МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Національний
технічний університет
ДНІПРОВСЬКА
ПОЛІТЕХНІКА
1899

ФАКУЛЬТЕТ АРХІТЕКТУРИ, БУДІВНИЦТВА ТА ЗЕМЛЕУСТРОЮ
Кафедра фізики

В. В. Титаренко, Н. О. Куцева, М. О. Журавльов

ФІЗИКА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи у 3 частинах
Частина 2. Динаміка твердого тіла

для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей
131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство,
133 Галузеве машинобудування

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Титаренко В. В.

Фізика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 Галузеве машинобудування : у 3 ч. / В. В. Титаренко, Н. О. Куцева, М. О. Журавльов ; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – Ч. 2. Динаміка твердого тіла. – 37 с.

Автори:
В. В. Титаренко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Н. О. Куцева, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
М. О. Журавльов.

Затверджено науково-методичними комісіями спеціальностей 131 Прикладна механіка (протокол № 4 від 01.07.2024), 132 Матеріалознавство (протокол № 7 від 26.06.2024), 133 Галузеве машинобудування (протокол № 2 від 22.10.2024), за поданням кафедри фізики (протокол № 15 від 06.06.2024).

Методичні рекомендації містять приклади розв’язування задач за програмою навчальної дисципліни «Фізика» з розділу «Динаміка твердого тіла», для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 Галузеве машинобудування. Також ці методичні рекомендації можуть стати в пригоді студентам інших спеціальностей.

Методичні рекомендації орієнтовано на підвищення ефективності самостійної підготовки студентів до поточного та підсумкового контролів.

Видано в рамках теми Ш-518 «Розробка методичного забезпечення за дисциплінами, що викладаються кафедрою фізики НТУ «Дніпровська політехніка».

Відповідальний за випуск завідувач кафедри фізики В. М. Горєв, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Вступ

Дисципліна «Фізика» є базовим освітнім компонентом за галуззю знань циклу спеціальної підготовки для здобувачів освітньо-професійних програм спеціальностей 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 «Галузеве машинобудування» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

У рамках курсу викладено матеріал щодо фундаментальних понять, законів і теорій класичної та сучасної фізики, що забезпечує здобувачам ефективне опанування спеціальних дисциплін і подальшу можливість використання фізичних принципів у галузі механічної інженерії.

Ці методичні матеріали присвячені другій частині курсу, а саме таким розділам, як динаміка твердого тіла, закони збереження моменту імпульсу та енергії.

У методичних рекомендаціях надані приклади розв'язування задач, що містять основні теоретичні відомості та задачі для самостійного розв'язування. Опанування матеріалу, наведеного в даних методичних рекомендаціях, дозволить підвищити ефективність самостійної підготовки здобувачів освіти до поточного та підсумкового контролю.

Тематика наведених у методичних рекомендаціях прикладів задач і розподіл годин на кожну тему визначено в робочій програмі та силабусі дисципліни.

Згідно з робочою програмою відповідної дисципліни критерії оцінювання є такими:

Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

Опис кваліфікаційного рівня	**Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії**	**Показник оцінки**
	Знання	
♦ концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100
	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
	Рівень знань незадовільний	<60
	Уміння/навички	
♦ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв'язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми; - обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв'язання завдання	95-100
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з не грубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком	65-69
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями	60-64
	рівень умінь/навичок незадовільний	<60
	Комунікація	
♦ донесення до фахівців і нефахівців інформації, ідей, проблем, рішень, власного досвіду та аргументації; ♦ збір, інтерпретація та застосування даних; ♦ спілкування з професійних питань, у тому числі іноземною мовою, усно та письмово	Вільне володіння проблематикою галузі. Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова: - правильна; - чиста; - ясна; - точна; - логічна; - виразна; - лаконічна. Комунікаційна стратегія: - послідовний і несуперечливий розвиток думки; - наявність логічних власних суджень; - доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням; - правильна структура відповіді (доповіді); - правильність відповідей на запитання; - доречна техніка відповідей на запитання; - здатність робити висновки та формулювати пропозиції	95-100
	Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами. Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами. Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами	90-94
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння проблематикою галузі.	74-79

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п’ять вимог)	
	Задовільне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)	70-73
	Часткове володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев’ять вимог)	65-69
	Фрагментарне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано 10 вимог)	60-64
	Рівень комунікації незадовільний	<60
Відповідальність і автономія		
♦ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами; ♦ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах; ♦ формування суджень, що враховують соціальні, наукові та етичні аспекти; ♦ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп; ♦ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії	Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на: 1) управління комплексними проектами, що передбачає: - дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію; - здатність до роботи в команді; - контроль власних дій; 2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає: - обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів; - самостійність під час виконання поставлених завдань; - ініціативу в обговоренні проблем; - відповідальність за взаємовідносини; 3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає: - використання професійно-орієнтовних навичок; - використання доказів із самостійною і правильною аргументацією; - володіння всіма видами навчальної діяльності; 4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає: - ступінь володіння фундаментальними знаннями; - самостійність оцінних суджень;	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	- високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок; - самостійний пошук та аналіз джерел інформації	
	Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)	90-94
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60

1. Динаміка твердого тіла

1.1 Основні поняття, закони і формули

Моментом інерції твердого тіла I відносно деякої осі називається скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків елементарних мас часток тіла Δm_i на квадрат їх відстані R_i до цієї осі:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2 \qquad (1.1.1)$$

Отже, момент інерції матеріальної точки масою m щодо осі, яка розташована на відстані R від неї:

$$I = mR^2 \qquad (1.1.2)$$

Звичайно при обчисленні моментів інерції твердих тіл підсумовування у формулі (1) заміняють інтегруванням:

$$I = \int_V \rho R^2 dV \qquad (1.1.3)$$

де ρ - густина тіла; V - об'єм тіла. Одиниці I в СІ: $\left[I\right] = \left[\text{кг} \cdot \text{м}^2\right]$.

Застосовуючи формулу (3) до тіл конкретної геометричної форми, можна знайти їх моменти інерції. Далі наведені моменти інерції деяких тіл, що мають масу m, відносно осі OZ, яка проходить через центр мас тіла (припускається, що маса розподілена однорідно по об'єму тіла).

Моменти інерції:

– суцільного циліндра або диска (рис. 1.1, *а*):

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (1.1.4)$$

– тонкостінного циліндра, або кільця (рис. 1.1, *б*):

$$I = mR^2 \text{ при } b \ll R \qquad (1.1.5)$$

– суцільної кулі (рис. 1.1, *в*):

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \qquad (1.1.6)$$

– довгого тонкого стрижня (рис. 1.1, *г*)

$$I = \frac{1}{12} ml^2 \qquad (1.1.7)$$

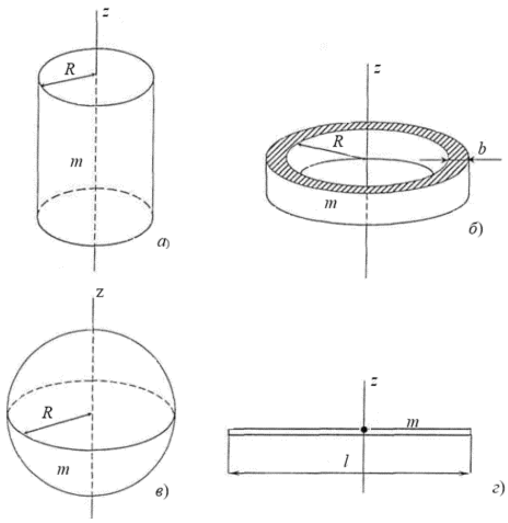

Рис. 1.1

Момент сили - це векторна величина, яка дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$ точки прикладання сили $\vec{F}$ і цієї сили:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \qquad (1.1.8)$$

Момент сили $\vec{M}$ є вектор, перпендикулярний до площини, у якій розташовані вектори $\vec{F}$ і $\vec{r}$ (рис. 1.2, *а*). Напрямок $\vec{M}$ визначається за правилом правого гвинта: якщо дивитися уздовж $\vec{M}$, то поворот, що викликаний силою, повинен спостерігатись за ходом стрілки годинника. Модуль моменту сили дорівнює:

$$M = Fr\sin\alpha = Fd\,, \qquad (1.1.9)$$

де α – кут між $\vec{F}$ і $\vec{r}$; d – плече сили, тобто найкоротша відстань від осі до напрямку дії сили, $d = r\sin\alpha$. Одиниці $\vec{M}$ в СІ: $[M] = [\text{Н}\cdot\text{м}]$.

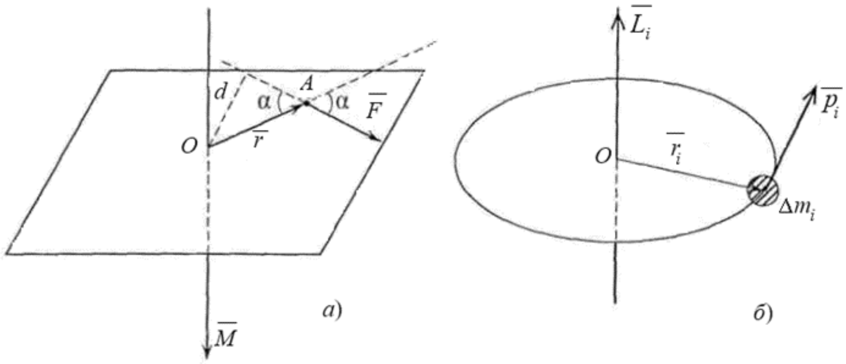

Рис. 1.2

Моментом імпульсу $\vec{L}_i$ частки називається векторна величина, яка дорівнює векторному добутку радіуса-вектора частки $\vec{r}_i$ і її імпульсу $\vec{p}_i$,

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \qquad (1.1.10)$$

де $\vec{p}_i = \Delta m_i \vec{\upsilon}_i$. Вектор $\vec{L}_i$ спрямований перпендикулярно до площини розташування векторів $\vec{r}_i$ і $\vec{p}_i$ за правилом правого гвинта (рис. 1.2, *б*).

Момент імпульсу твердого тіла дорівнює векторній сумі моментів імпульсів всіх частинок, що становлять тіло:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \qquad (1.1.11)$$

У випадку однорідного тіла, що обертається навколо однієї зі своїх осей симетрії, $\vec{L}$ збігається за напрямком з вектором кутової швидкості обертання $\vec{\omega}$ і тоді

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \qquad (1.1.12)$$

де *I* - момент інерції тіла відносно осі обертання. Одиниці $\vec{L}$ в СІ: $[L] = \left[\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}\right]$

.

Теорему Штейнера використовують для обчислення моменту інерції твердого тіла щодо осі, розташованої довільно (наприклад, *oz*' на рис. 1.3), якщо відомий момент інерції тіла відносно паралельної осі, яка проходить через центр мас тіла (вісь *oz*). Момент інерції тіла I'_z відносно якої-небудь осі дорівнює сумі моменту інерції I_z відносно осі, паралельної даної та такої, що проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла *m* на квадрат відстані *a* між осями:

$$I'_z = I_z + ma^2. \qquad (1.1.13)$$

Знайдемо момент інерції тонкого стрижня масою m відносно осі, яка проходить через один з його торців і перпендикулярної до його геометричної осі (див. рис. 1.3). З огляду на те, що $a = l/2$, а момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас тіла $I_z = ml^2/12$, одержуємо:

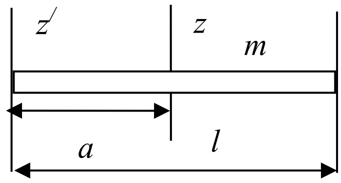

Рис. 1.3

$$I'_z = I_z + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{1}{3}ml^2. \qquad (1.1.14)$$

Рівняння руху твердого тіла, що обертається, зв'язує швидкість зміни моменту імпульсу тіла $d\vec{L}/dt$ з моментом сил $\vec{M}$, що діють на тіло:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (1.1.15)$$

Якщо тіло обертається навколо однієї з головних осей інерції, то підставивши в (1.1.15) $\vec{L} = I\vec{\omega}$, одержимо:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon}\text{, якщо } I\text{=const} \qquad (1.1.16)$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}\ . \qquad (1.1.17)$$

Таким чином, добуток моменту інерції твердого тіла I щодо нерухомої осі обертання й кутового прискорення тіла $\vec{\varepsilon}$ дорівнює моменту зовнішніх сил $\vec{M}$ відносно тієї ж осі. Рівняння (1.1.15) і (1.1.17) являють собою різні форми запису основного рівняння динаміки обертового руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

1.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 1:

Довжина стрижня 2 м. На якій відстані від більшої кулі слід розмістити опору, щоб стрижень був у рівновазі? Маса меншої кулі 2 кг, а більшої – 10 кг.

Дано:

$m_1 = 2$ кг

$m_2 = 10$ кг

$L = 2$ м

$l_2 - ?$

Розв’язок:

Стрижень буде знаходитись у рівновазі, тобто не буде обертатися, якщо векторна сума усіх моментів сил, що діють на стрижень, буде дорівнювати нулю.

Запишемо умову рівноваги

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

Модуль моменту сили

$$M = rF\sin\alpha,$$

де r – відстань від осі обертання (точка O, де стрижень стикається з опорою) до точки прикладення сили (рис. 1.4), а α– кут між векторами $\vec{F}$ і $\vec{r}$.

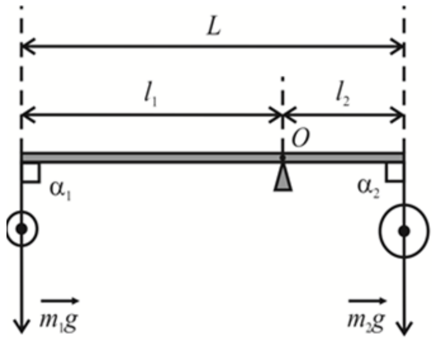

Рис. 1.4

З рисунку видно, що $r_1 = l_1$, $r_2 = l_2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$.

$$M_1 = r_1F_1\sin\alpha = l_1m_1g\sin 90^\circ = l_1m_1g,$$

$$M_2 = r_2F_2\sin\alpha = l_2m_2g\sin 90^\circ = l_2m_2g$$

Прийнято вважати, що момент сили, який намагається повернути тіло за годинниковою стрілкою – додатній, а проти годинникової стрілки – від'ємний. Це означає, що

$$\left|\overrightarrow{M_1}\right| = -M_1,\ \left|\overrightarrow{M_2}\right| = M_2$$

$$-M_1 + M_2 = 0,$$

$$-l_1m_1g + l_2m_2g = 0.$$

Оскільки $l_1 = L - l_2$, тоді $\left(L - l_2\right)m_1 = l_2m_2 \Rightarrow lm_1 - l_2m_1 = l_2m_2 \Rightarrow l_2 = \dfrac{lm_1}{m_1 + m_2}$.

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$l_2 = \frac{2\cdot 2}{2+10} = 0{,}33 \text{ м}.$$

Відповідь: Щоб стрижень був у рівновазі, опору слід розмістити на відстані 0,33 м від більшої кулі.

<u>Приклад 2:</u>

Махове колесо, момент інерції якого 0,6 кг·м^2, обертається під дією моменту сили 24 Н·м. За яким законом змінюється його кутова швидкість? Початкова кутова швидкість дорівнює 4 рад/с.

Дано:	**Розв'язок:**
$I = 0{,}6$ кг·м^2	Запишемо закон зміни кутової швидкості з часом $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.
$M = 24$ Н·м	Основне рівняння динаміки обертального руху має вигляд: $M = I\cdot\varepsilon$.
$\omega_0 = 4$ рад/с	
$\omega(t) - ?$	

Звідси кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{M}{I},$$

$$\varepsilon = \frac{24}{0{,}6} = 40 \text{ рад/с}^2.$$

Запишемо закон, за яким змінюється кутова швидкість махового колеса:

$$\omega = 4 + 40\cdot t.$$

Відповідь: Закон, за яким змінюється кутова швидкість махового колеса: $\omega = 4 + 40 \cdot t$.

Приклад 3:

Тіло з моментом інерції 0,2 кг·м^2 почало обертатися під дією моменту сили 2 Н·м. Через який час частота обертання тіла буде дорівнювати 600 об/хв.

Дано:	**СІ:**
$I = 0,2$ кг·м^2	
$M = 2$ Н·м	
$\nu = 600$ об/хв	$\nu = 10$ об/с
$t - ?$	

Розв'язок:

Основне рівняння динаміки обертального руху має вигляд:

$$M = I \cdot \varepsilon .$$

Звідси кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{M}{I},$$

$$\varepsilon = \frac{2}{0,2} = 10 \text{ рад/с}^2 .$$

Обертання тіла є рівноприскореним, оскільки ε=const.

Зв'язок між частотою ν і кутовою швидкістю ω:

$$\omega = 2\pi\nu ,$$

$$\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 = 62,8 \text{ рад/с} .$$

Запишемо закон, за яким змінюється кутова швидкість з часом при рівноприскореному обертанні:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t .$$

За умовою задачі ω_0=0, отже $\omega = \varepsilon t \Rightarrow t = \dfrac{\omega}{\varepsilon}$.

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$t = \frac{62,8}{10} = 6,28 \text{ с.}$$

Відповідь: Частота обертання тіла буде дорівнювати 600 об/хв через 6,28 с.

Приклад 4:

Стрижень обертається навколо свого кінця за законом φ=4t–5t^2. На нього діє момент сили 15 Н·м. Знайти масу стрижня, якщо його довжина 30 см.

Дано:	**СІ:**
$\varphi = 4t - 5t^2$	
$M = 15$ Н·м	
$l = 30$ см	$l = 0,3$ м
$m - ?$	

Розв'язок:

Рівняння рівносповільненого обертального руху:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} .$$

Порівнюючи рівняння руху з наданим в умові, отримаємо: .

$$\frac{\varepsilon}{2} = 5 \Rightarrow \varepsilon = 10 \text{ рад/с}^2$$

Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху:

$$M = I \cdot \varepsilon .$$

Звідси момент інерції стержня:

$$I = \frac{M}{\varepsilon},$$

$$I = \frac{15}{10} = 1{,}5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Момент інерції стриженя, який обертається навколо свого кінця, визначається за виразом:

$$I = \frac{1}{3} m l^2,$$

звідси маса стрижня

$$m = \frac{3I}{l^2}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$m = \frac{3 \cdot 1{,}5}{0{,}3^2} = 50 \text{ кг}.$$

Відповідь: масу стрижня 50 кг.

Приклад 5:

Знайти момент інерції кулі масою 10 кг та радіусом 10 см при обертанні відносно дотичної до кулі осі.

Дано:	СІ:	Розв'язок:
$m = 10$ кг		Момент інерції залежить від маси тіла, його геометричних розмірів та від розташування осі, відносно якої відбувається обертання (рис. 1.5).
$R = 10$ см	$R = 0{,}1$ м	
$M - ?$		

Знайдемо момент інерції відносно довільної осі за допомогою теореми Штейнера, яка формулюється наступним чином: момент інерції I відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції I_0 відносно осі, яка є паралельною даній і що і проходить через центр мас тіла, та добутку маси тіла m на квадрат відстані a між осями:

$$I = I_0 + ma^2,$$

де a - відстань між дотичною віссю та віссю, що проходить через центр мас кулі (a=R).

Момент інерції кулі відносно осі, яка проходить через центр мас:

$$I_0 = \frac{2}{5} mR^2.$$

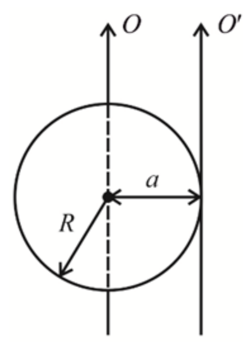

Рис. 1.5

Тоді

$$I = I_0 + ma^2 = \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$I = \frac{7}{5} \cdot 10 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}14\ \text{кг} \cdot \text{м}^2 .$$

Відповідь: Момент інерції кулі 0,14 кг·м^2.

<u>Приклад 6:</u>

Стрижень масою 1 кг і довжиною 20 см обертається відносно осі, яка проходить через його кінець. Обертання відбувається за законом $\varphi = 8t + 2t^2$. Знайти момент сили (обертаючий момент), діючий на стрижень.

Дано:	СІ:	Розв'язок:
$m = 1\,\text{кг}$ $l = 20\ \text{см}$ $\varphi = 8t + 2t^2$ $M - ?$	 $l = 0{,}2\ \text{м}$	Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху: $M = I \cdot \varepsilon .$ Кутове прискорення дорівнює другій похідній від кута повороту за часом:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(8t + 2t^2\right) = \frac{d}{dt}\left(8 + 4t\right) = 4\ \text{рад/с}^2 .$$

За теоремою Штейнера момент інерції тіла відносно зміщеної вісі обертання:

$$I = I_0 + ma^2 ,$$

де відстань a між віссю O, яка проходить через центр мас, та віссю O', що проходить через кінець стрижня (рис. 1.6), дорівнює:

$$a = \frac{l}{2} .$$

Момент інерції стрижня відносно вісі, яка проходить через його центр мас

$$I_0 = \frac{1}{12} ml^2 .$$

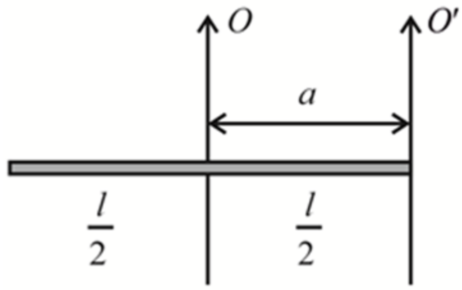

Рис. 1.6

Тоді

$$I = I_0 + ma^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} ml^2 .$$

Момент сили

$$M = I\varepsilon = \frac{1}{3} ml^2 \varepsilon .$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$M = \frac{1}{3} \cdot 0{,}2^2 \cdot 4 = 0{,}053\ \text{Н} \cdot \text{м} .$$

Відповідь: Момент сили (обертаючий момент), діючий на стрижень 0,053 Н·м.

Приклад 7:

Диск масою 2 кг та радіусом 0,4 м обертається з кутовим прискоренням 1 рад/с^2. Знайти дотичну силу, прикладену до ободу диска.

Дано:	Розв'язок:
$m = 2$ кг $R = 0,4$ м	Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху: $M = I \cdot \varepsilon$.
$F - ?$	Момент інерції диска відносно осі, яка проходить через центр мас (рис. 1.7):

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

Тоді

$$M = \frac{1}{2} mR^2 \varepsilon.$$

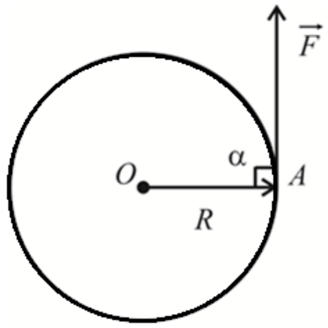

Рис. 1.7

За визначенням, момент сили дорівнює векторному добутку сили на радіус-вектор, який з'єднує вісь обертання та точку прикладення сили:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

у скалярному вигляді

$$M = rF\sin\alpha,$$

де α– кут між векторами $\vec{F}$ і $\vec{r}$. З рисунку α=90^0, $r = OA = R$

$$M = RF\sin 90^\circ = RF,$$

$$RF = \frac{1}{2} mR^2 \beta,$$

$$F = \frac{1}{2} mR\beta.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ Н}.$$

Відповідь: дотична сила, прикладена до ободу диска, 0,4 Н.

Приклад 8:

До ободу однорідного диска радіуса 0,2 м прикладена дотична сила 50 Н. При обертанні на диск діє момент сил тертя 5 Н·м. Знайти масу диска, якщо відомо, що диск обертається з кутовим прискоренням 100 рад/с^2.

Дано: **Розв'язок:**

$R = 0,2$ м $F = 50$ Н $M = 5$ Н·м $\varepsilon = 100$ рад/ с^2 $m - ?$	Рівноприскорений рух диска з кутовим прискоренням $\vec{\varepsilon}$ викликано дією на нього моментів дотичної сили $\vec{M}_{\tau}$ і сил тертя $\vec{M}_{\text{тер}}$ (рис. 1.8). Для визначення маси диска запишемо його рівняння обертального руху у векторному вигляді:

$$\vec{M}_{\tau} + \vec{M}_{\text{тер}} = I \cdot \vec{\varepsilon},$$

а у проекції на вісь *oz*:

$$M_{\tau} - M_{\text{тер}} = I \cdot \varepsilon.$$

Оскільки момент інерції диска дорівнює:

$$I = \frac{1}{2} m R^2,$$

а момент дотичної сили щодо осі обертання:

$$M_{\tau} = F_{\tau} \cdot R,$$

то рівняння (1) прийме вигляд:

$$F_{\tau} \cdot R - M_{\text{тер}} = \frac{mR^2}{2} \varepsilon /$$

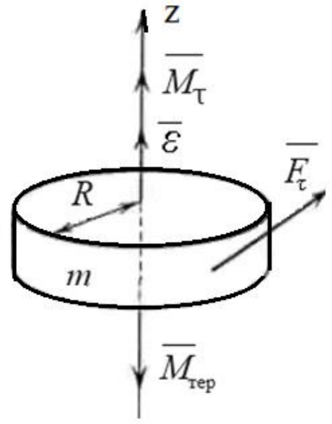

Рис. 1.8

Звідси маса диска:

$$m = \frac{2}{R^2 \varepsilon} \left(F_{\tau} \cdot R - M_{\text{тер}} \right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$m = \frac{2}{0,04 \cdot 100} \left(50 \cdot 0,2 - 5 \right) = 2,5 \text{ кг}.$$

Відповідь: маса диска 2,5 кг.

<u>Приклад 9:</u>

На барабан масою 9 кг намотаний шнурок, до кінця якого прив’язане тіло масою 2 кг. Знайти прискорення тіла. Барабан прийняти за однорідний циліндр. Тертя не враховувати.

Дано:	**Розв’язок:**
$M = 9$ кг $m = 2$ кг $a - ?$	Так як маємо два види руху (поступовий та обертовий) (рис. 1.9), то необхідно записати рівняння динаміки для обох рухів. Запишемо основне рівняння динаміки поступального руху у векторній формі:

$$m\vec{g}+\vec{T}=m\vec{a},$$

та у формі проекції

$$mg-T=ma. \qquad (1.2.1)$$

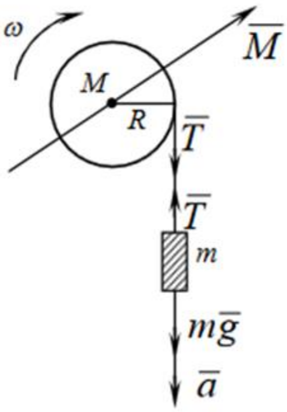

Рис. 1.9

Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху:

$$M=I\cdot\varepsilon. \qquad (1.2.2)$$

Враховуючи визначення моменту сили $M=T\cdot R$, та зв'язок кутового прискорення з лінійним , можна записати $\varepsilon=a/R$, можна записати

$$M=I\cdot\frac{a}{R}=T\cdot R\Rightarrow T=\frac{Ia}{R^2},$$

або з урахуванням моменту інерції суцільного циліндра $I=\frac{1}{2}mR^2$, маємо

$$T=\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{a}{R^2}=\frac{aM}{2}. \qquad (1.2.3)$$

Підставимо (1.2.3) в (1.2.1):

$$mg-\frac{aM}{2}=ma,$$

звідси

$$a=\frac{mg}{m+M/2}=\frac{2mg}{2m+M}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$a=\frac{2\cdot 2\cdot 9{,}8}{2\cdot 2+9}=3\,\text{м/с}^2.$$

Відповідь: Прискорення тіла 3 м/с^2.

Приклад 10:

Маховик, масу якого 5 кг можна вважати розподіленою по ободу радіуса 20 см, вільно обертається навколо горизонтальної осі, яка проходить через його центр, з частотою 720 хв$^{-1}$ При гальмуванні маховик зупиняється через проміжок часу 20 с. Визначити гальмуючий момент та кількість обертів, яку робить маховик до повної зупинки.

Дано:	**СІ:**
$m=5$ кг	$R=0{,}2$ м
$R=20$ см	$\nu=12\ \text{с}^{-1}$
$\nu=720\ \text{хв}^{-1}$	
$\Delta t=20$ с	
$N, M-?$	

Розв'язок:

Гальмуючий момент є сталим тому, рух маховика є рівносповільненим.

Вісь x спрямуємо вздовж осі обертання маховика, як показано на рис. 1.10, де $\vec{M}$ - гальмуючий момент, $\vec{\omega}_0$ - початкова кутова швидкість, $\Delta\vec{\omega}$ - зміна кутової швидкості за інтервал часу Δt:

$$\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0 .$$

Основне рівняння динаміки обертального руху можна записати у вигляді:

$$\vec{M}\Delta t = I\Delta\vec{\omega} .$$

Векторному рівнянню (1) відповідає скалярне рівняння:

$$M\Delta t = I\Delta\omega . \qquad (1.2.4)$$

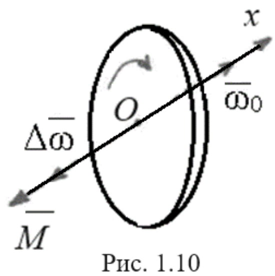

Рис. 1.10

З умови задачі ω=0,

$$\Delta\omega = \left|\omega - \omega_0\right| = \omega_0 = 2\pi\nu . \qquad (1.2.5)$$

Момент інерції маховика знайдемо за формулою:

$$I = mR^2 . \qquad (1.2.6)$$

Підставляємо (1.2.5) та (1.2.6) в (1.2.4):

$$M\Delta t = mR^2 \cdot 2\pi\nu \Rightarrow M = \frac{2\pi\nu mR^2}{\Delta t} . \qquad (1.2.7)$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$M = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 12\cdot 5\cdot 0{,}04}{20} = 0{,}75\ \text{Н}\cdot\text{м} .$$

Число обертів можна знайти з кінематичних формул. Кутове переміщення Δφ, що проходить маховик до зупинки, знайдемо, враховуючи те, що рух рівносповільнений і φ_0=0 за формулою:

$$\Delta\varphi = \omega_0\Delta t - \frac{\varepsilon\left(\Delta t\right)^2}{2} . \qquad (1.2.8)$$

Врахуємо, що $\omega = \omega_0 - \varepsilon\Delta t = 0$; тоді (1.2.8) буде мати вигляд:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_0\Delta t}{2} ,$$

а так як Δφ = 2πN

де *N* - кількість обертів, що зробив маховик до зупинки, а $\omega_0 = 2\pi\nu$

одержимо

$$2\pi N = \frac{2\pi\nu\Delta t}{2} \Rightarrow N = \frac{\nu\Delta t}{2} .$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$N = \frac{12\cdot 20}{2} = 120 .$$

Відповідь: гальмуючий момент 0,75 Н·м, до повної зупинки маховик робить 120 обертів.

1.3 Задачі для самостійного розв’язування

1. Знайти кутове прискорення стриженя, що обертається навкруги осі, яка проходить крізь один з його кінців, якщо на нього діє момент сил 2 Н·м. Довжина стриженя 50 см, маса 1 кг.

2. Маховик радіусом 25 см і масою 10 кг обертається під дією сили, дотичної до його ободу. Знайти цю силу, якщо рівняння кутової швидкості має вигляд $\omega = 6 + 4t$ (рад/с). Тертям знехтувати.

3 Знайти момент сил гальмування, що зупиняють маховик за 2,5 с, якщо він обертається з кутовою швидкістю 25 рад/с. Маса маховика 6 кг, радіус 10 см.

4 Маховик обертається під дією приводного ременя, сила натягу якого 100 Н. Знайти частоту обертання маховика через 31,4 с після початку обертання, якщо на нього діє момент сил тертя 30 Н·м. Маса маховика 25 кг, радіус 20 см.

5 Вентилятор, момент інерції якого 18 кг·м^2, обертається із частотою 10 с$^{-1}$. Через 3 хв після відключення він зупиняється. Знайти момент сил опору та 20 число обертів, які він зробить до зупинки.

6 До диска радіуса 25 см прикладений обертаючий момент 200 Н·м. Знайти мінімальну силу, з якою необхідно притискати до диска дві гальмові колодки, щоб він не обертався. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,2.

7 Нитка, до кінця якої прив'язаний вантаж масою 1 кг, намотана на вал масою 17,6 кг. Визначити прискорення вантажу. Тертям зневажити.

8 Тіло починає обертатися за допомогою вантажу, прив'язаного до нитки, попередньо намотаної на його вісь. Визначити момент інерції тіла з віссю, якщо вантаж масою 2 кг опускається на відстань 98 см за 5 с. Радіус осі 10 см. Тертям знехтувати.

9 На вал масою 8 кг і радіуса 4 см намотана нитка, до кінця якої прив'язаний вантаж масою 1 кг. З яким кутовим прискоренням буде обертатися вал? Знайти швидкість опускання вантажу через 10 с після початку обертання. Виконати ті ж обчислення у випадку, якщо нитка, до якої прив'язаний вантаж, намотана на шків радіусом 20 см. Маси шківа і вала однакові. Тертям знехтувати.

10 Через блок масою 160 г перекинута нитка, на якій висять вантажі масами 0,6 і 0,3 кг. Знайти прискорення, з якими рухаються гирі, і сили натягу ниток, до яких підвішені гирі. Блок вважати однорідним диском. Тертям знехтувати.

2 Закони збереження моменту імпульсу та енергії

2.1 Основні поняття, закони і формули

Робота d*A* при обертанні тіла на кут dφ під дією прикладеного до тіла моменту сил *M* визначається за формулою:

$$dA = Md\varphi, \tag{2.1.1}$$

де *M* - сума проекцій моментів зовнішніх сил на вісь обертання, $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$.

Якщо в процесі обертання тіла на кінцевий кут φ момент зовнішніх сил *M* не змінюється, то робота, що здійснюється при цьому, дорівнює:

$$A = M\varphi. \tag{2.1.2}$$

Кінетична енергія обертового твердого тіла пропорційна моменту інерції тіла та квадрату його кутової швидкості:

$$W_к = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{2.1.3}$$

Будь-який складний рух твердого тіла можна представити як сукупність двох простих рухів: поступального руху з лінійною швидкістю $\vec{\upsilon}$ і обертального руху навколо відповідної осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Як правило, за швидкість поступального руху тіла беруть лінійну швидкість центра мас тіла.

Розглянемо випадок плоского руху твердого тіла, тобто тіла, при якому кожна точка тіла рухається в одній з паралельних одна одній площин. Приклад цього типу руху - кочення круглого тіла по горизонтальній поверхні. На рис. 2.1 диск рухається поступально-обертально. Кінетична енергія тіла в цьому випадку дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху центра мас тіла та кінетичної енергії обертання тіла навколо осі, що проходить через центр мас:

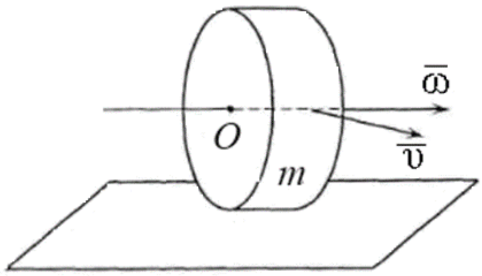

Рис. 2.1

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{2.1.4}$$

де *m* - маса тіла; υ – швидкість поступального руху центра мас тіла; *I* - момент інерції відносно осі обертання тіла; ω - кутова швидкість обертання тіла.

Для замкненої системи, тобто системи тіл, на яку не діють зовнішні сили (або результуючий момент зовнішніх сил *M* дорівнює нулю), основне рівняння динаміки обертового руху запишеться:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \tag{2.1.5}$$

Отже, повний момент імпульсу системи $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} I_i \vec{\omega}_i$ змінюватися не буде; де $\vec{L}_i$ і I_i- момент імпульсу та момент інерції і-го тіла системи; $\vec{\omega}_i$ - його кутова швидкість, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const\,, \quad \sum_{i=1}^{n} I_i \vec{\omega}_i = const\,. \qquad (2.1.6)$$

Рівняння (2.1.6) - математичний запис закону збереження моменту імпульсу. Суть цього закону полягає у тому, що повний момент імпульсу замкненої системи є величина стала, тобто внутрішні сили не можуть змінити загального моменту імпульсу системи. Вони можуть викликати лише обмін моментами імпульсів між різними тілами системи.

Так, якщо момент інерції обертальної системи змінюється під дією внутрішніх сил від I_1 до I_2, то незмінність моменту імпульсу системи $\vec{L}$ відповідно до закону збереження (2.1.6) приводить до зміни кутової швидкості обертання $\vec{\omega}$. З (2.1.6) виходить, що

$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2\,, \qquad (2.1.7)$$

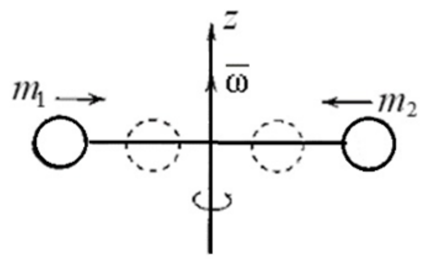

Рис. 2.2

отже, при зміні I у стільки ж раз змінюється $\vec{\omega}$. Наприклад, якщо при обертанні навколо осі oz маси m_1 і m_2 зближаються (рис. 2.2), що відповідає зменшенню I, то це призводить до зростання $\vec{\omega}$ і навпаки.

2.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 1:

Маховик масою 10 кг і радіуса 20 м, що обертається з частотою 3000 хв$^{-1}$, зробив до зупинки 100 обертів. Знайти роботу та момент сил тертя, що зупиняють маховик.

Дано:	**СІ:**	**Розв'язок:**
$m = 10$ кг		Диск, який обертається (рис. 2.3), має кінетичну енергію
$R = 20$ м		
$\nu_0 = 3000$ хв$^{-1}$	$\nu_0 = 50$ с$^{-1}$	$$W_{\kappa_0} = \frac{I\omega_0^2}{2}\,,$$
$N = 100$		де ω_0 - початкова кутова швидкість диска. Момент інерції диска:
$A,\ M_{\text{Тер}} - ?$		

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (2.2.1)$$

Оскільки відповідно до закону збереження енергії робота, яка здійснюється силами тертя $A_{\text{тер}}$, виконується за рахунок зменшення кінетичної енергії диска $\Delta W_{\text{к}}$, то

$$A_{\text{тер}} = \Delta W_{\kappa}\,, \qquad (2.2.2)$$

де $\Delta W_{\kappa} = W_{\kappa_0} - W_{\kappa} = \dfrac{I\omega_0^2}{2} - \dfrac{I\omega^2}{2}$. Враховуючи що $\omega = 2\pi\nu = 0$, маємо

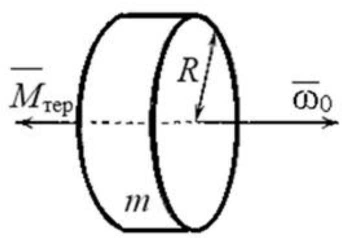

Рис. 2.3

$$\Delta W_к = \frac{I\omega_0^2}{2}. \qquad (2.2.3)$$

Підставляючи формули (2.2.1) і (2.2.2) в (2.2.3), обчислимо роботу сил тертя:

$$A_{тер} = \Delta W_к = \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{mR^2\left(2\pi\nu_0\right)^2}{2\cdot 2} = \pi^2\nu^2{}_0 R^2 m,$$

$$A_{тер} = \left(3{,}14\right)^2 \cdot 2500\cdot 400\cdot 10 \approx 9870\ \text{Дж}.$$

При зупинці диска сили тертя роблять над ним роботу:

$$A_{тер} = M_{тер}\varphi, \qquad (2.2.4)$$

де φ - кут, на який повернеться диск до моменту зупинки, $\varphi = 2\pi N$.

З формули (2.2.4) знайдемо момент сил тертя:

$$M_{тер} = \frac{A_{тер}}{\varphi} = \frac{A_{тер}}{2\pi N}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$M_{тер} = \frac{9870}{2\cdot 3{,}14\cdot 100} = 16\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Відповідь: Робота сил тертя 9870 Дж; момент сил тертя, що зупиняють маховик, 16 Н·м.

Приклад 2:

Дерев'яний стержень масою 6 кг та довжиною 2 м може обертатися у вертикальній площині відносно горизонтальної осі, що проходить через крайню точку. У кінець стержня влучає куля масою 10 г, що летить зі швидкістю 10^3 м/с, яка спрямована перпендикулярно стержню і осі, та застряє у ньому. Визначити кінетичну енергію стержня після удару. На який кут α од вертикалі відхиляється стержень після удару?

Дано:	**СІ:**
$M = 6$ кг	
$l = 2$ м	
$m = 10$ г	$m = 0{,}01$ кг
$\upsilon_0 = 10^3$ м/с	
$W_к,\ \alpha - ?$	

Розв'язок:

Фізична система складається з двох тіл: стержня та кулі. Кулю можна вважати за матеріальну точку, стержень приймаємо за тверде тіло. Удар кулі по стержню є абсолютно непружним. Скористуємося законами збереження. Куля до взаємодії рухалась прямолінійно, а після взаємодії разом зі стержнем обертається навколо осі.

Доцільно скористуватися законом збереження моменту імпульсу відносно цієї осі.

Систему відліку пов'яжемо із Землею, початок координат перенесемо у точку *O*. Момент імпульсу кулі відносно осі обертання до удару дорівнює $m\upsilon_0 l$, а стержня - нулю. Після удару момент імпульсу стержня і кулі дорівнює $I\omega$, де I - момент інерції стержня і кулі відносно осі обертання, а ω - кутова швидкість обертання стержня і кулі після удару.

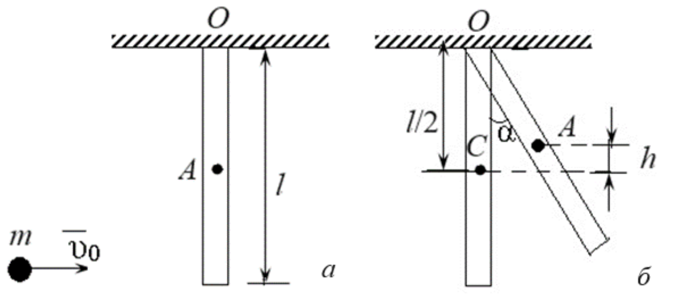

Рис. 2.4

$$I = I_к + I_{ст}, \qquad (2.2.5)$$

де $I_к = ml^2$ - момент інерції кулі, $I_{ст}$ – момент інерції стержня відносно горизонтальної осі, що проходить через точку O,
який знайдемо, використавши теорему Штейнера и формулу момента інерції для стрижня $I_{0ст}$

$$I_{ст} = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2. \qquad (2.2.6)$$

Так як $I_к \ll I_{ст}$, то $I \approx \frac{1}{3}Ml^2$.

За законом збереження моменту імпульсу:

$$m\upsilon_0 l = I\omega. \qquad (2.2.7)$$

Кінетична енергія стержня:

$$W_к = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (2.2.8)$$

Виразивши із (2.2.7) кутову швидкість і підставивши її в (2.2.8), будемо мати:

$$W_к = \frac{m^2\upsilon_0^2 l^2}{2I}. \qquad (2.2.9)$$

Враховуючи (2.2.6), одержимо:

$$W_к = \frac{3m^2\upsilon_0^2}{2M}, \qquad (2.2.10)$$

$$W_к = \frac{3\cdot 10^{-4}\cdot 10^6}{2\cdot 6} = 25 \text{ Дж}.$$

Визначимо кут α , на який відхиляється од вертикалі стержень після удару. Після удару неконсервативних сил у системі немає, отже, до подальшого руху стержня і кулі можна застосувати закон збереження енергії в механіці. За цим законом

$$W_к = W_п \qquad (2.2.11)$$

де $W_к$ - кінетична енергія стержня, $W_п$ - потенціальна енергія стержня у відхиленому стані (див.рис.2.4, *б*), так як при відхиленні стержня на кут α, його центр мас (точка А) піднімається на висоту h , то

$$W_п = Mgh, \qquad (2.2.12)$$

де враховано, що $m \ll M$.

Підставивши (2.2.10) та (7) до (2.2.11), будемо мати:

$$\frac{3m^2\upsilon_0^2}{2M} = Mgh. \qquad (2.2.13)$$

Із трикутника ΔОАС (рис. 2.4, *б*) маємо:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{l}{2} - h}{\frac{l}{2}}. \qquad (2.2.14)$$

Розв'язавши сумісно систему рівнянь (2.2.13) та (2.2.14), будемо мати:

$$\alpha = arc\cos\left(1 - \frac{3m^2\upsilon_0^2}{M^2 gl}\right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\alpha = arc\cos\left(1 - \frac{3\cdot 10^{-4}\cdot 10^6}{36\cdot 9{,}8\cdot 2}\right) \approx 55^0.$$

Відповідь: Кінетична енергія стержня після удару 25 Дж; кут, на який од вертикалі відхиляється стержень після удару, 55^0.

<u>Приклад 3:</u>

Маховик у вигляді диска масою 50 кг і радіусом 20 см розкрутили до кутової швидкості 480об/хв, потім залишили його самостійно крутитися. Під дією сил тертя маховик зупинився, зробив 200 обертів. Знайти: момент сил тертя; кутове прискорення; роботу гальмування; час обертання.

Дано:	**СІ:**
$m = 50$ кг	
$R = 20$ см	$\nu_0 = 8$ об/ с
$\nu_0 = 480$ об/ хв	
$N = 200$	
$M,\ \varepsilon,\ A,\ t - ?$	

Розв'язок:

Роботу гальмування виразимо через різницю енергії початкового та кінцевого положення тіла:

$$A = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_0^{\,2}}{2} = -\frac{I\omega_0^{\,2}}{2}, \qquad (2.2.15)$$

так як $\omega = 2\pi\nu = 0$. З другого боку цю роботу можна виразити через момент гальмування, тобто

$$A = M\varphi. \qquad (2.2.16)$$

Зрівняємо праві частини рівнянь (2.2.15) і (2.2.16), ураховуючи те, що кут повороту $\varphi = 2\pi N$, а момент інерції диска $I = \frac{1}{2}mR^2$, який обертається відносно осі симетрії (рис. 2.5) і кутова швидкість $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, тобто

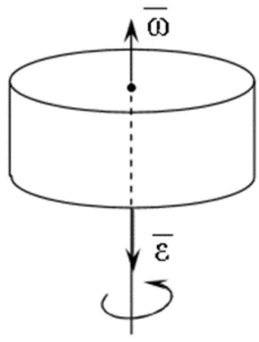

Рис. 2.5

$$A = -\frac{mR^2 4\pi^2\nu_0^2}{2\cdot 2} = M\cdot 2\pi\cdot N \Rightarrow M = -\frac{mR^2\pi\nu_0^2}{2\cdot N},$$

$$M = -\frac{mR^2\pi\nu_0^2}{2\cdot N} = -\frac{50\cdot 400\cdot 10^{-4}\cdot 3{,}14\cdot 64}{2\cdot 200} = -1\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Роботу гальмування знайдемо з виразу

$$A = M\varphi = 2\pi MN\,,$$

$$A = 2\cdot 3{,}14\cdot\left(-1\right)\cdot 200 = -125{,}6\text{ Дж}\,.$$

Для знаходження кутового прискорення запишемо головне рівняння динаміки обертального руху тіла:

$$M = I\cdot\varepsilon\,.$$

З урахуванням того, що $I = \frac{1}{2}mR^2$, маємо

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{2\cdot M}{mR^2}\,,$$

$$\varepsilon = -\frac{2\cdot 1}{50\cdot 0{,}04} = -1\text{ рад/ с}^2\,.$$

Для рівнозмінного обертального руху, з урахуванням умови задачі, маємо

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t\,.$$

З урахуванням того, що кінцева кутова швидкість дорівнює нулю (тіло зупинилося), маємо

$$t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\pi\nu_0}{\varepsilon}\,,$$

$$t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 8}{1} = 50\text{ с}\,.$$

Відповідь: момент сил тертя -1 Н·м; кутове прискорення -1 рад/с^2; робота гальмування -125,6 Дж; час обертання 50 с.

<u>Приклад 4:</u>

Однорідний стержень довжиною 1м може вільно обертатися біля горизонтальної вісі, яка проходить через один із його кінців в другий кінець, абсолютно непружно ударяє кулю масою 7 г, яка рухається перпендикулярно стержню та його вісі. Визначити масу стержня, якщо в наслідок попадання кулі, він відхилився на кут 60°. Прийняти швидкість кулі 360 м/с.

Дано:	**СІ:**
$l = 1\text{ м}$	$m = 7\cdot 10^{-3}\text{ кг}$
$m = 7\text{ г}$	
$\alpha = 60^0$	
$M - ?$	

Розв'язок:

Кулю та стержень можна прийняти за ізольовану систему, для якої виконується закон збереження моменту імпульсу, тобто $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$, де $L_1 = m\upsilon l$ - момент імпульсу кулі (приймаємо її за матеріальну точку), а $L_2 = I\omega$ - момент імпульсу стержня (як тіла).

З рахунком цього можна записати

$$m\upsilon l = I\omega. \qquad (2.2.17)$$

Після того, як куля застрягне в стержні (непружня взаємодія), стержень з кулею будуть мати кінетичну енергію $\frac{I\omega^2}{2}$, яка перейде в потенціальну при зупинці їх руху, тобто

$$\frac{I\omega^2}{2} = (m+M)gh. \qquad (2.2.18)$$

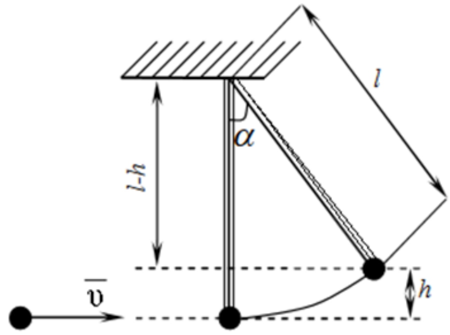

Рис. 2.6

Знайдемо з (2.2.17) значення $\omega = \frac{m\upsilon l}{I}$ і підставимо його в (2.2.18)

$$\frac{m^2\upsilon^2 l^2}{2I} = (m+M)gh. \qquad (2.2.19)$$

З рис. маємо

$$\frac{l-h}{l} = \cos\alpha \Rightarrow h = l(1-\cos\alpha). \qquad (2.2.20)$$

Для знаходження моменту інерції стержня відносно вісі обертання, використовуємо теорему Штейнера:

$$I = I_0 + ma^2,$$

де I_0 – момент інерції стержня з кулею відносно вісі, яка проходить через центр їх тяжіння; $a = \frac{l}{2}$ - відстань між осями.

Враховуючи це, можна записати:

$$I = \frac{1}{12}(m+M)l^2 + \frac{(m+M)l^2}{4} = \frac{(m+M)l^2}{3}. \qquad (2.2.21)$$

Підставимо значення (2.2.20) і (2.2.21) в (2.2.19):

$$\frac{3m^2\upsilon^2}{(m+M)} = 2(m+M)gl(1-\cos\alpha).$$

Враховуючи те, що $l(1-\cos\alpha) = 1\cdot(1-0{,}5) = 0{,}5$, маємо

$$3m^2\upsilon^2 = (m+M)^2 g \Rightarrow m+M = \sqrt{\frac{3m^2\upsilon^2}{g}} = m\upsilon\sqrt{\frac{3}{g}} \Rightarrow$$

$$M = m\upsilon\sqrt{\frac{3}{g}} - m = m\left(\upsilon\sqrt{\frac{3}{g}} - 1\right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$M = 7\cdot 10^{-3}\cdot\left(360\cdot\sqrt{\frac{3}{9{,}8}} - 1\right) = 1{,}6 \text{ кг}.$$

Відповідь: маса стержня 1,6 кг.

<u>Приклад 5:</u>

Однорідний циліндр скочується з похилої площини висотою 90 см. Яку лінійну швидкість матиме центр циліндра в той момент, коли він скотиться з площини?

Дано:	**СІ:**	**Розв'язок:**
$h = 90$ см	$h = 0{,}9\ м$	На висоті h циліндр має потенційну енергію:
$\upsilon - ?$		$E_п = mgh,$ (2.2.22)

де m – маса циліндра.

При скочуванні циліндра з похилої площини (рис. 2.7) ця енергія переходить в кінетичну енергію поступального $W_{к_п} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ і кінетичну енергію обертального руху $W_{к_{оберт}} = \dfrac{I\omega^2}{2}$.

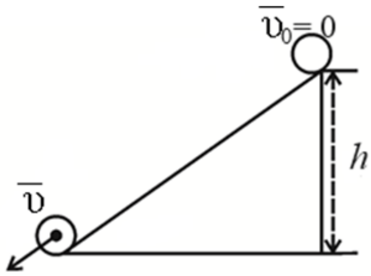

Рис. 2.7

Із закону збереження енергії

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (2.2.23)$$

Момент інерції однорідного циліндра (однорідного диска):

$$I = \frac{1}{2}mR^2. \qquad (2.2.24)$$

Кутова швидкість пов'язана з лінійною співвідношенням:

$$\omega = \frac{\upsilon}{R}. \qquad (2.2.25)$$

Підставимо (2.2.24) і (2.2.25) у (2.2.23), отримаємо:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\cdot\frac{(\upsilon / R)^2}{2},$$

зробимо скорочення:

$$gh = \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{3}{4}\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\upsilon = 2\cdot\sqrt{\frac{9{,}8\cdot 0{,}9}{3}} = 3{,}44\ \text{м/ с}.$$

Відповідь: лінійна швидкість центра циліндра 3,44 м/с.

<u>Приклад 6:</u>

Визначити швидкість поступального руху центра мас обруча на горизонтальній ділянці шляху, який скочується без ковзання з похилої площини висотою 3 м (рис.). Початкову швидкість обруча вважати такою, що дорівнює нулю. Порівняти обчислену швидкість зі швидкістю обруча, що зсковзує з похилої площини при відсутності тертя.

Дано:
$h = 3$ м
$\upsilon = 0$

$\upsilon_1,\ \upsilon_2 - ?$

Розв'язок:

На висоті *h* обруч має потенціальну енергію:

$$W_п = mgh.$$

При скатуванні донизу (рис. 2.8, а) або зісковзуванні (рис. 2.8, б) його потенціальна енергія відповідно до закону збереження енергії переходить у кінетичну (втратами енергії на тертя знехтуємо).

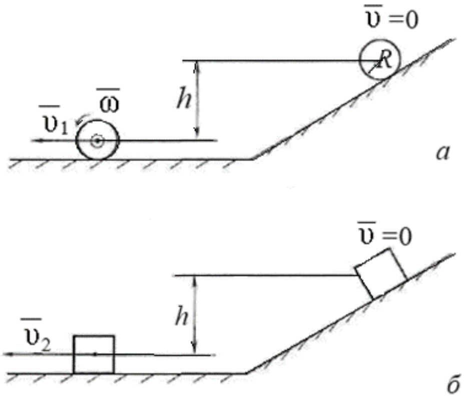

Рис. 2.8

У першому випадку обруч рухається поступально-обертально і його кінетична енергія на горизонтальній ділянці буде дорівнювати:

$$W_{к_1} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

У другому випадку обруч рухається тільки поступально, тому

$$W_{к_2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2}.$$

Закон збереження енергії для обох випадків можна записати:

$$mgh = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (2.2.26)$$

$$mgh = \frac{m\upsilon_2^2}{2}. \qquad (2.2.27)$$

З огляду на те, що момент інерції обруча $I = mR^2$, а кутова швидкість $\omega = \frac{\upsilon_1}{R}$, із рівняння (2.2.26) можна знайти швидкість обруча на горизонтальній ділянці в першому випадку:

$$mgh = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{mR^2\upsilon_1^2}{2R^2}, \quad mgh = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_1^2}{2},\ mgh = m\upsilon_1^2 \text{ або}$$

$$gh = \upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{gh}, \qquad (2.2.28)$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{9{,}8 \cdot 3} \approx 5{,}4 \text{ м/с}.$$

З рівняння

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh}, \qquad (2.2.29)$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 3} \approx 7{,}7 \text{ м/с}.$$

З формул (2.2.28) і (2.2.29) знайдемо відношення швидкостей поступального руху обруча при скатуванні υ_1 і зісковзуванні υ_2

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{2gh}}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7 .$$

Отже, при зісковзуванні тіла швидкість його поступального руху більше, тому що обертання тіла при цьому відсутнє, і потенціальна енергія переходить повністю в кінетичну енергію поступального руху.

Відповідь: при зісковзуванні обруча швидкість його поступального руху більше у 1,4 рази у порівнянні зі швидкістю обруча, який скочується без ковзання з похилої площини.

<u>Приклад 7:</u>

По горизонтальній площині котиться диск зі швидкістю 8 м/с. Визначити коефіцієнт опору, якщо диск зупинився, пройшовши шлях 18 м.

Дано:

$\upsilon = 8$ м/с

$S = 18$ м

$\mu - ?$

Розв'язок:

Для розв'язання задачі скористаємось законом збереження енергії. У точці *A* (рис. 2.9) тіло має кінетичну енергію $W_к$, яка складається з енергії поступального та обертального руху. У точці *B* ця енергія дорівнює 0. Кінетична енергія витрачається на виконання роботи проти неконсервативних сил(сили тертя $F_{тр}$):

$$\Delta W_к = W_{к_B} - W_{к_A} = A_{тер} , \qquad (2.2.30)$$

$$\Delta W_к = W_{к_A} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} , \qquad (2.2.31)$$

де *J* – момент інерції диска; ω – його кутова швидкість.

Робота, що здійснюється тілом, дорівнює

$$A = -FS = -\mu mgS , \qquad (2.2.32)$$

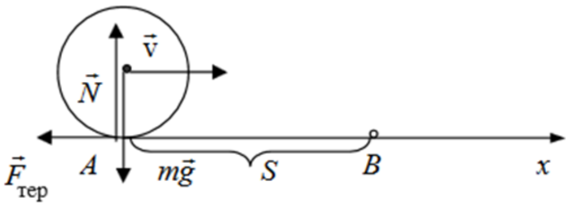

Рис. 2.9

де μ - коефіцієнт тертя.

Підставивши співвідношення (2.2.30) і (2.2.31) в (2.2.32), отримаємо

$$\frac{I\omega^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = \mu mgS . \qquad (2.2.33)$$

Для диска момент інерції дорівнює

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \qquad (2.2.34)$$

де *R* - радіус диска.

Кутову швидкість обертання диска знайдемо із співвідношення

$$\omega = \frac{\upsilon}{R} . \qquad (2.2.35)$$

Звідси, підставивши вирази (2.2.34) і (2.2.35) у (2.2.33), отримаєм

$$\frac{1}{2} mR^2 \frac{\upsilon^2}{2R^2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = \mu mgS . \qquad (2.2.36)$$

Після низки перетворень це співвідношення набуде вигляду

$$\frac{\upsilon^2}{4}+\frac{\upsilon^2}{2}=\mu g S \Rightarrow \mu=\frac{3\upsilon^2}{4gS}. \qquad (2.2.37)$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\mu=\frac{3\cdot 64}{4\cdot 9{,}8\cdot 18}=0{,}27.$$

Перевіримо одиниці отриманої величини

$$[\mu]=\frac{[\upsilon]^2}{[g]\cdot[S]}=\frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2\cdot\text{м}}=1.$$

Відповідь: коефіцієнт опору 0,27.

<u>Приклад 8:</u>

На краю горизонтальної платформи масою 100 кг, що обертається із частотою 6 хв$^{-1}$, стоїть людина масою 50 кг. З якою частотою почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центра? Платформу вважати однорідним диском, а людину - точковою масою.

Дано:	СІ:
$m_1=100$ кг	
$\nu_0=6$ хв$^{-1}$	$\nu_0=0{,}1$ с$^{-1}$
$m_2=50$ кг	
$\nu-?$	

Розв'язок:

Платформа і людина на ній уявляють собою замкнену систему тіл, для якої виконується закон збереження моменту імпульсу. У векторному вигляді його можна записати так:

$$I_0\vec{\omega}_0=I\vec{\omega}. \qquad (2.2.38)$$

У скалярному вигляді (у проекціях на вісь oz) рівняння (2.2.38) запишеться:

$$I_0\omega_0=I\omega, \qquad (2.2.39)$$

де I_0, ω_0 - момент інерції й кутова швидкість системи в початковий момент (рис. 2, *а*); I, ω - момент інерції й кутова швидкість системи після переходу людини в центр платформи (рис. 2, *б*), причому

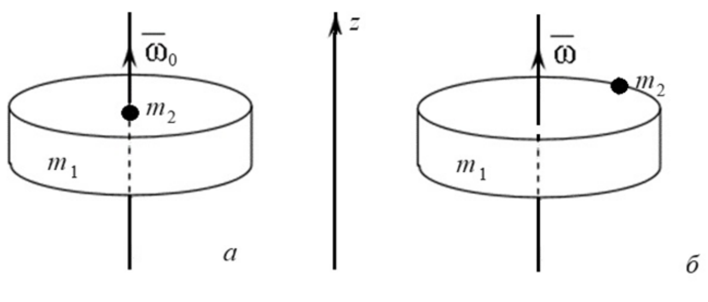

Рис. 2.10

$$I_0=I_{01}+I_{02}=\frac{m_1R^2}{2}+m_2R^2, \qquad (2.2.40)$$

$$I=I_1+I_2=\frac{m_1R^2}{2}, \qquad (2.2.41)$$

де I_{01}, I_{02} - момент інерції платформи і людини у початковий момент; I_1, I_2 - момент інерції платформи і людини після переходу людини в центр платформи, причому

$$I_1=I_{01}, \quad I_2=0.$$

З огляду на те, що $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, $\omega = 2\pi\nu$ та підставляючи (2.2.40) і (2.2.41) в (2.2.39), одержуємо

$$\left(\frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2\right)2\pi\nu_0 = \frac{m_1R^2}{2}2\pi\nu \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{2R^2\nu_0\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)}{m_1R^2} = \nu_0\left(1 + \frac{2m_2}{m_1}\right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\nu = 0,1\cdot\left(1 + \frac{2\cdot 50}{100}\right) = 0,2\ \text{с}^{-1}.$$

Отже, частота обертання платформи зросла, тому що при переході людини в центр платформи зменшився момент інерції всієї системи.

Відповідь: якщо людина перейде від краю платформи до її центра, платформа почне обертатися з частотою 0,2 $с^{-1}$.

Приклад 9:

Кулька масою100 г , прив'язана до кінця нитки довжиною 1 м, обертається у горизонтальній площині з частотою 1 об/с. Нитку вкорочують по довжині до 0,5 м. Знайти частоту обертання після укорочення нитки? Яка робота буде здійснена для зменшення нитки.

Дано:	СІ:
$m = 100$ г	$m = 0,1$ кг
$l_1 = 1$ м	
$\nu_1 = 1$ об/ с	
$l_2 = 0,5$ м	
$\nu_2 - ?$	

Розв’язок:

У випадку дії на тіло зовнішніх сил, робота дорівнює зміні кінетичної енергії тіла при обертальному русі:

$$A = \frac{I_1\omega_1^2}{2} - \frac{I_2\omega_2^2}{2}, \tag{2.2.42}$$

де $I_1 = \frac{ml_1^2}{2}$ – момент інерції до зменшення нитки,

$I_2 = \frac{ml_2^2}{2}$ – момент інерції після зменшення нитки.

Циклічна частота обертання кульки на нитці довжиною l_1:

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1. \tag{2.2.43}$$

Циклічна частота обертання кульки на нитці довжиною l_2:

$$\omega_2 = 2\pi\nu_2. \tag{2.2.44}$$

Із закону збереження моменту імпульсу

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2. \tag{2.2.45}$$

Підставимо (2.2.43) і (2.2.44) у (2.2.45), отримуємо

$$\frac{ml_1^2\cdot 2\pi\nu_1}{2} = \frac{ml_2^2\cdot 2\pi\nu_2}{2} \Rightarrow l_1^2\nu_1 = l_2^2\nu_2,$$

$$\nu_2 = \nu_1 \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 .$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\nu_2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{0,5} \right)^2 = 4 \text{ об/ с} .$$

Визначимо роботу, яку необхідно здійснити для укорочення нитки:

$$A = \frac{ml_1^2}{4} \cdot \left(2\pi\nu_1\right)^2 - \frac{ml_2^2}{4} \cdot \left(2\pi\nu_2\right)^2 = m\pi^2 \left(l_1^2 \cdot \nu_1^2 - l_2^2 \cdot \nu_2^2 \right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$A = 0,1 \cdot \left(3,14\right)^2 \cdot \left(1^2 \cdot 1^2 - 0,5^2 \cdot 4^2\right) = -2,96 \text{ Дж} .$$

Відповідь: частота обертання після укорочення нитки 4 об/с; робота, яку необхідно здійснити для укорочення нитки -2,96 Дж.

Приклад 10:

Людина стоїть у центрі лави Жуковського і разом з нею обертається за інерцією. Частота обертання 0,5 с$^{-1}$. Момент інерції тіла людини відносно осі обертання 1,6 кг·м^2. У витягнених руках людина тримає по вантажу масою 2 кг кожна. Відстань між вантажами 1,6 м. Визначити частоту обертання лави з людиною, коли вона опустить руки і відстань між гирями буде дорівнювати 0,4 м. Моментом інерції лави знехтувати.

Дано:

$\nu_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$

$I_0 = 1,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

$m = 2 \text{ кг}$

$l_1 = 1,6 \text{ м}$

$l_2 = 0,4 \text{ м}$

$\nu_2 - ?$

Розв'язок:

Людина, яка тримає гирі складає разом з лавою замкнену систему, тому момент імпульсу цієї системи повинен мати стале значення

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = const$$

$$I_1 > I_2, \quad \omega_1 < \omega_2 .$$

Нехай лава з людиною обертається так, як вказано на рис.2.11. Вісь *oz* спрямує вертикально вверх (вздовж осі обертання), $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$ - вектори кутових швидкостей, $\vec{L}_1$ та $\vec{L}_2$ - вектори моментів імпульсу людини з вантажами у першому та другому випадках.

Закон збереження моменту імпульсу у даному випадку

$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2 . \qquad (2.2.46)$$

У проекціях на ось *oz* вираз (2.2.46) має вигляд:

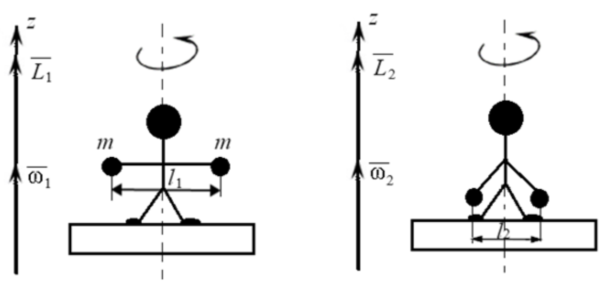

Рис. 2.11

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} . \qquad (2.2.47)$$

Врахуємо, що

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1,\ \omega_2 = 2\pi\nu_2. \qquad (2.2.48)$$

Підставимо (2.2.48) у (2.2.47):

$$\nu_2 = \frac{I_1}{I_2}\nu_1. \qquad (2.2.49)$$

Момент інерції системи, що розглядається у даній задачі, дорівнює сумі моментів інерції людини та моментів інерції вантажів в руках у людини. Так як розміри вантажів багато менші за відстань від них до осі обертання, то момент інерції вантажів можна знайти за формулою момента інерції матеріальної точки (1.1.2). Отже:

$$I_1 = I_0 + 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2,\ \ I_2 = I_0 + 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2, \qquad (2.2.50)$$

де m - маса кожної гирі.

Підставимо (2.2.50) у (2.2.49) та одержимо:

$$\nu_2 = \frac{I_0 + 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2}{I_0 + 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2}\nu_1.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\nu_2 = \frac{1{,}6 + 2\cdot 2\cdot\left(\frac{1{,}6}{2}\right)^2\cdot 0{,}5}{1{,}6 + 2\cdot 2\cdot\left(\frac{0{,}4}{2}\right)^2} = 1{,}18\ \text{c}^{-1}.$$

Відповідь: частота обертання лави з людиною, коли вона опустить руки, $1{,}18\text{c}^{-1}$.

2.3 Задачі для самостійного розв’язування

1. Диск котиться по горизонтальній площині. Яку частину від його повної кінетичної енергії становить енергія обертового руху?

2 Диск і куля рівних мас котяться без ковзання. Обидва тіла мають однакові швидкості поступального руху. Знайти кінетичну енергію кулі, якщо кінетична енергія диска дорівнює 30 Дж.

3 Гиря масою 30 кг падає на платформу з піском, що обертається, і застряє в ньому на відстані 0,5 м від осі обертання платформи. Знайти масу платформи, якщо її кутова швидкість після падіння гирі зменшилася в 1,1 рази. Радіус платформи 1 м. Платформу вважати однорідним диском, а гирю – точковою масою.

4 Людина, що сидить на лаві Жуковського, тримає в руках диск, що обертається з частотою 180 хв$^{-1}$ навкруги осі, розташованої горизонтально. З якою частотою почне обертатися людина, якщо він поверне вісь обертання диска й розташує її вертикально? Маса диска 8 кг, радіус 40 см. Момент інерції людини й лави Жуковського дорівнює 12 кг·м^2.

5 У центрі горизонтальної платформи, що обертається, стоїть людина масою 60 кг. Вважаючи людину точковою масою, знайти відстань, на яку вона повинна зміститися від центра платформи, щоб частота обертання платформи зменшилася в 2 рази. Момент інерції платформи 240 кг·м^2.

6 Людина, що стоїть в центрі горизонтальної платформи, яка обертається з частотою 30 хв$^{-1}$, тримає на витягнутих горизонтально руках гирі. З якою частотою буде обертатися платформа, якщо людина, опустивши руки, зменшить свій момент інерції від 24 кг·м^2 до 4 кг·м^2? Маса платформи 8 кг, радіус 1 м.

7 Два гумових диски обертаються навколо загальної вертикальної осі. Момент інерції й кутова швидкість першого диска відповідно дорівнюють 0,03 кг·м^{2}і 20 рад/с, другого - 0,01 кг·м^{2}і 40 рад/с. Визначити кутову швидкість і зміну кінетичної енергії двох дисків при падінні верхнього диска й з'єднанні його з нижнім без прослизання.

8 Куля масою 50 г, рухаючись зі швидкістю 100 м/с, ударяється об виступ зубчастого колеса, що знаходиться у стані спокою і має момент інерції 0,2 кг·м^2. Відстань від точки влучення кулі до осі обертання 30 см. Визначити кутову швидкість колеса, вважаючи удар непружним. Куля рухалася в площині обертання колеса.

9 Чоловік масою 40 кг перебуває на нерухомій платформі масою 120 кг і радіусом 4 м. З якою частотою буде обертатися платформа, якщо людина буде рухатися по краю платформи зі швидкістю 6,28 м/с відносно платформи.

10 На краю платформи, що обертається в горизонтальній площині з кутовою швидкістю 0,2 рад/с, стоїть людина масою 60 кг. Знайти лінійну швидкість, з якої людина повинна рухатися відносно платформи по її краю, щоб платформа перестала обертатися. Маса платформи 120 кг, радіус 5 м. Платформу вважати однорідним диском, а людину - точковою масою.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Загородній В. В. Загальна фізика. Механіка [Електронний ресурс] : підручник для студентів спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / В. В. Загородній ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2-е вид., виправл. і доповн. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,89 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 364 с.

2. Загородній В. В. Механіка в задачах [Електронний ресурс]: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Прикладна фізика» спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / В. В. Загородній, С. В. Бех ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 4.54 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 402 с.

3. Фізика. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка: навчальний посібник / Ю. О. Шкурдода, О. О. Пасько, О. А. Коваленко. – Суми : Сумський державний університет, 2021. – 221 с.

4. Сергєєва О. Є. Основи загальної фізики. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електрика [Текст]: навч. посіб. / Сергєєва Олександра Євгенівна, Федосов Сергій Никифорович; Одес. нац. акад. харч. технологій, Каф. фізики і матеріалознавства. – Одеса : ОНАХТ, 2018.

5. Збірник задач із загальної фізики [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів інженерно-технічних спеціальностей./ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.П. Бригінець, І.М. Репалов, Л.П. Пономаренко, Н.О. Якуніна. – Електронні текстові дані (1 файл: 4.1Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 230 с.

6. Ю.І. Горобець, О.Ю. Горобець, А.М. Кучко, С.О. Решетняк, А.М. Красіко, М.Г. Мусієнко, Т.М. Ніколаєва, П.О. Юрачківський, Л.Г. Лосицька. Фізика. Механіка. – К.: Хімджест, 2018. – 192 с.

7. Лекції з механіки: навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів / В. М. Дубовик, В. М. Сухов. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 312 с.

Навчальне видання

Титаренко Валентина Василівна
Куцева Наталія Олександрівна
Журавльов Михайло Олександрович

ФІЗИКА

Методичні рекомендації до самостійної роботи у 3 частинах Частина 2. Динаміка твердого тіла

для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей
131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство,
133 Галузеве машинобудування

Видано в авторській редакції

Електронний ресурс.
Підписано до видання 12.11.2024. Авт. арк. 2,67.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.