик, у якому стоїть ця величина. Далі визначаємо у відзначеному стовпчику обсяг капіталовкладень у четверте підприємство $x_4 = 1$.

На розвиток першого, другого і третього підприємств залишається $A = 5 - x_4 = 4$ млн. грн.

Визначимо обсяг капіталовкладень, виділених на розвиток третього підприємства. Для цього використовуємо табл. 9.3. Виберемо в цій таблиці діагональ, що відповідає $A = 4$ — це значення 5050, 5000, 5100, 5400, 5200. Відзначаємо стовпчик, у якому стоїть максимальна (підкреслена) величина продуктивності $F_{1,2,3}(4) = 5400$ тис. т. Визначаємо значення $x_4 = 3$ млн. грн. у відзначеному стовпчику.

На розвиток першого й другого підприємства залишається сума $A = 5 - x_4 - x_3 = 1$ млн. грн.

Визначимо обсяг капіталовкладень на розвиток другого підприємства. Використовуємо для цього табл. 9.2. Виберемо в таблиці діагональ, що відповідає $A = 1$ — це значення 4500, 4600. Відзначаємо стовпчик із максимальною величиною продуктивності $F_{1,2}(1) = 4600$ тис. т. Тоді в цьому стовпчику $x_2 = 1$ млн. грн.

Визначимо обсяг капіталовкладень на розвиток першого підприємства. Тому що виділені капіталовкладення вичерпані $x_2 + x_3 + 1 + x_4 = 5$, то на розвиток першого підприємства кошти не виділяються.

Таким чином, для капіталовкладень обсягом $A = 5$ млн. грн. оптимальним є вкладення в розвиток другого підприємства 1 млн. грн, третього 3 млн. грн., четвертого 1 млн. грн., у розвиток першого підприємства кошти не виділяються. При цьому сумарна продуктивність чотирьох підприємств складе 6150 тис. т.

Повторивши розрахунки другого етапу розв'язання для $A = 4, 3, 2, 1, 0$, визначимо оптимальні капіталовкладення в розвиток підприємств. Результати будуть наступними:

$F_{1,2,3,4} (4) = 6000;$	$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 3; x_4 = 0;$
$F_{1,2,3,4} (3) = 5800;$	$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 3; x_4 = 0;$
$F_{1,2,3,4} (2) = 5400;$	$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 2; x_4 = 0;$
$F_{1,2,3,4} (1) = 5200;$	$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 0;$
$F_{1,2,3,4} (0) = 5000;$	$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 3; x_4 = 0.$

Таким чином задача розв'язана й знайдено оптимальний розв'язок для всіх варіантів капіталовкладень.

9.2 Варіанти завдань

Порядок виконання роботи:

- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.
- вивчити наведену в варіантах завдань постановку задачі і отримати розв'язок методом динамічного програмування;
- проаналізувати отриманий розв'язок й оформити звіт.

Зміст звіту

- ❖ На основі виконаного індивідуального завдання підготувати письмовий звіт який має містити наступні складові:
 - стислі теоретичні положення;
 - формулювання математичної моделі;
 - результати розв'язання задачі, подані у вигляді таблиць;
 - зробити висновки по роботі.

Постановка задачі.

Загальна сума коштів, що інвестуються в розвиток трьох підприємств складає не більше чотирьох мільйонів гривень. На основі техніко - економічних розрахунків встановлено, що в результаті реконструкції у залежності від кількості витрачених коштів підприємства будуть мати продуктивність, приведену в таблиці відповідного варіанту завдання. Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між підприємствами, що забезпечує максимальне збільшення продуктивності підприємств. Обчислити оптимальні варіанти розподілу коштів для загальних обсягів інвестування що дорівнюють 1, 2, 3, 4 млн. грн.

№ варіанту	Умови варіанту					
1	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	56	84	112	168	223
	Підприємство2	68	102	137	205	273
	Підприємство3	48	72	96	144	191
2	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	12	18	24	36	47
	Підприємство2	50	75	100	151	201
	Підприємство3	91	136	182	273	364
3	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	56	84	112	168	223
	Підприємство2	68	102	137	205	273
	Підприємство3	48	72	96	144	191
4	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	85	128	170	255	340
	Підприємство2	99	148	197	296	395
	Підприємство3	44	66	89	133	177

№ варіанту	Умови варіанту																																								
5	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 293 619 353"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 293 1337 353">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 353 619 465">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 353 722 465">0</th> <th data-bbox="722 353 866 465">1</th> <th data-bbox="866 353 1010 465">2</th> <th data-bbox="1010 353 1153 465">3</th> <th data-bbox="1153 353 1337 465">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 465 619 499"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 465 1337 499">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 499 619 533">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 499 722 533">67</td> <td data-bbox="722 499 866 533">101</td> <td data-bbox="866 499 1010 533">135</td> <td data-bbox="1010 499 1153 533">202</td> <td data-bbox="1153 499 1337 533">269</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 533 619 566">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 533 722 566">70</td> <td data-bbox="722 533 866 566">105</td> <td data-bbox="866 533 1010 566">140</td> <td data-bbox="1010 533 1153 566">211</td> <td data-bbox="1153 533 1337 566">281</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 566 619 600">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 566 722 600">82</td> <td data-bbox="722 566 866 600">123</td> <td data-bbox="866 566 1010 600">164</td> <td data-bbox="1010 566 1153 600">245</td> <td data-bbox="1153 566 1337 600">327</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	67	101	135	202	269	Підприємство2	70	105	140	211	281	Підприємство3	82	123	164	245	327
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	67	101	135	202	269																																				
Підприємство2	70	105	140	211	281																																				
Підприємство3	82	123	164	245	327																																				
6	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 701 619 761"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 701 1337 761">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 761 619 873">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 761 722 873">0</th> <th data-bbox="722 761 866 873">1</th> <th data-bbox="866 761 1010 873">2</th> <th data-bbox="1010 761 1153 873">3</th> <th data-bbox="1153 761 1337 873">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 873 619 907"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 873 1337 907">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 907 619 940">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 907 722 940">37</td> <td data-bbox="722 907 866 940">55</td> <td data-bbox="866 907 1010 940">73</td> <td data-bbox="1010 907 1153 940">110</td> <td data-bbox="1153 907 1337 940">146</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 940 619 974">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 940 722 974">99</td> <td data-bbox="722 940 866 974">148</td> <td data-bbox="866 940 1010 974">197</td> <td data-bbox="1010 940 1153 974">296</td> <td data-bbox="1153 940 1337 974">394</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 974 619 1008">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 974 722 1008">68</td> <td data-bbox="722 974 866 1008">102</td> <td data-bbox="866 974 1010 1008">136</td> <td data-bbox="1010 974 1153 1008">205</td> <td data-bbox="1153 974 1337 1008">273</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	37	55	73	110	146	Підприємство2	99	148	197	296	394	Підприємство3	68	102	136	205	273
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	37	55	73	110	146																																				
Підприємство2	99	148	197	296	394																																				
Підприємство3	68	102	136	205	273																																				
7	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1144 619 1205"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1144 1337 1205">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1205 619 1317">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 1205 722 1317">0</th> <th data-bbox="722 1205 866 1317">1</th> <th data-bbox="866 1205 1010 1317">2</th> <th data-bbox="1010 1205 1153 1317">3</th> <th data-bbox="1153 1205 1337 1317">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1317 619 1350"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1317 1337 1350">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1350 619 1384">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 1350 722 1384">93</td> <td data-bbox="722 1350 866 1384">139</td> <td data-bbox="866 1350 1010 1384">186</td> <td data-bbox="1010 1350 1153 1384">279</td> <td data-bbox="1153 1350 1337 1384">372</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1384 619 1417">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 1384 722 1417">22</td> <td data-bbox="722 1384 866 1417">33</td> <td data-bbox="866 1384 1010 1417">44</td> <td data-bbox="1010 1384 1153 1417">66</td> <td data-bbox="1153 1384 1337 1417">89</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1417 619 1451">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 1417 722 1451">89</td> <td data-bbox="722 1417 866 1451">134</td> <td data-bbox="866 1417 1010 1451">178</td> <td data-bbox="1010 1417 1153 1451">268</td> <td data-bbox="1153 1417 1337 1451">357</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	93	139	186	279	372	Підприємство2	22	33	44	66	89	Підприємство3	89	134	178	268	357
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	93	139	186	279	372																																				
Підприємство2	22	33	44	66	89																																				
Підприємство3	89	134	178	268	357																																				
8	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1588 619 1648"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1588 1337 1648">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1648 619 1760">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 1648 722 1760">0</th> <th data-bbox="722 1648 866 1760">1</th> <th data-bbox="866 1648 1010 1760">2</th> <th data-bbox="1010 1648 1153 1760">3</th> <th data-bbox="1153 1648 1337 1760">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1760 619 1794"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1760 1337 1794">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1794 619 1827">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 1794 722 1827">35</td> <td data-bbox="722 1794 866 1827">53</td> <td data-bbox="866 1794 1010 1827">71</td> <td data-bbox="1010 1794 1153 1827">106</td> <td data-bbox="1153 1794 1337 1827">141</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1827 619 1861">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 1827 722 1861">67</td> <td data-bbox="722 1827 866 1861">101</td> <td data-bbox="866 1827 1010 1861">134</td> <td data-bbox="1010 1827 1153 1861">201</td> <td data-bbox="1153 1827 1337 1861">268</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1861 619 1895">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 1861 722 1895">89</td> <td data-bbox="722 1861 866 1895">133</td> <td data-bbox="866 1861 1010 1895">177</td> <td data-bbox="1010 1861 1153 1895">266</td> <td data-bbox="1153 1861 1337 1895">355</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	35	53	71	106	141	Підприємство2	67	101	134	201	268	Підприємство3	89	133	177	266	355
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	35	53	71	106	141																																				
Підприємство2	67	101	134	201	268																																				
Підприємство3	89	133	177	266	355																																				

№ варіанту	Умови варіанту																																								
9	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 259 619 327"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 259 1337 327">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 327 619 439">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 327 735 439">0</th> <th data-bbox="735 327 852 439">1</th> <th data-bbox="852 327 968 439">2</th> <th data-bbox="968 327 1085 439">3</th> <th data-bbox="1085 327 1337 439">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 439 619 472"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 439 1337 472">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 472 619 506">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 472 735 506">38</td> <td data-bbox="735 472 852 506">57</td> <td data-bbox="852 472 968 506">77</td> <td data-bbox="968 472 1085 506">115</td> <td data-bbox="1085 472 1337 506">153</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 506 619 539">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 506 735 539">59</td> <td data-bbox="735 506 852 539">88</td> <td data-bbox="852 506 968 539">118</td> <td data-bbox="968 506 1085 539">177</td> <td data-bbox="1085 506 1337 539">236</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 539 619 573">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 539 735 573">29</td> <td data-bbox="735 539 852 573">44</td> <td data-bbox="852 539 968 573">59</td> <td data-bbox="968 539 1085 573">88</td> <td data-bbox="1085 539 1337 573">118</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	38	57	77	115	153	Підприємство2	59	88	118	177	236	Підприємство3	29	44	59	88	118
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	38	57	77	115	153																																				
Підприємство2	59	88	118	177	236																																				
Підприємство3	29	44	59	88	118																																				
10	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 703 619 770"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 703 1337 770">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 770 619 882">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 770 735 882">0</th> <th data-bbox="735 770 852 882">1</th> <th data-bbox="852 770 968 882">2</th> <th data-bbox="968 770 1085 882">3</th> <th data-bbox="1085 770 1337 882">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 882 619 916"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 882 1337 916">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 916 619 949">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 916 735 949">23</td> <td data-bbox="735 916 852 949">34</td> <td data-bbox="852 916 968 949">45</td> <td data-bbox="968 916 1085 949">68</td> <td data-bbox="1085 916 1337 949">91</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 949 619 983">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 949 735 983">66</td> <td data-bbox="735 949 852 983">99</td> <td data-bbox="852 949 968 983">132</td> <td data-bbox="968 949 1085 983">198</td> <td data-bbox="1085 949 1337 983">264</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 983 619 1016">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 983 735 1016">31</td> <td data-bbox="735 983 852 1016">47</td> <td data-bbox="852 983 968 1016">62</td> <td data-bbox="968 983 1085 1016">94</td> <td data-bbox="1085 983 1337 1016">125</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	23	34	45	68	91	Підприємство2	66	99	132	198	264	Підприємство3	31	47	62	94	125
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	23	34	45	68	91																																				
Підприємство2	66	99	132	198	264																																				
Підприємство3	31	47	62	94	125																																				
11	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1146 619 1214"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1146 1337 1214">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1214 619 1326">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 1214 735 1326">0</th> <th data-bbox="735 1214 852 1326">1</th> <th data-bbox="852 1214 968 1326">2</th> <th data-bbox="968 1214 1085 1326">3</th> <th data-bbox="1085 1214 1337 1326">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1326 619 1359"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1326 1337 1359">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1359 619 1393">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 1359 735 1393">80</td> <td data-bbox="735 1359 852 1393">120</td> <td data-bbox="852 1359 968 1393">159</td> <td data-bbox="968 1359 1085 1393">239</td> <td data-bbox="1085 1359 1337 1393">319</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1393 619 1426">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 1393 735 1426">16</td> <td data-bbox="735 1393 852 1426">23</td> <td data-bbox="852 1393 968 1426">31</td> <td data-bbox="968 1393 1085 1426">47</td> <td data-bbox="1085 1393 1337 1426">63</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1426 619 1460">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 1426 735 1460">51</td> <td data-bbox="735 1426 852 1460">76</td> <td data-bbox="852 1426 968 1460">102</td> <td data-bbox="968 1426 1085 1460">152</td> <td data-bbox="1085 1426 1337 1460">203</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	80	120	159	239	319	Підприємство2	16	23	31	47	63	Підприємство3	51	76	102	152	203
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	80	120	159	239	319																																				
Підприємство2	16	23	31	47	63																																				
Підприємство3	51	76	102	152	203																																				
12	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1590 619 1657"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1590 1337 1657">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1657 619 1769">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 1657 735 1769">0</th> <th data-bbox="735 1657 852 1769">1</th> <th data-bbox="852 1657 968 1769">2</th> <th data-bbox="968 1657 1085 1769">3</th> <th data-bbox="1085 1657 1337 1769">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1769 619 1803"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1769 1337 1803">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1803 619 1836">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 1803 735 1836">91</td> <td data-bbox="735 1803 852 1836">136</td> <td data-bbox="852 1803 968 1836">182</td> <td data-bbox="968 1803 1085 1836">272</td> <td data-bbox="1085 1803 1337 1836">363</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1836 619 1870">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 1836 735 1870">55</td> <td data-bbox="735 1836 852 1870">82</td> <td data-bbox="852 1836 968 1870">110</td> <td data-bbox="968 1836 1085 1870">164</td> <td data-bbox="1085 1836 1337 1870">219</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1870 619 1904">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 1870 735 1904">62</td> <td data-bbox="735 1870 852 1904">93</td> <td data-bbox="852 1870 968 1904">124</td> <td data-bbox="968 1870 1085 1904">186</td> <td data-bbox="1085 1870 1337 1904">248</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	91	136	182	272	363	Підприємство2	55	82	110	164	219	Підприємство3	62	93	124	186	248
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	91	136	182	272	363																																				
Підприємство2	55	82	110	164	219																																				
Підприємство3	62	93	124	186	248																																				

№ варіанту	Умови варіанту																																								
13	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 259 619 327"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 259 1337 327">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 327 619 439">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 327 722 439">0</th> <th data-bbox="722 327 866 439">1</th> <th data-bbox="866 327 1010 439">2</th> <th data-bbox="1010 327 1153 439">3</th> <th data-bbox="1153 327 1337 439">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 439 619 472"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 439 1337 472">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 472 619 506">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 472 722 506">70</td> <td data-bbox="722 472 866 506">105</td> <td data-bbox="866 472 1010 506">141</td> <td data-bbox="1010 472 1153 506">211</td> <td data-bbox="1153 472 1337 506">281</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 506 619 539">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 506 722 539">93</td> <td data-bbox="722 506 866 539">140</td> <td data-bbox="866 506 1010 539">186</td> <td data-bbox="1010 506 1153 539">279</td> <td data-bbox="1153 506 1337 539">372</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 539 619 573">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 539 722 573">59</td> <td data-bbox="722 539 866 573">89</td> <td data-bbox="866 539 1010 573">119</td> <td data-bbox="1010 539 1153 573">178</td> <td data-bbox="1153 539 1337 573">238</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	70	105	141	211	281	Підприємство2	93	140	186	279	372	Підприємство3	59	89	119	178	238
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	70	105	141	211	281																																				
Підприємство2	93	140	186	279	372																																				
Підприємство3	59	89	119	178	238																																				
14	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 703 619 770"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 703 1337 770">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 770 619 882">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 770 722 882">0</th> <th data-bbox="722 770 866 882">1</th> <th data-bbox="866 770 1010 882">2</th> <th data-bbox="1010 770 1153 882">3</th> <th data-bbox="1153 770 1337 882">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 882 619 916"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 882 1337 916">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 916 619 949">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 916 722 949">36</td> <td data-bbox="722 916 866 949">54</td> <td data-bbox="866 916 1010 949">71</td> <td data-bbox="1010 916 1153 949">107</td> <td data-bbox="1153 916 1337 949">143</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 949 619 983">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 949 722 983">95</td> <td data-bbox="722 949 866 983">143</td> <td data-bbox="866 949 1010 983">190</td> <td data-bbox="1010 949 1153 983">286</td> <td data-bbox="1153 949 1337 983">381</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 983 619 1016">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 983 722 1016">89</td> <td data-bbox="722 983 866 1016">134</td> <td data-bbox="866 983 1010 1016">179</td> <td data-bbox="1010 983 1153 1016">268</td> <td data-bbox="1153 983 1337 1016">357</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	36	54	71	107	143	Підприємство2	95	143	190	286	381	Підприємство3	89	134	179	268	357
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	36	54	71	107	143																																				
Підприємство2	95	143	190	286	381																																				
Підприємство3	89	134	179	268	357																																				
15	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1146 619 1214"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1146 1337 1214">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1214 619 1326">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 1214 722 1326">0</th> <th data-bbox="722 1214 866 1326">1</th> <th data-bbox="866 1214 1010 1326">2</th> <th data-bbox="1010 1214 1153 1326">3</th> <th data-bbox="1153 1214 1337 1326">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1326 619 1359"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1326 1337 1359">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1359 619 1393">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 1359 722 1393">38</td> <td data-bbox="722 1359 866 1393">57</td> <td data-bbox="866 1359 1010 1393">76</td> <td data-bbox="1010 1359 1153 1393">114</td> <td data-bbox="1153 1359 1337 1393">152</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1393 619 1426">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 1393 722 1426">100</td> <td data-bbox="722 1393 866 1426">150</td> <td data-bbox="866 1393 1010 1426">200</td> <td data-bbox="1010 1393 1153 1426">300</td> <td data-bbox="1153 1393 1337 1426">399</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1426 619 1460">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 1426 722 1460">78</td> <td data-bbox="722 1426 866 1460">117</td> <td data-bbox="866 1426 1010 1460">156</td> <td data-bbox="1010 1426 1153 1460">235</td> <td data-bbox="1153 1426 1337 1460">313</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	38	57	76	114	152	Підприємство2	100	150	200	300	399	Підприємство3	78	117	156	235	313
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	38	57	76	114	152																																				
Підприємство2	100	150	200	300	399																																				
Підприємство3	78	117	156	235	313																																				
16	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1590 619 1657"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1590 1337 1657">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1657 619 1769">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 1657 722 1769">0</th> <th data-bbox="722 1657 866 1769">1</th> <th data-bbox="866 1657 1010 1769">2</th> <th data-bbox="1010 1657 1153 1769">3</th> <th data-bbox="1153 1657 1337 1769">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1769 619 1803"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1769 1337 1803">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1803 619 1836">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 1803 722 1836">61</td> <td data-bbox="722 1803 866 1836">91</td> <td data-bbox="866 1803 1010 1836">122</td> <td data-bbox="1010 1803 1153 1836">183</td> <td data-bbox="1153 1803 1337 1836">243</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1836 619 1870">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 1836 722 1870">85</td> <td data-bbox="722 1836 866 1870">128</td> <td data-bbox="866 1836 1010 1870">170</td> <td data-bbox="1010 1836 1153 1870">255</td> <td data-bbox="1153 1836 1337 1870">340</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1870 619 1904">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 1870 722 1904">99</td> <td data-bbox="722 1870 866 1904">148</td> <td data-bbox="866 1870 1010 1904">197</td> <td data-bbox="1010 1870 1153 1904">296</td> <td data-bbox="1153 1870 1337 1904">394</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	61	91	122	183	243	Підприємство2	85	128	170	255	340	Підприємство3	99	148	197	296	394
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	61	91	122	183	243																																				
Підприємство2	85	128	170	255	340																																				
Підприємство3	99	148	197	296	394																																				

№ варіанту	Умови варіанту																																								
17	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 259 620 327"></th> <th colspan="5" data-bbox="620 259 1337 327">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 327 620 434">№ підприємства</th> <th data-bbox="620 327 732 434">0</th> <th data-bbox="732 327 845 434">1</th> <th data-bbox="845 327 959 434">2</th> <th data-bbox="959 327 1072 434">3</th> <th data-bbox="1072 327 1337 434">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 434 620 472"></th> <th colspan="5" data-bbox="620 434 1337 472">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 472 620 510">Підприємство1</td> <td data-bbox="620 472 732 510">57</td> <td data-bbox="732 472 845 510">86</td> <td data-bbox="845 472 959 510">114</td> <td data-bbox="959 472 1072 510">171</td> <td data-bbox="1072 472 1337 510">228</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 510 620 548">Підприємство2</td> <td data-bbox="620 510 732 548">32</td> <td data-bbox="732 510 845 548">49</td> <td data-bbox="845 510 959 548">65</td> <td data-bbox="959 510 1072 548">97</td> <td data-bbox="1072 510 1337 548">130</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 548 620 586">Підприємство3</td> <td data-bbox="620 548 732 586">56</td> <td data-bbox="732 548 845 586">84</td> <td data-bbox="845 548 959 586">112</td> <td data-bbox="959 548 1072 586">168</td> <td data-bbox="1072 548 1337 586">224</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	57	86	114	171	228	Підприємство2	32	49	65	97	130	Підприємство3	56	84	112	168	224
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	57	86	114	171	228																																				
Підприємство2	32	49	65	97	130																																				
Підприємство3	56	84	112	168	224																																				
18	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 703 620 770"></th> <th colspan="5" data-bbox="620 703 1337 770">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 770 620 878">№ підприємства</th> <th data-bbox="620 770 732 878">0</th> <th data-bbox="732 770 845 878">1</th> <th data-bbox="845 770 959 878">2</th> <th data-bbox="959 770 1072 878">3</th> <th data-bbox="1072 770 1337 878">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 878 620 916"></th> <th colspan="5" data-bbox="620 878 1337 916">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 916 620 954">Підприємство1</td> <td data-bbox="620 916 732 954">83</td> <td data-bbox="732 916 845 954">125</td> <td data-bbox="845 916 959 954">167</td> <td data-bbox="959 916 1072 954">250</td> <td data-bbox="1072 916 1337 954">333</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 954 620 992">Підприємство2</td> <td data-bbox="620 954 732 992">48</td> <td data-bbox="732 954 845 992">72</td> <td data-bbox="845 954 959 992">95</td> <td data-bbox="959 954 1072 992">143</td> <td data-bbox="1072 954 1337 992">191</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 992 620 1030">Підприємство3</td> <td data-bbox="620 992 732 1030">60</td> <td data-bbox="732 992 845 1030">91</td> <td data-bbox="845 992 959 1030">121</td> <td data-bbox="959 992 1072 1030">181</td> <td data-bbox="1072 992 1337 1030">241</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	83	125	167	250	333	Підприємство2	48	72	95	143	191	Підприємство3	60	91	121	181	241
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	83	125	167	250	333																																				
Підприємство2	48	72	95	143	191																																				
Підприємство3	60	91	121	181	241																																				
19	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1146 620 1214"></th> <th colspan="5" data-bbox="620 1146 1337 1214">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1214 620 1321">№ підприємства</th> <th data-bbox="620 1214 732 1321">0</th> <th data-bbox="732 1214 845 1321">1</th> <th data-bbox="845 1214 959 1321">2</th> <th data-bbox="959 1214 1072 1321">3</th> <th data-bbox="1072 1214 1337 1321">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1321 620 1359"></th> <th colspan="5" data-bbox="620 1321 1337 1359">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1359 620 1397">Підприємство1</td> <td data-bbox="620 1359 732 1397">48</td> <td data-bbox="732 1359 845 1397">72</td> <td data-bbox="845 1359 959 1397">96</td> <td data-bbox="959 1359 1072 1397">144</td> <td data-bbox="1072 1359 1337 1397">192</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1397 620 1435">Підприємство2</td> <td data-bbox="620 1397 732 1435">71</td> <td data-bbox="732 1397 845 1435">106</td> <td data-bbox="845 1397 959 1435">141</td> <td data-bbox="959 1397 1072 1435">212</td> <td data-bbox="1072 1397 1337 1435">283</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1435 620 1473">Підприємство3</td> <td data-bbox="620 1435 732 1473">39</td> <td data-bbox="732 1435 845 1473">58</td> <td data-bbox="845 1435 959 1473">78</td> <td data-bbox="959 1435 1072 1473">117</td> <td data-bbox="1072 1435 1337 1473">156</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	48	72	96	144	192	Підприємство2	71	106	141	212	283	Підприємство3	39	58	78	117	156
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	48	72	96	144	192																																				
Підприємство2	71	106	141	212	283																																				
Підприємство3	39	58	78	117	156																																				
20	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1590 620 1657"></th> <th colspan="5" data-bbox="620 1590 1337 1657">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1657 620 1765">№ підприємства</th> <th data-bbox="620 1657 732 1765">0</th> <th data-bbox="732 1657 845 1765">1</th> <th data-bbox="845 1657 959 1765">2</th> <th data-bbox="959 1657 1072 1765">3</th> <th data-bbox="1072 1657 1337 1765">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1765 620 1803"></th> <th colspan="5" data-bbox="620 1765 1337 1803">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1803 620 1841">Підприємство1</td> <td data-bbox="620 1803 732 1841">80</td> <td data-bbox="732 1803 845 1841">119</td> <td data-bbox="845 1803 959 1841">159</td> <td data-bbox="959 1803 1072 1841">239</td> <td data-bbox="1072 1803 1337 1841">318</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1841 620 1879">Підприємство2</td> <td data-bbox="620 1841 732 1879">47</td> <td data-bbox="732 1841 845 1879">70</td> <td data-bbox="845 1841 959 1879">94</td> <td data-bbox="959 1841 1072 1879">141</td> <td data-bbox="1072 1841 1337 1879">188</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1879 620 1917">Підприємство3</td> <td data-bbox="620 1879 732 1917">53</td> <td data-bbox="732 1879 845 1917">80</td> <td data-bbox="845 1879 959 1917">106</td> <td data-bbox="959 1879 1072 1917">160</td> <td data-bbox="1072 1879 1337 1917">213</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	80	119	159	239	318	Підприємство2	47	70	94	141	188	Підприємство3	53	80	106	160	213
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	80	119	159	239	318																																				
Підприємство2	47	70	94	141	188																																				
Підприємство3	53	80	106	160	213																																				

№ варіанту	Умови варіанту					
21	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	58	87	116	174	232
	Підприємство2	23	35	46	70	93
	Підприємство3	64	95	127	191	254
22	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	61	92	123	184	245
	Підприємство2	46	70	93	139	186
	Підприємство3	88	132	176	264	352
23	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	66	99	131	197	263
	Підприємство2	91	137	183	274	366
	Підприємство3	60	89	119	179	238
24	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	73	110	146	220	293
	Підприємство2	89	134	178	267	356
	Підприємство3	92	137	183	275	366

№ варіанту	Умови варіанту																																								
25	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 259 619 327"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 259 1337 327">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 327 619 439">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 327 722 439">0</th> <th data-bbox="722 327 866 439">1</th> <th data-bbox="866 327 1010 439">2</th> <th data-bbox="1010 327 1153 439">3</th> <th data-bbox="1153 327 1337 439">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 439 619 472"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 439 1337 472">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 472 619 506">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 472 722 506">88</td> <td data-bbox="722 472 866 506">132</td> <td data-bbox="866 472 1010 506">176</td> <td data-bbox="1010 472 1153 506">264</td> <td data-bbox="1153 472 1337 506">352</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 506 619 539">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 506 722 539">83</td> <td data-bbox="722 506 866 539">125</td> <td data-bbox="866 506 1010 539">166</td> <td data-bbox="1010 506 1153 539">249</td> <td data-bbox="1153 506 1337 539">333</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 539 619 573">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 539 722 573">60</td> <td data-bbox="722 539 866 573">90</td> <td data-bbox="866 539 1010 573">120</td> <td data-bbox="1010 539 1153 573">180</td> <td data-bbox="1153 539 1337 573">240</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	88	132	176	264	352	Підприємство2	83	125	166	249	333	Підприємство3	60	90	120	180	240
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	88	132	176	264	352																																				
Підприємство2	83	125	166	249	333																																				
Підприємство3	60	90	120	180	240																																				
26	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 703 619 770"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 703 1337 770">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 770 619 882">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 770 722 882">0</th> <th data-bbox="722 770 866 882">1</th> <th data-bbox="866 770 1010 882">2</th> <th data-bbox="1010 770 1153 882">3</th> <th data-bbox="1153 770 1337 882">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 882 619 916"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 882 1337 916">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 916 619 949">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 916 722 949">100</td> <td data-bbox="722 916 866 949">150</td> <td data-bbox="866 916 1010 949">200</td> <td data-bbox="1010 916 1153 949">299</td> <td data-bbox="1153 916 1337 949">399</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 949 619 983">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 949 722 983">83</td> <td data-bbox="722 949 866 983">125</td> <td data-bbox="866 949 1010 983">166</td> <td data-bbox="1010 949 1153 983">250</td> <td data-bbox="1153 949 1337 983">333</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 983 619 1016">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 983 722 1016">89</td> <td data-bbox="722 983 866 1016">133</td> <td data-bbox="866 983 1010 1016">178</td> <td data-bbox="1010 983 1153 1016">266</td> <td data-bbox="1153 983 1337 1016">355</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	100	150	200	299	399	Підприємство2	83	125	166	250	333	Підприємство3	89	133	178	266	355
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	100	150	200	299	399																																				
Підприємство2	83	125	166	250	333																																				
Підприємство3	89	133	178	266	355																																				
27	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1146 619 1214"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1146 1337 1214">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1214 619 1326">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 1214 722 1326">0</th> <th data-bbox="722 1214 866 1326">1</th> <th data-bbox="866 1214 1010 1326">2</th> <th data-bbox="1010 1214 1153 1326">3</th> <th data-bbox="1153 1214 1337 1326">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1326 619 1359"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1326 1337 1359">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1359 619 1393">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 1359 722 1393">38</td> <td data-bbox="722 1359 866 1393">57</td> <td data-bbox="866 1359 1010 1393">77</td> <td data-bbox="1010 1359 1153 1393">115</td> <td data-bbox="1153 1359 1337 1393">153</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1393 619 1426">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 1393 722 1426">58</td> <td data-bbox="722 1393 866 1426">87</td> <td data-bbox="866 1393 1010 1426">116</td> <td data-bbox="1010 1393 1153 1426">174</td> <td data-bbox="1153 1393 1337 1426">232</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1426 619 1460">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 1426 722 1460">62</td> <td data-bbox="722 1426 866 1460">93</td> <td data-bbox="866 1426 1010 1460">125</td> <td data-bbox="1010 1426 1153 1460">187</td> <td data-bbox="1153 1426 1337 1460">249</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	38	57	77	115	153	Підприємство2	58	87	116	174	232	Підприємство3	62	93	125	187	249
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	38	57	77	115	153																																				
Підприємство2	58	87	116	174	232																																				
Підприємство3	62	93	125	187	249																																				
28	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="419 1590 619 1657"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1590 1337 1657">кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1657 619 1769">№ підприємства</th> <th data-bbox="619 1657 722 1769">0</th> <th data-bbox="722 1657 866 1769">1</th> <th data-bbox="866 1657 1010 1769">2</th> <th data-bbox="1010 1657 1153 1769">3</th> <th data-bbox="1153 1657 1337 1769">4</th> </tr> <tr> <th data-bbox="419 1769 619 1803"></th> <th colspan="5" data-bbox="619 1769 1337 1803">Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="419 1803 619 1836">Підприємство1</td> <td data-bbox="619 1803 722 1836">91</td> <td data-bbox="722 1803 866 1836">136</td> <td data-bbox="866 1803 1010 1836">182</td> <td data-bbox="1010 1803 1153 1836">273</td> <td data-bbox="1153 1803 1337 1836">364</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1836 619 1870">Підприємство2</td> <td data-bbox="619 1836 722 1870">81</td> <td data-bbox="722 1836 866 1870">121</td> <td data-bbox="866 1836 1010 1870">162</td> <td data-bbox="1010 1836 1153 1870">242</td> <td data-bbox="1153 1836 1337 1870">323</td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1870 619 1904">Підприємство3</td> <td data-bbox="619 1870 722 1904">71</td> <td data-bbox="722 1870 866 1904">106</td> <td data-bbox="866 1870 1010 1904">142</td> <td data-bbox="1010 1870 1153 1904">213</td> <td data-bbox="1153 1870 1337 1904">284</td> </tr> </tbody> </table>						кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					№ підприємства	0	1	2	3	4		Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					Підприємство1	91	136	182	273	364	Підприємство2	81	121	162	242	323	Підприємство3	71	106	142	213	284
	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)																																								
№ підприємства	0	1	2	3	4																																				
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)																																								
Підприємство1	91	136	182	273	364																																				
Підприємство2	81	121	162	242	323																																				
Підприємство3	71	106	142	213	284																																				

№ варіанту	Умови варіанту					
29	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	70	105	141	211	281
	Підприємство2	95	142	190	284	379
	Підприємство3	45	67	89	134	179
30	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	№ підприємства	0	1	2	3	4
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
	Підприємство1	64	97	129	193	258
	Підприємство2	85	127	170	254	339
	Підприємство3	50	75	100	150	201

9.3 Контрольні запитання

1. Сформулюйте принцип оптимальності Белмана.
2. Роз'ясніть поняття умовної і безумовної оптимізації в методі динамічного програмування.
3. Поясніть основні етапи алгоритму методу динамічного програмування.
4. Роз'ясніть як у таблицях розв'язку знайти оптимальне значення цільової функції.
5. Для яких типів задач оптимізації застосування методу динамічного програмування є найбільш вдалим?

В темі розглянуто метод динамічного програмування для розв'язання багатокрокових задач оптимізації, подані пояснення для застосування методу для економічних задач.

ПІДСУМКИ

В навчальному посібнику викладено теоретичний і практичний матеріал для вивчення дисципліни „Математичне програмування”, якій охоплює весь матеріал за учбовим планом для зазначених економічних спеціальностей денної та заочної форми навчання. Посібник може використовуватися як допоміжний матеріал при засвоєнні лекцій. Для кожної розглянутої теми подані питання для перевірки якості засвоєння та варіанти для практичних робіт в аудиторії та самостійної підготовки.

Теоретичний і практичний матеріали подано з урахуванням багаторічного досвіду викладання в Національному гірничому університеті. В посібнику систематизовані теорія, приклади та задачі по основним розділам дисципліни – лінійному, дискретному, нелінійному та динамічному програмуванню. Кожна розглянута тема містить необхідні теоретичні відомості, які проілюстровані прикладами з детальним роз’ясненням ходу обчислень.

Методичний посібник має використовуватися на практичних і лабораторних роботах з дисципліни „Математичне програмування”, а також для виконання контрольних робіт студентами-заочниками. Посібник може використовуватися для самостійного освоєння методів оптимізації, які застосовуються при розв’язанні задач планування і управління в економічних системах.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

<i>А</i>		Метод покоординатного спуску ... 92, 95
Алгоритм симплексного методу 12		Множники Лагранжа 83
<i>Б</i>		<i>Н</i>
Безумовна оптимізація 89		Нижня ціна гри..... 70
Безумовна оптимізація в задачі динамічного програмування..... 97		<i>О</i>
<i>В</i>		Область припустимих розв'язань 8
Верхня ціна гри..... 70		<i>П</i>
Визначення виду екстремуму..... 85		Північно-західний кут 31
Визначення цілочислового розв'язку задачі 57		Початкове значення кроку 89
<i>Г</i>		Принцип оптимальності динамічного програмування 97
Гра 70		Припустиме розв'язання 78
Гра із сідловою точкою..... 70		<i>Р</i>
Градiєнт 91		Ранг системи 29
<i>Д</i>		Розв'язок ігор без сідлової точки . 71, 77
Двоїстий симплекс-метод 58		<i>С</i>
<i>З</i>		Симплексний метод 8
Задача дробово-лінійного програмування 46		Стратегія гравця 70
Задача цілочислового програмування 57		<i>Т</i>
Змішана стратегія 71		Точність обчислень 89
<i>К</i>		Транспортна задача..... 28
Координати початкової точки 89		<i>У</i>
<i>М</i>		Умова досягнення точності..... 89
Максимальний виграш..... 73		Умовна оптимізація 97
Матриця гри 70		Умовний екстремум..... 83
Метод гілок і меж..... 62		<i>Ф</i>
Метод Гоморі 57		Функція Лагранжа..... 83
Метод динамічного програмування 96		<i>Ч</i>
		Частково цілочислові задачі 58

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высш. шк., 1985 г.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций - М.: Советское радио, 1984.
3. Зайченко Ю. П. Исследование операций. - К.: Высш. шк., 1988.
4. Калихман И. С. Сборник задач по математическому программированию -М.: Высш. шк., 1975.
5. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 1,2,3, - М.: Мир, 1972.
6. Карманов В. Г.- Математическое программирование. - М.: Наука, 1986.

Навчальне видання

Демиденко Михайло Андрійович

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

(Навчальний посібник)

У редакції автора

Підписано до друку 2009 . Формат 30 x 42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Умов. друк. арк. 7,72.
Обліково-видавн. арк. 7,73. Тираж 300 прим. Зам. №

Підготовлено до друку та надруковано
у Національному гірничому університеті.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №1842.
49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.