Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

Факультет інформаційних технологій
(факультет)

Кафедра системного аналізу та управління
(повна назва)

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА
кваліфікаційної роботи ступеня бакалавра

Студента Піпи Катерини Ігорівни

академічної групи 124-20-2

спеціальності 124 Системний аналіз

на тему: «Планування ремонтів виробничої лінії підприємства Mercedes-Benz на основі Марківських процесів прийняття рішень»

Керівники	**Прізвище, ініціали**	**Оцінка за шкалою**		**Підпис**
		Рейтинговою	**Інституційною**	
кваліфікаційної роботи	*к.т.н., доц. Желдак Т.А.*			
розділів:				
Інформаційно-аналітичний	*к.т.н., доц. Желдак Т.А.*			
Спеціальний розділ	*к.т.н., доц. Желдак Т.А.*			
Рецензент	*д.т.н.,проф. Зеленцов Д.Г.*			
Нормоконтролер	*к.ф.-м.н., доц. Хом'як Т.В.*			

Дніпро
2024

ЗАТВЕРДЖЕНО:
завідувач кафедри
Системного аналізу та управління
(повна назва)

__________ *к.т.н., доц. Желдак Т.А.*
(підпис) (прізвище,ініціали)

«____» _____________20___року

ЗАВДАННЯ
на кваліфікаційну роботу
ступеня *бакалавра*

студенту *Піпі К. І.* **академічної групи** *124-20-2*
спеціальності: *124 Системний аналіз*
на тему *«Планування ремонтів виробничої лінії підприємства Mercedes-Benz на основі Марківських процесів прийняття рішень»*
затверджену наказом ректора НТУ «Дніпровська політехніка»
від *23.05.2024 р. №469-с*

Розділ	Зміст	Терміни виконання
1. Інформаційно-аналітичний розділ	*Проаналізувати структуру підприємства Mercedes-Benz. Визначити предметну область дослідження та проблему, що розв'язується. Обґрунтувати методи виконання поставлених завдань*	08.01.2024 – 08.03.2024
2. Спеціальний розділ	*Розв'язати поставлені задачі: розробити алгоритми та створити систему для оптимізації прийняття рішень щодо планування ремонтів на виробничій лінії, враховуючи максимізацію прибутку. Використати різні методи для вирішення Марківських процесів прийняття рішень.*	08.03.2024 – 15.06.2024

Завдання видано ____________________ *доц. Желдак Т. А.*
(підпис) (прізвище, ініціали)

Дата видачі: *08.01.2024 р.*

Дата подання до екзаменаційної комісії: *03.07.2024 р.*

Прийнято до виконання ____________ Піпа К. І.
(підпис студента) (прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 66 ст., 2 ч., 29 рис., 14 табл., 4 додатки, 14 джерел.

Об'єктом дослідження є процес оптимізації планування ремонтів виробничої лінії на підприємстві Mercedes-Benz.

Предметом дослідження є методи для оптимізації планування ремонтів виробничої лінії.

Метою кваліфікаційної роботи є підвищення ефективності роботи виробничої лінії за рахунок розробки алгоритмів для прийняття оптимального рішення в необхідності ремонту.

Методами дослідження є методи пошуку оптимальної стратегії, а саме: метод повного перебору, метод ітерацій по стратегіям без дисконтування та з дисконтуванням та метод лінійного програмування.

Інформаційно-аналітичний розділ складається з відомостей про підприємство, важливих для розуміння його устрою, та теоретичної інформації про Марківські процеси прийняття рішень.

Спеціальний розділ складається з розрахунків методів для знаходження оптимальної стратегії планування ремонтів з урахуванням прибутків за збитків від виконання ремонту та максимізації прибутку.

Значення роботи для науки і практики полягає в тому, що застосовані методи допомагають підприємству прийняти вірне рішення на рахунок необхідності виконання ремонтів виробничої лінії, для того, щоб підвищити її ефективність, мінімізувати простої та отримувати максимальний прибуток.

Прогнозним припущенням про розробку об'єкта дослідження є те, що кожного року точно треба буде робити ремонт виробничої лінії, коли вона знаходиться в поганому стані.

Кваліфікаційна робота має такі *ключові слова*: ВИРОБНИЧА ЛІНІЯ, MERCEDES-BENZ, FACTORY 56, РЕМОНТ, ОПТИМАЛЬНА СТРАТЕГІЯ, ЛАНЦЮГ МАРКОВА, СТАН СИСТЕМИ, ПЕРЕХІДНА ЙМОВІРНІСТЬ, ФУНКЦІЯ ДОХОДУ, МАКСИМАЛЬНИЙ ДОХІД, ДИСКОНТУВАННЯ.

ABSTRACT

Explanatory note: 66 pages, 2 parts, 29 illustrations, 14 tables, 4 appendices, 14 sources.

The object of the research is the process of optimizing the planning of repairs of the production line at the Mercedes-Benz enterprise.

The subject of the research is methods for optimizing the planning of production line repairs.

The purpose of the qualification work is to increase the efficiency of the production line due to the development of algorithms for making the optimal decision when repairs are needed.

The methods of the research are methods of finding the optimal strategy, namely: the method of complete search, the method of iterations on strategies without discounting and with discounting and the method of linear programming.

The informational and analytical section consists of information about the enterprise, important for understanding its structure, and theoretical information about Markov decision-making processes.

A special section consists of calculations of methods for finding the optimal repair planning strategy, taking into account profits for losses from repairs and profit maximization.

The significance of the work for science and practice lies in the fact that the applied methods help the enterprise to make the right decision regarding the need to repair the production line, in order to increase its efficiency, minimize downtime and obtain maximum profit.

A predictive assumption about the development of the research object is that it will definitely be necessary to repair the production line when it is in a bad condition.

The qualification work has the following *keywords*: PRODUCTION LINE, MERCEDES-BENZ, FACTORY 56, REPAIR, OPTIMAL STRATEGY, MARKOV CHAIN, SYSTEM STATE, TRANSITION PROBABILITY, REVENUE FUNCTION, MAXIMUM REVENUE, DISCOUNTING.

ЗМІСТ

ВСТУП

В кваліфікаційній роботі буде проводитися дослідження на тему, пов’язану з галуззю машинобудування – однією з найважливіших галузей важкої промисловості. Машинобудування відіграє ключову роль для розвитку економіки будь-якої країни, забезпечуючи засобами виробництва різні галузі економіки, внаслідок чого зростає капітал підприємства, також створює продукти, які роблять життя людей легше, та сприяє створенню нових робочих місць.

Автомобілебудування є частиною машинобудівної промисловості, яке виробляє такі транспортні засоби, як: легкові та вантажні автомобілі, автобуси, мотоцикли та інші, що допомагає забезпечити рух людей та зекономити час на пересування. Для виробництва автомобілів важливо, щоб підприємство було забезпечене інноваційними технологіями та ефективно функціонуючими виробничими лініями.

Звісно, що автомобільна промисловість має відповідати підвищеним вимогам ефективності, якості продукції та мінімізації витрат. У зв’язку з цим, машинобудівні підприємства, такі як Mercedes-Benz, потребують інноваційних підходів до планування та проведення ремонтів виробничих ліній.

Ще одним важливим фактором є те, що ефективне планування проведення ремонтів виробничих ліній сприяє зниженню простоїв, які мають сильний вплив на показник продуктивності роботи підприємства і на прибуток в подальшому.

Шляхом критичного аналізу сучасних методів можна зробити висновок, що виконання планово – попереджувальних ремонтів не є достатньо ефективним для забезпечення безперебійної роботи виробництва. Відмінністю цього методу від Марківських процесів прийняття рішень є те, що він часто не враховує реального стану обладнання. В той час, як впровадження Марківських процесів прийняття рішень для планування ремонтів використовує ймовірнісні моделі для прогнозування стану виробничої лінії та визначення оптимальних моментів для проведення технічного обслуговування. Завдяки цьому працівники підприємства матимуть змогу більш точно планувати ремонти, знижувати ризики незапланованих простоїв та мінімізувати витрати на ремонти та запчастини.

Метою дослідження є підвищення ефективності роботи виробничої лінії на автомобілебудівному підприємстві Mercedes-Benz за допомогою розробки та впровадження алгоритмів на основі Марківських процесів прийняття рішень.

Об'єктом дослідження є процес оптимізації планування ремонтів виробничої лінії на підприємстві Mercedes-Benz.

Предметом дослідження є алгоритми, спрямовані на оптимізацію планування ремонтів, які забезпечуватимуть своєчасне технічне обслуговування та мінімізацію незапланованих простоїв.

В кваліфікаційний роботі для розв'язання поставлених задач було використано такі методи, як: метод повного перебору, метод ітерацій по стратегіям з дисконтуванням та без дисконтування, метод лінійного програмування. В сукупності ці методи дослідження забезпечують комплексний підхід до оптимізації планування ремонтів виробничої лінії, дозволяючи врахувати різні фактори та обмеження.

Практична цінність отриманих результатів полягає в застосуванні передових методів для вирішення актуальних проблем у виробничих процесах, які допоможуть підприємству, зокрема Mercedes-Benz, приймати обґрунтовані рішення щодо необхідності проведення ремонтів виробничої лінії. Також, ця робота має значний вплив на наукову спільноту, оскільки демонструє застосування теоретичних моделей Марківських процесів у практичних умовах виробництва. Це слугує прикладом того, що передові математичні методи можуть бути успішно інтегровані у виробничі процеси для вирішення складних завдань управління технічним обслуговуванням.

Перелік умовних скорочень

MDP – Markov decision process

ДП – динамічне програмування

ЛП – лінійне програмування

ВЛ – виробнича лінія

1 ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНИЙ РОЗДІЛ

1.1 Основні відомості про підприємство Mercedes-Benz

Mercedes-Benz – німецький бренд автомобілів класу люкс і комерційних автомобілів, заснований у 1926 році, та назва ряду компаній – автовиробників, що належать автобудівному концерну Daimler AG. Штаб-квартира Mercedes-Benz AG (дочірня компанія Mercedes-Benz Group, заснована в 2019 році) розташована в Штутгарті, Баден-Вюртемберг, Німеччина (рис. 1.1). Виробник легкових автомобілів преміального класу, вантажних автомобілів, автобусів та інших транспортних засобів, що входять до складу німецького концерну Mercedes-Benz Group. У 2018 році Mercedes-Benz став найбільшим брендом автомобілів преміум-класу в світі, продавши 2,31 мільйона легкових автомобілів. Слоган бренду: «Найкраще або нічого».[1]

Рис. 1.1. Штаб-квартира Mercedes-Benz в Штутгарті, Баден-Вюртемберг, Німеччина

1.1.1 Структура підприємства

Головні потужності компанії з виробництва легкових автомобілів розташовані у трьох німецьких містах – Зіндельфінгені, Бремені та Раштатті. В Аффальтербасі базується дочірній підрозділ Mercedes-AMG GmbH, який спеціалізується на збиранні самостійних моделей під маркою Mercedes-AMG, виробляє двигуни та є брендом спортивних та продуктивних автомобілів Mercedes-Benz. На ньому збирають машини класу E, S, CLS, S-купе, GLC та GT.[2] Завод з виробництва вантажних автомобілів Mercedes-Benz Trucks, розташований у Верті, 2023 році відзначив 60-річний ювілей. За весь час роботи на ньому було зібрано близько 4, 4 млн. вантажівок. Це найбільший у світі завод зі збирання вантажних автомобілів. На ньому виробляються такі моделі, як Actros, Arocs та Atego, а також машини підрозділу Mercedes-Benz Special Trucks – Econic, Unimog і Zetros.[3]

Розташування Mercedes-Benz в Зіндельфінгені (рис 1.2) з більш ніж сторічною історією є заводом Mercedes-Benz Group AG з найбільшими традиціями та центром компетенції з виробництва (електричних) транспортних засобів вищого та люксового класів у глобальній виробничій мережі.

Mercedes-Benz E-Class, Mercedes-Benz S-Class, EQS, Mercedes-Maybach S-Class, Mercedes-Benz GLC, Mercedes-Benz CLS і Mercedes-AMG GT 4-doors виробляються в Зіндельфінгені.

Розташування в Зіндельфінгені поєднує всі прямі та непрямі сфери, пов’язані з виробництвом автомобілів, а також зони планування та централізованого управління закупівлями та постачальниками.

Рис. 1.2. Завод Mercedes-Benz в Зіндельфінгені

Групові дослідження, а також розробки та дизайн Mercedes-Benz Group AG також базуються в Зіндельфінгені.

У 2020 році в Зіндельфінгені було побудовано Factory 56 (рис. 1.3) – один із найсучасніших складальних цехів у світі. На цьому заводі послідовно та комплексно у виробництво автомобілів впроваджуються інноваційні технології та процеси. Factory 56 вважається схемою майбутнього виробництва автомобілів Mercedes-Benz Cars у всьому світі.

Рис. 1.3. Factory 56

Зіндельфінген є одним із провідних у світі центрів компетенції з безпеки, інновацій та дизайну. У 2016 році в місті відкрився технологічний центр безпеки транспортних засобів (TFS) (рис. 1.4), який вважається найсучаснішим центром краш-тестів у світі. TFS з його численними засобами тестування пропонує абсолютно нові можливості, наприклад, у тестуванні транспортних засобів, у проектуванні систем допомоги та PRE-SAFE, а також у перевірці концепцій транспортних засобів з альтернативними приводами. Загалом на підприємстві працює близько 35 тисяч осіб.[4]

Рис. 1.4. Технологічний центр безпеки транспортних засобів

1.1.2 Організація виробництва підприємства

Спочатку на підприємстві здійснюється стратегічне планування, яке охоплює розробку портфеля продуктів на понад три роки. Потім у рамках планування виробничої мережі вирішується, де буде вироблятися продукція, балансуючи між рентабельністю та люксовою якістю. Далі визначаються постачальники деталей. Результати стратегічного планування стають передумовами для тактичного планування виробництва та логістики, яке зосереджене на обсягах. Потім виконується оперативне планування, яке охоплює кілька місяців і заповнює кількісну структуру стратегічного планування реальними індивідуальними замовленнями. Оперативне планування можна оптимізувати за допомогою алгоритмів, визначаючи порядок обробки замовлень на заводах, дні та зміни. Основна увага приділяється оптимізації тактичного планування.[5]

Ключовим фактором в організації виробництва підприємства є централізований контроль логістики для управління ланцюгом поставок: від постачальника до кінцевого споживача всі частини ланцюга поставок повинні гладко взаємодіяти. Через глобальні виробничі мережі Mercedes-Benz наближається до відповідних ринків і клієнтів і може швидше реагувати на зміни попиту, адаптуючи виробництво на окремих заводах. У той же час, виробництво в іншій валютній зоні компенсує коливання обмінних курсів.

Шляхом стандартизації та модульування заводів Mercedes-Benz хоче обмежити інвестиційні потреби та зменшити постійні витрати для підвищення продуктивності.[6]

Також, компанії Mercedes-Benz і Siemens, за підтримки федеративної землі Берлін, планують співпрацювати над впровадженням цифровізації й автоматизації в автомобільній промисловості. Mercedes-Benz AG прагне перевести виробничі процеси на цифрові технології, а Siemens, як провідний постачальник у галузі автоматизації та промислового програмного забезпечення, поділиться своїм досвідом і технологіями для розвитку високоадаптивного, ефективного й сталого виробництва автомобілів. Завдяки чому завод Mercedes-Benz у берлінському районі Маріенфельде стане центром компетенції в області цифрового виробництва, зосередженим на розвитку та реалізації цифрової екосистеми автомобілів Mercedes-Benz MO360 і на перепрофілюванні виробничих операцій.

Рішення компанії Siemens у сфері автоматизації та програмного забезпечення закладають основи цифрової трансформації автомобілебудування, поєднуючи фізичний і віртуальний світи, а також операційні та інформаційні технології. Це відкриває нові можливості для збору, опрацювання та використання даних, згенерованих у процесі інженерно – технічних робіт і виробництва. Використання додатків для Інтернету речей робить виробничі процеси більш адаптивнимии та енергоефективними.[7]

1.1.3 Фінансові результати діяльності підприємства

Під час вимірювання оперативної фінансової ефективності наступні ключові цифри представляють важливі показники фінансової ефективності для Mercedes-Benz Group:

– Об'єм продаж;

– EBIT (операційний прибуток);

– Вільний грошовий потік промислового бізнесу.

У 2022 році Mercedes-Benz Cars продала 2 040 700 одиниць автомобілів, а у 2021 році обсяг продажів становив 1 943 900 одиниць. Тобто, продажі були трохи вищими, ніж у попередньому році (табл. 1.1).[8, с.52]

Таблиця 1.1

Продаж автомобілів Mercedes-Benz

	2022	2021	Зміна у %
В одиницях	-	-	-
Продаж автомобілів Mercedes-Benz всього	**2.040.700**	1.943.900	**+5**
Категорія Top-End	**328.200**	304.600	+8
Категорія Core	**1.116.600**	1.029.000	+9
Категорія Entry	**595.900**	610.300	-2

У 2022 році Mercedes-Benz Group AG більше зосереджувалася на автомобілях високого класу та фургонах преміум-класу. У поєднанні з стабільною дисципліною витрат продажі зросли на 12% до 150,0 мільярдів євро, а у 202 році до 133,9 мільярдів євро (табл. 1.2). EBIT групи збільшився на 28% до 20,5 мільярдів євро, в той час як в минулому році до 16,0 мільярдів євро. Збільшення продажів відбулося, зокрема, завдяки значному покращенню контролю за цінами в сегментах автомобілів Mercedes-Benz Cars і Mercedes-Benz Vans.[8, с. 57-58]

Таблиця 1.2

Продажі по сегментах і регіонах

	2022	2021	Зміна у %
В мільйонах євро			
Mercedes-Benz Group	**150.017**	133.893	12
Сегменти			
Mercedes-Benz Cars	**111.601**	96.712	15
Mercedes-Benz Vans	**17.217**	14.735	17
Mercedes-Benz Mobility	**26.954**	27.941	-4
Регіони			
Европа	**56.487**	51.044	11
Німеччина	**23.085**	20.733	11
Північна Америка	**40.091**	33.105	21
США	**35.829**	29.284	22
Азія	**45.558**	40.126	14
Інші ринки	**7.881**	9.618	-18

1.2 Вплив простоїв на підприємство

Простій на підприємстві – це призупинення роботи, викликане відсутністю організаційних або технічних умов, які потрібні для виконання роботи. Під час простою страждають не тільки співробітники, а ще і ті, чиї процеси залежать від несправної деталі. Через це вирішення проблеми стає пріоритетом, що змушує відкласти інші важливі задачі. Побічні ефекти простою можуть призвести до втрати часу в інших частинах бізнесу та зниження потенційного доходу.

Існують різні типи простоїв, кожен із яких пов'язан із різними витратами і недоліками. Планові простої відбуваються під час планового технічного обслуговування і є частиною виробничого процесу. Незаплановані простої відбуваються через вихід з ладу деталей, заклинювання машин або раптове вимкнення.

Незаплановані простої можуть статися, коли машини не обслуговуються належним чином або коли одна частина виробничого процесу ігнорується протягом тривалого періоду. Недостатня підготовка персоналу та неясні робочі процедури також можуть призвести до простою виробничих ліній. Ще одна причина незапланованих простоїв – це зовнішні обставини, що знаходяться поза контролем підприємства, наприклад, через перебої в подачі електроенергії або проблеми з ІТ.

Хоча планові простої можна врахувати, то незаплановані простої можуть призвести як до прямих, так і до непрямих витрат для бізнесу. Забезпечення технічного обслуговування всіх ділянок виробничої лінії, а також планування та мінімізація будь-яких простоїв – найкращий спосіб скоротити непотрібні витрати та забезпечити, щоб продукція продовжувала сходити з виробничої лінії.[9]

1.3 Марківські процеси прийняття рішень

Процеси прийняття рішень за Марковим (MDP) є основним підходом для планування і теорії прийняття рішень. У моделі MDP середовище представлено як набір станів і дій, які можна виконувати для зміни стану системи. Метою є керування системою для максимізації певного критерію ефективності. Багато таких задач, як: стохастичне планування, керування навчальними роботами і проблеми гри, були успішно змодельовані за допомогою MDP, які насправді стали стандартом для вивчення послідовного прийняття рішень.[10]

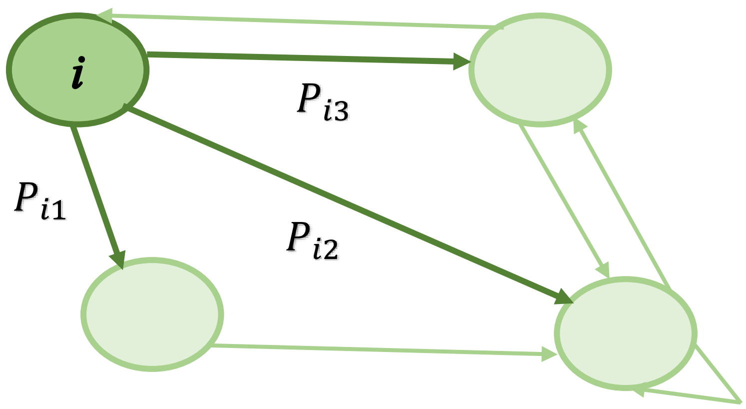
1.3.1 Алгоритм побудови ланцюга Маркова

Для марківського ланцюга властиве те, що моменти, коли система S може переходити в якийсь стан, розглядаються як послідовні кроки процесу або етапи розвитку, а сам процес в системі S розглядається як функція від цілого числа k, тобто номеру кроку, і складається з послідовності станів $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k$. S_0 є початковим станом, S_1 – стан системи після першого кроку, а S_k – стан після k-го кроку. Ця послідовність станів є ланцюгом випадкових подій, адже для кожного кроку ймовірність зміни стану S_i на будь-який S_j не залежить від того, яким чином і в який момент часу система прийшла в стан S_i. Ланцюг Маркова описується за допомогою ймовірностей станів, тобто ймовірності того, що після k-го кроку система S перебуватиме в стані $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

Введемо поняття вектору ймовірності $P_i(k)$. Це є абсолютним розподілом, що показує ймовірності знаходження системи в стані S_i на k-му кроці. Оскільки усі стани формують разом повну групу подій і система на кожному кроці може перебувати лише в одному стані, то очевидно, що для кожного кроку k сума елементів вектору ймовірності рівна одиниці. Має місце така формула:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(k) = 1 \tag{1.1}$$

Кожен перехід із стану S_i в стан S_j характеризується перехідною ймовірністю P_{ij} . Ланцюг Маркова зручно розглядати, проілюструвавши його за допомогою графу переходів, в якому стани (вершини) сполучаються між собою можливими переходами (зв'язками), кожен з яких характеризується ймовірністю даного переходу.[10] На рисунку 1.5 можна побачити фрагмент графу, де переходи зі стану S_i є повною групою випадкових несумісних подій, а отже в сумі дають одиницю.



$$\boxed{P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} = 1}$$

Рис. 1.5. Фрагмент графу переходів

1.3.2 Алгоритм розробки Марківської задачі прийняття рішень

Для формування задачі потрібно мати декілька значень станів системи. Після цього зіставляється матриця, яка складається з ймовірностей переходу одного стану системи в інший, – це і буде ланцюг Маркова для задачі. Потім складається ще одна матриця ймовірностей, яка враховуватиме зміни, внесені до системи. Для того, щоб роздивитись задачу в перспективі, складаються ще дві матриці доходів або збитків, які пов'язані з матрицями ймовірностей.

1.3.3 Алгоритм вирішення моделі ДП з кінцевим числом етапів

Нехай $f_n(i)$ – це оптимальний очікуваний дохід, отриманий на етапах від n до N включно, при умові, що система знаходиться на початку етапу n в стан i. На основі цього складемо зворотнє рекурентне рівняння (1.2), яке позв'язує f_n та f_{n+1}:

$$f_n(i) = max(k)\left\{\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \left[r_{ij}^k + f_{n+1}(j)\right]\right\}, n = \ 1, 2, \ldots, N, \qquad (1.2)$$

де $f_{N+1}(j) \equiv 0$ для всіх j.

Наведене рівняння засноване на тому, що накопичуваний дохі $r_{ij}^k + f_{n+1}(j)$ виходить в результаті переходу із стану i на етапі n в стан j на етапі $n + 1$ з вірогідністю p_{ij}^k, тому введемо таке позначення:

$$v_i^k = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \, r_{ij}^k \qquad (1.3)$$

Рекурентне рівняння ДП можна записати наступним чином:

$$f_N(i) = max(k)\{v_i^k\}, \qquad (1.4)$$

$$f_n(i) = max(k)\left\{v_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \, f_{n+1}(j)\right\}, n = 1, 2, \ldots, N - 1 \qquad (1.5)$$

1.3.4 Метод повного перебору

В задачі прийняття рішень є S стаціонарних стратегій. Також є матриці перехідних ймовірностей та доходів, які відповідають застосованій стратегії – $P^s, R^s, s = 1, 2, \ldots, S$. Далі покроково опишемо метод перебору.

Крок 1. Обчислюємо значення v_i^s – це очікуваний дохід, отримуваний за один етап при стратегії S для заданого стану i $(i = 1, 2,\ \ldots,\ m)$.

Крок 2. Обчислюємо значення π_i^s – це довгострокові стаціонарні ймовірності матриці перехідних ймовірностей P^s, які відповідають стратегії s. Якщо ці ймовірності існують, то вони знаходяться з наступних рівнянь:

$$\pi^s P^s = \pi^s, \tag{1.6}$$

$$\pi_1^s + \pi_2^s + \ldots + \pi_m^s = 1, \tag{1.7}$$

де $\pi^s = (\pi_1^s,\ \pi_2^s,\ \ldots,\ \pi_m^s)$.

Крок 3. Обчислюємо очікуваний дохід за один етап при обраній стратегії s по формулі E^s.

$$E^s = \sum_{i=1}^{m} \pi_i^s v_i^s \tag{1.8}$$

Крок 4. Оптимальна стратегія s^* визначається з умови, що:

$$E^{s^*} = max(s)\{E^s\} \tag{1.9}$$

1.3.5 Метод ітерацій по стратегіям без дисконтування

Як було показано в розділі 1.3.4., для будь-якої конкретної стратегії очікуваний сумарний дохід за n-й етап визначається рекурентним рівнянням (1.10).

$$f_n(i) = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\, f_{n+1}(j), i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.10}$$

Це рівняння служить основою методу ітерацій по стратегіям, але, для можливості вивчення асимптотичної поведінки процесу, вид рівняння треба трохи змінити. Замість величини n, яка відповідає n – му етапу, позначимо η – це число решти етапів для аналізу. Отримаємо наступне рекурентне рівняння.

$$f_\eta(i) = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\, f_{\eta-1}(j), i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.11}$$

де $f_\eta(i)$ – це сумарний очікуваний дохід при умові, що залишилися не розглянутими η етапів. При такому визначенні η можна вивчити асимптотичну поведінку процесу, вважаючи при цьому, що $\eta \to \infty$.

Позначимо через $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ вектор ймовірностей станів з матрицею перехідних ймовірностей $P = \|p_{ij}\|$ і нехай $E = \pi_1 v_1 + \pi_2 v_2 + \dots + \pi_m v_m$ – це очікуваний дохід за етап, розрахований по схемі розділу 2.3.1., тоді можна показати, що при достатньо великому η працює формула (1.12).

$$f_\eta(i) = \eta E + f(i), \tag{1.12}$$

де $f(i)$ – це постійна величина, яка описує асимптотичну поведінку функції $f_\eta(i)$ при заданому стані i.

Так як $f_\eta(i)$ представляє сумарний оптимальний дохід за η етапів при заданому стані i, а E – це очікуваний дохід за один етап, то стає зрозумілим, чому величина $f_\eta(i)$ дорівнює сумі ηE та поправного числа $f(i)$. При цьому передбачається, що число η досить велике.

Отже, запишемо фінальний вигляд рекурентного рівняння:

$$E + f(i) - \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f(j) = v_i, \; i = 1, 2, \dots, m \tag{1.13}$$

Таким чином, матимемо m рівнянь з $m + 1$ невідомими $f(1), f(2), \dots, f(m)$ та E.

Кінцевою метою цього методу є визначення оптимальної стратегії, яка приведе до максимального значення E. Так як є m рівнянь з $m + 1$ невідомими, то оптимальне рішення E не можна визначити за один крок. В зв’язку з цим використовується ітеративна процедура, яка починається з довільної стратегії, а потім визначається нова стратегія, яка дає найкраще значення E. Ітеративний процес закінчується, якщо дві послідовно отримані стратегії збігаються.

Отже, ітеративний процес складається з двох основних кроків. Першим кроком є оцінка параметрів. Для цього треба обрати довільну стратегію s та вирішити рівняння (1.13), використовуючи відповідні до неї матриці P^s і R^s та довільно вважаючи $f^s(m) = 0$.

Другий крок – це покращення стратегії, в ході якого треба визначити альтернативу k для кожного стану i та обрати серед отриманих альтернатив найкращу за формулою (1.14).

$$\max(k)\left\{v_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f^s(j)\right\},\ i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.14}$$

Результуючі оптимальні рішення для станів $1, 2, \ldots, m$ формують нову стратегію t. Якщо s та t ідентичні, то алгоритм закінчується, в цьому випадку t – оптимальна стратегія. Інакше гадаємо, що $s = t$ та повертаємося до кроку оцінки параметрів. Метою цього кроку є отримання максимального значення E. Так як $f(i)$ не залежить від альтернатив k, то задача максимізації на кроці покращення стратегії еквівалентна максимізації E по альтернативам k.

1.3.6 Метод ітерацій по стратегіям з дисконтуванням

Вище описаний метод ітерацій по стратегіям можна узагальнити на випадок дисконтування. Позначимо через $\alpha (< 1)$ коефіцієнт дисконтування, тобто переоцінки. Рекурентне рівняння при кінцевому числі етапів набуде трохи іншого вигляду.

$$f_\eta(i) = max(k)\left\{v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k\, f_{\eta-1}(j)\right\} \tag{1.15}$$

Так, як η – це число етапів, які потрібно розглянути, то можна показати, що при $\eta \to \infty$, що означає модель з нескінченний числом етапів, $f_\eta(i) = f(i)$. $f(i)$ – це наведений до поточного часу дисконтований дохід за умови, що система знаходиться в стані i та функціонує на нескінченному інтервалі часу. Тоді довгострокова поведінка $f_\eta(i)$ при $\eta \to \infty$ не буде залежати від значення η. Саме в цьому є відмінність від випадку без дисконтування ($f_\eta(i) = \eta E + f(i)$). У випадку з дисконтуванням вплив майбутніх доходів асимптотично зменшується до нуля. Отже, наведений дохід $f(i)$ має прагнути до постійної величини при $\eta \to \infty$.

Опишемо по кроках хід виконання методу ітерацій по стратегіям з дисконтуванням. В ході кроку оцінки параметрів треба вирішити систему з m

рівнянь (1.16) для довільної стратегії s з матрицями P^s та R^s відносно m невідомих $f^s(1), f^s(2), f^s(m)$.

$$f^s(i) - \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^s f^s(j) = v_i^s,\ i = 1, 2, \dots, m \tag{1.16}$$

Для виконання кроку покращення стратегії потрібно визначити альтернативу k для кожного стану i за формулою (1.17).

$$max(k)\{v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f^s(j)\},\ i = 1, 2, \dots, m, \tag{1.17}$$

де $f^s(j)$ мають значення, які були визначені на кроці оцінки параметрів.

Якщо отримана стратегія t співпадає зі стратегією s, тоді алгоритм закінчено та стратегія t вважатиметься оптимальною. Інакше гадаємо, що $s = t$ і повторюємо крок оцінки параметрів.

1.3.7 Метод лінійного програмування

Марківську задачу прийняття рішень при нескінченній кількості етапів як з дисконтуванням, так і без нього, можна сформулювати і вирішити як задачу лінійного програмування.

У випадку без дисконтування Марківська задача при нескінченній кількості етапів зводиться до пошуку оптимальної стратегії s^* за допомогою формули (1.18).

$$max(s \in S)\{\sum_{j=1}^{m} \pi_i^s v_i^s | \pi^s P^s = \pi^s, \pi_1^s + \pi_2^s + \dots + \pi_m^s = 1, \pi_i^s \geq 0, i = 1,2,\dots,m\}, \tag{1.18}$$

де S – це множина всіх можливих стратегій. Величини π_i^s та $i = 1,2,\dots,m$ представляють встановлені ймовірності ланцюга Маркова P^s. Наведена формула є основою для формулювання марківської задачі прийняття рішень у виді задачі лінійного програмування. Однак, треба перетворити змінні задачі таким чином, щоб оптимальне рішення автоматично визначало оптимальну дію, а саме альтернативу k, коли система перебуває в стані i. Сукупність всіх оптимальних дій визначатиме оптимальну стратегію s^*.

Для автоматизації вводиться позначення q_i^k, яке є умовною ймовірністю вибору альтернативи k, коли система перебуває в стані i. Тоді цільова функція задачі представляється у вигляді формули (1.19), а обмеження складаються з системи формул (1.20).

$$E = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \left(\sum_{k=1}^{K} q_i^k v_i^k \right) \rightarrow max \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \, p_{ij}, \; j = 1,2,\ldots,m \\ \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m = 1 \\ q_i^1 + q_i^2 + \ldots + q_i^K = 1, \; i = 1,2,\ldots,m \\ \pi_i \geq 0, \; q_i^k \geq 0 \text{ для всіх } i \text{ та } k \end{cases} \tag{1.20}$$

Важливо, що ймовірності p_{ij} є функціями обраної стратегії та конкретних альтернатив k цієї стратегії.

Наведене вище формулювання еквівалентне вихідному формулюванню задачі з підункту 1.3.5. тільки при умові, що $q_i^k = 1$ для одного k при кожному i, бо тільки при цьому сума $\sum_{k=1}^{K} q_i^k v_i^k$ буде зведена до $v_i^{k^*}$, де k^* – це обрана оптимальна альтернатива. Лінійна задача буде враховувати цю умову автоматично.

Вводиться нове позначення $w_{ik} = \pi_i q_i^k$ для всіх i та k, яке представляє собою сумісну ймовірність перебування в стані i та прийняття рішення k. Для формулювання задачі ЛП використано формулу з теорії ймовірностей (1.21), яку виражають через q_i^k (1.22).

$$\pi_i = \sum_{k=1}^{K} w_{ik} \tag{1.21}$$

$$q_i^k = \frac{w_{ik}}{\sum_{k=1}^{K} w_{ik}} \tag{1.22}$$

Далі записуються обмеження $\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$ у вигляді формули (1.23).

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} w_{ik} = 1, \tag{1.23}$$

де K – це кількість можливих альтернатив.

Так як обмеження $\sum_{k=1}^{K} q_i^k = 1$ також автоматично витікає зі способу визначення q_i^k через w_{ik}, то задача ЛП записується у вигляді формул (1.24) та (1.25).

$$E = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} v_i^k w_{ik} \rightarrow max \tag{1.24}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} w_{jk} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} p_{ij}^{k} w_{ik} = 0, \ j = 1,2,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} w_{ik} = 1 \\ w_{ik} \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,m; \ k = 1,2,\ldots,K \end{cases} \quad (1.25)$$

Покажемо, що оптимальне рішення задачі автоматично гарантує, що $q_i^k = 1$ для одного k при будь-якому i. Важливо відмітити, що в задачі лінійного програмування є m незалежних рівнянь, з яких одне, відповідне до $\pi = \pi P$, буде надмірним. Тому задача повинна містити m базисних змінних. Але можна показати, що w_{ik} повинно бути строго позитивним щонайменше при одному k для кожного i. Завдяки цим ствердженням величина q_i^k може приймати лише два значення 0 або 1, що і треба було довести.

У випадку з дисконтуванням задача описується рекурентним рівнянням (1.26), яке є еквівалентним до рівняння (1.27).

$$f(i) = max(k)\left\{v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f(j)\right\}, i = 1,2,\ldots,m \quad (1.26)$$

$$f(i) \geq \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f(j) + v_i^k \text{ для всіх } i \text{ та } k, \quad (1.27)$$

за умови, що при будь-якому i функція $f(i)$ досягає мінімального значення. Для формулювання задачі лінійного програмування використовується цільова функція, яка мінімізується (1.28).

$$\sum_{i=1}^{m} b_i f(i) \rightarrow min, \quad (1.28)$$

де $b_i > 0$ при всіх i та є довільними константами. Отже, можна показати, що оптимізація цієї функції при обмеженнях вище наведених нерівностей дає мінімальне значення $f(i)$. Цільова функція матиме систему обмежень (1.29).

$$\begin{cases} f(i) - \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f(j) \geq v_i^k, \text{ за будь} - \text{яких } i \text{ та } k \\ f(i) \text{ не обмежені по знаку}, \ i = 1,2,\ldots,m \end{cases} \quad (1.29)$$

Також вище наведену задачу можна записати іншим чином, вводячи величину w_{ik}, за допомогою цільової функції, яка максимізується (1.30), та системи обмежень (1.31).[11]

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} v_i^k w_{ik} \rightarrow max \quad (1.30)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} w_{jk} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} p_{ij}^k w_{ik} = b_j, \ j = 1,2,\ldots,m \\ w_{ik} \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,m; \ k = 1,2,\ldots,K \end{cases} \quad (1.31)$$

1.4 Висновки до розділу

В першому розділі було наведено основні відомості про підприємство Mercedes-Benz, організацію його виробництва та фінансові результати діяльності. Ця інформація необхідна для кращого розуміння того, як влаштоване одне з провідних підприємств світу.

Підводячи підсумок, ключовими пріоритетами для Mercedes-Benz, зазначеними в першому розділі, є створення якісної продукції, впровадження інновацій і технологій та ефективність виробництва. Висока якість автомобілів та комплектуючих є критично важливою для підтримання репутації бренду, також від якості залежить надійність і безпека, забезпечення комфорту від водіння. Впровадження технологій потрібне для постійного розвитку та створення електромобілів, автономних систем водіння та підключених автомобілів. Також інновації є важливим фактором для збереження лідерства на ринку. Ефективність виробництва підвищується за допомогою оптимізації виробничих процесів та зниження витрат.

З метою дотримання пріоритету ефективності виробництва в першому розділі була детально описана Марківська задача прийняття рішень та методи її вирішення, так як ці процеси можуть значно покращити планування ремонтів на виробничій лінії підприємства Mercedes-Benz завдяки їх здатності моделювати й оптимізувати рішення в умовах невизначеності. Якщо говорити конкретніше, то MDP дозволяє оптимізувати розділ ресурсів для ремонтів, забезпечуючи ефективне використання матеріалів, обладнання та робочої сили, що зменшує простої на виробничій лінії та підвищує продуктивність. Також, MDP може прогнозувати ймовірність виникнення збоїв та визначати оптимальні моменти для проведення профілактичних ремонтів, що знижує ризик незапланованих зупинок.

У другому розділі буде зіставлено та вирішено задачу MDP на основі даних про Mercedes-Benz за допомогою методів, описаних в першому розділі, в умовах, коли модель з кінцевим та нескінченним числом етапів.

2 СПЕЦІАЛЬНИЙ РОЗДІЛ

2.1 Формування Марківської задачі прийняття рішень

Сформулюємо задачу MDP для одного з заводів Mercedes-Benz – Factory 56. Нехай кожен рік персонал заводу проводить аналіз стану виробничої лінії. В залежності від результатів аналізу продуктивність виробничої лінії на новий рік оцінюється, як: погана, задовільна чи гарна.

Внаслідок багаторічних спостережень персонал підприємства зауважив, що продуктивність у поточному році залежить лише від стану виробничої лінії у попередньому році. Тому ймовірності переходу виробничої лінії з одного стану продуктивності в інший для кожного року можна уявити, як ймовірності переходу в ланцюгу Маркова.

Визначимо наступні стани виробничої лінії:

$S_0 -$ ВЛ перебуває в поганому стані

$S_1 -$ ВЛ перебуває в задовільному стані

$S_2 -$ ВЛ перебуває в гарному стані

Також для вирішення задачі треба визначити ймовірності переходів станів із одного в інший для ВЛ на Factory 56. Для цього треба навести важливі факти про те, як влаштовано цей завод і яких вимог він дотримується.

Factory 56 – це складальний завод, в який було інвестовано 864,3 мільйона доларів, він встановлює нові стандарти гнучкості, ефективності, сталого розвитку та цифрового виробництва. Для цього на заводі використовуються сучасні цифрові технології, які замінюють стаціонарні виробничі лінії, але вони на даний момент не можуть повністю замінити традиційні складальні лінії.[12] Враховуючі ці тонкощі, було зіставлено граф переходів станів ВЛ (рис. 2.1).

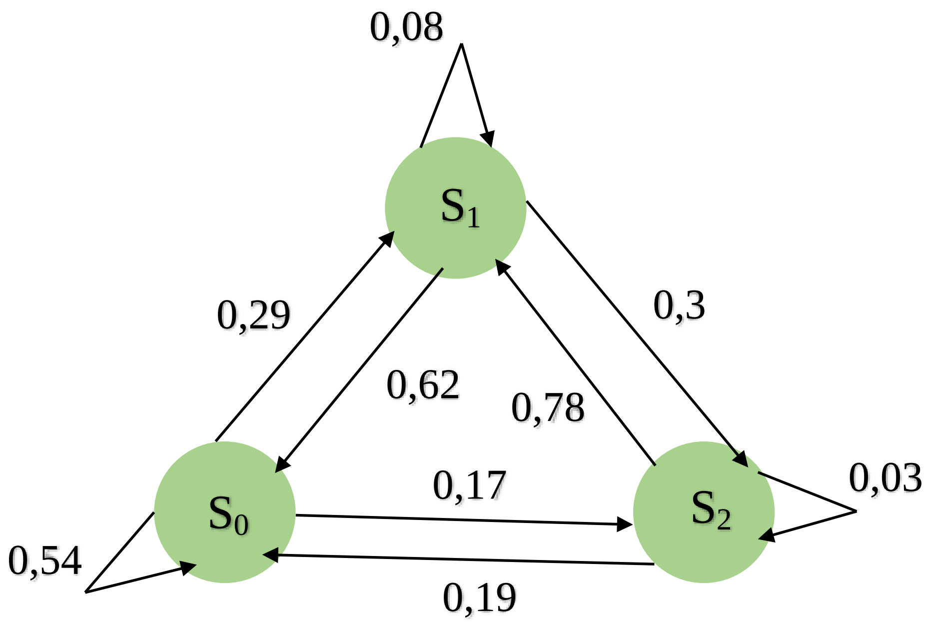


Рис. 2.1. Граф переходів станів виробничої лінії

Далі на основі графу зіставимо ланцюг Маркова:

Стан системи в наступному році

$$\text{Стан системи в поточному році} \quad P^1 = \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_0 & S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}29 & 0{,}17 \\ 0{,}62 & 0{,}08 & 0{,}3 \\ 0{,}19 & 0{,}78 & 0{,}03 \end{pmatrix} \end{array}$$

Перехідні вірогідності в матриці P^1 показують, що продуктивність виробничої лінії в поточному році не краща, аніж в минулому. Наприклад, якщо до уваги брати стан S_1, то в наступному році він може залишитись задовільним з вірогідністю 0,08 чи стати поганим (S_0) з вірогідністю 0,62. Чи якщо розглянути гарний стан (S_2), то в наступному році він залишиться таким самим з маленькою вірогідністю – 0,03. Отже, ці вірогідності вказують на те, що треба зробити ремонт ВЛ для покращення її продуктивності.

Після ремонту виробничої лінії перехідні ймовірності матриці P^1 значно зміняться, що призведе до нового графу (рис. 2.2) та матриці перехідних ймовірностей P^2.

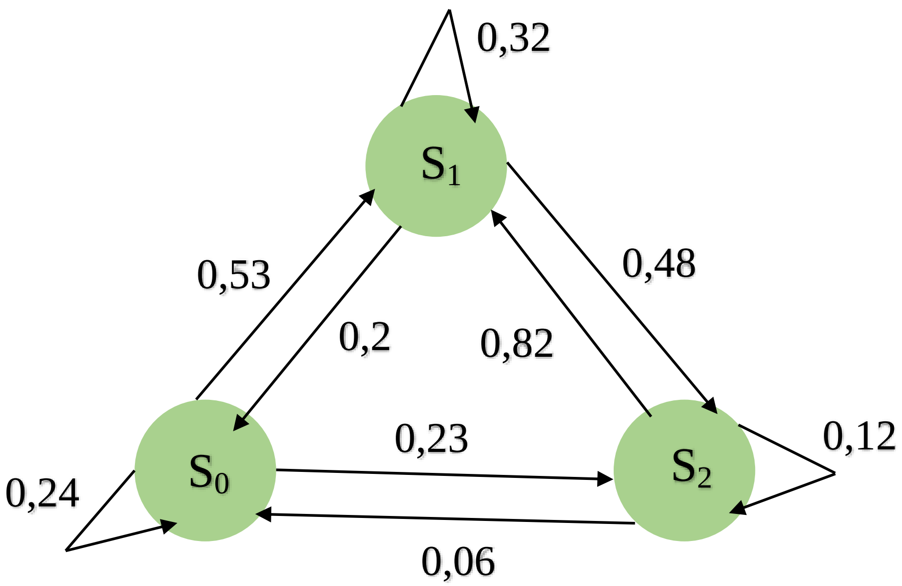


Рис. 2.2. Граф переходів станів виробничої лінії після ремонту

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_0 & S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}53 & 0{,}23 \\ 0{,}2 & 0{,}32 & 0{,}48 \\ 0{,}06 & 0{,}82 & 0{,}12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Таким чином, задача має дві альтернативи для прийняття рішення: не робити ремонт, чи робити ремонт ВЛ.

Щоб розглянути задачу прийняття рішень у перспективі, працівники заводу пов'язують з переходом із одного стану виробничої лінії в інший функцію доходу, яка визначає прибуток або збиток за однорічний період залежно від станів, між якими здійснюється перехід.

Так як працівники підприємства можуть ухвалити рішення робити ремонт чи не робити, їх прибуток або збиток буде змінюватися в залежності від ухваленого рішення. Матриці – R^1 і R^2 визначатимуть функції доходу (в мільярдах євро) і відповідатимуть матрицям перехідних ймовірностей P^1 та P^2.

Побудуємо матриці доходу на основі даних про прибуток заводу Factory 56, який виробляє понад 300 000 автомобілів на рік, що становить близько 15 % загального обсягу виробництва автомобілів Daimler.[12] У 2023 році Mercedes-Benz Group AG мала дохід у розмірі 153,2 мільярда євро [13], з яких завод Factory 56 приніс 15%, тобто приблизно 22,98 мільярда євро. Надалі будемо будувати матриці доходу на основі цього числа.

Під час побудови першої матриці доходу враховуємо той факт, що вірогідність простоїв на заводі буде вищою через відсутність ремонту, тому слід врахувати який збиток вони нестимуть для підприємства. Mercedes-Benz і Siemens, за підтримки федеративної землі Берлін, спільно працюють над впровадженням діджиталізації й автоматизації в автомобільній промисловості.[7] Згідно зі звітом Siemens (опублікованому в 2023 році), вартість простоїв значно зросла за останні два роки (2021-2022 роки), при цьому незаплановані простої зараз обходяться компаніям зі списку Fortune Global 500 в 11% їх річного обороту.[14] Отже, незапланований простій коштуватиме Mercedes-Benz Group AG 16,85 мільярди євро, а для Factory 56 коштуватиме приблизно 2,53 мільярди євро.

На основі вищесказаного побудуємо першу матрицю доходу:

$$R^1 = \left\| r_{ij}^1 \right\| = \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_0 & S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2{,}53 & 5{,}54 & 6{,}37 \\ 10{,}04 & 17{,}2 & 6{,}78 \\ 9{,}8 & 18{,}16 & 20{,}45 \end{pmatrix} \end{array}$$

У будь-якому сучасному виробництві чи виробничому середовищі постійне переміщення готової продукції вниз по лінії є життєво важливим. Таким чином, уникнення незапланованих простоїв стає вирішальним для забезпечення того, щоб процес виробництва товарів був якомога плавнішим, скорочуючи як матеріальні, так і нематеріальні витрати, пов’язані з незапланованим простоєм. Для запобігання таких простоїв треба робити технічний ремонт. З урахуванням затрат на ремонт та прибутку, який він принесе, отримуємо другу матрицю доходу:

$$R^2 = \|r_{ij}^2\| = \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_0 & S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2{,}62 & 8{,}09 & 16{,}05 \\ 8{,}05 & 14{,}94 & 19{,}34 \\ -1{,}33 & 16{,}21 & 17{,}78 \end{pmatrix} \end{array}$$

Елементи матриці r_{ij}^2 R^2 враховують затрати, пов'язані з виконанням ремонту на виробничій лінії. Наприклад, якщо система знаходиться в стані S_2 і залишається в цьому стані і в наступному році, то дохід буде дорівнювати $r_{S_2S_2}^2 = 17{,}78$, якщо без ремонту, то $r_{S_2S_2}^1 = 20{,}45$.

Також, працівникам заводу може бути цікаво зробити оцінку очікуваного доходу по завчасно визначеній стратегії поведінки при тому чи іншому стані системи. Наприклад, якщо буде прийняте рішення робити ремонт, коли стан виробничої лінії поганий (стан S_0). В такому випадку процес прийняття рішень описується стаціонарною стратегією.

Кожній стаціонарній стратегії відповідають свої матриці перехідних ймовірностей і доходів, які можна побудувати на основі матриць P^1, P^2 та R^1, R^2. До прикладу, для стаціонарної стратегії, яка потребує ремонту тільки тоді, коли стан виробничої лінії поганий (стан S_0), результуючі матриці перехідних ймовірностей і доходів задаються наступним чином:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}53 & 0{,}23 \\ 0{,}62 & 0{,}08 & 0{,}3 \\ 0{,}19 & 0{,}78 & 0{,}03 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -2{,}62 & 8{,}09 & 16{,}05 \\ 10{,}04 & 17{,}2 & 6{,}78 \\ 9{,}8 & 18{,}16 & 20{,}45 \end{pmatrix}$$

Ці матриці відрізняються від P^1 та R^1 тільки першим рядком з матриць P^2 та R^2. Така заміна рядків відбувається через те, що P^2 та R^2 – матриці, які відповідають за ситуацію, коли ремонт робиться при будь-якому стані виробничої лінії.

2.2 Вирішення моделі ДП з кінцевим числом етапів

Задачу керівництва компанії Mercedes-Benz можна представити як задачу динамічного програмування (ДП) з кінцевим числом етапів. Отже, нехай число станів для кожного етапу (року) дорівнює m. В даному випадку, $m = 3$.

Припустимо, що через N років керівництво Mercedes-Benz планує припинити роботу заводу Factory 56. У цьому випадку необхідно визначити стратегію поведінки, а саме: вирішити робити ремонт виробничої лінії чи не робити для кожного року планування. Очевидно, що оптимальною стратегією буде така, при якій компанія Mercedes-Benz отримає найбільший очікуваний дохід через 3 роки.

Нехай $k = 1$ чи $k = 2$ позначає дві можливі (альтернативні) стратегії поведінки керівництва заводу. Матриці P^k та R^k, які представляють перехідні вірогідності і функцію доходу для альтернативи k, були визначені в підпункті 2.1. Наведемо їх нижче:

$$P^1 = \left\|p_{ij}^1\right\| = \begin{pmatrix} 0,54 & 0,29 & 0,17 \\ 0,62 & 0,08 & 0,3 \\ 0,19 & 0,78 & 0,03 \end{pmatrix}, R^1 = \left\|r_{ij}^1\right\| = \begin{pmatrix} -2,53 & 5,54 & 6,37 \\ 10,04 & 17,2 & 6,78 \\ 9,8 & 18,16 & 20,45 \end{pmatrix},$$

$$P^2 = \left\|p_{ij}^2\right\| = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,53 & 0,23 \\ 0,2 & 0,32 & 0,48 \\ 0,06 & 0,82 & 0,12 \end{pmatrix}, R^2 = \left\|r_{ij}^2\right\| = \begin{pmatrix} -2,62 & 8,09 & 16,05 \\ 8,05 & 14,94 & 19,34 \\ -1,33 & 16,21 & 17,78 \end{pmatrix}$$

Порахуємо величини v_i^k для ситуації, коли ремонт виробничої лінії не зроблено ($k = 1$).

$$v_1^1 = 0,54 \times (-2,53) + 0,29 \times 5,54 + 0,17 \times 6,37 = 1,32$$

$$v_2^1 = 0,62 \times 10,04 + 0,08 \times 17,2 + 0,3 \times 6,78 = 9,63$$

$$v_3^1 = 0,19 \times 9,8 + 0,78 \times 18,16 + 0,03 \times 20,45 = 16,63$$

Ці значення показують, що якщо стан виробничої лінії на початку року виявляється поганим (стан S_0), то при одному переході очікуваний річний дохід складає 1,32. Аналогічно, якщо стан ВЛ задовільний, то очікуваний річний дохід складатиме 9,63, а у випадку гарного стану дорівнюватиме 16,63.

Також порахуємо величини v_i^k для ситуації, коли ремонт виробничої лінії зроблено ($k = 2$).

$$v_1^2 = 0,24 \times (-2,62) + 0,53 \times 8,09 + 0,23 \times 16,05 = 7,35$$

$$v_2^2 = 0{,}2 \times 8{,}05 + 0{,}32 \times 14{,}94 + 0{,}48 \times 19{,}34 = 15{,}67$$

$$v_3^2 = 0{,}06 \times (-1{,}33) + 0{,}82 \times 16{,}21 + 0{,}12 \times 17{,}78 = 15{,}34$$

Ці значення показують, що якщо стан виробничої лінії на початку року виявляється поганим (стан S_0), то при одному переході очікуваний річний дохід складає 7,35. Аналогічно, якщо стан ВЛ задовільний, то очікуваний річний дохід складатиме 15,67, а у випадку гарного стану дорівнюватиме 15,34.

У цьому прикладі задача вирішується за даних, заданих матрицями $P^1, P^2,\ R^1$ та R^2. Передбачається, що обрій планування включає 3 роки (N = 3).

Для зручності зведемо значення v_i^k в таблицю. Також нагадаємо, що $k = 1$ відповідає рішенню «не робити ремонт», $k = 2$ – «робити ремонт»

Таблиця 2.1

Значення очікуваного річного доходу

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{v_i^1}$	$\boldsymbol{v_i^2}$
1	1,32	7,35
2	9,63	15,67
3	16,63	15,34

Етап 3

Знайдемо оптимальні рішення для третього року роботи підприємства шляхом визначення максимального прибутку для кожного стану серед двох альтернатив (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Знаходження оптимального рішення для $\boldsymbol{m = 3}$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{v_i^k}$		$\boldsymbol{f_3(i)}$	**Оптимальне рішення**
	$\boldsymbol{k = 1}$	$\boldsymbol{k = 2}$		$\boldsymbol{k^*}$
1	1,32	7,35	7,35	2
2	9,63	15,67	15,67	2
3	16,63	15,34	16,63	1

Етап 2

Знайдемо оптимальні рішення для другого року роботи підприємства.

$$v_i^k + p_{i1}^k f_3(1) + p_{i2}^k f_3(2) + p_{i3}^k f_3(3)$$

Для $k = 1$:

$$f_2(1) = 1{,}32 + 0{,}54 \times 7{,}35 + 0{,}29 \times 15{,}67 + 0{,}17 \times 16{,}63 = 12{,}66$$

$$f_2(2) = 9{,}63 + 0{,}62 \times 7{,}35 + 0{,}08 \times 15{,}67 + 0{,}3 \times 16{,}63 = 20{,}43$$

$$f_2(3) = 16{,}63 + 0{,}19 \times 7{,}35 + 0{,}78 \times 15{,}67 + 0{,}03 \times 16{,}63 = 30{,}75$$

Для $k = 2$:

$$f_2(1) = 7{,}35 + 0{,}24 \times 7{,}35 + 0{,}53 \times 15{,}67 + 0{,}23 \times 16{,}63 = 21{,}23$$

$$f_2(2) = 15{,}67 + 0{,}2 \times 7{,}35 + 0{,}32 \times 15{,}67 + 0{,}48 \times 16{,}63 = 30{,}13$$

$$f_2(3) = 15{,}34 + 0{,}06 \times 7{,}35 + 0{,}82 \times 15{,}67 + 0{,}12 \times 16{,}63 = 30{,}63$$

Таблиця 2.3

Знаходження оптимального рішення для $m = 2$

i			$f_2(i)$	Оптимальне рішення
	$k = 1$	$k = 2$		k^*
1	12,66	21,23	21,23	2
2	20,43	30,13	30,13	2
3	30,75	30,63	30,75	1

Етап 1

Знайдемо оптимальні рішення для першого року роботи підприємства.

$$v_i^k + p_{i1}^k f_2(1) + p_{i2}^k f_2(2) + p_{i3}^k f_2(3)$$

Для $k = 1$:

$$f_1(1) = 1{,}32 + 0{,}54 \times 21{,}23 + 0{,}29 \times 30{,}13 + 0{,}17 \times 30{,}75 = 26{,}75$$

$$f_1(2) = 9{,}63 + 0{,}62 \times 21{,}23 + 0{,}08 \times 30{,}13 + 0{,}3 \times 30{,}75 = 34{,}42$$

$$f_1(3) = 16{,}63 + 0{,}19 \times 21{,}23 + 0{,}78 \times 30{,}13 + 0{,}03 \times 30{,}75 = 45{,}08$$

Для $k = 2$:

$$f_1(1) = 7{,}35 + 0{,}24 \times 21{,}23 + 0{,}53 \times 30{,}13 + 0{,}23 \times 30{,}75 = 35{,}48$$

$$f_1(2) = 15{,}67 + 0{,}2 \times 21{,}23 + 0{,}32 \times 30{,}13 + 0{,}48 \times 30{,}75 = 44{,}32$$

$$f_1(3) = 15{,}34 + 0{,}06 \times 21{,}23 + 0{,}82 \times 30{,}13 + 0{,}12 \times 30{,}75 = 45{,}01$$

Таблиця 2.4

Знаходження оптимального рішення для $m = 1$

i			$f_1(i)$	Оптимальне рішення
	$k = 1$	$k = 2$		k^*
1	26,75	35,48	35,48	2
2	34,42	44,32	44,32	2
3	45,08	45,01	45,08	1

Отже, оптимальним рішенням є те, що впродовж цих трьох років працівникам заводу потрібно робити ремонт виробничої лінії кожного року, коли вона знаходиться в поганому чи задовільному станах, а коли ВЛ знаходиться в гарному стані, то в ремонті немає необхідності.

Також, сумарний очікуваний дохід за три роки складатиме 35,48 млрд. євро при поганому стані виробничої лінії у перший рік, 44,32 млрд. євро при задовільному стані ВЛ у перший рік та 45,08 млрд. євро при гарному стані ВЛ.

2.3 Вирішення моделі методом повного перебору

Вирішимо задачу про планування ремонту виробничої лінії на заводі Factory 56 за допомогою методу повного перебору при нескінченному горизонті планування. У цій задачі є вісім стаціонарних стратегій. Наведемо їх в наступній таблиці.

Таблиця 2.5

Співвідношення стратегій та дій

Стаціонарна стратегія s	Дії
1	Не робити ремонт взагалі
2	Робити ремонт незалежно від стану ВЛ
3	Робити ремонт, якщо ВЛ знаходиться в поганому стані (S_0)
4	Робити ремонт, якщо ВЛ знаходиться в задовільному стані (S_1)
5	Робити ремонт, якщо ВЛ знаходиться в гарному стані (S_2)
6	Робити ремонт, якщо ВЛ знаходиться в стані S_0 або S_1
7	Робити ремонт, якщо ВЛ знаходиться в стані S_0 або S_2

8	Робити ремонт, якщо ВЛ знаходиться в стані S_1 або S_2

Матриці P^s та R^s для стратегій від 3 до 8 отримуємо з аналогічних матриць для стратегій 1 та 2. Таким чином, маємо наступні матриці.

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}29 & 0{,}17 \\ 0{,}62 & 0{,}08 & 0{,}3 \\ 0{,}19 & 0{,}78 & 0{,}03 \end{pmatrix}, R^1 = \begin{pmatrix} -2{,}53 & 5{,}54 & 6{,}37 \\ 10{,}04 & 17{,}2 & 6{,}78 \\ 9{,}8 & 18{,}16 & 20{,}45 \end{pmatrix},$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}53 & 0{,}23 \\ 0{,}2 & 0{,}32 & 0{,}48 \\ 0{,}06 & 0{,}82 & 0{,}12 \end{pmatrix}, R^2 = \begin{pmatrix} -2{,}62 & 8{,}09 & 16{,}05 \\ 8{,}05 & 14{,}94 & 19{,}34 \\ -1{,}33 & 16{,}21 & 17{,}78 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}53 & 0{,}23 \\ 0{,}62 & 0{,}08 & 0{,}3 \\ 0{,}19 & 0{,}78 & 0{,}03 \end{pmatrix}, R^3 = \begin{pmatrix} -2{,}62 & 8{,}09 & 16{,}05 \\ 10{,}04 & 17{,}2 & 6{,}78 \\ 9{,}8 & 18{,}16 & 20{,}45 \end{pmatrix},$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}29 & 0{,}17 \\ 0{,}2 & 0{,}32 & 0{,}48 \\ 0{,}19 & 0{,}78 & 0{,}03 \end{pmatrix}, R^4 = \begin{pmatrix} -2{,}53 & 5{,}54 & 6{,}37 \\ 8{,}05 & 14{,}94 & 19{,}34 \\ 9{,}8 & 18{,}16 & 20{,}45 \end{pmatrix},$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}29 & 0{,}17 \\ 0{,}62 & 0{,}08 & 0{,}3 \\ 0{,}06 & 0{,}82 & 0{,}12 \end{pmatrix}, R^5 = \begin{pmatrix} -2{,}53 & 5{,}54 & 6{,}37 \\ 10{,}04 & 17{,}2 & 6{,}78 \\ -1{,}33 & 16{,}21 & 17{,}78 \end{pmatrix},$$

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}53 & 0{,}23 \\ 0{,}2 & 0{,}32 & 0{,}48 \\ 0{,}19 & 0{,}78 & 0{,}03 \end{pmatrix}, R^6 = \begin{pmatrix} -2{,}62 & 8{,}09 & 16{,}05 \\ 8{,}05 & 14{,}94 & 19{,}34 \\ 9{,}8 & 18{,}16 & 20{,}45 \end{pmatrix},$$

$$P^7 = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}53 & 0{,}23 \\ 0{,}62 & 0{,}08 & 0{,}3 \\ 0{,}06 & 0{,}82 & 0{,}12 \end{pmatrix}, R^7 = \begin{pmatrix} -2{,}62 & 8{,}09 & 16{,}05 \\ 10{,}04 & 17{,}2 & 6{,}78 \\ -1{,}33 & 16{,}21 & 17{,}78 \end{pmatrix},$$

$$P^8 = \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}29 & 0{,}17 \\ 0{,}2 & 0{,}32 & 0{,}48 \\ 0{,}06 & 0{,}82 & 0{,}12 \end{pmatrix}, R^8 = \begin{pmatrix} -2{,}53 & 5{,}54 & 6{,}37 \\ 8{,}05 & 14{,}94 & 19{,}34 \\ -1{,}33 & 16{,}21 & 17{,}78 \end{pmatrix}.$$

Наведемо значення величини v_i^s (табл. 2.6).

Таблиця 2.6

Значення очікуваного доходу для кожної стратегії

v_i^s			
s	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
1	1,32	9,63	16,63
2	7,35	15,67	15,34
3	7,35	9,63	16,63

4	1,32	15,67	16,63
5	1,32	9,63	15,34
6	7,35	15,67	16,63
7	7,35	9,63	15,34
8	1,32	15,67	15,34

Проілюструємо розрахунок стаціонарних ймовірностей для стратегії $s = 1$. Отримуємо наступну систему рівнянь.

$$\begin{cases} 0{,}54\pi_1 + 0{,}62\pi_2 + 0{,}19\pi_3 = \pi_1 \\ 0{,}29\pi_1 + 0{,}08\pi_2 + 0{,}78\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}17\pi_1 + 0{,}3\pi_2 + 0{,}03\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Зазначимо, що перше та друге рівняння є надмірними. Отримуємо наступний результат рішення системи.

$$\pi_1^1 = 0{,}5004$$

$$\pi_2^1 = 0{,}3146$$

$$\pi_3^1 = 0{,}185$$

Порахуємо очікуваний дохід за рік для $s = 1$.

$$E^1 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^1 v_i^1 = 0{,}5004 \times 1{,}32 + 0{,}3146 \times 9{,}63 + 0{,}185 \times 16{,}63 = 6{,}77$$

Аналогічно порахуємо стаціонарні ймовірності для стратегії $s = 2$. Отримуємо наступну систему рівнянь.

$$\begin{cases} 0{,}24\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}06\pi_3 = \pi_1 \\ 0{,}53\pi_1 + 0{,}32\pi_2 + 0{,}82\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}23\pi_1 + 0{,}48\pi_2 + 0{,}12\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Зазначимо, що друге рівняння є надмірним. Отримуємо наступний результат рішення системи.

$$\pi_1^2 = 0{,}1612$$

$$\pi_2^2 = 0{,}5155$$

$$\pi_3^2 = 0{,}3233$$

Порахуємо очікуваний дохід за рік для $s = 2$.

$$E^2 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^2 v_i^2 = 0{,}1612 \times 7{,}35 + 0{,}5155 \times 15{,}67 + 0{,}3233 \times 15{,}34 = 14{,}223$$

Для стратегії $s = 3$ система стаціонарних ймовірностей виглядатиме наступним чином.

$$\begin{cases} 0{,}24\pi_1 + 0{,}62\pi_2 + 0{,}19\pi_3 = \pi_1 \\ 0{,}53\pi_1 + 0{,}08\pi_2 + 0{,}78\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}23\pi_1 + 0{,}3\pi_2 + 0{,}03\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Зазначимо, що перше та друге рівняння є надмірними. Отримуємо наступний результат рішення системи.

$$\pi_1^3 = 0{,}3822$$

$$\pi_2^3 = 0{,}4026$$

$$\pi_3^3 = 0{,}2151$$

Порахуємо очікуваний дохід за рік для $s = 3$.

$$E^3 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^3 v_i^3 = 0{,}3822 \times 7{,}35 + 0{,}4026 \times 9{,}63 + 0{,}2151 \times 16{,}63 = 10{,}265$$

Для стратегії $s = 4$ система стаціонарних ймовірностей виглядатиме наступним чином.

$$\begin{cases} 0{,}54\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}19\pi_3 = \pi_1 \\ 0{,}29\pi_1 + 0{,}32\pi_2 + 0{,}78\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}17\pi_1 + 0{,}48\pi_2 + 0{,}03\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Зазначимо, що друге рівняння є надмірним. Отримуємо наступний результат рішення системи.

$$\pi_1^4 = 0{,}299$$

$$\pi_2^4 = 0{,}4339$$

$$\pi_3^4 = 0{,}2671$$

Порахуємо очікуваний дохід за рік для $s = 4$.

$$E^4 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^4 v_i^4 = 0{,}299 \times 1{,}32 + 0{,}4339 \times 15{,}67 + 0{,}2671 \times 16{,}63 = 11{,}639$$

Для стратегії $s = 5$ система стаціонарних ймовірностей виглядатиме наступним чином.

$$\begin{cases} 0{,}54\pi_1 + 0{,}62\pi_2 + 0{,}06\pi_3 = \pi_1 \\ 0{,}29\pi_1 + 0{,}08\pi_2 + 0{,}82\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}17\pi_1 + 0{,}3\pi_2 + 0{,}12\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Зазначимо, що перше та друге рівняння є надмірними. Отримуємо наступний результат рішення системи.

$$\pi_1^5 = 0{,}469$$

$$\pi_2^5 = 0{,}3284$$

$$\pi_3^5 = 0{,}2026$$

Порахуємо очікуваний дохід за рік для $s = 5$.

$$E^5 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^5 v_i^5 = 0{,}469 \times 1{,}32 + 0{,}3284 \times 9{,}63 + 0{,}2026 \times 15{,}34 = 6{,}892$$

Для стратегії $s = 6$ система стаціонарних ймовірностей виглядатиме наступним чином.

$$\begin{cases} 0{,}24\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}19\pi_3 = \pi_1 \\ 0{,}53\pi_1 + 0{,}32\pi_2 + 0{,}78\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}23\pi_1 + 0{,}48\pi_2 + 0{,}03\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Зазначимо, що друге рівняння є надмірним. Отримуємо наступний результат рішення системи.

$$\pi_1^6 = 0{,}2052$$

$$\pi_2^6 = 0{,}4991$$

$$\pi_3^6 = 0{,}2956$$

Порахуємо очікуваний дохід за рік для $s = 6$.

$$E^6 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^6 v_i^6 = 0{,}2052 \times 7{,}35 + 0{,}4991 \times 15{,}67 + 0{,}2956 \times 16{,}63 = 14{,}247$$

Для стратегії $s = 7$ система стаціонарних ймовірностей виглядатиме наступним чином.

$$\begin{cases} 0{,}24\pi_1 + 0{,}62\pi_2 + 0{,}06\pi_3 = \pi_1 \\ 0{,}53\pi_1 + 0{,}08\pi_2 + 0{,}82\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}23\pi_1 + 0{,}3\pi_2 + 0{,}12\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Зазначимо, що друге рівняння є надмірним. Отримуємо наступний результат рішення системи.

$$\pi_1^7 = 0{,}3546$$

$$\pi_2^7 = 0{,}4121$$

$$\pi_3^7 = 0{,}2332$$

Порахуємо очікуваний дохід за рік для $s = 7$.

$$E^7 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^7 v_i^7 = 0{,}3546 \times 7{,}35 + 0{,}4121 \times 9{,}63 + 0{,}2332 \times 15{,}34 = 10{,}153$$

Для останньої стратегії $s = 8$ система стаціонарних ймовірностей виглядатиме наступним чином.

$$\begin{cases} 0{,}54\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}06\pi_3 = \pi_1 \\ 0{,}29\pi_1 + 0{,}32\pi_2 + 0{,}82\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}17 + 0{,}48\pi_2 + 0{,}12\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Зазначимо, що друге рівняння є надмірним. Отримуємо наступний результат рішення системи.

$$\pi_1^8 = 0{,}2397$$

$$\pi_2^8 = 0{,}4619$$

$$\pi_3^8 = 0{,}2983$$

Порахуємо очікуваний дохід за рік для $s = 8$.

$$E^8 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^8 v_i^8 = 0{,}2397 \times 1{,}32 + 0{,}4619 \times 15{,}67 + 0{,}2983 \times 15{,}34 = 12{,}132$$

Наведемо результати обчислень π^s та E^s для всіх стаціонарних стратегій (табл. 2.7).

Таблиця 2.7

Величини стаціонарних ймовірностей та прибутку для стратегій

s	π_1^s	π_2^s	π_3^s	E^s

1	0,5004	0,3146	0,185	6,77
2	0,1612	0,5155	0,3233	14,223
3	0,3822	0,4026	0,2151	10,265
4	0,299	0,4339	0,2671	11,639
5	0,469	0,3284	0,2026	6,892
6	0,2052	0,4991	0,2956	**14,247**
7	0,3546	0,4121	0,2332	10,153
8	0,2397	0,4619	0,2983	12,132
$\boldsymbol{max\ E^s} =$	14,247			

В результаті виконання задачі методом повного перебору видно, що стратегія номер 6, тобто $\{s = 2, 2, 1\}$, приносить найбільший очікуваний річний дохід. Тобто, оптимальна довгострокова стратегія потребує ремонту виробничої лінії, якщо вона знаходиться в поганому або задовільному станах. Прибуток становитиме 14,247 мільярди євро.

2.4 Вирішення моделі методом ітерацій по стратегіям без дисконтування

Вирішимо задачу планування ремонту виробничої лінії за допомогою методу ітерацій по стратегіям без дисконтування. Почнемо з довільної стратегії, коли ремонт виробничої лінії не робиться. Маємо відповідні матриці, які характеризують цю стратегію.

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0,54 & 0,29 & 0,17 \\ 0,62 & 0,08 & 0,3 \\ 0,19 & 0,78 & 0,03 \end{pmatrix}, R^1 = \begin{pmatrix} -2,53 & 5,54 & 6,37 \\ 10,04 & 17,2 & 6,78 \\ 9,8 & 18,16 & 20,45 \end{pmatrix}$$

Далі рівняння кроку оцінки параметрів набувають наступного вигляду.

$$\begin{cases} E + f(1) - 0,54f(1) - 0,29f(2) - 0,17f(3) = 1,32 \\ E + f(2) - 0,62f(1) - 0,08f(2) - 0,3f(3) = 9,63 \\ E + f(3) - 0,19f(1) - 0,78f(2) - 0,03f(3) = 16,63 \end{cases}$$

Вважаємо, що $f(3) = 0$ та вирішуємо систему.

$$\begin{cases} E + 0,46f(1) - 0,29f(2) = 1,32 \\ E - 0,62f(1) + 0,92f(2) = 9,63 \\ E - 0,19f(1) - 0,78f(2) = 16,63 \end{cases}$$

Отримуємо наступні результати.

$$E = 6{,}77, f(1) = -17{,}175, f(2) = -8{,}462, f(3) = 0$$

Перейдемо до кроку покращення стратегії. Порахуємо очікуваний сумарний дохід за формулою.

$$f(i) = v_i^k + p_{i1}^k f(1) + p_{i2}^k f(2) + p_{i3}^k f(3)$$

Для $k = 1$:

$$f_1(1) = 1{,}32 + 0{,}54 \times (-17{,}175) + 0{,}29 \times (-8{,}462) + 0{,}17 \times 0 = -10{,}405$$

$$f_1(2) = 9{,}63 + 0{,}62 \times (-17{,}175) + 0{,}08 \times (-8{,}462) + 0{,}3 \times 0 = -1{,}691$$

$$f_1(3) = 16{,}63 + 0{,}19 \times (-17{,}175) + 0{,}78 \times (-8{,}462) + 0{,}03 \times 0 = 6{,}767$$

Для $k = 2$:

$$f_2(1) = 7{,}35 + 0{,}24 \times (-17{,}175) + 0{,}53 \times (-8{,}462) + 0{,}23 \times 0 = -1{,}256$$

$$f_2(2) = 15{,}67 + 0{,}2 \times (-17{,}175) + 0{,}32 \times (-8{,}462) + 0{,}48 \times 0 = 9{,}531$$

$$f_2(3) = 15{,}34 + 0{,}06 \times (-17{,}175) + 0{,}82 \times (-8{,}462) + 0{,}12 \times 0 = 7{,}367$$

Таблиця 2.8

Величини очікуваного сумарного доходу для двох альтернатив на першій ітерації

i	$k = 1$	$k = 2$	$f(i)$	k^*
1	-10,405	-1,256	-1,256	2
2	-1,691	9,531	9,531	2
3	6,767	7,367	7,367	2

За результатами, відображеними в таблиці 2.8, видно, що нова стратегія передбачає виконання ремонту виробничої лінії незалежно від її стану. Так як нова стратегія відрізняється від попередньої, то крок оцінки параметрів повторюється. Новій стратегії відповідають наступні матриці.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}53 & 0{,}23 \\ 0{,}2 & 0{,}32 & 0{,}48 \\ 0{,}06 & 0{,}82 & 0{,}12 \end{pmatrix}, R^2 = \begin{pmatrix} -2{,}62 & 8{,}09 & 16{,}05 \\ 8{,}05 & 14{,}94 & 19{,}34 \\ -1{,}33 & 16{,}21 & 17{,}78 \end{pmatrix}$$

Далі рівняння кроку оцінки параметрів набувають наступного вигляду.

$$\begin{cases} E + f(1) - 0{,}24f(1) - 0{,}53f(2) - 0{,}23f(3) = 7{,}35 \\ E + f(2) - 0{,}2f(1) - 0{,}32f(2) - 0{,}48f(3) = 15{,}67 \\ E + f(3) - 0{,}06f(1) - 0{,}82f(2) - 0{,}12f(3) = 15{,}34 \end{cases}$$

Вважаємо, що $f(3) = 0$ та спростимо систему.

$$\begin{cases} E + 0{,}76f(1) - 0{,}53f(2) = 7{,}35 \\ E - 0{,}2f(1) + 0{,}68f(2) = 15{,}67 \\ E - 0{,}06f(1) - 0{,}82f(2) = 15{,}34 \end{cases}$$

Отримуємо наступні результати.

$$E = 14{,}223, f(1) = -9{,}508, f(2) = -0{,}667, f(3) = 0$$

Перейдемо до кроку покращення стратегії. Порахуємо очікуваний сумарний дохід за формулою (1.14) в MS Excel. Наведемо приклад алгоритму розрахунку значень сумарного доходу в MS Excel (рис 2.3).

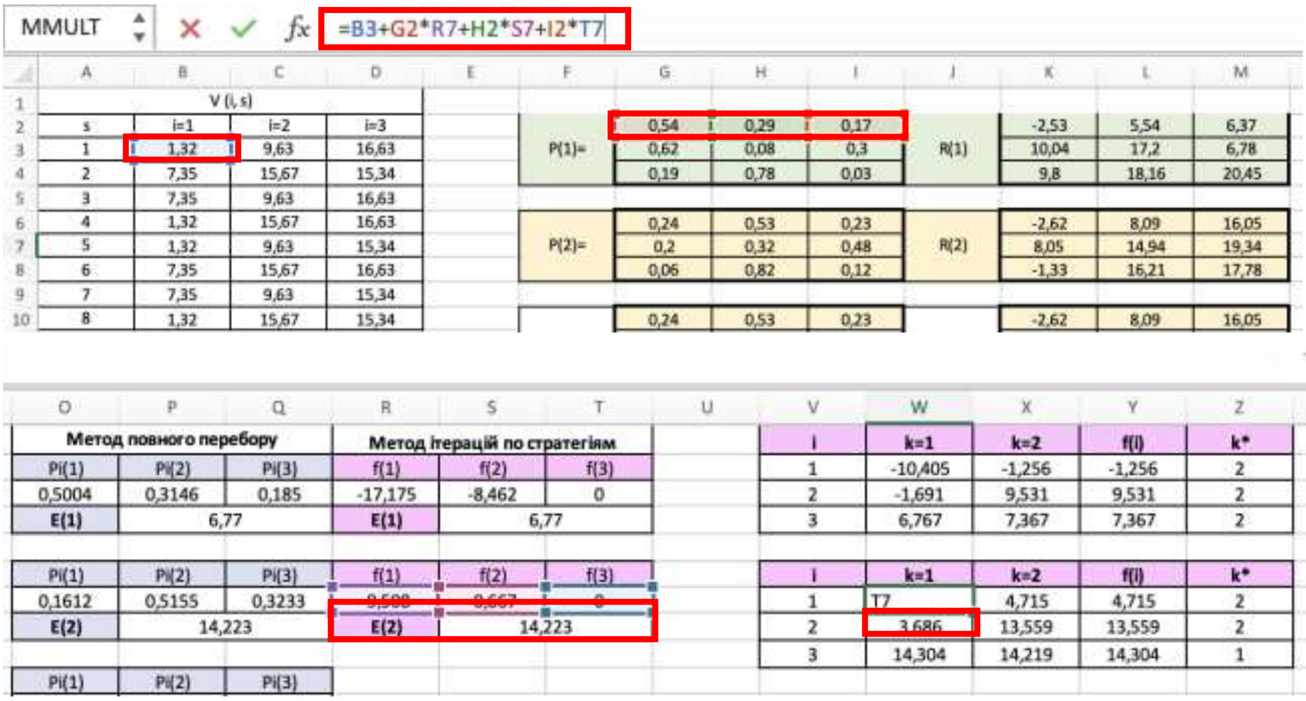


Рис. 2.3. Приклад розрахунку $f(i)$ для другої ітерації, коли $i = k = 1$

За таким алгоритмом буди розраховані всі інші величини. Отже, зведемо отримані результати в таблицю 2.9.

Таблиця 2.9

Очікувані сумарні доходи для двох альтернатив на другій ітерації

i	$k = 1$	$k = 2$	$f(i)$	k^*
1	-4,004	4,715	4,715	2
2	3,686	13,559	13,559	2
3	14,304	14,219	14,304	1

Робимо висновок, що нова стратегія передбачає виконання ремонту, коли виробнича лінія знаходиться в поганому або задовільному станах. Так як нова стратегія відрізняється від попередньої, то крок оцінки параметрів повторюється. Новій стратегії відповідають наступні матриці.

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}53 & 0{,}23 \\ 0{,}2 & 0{,}32 & 0{,}48 \\ 0{,}19 & 0{,}78 & 0{,}03 \end{pmatrix}, R^6 = \begin{pmatrix} -2{,}62 & 8{,}09 & 16{,}05 \\ 8{,}05 & 14{,}94 & 19{,}34 \\ 9{,}8 & 18{,}16 & 20{,}45 \end{pmatrix}$$

Далі рівняння кроку оцінки параметрів набувають наступного вигляду.

$$\begin{cases} E + f(1) - 0{,}24f(1) - 0{,}53f(2) - 0{,}23f(3) = 7{,}35 \\ E + f(2) - 0{,}2f(1) - 0{,}32f(2) - 0{,}48f(3) = 15{,}67 \\ E + f(3) - 0{,}19f(1) - 0{,}78f(2) - 0{,}03f(3) = 16{,}63 \end{cases}$$

Вважаємо, що $f(3) = 0$ та спростимо систему.

$$\begin{cases} E + 0{,}76f(1) - 0{,}53f(2) = 7{,}35 \\ E - 0{,}2f(1) + 0{,}68f(2) = 15{,}67 \\ E - 0{,}19f(1) - 0{,}78f(2) = 16{,}63 \end{cases}$$

Отримуємо наступні результати.

$$E = 14{,}247, f(1) = -9{,}578, f(2) = -0{,}723, f(3) = 0$$

Перейдемо до кроку покращення стратегії. Порахуємо очікуваний сумарний дохід за формулою (1.14) в MS Excel. Наведемо приклад алгоритму розрахунку значень сумарного доходу в MS Excel (рис 2.4)

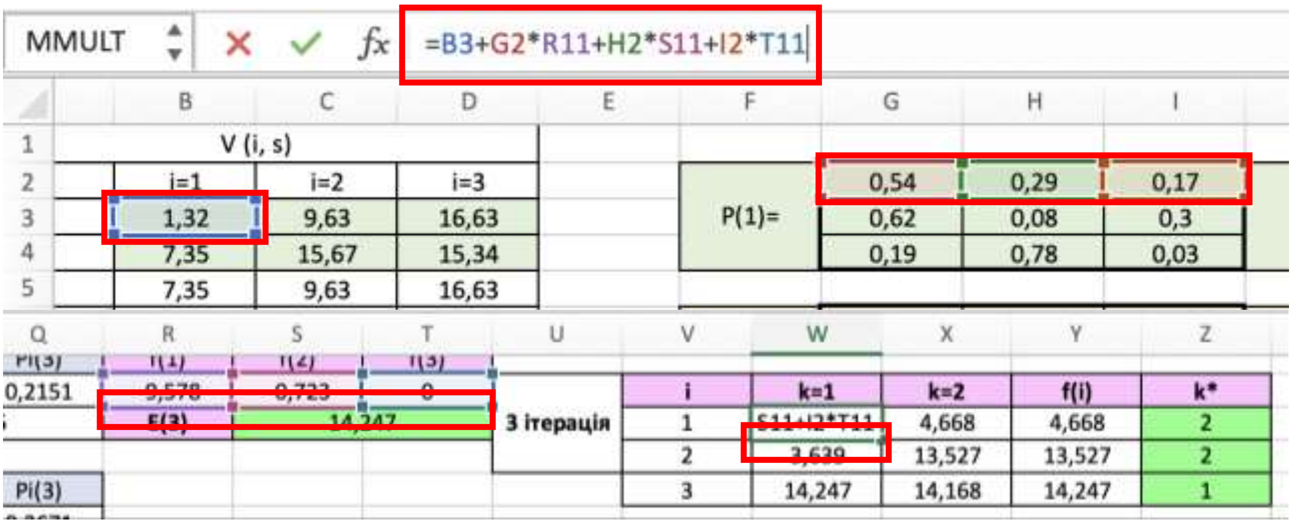


Рис. 2.4. Приклад розрахунку $f(i)$ для третьої ітерації, коли $i = k = 1$

Результати обчислень на кроці покращення стратегії приведено в таблиці 2.10.

Таблиця 2.10

Очікувані сумарні доходи для двох альтернатив на третій ітерації

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{k = 1}$	$\boldsymbol{k = 2}$	$\boldsymbol{f(i)}$	$\boldsymbol{k^*}$
1	-4,058	4,668	4,668	2
2	3,639	13,527	13,527	2
3	14,247	14,168	14,247	1

За результатами в таблиці бачимо, що нова стратегія, яка передбачає виконання ремонту, коли виробнича лінія знаходиться в поганому або задовільному станах, є ідентичною до попередньої. Тому остання стратегія є оптимальною, ітераційний процес закінчується на 3 ітерації.

Порівняємо результати, отримані методом повного перебору та методом ітерацій по стратегіям без дисконтування. Для цього наведемо отримані розрахунки, вирішені цими двома методами в MS Excel.

Метод повного перебору		
Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)
0,5004	0,3146	0,185
E(1)	6,77	
Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)
0,1612	0,5155	0,3233
E(2)	14,223	
Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)
0,3822	0,4026	0,2151
E(3)	10,265	
Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)
0,299	0,4339	0,2671
E(4)	11,639	
Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)
0,469	0,3284	0,2026
E(5)	6,892	
Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)
0,2052	0,4991	0,2956
E(6)	14,247	
Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)
0,3546	0,4121	0,2332
E(7)	10,153	
Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)
0,2397	0,4619	0,2983
E(8)	12,132	

Метод ітерацій по стратегіям		
f(1)	f(2)	f(3)
-17,175	-8,462	0
E(1)	6,77	
f(1)	f(2)	f(3)
-9,508	-0,667	0
E(2)	14,223	
f(1)	f(2)	f(3)
-9,578	-0,723	0
E(3)	14,247	

	i	k=1	k=2	f(i)	k*
1 ітерація	1	-10,405	-1,256	-1,256	2
	2	-1,691	9,531	9,531	2
	3	6,767	7,367	7,367	2

	i	k=1	k=2	f(i)	k*
2 ітерація	1	-4,004	4,715	4,715	2
	2	3,686	13,559	13,559	2
	3	14,304	14,219	14,304	1

	i	k=1	k=2	f(i)	k*
3 ітерація	1	-4,058	4,668	4,668	2
	2	3,639	13,527	13,527	2
	3	14,247	14,168	14,247	1

$$f(i) = v_i^k + p_{i1}^k f(1) + p_{i2}^k f(2) + p_{i3}^k f(3)$$

Рис. 2.5. Порівняння результатів, отриманих за методом повного перебору та методом ітерацій по стратегіям

Отже, результати, отримані двома методами, співпадають. Також варто відокремити той факт, що метод ітерацій по стратегіям є більш ефективним, так як він швидше сходиться до оптимального рішення, бо для його виконання знадобилось всього три ітерації, в той час, як методом повного перебору треба було обчислити необхідні величини для всіх стратегій і порівнювати їх між собою для знаходження оптимального рішення.

2.5 Вирішення моделі методом ітерацій по стратегіям з дисконтуванням

Вирішимо задачу за допомогою методу ітерацій по стратегіям з дисконтуванням. Нехай коефіцієнт дисконтування дорівнюватиме 0,65 ($\alpha = 0{,}65$).

Почнемо з першої стратегії $s = \{1, 1, 1\}$. З матриць P^1 та R^1 запишемо наступну систему рівнянь.

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}29 & 0{,}17 \\ 0{,}62 & 0{,}08 & 0{,}3 \\ 0{,}19 & 0{,}78 & 0{,}03 \end{pmatrix}, R^1 = \begin{pmatrix} -2{,}53 & 5{,}54 & 6{,}37 \\ 10{,}04 & 17{,}2 & 6{,}78 \\ 9{,}8 & 18{,}16 & 20{,}45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(1) - 0{,}65[0{,}54f(1) + 0{,}29f(2) + 0{,}17f(3)] = 1{,}32 \\ f(2) - 0{,}65[0{,}62f(1) + 0{,}08f(2) + 0{,}3f(3)] = 9{,}63 \\ f(3) - 0{,}65[0{,}19f(1) + 0{,}78f(2) + 0{,}03f(3)] = 16{,}63 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}65f(1) - 0{,}19f(2) - 0{,}11f(3) = 1{,}32 \\ 0{,}95f(2) - 0{,}4f(1) - 0{,}19f(3) = 9{,}63 \\ 0{,}98f(3) - 0{,}12f(1) - 0{,}51f(2) = 16{,}63 \end{cases}$$

Отримуємо такі рішення системи.

$$f(1) = 13{,}475, f(2) = 21{,}804, f(3) = 29{,}966$$

Крок покращення стратегії порахуємо в MS Excel за формулою (1.15). На рисунку 2.6 наведено приклад розрахунку для першого стану першої матриці.

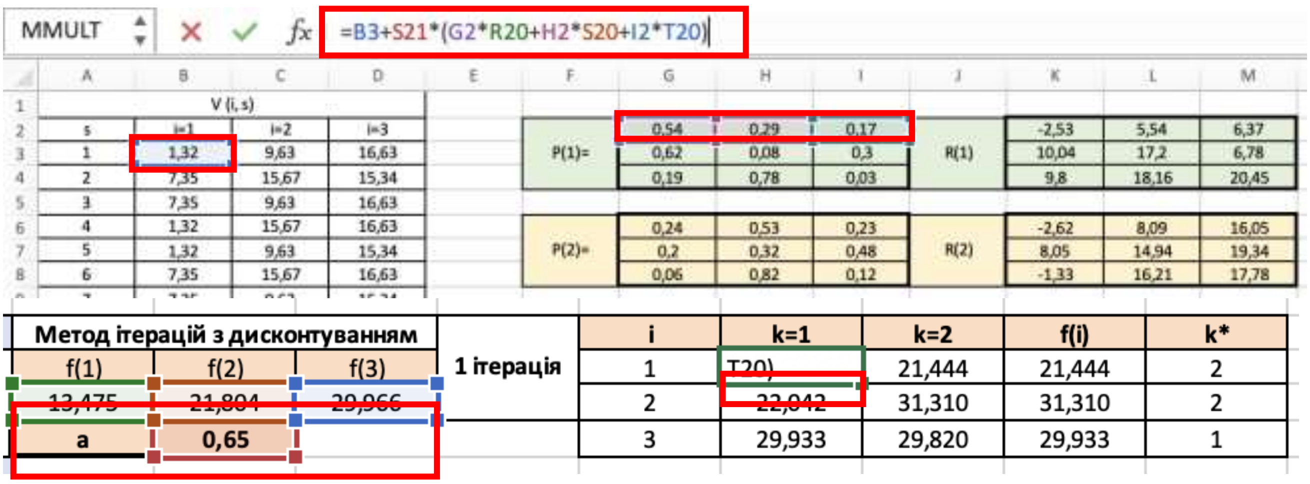


Рис. 2.6. Приклад розрахунку прибутку для першої ітерації, коли $i = k = 1$

Наведемо ще один приклад розрахунку прибутку для $i = 3, k = 2$ (рис. 2.7).

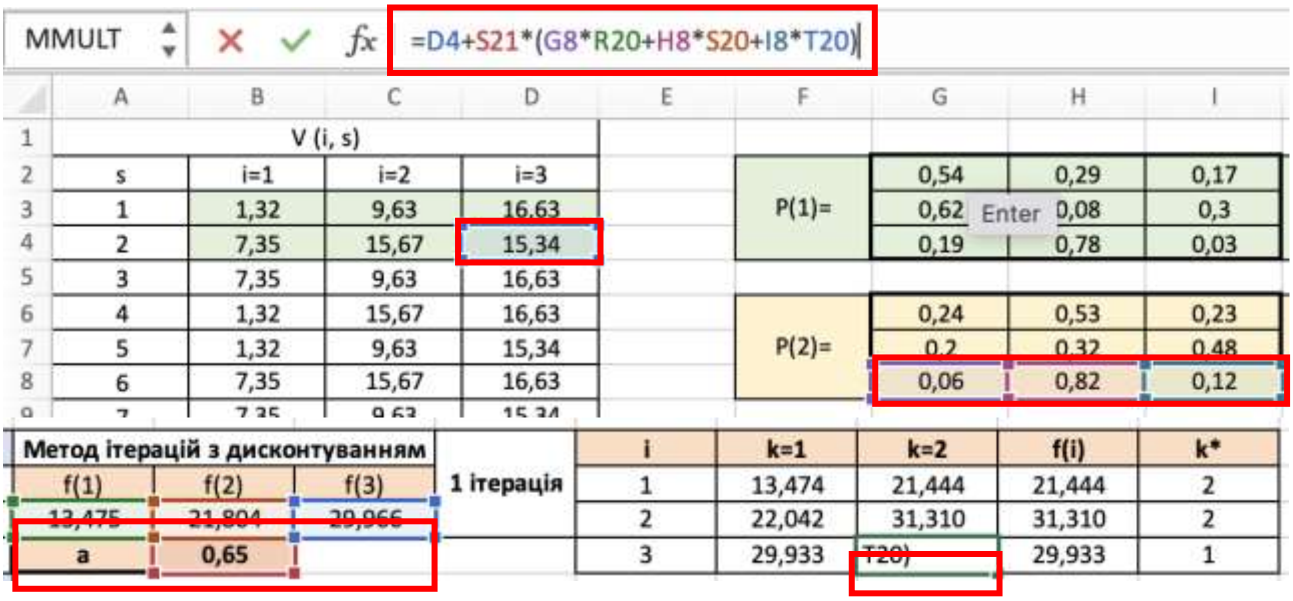


Рис. 2.7. Приклад розрахунку прибутку для першої ітерації, коли $i = 3, k = 2$

За таким алгоритмом рахуємо всі інші величини прибутку, після чого порівнюємо кожні дві величини кожного стану одна з одною і обираємо найкращу альтернативу. Зведемо отримані результати в таблицю 2.11.

Таблиця 2.11

Очікувані сумарні доходи для двох альтернатив на першій ітерації

i	$k = 1$	$k = 2$	$f(i)$	k^*
1	13,474	21,444	21,444	2
2	22,042	31,310	31,310	2
3	29,933	29,820	29,933	1

Отримуємо нову стратегію $t = \{2, 2, 1\}$, яка не є ідентичною до попередньої стратегії $s = \{1, 1, 1\}$. Тому знов переходимо на крок оцінки параметрів для нової стратегії $s = t = \{2, 2, 1\}$. На основі матриць P^6 та R^6 складаємо систему рівнянь.

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}53 & 0{,}23 \\ 0{,}2 & 0{,}32 & 0{,}48 \\ 0{,}19 & 0{,}78 & 0{,}03 \end{pmatrix}, R^6 = \begin{pmatrix} -2{,}62 & 8{,}09 & 16{,}05 \\ 8{,}05 & 14{,}94 & 19{,}34 \\ 9{,}8 & 18{,}16 & 20{,}45 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} f(1) - 0{,}65[0{,}24f(1) + 0{,}53f(2) + 0{,}23f(3)] = 7{,}35 \\ f(2) - 0{,}65[0{,}2f(1) + 0{,}32f(2) + 0{,}48f(3)] = 15{,}67 \\ f(3) - 0{,}65[0{,}19f(1) + 0{,}78f(2) + 0{,}03f(3)] = 16{,}63 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}84f(1) - 0{,}34f(2) - 0{,}15f(3) = 7{,}35 \\ 0{,}79f(2) - 0{,}13f(1) - 0{,}31f(3) = 15{,}67 \\ 0{,}98f(3) - 0{,}12f(1) - 0{,}51f(2) = 16{,}63 \end{cases}$$

Отримуємо такі рішення системи:

$$f(1) = 33{,}543, f(2) = 42{,}255, f(3) = 43{,}066$$

Знов рахуємо крок покращення стратегії в MS Excel за формулою (1.15) за тим самим алгоритмом, що і на перший ітерації, але підставляючи нові величини $f(i)$. Після розрахунку очікуваного доходу для всіх станів та альтернатив обираємо максимальні значення доходу. Зведемо отримані результати в таблицю 2.12.

Таблиця 2.12

Очікувані сумарні доходи для двох альтернатив на другій ітерації

i	$k = 1$	$k = 2$	$f(i)$	k^*
1	25,821	33,578	33,578	2
2	33,748	42,260	42,260	2
3	43,036	42,525	43,036	1

За результатами, позначеними в таблиці, видно, що нова стратегія $t = \{2, 2, 1\}$ є ідентичною до попередньої стратегії $s = \{2, 2, 1\}$, що значить, що ця стратегія є оптимальною. Розрахунок закінчено на другій ітерації. Зазначимо, що така сама стратегія виявилася оптимальною і в задачах, вирішених методом повного перебору та методом ітерацій по стратегіям без дисконтування. Наведемо результати розрахунків методом ітерацій по стратегіям з дисконтуванням на рисунку 2.8.

Метод ітерацій з дисконтуванням			
f(1)	f(2)	f(3)	1 ітерація
13,475	21,804	29,966	
a	0,65		

i	k=1	k=2	f(i)	k*
1	13,474	21,444	21,444	2
2	22,042	31,310	31,310	2
3	29,933	29,820	29,933	1

f(1)	f(2)	f(3)	
33,543	42,255	43,066	2 ітерація
a	0,65		

i	k=1	k=2	f(i)	k*
1	25,821	33,578	33,578	2
2	33,748	42,260	42,260	2
3	43,036	42,525	43,036	1

Рис. 2.8. Результати виконання методу ітерацій з дисконтуванням в MS Excel

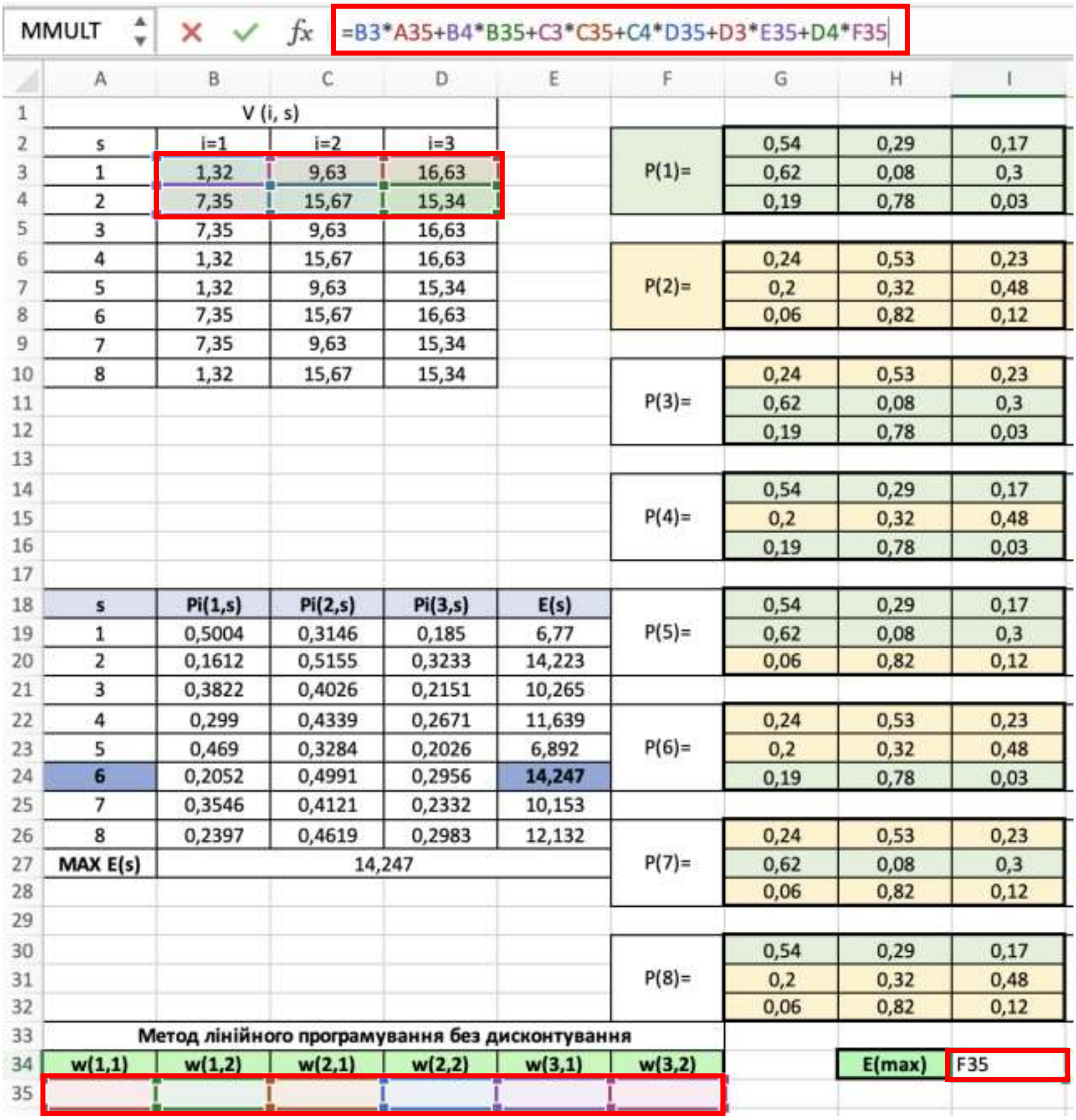
2.6 Вирішення моделі методом лінійного програмування

1) Сформулюємо задачу планування ремонтів ВЛ без дисконтування у вигляді задачі ЛП. Запишемо цільову функцію E та систему обмежень.

$$E = 1{,}32w_{11} + 7{,}35w_{12} + 9{,}63w_{21} + 15{,}67w_{22} + 16{,}63w_{31} + 15{,}34w_{32} \to max$$

$$\begin{cases} w_{11} + w_{12} - (0{,}54w_{11} + 0{,}24w_{12} + 0{,}62w_{21} + 0{,}2w_{22} + 0{,}19w_{31} + 0{,}06w_{32}) = 0 \\ w_{21} + w_{22} - (0{,}29w_{11} + 0{,}53w_{12} + 0{,}08w_{21} + 0{,}32w_{22} + 0{,}78w_{31} + 0{,}82w_{32}) = 0 \\ w_{31} + w_{32} - (0{,}17w_{11} + 0{,}23w_{12} + 0{,}3w_{21} + 0{,}48w_{22} + 0{,}03w_{31} + 0{,}12w_{32}) = 0 \\ w_{11} + w_{12} + w_{21} + w_{22} + w_{31} + w_{32} = 1 \\ w_{ik} \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,m;\ k = 1,2,\dots,K \end{cases}$$

Знайдемо оптимальне рішення за допомогою функції «Пошук рішення» в MS Excel. Відводимо пусті комірки під всі значення w_{ik} та записуємо формулу для розрахунку E (рис. 2.9).



MMULT | fx | =B3*A35+B4*B35+C3*C35+C4*D35+D3*E35+D4*F35

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		V (i, s)							
2	s	i=1	i=2	i=3			0,54	0,29	0,17
3	1	1,32	9,63	16,63		P(1)=	0,62	0,08	0,3
4	2	7,35	15,67	15,34			0,19	0,78	0,03
5	3	7,35	9,63	16,63					
6	4	1,32	15,67	16,63			0,24	0,53	0,23
7	5	1,32	9,63	15,34		P(2)=	0,2	0,32	0,48
8	6	7,35	15,67	16,63			0,06	0,82	0,12
9	7	7,35	9,63	15,34					
10	8	1,32	15,67	15,34			0,24	0,53	0,23
11						P(3)=	0,62	0,08	0,3
12							0,19	0,78	0,03
13									
14							0,54	0,29	0,17
15						P(4)=	0,2	0,32	0,48
16							0,19	0,78	0,03
17									
18	s	Pi(1,s)	Pi(2,s)	Pi(3,s)	E(s)		0,54	0,29	0,17
19	1	0,5004	0,3146	0,185	6,77	P(5)=	0,62	0,08	0,3
20	2	0,1612	0,5155	0,3233	14,223		0,06	0,82	0,12
21	3	0,3822	0,4026	0,2151	10,265				
22	4	0,299	0,4339	0,2671	11,639		0,24	0,53	0,23
23	5	0,469	0,3284	0,2026	6,892	P(6)=	0,2	0,32	0,48
24	6	0,2052	0,4991	0,2956	14,247		0,19	0,78	0,03
25	7	0,3546	0,4121	0,2332	10,153				
26	8	0,2397	0,4619	0,2983	12,132		0,24	0,53	0,23
27	MAX E(s)	14,247				P(7)=	0,62	0,08	0,3
28							0,06	0,82	0,12
29									
30							0,54	0,29	0,17
31						P(8)=	0,2	0,32	0,48
32							0,06	0,82	0,12
33	Метод лінійного програмування без дисконтування								
34	w(1,1)	w(1,2)	w(2,1)	w(2,2)	w(3,1)	w(3,2)		E(max)	F35
35									

Рис. 2.9. Запис формули для розрахунку E в MS Excel

Далі запрограмуємо формули для кожного обмежуючого рівняння (рис. 2.10, рис. 2.11, рис. 2.12, рис. 2.13).

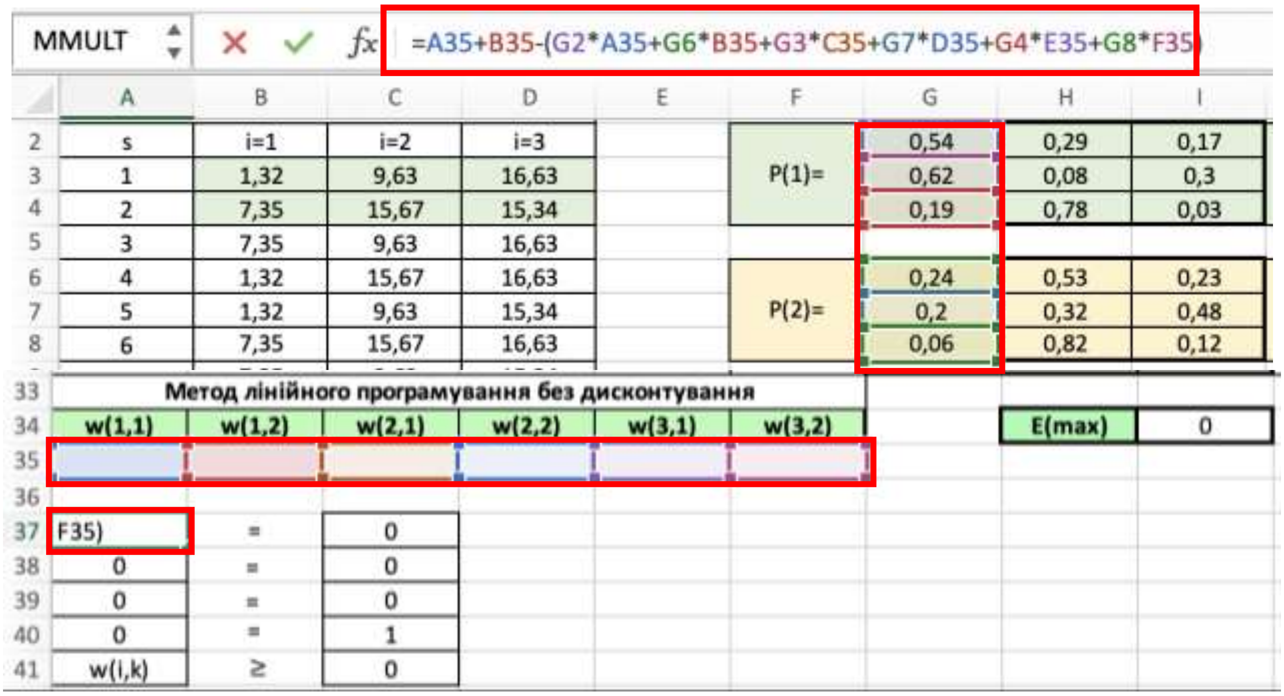


Рис. 2.10. Запис формули для розрахунку першого рівняння обмеження

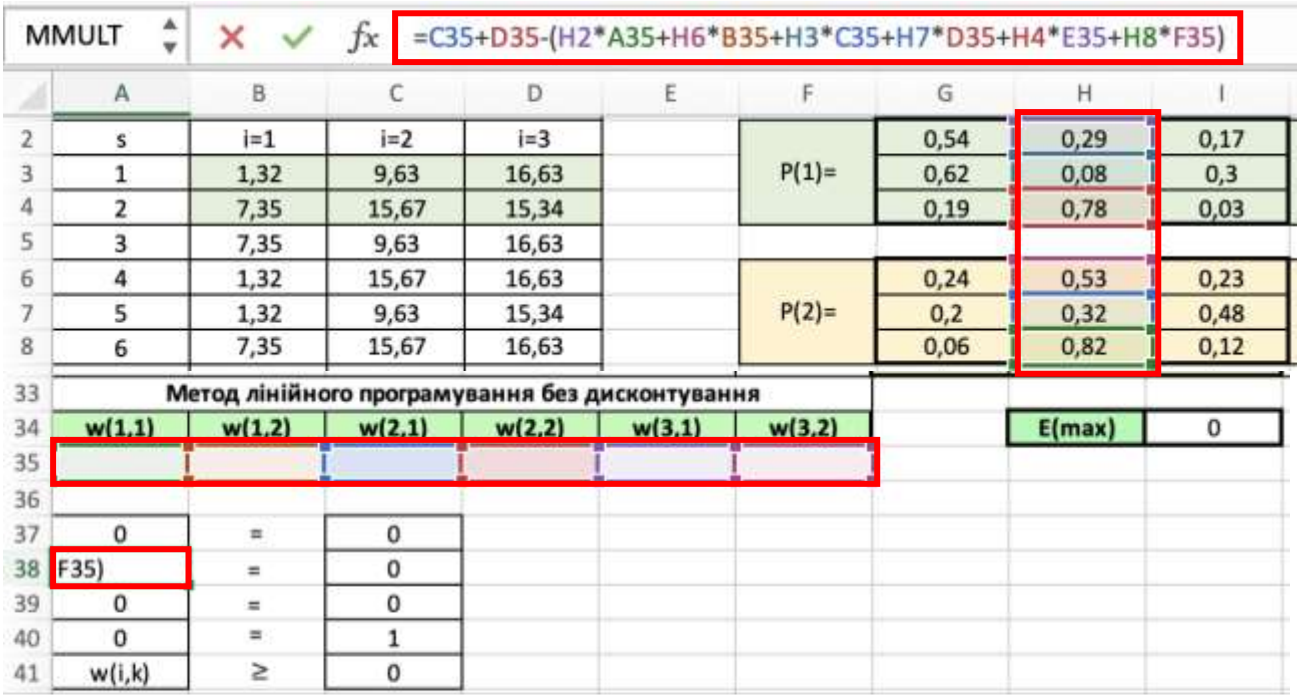


Рис. 2.11. Запис формули для розрахунку другого рівняння обмеження

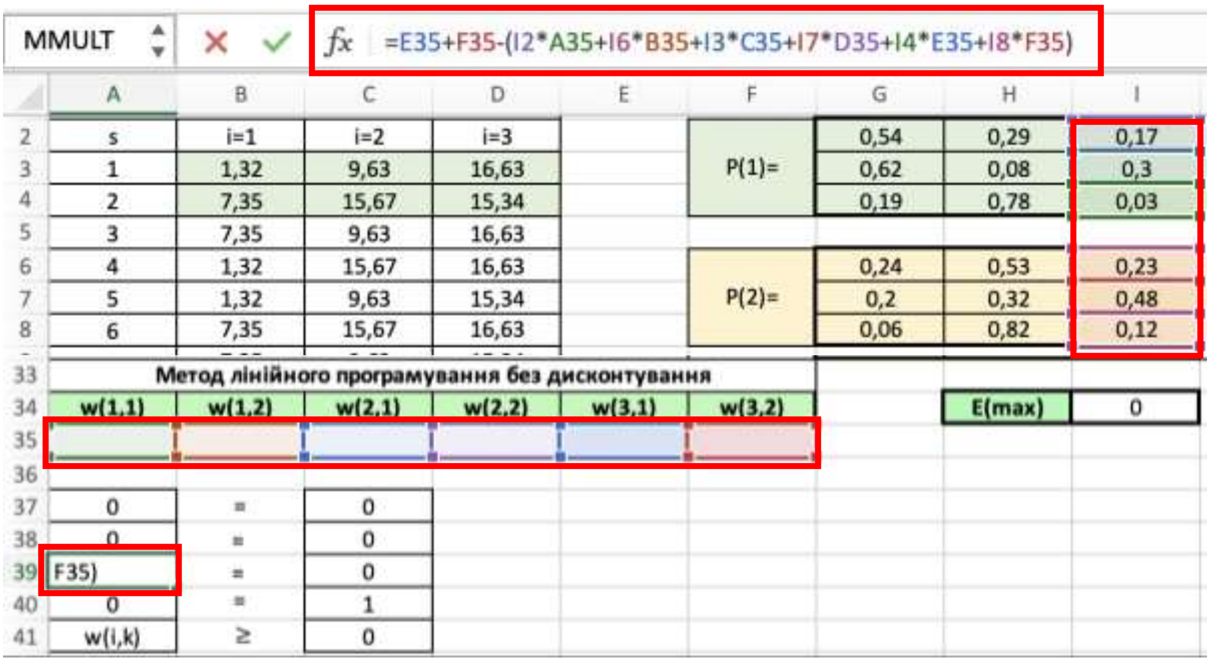


Рис. 2.12. Запис формули для розрахунку третього рівняння обмеження

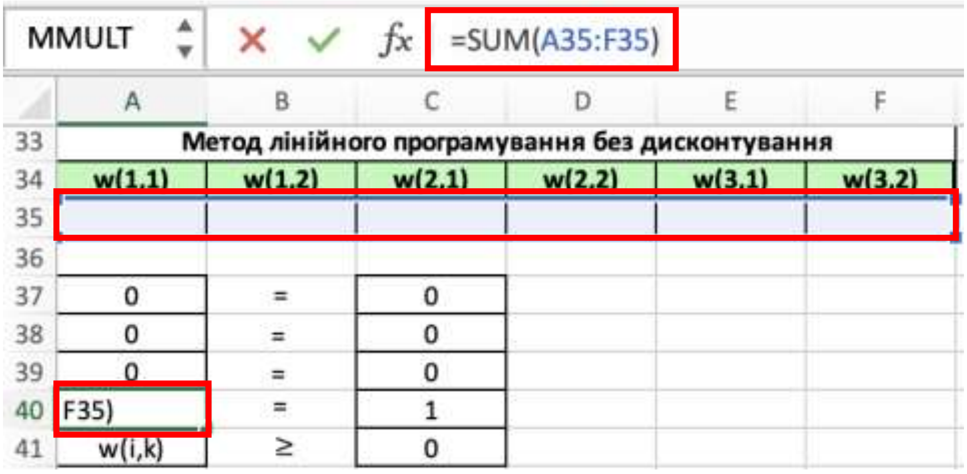


Рис. 2.13. Запис формули для розрахунку четвертого рівняння обмеження

Коли всі формули запрограмовано, переходимо в меню даних та обираємо функцію «Пошук рішення» (рис. 2.14).

Рис. 2.14. Вибір функції «Пошук рішення»

У віконці, яке з'явиться (рис. 2.15), вводимо комірку цільової функції та вказуємо, що її треба максимізувати. Далі обираємо комірки зі всіма змінними w_{ik} та вказуємо всі обмеження. Також обов'язково помічаємо галочкою, що всі необмежені змінні повинні бути невід'ємними, та в якості методу рішення обираємо симплекс-метод для рішення лінійних задач. Натискаємо кнопку «Вирішити».

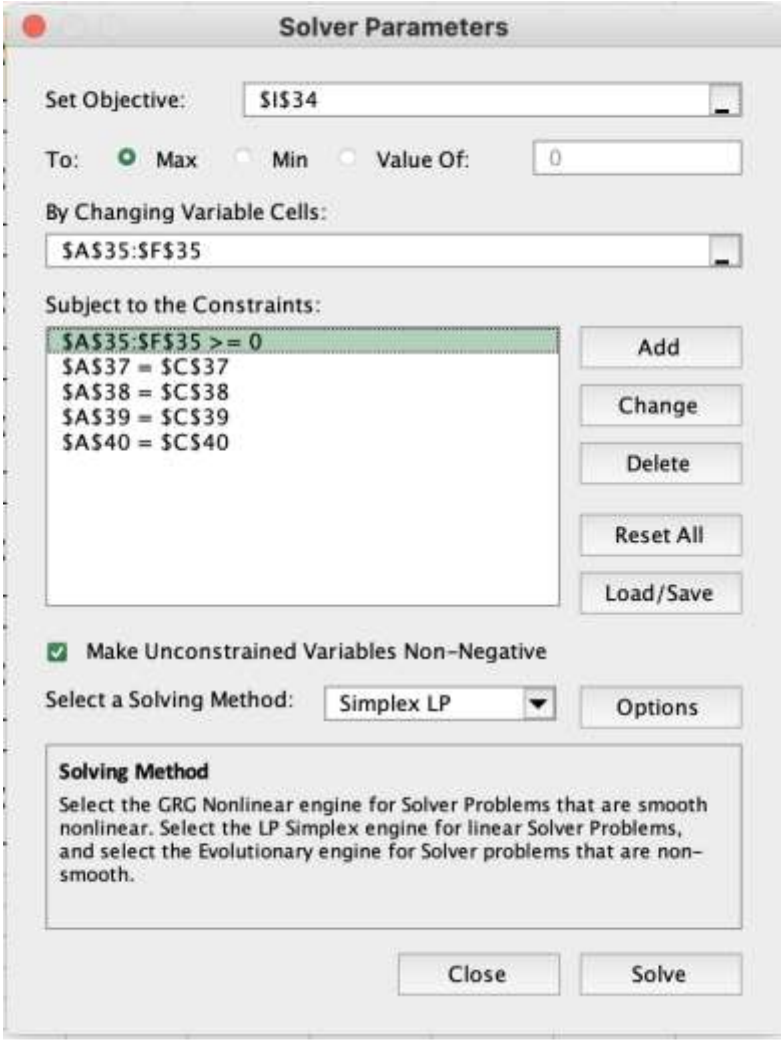


Рис. 2.15. Ввід даних для пошуку рішення

Після цього з'явиться віконце (рис. 2.16), яке вказує, що рішення було знайдене. Нажимаємо «Зберегти рішення» та «ОК».

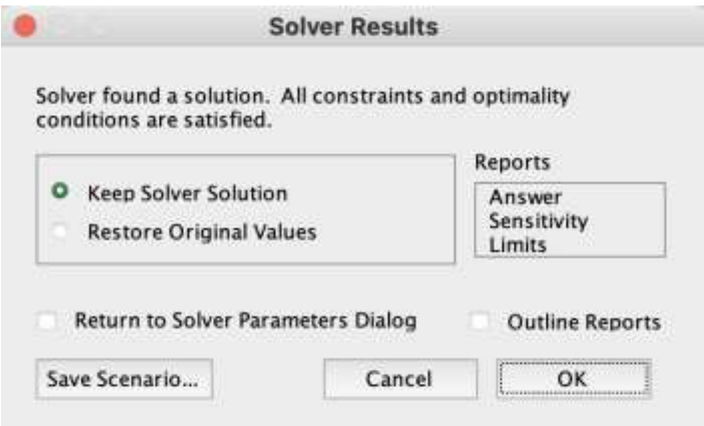


Рис. 2.16. Зберігання отриманого рішення

Отримуємо наступний результат (рис. 2.17).

Метод лінійного програмування без дисконтування							
w(1,1)	w(1,2)	w(2,1)	w(2,2)	w(3,1)	w(3,2)	E(max)	14,248277
0	0,2052537	0	0,4991004	0,2956459	0		

0	=	0
0	=	0
0	=	0
1	=	1
w(i,k)	≥	0

Рис. 2.17. Результат пошуку рішення для задачі без дисконтування

Оптимальним рішенням є наступні величини w_{ik}.

$$w_{11} = 0, w_{12} = 0{,}205, w_{21} = 0, w_{22} = 0{,}499, w_{31} = 0{,}296, w_{32} = 0$$

Так як це оптимальне рішення автоматично гарантує, що $q_i^k = 1$ для одного k при будь-якому i, то це значить, що $q_1^2 = q_2^2 = q_3^1 = 1$. Отже, оптимальна стратегія потребує вибору альтернативи $k = 2$, коли $i = 1{,}2$ та альтернативи $k = 1$, коли $i = 3$, тобто $s = \{2, 2, 1\}$. Оптимальне рішення $E = 14{,}248$ і воно є таким самим, як і в попередніх задачах, вирішених методом перебору та методом ітерацій по стратегіям без дисконтування. Варто відмітити, що позитивні значення w_{ik} в точності дорівнюють значенням π_i (рис. 2.18), відповідним до оптимальної стратегії, визначеній за допомогою методу повного перебору в підпункті 2.3, що доводить безпосередній зв'язок між цими двома методами рішення.

Метод лінійного програмування без дисконтування					
w(1,1)	w(1,2)	w(2,1)	w(2,2)	w(3,1)	w(3,2)
0	0,2052537	0	0,4991004	0,2956459	0

Метод повного перебору		
Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)
0,2052	0,4991	0,2956

Рис. 2.18. Демонстрація ідентичності позитивних значень w_{ik} та π_i, отриманих двома різними методами

2) Вирішимо задачу планування ремонтів ВЛ з дисконтуванням, використовуючи коефіцієнт дисконтування $\alpha = 0{,}65$. Якщо $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, то отримуємо наступну модель задачі лінійного програмування.

$$1{,}32w_{11} + 7{,}35w_{12} + 9{,}63w_{21} + 15{,}67w_{22} + 16{,}63w_{31} + 15{,}34w_{32} \rightarrow max$$

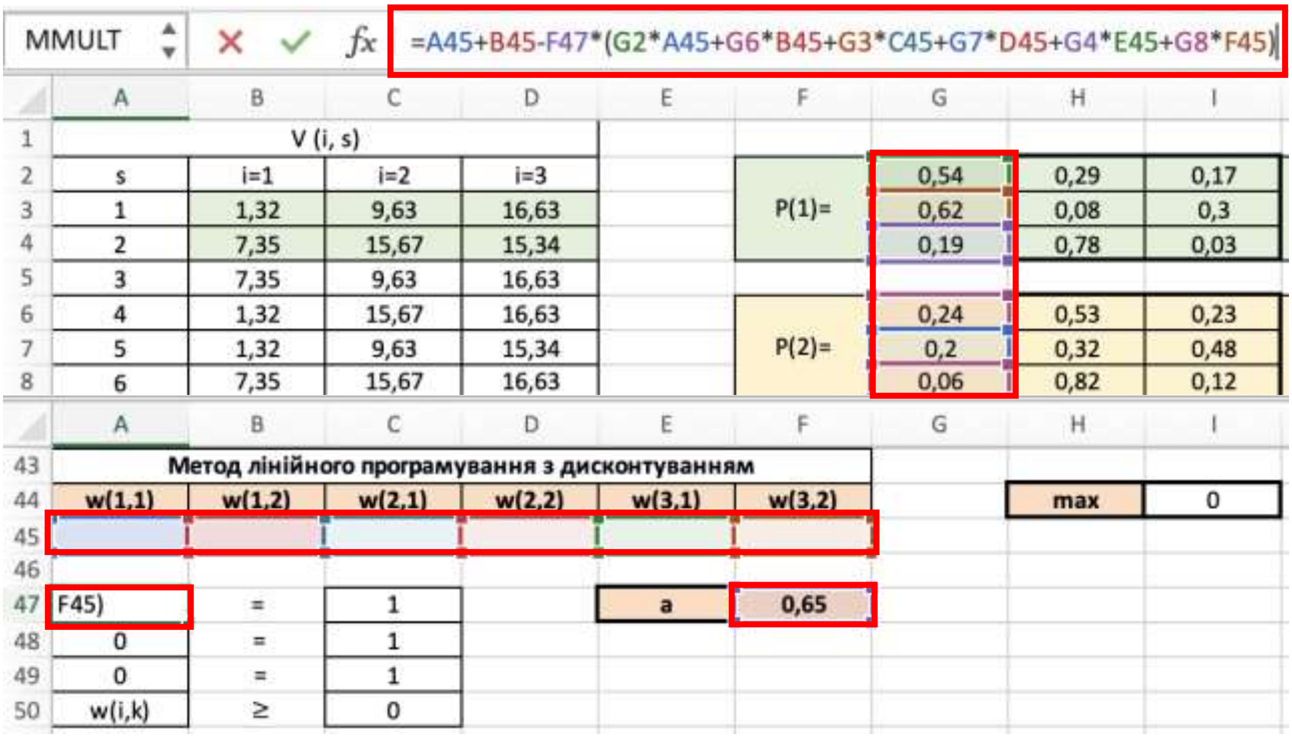
При обмеженнях:

$$\begin{cases} w_{11} + w_{12} - 0{,}65[0{,}54w_{11} + 0{,}24w_{12} + 0{,}62w_{21} + 0{,}2w_{22} + 0{,}19w_{31} + 0{,}06w_{32}] = 1 \\ w_{21} + w_{22} - 0{,}65[0{,}29w_{11} + 0{,}53w_{12} + 0{,}08w_{21} + 0{,}32w_{22} + 0{,}78w_{31} + 0{,}82w_{32}] = 1 \\ w_{31} + w_{32} - 0{,}65[0{,}17w_{11} + 0{,}23w_{12} + 0{,}3w_{21} + 0{,}48w_{22} + 0{,}03w_{31} + 0{,}12w_{32}] = 1 \\ w_{ik} \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m; \ k = 1,2,\ldots,K \end{cases}$$

Аналогічно до попередньої задачі знайдемо оптимальне рішення за допомогою функції «Пошук рішення» в MS Excel. Відводимо пусті комірки під всі значення w_{ik} та записуємо формулу для розрахунку цільової функції (рис. 2.19).

Рис. 2.19. Запис формули цільової функції MS Excel

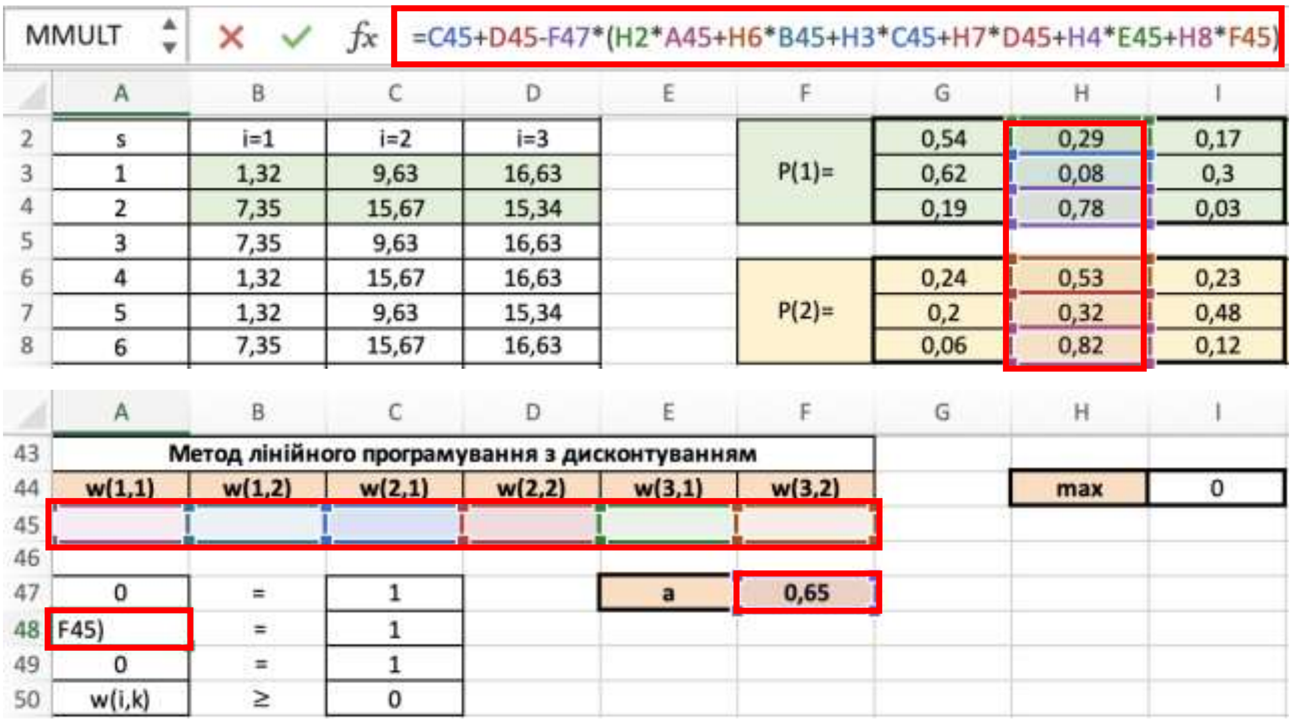
Далі запрограмуємо формули для кожного обмежуючого рівняння (рис. 2.20, рис. 2.21, рис. 2.22).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		V (i, s)							
2	s	i=1	i=2	i=3		P(1)=	0,54	0,29	0,17
3	1	1,32	9,63	16,63			0,62	0,08	0,3
4	2	7,35	15,67	15,34			0,19	0,78	0,03
5	3	7,35	9,63	16,63					
6	4	1,32	15,67	16,63		P(2)=	0,24	0,53	0,23
7	5	1,32	9,63	15,34			0,2	0,32	0,48
8	6	7,35	15,67	16,63			0,06	0,82	0,12

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
43	Метод лінійного програмування з дисконтуванням								
44	w(1,1)	w(1,2)	w(2,1)	w(2,2)	w(3,1)	w(3,2)		max	0
45									
46									
47	F45)	=	1		a	0,65			
48	0	=	1						
49	0	=	1						
50	w(i,k)	≥	0						

Рис. 2.20. Запис формули для розрахунку першого рівняння обмеження



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	s	i=1	i=2	i=3		P(1)=	0,54	0,29	0,17
3	1	1,32	9,63	16,63			0,62	0,08	0,3
4	2	7,35	15,67	15,34			0,19	0,78	0,03
5	3	7,35	9,63	16,63					
6	4	1,32	15,67	16,63		P(2)=	0,24	0,53	0,23
7	5	1,32	9,63	15,34			0,2	0,32	0,48
8	6	7,35	15,67	16,63			0,06	0,82	0,12

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
43	Метод лінійного програмування з дисконтуванням								
44	w(1,1)	w(1,2)	w(2,1)	w(2,2)	w(3,1)	w(3,2)		max	0
45									
46									
47	0	=	1		a	0,65			
48	F45)	=	1						
49	0	=	1						
50	w(i,k)	≥	0						

Рис. 2.21. Запис формули для розрахунку другого рівняння обмеження

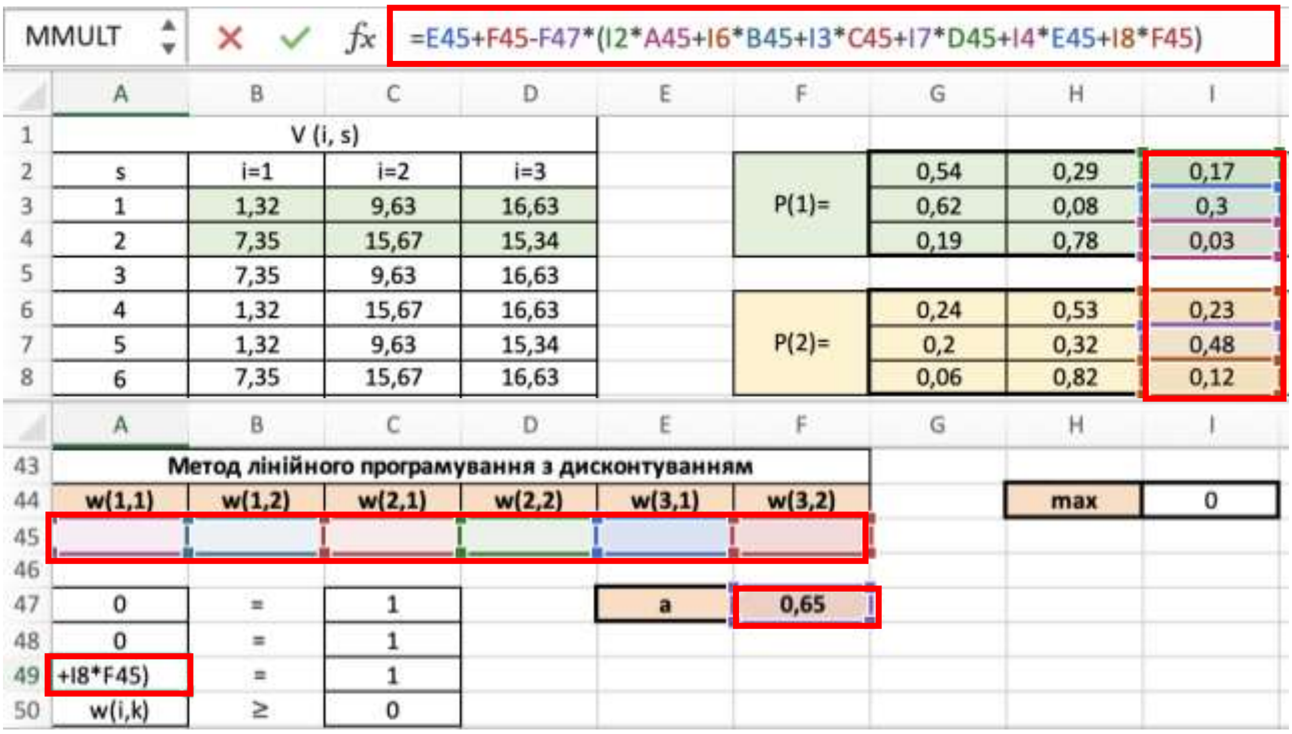


Рис. 2.22. Запис формули для розрахунку третього рівняння обмеження

Потім обираємо «Пошук рішень» та у віконці, яке з'явиться (рис. 2.23), вводимо комірку цільової функції та вказуємо, що її треба максимізувати. Далі обираємо комірки зі всіма змінними w_{ik} та вказуємо всі обмеження. Також, обов'язково помічаємо галочкою, що всі необмежені змінні повинні бути невід'ємними, та в якості методу рішення обираємо симплекс-метод для рішення лінійних задач. Натискаємо кнопку «Вирішити».

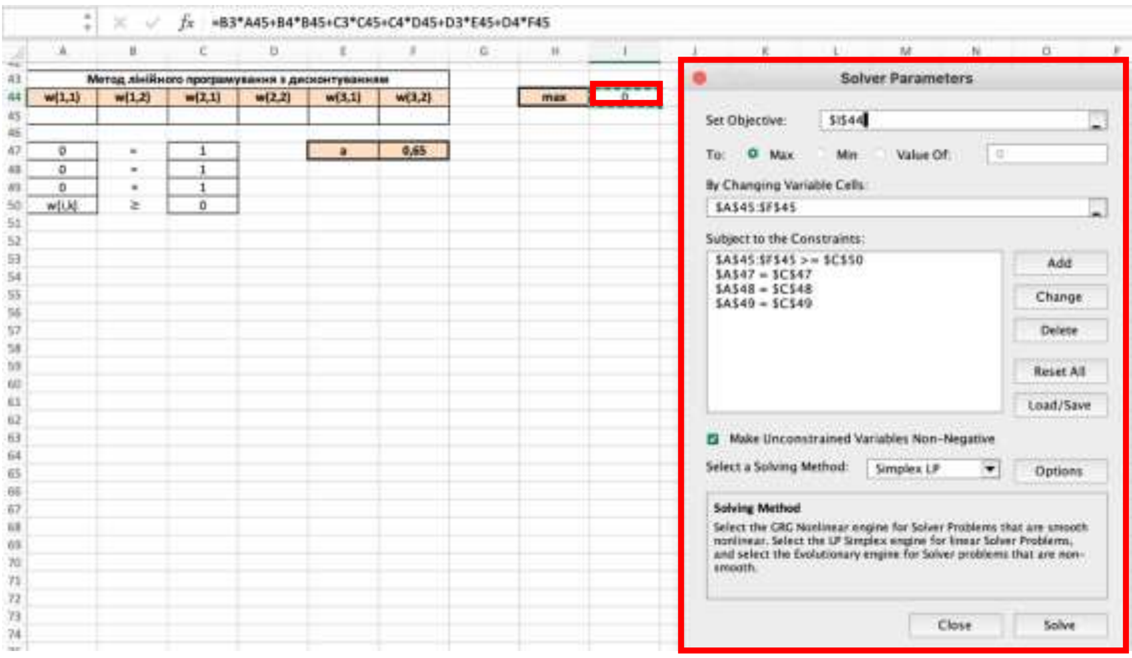


Рис. 2.23. Ввід даних для пошуку рішення

Після вирішення заданих даних отримуємо наступний результат (рис. 2.24).

43	Метод лінійного програмування з дисконтуванням								
44	w(1,1)	w(1,2)	w(2,1)	w(2,2)	w(3,1)	w(3,2)		max	118,88282
45	0	2,1535602	0	3,8458512	2,5720172	0			
46									
47	1	=	1		a	0,65			
48	1	=	1						
49	1	=	1						
50	w(i,k)	≥	0						

Рис. 2.24. Результат пошуку рішення для задачі з дисконтуванням

Оптимальним рішенням є наступні величини w_{ik}.

$$w_{11} = 0, w_{12} = 2{,}153, w_{21} = 0, w_{22} = 3{,}846, w_{31} = 2{,}572, w_{32} = 0$$

А максимізоване рівняння дорівнює 118,883. З цього рішення виходить, що оптимальною стратегією є $s = \{2\ ,2\ ,1\}$. Зазначимо, що при вирішенні методом ітерацій по стратегіям з дисконтуванням було отримано таку саму оптимальну стратегію.

2.7 Висновки до розділу

В ході практичної частини було вирішено задачу планування ремонтів на виробничій лінії заводу Factory 56 за допомогою Марківських процесів прийняття рішень різними методами.

Спочатку було зіставлено дві матриці ймовірностей P^s з трьома станами ВЛ та дві матриці доходу R^s, які пов’язані з матрицями ймовірностей. Потім було вирішено модель ДП з кінцевим числом етапів, а саме на три роки. Оптимальним рішенням виявилось, що впродовж цих трьох років працівникам заводу потрібно робити ремонт виробничої лінії кожного року саме тоді, коли вона знаходиться в поганому чи задовільному станах, а коли ВЛ знаходиться в гарному стані, то в ремонті немає необхідності. Також, сумарний очікуваний дохід за три роки складатиме 35,48 млрд. євро при поганому стані ВЛ у перший рік, 44,32 млрд. євро при задовільному стані ВЛ у перший рік та 45,08 млрд. євро при гарному стані ВЛ.

Далі було вирішено модель ДП з нескінченним числом етапів. Спочатку було застосовано метод повного перебору, результат якого показав, що стратегія $s = \{2, 2, 1\}$ буде приносити найбільший очікуваний річний дохід. Тобто, оптимальна довгострокова стратегія потребує ремонту виробничої лінії, якщо вона знаходиться в поганому або задовільному станах. Прибуток становитиме 14,247 млрд. євро. Ідентичні результати були отримані за допомогою методу ітерацій по стратегіям без дисконтування на третій ітерації.

Якщо порівнювати ці два методи, то перший базується на переборі всіх можливих стаціонарних стратегій в задачі MDP, в той час як другий визначає оптимальну стратегію ітераціонним шляхом. Метод повного перебору стратегій можна використовувати тільки тоді, коли загальне число стаціонарних стратегій досить мале з точки зору практичних розрахунків. Метод ітерацій можна використовувати, коли система має багато альтернатив і станів. Отже, враховуючи вищенаведені причини, метод ітерацій по стратегіям є в більш ефективним.

Також, було застосовано метод ітерацій по стратегіям з дисконтуванням, який враховує, що винагорода в майбутньому має меншу цінність порівняно з винагородою в поточному році. Тобто майбутній дохід зменшується за допомогою коефіцієнта дисконтування. Основною відмінністю від методу без дисконтування є те, що майбутній дохід знижується до поточної вартості, що відображає тимчасову перевагу грошей. Через це метод з дисконтуванням відтворює більш реалістичні умови прийняття рішень. Для вирішення моделі ДП коефіцієнт дисконтування дорівнював 0,65. Оптимальною стратегією виявилась така сама стратегія, як і в методі без дисконтування, але розрахунок було закінчено швидше – на другій ітерації.

Останній метод, який було використано – це метод лінійного програмування. Він дозволяє ефективно вирішувати MDP, особливо в ситуаціях з великим числом станів і дій, та забезпечує оптимальні стратегії для прийняття рішень у динамічних системах. Цим методом було отримано такий самий результат, як і методом ітерацій по стратегіям.

Роблячи висновок другого розділу, вибір методу залежить від конкретних характеристик задачі, а саме від розміру простору станів і дій, вимог до точності та обчислювальних ресурсів. Якщо, розмір простору станів і дій малий, то можна використовувати метод повного перебору стратегій. Коли кількість альтернатив велика та потрібно швидше прийти до результату, то підійде метод ітерацій по стратегіям. А метод ЛП гарантуватиме глобальний оптимум і може бути ефективним для задач з обмеженою кількістю дій і станів.

ВИСНОВОК

В ході кваліфікаційної роботи було проведене дослідження на основі даних підприємства Mercedes-Benz з метою оптимізації планування ремонтів виробничої лінії на найрозвиненішому заводі підприємства – Factory 56. Для цього було обрано Марківські процеси прийняття рішень, так як вони мають багато переваг над іншими методами. Серед них є урахування невизначеності та стохастичності, моделювання довгострокових наслідків, оптимізація політики різних станів, точність, автоматизація та алгоритмічні рішення. MDP надають більш реалістичні та надійні рішення в умовах випадкових змін та краще підходять для динамічних систем, де стан системи змінюється з часом.

В практичній частині на основі даних про Factory 56 було зіставлено і вирішено модель динамічного програмування за допомогою MDP. Отримані результати є важливими, бо вони визначають оптимальний момент для проведення ремонтів, мінімізуючи час простоїв обладнання. Також результат допоміг знайти баланс між частотою технічного обслуговування і вартістю простоїв, що сприяє зменшенню загальних витрат на обслуговування та ремонт. Важливим є те, що розуміння стратегії виконання ремонтів забезпечить надійну роботу обладнання та знизить ризик виникнення дефектів.

Підводячи підсумок, отриманий результат може призвести до значних покращень у виробничих процесах заводу Factory 56, зменшити загальні витрати на ремонт, підвищити ефективність роботи виробничої лінії та загальну продуктивність заводу. Це все дозволить заводу Factory 56 залишатися конкурентоспроможним на ринку та відповідати високим стандартам якості продукції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Mercedes-Benz. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Mercedes-Benz (дата звернення: 28.07.2023).
2. Mercedes-AMG GmbH , Affalterbach. URL: https://group.mercedes-benz.com/careers/about-us/locations/location-detail-page-5160.html (дата звернення: 01.08.2023).
3. Mercedes-Benz електрифікує логістику на заводі вантажівок у Верті. URL: https://www.autocentre.ua/ua/kommercheskie/sobytiekommercheskie/mercedes-benz-elektrifitsiruet-logistiku-na-zavode-gruzovikov-v-verte-1473986.html (дата звернення: 02.08.2023).
4. Mercedes-Benz Werk Sindelfingen. URL: https://group.mercedes-benz.com/karriere/ueber-uns/standorte/standort-detailseite-5125.html?r=dai (дата звернення: 02.08.2023).
5. Einsatz von Algorithmen in der taktischen Unternehmensplanung bei Mercedes-Benz. URL: https://www.haufe.de/controlling/controllerpraxis/algorithmen-in-der-unternehmensplanung-bei-mercedes-benz_112_595600.html (дата звернення: 05.09.2023).
6. Mercedes-Benz richtet PKW-Produktionsorganisation neu aus – 12 Modelle ohne Vorgänger bis 2020. URL: https://mbpassion.de/2014/09/mercedes-benz-richtet-pkw-produktionsorganisation-neu-aus-12-modelle-ohne-vorgaenger-bis-2020/ (дата звернення: 05.09.2023).
7. Цифровий стрибок: компанії Mercedes-Benz і Siemens налагоджують стратегічну співпрацю задля сталого розвитку в галузі автомобілебудування.URL: https://press.siemens.com/ua/uk/presreliz/cifrovizaciya-kompanii-mercedes-benz-i-siemens-nalagodzhuyut-strategichnu-spivpracyu (дата звернення: 06.09.2023).
8. Mercedes-Benz Group, Geschäftsbericht 2022. URL: https://group.mercedes-benz.com/dokumente/investoren/berichte/geschaeftsberichte/mercedes-

benz/mercedes-benz-geschaeftsbericht-2022-inkl-zusammengefasster-lagebericht-mbg-ag.pdf (дата звернення: 09.09.2023).

9. The Cost of Downtime in Production Lines. URL: https://cobaltis.co.uk/2023/02/the-cost-of-downtime-in-production-lines/ (дата звернення: 03.04.2024).
10. Martijn van Otterlo, Marco Wiering. Reinforcement Learning and Markov Decision Processes – 40 с.
11. Hamdy A. Taha. Operations research: an introduction. University of Arkansas, Fayetteville – 903 с.
12. Mercedes’ Factory of the Future. URL: https://www.assemblymag.com/articles/95974-mercedes-factory-of-the-future (дата звернення: 15.04.2024).
13. Full Year Results and Annual Report 2023. URL: https://group.mercedes-benz.com/investors/reports-news/annual-reports/2023/#:~:text=February%2022%2C%202024%20%E2%80%93%20Mercedes%2D,2022%3A%20%E2%82%AC150.0%20billion (дата звернення: 28.04.2024).
14. Cost of Downtime in Manufacturing: Insights & Implications. URL: https://evocon.com/articles/cost-of-downtime-in-manufacturing-insights-implications/ (дата звернення: 03.05.2024).

ДОДАТОК А

Відомість матеріалів кваліфікаційної роботи

№ з/п	Позначення	Найменування	Кількість аркушів	Примітки
1				
2		Документація		
3				
4	САУ.КР.24.12.ПЗ	Пояснювальна записка	66	Формат А4
5				
6	САУ.КР.24.12.ДМ	Демонстраційний матеріал	16	Презентація на CD-R
7				
8	САУ.КР.24.12.КР	Копія роботи	1	Диск CD-R
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6" rowspan="3">САУ.КР.24.12.ДА.ПЗ.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Змін.</td><td>Аркуш</td><td>№ докум.</td><td>Підпис</td><td>Дата</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розроб.</td><td>Піпа К.І.</td><td></td><td></td><td rowspan="5">Матеріали кваліфікаційної роботи</td><td colspan="3">Літ.</td><td>Аркуш</td><td>Аркушів</td></tr>
<tr><td colspan="2">К. розд.</td><td>Желдак Т.А.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Керівн.</td><td>Желдак Т.А.</td><td></td><td></td><td colspan="5" rowspan="3">НТУ «ДП»,
12; 124-20-2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Н.контр.</td><td>Хом’як Т. В.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Зав. каф.</td><td>Желдак Т.А.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Запис **САУ.КР.YY.ZZ.ПЗ** означає наступне:
САУ – код випускаючої кафедри;
КР – кваліфікаційна робота;
N1 – загальна кількість сторінок пояснювальної записки кваліфікаційної роботи з додатками;
N2 – кількість аркушів демонстраційного матеріалу (слайдів презентації);
YY – рік захисту кваліфікаційної роботи в ЕК (наприклад “22”);
ZZ – номер теми студента в наказі про затвердження теми кваліфікаційної роботи (наприклад “06”);
ПЗ – пояснювальна записка;
ДА – додаток А;
12 – код галузі «Інформаційні технології».

ДОДАТОК Б

Відгук
на кваліфікаційну роботу бакалавра
студентки групи _124 – 20 – 2_
спеціальності _124 Системний аналіз_

Тема кваліфікаційної роботи: «Планування ремонтів виробничої лінії підприємства Mercedes-Benz на основі Марківських процесів прийняття рішень»
Обсяг кваліфікаційної роботи: 66 стор.
Мета кваліфікаційної роботи: підвищення ефективності роботи виробничої лінії за рахунок розробки алгоритмів для прийняття оптимального рішення в необхідності ремонту.

Актуальність теми ____

____

____

Тема кваліфікаційної роботи безпосередньо пов'язана з об'єктом діяльності бакалавра спеціальності 124 Системний аналіз, оскільки ______________________________

____

____

Виконані в кваліфікаційній роботі завдання відповідають вимогам ступеня бакалавра. Оригінальність наукових рішень полягає в ______________________________

____

____

____

Практичне значення результатів кваліфікаційної роботи полягає в ______________

____

____

Висновки підтверджують можливість використання результатів роботи в __________

____

____

Оформлення пояснювальної записки та демонстраційного матеріалу до неї виконано згідно з вимогами. Роботу виконано самостійно, відповідно до завдання та у повному обсязі (*в разі невідповідності – вказати*)
У роботі відзначено такі недоліки: ______________________________

____

____

Кваліфікаційна робота в цілому заслуговує оцінки:______________________

З урахуванням висловлених зауважень автор (не) заслуговує присвоєння освітньої кваліфікації «бакалавр з системного аналізу».

Керівник кваліфікаційної роботи бакалавра,
науковий ступінь, вчене звання, посада ______________________ / ПІБ

ДОДАТОК В

Рецензія
на кваліфікаційну роботу бакалавра
студентки групи *124 – 20 – 2*
спеціальності *124 Системний аналіз*

Тема кваліфікаційної роботи: «Планування ремонтів виробничої лінії підприємства Mercedes-Benz на основі Марківських процесів прийняття рішень»
Обсяг кваліфікаційної роботи: 66 стор.
Висновок про відповідність кваліфікаційної роботи завданню та освітньо-професійній програмі спеціальності ______________________________________
____
____
Загальна характеристика кваліфікаційної роботи, ступінь використання нормативно-методичної літератури та передового досвіду
____
____
____
Позитивні сторони кваліфікаційної роботи:
____
____
____

Основні недоліки кваліфікаційної роботи:
____
____
____
____
Кваліфікаційна робота в цілому заслуговує оцінки: ________________________

З урахуванням висловлених зауважень автор (не) заслуговує присвоєння освітньої кваліфікації «бакалавр з системного аналізу».

Рецензент,
науковий ступінь, вчене звання, посада ________________________ /
ПІБ

ДОДАТОК Г. Excel – аркуш з розрахунками

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		V (i, s)											
2	s	i=1	i=2	i=3			0,54	0,29	0,17		-2,53	5,54	6,37
3	1	1,32	9,63	16,63		P(1)=	0,62	0,08	0,3	R(1)	10,04	17,2	6,78
4	2	7,35	15,67	15,34			0,19	0,78	0,03		9,8	18,16	20,45
5	3	7,35	9,63	16,63									
6	4	1,32	15,67	16,63			0,24	0,53	0,23		-2,62	8,09	16,05
7	5	1,32	9,63	15,34		P(2)=	0,2	0,32	0,48	R(2)	8,05	14,94	19,34
8	6	7,35	15,67	16,63			0,06	0,82	0,12		-1,33	16,21	17,78
9	7	7,35	9,63	15,34									
10	8	1,32	15,67	15,34			0,24	0,53	0,23		-2,62	8,09	16,05
11						P(3)=	0,62	0,08	0,3	R(3)	10,04	17,2	6,78
12							0,19	0,78	0,03		9,8	18,16	20,45
13													
14							0,54	0,29	0,17		-2,53	5,54	6,37
15						P(4)=	0,2	0,32	0,48	R(4)	8,05	14,94	19,34
16							0,19	0,78	0,03		9,8	18,16	20,45
17													
18	s	Pi(1,s)	Pi(2,s)	Pi(3,s)	E(s)		0,54	0,29	0,17		-2,53	5,54	6,37
19	1	0,5004	0,3146	0,185	6,77	P(5)=	0,62	0,08	0,3	R(5)	10,04	17,2	6,78
20	2	0,1612	0,5155	0,3233	14,223		0,06	0,82	0,12		-1,33	16,21	17,78
21	3	0,3822	0,4026	0,2151	10,265								
22	4	0,299	0,4339	0,2671	11,639		0,24	0,53	0,23		-2,62	8,09	16,05
23	5	0,469	0,3284	0,2026	6,892	P(6)=	0,2	0,32	0,48	R(6)	8,05	14,94	19,34
24	6	0,2052	0,4991	0,2956	14,247		0,19	0,78	0,03		9,8	18,16	20,45
25	7	0,3546	0,4121	0,2332	10,153								
26	8	0,2397	0,4619	0,2983	12,132		0,24	0,53	0,23		-2,62	8,09	16,05
27	MAX E(s)	14,247				P(7)=	0,62	0,08	0,3	R(7)	10,04	17,2	6,78
28							0,06	0,82	0,12		-1,33	16,21	17,78
29													
30							0,54	0,29	0,17		-2,53	5,54	6,37
31						P(8)=	0,2	0,32	0,48	R(8)	8,05	14,94	19,34
32							0,06	0,82	0,12		-1,33	16,21	17,78
33	Метод лінійного програмування без дисконтування												
34	w(1,1)	w(1,2)	w(2,1)	w(2,2)	w(3,1)	w(3,2)		E(max)	14,24828				
35	0	0,205254	0	0,4991	0,295646	0							
36													
37	0	=	0										
38	0	=	0										
39	0	=	0										
40	1	=	1										
41	w(i,k)	≥	0										
42													
43	Метод лінійного програмування з дисконтуванням												
44	w(1,1)	w(1,2)	w(2,1)	w(2,2)	w(3,1)	w(3,2)		max	118,8828				
45	0	2,15356	0	3,845851	2,572017	0							
46													
47	1	=	1		a	0,65							
48	1	=	1										
49	1	=	1										
50	w(i,k)	≥	0										

Рис. Г.1. Перша частина розрахунків

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	**Метод повного перебору**			**Метод ітерацій по стратегіям**				**i**	**k=1**	**k=2**	**f(i)**	**k***
2	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)	f(1)	f(2)	f(3)	**1 ітерація**	1	-10,405	-1,256	-1,256	2
3	0,5004	0,3146	0,185	-17,175	-8,462	0		2	-1,691	9,531	9,531	2
4	**E(1)**	6,77		**E(1)**	6,77			3	6,767	7,367	7,367	2
5												
6	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)	f(1)	f(2)	f(3)		**i**	**k=1**	**k=2**	**f(i)**	**k***
7	0,1612	0,5155	0,3233	-9,508	-0,667	0	**2 ітерація**	1	-4,004	4,715	4,715	2
8	**E(2)**	14,223		**E(2)**	14,223			2	3,686	13,559	13,559	2
9								3	14,304	14,219	14,304	1
10	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)	f(1)	f(2)	f(3)						
11	0,3822	0,4026	0,2151	-9,578	-0,723	0		**i**	**k=1**	**k=2**	**f(i)**	**k***
12	**E(3)**	10,265		**E(3)**	14,247		**3 ітерація**	1	-4,058	4,668	4,668	2
13								2	3,639	13,527	13,527	2
14	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)					3	14,247	14,168	14,247	1
15	0,299	0,4339	0,2671									
16	**E(4)**	11,639										
17												
18	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)	**Метод ітерацій з дисконтуванням**				**i**	**k=1**	**k=2**	**f(i)**	**k***
19	0,469	0,3284	0,2026	f(1)	f(2)	f(3)	**1 ітерація**	1	13,474	21,444	21,444	2
20	**E(5)**	6,892		13,475	21,804	29,966		2	22,042	31,310	31,310	2
21				**a**	**0,65**			3	29,933	29,820	29,933	1
22	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)									
23	0,2052	0,4991	0,2956	f(1)	f(2)	f(3)		**i**	**k=1**	**k=2**	**f(i)**	**k***
24	**E(6)**	14,247		33,543	42,255	43,066	**2 ітерація**	1	25,821	33,578	33,578	2
25				**a**	**0,65**			2	33,748	42,260	42,260	2
26	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)					3	43,036	42,525	43,036	1
27	0,3546	0,4121	0,2332									
28	**E(7)**	10,153										
29												
30	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)									
31	0,2397	0,4619	0,2983									
32	**E(8)**	12,132										

Рис. Г.2. Друга частина розрахунків