МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Факультет інформаційних технологій
Кафедра інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії

В.І. Олевський, Ю.Б. Олевська

Матеріали для самостійної роботи студентів з теорії рядів та їх застосування в обробці зображень

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Олевський В.І.
«Матеріали для самостійної роботи студентів з теорії рядів та їх застосування в обробці зображень» для здобувачів ступеня бакалавра всіх спеціальностей факультету інформаційних технологій / В.І. Олевський, Ю.Б. Олевська; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Електрон. дані. – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – Режим доступу: … (дата звернення: …). – Назва з екрана.

Автори:
В.І. Олевський, д-р. техн. наук, проф. каф. ІТКІ
Ю.Б. Олевська, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ПМ

Погоджено науково-методичною комісією спеціальності 126 Інформаційні системи та технології (протокол № 11 від 13.12.2023) за поданням кафедри інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії (протокол № 8 від 13.12.2023).

Розглянуто розділи «Числові ряди», «Функціональні ряди», «Ряди Фур’є» та «Обробка зображень з використанням рядів» конспекту лекцій для самостійної роботи студентів з теорії рядів та їх застосування в обробці зображень для здобувачів ступеня бакалавра всіх спеціальностей факультету інформаційних технологій. Розкрито теми «Ряди», «Обробка зображень з використанням рядів», розглянуто приклади по кожному з понять, представлено контрольні запитання та завдання відповідно до кожного розділу, надано перелік використаних і рекомендованих джерел.

Відповідальний за випуск професор кафедри ІТКІ В.І. Олевський, д.т.н., проф.

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета дисципліни – формування у здобувачів вищої освіти умінь та компетентностей щодо методів, алгоритмів та засобів обробки сигналів та розпізнавання образів в різних системах, а також способів їх застосування для обробки інформації та розпізнавання образів в системах комп'ютерного зору та дистанційного зондування.

ОЧІКУВАНІ ДИСЦИПЛІНАРНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

- Використовувати математичний апарат для вирішення специфічних задач геометричної, градаційної, колірної корекції зображень.
- Реалізовувати лінійні та нелінійні методи покращення зображень, методи лінійної та нелінійної просторової фільтрації, лінійні та нелінійні методи відновлення зображень, а також спеціальні засоби цифрової обробки зображень.

1. Означення числового ряду

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$. Послідовність задана, якщо відоме правило, згідно з яким можна обчислити будь-який її член u_n при заданому n.

Означення. Вираз

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

називається числовим рядом, а числа $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ – членами ряду.

Приклад **1.** $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$.

2. Збіжність ряду та його сума

Означення. Сума скінченного числа n перших членів числового ряду називається частковою сумою даного ряду:

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Часткові суми утворюють нескінченну послідовність $\{s_n\}$:

$$s_1 = u_1,$$
$$s_2 = u_1 + u_2,$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Маємо: $s_{n+1} = s_n + u_{n+1}$.

Означення.

Якщо послідовність $\{s_n\}$ часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ має скінченну границю $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, то ряд зветься збіжним, а число s називається сумою ряду, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s;$$

якщо ж $\lim_{n\to\infty} s_n$ не існує або дорівнює нескінченності, то говорять, що ряд розбіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}, a \neq 0.$

$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ – сума членів геометричної прогресії:

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}; \quad \lim_{n\to\infty} s_n = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q},$$

тобто збіжність ряду залежить від величини q.

$\lvert q \rvert < 1$	$\lvert q \rvert > 1$	$q = 1$	$q = -1$
ряд збіжний, $s = \dfrac{a}{1-q}$	ряд розбіжний	$a + a + a + \cdots$, ряд розбіжний	$a - a + a - a + \cdots$, s_n дорівнює то 0, то a, тобто границя не існує, ряд розбіжний

3. Властивості збіжних рядів

1.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається і має суму s, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ також збігається і має суму λs.

Доведення.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda u_n + \cdots = \lambda(u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots) =$$

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \{\text{збігається}\} = \lambda s. \qquad \blacksquare$$

2.

Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – два збіжних ряда з сумами s_1 та s_2 відповідно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ також збігається з сумою $s_1 \pm s_2$.

Довести самостійно

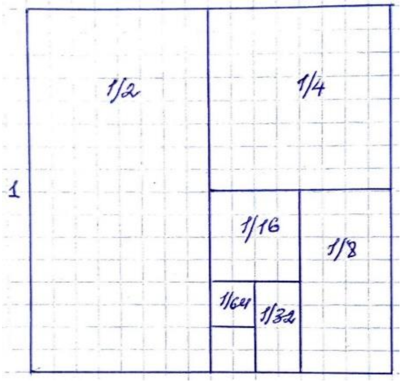
3.

Відкидання або додавання скінченного числа членів ряду не впливає на збіжність ряду.

Довести самостійно

Чи може нескінченна сума дорівнювати скінченному числу?

Розглянемо квадрат із площею, що дорівнює 1:



Тобто $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$

4. Деякі приклади

Приклад 3. Записати перші чотири члени ряду, якщо загальний член має вигляд

$$u_n = \frac{n}{10^n + 1}.$$

$$u_1 = \frac{1}{10^1 + 1} = \frac{1}{10 + 1} = \frac{1}{11};$$

$$u_2 = \frac{1}{10^2 + 1} = \frac{1}{100 + 1} = \frac{2}{101};$$

$$u_3 = \frac{1}{10^3 + 1} = \frac{1}{1000 + 1} = \frac{3}{1001};$$

$$u_4 = \frac{1}{10^4 + 1} = \frac{1}{10000 + 1} = \frac{n}{10001}.$$

Приклад 4. Знайти загальний член ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\cdots.$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{n=1}+\underbrace{\frac{3}{4}}_{n=2}+\underbrace{\frac{5}{8}}_{n=3}+\underbrace{\frac{7}{16}}_{n=4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}.$$

Приклад 5. Знайти суму ряду $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 9}+\cdots.$

Загальний член ряду: $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right);$

$$s_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right);\quad s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=\frac{1}{2}.$$

Це так званий **телескопічний ряд** або **телескопічна сума**.

5. Необхідна ознака збіжності ряду

Теорема. Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

збігається, то загальний член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доведення.

Необхідність:	Достатність:
$\text{умова} \xrightarrow{\textit{випливає}} \text{висновок}$	$\text{умова} \xleftarrow{\textit{випливає}} \text{висновок}$

Потрібно довести:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Ряд є збіжним, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Тоді і $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$.

Але $u_n = s_n - s_{n-1}$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

■

Наслідок. Якщо границя загального члена ряду $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ не дорівнює нулю або не існує, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ є розбіжним.

Довести самостійно

Приклад 6. Дослідити (якщо наші знання дозволяють) на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{8n-5}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-7}{8n-5} = \dfrac{3}{8} \neq 0$, не виконується необхідна умова збіжності.

Ряд розбіжний.

Приклад 7. Покажемо, що дана необхідна умова не є достатньою. Наведемо **контрприклад**. Дослідимо на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Необхідна умова збіжності виконується: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$

але обчислимо часткову суму ряду:

$$s_n=\underbrace{1}_{>1/\sqrt{n}}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{>1/\sqrt{n}}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{>1/\sqrt{n}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{=1/\sqrt{n}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ разів}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n};$$

$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$ – ряд розбіжний.

Достатні ознаки збіжності знакосталих рядів

6. Критерій збіжності ряду з додатними членами

Теорема. Якщо члени ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

невід'ємні, то для його збіжності необхідно і достатньо, щоб послідовність часткових сум була обмеженою.

Доведення.

Необхідність.

Необхідність:
умова $\xrightarrow{\text{випливає}}$ висновок

Ряд збіжний, тоді існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Значить, послідовність $\{s_n\}$ є збіжною та обмеженою.

Достатність.

Достатність:

умова $\xleftarrow{\textit{випливає}}$ висновок

Послідовність $\{s_n\}$ є неспадаючою (з урахуванням побудови та додатності всіх членів ряду) та обмеженою. Згідно з властивістю границі (умова збіжності монотонної послідовності)

Якщо змінна x_n монотонно зростає та обмежена зверху, тобто для будь-якого номера n

$$x_n < x_{n+1} < A = const,$$

то існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \le A$

послідовність $\{s_n\}$ збігається. тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, звідки ряд є збіжним. ■

7. Ознаки порівняння рядів

Теорема (I ознака порівнянь). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – два додатних ряди. Якщо $v_n \geq u_n \ \forall n$, то із збіжності ряду $\sum v_n$ випливає збіжність ряду $\sum u_n$ і навпаки, із розбіжності ряду $\sum u_n$ випливає розбіжність ряду $\sum v_n$.

Доведення. Ґрунтується на критерії збіжності ряду з додатними членами

Розглянемо часткові суми: $s_n = u_1 + \cdots + u_n, \ \ \sigma_n = v_1 + \cdots + v_n$.

Так як $u_n \leq v_n$, то $s_n \leq \sigma_n$. 1) $\sum v_n$ збіжний. Звідси, якщо послідовність $\{\sigma_n\}$ обмежена, то і послідовність $\{s_n\}$ обмежена, а значить, ряд $\sum u_n$ є збіжним. 2) $\sum u_n$ розбіжний. Послідовність $\{s_n\}$ необмежена, тоді і послідовність $\{\sigma_n\}$ необмежена, $\sum v_n$ розбіжний. ■

Наслідок (ІІ ознака порівнянь). Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lambda,$$

де $0<\lambda<\infty$, то два додатних ряди $\sum u_n$ та $\sum v_n$ мають однакову збіжність (тобто або обидва збіжні, або обидва розбіжні).

Довести самостійно

Приклад **8**. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

В прикладі **7** отримано, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний. Але $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Отже, за І ознакою порівнянь початковий ряд теж розбіжний.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{(2n-1)(2n+1)}$.

В прикладі **5** отримано, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ збіжний.

Але $\frac{|\sin n|}{(2n-1)(2n+1)} \le \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Отже, за I ознакою порівнянь початковий ряд теж збіжний.

Приклад **10**. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – це нескінченно спадаюча геометрична прогресія (із знаменником $\frac{1}{2}<1$), тобто цей ряд збігається. Границя частки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\ln 2}{2^n\ln 2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{2^n\ln 2}}=1.$$

Отже, за II ознакою порівнянь початковий ряд теж збіжний.

8. Ряд Діріхле

Теорема. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \begin{cases} \text{при } q \le 1 - \text{розбіжний;} \\ \text{при } q > 1 - \text{збіжний.} \end{cases}$$

При цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ називають гармонічним (гармонійним) рядом.

Є різні підходи до термінології. Іноді гармонічним (або узагальненим гармонічним) називають ряд загального вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$.

Доведення.

Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ розглянемо випадки можливих значень q.

1. $q = 1, q < 1.$

$$q = 1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Розглянемо суму з $(n+1)$-го по $(2n)$-й члени ряду:

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>1/(2n)} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{>1/(2n)} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{=1/(2n)} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Відкинемо перші два члени ряду (що не впливає на збіжність).

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}; \quad \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

Розіб'ємо члени гармонічного ряду, починаючи з третього, на групи по 2, 4, 8, …, 2^{k-1}, … членів в кожній:

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2^1\text{ доданків}}; \quad \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{2^2\text{ доданків}}; \quad \underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{2^3\text{ доданків}}; \quad \dots; \quad \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{ доданків}}; \quad \dots.$$

Кожна з цих сум окремо більше $\frac{1}{2}$. Тоді часткова сума $s_{2^k}>k\cdot\frac{1}{2}$, тобто послідовність часткових сум не є обмеженою. Звідси випливає, що ряд є розбіжним.

При $q<1$ маємо $\frac{1}{n^q}>\frac{1}{n}$, тобто ряд буде теж розбіжним.

$\underline{\underline{2.\ q > 1.}}$ Покладемо для зручності $q = 1 + \delta$, де $\delta > 0$.

$$\underbrace{\frac{1}{(n+1)^q}}_{<1/n^q} + \underbrace{\frac{1}{(n+2)^q}}_{<1/n^q} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{(2n)^q}}_{<1/n^q} < n \cdot \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^{q-1}} = \frac{1}{n^\delta}.$$

Виділимо послідовні групи членів ряду, починаючи з третього:

$$\underbrace{\frac{1}{3^q} + \frac{1}{4^q}}_{2^1};\ \underbrace{\frac{1}{5^q} + \cdots + \frac{1}{8^q}}_{2^2};\ \underbrace{\frac{1}{9^q} + \cdots + \frac{1}{16^q}}_{2^3};\ \cdots;\ \underbrace{\frac{1}{(2^{k-1}+1)^q} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^q}}_{2^{k-1}};\ \cdots.$$

Кожна з цих груп сум відповідно менше членів прогресії

$$\frac{1}{2^\delta};\ \frac{1}{4^\delta} = \frac{1}{(2^\delta)^2};\ \frac{1}{8^{\sigma\delta}} = \frac{1}{(2^\delta)^3};\ \cdots;\ \frac{1}{(2^{k-1})^\delta} = \frac{1}{(2^\delta)^{k-1}};\ \cdots.$$

$$\frac{1}{2^{\delta}};\ \frac{1}{4^{\delta}}=\frac{1}{(2^{\delta})^{2}};\ \frac{1}{8^{\delta}}=\frac{1}{(2^{\delta})^{3}};\ \dots;\ \frac{1}{(2^{k-1})^{\delta}}=\frac{1}{(2^{\delta})^{k-1}};\ \dots$$

Тоді будь-яка часткова сума буде менше постійного числа, яке, в свою чергу, дорівнює сумі нескінченно спадаючої геометричної прогресії, тобто для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q}}\ \ \text{при}\ \ q>1$$

сума ряду дорівнює

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^{\delta}}}{1-\frac{1}{2^{\delta}}}.$$

Звідси випливає, що ряд є збіжним. ■

Ряд Діріхле: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ $\begin{cases} \text{при } q \le 1 - \text{розбіжний;} \\ \text{при } q > 1 - \text{збіжний} \end{cases}$

Приклад 11.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний;

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ розбіжний;

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ збіжний.

Контрольні запитання

1. Сформулювати означення числового ряду.
2. Сформулювати означення збіжного ряду.
3. Сформулювати необхідну ознаку збіжності ряду.
4. Сформулювати ознаки порівняння рядів.
5. Сформулювати умови збіжності та розбіжності ряду Діріхле.

Контрольні завдання

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{7n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$.

Достатні ознаки збіжності знакосталих рядів (продовження)

1. Ознака Даламбера

Теорема.

Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, якщо $\rho < 1$, розбігається, якщо $\rho > 1$, а

при $\rho = 1$ питання збіжності залишається невирішеним.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

Доведення.

Якщо $\rho < 1$, то можливо вибрати число q таке, що $\rho < q < 1$. За умовами теореми $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \rho$, отже, починаючи з деякого номера N, всі значення дробу $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ опиняться в достатньо малому околі числа ρ, так, що стане $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < q$. Звидси:

при $n = N$ $\qquad u_{N+1} < qu_N$,

при $n = N + 1$ $\qquad u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2u_N$,

при $n = N + 2$ $\qquad u_{N+3} < qu_{N+2} < q^2u_{N+1} < q^3u_N$ і т.д.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

$$u_{N+1} < qu_N, u_{N+2} < q^2u_N, u_{N+3} < q^3u_N \text{ і т. д.}$$

Порівняємо два ряди:

$$(1) \quad u_1 + u_2 + \cdots + \underbrace{u_N}_{=u_N} + \underbrace{u_{N+1}}_{<qu_N} + \underbrace{u_{N+2}}_{<q^2u_N} + \underbrace{u_{N+3}}_{<q^3u_N} + \cdots$$

$$(2) \quad u_N + qu_N + q^2u_N + q^3u_N + \cdots$$

Номер N зафіксовано! Ряд (2) збігається як нескінченно спадаюча геометрична прогресія ($q < 1$). Відкинемо в (1) перші $(N-1)$ члени. По ознаці порівняння ряд (1) теж збігається.

Якщо $\boldsymbol{\rho > 1}$, та

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \rho,$$

то, починаючи з деякого номера N, при $n = N, n = N + 1, n = N + 2$ і т.д. буде виконуватися нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

тобто $u_N < u_{N+1} < u_{N+2} < \cdots$. Члени ряда зростають, тобто $u_n \nrightarrow 0$. Порушується необхідна умова збіжності, ряд є розбіжним.

■

Приклад 1.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

$u_n = \frac{5^n}{n!}, u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$ (можна далі окремо не виписувати).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \cdot 5 \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot 5^n} =$$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{(n+1)} = 0 < 1$ – за ознакою Даламбера ряд збігається.

Приклад 2.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^2+1}}{\frac{n!}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n^2+2n+2} \cdot \frac{n^2+1}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(n+1)(n^2+1)}^{\text{многочлен 3 степеня}}}{\underbrace{n^2+2n+2}_{\text{многочлен 2 степеня}}} = \infty > 1 -$$

за ознакою Даламбера ряд розбігається.

2. Радикальна ознака Коші

Теорема.

Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, якщо $\rho < 1$, розбігається, якщо $\rho > 1$, а

при $\rho = 1$ питання збіжності залишається невирішеним.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

Доведення.

Якщо $\boldsymbol{\rho < 1}$, то можливо вибрати число q таке, що $\rho < q < 1$. Тоді існує номер N, починаючи з якого $\sqrt[n]{u_n} < q$, тоді

$$u_N < q^N, \quad u_{N+1} < q^{N+1}, \quad u_{N+2} < q^{N+2} \quad \text{і т.д.}$$

Отже, послідовність $\{u_n\}$ не перевищує послідовності сум нескінченно спадаючої геометричної прогресії. Ряд збігається.

Якщо $\boldsymbol{\rho > 1}$, маємо $\sqrt[n]{u_n} \to \rho$. Тоді, починаючи с деякого номера, $\sqrt[n]{u_n} > 1$. але звідси $u_n > 1$, тобто $u_n \nrightarrow 0$, не виконується необхідна умова збіжності, ряд розбіжний. ■

Приклад 3.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{1}\cdot\left(\frac{-1}{n+1}\right)n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{n}{n+1}}=e^{-1}=\frac{1}{e}<1-$$

ряд збіжний за радикальною ознакою Коші.

Приклад 4.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2+8n-7}{9n^2-12}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+8n-7}{9n^2-12}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+8n-7}{9n^2-12}\right)=\frac{5}{9}<1-$$

ряд збіжний за радикальною ознакою Коші.

Завдання: придумати ряд, який можна досліджувати за радикальною ознакою Коші (збіжний або розбіжний, не має значення), без очевидного невиконання необхідної умови збіжності

3. Інтегральна ознака Маклорена-Коші

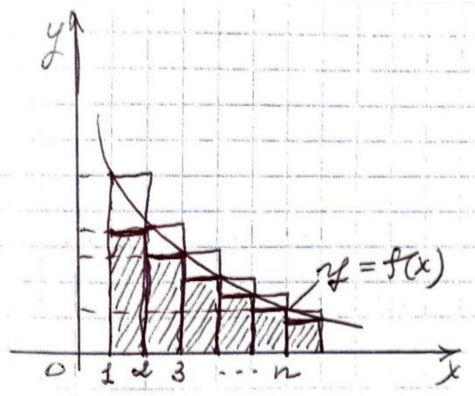
Теорема. Нехай задано знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, члени якого монотонно спадають до нуля: $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \cdots$, $u_n \to 0$. Нехай також існує неперервна монотонно спадаюча функція $f(x)$, яка визначена для $x \geq 1$ (початковим значенням може бути і будь-яке інше натуральне число), така, що $f(n) = u_n, n \in \mathbb{N}$, тобто

$$f(1) = u_1, \cdots, f(n) = u_n, \cdots.$$

Тоді, якщо збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, то збігається і ряд. Якщо інтеграл розбігається, то і ряд розбігається.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,;\;\; u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \cdots, u_n \to 0;\;\; f(n) = u_n;\;\; \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

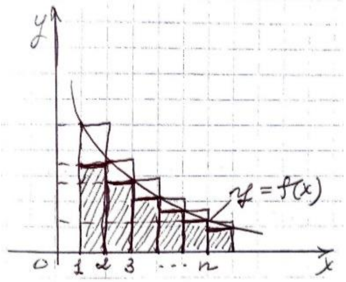
Доведення.



Запропонований ряд має форму

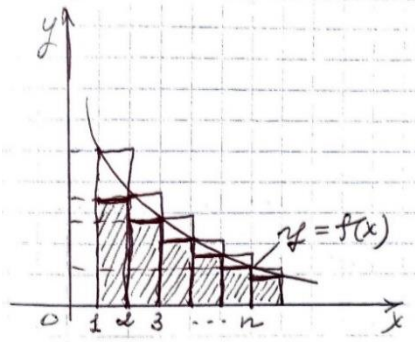
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

тобто інтеграл буде виражати площу фігури, що обмежена кривою, віссю Ox та лівою ординатою.



Сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ є сумою площ вихідних прямокутників та лише першим членом відрізняється від суми площ вхідних прямокутників. ***Наглядно:*** якщо площа криволінійної фігури скінченна, то і площа ***укладеної*** в ній східчастої фігури скінченна, і запропонований ряд збігається. Якщо ж площа криволінійної фігури нескінченна, то нескінченна й площа східчастої фігури, ***яка містить*** криволінійну.

Розглянемо площу криволінійної трапеції: $I_n = \int_1^n f(x)dx$.



$$I_n = \int_1^n f(x)dx$$

$s_{n-1} = s_n - u_n;$

$s_n - u_1 < I_n < s_n - u_n;$

$s_n < u_1 + I_n; \quad s_n > u_n + I_n;$

Розглянемо два випадки:

1. Інтеграл $\int_1^\infty f(x)\,dx$ є збіжним, тобто має скінченне значення.

Покажемо, що і ряд буде збіжним.

$s_n < u_1 + I_n; \quad s_n > u_n + I_n;$

$$I_n = \int_1^n f(x) < \int_1^\infty f(x); \quad s_{n-1} < s_n < u_1 + \int_1^\infty f(x).$$

Часткова сума обмежена та зростаюча (по побудові), значить, існує $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, тобто ряд збігається.

2. Інтеграл $\int_1^\infty f(x)\,dx = \infty$, тобто є розбіжним.

Так як $s_n > u_n + \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)$, маємо, що s_n необмежено зростає, тобто ряд розбігається. ■

Приклад 5.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Якщо спробувати, наприклад, за ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \frac{n \ln n}{1} = 1$$ – питання залишається відкритим.

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right\} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{\ln 2}^{\infty} = \infty.$$

Інтеграл розбіжний, значить, і відповідний ряд розбіжний.

4. Знакопереміжні (знакопочережні) ряди

Означення. Ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,$$

де $u_n \geq 0$ або $u_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, називається знакопереміжним.

Теорема Лейбніца. Якщо в знакопереміжному ряді

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \ (u_n > 0) \quad (1)$$

члени такі, що $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots$ (2) – умова 1

та $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ (3) – умова 2

то ряд збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена.

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \ (u_n > 0) \quad (1)$$
$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots \quad (2)$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \quad (3)$$

Доведення. Розглянемо “парні” часткові суми s_{2m}:

$$s_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2m-1} - u_{2m} =$$
$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m});$$

З умови (2) значення всередині кожних дужок додатне. Отже, $s_{2m} > 0$ та зростає при зростанні m. Разом з цим

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m};$$

З умови (2) значення всередині кожних дужок додатне. Отже, при відніманні з u_1 додатних доданків маємо меншу величину: $s_{2m} < u_1$.

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \ (u_n > 0) \quad (1)$$
$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots \quad (2)$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \quad (3)$$
$$s_{2m} > 0; \quad s_{2m} < u_1$$

Таким чином, послідовність $\{s_{2m}\}$ зростає при зростанні m та обмежена зверху. Звідси випливає, що існує скінченна границя

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s, \quad \text{причому} \quad 0 < s < u_1.$$

Покажемо, що й для "непарних" часткових сум їх границя дорівнює s:

для $n = 2m + 1$ маємо: $\quad s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1};$

з (3): $\quad \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0.$

Отже, $\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + 0 = s.$

Отримали, що $\forall n \ \lim_{n\to\infty} s_n = s$, тобто ряд (1) збігається. ∎

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \ (u_n > 0) \quad (1)$$
$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots \quad (2)$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \quad (3)$$

Зауваження. Теорема Лейбніца справедлива, якщо нерівність (2) виконується, починаючи с деякого номера n.

Приклад **6.** Дослідити на збіжність ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Ряд є знакопереміжним: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

За умовами теореми (ознаки) Лебніца: 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots$;

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ – ряд збіжний.

5. Знакозмінні ряди

Означення. Ряд називається знакозмінним, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots -$$

u_n можуть бути як додатними, так і від'ємними.

<u>Теорема (достатня ознака збіжності знакозмінного ряду).</u> Якщо знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

такий, що ряд, який складається з абсолютних величин його членів

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots, \quad (2)$$

збігається, то й початковий ряд теж збігається.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots (1); \quad |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots (2)$$

Доведення. Отже, потрібно довести, що із збіжності (2) випливає збіжність (1). Нехай s_n та σ_n – часткові суми ряді (1) та (2) відповідно.

Нехай s_n' – сума всіх додатних, а s_n'' – сума модулів всіх від’ємних членів ряду (1). Тоді

$$s_n = s_n' - s_n''; \quad \sigma_n = s_n' + s_n''.$$

За умовами (ряд (2) збігається) існує скінченний $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Але

$$s_n' < \sigma, \quad s_n'' < \sigma.$$

Отже, існують скінченні $\lim\limits_{n\to\infty} s_n' = s'$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n'' = s''$. Тоді

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n' - s_n'') = s' - s'' < \infty$ – ряд (1) збігається. ■

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{\cos(\pi/4)}{3}+\frac{\cos(3\pi/4)}{3^2}+\frac{\cos(5\pi/4)}{3^3}+\cdots+\frac{\cos((2n-1)\pi/4)}{3^n}+\cdots.$$

Розглянемо (підберемо) мажорантний ряд для ряду із модулів:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots -$$

збігається як нескінченно спадаюча геометрична прогресія. Але

$$\left|\frac{\cos((2n-1)\pi/4)}{3^n}\right|\le\frac{1}{3^n},\ \ \text{значить, ряд}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos((2n-1)\pi/4)}{3^n}\right|$$

збігається (за ознакою порівнянь). Тоді по теоремі – достатній ознаці збіжності знакозмінного ряду – вихідний ряд теж збігається.

6. Абсолютна та умовна збіжність

Означення. Знакозмінний ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд, який складено з абсолютних величин його членів:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots.$$

Означення. Якщо знакозмінний ряд збігається, а ряд, який складено з абсолютних величин його членів, розбігається, то цей ряд називається умовно збіжним.

Приклад **8.** Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ є умовно збіжним, так як він є збіжним за ознакою Лейбніца (було доведено раніше), а відповідний знакододатний ряд – це гармонічний ряд, який розбігається.

7. Оцінка похибки

Якщо в збіжному знакопереміжному ряді

$$(-1)^0 u_1 + (-1)^1 u_2 + \cdots + (-1)^n u_n + (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots$$

обмежитися першими n членами, то залишок r_n ряду

$$r_n = s - s_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots$$

має знак першого відкинутого члена ряду та буде менше його за абсолютною величиною:

$$|r_n| < u_{n+1}.$$

В силу цієї властивості знакопереміжні ряди зручні для обчислень із заданим ступенем точності.

$|r_n| < u_{n+1}$

Приклад 9. Знайти суму ряду $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} - \cdots$

з точністю до 0,01.

Отже, за умовами потрібно: $|u_{n+1}| < 0{,}01$. Четвертий член ряду

$$\frac{1}{6!} = \frac{1}{720} < \frac{1}{100}.$$

Знаходимо суму перших трьох членів ряду:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = 0{,}541(6) \approx 0{,}542.$$

Обчислення виконано з точністю до $\frac{1}{720}$.

Контрольні запитання

1. Сформулювати ознаку Даламбера.
2. Сформулювати радикальну ознаку Коші.
3. Сформулювати інтегральну ознаку Маклорена-Коші.
4. Сформулювати теорему Лейбніца.
5. Дати означення абсолютної та умовної збіжності.

Контрольні завдання

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

Функціональні ряди

1. Деякі означення

Означення. Ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

називається функціональним, якщо його члени є функціями від x.

Будемо розглядати ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots.$$

Означення. Сукупність тих значень x, при яких функціональний ряд збігається, називається областю збіжності цього ряду.

При цьому сума ряду – це деяка функція від x. Позначатимемо її $s(x)$.

Приклад 1. Розглянемо ряд $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$.

Цей ряд збігається при $x \in (-1; 1)$, тобто $|x| < 1$. При цьому

$$\forall x \in (-1; 1) \quad s(x) = \frac{1}{1 - x}$$

(сума нескінченно спадаючої геометричної прогресії зі знаменником x).

Позначимо через $s_n(x)$ суму перших n членів ряду

$$\underbrace{u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x)}_{s_n(x)} + u_{n+1}(x) + \cdots.$$

Якщо ряд збігається із сумою $s(x)$, то $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$, де

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots.$$

Означення. Величина $r_n(x)$ називається залишком ряду.

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$$

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

Для всіх x з області збіжності

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x),$$

тому

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}\big(s(x) - s_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} s(x) - \lim_{n\to\infty} s_n(x) =$$

$$= s(x) - s(x) = 0.$$

Отже, залишок $r_n(x)$ ряду, що збігається, прямує до нуля при $n \to \infty$.

Означення.

Функціональний ряд збігається <u>рівномірно</u> на інтервалі $[a; b]$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке N, що при $n > N$ для всіх $x \in [a; b]$ для залишка ряду виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

<u>Теорема (ознака Вейерштраса) (без доведення).</u>

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається абсолютно і рівномірно на інтервалі $[a; b]$, якщо існує такий збіжний додатний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, що $|u_n(x)| < c_n$ при $x \in [a; b]$.

Означення.

Функціональний ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

називається мажоровним в деякій області зміни x, якщо існує такий збіжний числовий ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

с додатними членами, що для всіх значень x з даної області виконуються співвідношення

$$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, \cdots, |u_n(x)| \le \alpha_n, \cdots.$$

При цьому ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots$ зветься мажорантним.

$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, \cdots, |u_n(x)| \le \alpha_n, \cdots$

Приклад 2. Ряд

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \cdots + \frac{\cos(nx)}{n^2} + \cdots$$

є рядом, що мажорується на всій числовій осі рядом

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots - \text{збіжний (ряд Діріхле).}$$

Дійсно,

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

2. Степеневі ряди

Означення. Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

де $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ – сталі числа, які називаються коефіцієнтами ряду.

Теорема Абеля.

(1) Якщо степеневий ряд збігається при деякому значенні x_0, що не дорівнює нулю, то він абсолютно збігається при будь-якому значенні x, для якого $|x| < |x_0|$.

(2) Якщо ряд розбігається при деякому значенні x_0, то він розбігається при всякому x, для якого $|x| > |x_0|$.

Доведення.

(1) треба довести: збіг. при $x_0 \Longrightarrow$ збіг. при $|x| < |x_0|$

Так як за припущенням **числовий** ряд

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n + \cdots$$

збігається, то для його загального члена

$$a_nx_0^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Це означає, що існує таке $M > 0$, що для всіх членів ряду

$$|a_nx_0^n| < M.$$

Перепишемо вихідний функціональний ряд у вигляді

$$a_0 + a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots + a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \cdots.$$

$$|a_n x_0^n| < M; \quad a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \cdots$$

Розглянемо ряд з абсолютних величин:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots; \qquad (1)$$

маємо, що цей ряд мажорується рядом

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots.$$

При $|x| < |x_0|$ останній ряд є геометричною прогресією зі знаменником

$$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1,$$

отже, він збігається. Тоді і ряд (1) збігається, і вихідний ряд є збіжним.

(2) треба довести: $\text{розб. при } x_0 \Longrightarrow \text{розб. при } |x| > |x_0|$

Нехай в деякій точці x_0 ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

розбігається. Тоді він буде розбіжним в будь-яких точках x таких, що

$$|x| > |x_0|.$$

Дійсно, якби в якійсь точці x, що задовольняє цієї умови, ряд збігався, то в силу доведеної першої частини теореми він би збігався і в точці x_0, тому що $|x_0| < |x|$. Отже, ряд в точці x розбігається.

■

3. Радіус збіжності степеневого ряду

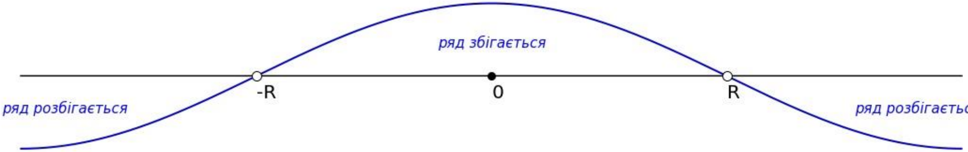
Висновки з теореми Абеля:

- якщо x_0 – точка збіжності, то весь інтервал $(-|x_0|; |x_0|)$ заповнено точками абсолютної збіжності;
- якщо x_0' – точка розбіжності, то інтервали $(-\infty; -|x_0'|)$ та $(|x_0'|; +\infty)$ складаються з точок розбіжності.

Отже, існує число R таке, що при $|x| < R$ маємо точки абсолютної збіжності та при $|x| > R$ – точки розбіжності. Таким чином, справедлива наступна

Теорема. Областю збіжності степеневого ряду є інтервал з центром в початку координат.

Означення. Інтервалом збіжності степеневого ряду називається такий інтервал $(-R; R)$, що для будь-якої точки x, що лежить всередині цього інтервалу, ряд збігається абсолютно, а для точок x, що лежать поза інтервалом, ряд розбігається. Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду.



На кінцях інтервалу, тобто при $x = R$ та $x = -R$, питання про збіжність та розбіжність вирішується індивідуально для конкретного ряду.
У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку $(R = 0)$, в інших – охоплює всю числову вісь $(R = \infty)$.

Обчислення радіусу збіжності степеневого ряду

Маємо ряд:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

Відповідний ряд з модулів

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x^2| + \cdots + |a_n||x^n| + \cdots$$

знакододатний, для визначення його збіжності скористаємося ознакою Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n : u_n > 0;\ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} \rho < 1 - \text{ряд збіжний}, \\ \rho > 1 - \text{ряд розбіжний}, \\ \rho = 1 - \text{потрібне додаткове дослідж.} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n : u_n > 0; \ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} \rho < 1 - \text{ряд збіжний}, \\ \rho > 1 - \text{ряд розбіжний}, \\ \rho = 1 - \text{потрібне додаткове дослідж.} \end{cases}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x^2| + \cdots + |a_n||x^n| + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Ряди з модулів та вихідний абсолютно збігаються при

$$L|x| < 1, \text{тобто } |x| < \frac{1}{L}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n : u_n > 0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases}\rho < 1 - \text{ряд збіжний,}\\ \rho > 1 - \text{ряд розбіжний,}\\ \rho = 1 - \text{потрібне додаткове дослідж.}\end{cases}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x^2| + \cdots + |a_n||x^n| + \cdots$$

При $|x| > \dfrac{1}{L}$ ряд з модулів розбігається, так як $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L|x| > 1$, причому його загальний член не прямує до нуля, тому що він зростає (з урахуванням $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$). Тоді й загальний член вихідного ряду не прямує до нуля, тобто ряд розбігається при $|x| > \frac{1}{L}$. Остаточно:

інтервал збіжності: $\left(-\dfrac{1}{L};\dfrac{1}{L}\right)$; радіус збіжності: $\boxed{R = \dfrac{1}{L} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right|}$.

Приклад 3. Визначити інтервал збіжності ряду

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n}.$$

Потрібно визначити x: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2x)^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot(2x)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2x\cdot n}{n+1}\right| =$$

$$= |2x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |2x| = 2|x|; \quad 2|x| < 1; \quad |x| < \frac{1}{2}; \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n}; \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Дослідимо в значеннях на кінцях інтервалу.

$$x = -\frac{1}{2}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ – ряд розбігається (гармонічний).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n}; \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \quad x = -\frac{1}{2} - \text{розбіжний}$$

$$x = \frac{1}{2}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \text{збігається за ознакою Лейбніца.}$$

Отже, інтервал збіжності:

$$x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

Приклад 4. Визначити інтервал збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

Границя не залежить від x та менше 1. Отже, ряд збігається для будь-якого x. Інтервал збіжності:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Приклад 5. Визначити інтервал збіжності ряду

$$1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \cdots + (nx)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (nx)^n.$$

В точці $x = 0$ ряд очевидно збігається.

В усіх точках крім $x = 0$ загальний член ряду $(nx)^n \to \infty$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (nx)^n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} (n)^n}_{=\infty} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} (x)^n}_{\substack{\{\text{число}\}^n<\infty \\ \text{(обмежена} \\ \text{величина)}}} = \infty,$$

тобто ряд збігається лише в одній точці $x = 0$.

4. Ряди по степеням $x - a$

Означення. Степеневим рядом також називається функціональний ряд по степеням двочлена $x - a$ вигляду

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots,$$

де сталі $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots$ – коефіцієнти ряду.

Для визначення області збіжності зробимо заміну змінної $x - a = X$.

Якщо ряд $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$ збігається в інтервалі

$$-R < X < R,$$

то початковий ряд збігається при $-R < x - a < R$, тобто

$$a - R < x < a + R.$$

За межами цього інтервалу ряд розбігається.

Контрольні запитання

1. Сформулювати означення функціонального ряду.
2. Сформулювати означення степеневого ряду.
3. Сформулювати Теорему Абеля.

Контрольні завдання

1. Знайти інтервали збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{2^{n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 6^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n-1} \cdot x^{n-1}$.

1. Формула Тейлора

Припустимо, що функція $f(x)$ має всі похідні до $(n+1)$-го порядку включно в деякому проміжку, який містить точку $x = a$. Будемо шукати многочлен

$$y = P_n(x)$$

такий, що

$$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), \cdots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a):$$

≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n.$$

≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈≈

Знайдемо невизначені коефіцієнти $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$.

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \cdots + C_n(x-a)^n$$

$$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), \cdots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

$$P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \cdots + nC_n(x-a)^{n-1};$$
$$P_n''(x) = 2 \cdot 1 \cdot C_2 + 3 \cdot 2 \cdot C_3(x-a) + \cdots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2};$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_n.$$ Тоді

$$P_n(a) = f(a) = C_0,$$
$$P_n'(a) = f'(a) = C_1,$$
$$P_n''(a) = f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot C_2,$$
$$P_n'''(a) = f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_3,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_n.$$

Отримуємо коефіцієнти C_k:

$P_n(a) = f(a) = C_0,$ $P'_n(a) = f'(a) = C_1,$ $P''_n(a) = f''(a) = 2\cdot 1\cdot C_2,$ $P'''_n(a) = f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3,$ $\ldots \quad \ldots \quad \ldots$ $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot C_n.$	$\Longrightarrow$	$C_0 = f(a),$ $C_1 = f'(a),$ $C_2 = \dfrac{f''(a)}{1\cdot 2},$ $C_3 = \dfrac{f'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3},$ $\ldots \quad \ldots \quad \ldots$ $C_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\cdots n}.$

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(a).$$

Отже, для $f(x)$ знайдено многочлен $P_n(x)$ такий, що

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n} f^{(n)}(a)$$

$$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), \cdots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Позначимо залишковий член

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

тоді

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

тобто

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x).$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

Отже, залишковий член можливо записати у формі

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x).$$

Конкретизуємо функцію $Q(x)$. Позначимо її через Q при фіксованих x та a. Розглянемо допоміжну функцію $F(t)$, t лежить між a та x:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \cdots$$

$$\cdots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q.$$

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \cdots$$

$$\cdots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q$$

$$F'(t) = -f'(t) - \left(-1 \cdot f'(t) + \frac{x-t}{1} f''(t) \right) -$$

$$- \left(-\frac{2(x-t)}{2!} f''(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) \right) - \cdots$$

$$\cdots - \left(-\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q;$$

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) -$$

$$- \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \cdots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) -$$

$$- \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q;$$

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q.$$

Отже, функція $F(t)$ має похідну в усіх точках t, що лежать поблизу a.
$F(x) = 0$ – очевидно. Визначимося, що і $F(a) = 0$.

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x)$$

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q$$

$$F(a)=$$

$$=\underbrace{f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x)}_{f(x)}-$$

$$-f(a)-\frac{x-a}{1}f'(a)-\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)-\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q=$$

$$=0.$$

Отже, функція $F(t)$ задовольняє умовам теореми Ролля.

Теорема Ролля. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ та диференційовна в усіх внутрішніх точках цього відрізку і на кінцях відрізку $x = a$ та $x = b$ приймає значення, що дорівнюють нулю, то всередині відрізка $[a; b]$ існує хоча б одна точка, в якій похідна обертається на нуль, тобто $f'(x) = 0$

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q, \qquad F(x) = 0, \qquad F(a) = 0$$

Отже, існує значення $t = \xi$, що лежить між a та x, при якому $F'(\xi)$:

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x); \quad Q = f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}$$ – залишковий член у формі Лагранжа.

Так як ξ лежить між x та a, його можна представити у вигляді

$$\xi = a + \theta(x-a), \;\; 0 < \theta < 1.$$

Тоді

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\big(a + \theta(x-a)\big).$$

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x);\quad R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)$$

Формула Тейлора для функції $f(x)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big).$$

Формула Маклорена для функції $f(x)$ (частинний випадок при $a=0$):

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

Означення. Функція $g(x) = O\big(f(x)\big)$ ("О велике"), якщо для достатньо великих x та для деякого додатнього числа M

$$\frac{|g(x)|}{|f(x)|} < M \quad (\text{величини одного порядку}).$$

Означення. Функція $g(x) = o\big(f(x)\big)$ ("о маленьке") в точці b (зокрема, на ∞), якщо

$$\lim_{x \to b} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad (g(x) \text{ більш низького порядку}).$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

Залишковий член ряду Тейлора у формі Пеано:

$$R_n(x) = o((x-a)^n).$$

2. Ряди Тейлора та Маклорена

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то, при $n \to \infty$, отримуємо **ряд Тейлора**:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Аналогічно **ряд Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Приклад 1. Розкласти в ряд функцію $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$ по степеням $(x+1)$ (тобто розкласти в ряд Тейлора при $a = -1$).

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

$f(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1;$ $\quad f(-1) = 0,$

$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2x + 1;$ $\quad f'(-1) = 0,$

$f''(x) = 20x^3 + 24x^2 - 2;$ $\quad f''(-1) = 2,$

$f'''(x) = 60x^2 + 48x;$ $\quad f'''(-1) = 12,$

$f^{IV}(x) = 120x + 48;$ $\quad f^{IV}(-1) = -72,$

$f^{V}(x) = 120;$ $\quad f^{V}(-1) = 120$, далі – всі нулі.

$$f(x) = 0 + 0 + \frac{(x+1)^2}{2!} \cdot 2 + \frac{(x+1)^3}{3!} \cdot 12 + \frac{(x+1)^4}{4!} \cdot (-72) + \frac{(x+1)^5}{5!} \cdot 120;$$

$$f(x) = (x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5.$$

3. Приклади розкладання функцій в ряд Маклорена

1. $\boldsymbol{f(x) = e^x}$.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

$f(x) = e^x;$ $\quad f(0) = 1;$

$f'(x) = e^x;$ $\quad f'(0) = 1;$

$\cdots\cdots\cdots$ $\quad \cdots\cdots\cdots$

$f^{(n)}(x) = e^x;$ $\quad f^{(n)}(0) = 1;$

$\cdots\cdots\cdots$ $\quad \cdots\cdots\cdots$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. $f(x) = \sin x$.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

$$f(x) = \sin x\,; \qquad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \qquad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right); \qquad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right); \qquad f'''(0) = -1;$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right); \qquad f^{IV}(0) = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right); \qquad f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}.$$

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

$f(0)=0;\ f'(0)=1;\ f''(0)=0;\ f'''(0)=-1;\ f^{IV}(0)=0$ і т.д.

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}$$

$$\sin x=0+\frac{x}{1!}\cdot 1+0+\frac{x^3}{3!}\cdot(-1)+0+\frac{x^5}{5!}\cdot 1+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2}+\cdots;$$

$$\boxed{\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$$

3. $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$.

Довести формулу самостійно аналогічно п. 2

Очікуваний результат:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

4. $f(x) = (1+x)^m$ (біноміальний ряд).

Продиференцюємо функцію $f(x) = (1+x)^m$:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1};$$

$$(1+x)f'(x) = m(1+x)^{m-1}(1+x);$$

$$(1+x)f'(x) = m\underbrace{(1+x)^m}_{f(x)},$$

тобто початкова функція задовольняє диференціальному рівнянню

$$(1+x)f'(x) = mf(x) \qquad (*)$$

та умові $f(0) = 1$.

Знайдемо степеневий ряд, сума $s(x)$ якого задовольняє рівнянню $(*)$ та $s(0) = 1$:

$$s(x) = \underbrace{1}_{s(0)=1} + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots.$$

$$(1+x)f'(x) = mf(x) \qquad (*)$$

$$s(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Підставляємо ряд в $(*)$:

$$(1+x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots) =$$

$$= m(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots).$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & a_1 = m, \\
x^1 & a_1 + 2a_2 = ma_1, \\
x^2 & 2a_2 + 3a_3 = ma_2, \\
\ldots & \cdots\cdots\cdots \\
x^n & na_n + (n+1)a_{n+1} = ma_n, \\
\ldots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

$$s(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$a_1 = m, a_1 + 2a_2 = ma_1, 2a_2 + 3a_3 = ma_2, \cdots, na_n + (n+1)a_{n+1} = ma_n, \cdots$$

Отримуємо **біноміальні коефіцієнти**:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = m,$$

$$a_2 = \frac{ma_1 - a_1}{2} = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2},$$

$$a_3 = \frac{ma_2 - 2a_2}{3} = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$s(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

Отже,

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Оцінимо збіжність цього ряду. Розглянемо два випадки.

1. $m \in \mathbb{Z}, m > 0$. Тоді, починаючи з члена, що містить x^{n+1}, всі коефіцієнти дорівнюватимуть нулю, і ряд перетворюється на многочлен.

2. m дробове або ціле від’ємне. Тоді маємо нескінченний ряд. Визначимо його радіус збіжності за ознакою Даламбера.

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,; \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} \rho < 1 - \text{ряд збігається;} \\ \rho > 1 - \text{ряд розбігається;} \\ \rho = 1 - \text{потрібне додаткове дослідження} \end{cases}$$

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n;$$

$$u_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\cdots(m-n+2)n!}\cdot\frac{x^n}{x^{n-1}}\right| =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,; \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} \rho < 1 - \text{ряд збігається;} \\ \rho > 1 - \text{ряд розбігається;} \\ \rho = 1 - \text{потрібне додаткове дослідження} \end{cases}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\cdots(m-n+2)n!}\cdot\frac{x^n}{x^{n-1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{m(m-1)\cdots(m-n+2)n}\cdot x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(m-n+1)}{n}\right|\cdot|x| = |x|.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається при $|x| < 1$. Отже,

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots, -1 < x < 1}$$

5. $f(x) = \ln(1+x)$.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots, -1 < x < 1$$

Розглянемо розкладання бінома при $m = -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \cdots =$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Проінтегруємо вираз у межах від 0 до x (при $|x| < 1$):

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots)dt = \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots\right)\Bigg|_0^x =$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \cdots = \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \right)\Bigg|_0^x =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

З іншого боку, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|\Big|_0^x = \ln \underbrace{(1+x)}_{|x|<1} - \ln 1 = \ln(1+x).$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad x \in (-1;1)}$$

Звідси $\displaystyle \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots, \qquad x \in (-1;1).$

4. Приклади наближених обчислень за допомогою рядів

Приклад 2. Обчислити $\sin 10^{\text{o}}$ з точністю до 10^{-5}.

$$10^{\text{o}} = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}174533;$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots;$$

$$\sin 10^{\text{o}} = \sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \cdots;$$

$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$, при цьому помилка δ за модулем менше першого з відкинутих членів ряду;

$$\sin 10^{\circ} = \sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \cdots$$

$$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$$

$$\delta < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}(0{,}2)^5 < 4\cdot 10^{-6}.$$

Обчислюємо за отриманою формулою з точністю до шостого знаку після коми:

$$\sin 10^{\circ} = \sin\frac{\pi}{18} \approx 0{,}173647.$$

За перші чотири знаки можна ручатися.

Те ж саме за допомогою калькулятора: $\sin 10^{\circ} \approx 0{,}173648177\cdots$.

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_0^a e^{-x^2}dx$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots; \quad \Longrightarrow \quad e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots;$$

$$\int\limits_0^a e^{-x^2}dx = \int\limits_0^a \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \cdots\right)\Bigg|_0^a = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1!\cdot 3} + \frac{a^5}{2!\cdot 5} - \frac{a^7}{3!\cdot 7} + \cdots.$$

Тепер можна обчислити цей інтеграл для будь-якого a із заданою точністю.

Що далі?

Використовуючи ряди Тейлора і Маклорена, можна обчислити багато корисного та цікавого. Наприклад, інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів – це буде в курсі звичайних диференціальних рівнянь. А також доведення формули Ейлера –

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi -$$

це буде в курсі теорії функцій комплексної змінної.

До речі, ця формула поєднує всі основні константи, на яких базується математика, тобто 0, 1, π, e та i ($i^2 = -1$):

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Як може $e^{\{\text{у степені}\}}$ дорівнювати від'ємному числу? 😊

Контрольні запитання

1. Записати загальний вигляд ряду Тейлора.
2. Записати загальний вигляд ряду Маклорена.
3. Записати ряд Маклорена для функцій

$$e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^m, \ln(1+x).$$

Контрольні завдання

1. Обчислити наближено, обмежуючись двома членами ряду, $\cos 12^{\circ}$.

2. Обчислити наближено, обмежуючись двома членами ряду, $\sqrt{0{,}998}$.

3. Обчислити наближено $\int\limits_0^{0,8} x^{10} \cdot \sin x \, dx$ з точністю до 0,001.

2. Означення тригонометричного ряду

Означення. Функціональний ряд

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots,$$

тобто ряд вигляду $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$

називається тригонометричним рядом. Числа a_0, a_n, b_n – коефіцієнти тригонометричного ряду.

Якщо цей ряд збігається, то його сумою є періодична функція $f(x)$ з періодом 2π, тому що $\sin nx$ та $\cos nx$ є 2π-періодичними функціями, тобто $f(x) = f(x + 2\pi)$.

3. Визначення коефіцієнтів ряду за формулами Фур'є

Нехай $f(x)$ – періодична функція з періодом 2π, яка зображувана тригонометричним рядом, що збігається до неї в інтервалі $(-\pi; \pi)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

1. Знайдемо a_0. Проінтегруємо обидві частини в межах від $-\pi$ до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \, dx \right).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \, dx \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0 \pi}{2} - \left(-\frac{a_0 \pi}{2}\right) = \frac{a_0 \pi}{2} + \frac{a_0 \pi}{2} = a_0 \pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{a_n \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \, dx = -\frac{b_n \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{b_n}{n} (\cos n\pi - \cos n\pi) = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \, dx \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0\pi, \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \, dx = 0$$

Отже,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}.$$

2. Знайдемо a_k. При певному $k \neq 0$ помножимо на $\cos kx$ обидві частини рівності

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx:$$

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx\,;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\,dx\right);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = \left.\frac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx = \{n \neq k\} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-k)x + \cos(n+k)x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\sin(n-k)x}{n-k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \left.\frac{\sin(n+k)x}{n+k}\right|_{-\pi}^{\pi}\right) = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{інтеграл від непарної функції з}\\ \text{симетричними відносно нуля межами}\end{matrix}\right\} = 0;$$

І тільки при $n = k$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2kx}{2k}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\big(\pi + 0 - (-\pi - 0)\big) = \frac{1}{2}(\pi+\pi) = \pi.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\,dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx = 0 \text{ при } n \neq k, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx = \pi \text{ при } n = k$$

Отже, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = a_k\pi \quad \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx}.$$

3. Знайдемо $\boldsymbol{b_k}$. *Обчислити самостійно, див. п. 2*

Підказка: при $k \neq 0$ помножимо на $sin\, kx$ обидві частини рівності

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Результат, який потрібно отримати: $\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx}$.

Отже,

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx\,, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx\,, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx}$$

4. Теорема про збіжність ряду Фур'є на періоді

Означення. Отримані коефіцієнти a_0, a_k, b_k називаються коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$, а тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

з цими коефіцієнтами – рядом Фур'є функції $f(x)$.

Ряд Фур'є є рядом по системі ортогональних функцій (тобто функцій, інтеграл від добутку яких на відрізку $[a; b]$ дорівнює нулю).

Означення. Функція $f(x)$ називається кусково-монотонною на відрізку $[a; b]$, якщо цей відрізок можна розбити скінченним числом точок $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ на інтервали $(a; x_1), (x_1; x_2), \cdots, (x_{n-1}; b)$ так, що на кожному з інтервалів функція є монотонною, тобто або незростаюча, або неспадаюча.

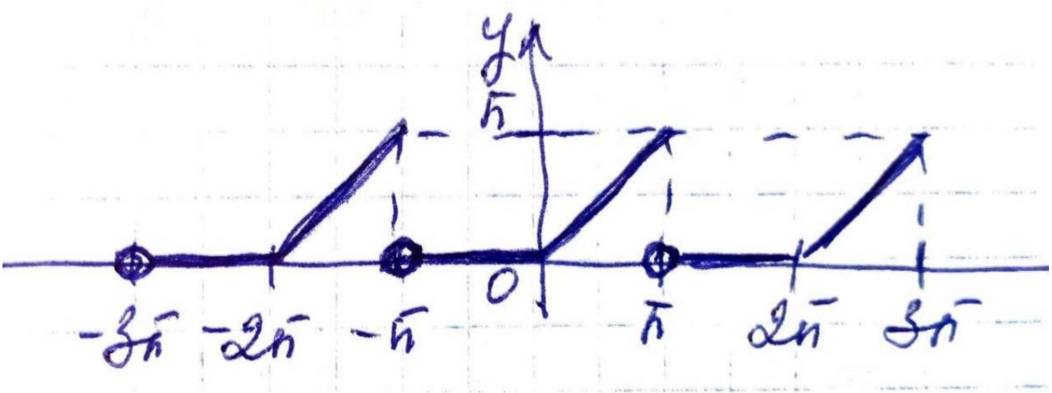
Теорема (без доведення). Якщо періодична функція $f(x)$ з періодом 2π є кусково-монотонною і обмеженою на відрізку $[-\pi; \pi]$, то ряд Фур'є, що побудовано для цієї функції, збігається в усіх точках. Сума отриманого ряду $S(x)$ дорівнює значенню функції $f(x)$ в точках неперервності функції. В точках розривів функції $f(x)$ сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції $f(x)$ справа і зліва, тобто якщо $x = c$ – точка розриву функції $f(x)$, то

$$S(x)_{x=c} = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Приклад 3. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi; 0], \\ x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$$

періодичну з періодом $T = 2\pi$.



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi; 0], \\ x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\boldsymbol{a_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x \\ dv = \cos kx\,dx \end{matrix}\;\middle|\; \begin{matrix} du = dx \\ v = \dfrac{\sin kx}{k} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x\sin kx}{k}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi k^2}\cdot\cos kx\bigg|_0^{\pi} = \left\{\cos k\pi = \begin{cases} 1, k - \text{пар.}, \\ -1, k - \text{неп.} \end{cases}\right\} = \boxed{\frac{1}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi; 0], \\ x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin kx\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x \\ dv = \sin kx\,dx \end{matrix}\left| \begin{matrix} du = dx \\ v = -\dfrac{\cos kx}{k} \end{matrix}\right.\right\} = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x\cos kx}{k}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi\cdot(-1)^k}{k} + \frac{1}{\pi k^2}\cdot\sin kx\bigg|_0^{\pi} = -\frac{(-1)^k}{k} + 0 = \boxed{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}.$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, a_k = \frac{1}{\pi k^2}((-1)^k - 1), b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти в загальну формулу:

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}((-1)^k - 1)\cos kx + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx}.$$

Декілька перших членів ряду:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots.$$

5. Одне зауваження про розкладання періодичної функції в ряд Фур'є

Теорема. Інтеграл від періодичної функції $\psi(x)$ по будь-якому відрізку, довжина якого дорівнює періоду, має завжди одне й те ж саме значення:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx.$$

Доведення. Функція є 2π-періодичною, тобто $\psi(\xi - 2\pi) = \psi(\xi)$. Покладемо $x = \xi - 2\pi$ $(dx = d\xi)$. Для довільних c, d маємо

$$\int_{c}^{d} \psi(x)dx = \left\{\begin{array}{rcl} x = \xi - 2\pi & \Longrightarrow & \xi = x + 2\pi \\ x = c & \Longrightarrow & \xi = c + 2\pi \\ x = d & \Longrightarrow & \xi = d + 2\pi \end{array}\right\} = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi - 2\pi)d\xi =$$

$$\int_{c}^{d} \psi(x)dx = \dots = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi - 2\pi)d\xi = \begin{Bmatrix} x = \xi - 2\pi \\ dx = d\xi \end{Bmatrix} = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(x)dx.$$

Покладемо $c = -\pi, d = \lambda$:

$$\int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)dx = \int_{-\pi+2\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx.$$

Отже,

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx = \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx$$

$$= \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx =$$

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx = \cdots = \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx + \int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx.$$

$\blacksquare$

6. Ряди Фур'є для парних та непарних функцій

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

1. Функція $f(x)$ – непарна	**2.** Функція $f(x)$ – парна
$a_0 = 0,$ $a_k = 0,$ $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin kx}_{\text{парна}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$	$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx\,, \qquad b_k = 0,$ $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos kx\,dx}_{\text{парна}} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$

Приклад 4. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi; 0], \\ 1, & x \in (0; \pi] \end{cases}$$

періодичну з періодом $T = 2\pi$.

Функція <u>непарна:</u>

$a_0 = 0.$

$a_k = 0.$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cdot(-\cos kx)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi k}(-\cos k\pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi k}(-(-1)^k + 1) = \frac{2}{\pi k}((-1)^{k+1} + 1).$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$a_0 = 0, a_k = 0, b_k = \frac{2}{\pi k}\left((-1)^{k+1} + 1\right)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k}\left((-1)^{k+1} + 1\right) \sin kx}.$$

Записати самостійно чотири перші члени ряду (див. перший приклад з теорії рядів Фур'є)

Контрольні запитання

1. Записати загальний вигляд ряду Фур'є по тригонометричній системі функцій.
2. Записати загальний вигляд коефіцієнтів Фур'є.
3. Записати загальний вигляд коефіцієнтів Фур'є для парної та непарної функцій.

Контрольні завдання

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичні з періодом 2π функції:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, -\pi < x \le 0, \\ -2, 0 < x \le \pi; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x, -\pi < x \le 0, \\ 2x, 0 < x \le \pi. \end{cases}$

1. Ряд Фур'є для функції з періодом $2l$

Нехай $f(x)$ – періодична функція з періодом $2l$. Розглянемо заміну змінної:

$$x = \frac{lt}{\pi}.$$

Функція $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ є періодичною від аргумента $\frac{l}{\pi}t$ з періодом $2l$.

Покажемо, що функція $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ є періодичною від t з періодом 2π:

$$f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right).$$

Отже, її можна розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi; \pi]$.

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) dt,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos kt \, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin kt \, dt.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

$$x=\frac{l}{\pi}t, a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt\,, a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\,dt\,, b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin kt\,dt$$

Повертаємося до старої змінної:

$$x=\frac{l}{\pi}t \Longrightarrow t=\frac{\pi}{l}x, dt=\frac{\pi}{l}dx; \quad t=-\pi \Longrightarrow x=-l, t=\pi \Longrightarrow x=l.$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\frac{\pi}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\cdot\frac{\pi}{l}dx=$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} \cdot \frac{\pi}{l} dx =$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx \, ;$$

$$x = \frac{l}{\pi} t \implies t = \frac{\pi}{l} x, dt = \frac{\pi}{l} dx; \quad t = -\pi \implies x = -l, t = \pi \implies x = l$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin kt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot \frac{\pi}{l} dx =$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Отже, для функції $f(x)$ з періодом $2l$:

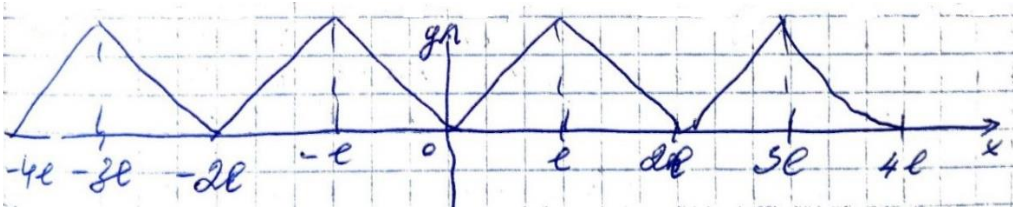
$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx\,;$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k\cos\frac{\pi kx}{l} + b_k\sin\frac{\pi kx}{l}.$$

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x|$ з періодом $2l$ на відрізку $[-l; l]$.



Функція є парною, тобто $b_k = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} xdx = \frac{2}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^l = \frac{l^2}{l} = l.$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \underbrace{f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}}_{\text{парна}} dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l} dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} x\cos\frac{\pi k x}{l} dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x \\ dv = \cos\frac{\pi k x}{l} dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du = dx \\ v = \frac{l}{\pi k}\sin\frac{\pi k x}{l} \end{matrix}\right.\right\} = \underbrace{\frac{2}{l}\cdot\frac{xl}{\pi k}\cdot\sin\frac{\pi k x}{l}\Bigg|_0^l}_{=0} -$$

$$-\frac{2}{l}\cdot\frac{l}{\pi k}\int_{0}^{l}\sin\frac{\pi k x}{l} dx = 0 - \left(-\frac{2}{\pi k}\cdot\frac{l}{\pi k}\cdot\cos\frac{\pi k x}{l}\right)\Bigg|_0^l = \frac{2l}{\pi^2 k^2}\cos\frac{\pi k x}{l}\Bigg|_0^l =$$

$$= \frac{2l}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right).$$

Отже: $a_0 = l,$

$$a_k = \frac{2l}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right),$$

$$b_k = 0.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l}.$$

$$\boxed{|x| = \frac{l}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos\frac{\pi k x}{l}}.$$

Записати самостійно чотири перші члени ряду (див. перший приклад з теорії рядів Фур'є)

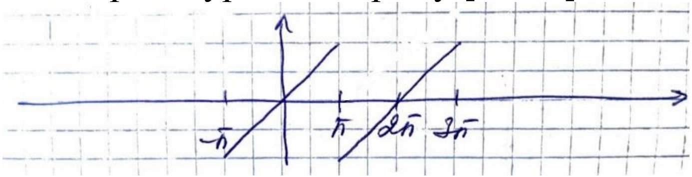
2. Розкладання в ряд Фур’є неперіодичної функції

Якщо на відрізку $[a; b]$ задана кусково-монотонна функція, продовжуємо її періодично та розкладаємо в ряд Фур’є.

Якщо на відрізку $[0; l]$ задана кусково-монотонна функція, доозначуємо її на відрізку $[-l; 0]$ парним або непарним чином та розкладаємо в ряд Фур’є.

Приклад 2(а). Розкласти функцію $f(x) = x$ на відрізку $[0; \pi]$ в ряд Фур’є по синусам *(тобто продовжити непарним чином)*.

Продовжуємо функцію непарним чином: $f(x) = x$, $f(x)$ – періодична функція, розкласти в ряд Фур’є на відрізку $[-\pi; \pi]$.



Функція є непарною, тобто $a_0 = 0, a_k = 0.$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x \\ dv = \sin kx \, dx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} du = dx \\ v = -\dfrac{\cos kx}{k} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x \cos kx}{k}\bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} \cos kx \, dx = -\frac{2}{\pi}\frac{\pi \cos k\pi}{k} + 0 + \underbrace{\frac{2}{\pi k^2}\sin kx\bigg|_0^{\pi}}_{=0} =$$

$$= -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Отже: $a_0 = 0,$

$$a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin kx}.$$

Записати самостійно чотири перші члени ряду (див. перший приклад з теорії рядів Фур’є)

Приклад 2(б). Розкласти функцію $f(x) = x$ на відрізку $[0;\pi]$ в ряд Фур'є по косинусам *(тобто продовжити парним чином)*.

Продовжуємо функцію парним чином: $f(x) = |x|$, $f(x)$ – періодична функція, розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Але це є завдання прикладу 1:

Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x|$ з періодом $2l$ на $[-l;l]$.

$$|x| = \frac{l}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos\frac{\pi k x}{l}$$

Для даного випадку маємо: $\boxed{|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos kx}$.

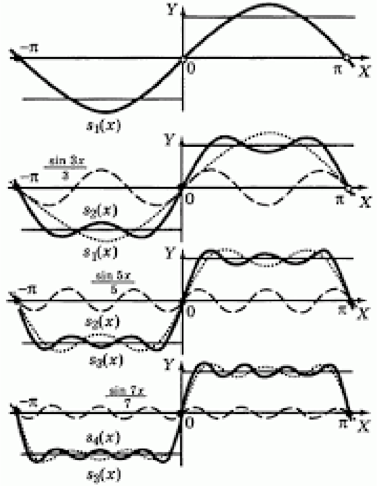
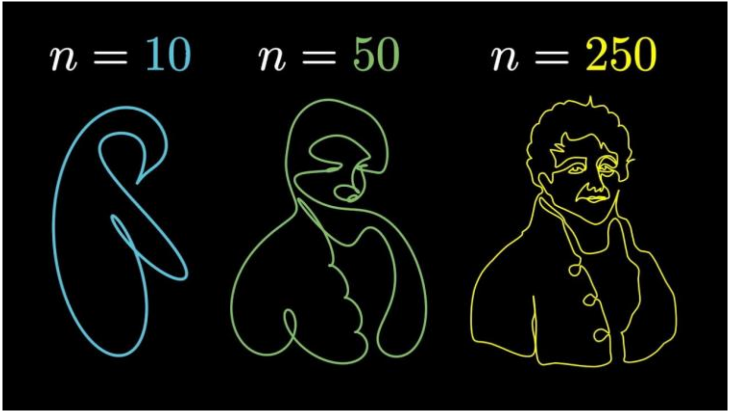
Записати самостійно чотири перші члени ряду (див. перший приклад з теорії рядів Фур'є)

3. Використання рядів Фур’є

Теорія розкладання функцій в ряд Фур’є називається гармонічним аналізом і використовується в величезній кількості областей науки та техніки:

- математична фізика;
- теорія пружності;
- електромеханіка;
- теорія коливань;
- теорія сигналів;
- теорія випадкових процесів та інше.

Візуалізація наближень:

Покрокове наближення	Креслення за допомогою кіл (джерело: YouTube-канал **3Blue1Brown**)
	

4. Нестандартні приклади застосування рядів Фур'є

Приклад 3. Обчислити приблизно число π.

Розкладемо в ряд Фур'є непарну функцію $f(x) = x(\pi - x)$ на $[-\pi; \pi]$:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Отже,

$$x(\pi - x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x\pi - x^2) \sin kx \, dx =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x\pi-x^2)\sin kx\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x\pi-x^2 \\ dv=\sin kx\,dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=(\pi-2x)dx \\ v=-\frac{1}{k}\cos kx \end{matrix}\right.\right\}=\underbrace{-\frac{2}{\pi k}(x\pi-x^2)\cos kx\Big|_0^{\pi}}_{=0}+$$

$$+\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos kx\,dx=\left\{\begin{matrix} u=\pi-2x \\ dv=\cos kx\,dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=-2dx \\ v=\frac{1}{k}\sin kx \end{matrix}\right.\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\left(\underbrace{\frac{1}{k}(\pi-2x)\sin kx\Big|_0^{\pi}}_{=0}+\frac{2}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx\right)=-\frac{4}{\pi k^3}\cos kx\Big|_0^{\pi}=$$

$$= -\frac{4}{\pi k^3}\cos kx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{4}{\pi k^3}(\cos k\pi - \cos 0) = -\frac{4}{\pi k^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{4}{\pi k^3}(1 - \cos k\pi) =$$

$$= \frac{4}{\pi k^3}\left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi k^3}, & k - \text{непарне}, \\ 0, & k - \text{парне}. \end{cases}$$

Отже,

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi k^3}, & k - \text{непарне}, \\ 0, & k - \text{парне}. \end{cases}$$

$$x(\pi-x)\sim\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx\,;\qquad b_k=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi k^3}, k-\text{непарне},\\ 0,\ \ k-\text{парне}.\end{cases}$$

$$x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^3};$$

Обчислимо при $x=\dfrac{\pi}{2}$: $x(\pi-x)=\dfrac{\pi}{2}\left(\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi^2}{4};$

$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)^3}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overbrace{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}^{(-1)^n}}{(2n+1)^3}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Отримали: $\dfrac{\pi^3}{32} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$\pi^3 = 32\left(1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \cdots\right) \approx 32\left(1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125}\right) =$$

$$= 32 - \underbrace{\frac{32}{27}}_{-1\frac{5}{27}} + \frac{32}{125} = 32 - 1 - \frac{5}{27} + \frac{32}{125} = 31 - \frac{5}{27} + \frac{32}{125} \approx$$

$$\approx 31 - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = 31 + \frac{5-4}{20} = 31 + \frac{1}{20}; \;\; \pi^3 \approx 31; \;\; \pi \approx \sqrt[3]{31}.$$

Зокрема, при обчисленні на калькуляторі $\pi^3 - 31 \approx 0{,}0063$.

Приклад 4. Обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Розкладемо (парну) функцію $f(x) = x^2$ в ряд Фур'є на $[-\pi; \pi]$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} - 0 = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2 \\ dv = \cos kx\,dx \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} du = 2xdx \\ v = \dfrac{\sin kx}{k} \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\cdot\underbrace{\frac{x^2 \sin kx}{k}\bigg|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} 2x\sin kx\,dx =$$

$$f(x) = x^2; \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}; \quad a_k = \cdots = -\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} 2x \sin kx \, dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = 2x \\ dv = \sin kx \, dx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = 2dx \\ v = -\dfrac{\cos kx}{k} \end{matrix} \right. \right\} = \frac{2}{\pi k} \cdot \frac{2x\cos kx}{k} \Bigg|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2 \cdot 2}{\pi k^2} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx = \frac{4\pi(-1)^k}{\pi k^2} - 0 - \underbrace{\frac{4}{\pi k^3} \cdot \sin kx \Big|_0^{\pi}}_{=0} = \frac{4}{k^2}(-1)^k;$$

$$b_k = 0.$$

$$f(x) = x^2; \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}; \quad a_k = \frac{4}{k^2}(-1)^k; \quad b_k = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$f(x) = x^2 = \frac{2\pi^2}{3 \cdot 2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^k}{k^2} \cos kx = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^k}{k^2} \cos kx \,;$$

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}(-1)^k = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2};$$

$$f(x) = x^2; \quad f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

При $f(\pi) = \pi^2$ маємо:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}; \qquad 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3\pi^2 - \pi^2}{3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Контрольні запитання

1. Записати ряд Фур'є для функції з періодом $2l$.
2. Сформулювати алгоритм розкладання в ряд Фур'є неперіодичної функції.

Контрольні завдання

1. Розкласти в ряд Фур'є періодичні з періодом $2l$ функції:

а) $f(x) = 1$ при $0 < x \leq l$ та $f(-x) = -f(x)$;

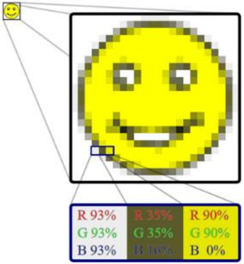
б) $f(x) = 1 - x$ при $0 \leq x \leq 1$ та $f(-x) = f(x)$.

2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну з періодом $2l$ функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-l; 0], \\ x, & x \in (0; l]. \end{cases}$$

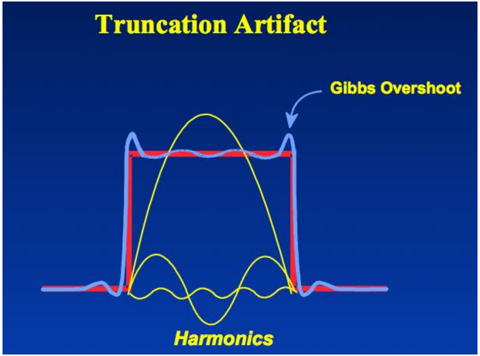
1. Обробка растрових зображень з використанням двовимірних апроксимацій типу Паде

Основним способом відображення графічних файлів на екрані комп'ютера є растрові зображення. Ці зображення створюються шляхом компіляції пікселів, кожен з яких містить унікальну інформацію про колір і тон, що сформує загальне зображення.



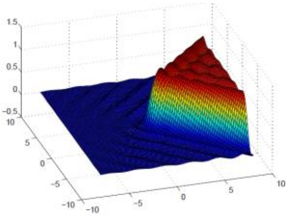
Файли растрових зображень складаються з прямокутного масиву значень параметрів пікселів, які зберігаються в стисненому форматі.

Поширеним підходом до зменшення розміру графічного файлу є розгортання сигналу растрового зображення у двовимірний ряд Фур'є.

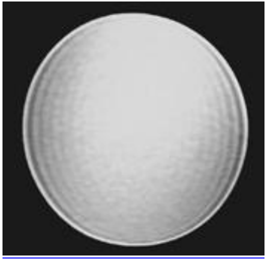
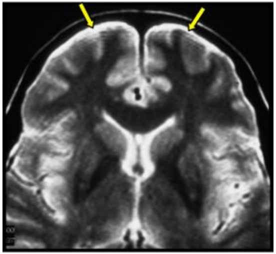


Це часто призводить до значних спотворень кінцевого зображення, зокрема через ефект Гіббса. Феномен Гіббса є виникає, коли ряд для розривної періодичної функції зрізається і використовується лише кінцева кількість членів – так званий відрізок ряду.

Це зрізання є причиною спотворення значень апроксиманти в околі точок розриву, причому ці спотворення неможливо усунути за рахунок збільшення кількості членів ряду.



Наявність явища Гіббса також стосується двовимірного випадку. У широко використовуваних графічних стандартах, які покладаються на скінчену суму гармонік, уздовж кордонів, де різко змінюється контраст, виникають спотворення, що призводить до хибної появи оптичних тіней.


У магнітно-резонансній томографії (МРТ) феномен Гіббса проявляється як тип артефакту. На МРТ-зображеннях можна спостерігати паралельні лінії, які пов’язані з різкими та інтенсивними змінами в об’єкті, що досліджується, наприклад, на знімках спинного мозку та черепно-мозкової рідини.

Метою застосування двовимірних апроксимант типу Паде за запропонованим нами методом апроксимацій є досягнення двох основних цілей: усунення явища Гіббса в обробці зображень і зменшення розміру файлів зображень, що отримуються.

Встановимо зв'язок між степеневими рядами та рядами Фур'є для побудови апроксимацій типу Паде.

Розглядається сепарабельний простір $L_2\left[\left(a_2,b_2\right)\times\left(a_2,b_2\right)\right]$ двовимірних комплексних функцій $f\left(x_1,x_2\right)$, інтегровних на цьому скінченному або нескінченному прямокутнику. Оберемо скінченний набір функцій

$$B_i=\{e_{ij},\, j=\overline{1,\infty}\},\, i=\overline{1,2}$$

по кожній з координат в якості базисних функцій.

У випадку тригонометричних функцій базисні функції можна виразити наступним чином:

$$e_{nk} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_n} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n}\right)^k = \left(e_{n1}\right)^k, \;\; n = 1, 2.$$

У даному контексті представлення довільної функції в розглянутому просторі на основі заданого базису можна розглядати як двовимірний узагальнений степеневий ряд у формі

$$f = \sum_{k,p=1}^{\infty} a_{kp}(e_{11})^k (e_{21})^p.$$

Означення. Припустимо, що є двовимірний степеневий ряд $S=\sum_{k,p=1}^{\infty}a_{kp}(x_1)^k(x_2)^p$ комплексних змінних x_1, x_2 та відповідна йому дробово-раціональна апроксиманта типу Паде $P\left[m_1,n_1/m_2,n_2\right]\left(x_1,x_2\right)$. Тоді функціонал типу Паде $GS=\sum_{k,p=1}^{\infty}a_{kp}(f_1)^k(f_2)^p$, пов'язаний з заданим узагальненим степеневим рядом $S=\sum_{k,p=1}^{\infty}a_{kp}(x_1)^k(x_2)^p$ для комплексних функцій цих змінних, визначається як

$$GP_{GS}\left[m_1,n_1/m_2,n_2\right]\left(f_1,f_2\right)=P\left[m_1,n_1/m_2,n_2\right]\left(x_1,x_2\right)\Big|_{x_1=f_1,\,x_2=f_2}.$$

Процес побудови апроксиманти Паде :

1. Обираються типи базисів для окремих змінних.
2. Функція f, яку потрібно наблизити, представляється у формі кратного ряду по базісним функціям.
3. Будується апроксиманта Паде $P[m_1, n_1 / m_2, n_2](x_1, x_2)$ в сенсі степеневого ряду двох комплексних змінних x_1, x_2, з використанням коефіцієнтів розкладання f.
4. Остаточно здійснюється підстановка базисних функцій у функціонал типу Паде.

Запропонований метод дозволяє визначити необхідний і повний набір коефіцієнтів для побудови апроксиманти типу Паде із заданою структурою чисельника та знаменника.

Техніка побудови апроксиманти типу Паде.

Припустимо, що $f\left(x_1,x_2\right)\approx\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}f_{mn}\cos(m\lambda_1 x_1)\cos(n\lambda_2 x_2)$ – функція яскравості монохромних точок образу зображення зі значеннями в діапазоні [0;1] на прямокутнику $\left(a_2,b_2\right)\times\left(a_2,b_2\right)$. Позначимо як $P\left(x_1,x_2\right)$ відповідну апроксиманту Паде $P\left[m_1,n_1\,/\,m_2,n_2\right]\left(x_1,x_2\right)$.

Для отримання косинусної частини двовимірної експоненти скористаємося рівністю

$$f\left(x_1,x_2\right)\approx\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[P\left(x_1,x_2\right)+P\left(x_1,-x_2\right)\right].$$

Коли зображення зберігається як **двовимірний масив точок**, наприклад, у файлі формату bmp, апроксимація Паде може бути реалізована за допомогою дискретного перетворення Фур'є (DFT).

DFT служить основою для алгоритмів стиснення як фото, так і відео зображень, включаючи широко використовувані стандарти jpeg і mpeg.

Для виконання апроксимації Паде вхідне зображення спочатку розкладається на спектральні компоненти за допомогою двовимірного дискретного косинусного перетворення (2D DCT). 2D DCT можна обчислити шляхом застосування одновимірного алгоритму DCT до кожного рядка або стовпця двовимірної матриці, що представляє вхідний сигнал. Це є можливим, оскільки DCT є сепарабельною функцією.

Пряме обчислення 2D DCT для матриці розмірністю $M \times N$ двовимірного сигналу $f(x, y)$ може бути представлено як

$$F(u,v) = \frac{2}{\sqrt{MN}} C(u) C(v) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(n,m) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)u}{2N} \right) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)v}{2M} \right),$$

де $C(x) = 2^{-0,5}$ для $x = 0$ та $C(x) = 1$ для $x \neq 0$.

Коефіцієнти ряду Фур'є по косинусам для $f(x_1, x_2)$ можуть бути отримані як значення $F(u,v)$, поділені на довжину кроку.

Далі для вибору діапазону значень частоти на цілочисельній сітці використовується метод Вавілова Кількість необхідних рівнянь випливає з розміру цього діапазону. Для досягнення цієї мети використовується запропонований Чізхолмом метод для узагальненої двовимірної апроксимації Паде, коли $N = M$ У випадку, коли функція $f(x, y)$ являє собою функцію двох змінних, вона може бути представлена двовимірним степеневим рядом вигляду $f(x, y) = \sum_{k,p=1}^{\infty} a_{kp} x^k y^p$, тоді подання N-ї апроксимації Чізхолма можна зробити наступним чином:

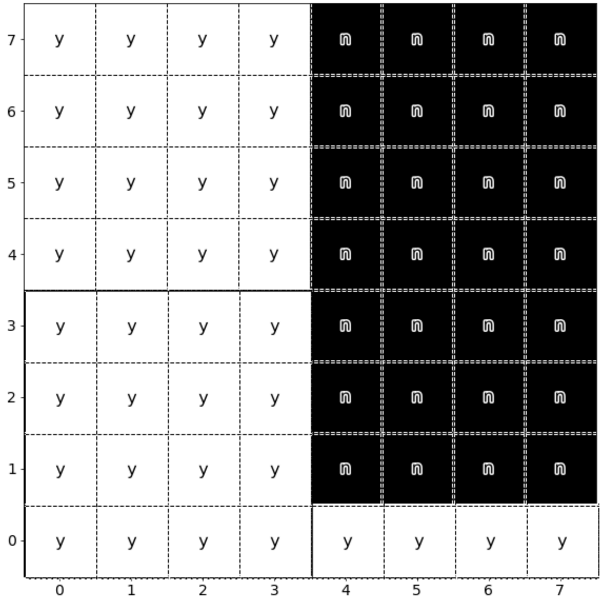
$$f_{N,N}(x, y) = \left(\sum_{k,p=1}^{N} p_{kp} x^k y^p \right) \left(\sum_{k,p=1}^{N} q_{kp} x^k y^p \right)^{-1}.$$

При використанні множини показників степенів, яка обмежена прямокутним трикутником, де катети відповідають осям, коефіцієнти p_{kp} та q_{kp} визначаються з використанням наступних рівнянь:

$$\sum_{\sigma=0}^{\gamma}\sum_{r=0}^{\delta} q_{\sigma r} a_{\gamma-\sigma,\delta-r} = p_{\gamma\delta} \left(\gamma, \delta = 0,1,\ldots,2N, 1 \le \delta+\gamma \le 2N\right),$$

$$\sum_{\sigma=0}^{\gamma}\sum_{r=0}^{\delta}\left(q_{\sigma r} a_{\gamma-\sigma,\delta-r} + q_{r\sigma} a_{\delta-r,\gamma-\sigma}\right) = 0, \gamma = \overline{1,2N}; \delta+\gamma = 2N; p_{00} = 1.$$

Розв’язком цієї системи рівнянь є матриця коефіцієнтів p та q.



Для отримання коефіцієнтів апроксиманти використовується метод Вавілова і застосовується лише перше рівняння для множини показників степенів, обмеженої двома прямокутниками, які показані на рис., та у припущенні, що $p_{\gamma\delta} = 0, (\gamma, \delta > N)$.

Рис. Цілочисельна сітка показників степенів для методу Вавілова при $N = 4$: для розрахунків використовуються білі точки з «*y*», а чорні з «*n*» – ні.

Процес стиснення двовимірних сигналів за допомогою двовимірного дискретного косинусного перетворення описаний в [6].

В якості прикладів обробки монохромних зображень розглянемо застосування апроксимації типу Паде до базових, розривних шаблонних функцій, заданих як у символьній формі, так і дискретно .

Наведемо приклад шаблонного представлення растрового зображення. У загальному випадку таке представлення передбачає наявність вже обчислених аналітично рядів Фур'є для функції яскравості.

Дослідимо шаблонну періодичну функцію з періодом 2π :

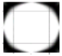
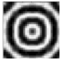
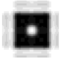
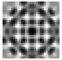
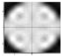
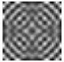
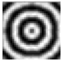
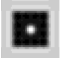
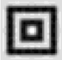
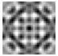
$$f\left(x_1, x_2\right) = \begin{cases} 1, x_1^2 + x_2^2 \le \pi, \\ 0, x_1^2 + x_2^2 > \pi. \end{cases}$$

Ця функція є симетричною відносно обох осей x_1 та x_2. Тому найдоцільнішим методом його апроксимації усічений ряд Фур’є у формі

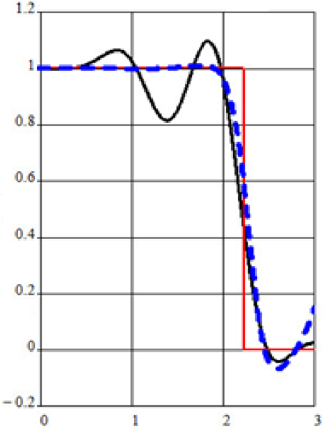
$$f\left(x_1, x_2\right) \approx \sum_{m=0}^{4} \sum_{n=0}^{4} f_{mn} \cos(mx_1) \cos(nx_2).$$

Використовуємо апроксимацію типу Паде зі структурою [2,2 / 2,2], взявши підмножину раніше отриманих коефіцієнтів Фур’є без будь-якої додаткової інформації. Щоб отримати косинусну складову двовимірної експоненти, застосовано зворотне перетворення до апроксиманти типу Паде. Початкове растрове зображення, запропоноване наближення та представлення зображення рядом Фур’є наведено в стовпці № 1 табл.

Початкові та відновлені монохромні зображення

№	1	2	3	4	5	6	7
Растрове зображення							
Апроксиманта типу Паде							
Ряд Фур’є зі стисненням							
Кількість гармонік при мінімальній похибці	8	7	6	4	4	5	8

На зображенні видно спотворення, які властиві феномену Гіббса в ряді Фур'є, але ці спотворення фактично відсутні в апроксиманті типу Паде. Зрозуміло, що апроксиманта типу Паде візуально більш прийнятна, ніж ряд Фур'є.



Щоб оцінити точність як методу рядів Фур'є, так і апроксимації типу Паде, порівняємо їхні відповідні одновимірні перерізи із шаблонною функцією (рис. 3.3.2). Це порівняння підкреслює перевагу використання апроксимації Паде.

Рис. Профілі апроксимант і шаблонної функції уздовж лінії перерізу: червоний – шаблон, чорний – ряд Фур'є, штриховий синій – апроксиманта типу Паде.

Розглянемо приклади **дискретного представлення растру**. У нашому дослідженні обрано шість монохромних симетричних растрових тестових зображень з цифрової бібліотеки, які перераховані в стовпцях № 2-7 табл. Для зменшення розміру файлу стандарту jpeg були виключені несуттєві коефіцієнти розкладання шляхом обробки результатів 2D DCP на вхідних зображеннях, враховуючи швидке спадання гармонійних амплітуд. Стандартизована середня квадратична похибка та нормована середня абсолютна похибка були використані в якості критеріїв порівняння. Розмір області на цілочисельній сітці коливався від 2 до 8, а кількість коефіцієнтів, що використовуються для реконструкції стиснутого зображення, поступово збільшувалася. Для стисненого зображення це число (і, отже, розмір файлу) становило приблизно половину початкового значення.

Розглянемо **приклад обробки кольорових зображень у форматі RGB**. У цій моделі використовується підхід додавання кольорів, коли основні кольори (червоний, зелений та синій) поєднуються з різною інтенсивністю для відтворення широкого діапазону кольорів у пікселі. Таким чином, замість однієї матриці яскравості точок монохромного зображення ми маємо три матриці, що відповідають кожному кольору, і запропонована техніка може бути використана для обробки кожної кольорової матриці окремо.

Формат jpeg, який найчастіше використовується для зберігання растрових файлів, ділить вихідне зображення на блоки 8х8 пікселів з наступною обробкою кожного блоку за допомогою DCT окремо.

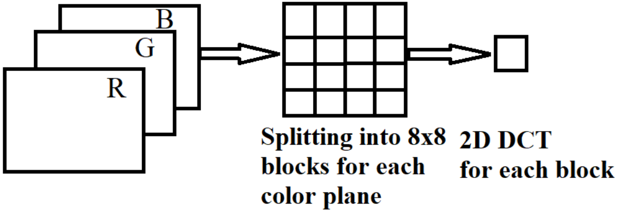
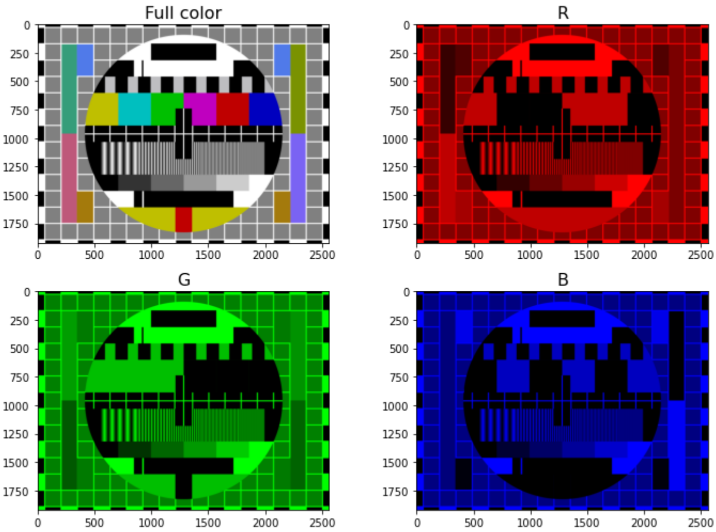
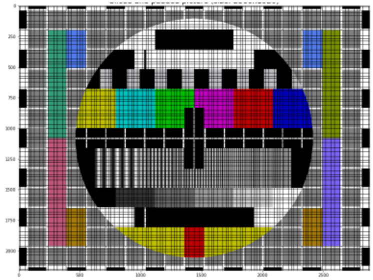


Рис. Частина алгоритму обробки двовимірних кольорових растрових зображень у форматі jpeg.

Запропонована техніка була використана для кольорового растрового зображення «Тестова карта Philips PM5544». Для кожного блоку 8x8 кожної кольорової матриці використовується 4-е наближення Чізхолма. При наближеному розрахунку параметрів апроксимації типу Паде можлива поява спряжених хибних полюсів і нулів. Це може призвести до збою масштабування зображення. Це явище усувається або відсіканням значень функції яскравості, або використанням усереднюючого фільтру.



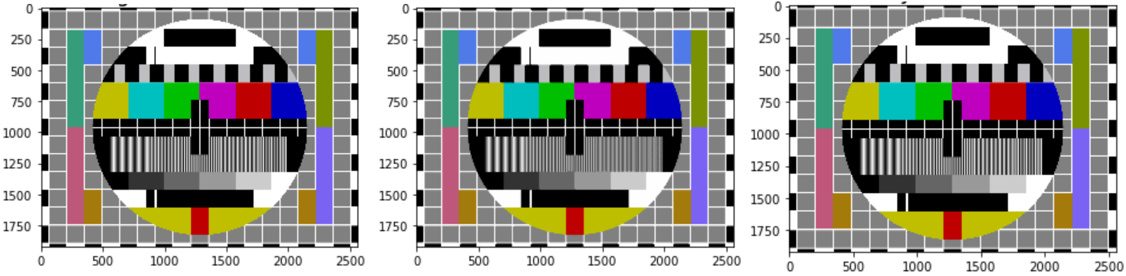
а



б

Рис. Етапи алгоритму обробки 2D кольорових растрових зображень: поділ за кольором (а), поділ на блоки 8x8 (б).

Запропонований підхід успішно наближає вихідне зображення з точки зору як чіткості, так і відтворення кольорів.



а б в

Рис. Порівняння результатів обробки: оригінальне зображення (а), результат запропонованої техніки (б), зображення у форматі jpeg (в).

В міру покращення візуальної схожості між зображенням та оригіналом відбувається суттєве зменшення середньоквадратичної похибки наближення зображень. Кожен тип зображення має свій власний чіткий поріг, при перевищенні якого реконструйоване зображення досягає візуальної схожості з оригіналом.

В**исновки**.

1. Апроксимація Паде демонструє нижчий рівень шуму порівняно з рядом Фур'є.
2. Використання апроксимації типу Паде значно зменшує кількість параметрів апроксимації без шкоди для точності (а іноді навіть покращує її). Зокрема, для ряду Фур'є з N гармоніками в обох напрямках потрібно N^2 параметрів. Однак використання апроксимації типу Паде зі ступенями чисельника та знаменника, що дорівнюють $N/2$, призводить до $N^2/2-1$ параметрів, що зменшує їх кількість більш ніж наполовину.

Апроксиманта типу Паде ефективно усуває спотворення, властиві феномену Гіббса. для монохромних, так і для кольорових зображень.

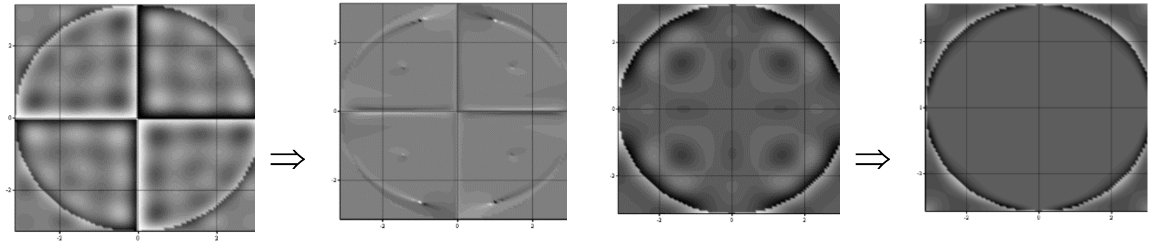


Рис. Розбіжності між шаблонними функціями та їх апроксимаціями для ряду Фур'є по косинусам (a), апроксимації Паде (b).

Крім того, використання апроксимації типу Паде зменшує кількість параметрів без шкоди для точності.

Контрольні запитання

1. Записати функціонал типу паде для двовимірної функції з періодом $2l$ по кожній координаті.

2. Сформулювати алгоритм отримання апроксиманти типу Паде для двовимірної функції.

Контрольні завдання

Записати функціонал типу Паде для функції:

а) $f(x, y) = 1$ при $0 < x, y \leq l$ та $f(-x, y) = -f(x, y), f(x, -y) = -f(x, y)$;

б) $f(x, y) = 1 - xy$ при $0 \leq x, y \leq 1$ та $f(-x, y) = f(x, y), f(x, -y) = f(x, y)$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навчальний посібник / Вища школа. Ігнатекс – Україна, 2011. – 648 с.
2. Анпілогов Д. І., Сніжко Н. В. Ряди: навч. посібник. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 124 с
3. Синявська О. О., Слюсарчук П. В. Ряди Фур'є. Навчальний посібник для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика. – Ужгород, 2015. – 70 с.
4. Авдєєва Т. В. Качаєнко О. Б. Ряди Фур'є. Практикум. – К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 88 с.
5. С. М. Ламтюгова. Ряди та їх застосування у схемах і таблицях : навч. довід. для самост. вивч. вищої математики (для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання) / С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова, Г. А. Кузнецова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 103 с.
6. Olevskyi V. I., Hnatushenko V. V., Korotenko G. M., Olevska Yu. B., Obydennyi Y. O. Application of two-dimensional Padé-type approximations for image processing. Radio Electronics, Computer Science, Control., 2023, № 1, P. 99–106.

Олевський Віктор Ісаакович
Олевська Юлія Борисівна

«Матеріали для самостійної роботи студентів з теорії рядів та їх застосування в обробці зображень»
для здобувачів ступеня бакалавра
всіх спеціальностей факультету інформаційних технологій

За редакцією авторів

Електронний ресурс

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.