МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ФАКУЛЬТЕТ АРХІТЕКТУРИ, БУДІВНИЦТВА ТА ЗЕМЛЕУСТРОЮ
Кафедра фізики

В. В. Титаренко, Н. О. Куцева, М. О. Журавльов

ФІЗИКА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи у 3 частинах
Частина 3. Механіка рідини. Механічні коливання та хвилі

для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей
131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство,
133 Галузеве машинобудування

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Титаренко В. В.

Фізика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 Галузеве машинобудування : у 3 ч. / В. В. Титаренко, Н. О. Куцева, М. О. Журавльов ; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – Частина 3. Механіка рідини. Механічні коливання та хвилі. – 56 с.

Автори:
В. В. Титаренко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Н. О. Куцева, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
М. О. Журавльов.

Затверджено науково-методичними комісіями спеціальностей 131 Прикладна механіка (протокол № 4 від 01.07.2024), 132 Матеріалознавство (протокол № 7 від 26.06.2024), 133 Галузеве машинобудування (протокол № 2 від 22.10.2024), за поданням кафедри фізики (протокол № 15 від 06.06.2024).

Методичні рекомендації містять приклади розв’язування задач за програмою навчальної дисципліни «Фізика» з розділів «Механіка рідини. Механічні коливання та хвилі», для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 Галузеве машинобудування. Також ці методичні рекомендації можуть стати в пригоді студентам інших спеціальностей.

Методичні рекомендації орієнтовано на підвищення ефективності самостійної підготовки студентів до поточного та підсумкового контролів.

Видано в рамках теми Ш-518 «Розробка методичного забезпечення за дисциплінами, що викладаються кафедрою фізики НТУ «Дніпровська політехніка».

Відповідальний за випуск завідувач кафедри фізики В. М. Горєв, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Вступ

Дисципліна «Фізика» є базовим освітнім компонентом за галуззю знань циклу спеціальної підготовки для здобувачів освітньо-професійних програм спеціальностей 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 Галузеве машинобудування першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

У рамках курсу викладено матеріал щодо фундаментальних понять, законів і теорій класичної та сучасної фізики, що забезпечує здобувачам ефективне опанування спеціальних дисциплін і подальшу можливість використання фізичних принципів у галузі механічної інженерії.

Ці методичні матеріали присвячені третій частині курсу, а саме таким розділам, як механіка рідини, механічні коливання та хвилі.

У методичних рекомендаціях надані приклади розв’язування задач, що містять основні теоретичні відомості та задачі для самостійного розв’язування. Опанування матеріалу, наведеного в даних методичних рекомендаціях, дозволить підвищити ефективність самостійної підготовки здобувачів освіти до поточного та підсумкового контролю.

Тематика наведених у методичних рекомендаціях прикладів задач і розподіл годин на кожну тему визначено в робочій програмі та силабусі дисципліни.

Згідно з робочою програмою відповідної дисципліни критерії оцінювання є такими:

Загальні критерії досягнення результатів навчання
для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Знання	
♦ концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100
	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
	Рівень знань незадовільний	<60
	Уміння/навички	
♦ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв’язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми; - обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв’язання завдання	95-100
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з не грубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком	65-69
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями	60-64
	рівень умінь/навичок незадовільний	<60
	Комунікація	
♦ донесення до фахівців і нефахівців інформації, ідей, проблем, рішень, власного досвіду та аргументації; ♦ збір, інтерпретація та застосування даних; ♦ спілкування з професійних питань, у тому числі іноземною мовою, усно та письмово	Вільне володіння проблематикою галузі. Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова: - правильна; - чиста; - ясна; - точна; - логічна; - виразна; - лаконічна. Комунікаційна стратегія: - послідовний і несуперечливий розвиток думки; - наявність логічних власних суджень; - доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням; - правильна структура відповіді (доповіді); - правильність відповідей на запитання; - доречна техніка відповідей на запитання; - здатність робити висновки та формулювати пропозиції	95-100
	Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами. Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами. Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами	90-94
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння проблематикою галузі.	74-79

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п'ять вимог)	
	Задовільне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)	70-73
	Часткове володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев'ять вимог)	65-69
	Фрагментарне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано 10 вимог)	60-64
	Рівень комунікації незадовільний	<60
Відповідальність і автономія		
♦ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами; ♦ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах; ♦ формування суджень, що враховують соціальні, наукові та етичні аспекти; ♦ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп; ♦ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії	Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на: 1) управління комплексними проектами, що передбачає: - дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію; - здатність до роботи в команді; - контроль власних дій; 2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає: - обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів; - самостійність під час виконання поставлених завдань; - ініціативу в обговоренні проблем; - відповідальність за взаємовідносини; 3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає: - використання професійно-орієнтовних навичок; - використання доказів із самостійною і правильною аргументацією; - володіння всіма видами навчальної діяльності; 4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає: - ступінь володіння фундаментальними знаннями; - самостійність оцінних суджень;	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	- високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок; - самостійний пошук та аналіз джерел інформації	
	Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)	90-94
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60

1. МЕХАНІКА РІДИНИ

1.1 Основні поняття, закони і формули

Скалярна фізична величина, що визначається нормальною силою, яка діє зі сторони рідини на одиницю площі, називається тиском рідини:

$$p = \frac{\Delta F_n}{\Delta S}.$$

Одиницею тиску в СІ є паскаль (Па). 1 Па= 1Н/м^2.

Тиск при рівновазі рідини рідин (газів) підлягає *закону Паскаля*:
Тиск у будь-якому місці рідини, що покоїться, однаковий по всім напрямкам і однаково передається по всьому об'єму, який займає рідина.

При поперечному перерізі S стовпчика рідини, його висоті h і густині ρ, вага $P = mg = \rho Vg = \rho Shg$, а тиск на нижній шар:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh. \tag{1.1.1}$$

Таким чином, тиск рідини, що покоїться, змінюється лінійно з висотою стовпчика рідини і називається *гідростатичним*:

$$p = \rho gh. \tag{1.1.2}$$

Згідно цьому закону, сила тиску на нижні шари рідини буде більша, ніж на верхні, тому на тіло, занурене у рідину , діє виштовхуючи сила, яка визначається *законом Архімеда*:
На тіло, занурене у рідину (газ), діє зі сторони цієї рідини спрямована вертикально вгору сила, рівна вазі виштовханій рідини (газу):

$$F_A = \rho gV. \tag{1.1.3}$$

де ρ - густина рідини (газу), V - об'єм зануреного у рідину тіла.

Частину рідини, обмежену лініями струму, називають *трубкою струму*. Течія рідини називається *усталеною* (*стаціонарною*), якщо форма і розміщення ліній струму, а також значення швидкостей в кожній її точці з часом не змінюються.

Для будь якої стаціонарної течії виконується *закон нерозривності течії*, згідно якому, добуток швидкості течії рідини, яка не стискається, на площу поперечного перерізу трубки струму є величина постійна для даної трубки струму:

$$S\upsilon = const. \tag{1.1.4}$$

Це рівняння має назву *рівняння нерозривності*.

Якщо розглянути певну трубку струму (рис. 1.1), то для будь якого поперечного перерізу даної трубки

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 = ... = S_n\upsilon_n. \tag{1.1.5}$$

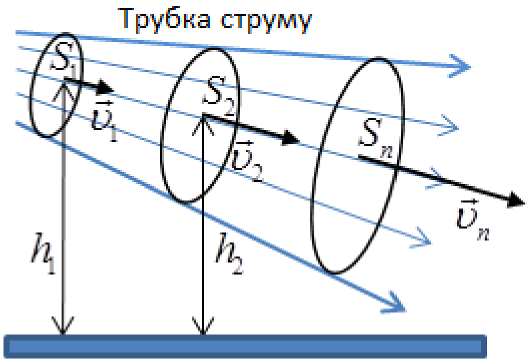


Рис. 1.1

Якщо поперечні перерізи стаціонарної течії знаходяться на різних висотах по відношенню до вибраного нульового рівня (на рис. 1.1 зафарбовано синім кольором), то при русі рідини вздовж трубки струму буде змінюватися потенціальна енергія кожного елементарного об'єму рухомої рідини. Повна механічна енергія W кожного виділеного елементарного об'єму рухомої рідини буде рівна сумі його кінетичної $W_к$ і потенціальної $W_п$ енергії. Нехай в першому перерізі S_1, який знаходиться на висоті h_1, швидкість рівна υ_1, а тиск p_1. Аналогічно у другому перерізі площею S_2, на висоті h_2, швидкість – υ_2, тиск – p_2. Згідно закону збереження енергії, зміна повної енергії повинна бути рівна роботі зовнішніх сил по переміщенню маси Δm виділеного елементарного об'єму рідини:

$$W_2 - W_1 = A.$$

Враховуючи, що

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgh\,;\;\; A = F\Delta l = pS\Delta l$$

де Δl - відстань, яку елементарний об'єм проходить за час Δt, отримаємо рівняння:

$$\frac{\Delta m\upsilon_1^2}{2} + \Delta mgh_1 + p_1S_1\upsilon\Delta t = \frac{\Delta m\upsilon_2^2}{2} + \Delta mgh_2 + p_2S_2\upsilon\Delta t \qquad (1.1.6)$$

За рівнянням нерозривності:

$$\Delta V = S_1\upsilon_1\Delta t = S_2\upsilon_2\Delta t\,.$$

Поділивши рівняння (1.1.6) на елементарний об'єм ΔV, отримаємо:

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2\,,$$

де $\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$ - густина рідини.

Оскільки переріз 1 і 2 були вибрані довільно, то ця рівність буде виконуватися для будь якого перерізу трубки струму, отже:

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho gh + p = const \qquad (1.1.7)$$

Це рівняння носить назву *рівняння Бернуллі*.

Величина p називається *статичним тиском* (тиск рідини на поверхню тіла, яке обтікає ця рідина), $\frac{\rho\upsilon^2}{2}$ - *динамічним тиском*, ρgh - *гідростатичним тиском*.

Таким чином *закон Бернуллі* формулюють наступним чином: алгебраїчна сума динамічного, гідростатичного і статичного тисків для стаціонарної течії рідини, що не стискається є постійною величиною для будь якого перерізу трубки струму.

Для горизонтальної трубки струму ($h_1 = h_2 = h$) рівняння Бернуллі приймає вигляд:

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + p = const\,. \tag{1.1.8}$$

За допомогою рівняння Бернуллі можна отримати *формулу Торрічеллі* для розрахунку швидкості витікання рідини через малий отвір у стінці або дні посуду:

$$\upsilon = \sqrt{2gh}\,, \tag{1.1.9}$$

де υ- це швидкість витікання рідини з отвору діаметр якого у багато разів менший за діаметр посуду, в якому знаходиться рідина; h- відстань від поверхні рідини в посуді до отвору.

В'язкість (*внутрішнє тертя*) – це властивість реальних рідин надавати опір переміщенню однієї частини рідини відносно іншої. При переміщенні однієї частини рідини відносно іншої виникають сили внутрішнього тертя, спрямовані по дотичній до поверхні шарів Дія цих сил проявляється в тому, що зі сторони шару, який рухається скоріше, на шар, який рухається повільніше, діє прискорюючи сила. Сила внутрішнього тертя $\vec{F}_{вн}$ тим більша, чим більша площа поверхні шару S (рис. 1.2), і залежить від того, наскільки швидко змінюється швидкість течії рідини при переході від шару до шару.

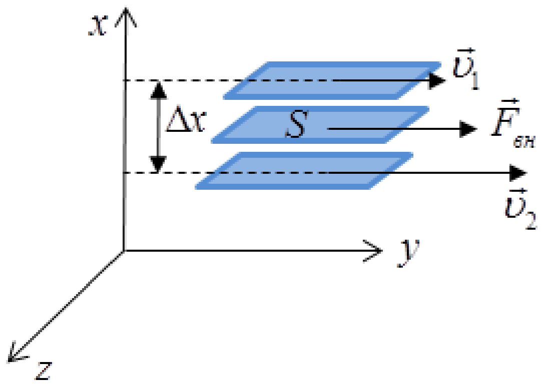


Рис. 1.2

На рис. 1.2 зображено два довільні шари, які знаходяться на відстані Δx один від одного і рухаються зі швидкостями $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$. При цьому $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = \Delta\vec{\upsilon}$. Відстань між шарами відраховується у напрямку, перпендикулярному швидкості. Величина $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$ показує, як швидко змінюється швидкість при переході від шару до шару в напрямку x, перпендикулярному напрямку руху шарів, і називається *градієнтом швидкості*.

Таким чином, модуль сили внутрішнього тертя

$$F_{вн} = \eta \left| \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} \right| S, \qquad (1.1.10)$$

де η- коефіцієнт, який називається коефіцієнтом внутрішнього тертя, або динамічною в'язкістю. Одиниця динамічної в'язкості $[\eta] = [\text{Па} \cdot \text{с}]$.

1.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 1:

З яким прискоренням спливає тіло із густиною $0{,}95 \cdot 10^3$ кг/м^3 у рідині із густиною $1{,}15 \cdot 10^3$ кг/м^3 ? Силою тертя під час руху тіла в рідині знехтувати.

Дано:

$\rho_т = 0{,}95 \cdot 10^3$ кг/м^3

$\rho_р = 1{,}15 \cdot 10^3$ кг/м^3

$a - ?$

Розв'язок:

На тіло в рідині діють: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила Архімеда $\vec{F}_A$ (рис. 1.3).

Запишемо другий закон Ньютона:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} = m\vec{a}. \qquad (1.1)$$

У проекції на вісь x рівняння має вид:

$$F_A - mg = ma. \qquad (1.2)$$

На занурене у рідину тіло діє сила Архімеда:

$$F_A = \rho_р g V, \qquad (1.3)$$

де $\rho_р$ – густина рідини.

Маса тіла

$$m = \rho_т V, \qquad (1.4)$$

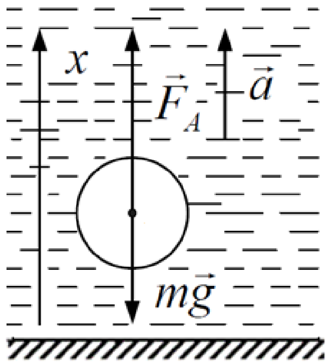


Рис. 1.3

де $\rho_т$ – густина тіла.

Підставивши (1.3) і (1.4) в (1.2), отримаємо

$$\rho_р g V - \rho_т V g = \rho_т V a \Rightarrow$$

$$a = \frac{\rho_р g V - \rho_т V g}{\rho_т V} = \frac{g(\rho_р - \rho_т)}{\rho_т}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$a = \frac{9{,}8 \cdot (1150 - 950)}{950} = 2{,}06 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: прискорення, з яким спливає тіло, 2,06 м/с^2.

Приклад 2:

Кулька масою 55 г та об'ємом 25 см^3 падає зі сталою швидкістю в рідині густиною 1,0 г/см^3. З якою силою слід тягнути цю кулю вгору, щоб вона піднімалася в цій рідині зі швидкістю в 3 рази більшою? Сила в'язкого опору рідини пропорційна швидкості руху кульки.

Дано:	СІ:
$m = 55$ г	$m = 55 \cdot 10^{-3}$ кг
$V = 25$ см^3	$V = 25 \cdot 10^{-6}$ м^3
$\rho = 1$ г/ см^3	$\rho = 1000$ кг/ м^3
$F - ?$	

Розв'язок:

На кульку, яка падає зі сталою швидкістю, в рідині діють: сила тяжіння $m\vec{g}$; сила Архімеда $\vec{F}_A$ і сила тертя (в'язкого опору рідини) $\vec{F}_{тер}$ (рис. 1.4, *а*).

Запишемо рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_{тер} = 0 \qquad (1.5)$$

Знайдемо проекцію сил на вісь *y*, спрямовану вгору:

$$F_A - mg + F_{тер} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{тер} = mg - F_A . \qquad (1.6)$$

За умовою задачі сила в'язкого опору рідини пропорційна швидкості руху кульки:

$$F_{тер} = k\upsilon , \qquad (1.7)$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

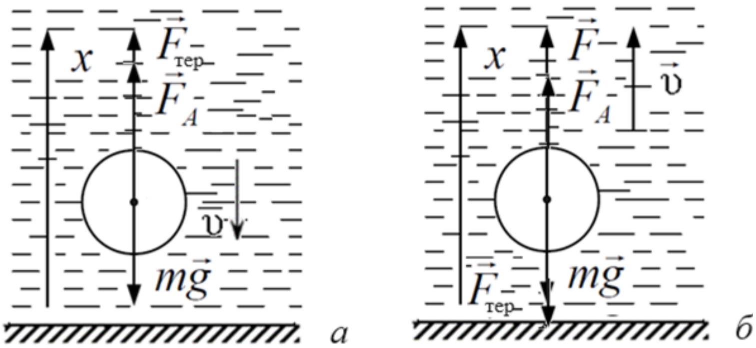


Рис. 1.4

На занурену у рідину кульку діє сила Архімеда:

$$F_A = \rho g V , \qquad (1.8)$$

де ρ – густина рідини, V - об'єм кульки.

Прирівнявши (1.6) і (1.7) з урахуванням (1.8) отримаємо:

$$F_{тер} = k\upsilon = \rho g V - mg .$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$F_{тер} = 55 \cdot 10^{-3} \cdot 10 - 1000 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = 0{,}3\,\text{Н} .$$

На кульку, яку тягнуть угору в рідині діють: сила, з якою тягнуть кульку $\vec{F}$, сила тяжіння $m\vec{g}$; сила Архімеда $\vec{F}_A$ і сила тертя (в'язкого опору рідини) $\vec{F}_{тер}$ (рис. 1.4, *б*).

Запишемо рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді:

$$\vec{F} + \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_{тер} = 0 \qquad (1.9)$$

Знайдемо проекцію сил на вісь *y*, спрямовану вгору:

$$F + F_A - mg - F_{тер} = 0 \Rightarrow F = mg + F_{тер} - F_A . \qquad (1.10)$$

За умовою задачі сила в'язкого опору рідини пропорційна швидкості руху кульки, яка зросла в 3 рази:

$$F_{тер} = k \cdot 3\upsilon .$$

Отже, з урахуванням (1.7), маємо:

$$F_{тер} = k \cdot 3\upsilon = 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9 \text{ Н}$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$F = 55 \cdot 10^{-3} \cdot 10 + 0{,}9 - 1000 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = 1{,}2 \text{ Н}.$$

Відповідь: сила, з якою слід тягнути кулю вгору 1,2 Н.

Приклад 3:

У річці плаває плоска крижина товщиною 20 м. Яка висота надводної частини крижини?

Дано:	**Розв'язок:**
$H = 0{,}2$ м	Крижина плаває у випадку, якщо $F_A = mg$.
$\rho_в = 10^3$ кг/м^3	Маса льоду $m = \rho_л V$, де ρл – густина льоду, V - об'єм крижини $V = SH$.
$\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3	Тоді сила тяжіння $mg = \rho_л SHg$.
$h - ?$	

На занурену у воду частину крижини діє сила Архімеда (рис. 1.5):

$$F_A = \rho_в g V_1,$$

де ρв – густина льоду, V_1 - об'єм зануреної у воду частини крижини:

$$V_1 = S \cdot (H - h),$$

тоді

$$F_A = \rho_в g S (H - h)$$

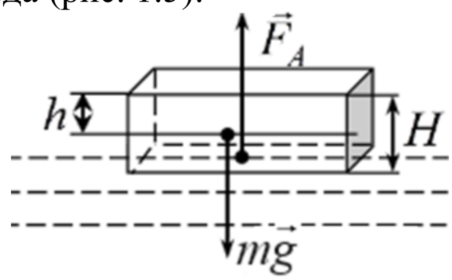


Рис. 1.5

Підставимо отримані значення в умову плавання тіл:

$$\rho_л SHg = \rho_в g S (H - h) \Rightarrow \rho_л Hg = \rho_в g (H - h)$$

звідки

$$h = \frac{H(\rho_в - \rho_л)}{\rho_в}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$h = \frac{0{,}2 \cdot (10^3 - 0{,}9 \cdot 10^3)}{10^3} = 0{,}02 \text{ м}.$$

Відповідь: висота надводної частини крижини 0,02 м.

Приклад 4:

Рідина тече горизонтальною трубою змінного перерізу. Швидкість течії у широкій частині труби діаметром 10 см дорівнює 40 см/с. Визначити швидкість течії у вузькій частині труби, діаметр якої 2 см.

Дано:	СІ:	Розв’язок:
$d_1 = 10$ см	$d_1 = 0{,}1$ м	Запишемо рівняння нерозривності:
$\upsilon_1 = 40$ см/с	$\upsilon_1 = 0{,}4$ м/с	$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2,$ (1.11)
$d_2 = 2$ см	$d_2 = 0{,}02$ м	де S - площа перерізу труби.
$\upsilon_2 - ?$		Враховуючи що $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, вираз (1.11)

перепишемо:

$$\upsilon_1 \frac{\pi d_1{}^2}{4} = \upsilon_2 \frac{\pi d_2{}^2}{4} \Rightarrow \upsilon_1 d_1{}^2 = \upsilon_2 d_2{}^2,$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{d_1{}^2}{d_2{}^2}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\upsilon_2 = 0{,}4 \cdot \frac{0{,}1^2}{0{,}02^2} = 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: швидкість течії у вузькій частині труби 10 м/с.

Приклад 5:

Швидкість течії рідини в деякому перерізі горизонтальної труби 5 см/с. Знайдіть швидкість течії у тій частині труби, яка має: а) вдвічі менший діаметр; б) вдвічі меншу площу поперечного перерізу.

Дано:	СІ:	Розв’язок:
$\upsilon_1 = 5$ см/с	$\upsilon_1 = 0{,}05$ м/с	Запишемо рівняння нерозривності:
$а)\, d_1 = 2d_2$		$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2,$ (1.12)
$б)\, S_1 = 2S_2$		де S - площа перерізу труби.
$\upsilon_2 - ?$		Враховуючи що $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, вираз (1) перепишемо

$$\upsilon_1 \frac{\pi d_1{}^2}{4} = \upsilon_2 \frac{\pi d_2{}^2}{4} \Rightarrow \upsilon_1 d_1{}^2 = \upsilon_2 d_2{}^2,$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{d_1{}^2}{d_2{}^2}.$$

У випадку а) подане співвідношенням діаметрів $d_1 = 2d_2$, отже

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \left(\frac{2d_2}{d_2}\right)^2 = 4\upsilon_1.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\upsilon_2 = 4 \cdot 0{,}05 = 0{,}2 \text{ м/с}.$$

У випадку б) подане співвідношення перерізів $S_1 = 2S_2$, отже, з рівняння неперервності (1.12):

$$\upsilon_2 = \frac{S_1\upsilon_1}{S_2} = \frac{2S_2\upsilon_1}{S_2} = 2\upsilon_1.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\upsilon_2 = 2 \cdot 0,05 = 0,1 \text{ м/с}.$$

Відповідь: швидкість течії в тій частині труби, яка має: а) вдвічі менший діаметр; 0,2 м/с; б) вдвічі меншу площу поперечного перерізу 0,1 м/с.

Приклад 6:

У горизонтальній трубі змінного перерізу в широкій частині вода тече зі швидкістю 0,05 м/с під статичним тиском 1 кПа. З якою швидкістю тече вода у вузькій частині труби? Статичний тиск у вузький частині труби дорівнює 0,8 кПа. Густина води 1000 кг/м^3.

Дано:	СІ:
$\upsilon_1 = 0,05$ м/с	$p_1 = 10^3$ Па
$p_1 = 1$ кПа	$p_2 = 800$ Па
$p_2 = 0,8$ кПа	
$\rho = 1000$ кг/м^3	
$\upsilon_2 - ?$	

Розв'язок:

Рівняння Бернуллі для нестискуваної рідини:

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2$$

За умовою задачі труба розташована ($h_1 = h_2 = h$), тому рівняння Бернуллі приймає вигляд:

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2})}{\rho}}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2(1000 - 800 + \frac{1000 \cdot 0,05^2}{2})}{1000}} = 0,63 \text{ м/с}.$$

Відповідь: швидкість течії води у вузькій частині труби 0,63 м/с.

Приклад 7:

Нестискувана рідина тече горизонтальною трубою змінного перерізу (рис. 1.6). В якому перерізі: 1) динамічний тиск найменший; 2) статичний тиск найменший?

Дано:
$S_1 > S_2$
$\frac{p_1}{p_2} - ?$

Розв'язок:

Динамічний тиск визначається за формулою:

$$p = \frac{\rho\upsilon^2}{2}.$$

З рис. 1.6 видно, що:

$d_1 < d_2 \quad (S_1 > S_2)$

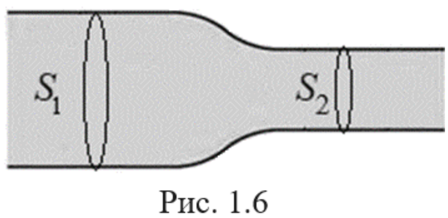


Рис. 1.6

Запишемо рівняння нерозривності:

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2, \text{ або } \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Оскільки $S_1 > S_2$, то $\upsilon_1 < \upsilon_2$.

Отже $\frac{\rho\upsilon_2^2}{2} > \frac{\rho\upsilon_1^2}{2}$, а динамічний тиск $p_2 > p_1$.

Для порівняння статистичного тиску запишемо рівняння Бернуллі для нестискуваної рідини, яка тече горизонтальною трубою змінного перерізу:

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2}, \text{ або } p_1 - p_2 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} - \frac{\rho\upsilon_1^2}{2}.$$

Оскільки $S_1 > S_2$ і $\upsilon_1 < \upsilon_2$, то $\frac{\rho\upsilon_2^2}{2} - \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} > 0$, а $p_1 - p_2 > 0$, тобто статичний тиск

$p_2 < p_1$.

Відповідь: 1) динамічний тиск найменший у першому перерізі; 2) статичний тиск найменший у другому перерізі.

<u>Приклад 8:</u>

Якої сили тиску зазнає гребля довжиною 150 м та висотою 8 м, якщо вода має таку саму висоту? Атмосферний тиск нормальний.

Дано:	**Розв'язок:**
$l = 150$ м $h = 8$ м $\rho = 10^3$ кг/ м^3 $p_{атм} = 10^5$ Па	Повний тиск на греблю з боку води складається із гідростатичного та атмосферного тисків: $p = p_{атм} + \frac{\rho g h}{2}$, де ρgh/2 - середній тиск води греблю.
$F - ?$	Сила тиску води

$$F = pS = \left(p_{атм} + \frac{\rho g h}{2}\right) lh.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$F = \left(10^5 + \frac{1000 \cdot 9,8 \cdot 8}{2}\right) \cdot 150 \cdot 8 = 1,67 \cdot 10^8 \text{ Н}.$$

Відповідь: сила тиску, якої зазнає гребля, $1,67 \cdot 10^8$ Н.

<u>Приклад 9:</u>

Із горизонтально розташованого медичного шприца діаметром 1,5 см видавлюється фізіологічний розчин із силою 10 Н. Знайти швидкість витікання рідини з голки шприца. Густина фізіологічного розчину 1,03 г/ см^3. Переріз поршня значно більший за переріз голки. Чому швидкість витікання розчину не залежить від перерізу голки?

Дано:	**СІ:**	**Розв'язок:**
$d_п = 1,5$ см $F = 10$ Н $p = 1,03$ кг/ м^3 $S_п \gg S_г$	$d_п = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м	Запишемо для шприца (поршня) рівняння Бернуллі: $p_п + \frac{\rho\upsilon_п^2}{2} + \rho g h_п = p_г + \frac{\rho\upsilon_г^2}{2} + \rho g h_г$. Оскільки шприц за умовою задачі
$\upsilon_г - ?$		розташований горизонтально, висота голки

буде дорівнювати висоті шприца ($h_п$=$h_г$).

$$p_п + \frac{\rho \upsilon_п^2}{2} = p_г + \frac{\rho \upsilon_г^2}{2}.$$

Статичний тиск, що діє з боку голки, дорівнює атмосферному: $p_г = p_{атм}$.

Атмосферний тиск діє також і на шприц, але на нього додатково діє тиск, що створюється силою F, який може бути визначений за формулою:

$$F = pS.$$

Отже, тиск усередині шприца – це сума двох компонент:

$$p_{атм} + \frac{F}{S_п} + \frac{\rho \upsilon_п^2}{2} = p_{атм} + \frac{\rho \upsilon_г^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{F}{S_п} + \frac{\rho \upsilon_п^2}{2} = \frac{\rho \upsilon_г^2}{2}. \qquad (1.13)$$

Використаємо рівняння неперервності:

$$S_п \upsilon_п = S_г \upsilon_г, \Rightarrow \upsilon_п = \frac{S_г}{S_п} \upsilon_г. \qquad (1.14)$$

Оскільки за умовою $S_г << S_П$, тоді $S_г/S_п \approx 0$ і $\upsilon_п \approx 0$.
Тоді рівняння Бернуллі:

$$\frac{F}{S_п} = \frac{\rho \upsilon_г^2}{2}. \qquad (1.15)$$

Площа перерізу поршня:

$$S_п = \frac{\pi d_п^{\ 2}}{4}. \qquad (1.16)$$

Підстановкою (1.16) в (1.15) отримаємо:

$$\frac{4F}{\pi d_п^{\ 2}} = \frac{\rho \upsilon_г^2}{2} \Rightarrow \ 8F = \pi \rho \left(d_п \upsilon_г \right)^2, \qquad (1.17)$$

$$\upsilon_г = \frac{1}{d_п} \sqrt{\frac{8F}{\pi \rho}}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\upsilon_г = \frac{1}{1{,}5 \cdot 10^{-2}} \sqrt{\frac{8 \cdot 10}{3{,}14 \cdot 1030}} = 10{,}5 \text{ м/ с}.$$

Чому швидкість витікання розчину не залежить від перерізу голки?

$$\upsilon_п = \frac{S_г}{S_п} \upsilon_г \approx 0 \quad \text{за рахунок } S_П >> S_г.$$

Отже, швидкість витікання розчину не залежить від перерізу голки у тому разі, коли переріз поршня значно більший за переріз голки.
Відповідь: швидкість витікання рідини з голки шприца 10,5 м/с.

<u>Приклад 10:</u>

Якої найбільшої швидкості може досягти дощова крапля діаметром 0,3 мм, якщо динамічна в'язкість повітря $1{,}2\cdot10^{-5}$ Па с?

Дано:	СІ:	Розв'язок:
$d = 0{,}3$ мм $\eta = 1{,}2\cdot10^{-5}$ Па$\cdot$с $\upsilon - ?$	$d = 0{,}3\cdot10^{-3}$ м	Під час падіння на краплю діють дві протилежно спрямовані сили. Сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила опору повітря $\vec{F}$ (силу Архімеда не враховуємо).

У разі збільшення швидкості падіння сила опору зростає. Максимальної швидкості крапля досягне, коли сила тяжкості та сила опору повітря стануть рівними $F = mg$.

За законом Стокса

$$F = 6\pi\eta r\upsilon = 3\pi\eta d\upsilon ,$$

Тоді

$$3\pi\eta d\upsilon = mg .$$

Оскільки

$$m = \rho V = \rho\frac{\pi d^3}{6},$$

де ρ – густина води.

Тоді

$$3\pi\eta d\upsilon = \rho g\frac{\pi d^3}{6} \Rightarrow \upsilon = \frac{\rho g d^2}{18\eta}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\upsilon = \frac{10^3\cdot9{,}8\cdot\left(0{,}3\cdot10^{-3}\right)^2}{18\cdot1{,}2\cdot10^{-5}} = 4{,}1\,\text{м/ с}$$

Відповідь: швидкість рідини на виході 3 м/с.

<u>1.2 Задачі для самостійного розв'язування</u>

1. У посудину циліндричної форми діаметром 20 см налита родина. Знайдіть висоту рідини в посудині, при якій сила гідростатичного тису на дно дорівнює силі гідростатичного тиску на стінку.

2. Діаметр однієї зі сполучених посудин удвічі більший за діаметр іншої. В ці посудини налили ртуть, а потім у вузьку посудину налили стовпчик води висотою 50 см. Знайдіть, на скільки зміниться рівень ртуті в обох посудинах.

3. У морі плаває крижина, частина якої об'ємом 195 м^3 знаходиться над водою. Знайдіть об'єм усієї крижини та її підводної частини. Густина льоду 800 кг/м^3, густина морської води 1030 кг/м^3.

4. Порожниста скляна куля плаває у воді, занурена наполовину. Зовнішній об'єм кулі 200 см^3. Знайдіть об'єм порожнини кулі. Густина скла 2, $5\cdot10^3$ кг/м^3.

5. Знайти швидкість течії вуглекислого газу по трубі, якщо відомо, що за час 30 хв через поперечний переріз труби протікає маса газу 0,51 кг. Густина газу 7,5 кг/м^3. Діаметр труби 2 см.

6. Кулька спливає з постійною швидкістю в рідині, густина якої в 4 рази більша за густину матеріалу кульки. У скільки разів сила тертя, що діє на спливаючу кульку, більша за силу тяжіння, що діє на цю кульку?

7. Із широкого кінця конусоподібної труби виливається вода зі швидкістю 10 см/с. А подається у вузьку частину зі швидкістю 30 см/с. Діаметр вузької частини 10 мм. Який діаметр (в мм) широкої частини труби?

8. Яку силу треба прикласти до малого поршня гідравлічної машини, площа якого 0,5 см^2, щоб великий поршень площею 30 см^2 міг підняти вантаж вагою 6000 Н?

9. Який тиск створює компресор у фарбопульті, якщо струмінь рідкої фарби випливає з нього зі швидкістю 25 м/с? Густина фарби $0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

10. На столі стоїть посудина з водою, в бічній поверхні якої є малий отвір, розташований на відстані 25 см від дна посудини і на відстані 16 см від рівня води. Рівень води у посудині підтримується постійним. На якій відстані від посудини (по горизонталі) струмінь води падає на стіл?

2. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

2.1 ВІЛЬНІ НЕЗАГАСАЮЧІ МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

2.1.1 Основні поняття, закони і формули

Диференціальне рівняння вільних незгасних коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x, \tag{2.1.1}$$

де x – зміщення від положення рівноваги точки, що коливається (м); t – час (с); ω_0 – власна циклічна (колова) частота коливань (рад/с).

Циклічна частота коливань:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{2.1.2}$$

де k – коефіцієнт квазіпружної сили (F=-kx), що виникає в системі при її виході із положення рівноваги (Н/м); m – маса точки, що коливається (кг).

Розв’язок рівняння (2.1.1) (часова залежність координати точки, що коливається):

$$x(t) = A\ \cos(\omega_0 t\ +\ \varphi_0), \tag{2.1.3}$$

де A – амплітуда коливань (м); $\varphi=\omega_0 t+\varphi_0$ – фаза коливань (рад); φ_0 – початкова фаза коливань (рад) ($\varphi=\varphi_0$ при t=0); ω_0 – циклічна частота коливань (рад/с).

Швидкість матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \upsilon_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

де $\upsilon_m = A\omega_0$ – амплітуда швидкості (м/с).

Прискорення матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi 0) = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi),$$

де $a_m = A\omega_0^2$ – амплітуда прискорення (м/с^2).

Зв’язок між частотою ν, періодом T та циклічною частотою ω_0:

$$\omega_0 = 2\pi\nu,\ \nu = \frac{1}{T},\ \omega_0 = 2\pi T. \tag{2.1.4}$$

Якщо тіло, що коливається, за деякий проміжок часу t здійснює n коливань, то період та частоту можна знайти за формулами:

$$T = \frac{t}{n},\ \nu = \frac{n}{t}. \tag{2.1.5}$$

Період коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{2.1.6}$$

де l – довжина маятника (м); g – прискорення вільного падіння (м/с^2).

Період коливань пружинного маятника:

$$T = 2\pi\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,, \qquad (2.1.7)$$

де m – маса вантажу (кг); k – жорсткість пружини (Н/м).
Період коливань фізичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}\,, \qquad (2.1.8)$$

де J – момент інерції фізичного маятника відносно осі, що проходить крізь точку підвісу (кг·м^2); l – відстань між точкою підвісу та центром маси маятника (м).

Зведена довжина фізичного маятника:

$$l_{зв} = \frac{J}{ml}\,. \qquad (2.1.9)$$

Кінетична енергія матеріальної точки, що коливається:

$$E_к = \frac{kA^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \qquad (2.1.10)$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, що коливається:

$$E_p = \frac{kA^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \qquad (7.1.11)$$

Повна механічна енергія матеріальної точки, що коливається:

$$E = E_к + E_p = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\,. \qquad (2.1.12)$$

Амплітуда результуючого коливання при додаванні двох однаково спрямованих коливань з однаковою частотою:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right)}\,, \qquad (2.1.13)$$

де A_1, A_2 – амплітуди гармонічних коливань, що додаються (м); φ_{01}, φ_{02} – початкові фази цих коливань (рад).
Початкова фаза результуючого коливання при додаванні двох однаково спрямованих коливань з однаковою частотою:

$$\varphi_0 = \text{arctg}\,\frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}\,. \qquad (2.1.14)$$

При додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань, що задані рівняннями:

$$x = A_1\cos\left(\omega_0 t + \varphi_{01}\right), \quad y = A_2\cos\left(\omega_0 t + \varphi_{02}\right), \qquad (2.1.15)$$

отримаємо періодичний рух матеріальної точки по еліптичній траєкторії. В загальному випадку рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos\left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right) + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2\left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right). \qquad (2.1.16)$$

2.1.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 1:

Записати рівняння гармонічного коливання, якщо амплітуда прискорення 50 см/с^2, частота коливань 0,5 Гц, зміщення точки від положення рівноваги в початковий момент часу 25 мм. Знайти амплітуду швидкості.

Дано:

$a_{max} = 50$ см/ с^2

$\nu = 0{,}5$ Гц

$x_0 = 25$ мм

$x(t),\ \upsilon_{max} - ?$

Розв'язок:

Рівняння гармонічного коливання має вигляд:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \qquad (2.1.17)$$

Знайдемо швидкість як першу похідну від координати за часом $\upsilon = dx/dt$:

$$\upsilon = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = -\upsilon_{max}\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \qquad (2.1.8)$$

Звідси амплітуда швидкості визначається як

$$\upsilon_{max} = A\omega_0. \qquad (2.1.19)$$

Прискорення – це друга похідна від координати за часом, або перша похідна від швидкості ($a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt}$):

$$a = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = -a_{max}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \qquad (2.1.20)$$

З рівняння (2.1.20) випливає вираз для амплітуди прискорення:

$$a_{max} = A\omega_0^2.$$

Розрахуємо циклічну частоту коливань:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0{,}5 = \pi \text{ рад/ с}.$$

Отже, тепер можна знайти амплітуду коливань:

$$A = \frac{a_{max}}{\omega_0^2} = \frac{0{,}5}{3{,}14^2} = 0{,}05 \text{ м}.$$

Залишилося знайти початкову фазу φ_0:

$$x\left(t=0\right) = x_0 = A\cos\varphi_0,\ \ cos\varphi_0 = x_0 A,\ \varphi_0 = \arccos\left(\frac{x_0}{A}\right)$$

або після підстановки відомих значень:

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{0{,}025}{0{,}05}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Шукане рівняння гармонічного коливання набирає вигляду

$$x = 0{,}05\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

За умовою також потрібно знайти амплітуду швидкості:

$$\upsilon_{max} = A\omega_0 = 0{,}05 \cdot 3{,}14 = 0{,}157 \text{ м/ с}.$$

Відповідь: рівняння гармонічного коливання $x = 0,05\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$; амплітуда швидкості 0,157 м/с.

Приклад 2:

Записати рівняння гармонічного коливання, якщо амплітуда швидкості 0,63 м/с, період коливань 1 с, а зміщення точки від положення рівноваги в початковий момент часу дорівнює нулю. Знайти амплітуду прискорення та частоту коливань.

Дано:	**Розв'язок:**
$\upsilon_{max} = 0,63$ м/с $T = 1$ с $x_0 = 0$	Рівняння гармонічного коливання: $$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$ Швидкість матеріальної точки, що здійснює гармонічні
$x(t),\ a_{max},\ \nu - ?$	коливання:

$$\upsilon = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = -\upsilon_{max}\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Прискорення матеріальної точки при гармонічних коливаннях:

$$a = -A\omega_0^2\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = -a_{max}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Знайдемо частоту коливань ν та циклічну частоту ω_0 за формулами:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ рад/с},\ \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1\,\text{Гц}.$$

Тепер знайдемо амплітуду коливань через відоме за умовою значення амплітуди швидкості υ_{max}:

$$\upsilon_{max} = A\omega_0,\ A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega_0} = \frac{0,63}{2\pi} = \frac{0,63}{2\cdot 3,14} = 0,1\,\text{м}.$$

Початкову фазу шукатимемо аналогічно до першої задачі:
Залишилося знайти початкову фазу φ_0:

$$A\cos\varphi_0 = x_0,\ A\cos\varphi_0 = 0,\ \varphi_0 = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Рівняння гармонічного коливання набирає вигляду

$$x = 0,1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

а амплітуда прискорення

$$a_{max} = A\omega_0^2 = A\left(2\pi\right)^2 = 0,1\cdot\left(2\cdot 3,14\right)^2 = 3,94\ \text{м/с}^2.$$

Відповідь: рівняння гармонічного коливання $x = 0,1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$; амплітуда прискорення 3,94 м/с^2.

Приклад 3:

Математичний маятник здійснює гармонічні коливання. Через який проміжок часу він при першому коливанні відхилиться від положення рівноваги на відстань, що дорівнює амплітуді, якщо період коливання T=4с, а початкова фаза коливань $\varphi_0=\pi/2$?

Дано:	Розв'язок:
$x = \pm A$ $T = 4$ с $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$	За умовою потрібно знайти мінімальний час, за який зміщення точки від положення рівноваги досягне амплітудного значення. Оскільки у процесі коливань зміщення відбувається у двох напрямах, можна записати таке співвідношення:
$t - ?$	$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \pm A.$

Потрібно обрати знак перед амплітудою, якому відповідатиме менший час *t*. З того, що початкова фаза $\varphi_0=\pi/2$, випливає, що координата спочатку буде змінюватися від 0 до −A. Отже, обираємо знак ”–”:

$$A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -A,$$

$$\text{os}(\omega_0 t + \varphi_0) = -1$$

Із урахуванням співвідношення $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ та підставляючи значення $\varphi_0=\pi/2$ маємо

$$\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

або після підстановки значення періоду

$$\frac{2\pi t}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

З останнього співвідношення знаходимо значення шуканого часу

$$\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow t = 1\text{ с}.$$

Відповідь: час 1 с.

Приклад 4:

Матеріальна точка масою 0,002 кг здійснює гармонічні коливання. В деякий момент часу *t* зміщення точки 0,05 м, швидкість 0,2 м/с, прискорення -80 см/с^2. Знайдіть циклічну частоту, період, фазу коливань в заданий момент часу, а також амплітуду та повну енергію точки.

Дано:	СІ:	Розв'язок:
$m = 0{,}002$ кг $x = 0{,}05$ м $\upsilon = 0{,}2$ м/с $a = -80$ см/с^2	$a = -0{,}80$ м/с^2	Рівняння гармонічного коливання: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$ Швидкість матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання: $\upsilon = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$
$\omega_0, T, \varphi, A, E - ?$		Прискорення матеріальної точки при

гармонічних коливаннях:

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Щоб знайти частоту та період коливань, поділимо прискорення точки a на її координату x:

$$\frac{a}{x}=-\frac{A\omega_0^2\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)}{A cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)}=-\omega_0^2,$$

звідси

$$\omega_0=\sqrt{-\frac{a}{x}}=\sqrt{\frac{0,8}{0,05}}=4\ \text{рад/с}.$$

Період коливань T визначається за формулою

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\cdot 3,14}{4}=1,57\ \text{с}.$$

Для знаходження фази в заданий момент часу розділимо швидкість υ на прискорення a:

$$\frac{\upsilon}{a}=\frac{-A\omega_0\sin\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)}{-A\omega_0^2\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)}=\frac{1}{\omega_0}\cdot tg\left(\omega_0 t+\varphi_0\right),$$

$$tg\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)=\frac{\upsilon}{a}\omega_0=\frac{0,2}{-0,8}\cdot 4=-1,$$

$$\varphi=\omega_0 t+\varphi_0=\operatorname{arctg}\left(-1\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Тепер знайдемо амплітуду коливань із часової залежності для координати:

$$A=\frac{x}{\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)}=\frac{0,05}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=0,0707\ \text{м}.$$

Знайдемо повну енергію E гармонічних коливань. Вона дорівнюватиме сумі кінетичної $E_к$ та потенціальної $E_р$:

$$E=E_к+E_р.$$

Коли реалізується максимальне значення швидкості $\upsilon=\upsilon_{max}$, потенціальна енергія $E_р=0$, тому $E=E_к+E_р=E_{кmax}=\frac{m\upsilon_{max}^2}{2}=\frac{mA^2\omega_0^2}{2}$.

Після підстановки числових значень отримаємо

$$E=\frac{0,002\cdot 0,0707^2\cdot 4^2}{2}=0,8\cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Відповідь: циклічна частота 4 рад/с, період 1,57 с, фаза коливань в заданий момент часу $-\pi/4$, амплітуда коливань 0,0707 м, повна енергія точки $0,8\cdot 10^{-4}$ Дж.

Приклад 5:

Початкова фаза коливань точки $\varphi_0=0$, період коливань 1 с. Знайти найближчі моменти часу, в які зміщення, швидкість та прискорення удвічі менші за їх амплітудні значення.

Дано:	**Розв'язок:**
$\varphi_0 = 0$ $T = 1\,\text{с}$ $x(t_1) = A/2$ $\upsilon(t_2) = \upsilon_{\max}/2$ $a(t_3) = a_{\max}/2$ $t_1, t_2, t_3 - ?$	Знайдемо циклічну частоту: $$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ рад/ с}.$$ Із урахуванням цього значення та початкової фази $\varphi_0=0$ часова залежність координати точки, що коливається набирає вигляду: $$x = A\cos(2\pi t).$$

За умовою потрібно знайти найближчий момент часу t_1, в який зміщення точки x удвічі менше за амплітудне значення A, тобто можна записати:

$$\frac{A}{2} = A\cos(2\pi t_1), \quad \cos(2\pi t_1) = \frac{1}{2}, \quad 2\pi t_1 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Звідси знайдемо значення часу t_1:

$$2\pi t_1 = \frac{\pi}{3},\ 2t_1 = \frac{1}{3},\ t_1 = \frac{1}{6}\text{ с}.$$

Для знаходження моменту часу, в який швидкість υ вдвічі менша за своє амплітудне значення, запишемо закон зміни швидкості із часом та знайденого значення циклічної частоти ω_0: $\upsilon = -\upsilon_{max}\sin(2\pi t_2)$.

Оскільки потрібно знайти мінімальний час t_2, потрібно використовувати співвідношення $\upsilon = -\dfrac{\upsilon_{max}}{2}$, тому що функція sin у першій чверті набуває додатних значень. Отже, отримаємо:

$$-\frac{\upsilon_{max}}{2} = -\upsilon_{max}\sin(2\pi t_2), \quad \sin(2\pi t_2) = \frac{1}{2}, \quad 2\pi t_2 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad 2\pi t_2 = \frac{\pi}{6}, \quad 2t_2 = \frac{1}{6},$$

$$t_2 = \frac{1}{12}\text{ с}.$$

Для знаходження найближчого моменту часу t_3, в який прискорення вдвічі менше за амплітудне значення, запишемо закон зміни прискорення із часом згідно умови задачі:

$$a = -a_{max}\cos(2\pi t_3). \qquad (2.1.21)$$

Згідно з рівнянням (2.1.21) на початку процесу прискорення матиме від'ємне значення, оскільки функція cos у першій чверті додатна.

Із урахуванням цієї обставини запишемо:

$$-\frac{a_{max}}{2} = -a_{max}cos(2\pi t_3), \quad \cos(2\pi t_3) = \frac{1}{2}, \quad 2\pi t_3 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right), \quad 2\pi t_3 = \frac{\pi}{3}, \quad 2t_3 = \frac{1}{3},$$

$$t_3 = \frac{1}{6}\text{ с}.$$

Відповідь: момент часу, в який зміщення удвічі менше за амплітуду 1/6 с; момент часу, в який швидкість удвічі менша за її амплітудне значення 1/12 с; момент часу, в який прискорення удвічі менше за її амплітудне значення 1/6 с.

Приклад 6:

Матеріальна точка масою 0,005 кг коливається згідно з законом $x=0{,}1\cos(2t+\varphi_0)$. Знайдіть максимальну силу, що діє на точку, та повну енергію системи.

Дано:
$m = 0{,}005$ кг
$x = 0{,}1\cos\left(2t+\varphi_0\right)$

$F_{\max}, E - ?$

Розв'язок:

Якщо порівняти закон коливань даний в умові задачі та рівняння для гармонічних коливань

$$x = A\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)$$

отримаємо значення амплітуди та частоти:

A=0,1 м, ω_0=2 рад/с.

Максимальну силу, що діє на точку, будемо знаходити за другим законом Ньютона:

$$F_{max} = ma_{max} = mA\omega_0^2 = 0{,}005\cdot 0{,}1\cdot 2^2 = 0{,}002\text{ Н}.$$

Повну енергію точки знайдемо як максимальну кінетичну:

$$E = E_{\kappa max} = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

або після підстановки числових даних

$$E = \frac{0{,}005\cdot 0{,}1^2\cdot 2^2}{2} = 10^{-4}\text{ Дж}.$$

Відповідь: максимальна сила 0,002 Н, повна енергія системи 10^{-4} Дж.

Приклад 7:

Пружина, до якої підвішене тіло, видовжилася на x=0,04 м. Знайти частоту коливань пружинного маятника.

Дано:
$x = 0{,}04$ м

$\nu - ?$

Розв'язок:

Частота коливань пружинного маятника визначається формулою:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Згідно із законом Гука пружна сила, що виникає при розтягу пружини під дією вантажу, дорівнює:

$$F_{np} = -kx.$$

На вантаж також діє сила тяжіння:

$$F = mg.$$

Оскільки пружина розтягується під дією вантажу та потім знаходиться у стані спокою, ці дві сили за третім законом Ньютона рівні за модулем та протилежні за напрямком, тому

$$F_{np} = -F,$$

$$kx = mg \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{x}.$$

Підставляючи одержане відношення у формулу для частоти, отримуємо

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x}},$$

або після підстановки числових значень

$$\nu = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}04}} = 2{,}49\ \text{Гц}.$$

Відповідь: частота коливань пружинного маятника 2,49 Гц.

Приклад 8:

Написати рівняння руху, що виходить в результаті додавання двох однаково спрямованих гармонічних коливання з однаковим періодом T=8 с і однаковою амплітудою A=0,02 м. Різниця фаз між цими коливаннями φ_1-φ_2=π/4. Початкова фаза одного з цих коливань дорівнює нулю.

Дано:

$T = 8$ с

$A = 0{,}02$ м

$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$

$x(t) - ?$

Розв'язок:

При додаванні двох однаково спрямованих гармонічних коливань однакового періоду виходить гармонічне коливання того ж періоду з амплітудою:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

з початковою фазою:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

яке описується рівнянням:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi).$$

За умовою φ_2=0. Підставляючи числові дані, отримаємо

$$A = \sqrt{2\cdot(0{,}02\ \text{м})^2 + 2\cdot(0{,}02\ \text{м})^2\cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}037\ \text{м},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{\sin(\pi/4)}{1+\cos(\pi/4)} = \frac{\pi}{8}.$$

Знайдемо циклічну частоту:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}.$$

Звідси рівняння результуючого руху

$$x = 0{,}037\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right)(\text{м}).$$

Відповідь: рівняння руху $x = 0{,}037\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right)(\text{м})$.

Приклад 9:

Результуюче коливання, що виходить при додаванні двох гармонійних коливань одного напрямку, описується рівнянням виду x=Acos$t$cos45t (t – у секундах). Визначити: 1) циклічні частоти коливань, що додаються; 2) період биття результуючого коливання.

Дано:	**Розв'язок:**
$x = A cos t cos 45t$	Рівняння результуючого коливання має вид:
$\omega_1, \omega_2, T_Б - ?$	$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right),$$

де ω_1, ω_2 – циклічні частоти коливань, що додаються.
Порівнюючи з рівнянням з умови, визначаємо

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 1 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = 2,$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 45 \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = 90.$$

Вирішуючи спільно отримані рівняння, знаходимо

$$2\omega_1 = 92,\ \omega_1 = 46\ \text{с}^{-1},\ \omega_2 = 44\ \text{с}^{-1}.$$

Період биття розраховуємо за формулою

$$T_Б = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

$$T_Б = \frac{2\pi}{2} = 3{,}14\ \text{с}.$$

Відповідь: циклічні частоти коливань, що додаються 46 с^{-1} і 44 с^{-1}; період биття результуючого коливання 3,14 с.

<u>Приклад 10:</u>

Написати рівняння результуючого коливання, що виходить в результаті додавання двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковою частотою $\nu_1=\nu_2=5$ Гц і однаковою початковою фазою $\varphi_1=\varphi_2=\pi/3$. Амплітуди коливань дорівнюють A_1= 0,10 м і A_2=0,05 м.

Дано:	**Розв'язок:**
$\nu_1 = \nu_2 = 5$ Гц	При додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань однакового періоду рівняння траєкторії результуючого коливання має вид:
$\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$	$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$
A_1=0,10 м	
$A_2 = 0{,}05$ м	За умовою маємо додавання двох коливань з однаковою
$s(t) - ?$	

початковою фазою, тому φ_1-φ_2=0 і рівняння набуде виду:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} = 0 \text{ або } \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0. \qquad (2.1.22)$$

З рівняння (2.1.22) отримаємо рівняння прямої лінії:

$$y = \frac{A_2}{A_1}x.$$

Кут нахилу прямої визначимо з рівняння:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{A_2}{A_1},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{0,05\text{ м}}{0,10\text{ м}} = 0,5,$$

$$\alpha = 26^\circ 34'.$$

Знайдемо циклічну частоту:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 5 = 10\pi\ \text{с}^{-1}.$$

Амплітуда результуючого коливання при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковою початковою фазою:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2},$$

$$A = \sqrt{(0,05\text{ м})^2 + (0,10\text{ м})^2} = 0,112\text{ м}.$$

Рівняння результуючого коливання має вид:

$$s = 0,112\sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(\text{м}).$$

Відповідь: рівняння результуючого коливання $s = 0,112\sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(\text{м})$.

2.1.3 Задачі для самостійного розв’язування

1. Диференціальне рівняння гармонічних коливань має вигляд $0,2\dfrac{d^2x}{dt^2} + 0,8x = 0$. Знайти період *T* та частоту ν цих коливань.
2. Тіло масою m=0,5 кг здійснює гармонічні коливання з амплітудою A=4 см. Знайти період коливань *T*, якщо максимальна кінетична енергія тіла, що коливається, дорівнює E_{max}=0,98 Дж.
3. Вантаж масою m=200 г підвішений до пружини з коефіцієнтом пружності k=9,8 Н/м. Знайти довжину математичного маятника *l*, що має такий самий період коливань, як цей пружинний маятник.
4. Рівняння коливань матеріальної точки масою m=16 г має вигляд x=0,02sin(πt/8+π/4). Знайти кінетичну $E_к$, потенціальну $E_п$ та повну енергію *E* точки через Δt=2 с після початку коливань.
5. Знайти момент інерції *I* фізичного маятника масою m=20 кг, якщо він здійснює коливання з періодом T= 3,14 с, а відстань від точки підвісу до центра маси l=1 м.
6. Два однаково спрямованих гармонічних коливання з однаковою частотою та амплітудами A_1=3 см та A_2=5 см поєднуються в одне гармонічне коливання з амплітудою A=7 см. Знайдіть різницю фаз Δφ коливань, що додаються.
7. Періоди коливань двох математичних маятників відносяться як 3:2. У скільки разів і який маятник довший?
8. Яка довжина *l* математичного маятника, що здійснює коливання за законом x=0,004cos(2t+0,8)?

9. Тіло здійснює гармонічні коливання на пружині за законом $x=0,07\cos(\pi t+0,5\pi)$. Жорсткість пружини k=20 Н/м. Знайти частоту коливань ν та повну енергію E тіла.

10. Знайти масу тіла m, що здійснює гармонічні коливання на пружині з амплітудою A=0,1 м та частотою ν=2 Гц, якщо повна енергія коливань дорівнює E=7,7 мДж.

2.2 ВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ ЗАГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

2.2.1 Основні поняття, закони і формули

Диференціальне рівняння вільних затухаючих коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0, \qquad (2.2.1)$$

де ω_0 – власна частота коливань системи при відсутності загасання (рад/с); $\beta=\dfrac{r}{2m}$ – коефіцієнт загасання ($с^{-1}$); m – маса точки, що коливається (кг); r (кг/с) – коефіцієнт пропорційності між швидкістю матеріальної точки та силою тертя $F_{тер}$:

$$F_{тер}=-r\upsilon, \qquad (2.2.2)$$

де υ – швидкість (м/с).

Розв'язок рівняння (2.2.1) залежить від знака різниці:

$$\omega^2=\omega_0^2-\beta^2, \qquad (2.2.3)$$

де ω – циклічна частота загасаючих коливань.

При $\omega_0^2-\beta^2>0$ розв'язок набирає виду:

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0), \qquad (2.2.4)$$

де A_0 – початкова амплітуда (м); φ_0 – початкова фаза коливань (рад); t – час (с).

При $\omega_0^2-\beta^2<0$ частота стає уявною, а процес – аперіодичним.

Період загасаючих коливань

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}. \qquad (2.2.5)$$

Амплітуда загасаючих коливань

$$A=A_0e^{-\beta t}. \qquad (2.2.6)$$

Логарифмічний декремент загасання

$$\lambda=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}, \qquad (2.2.7)$$

де $A(t)$ і $A(t+T)$ – два послідовних значення амплітуди загасаючих коливань, що розділені інтервалом часу, який дорівнює періоду коливань T.

Зв'язок коефіцієнта загасання β та логарифмічного декремента загасання λ

$$\lambda = \beta T \,. \tag{2.2.8}$$

Часова залежність повної енергії згасних коливань, усередненої за періодом коливань при слабкому загасанні $\beta \ll 1$:

$$E = \frac{mA_0^2\omega^2}{2} e^{-2\beta t} \,. \tag{2.2.9}$$

Час релаксації коливань (час, за який амплітуда зменшується в *e* разів):

$$\tau = \frac{1}{\beta} \,. \tag{2.2.10}$$

Кількість коливань, що здійснює коливальна система за час релаксації τ :

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda} \,. \tag{2.2.11}$$

Добротність коливної системи

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\lambda}} \,, \tag{2.2.12}$$

де E – повна енергія коливань; ΔE – втрата енергії за один повний період коливань.

При $\beta \ll 1$ із використанням наближень $1 - e^{-2\lambda} \approx 2\lambda$, $\omega_0 \approx \omega$:

$$Q = \pi Ne = \pi \frac{\tau}{T} = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\beta} \,. \tag{2.2.13}$$

Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \,, \tag{2.2.14}$$

де F_0 – амплітуда вимушувальної сили (Н); m – маса матеріальної точки (кг); ω – циклічна частота вимушувальної сили (рад/с).

Зміщення матеріальної точки після встановлення стаціонарного режиму вимушених коливань

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \,, \tag{2.2.15}$$

де амплітуда розраховується за формулою

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad (2.2.16)$$

а початкова фаза

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \qquad (2.2.17)$$

Циклічна частота вимушених коливань, за якої спостерігається резонанс:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (2.2.18)$$

Амплітуда вимушених коливань при резонансі

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (2.2.19)$$

2.2.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 1:

Математичний маятник довжиною 50 см, виведений із положення рівноваги, відхилився при першому коливанні на x_1=5 см, а при другому (у той самий бік) – на x_2=4 см. Знайти логарифмічний декремент загасання та час релаксації (час спадання амплітуди в *e* разів) для цих коливань.

Дано:	СІ:
$l = 50$ см	$l = 0{,}5$ м
$A_0 = 5$ см	$A_0 = 0{,}05$ м
$A_1 = 4$ см	$A_1 = 0{,}04$ м
$\lambda, \tau - ?$	

Розв'язок:

Рівняння згасних коливань має вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

де частота визначається за формулою:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2,$$

де ω_0 – власна частота коливань без загасання; β – коефіцієнт загасання.

За умовою задачі моменти часу, коли зміщення рівне x_1 та x_2, розділені повним періодом коливань T. Отже, візьмемо x_1 за початкову амплітуду A_0, а x_2 позначимо як амплітуду A_1. Знайдемо логарифмічний декремент загасання за формулою:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0}{A_1},$$

$$\lambda = \ln\frac{0{,}05}{0{,}04} \approx 0{,}223.$$

Амплітуда коливань при загасанні визначається за формулою:

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t}.$$

За умовою потрібно знайти час релаксації τ, за який амплітуда зменшується в *e* разів. Отже, маємо

$$A_1 = \frac{A_0}{e}, \quad \frac{A_0}{e} = A_0 e^{-\beta\tau}, \quad e^{-1} = e^{-\beta\tau}, \quad \beta\tau = 1, \quad \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Отже, щоб знайти час τ, потрібно знайти коефіцієнт загасання β. Згідно формули для визначення логарифмічного декременту загасання:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{-\beta T} = \beta T. \qquad (2.2.20)$$

Тепер задача зводиться до знаходження періоду коливань *T*.
Використаємо формулу:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Пригадаємо, що в умові задачі нам даний математичний маятник, а його власний період коливань без загасання T_0 визначається за формулою:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (2.2.21)$$

Із урахуванням формули (2.2.21) знайдемо власну циклічну частоту коливань маятника за останньою формулою:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Підставимо всі знайдені величини в отримане рівняння(2.2.20), й отримаємо:

$$\lambda = \beta\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad \lambda\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 2\pi\beta,$$

$$\lambda^2(\omega_0^2 - \beta^2) = 4\pi^2\beta^2, \quad \beta^2(4\pi^2 + \lambda^2) = \lambda^2\omega_0^2,$$

$$\beta = \frac{\lambda\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}} = \lambda\sqrt{\frac{g}{l(4\pi^2 + \lambda^2)}}.$$

Після підстановки числових значень та відповідного розрахунку

$$\beta = 0,223\sqrt{\frac{9,8}{0,5\left(4\cdot 3,14^2 + 0,223^2\right)}} = 0,157\ \text{с}^{-1}.$$

Тепер можна знайти час релаксації:

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{0,157} = 6,37\ \text{с}.$$

Відповідь: логарифмічний декремент загасання 0,223, час релаксації 6,37 с.

Приклад 2:

За час Δt=10 с амплітуда коливань зменшилася в *e* разів. Знайти коефіцієнт загасання цих коливань β.

Дано:	Розв’язок:
$\Delta t = 10$ с $\dfrac{A_1}{A_2} = e$	
$\beta - ?$	

Вирази для знаходження двох амплітуд A_1 та A_2, що розділені проміжком часу Δt:

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}, \tag{2.2.22}$$

$$A_2 = A_0 e^{-\beta(t_1+\Delta t)}. \tag{2.2.23}$$

Поділимо рівняння (2.2.22) на (2.2.23) й отримаємо.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\beta t_1}}{A_0 e^{-\beta(t_1+\Delta t)}} = e^{\beta \Delta t}. \tag{2.2.24}$$

За умовою задачі

$$\frac{A_1}{A_2} = e. \qquad (2.2.25).$$

Отже, із порівняння співвідношень (2.2.24) і (2.2.25) маємо

$$e^{\beta \Delta t} = e^1, \quad \beta \Delta t = 1, \quad \beta = \frac{1}{\Delta t}.$$

Після розрахунку

$$\beta = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{10} = 0{,}1\,\text{с}.$$

Зазначимо, що цю задачу можна було розв’язати за один крок, скориставшись формулою (2.2.10).

Відповідь: коефіцієнт загасання 0,1 с.

<u>Приклад 3:</u>

Логарифмічний декремент загасання камертона, що коливається із частотою 100 Гц, дорівнює 0,002. Через який проміжок часу амплітуда коливань камертона зменшиться у 100 разів?

Дано:	Розв’язок:
$\nu = 100$ Гц $\lambda = 0{,}002$ $\dfrac{A_1}{A_2} = 100$	
$\Delta t - ?$	

Запишемо вираз для знаходження амплітуди:

$$A_2 = A_1 e^{-\beta \Delta t}.$$

З данного співвідношення можна отримати:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{\beta \Delta t} = 100, \ \ln 100 = \beta \Delta t, \quad \Delta t = \frac{\ln 100}{\beta}.$$

Для знаходження коефіцієнта загасання коливань β використаємо вираз для визначення логарифмічного декременту загасання λ (7.2.8) та з’вязок періоду коливань T з частотою ν:

$$\lambda = \beta T, \ T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \lambda = \frac{\beta}{\nu}, \quad \beta = \lambda \nu.$$

Після підстановки цього значення у знайдений вираз для Δt:

$$\Delta t = \frac{\ln 100}{\beta} = \frac{\ln 100}{\lambda \nu},$$

або після підстановки числових значень

$$\Delta t = \ln\frac{100}{0,002\cdot 100} = 23,03\ \text{с}.$$

Відповідь: проміжок часу 23,03 с.

Приклад 4:

Логарифмічний декремент загасання маятника дорівнює λ=0,02. У скільки разів зменшиться амплітуда після 50 повних коливань?

Дано:
$\lambda = 0,02$
$N = 50$

$\frac{A_1}{A_2} - ?$

Розв'язок:

Нехай t – час, необхідний для зменшення амплітуди коливань в N разів. Тоді згідно із (2.2.6) маємо:

$$A_2 = A_1 e^{-\beta t}, \quad \frac{A_1}{A_2} = e^{\beta t}.$$

Для здійснення системою N повних коливань потрібний час:

$$t = NT,$$

де T – період коливань або час одного повного коливання. Коефіцієнт загасання виразимо через логарифмічний декремент загасання згідно із (2.2.8):

$$\lambda = \beta T \Rightarrow, \ \beta = \frac{\lambda}{T}.$$

Підставимо дані вирази у першу формулу:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{\beta t} = \exp\left[\frac{\lambda}{T} NT\right] = e^{\lambda N}.$$

Знайдемо числове значення шуканої величини:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{0,02\cdot 50} = e = 2,71.$$

Зазначимо, що оскільки амплітуда зменшується в e разів, то N=50 повних коливань системи у цьому випадку відповідають часу релаксації.

Відповідь: амплітуда зменшиться у e разів.

Приклад 5:

За час Δt_1=10 с амплітуда коливань маятника зменшилась у 3 рази. За який час вона зменшиться в 10 разів?

Дано:
$\Delta t_1 = 10$ с
$\frac{A_1}{A_2} = 3$
$\frac{A_1}{A_3} = 10$

$\Delta t_1 - ?$

Розв'язок:

Запишемо вирази для визначення амплітуди через аси Δt_1 та Δt_2, згідно із (2.2.6), позначивши початкову амплітуду як A_1:

$$A_2 = A_1 e^{-\beta\Delta t_1}, \quad A_3 = A_1 e^{-\beta\Delta t_2}.$$

З першого виразу отримуємо:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{\beta\Delta t_1} \Rightarrow \beta\Delta t_1 = \ln\frac{A_1}{A_2}. \tag{2.2.26}$$

з другого виразу отримуємо:

$$\frac{A_1}{A_3} = e^{\beta\Delta t_2} \Rightarrow \beta\Delta t_2 = \ln\frac{A_1}{A_3}. \tag{2.2.27}$$

Почленно поділивши вирази (2.2.26) і (2.2.27), отримаємо:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\ln\frac{A_1}{A_2}}{\ln\frac{A_1}{A_3}}, \qquad \Delta t_2=\frac{\Delta t_1\ln\frac{A_1}{A_2}}{\ln\frac{A_1}{A_3}}.$$

Знайдемо числове значення шуканої величини:

$$\Delta t_2=\frac{10\ln 10}{\ln 3}=10\lg_3 10=21\,\text{с}.$$

Відповідь: за час 21 с амплітуда коливань маятника зменшиться в 10 разів.

Приклад 6:

Вимушені коливання описуються диференціальним рівнянням $0,4\frac{d^2x}{dt^2}+0,48\frac{dx}{dt}+1,6x=0,8\sin(3t)$. Знайти циклічну частоту вимушених коливань та циклічну частоту власних коливань системи. При якій частоті зовнішньої сили буде спостерігатися резонанс?

Дано:	Розв'язок:
$0,4\frac{d^2x}{dt^2}+0,48\frac{dx}{dt}+1,6x=0,8\sin(3t)$ $\omega,\omega_0,\omega_{рез}-?$	Для знаходження всіх необхідних величин достатньо використати задане рівняння, оскільки воно повністю описує властивості системи.

Диференціальне рівняння вимушених коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t). \qquad (2.2.28)$$

Для цього поділимо всі члени даного в умові рівняння на 0,4 й отримаємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\cdot 0,6\frac{dx}{dt}+2^2x=2\sin(3t). \qquad (2.2.29)$$

Із порівняння виразу (2.2.29) з диференціальним рівнянням вимушених коливань (2.2.29) випливає значення частоти власних коливань ω_0=2 рад/с, значення частоти вимушених коливань ω=3 рад/с та величина коефіцієнта загасання β=0,6 $с^{-1}$.

Резонансну частоту визначимо за формулою:

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2},$$

$$\omega_{рез}=\sqrt{2^2-2\cdot 0,6^2}=1,81\,\text{рад/с}.$$

Відповідь: резонанс буде спостерігатися при частоті зовнішньої сили 1,81 рад/с.

Приклад 7:

Знайти частоту власних коливань системи, якщо при зменшенні коефіцієнта загасання коливань удвічі резонансна частота змінюється від 3,88 рад/с до 3,97 рад/с.

Дано:	Розв'язок:
$\omega_{\text{рез}1} = 3{,}88$ рад/ с $\omega_{\text{рез}2} = 3{,}97$ рад/ с $\dfrac{\beta_2}{\beta_1} = 2$	Відповідно до виразу для визначення резонансної частоти (2.2.18) запишемо систему рівнянь:
$\omega_0 - ?$	

$$\begin{cases} \omega_{\text{рез}1} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_1^2} \\ \omega_{\text{рез}2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_2^2} \end{cases}.$$

З умови задачі $\beta_2 = 2\beta_1$, тому система набуває виду:

$$\begin{cases} \omega^2_{\text{рез}1} = \omega_0^2 - 2\beta_1^2 & (2.2.30) \\ \omega^2_{\text{рез}2} = \omega_0^2 - \dfrac{\beta_2^2}{2} & (2.2.31) \end{cases}.$$

Віднімемо від рівняння (2.2.30) рівняння (2.2.31) й отримаємо:

$$\omega^2_{\text{рез}2} - \omega^2_{\text{рез}1} = \frac{3}{2}\beta_1^2 \Rightarrow \beta_1^2 = \frac{2\left(\omega^2_{\text{рез}2} - \omega^2_{\text{рез}1}\right)}{3}.$$

З рівняння (2.2.30) отримаємо:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2_{\text{рез}1} + 2\beta_1^2} = \sqrt{\omega^2_{\text{рез}1} + \frac{4\left(\omega^2_{\text{рез}2} - \omega^2_{\text{рез}1}\right)}{3}} = \sqrt{\frac{4\omega^2_{\text{рез}2} - \omega^2_{\text{рез}1}}{3}}.$$

Підставимо числові значення:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot 3{,}97^2 - 3{,}88^2}{3}} = 4 \text{ рад/ с}.$$

Відповідь: частота власних коливань системи 4 рад/с.

<u>Приклад 8:</u>

При незмінній амплітуді вимушувальної сили F_0 амплітуди вимушених коливань для значень частот 100 с$^{-1}$ і 300 с$^{-1}$ є однаковими. Знайти резонансну частоту.

Дано:	Розв'язок:
$\omega_1 = 100$ с$^{-1}$ $\omega_2 = 300$ с$^{-1}$ $A_1 = A_2$	При дії вимушувальної сили із часом встановлюється стаціонарне значення амплітуди, що дається формулою (2.2.16):
$\omega_{\text{рез}} - ?$	

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Нехай частотам ω_1 і ω_2 відповідають амплітуди A_1 і A_2 відповідно. Оскільки за умовою $A_1 = A_2$, маємо:

$$\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_2^2}}. \qquad (2.2.32)$$

Зі співвідношення (2.2.32) випливає:

$$\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_1^2 = \left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_2^2,$$

$$\left(\omega_0^2-\omega_1^2\right)^2-\left(\omega_0^2-\omega_2^2\right)^2=4\beta^2\omega_2^2-4\beta^2\omega_1^2,$$

$$\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\left(2\omega_0^2-\omega_1^2-\omega_2^2\right)=4\beta^2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right),$$

$$\omega_0^2-2\beta^2=\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}.$$

За означенням резонансна частота коливань:

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2},$$

маємо

$$\omega_{рез}=\sqrt{\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\omega_{рез}=\sqrt{\frac{100^2+300^2}{2}}=223{,}6\ \text{рад/ с}\approx 224\ \text{рад/ с}.$$

Відповідь: резонансна частота 224 рад/с.

Приклад 9:

До пружини, що висить вертикально, підвішують вантаж. При цьому пружина подовжується на 9,8 см. Відтягуючи цей вантаж вниз і відпускаючи його, змушують вантаж робити коливання. Яким має бути коефіцієнт загасання, щоб логарифмічний декремент загасання коливань дорівнював λ=6?

Дано:	**СІ:**
$\Delta x=9{,}8$ см	$\Delta x=0{,}098$ м
$\lambda=6$	
$\beta-?$	

Розв'язок:

Зв'язок коефіцієнта загасання β та логарифмічного декремента загасання λ:

$$\lambda=\beta T$$

де T- період загасаючих коливань

$$T=\frac{2\pi}{\omega}. \qquad (2.2.33)$$

З урахуванням виразу (2.2.33), коефіцієнт загасання:

$$\beta=\frac{\lambda\omega}{2\pi T}.$$

Циклічна частота загасаючих коливань:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}. \qquad (2.2.34)$$

З урахуванням виразу (2.2.34), коефіцієнт загасання:

$$\beta=\frac{\lambda\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}{2\pi T}.$$

Оскільки коливання вантажу на пружині відбувається під дією двох сил: сили тяжіння $m\vec{g}$ та сили пружності $\vec{F}_{пр}$ ($\vec{F}_{пр}=k\Delta x$, де k- жорсткість пружини), то у стані спокою

$$mg = k\Delta x \Rightarrow \ \frac{m}{k} = \frac{\Delta x}{g}. \qquad (2.2.35)$$

Початковий період коливання вантажу на пружині:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

або з урахуванням виразу (2.2.35):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x}{g}}.$$

Початкова циклічна частота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \qquad (2.2.36)$$

або з урахуванням виразу (2.2.36):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta x}} \Rightarrow \ \omega_0^2 = \frac{g}{\Delta x}. \qquad (2.2.37)$$

З урахуванням отриманого виразу (2.2.37), коефіцієнт загасання:

$$\beta = \frac{\lambda\sqrt{\frac{g}{\Delta x} - \beta^2}}{2\pi} \Rightarrow \ \beta = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}\sqrt{\frac{g}{\Delta x}}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\beta = \frac{6}{\sqrt{4 \cdot 3{,}14^2 + 6^2}}\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}098}} = 6{,}98\ \text{с}^{-1}.$$

Відповідь: коефіцієнт загасання 6,98 с^{-1}.

Приклад 10:

Тіло масою m=10 г здійснює загасаючі коливання з максимальною амплітудою 7 см, початковою фазою φ=0 та коефіцієнтом загасання 1,6 с^{-1}. На це тіло почала діяти зовнішня періодична сила F під дією якої встановилися вимушені коливання. Рівняння вимушених коливань має вигляд $x=5\sin(10\pi t-3\pi/4)$. Знайти (з числовими коефіцієнтами) рівняння власних коливань та рівняння зовнішньої періодичної сили.

Дано:

$m = 10$ г

$A_{max} = 7$ см

$\varphi = 0$

$\beta = 1{,}6\ \text{с}^{-1}$

$x = 5\sin\left(10\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$

$x(t),\ F(t) - ?$

СІ:

$m = 0{,}010$ кг

$A_{max} = 0{,}07$ м

Розв'язок:

У випадку коли зовнішня сила змінюється за гармонічним законом, коливання описуються диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t,$$

де β - коефіцієнт загасання, ω_0 – власна частота системи, ω – частота сили. Загальний розв'язок даного рівняння є рівнянням власних коливань:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t .$$

За умовою зсув фаз між власними і вимушеними коливаннями дорівнює - 3π/4, отже:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \mathrm{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\beta} .$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\omega_0 = \sqrt{\left(10\pi\right)^2 + 2\cdot 1,6} = 10,5\pi .$$

Тоді рівняння власних коливань має вид:

$$x = 0,07e^{-1,6t} \sin 10,5\pi t \; (\text{м}) .$$

Рівняння зовнішньої періодичної сили:

$$F = F_0 \sin \omega t .$$

Максимальне значення зовнішньої періодичної сили:

$$F_0 = Am\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2} .$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$F_0 = 0,07\cdot 0,01\sqrt{\left(\left(10,5\cdot 3,14\right)^2 - \left(10\cdot 3,14\right)^2\right)^2 + 4\cdot 1,6^2\cdot\left(10\cdot 3,14\right)^2} = 0,072\ \text{Н} = 72\ \text{мН}$$

.

Тоді рівняння зовнішньої періодичної сили має вид:

$$F = 72\sin 10\pi t \; (\text{мН}).$$

Відповідь: рівняння власних коливань $x = 0,07e^{-1,6t} \sin 10,5\pi t \; (\text{м})$, рівняння зовнішньої періодичної сили $F = 72\sin 10\pi t \; (\text{мН})$.

2.2.3 Задачі для самостійного розв'язування

1. Амплітуда коливань маятника зменшується у десять разів за N_1=100 повних коливань. Знайти логарифмічний декремент загасання λ. За скільки коливань N_2 амплітуда маятника зменшилась в *e* разів?

2. Амплітуда загасаючих коливань спадає за *N*=10 коливань на 1/10 частину своєї початкової величини. Період коливань *T*=0,4 с. Знайти логарифмічний декремент λ та коефіцієнт загасання β.

3. До пружини підвісили тіло, яке розтягує її на Δ*x*=5 см. Записати диференціальне рівняння коливань пружинного маятника та його розв'язок при початковій амплітуді *A*=10 см, якщо через час Δ*t*=5 с амплітуда коливань зменшується в *e* разів.

4. Вантаж масою *m*=2,5 кг, підвішений до пружини з жорсткістю k=3,6·10^2 Н/м, здійснює вимушені коливання під дією зовнішньої сили *F*=13,5sin6*t*. Знайти амплітуду вимушених коливань вантажу. Тертям знехтувати.

5. Знайти коефіцієнт загасання коливань β терезів, якщо відомо, що за t=10 с амплітуда зменшилася в 20 разів.

6. Знайти логарифмічний декремент загасання λ математичного маятника, якщо за час t=1хв амплітуда коливань зменшилась у 2 рази. Довжина маятника l=1 м.
7. Математичний маятник здійснює коливання в середовищі з логарифмічним декрементом загасання λ_1=1,5. Яким буде логарифмічний декремент загасання λ_2, якщо опір середовища збільшити в 2 рази?

8. Логарифмічний декремент загасання камертона, що коливається з частотою ν=100 Гц, λ=0,002. За який час t амплітуда коливань камертона зменшиться в e^2 разів?

9. Диференціальне рівняння згасних коливань має вигляд $0{,}5\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2+0{,}25\mathrm{d}x/\mathrm{d}t+8x=0$. Знайти коефіцієнт загасання β та циклічну частоту ω цих коливань.

10. Амплітуда згасних коливань маятника за час t_1=5 хв зменшилася в 2 рази. За який час t_2, вибравши відлік від початкового моменту, амплітуда зменшиться у 8 разів?

2.3 ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

2.3.1 Основні поняття, закони і формули

Рівняння плоскої пружної хвилі

$$x(y,t) = A\cos\omega(t - \frac{y}{\upsilon}), \qquad (2.3.1)$$

де x – зміщення точок, що коливаються у хвилі відносно їх положення рівноваги (м); A – амплітуда коливань джерела хвилі (м); ω – частота коливань джерела (рад/с); t – час (с); y – координата положення рівноваги будь-якої точки (м); υ – швидкість поширення хвилі (фазова швидкість) (м/с).

Довжина хвилі (відстань, яку хвиля із фазовою швидкістю υ проходить за один повний період коливань T (рис. 2.1)):

$$\lambda = \upsilon T. \qquad (2.3.2)$$

Хвильове число:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}. \qquad (2.3.3)$$

Враховуючи (2.3.3) рівнянню (7.3.1) можна надати виду

$$x(y,t) = A\cos(\omega t - ky), \qquad (2.3.4)$$

Результат накладання хвиль, які поширюються в зустрічних напрямах, в яких коливання відбуваються з однаковою амплітудою і частотою, називається специфічний коливальний процес, відомий як **стояча хвиля** (рис. 2.2).

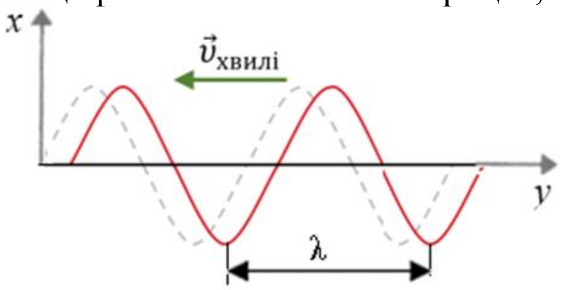


Рис. 2.1

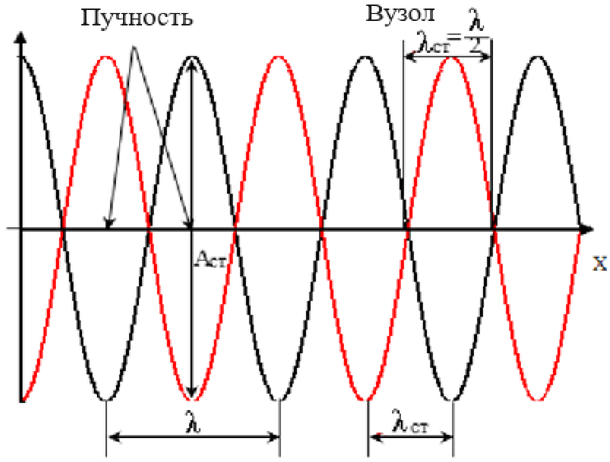


Рис. 2.2

Рівняння стоячої хвилі:

$$x = 2A\cos 2\pi\frac{y}{\lambda}\sin\omega t = 2A\cos ky \sin\omega t.$$

Вузол – це точка стоячої хвилі, амплітуда коливань якої дорівнює нулю. Умова вузла:

$$x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}.$$

Пучність – це точка стоячої хвилі, амплітуда коливань якої максимальна. Умова пучності:

$$x = m\frac{\lambda}{2} = 2m\frac{\lambda}{4}.$$

2.3.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 1:

Джерело звуку здійснює коливання за законом x=sin2000πt. Швидкість поширення звуку 340 м/с. Записати рівняння коливань для точки, що знаходиться на відстані y=102 м від джерела. Втратами енергії знехтувати, хвилю вважати плоскою.

Дано:

$x = sin 2000\pi t$

$\upsilon = 340$ м/ с

$y = 102$ м

$s(t) - ?$

Розв'язок:

Рівняння плоскої пружної хвилі:

$$s = A\sin\omega\left(t - \frac{y}{\upsilon}\right).$$

Джерелом пружної хвилі є коливання, рівняння яких задано в умові задачі. Для джерела хвилі y=0, отже, маємо

$$A\sin\omega t = \sin 2000\pi t,$$

звідки значення амплітуди A=1 м, а частоти ω=2000π (рад/с). Отже, шукане рівняння набирає вигляду

$$s(t) = A\sin 2000\pi\left(t - \frac{102}{304}\right) = \sin 2000\pi\left(t - 0{,}3\right).$$

Відповідь: рівняння коливань $s(t) = \sin 2000\pi\left(t - 0{,}3\right)$.

Приклад 2:

Знайти різницю фаз коливань двох точок, що знаходяться на промені на відстані Δy=1,75 м одна від іншої, якщо довжина хвилі λ=1 м.

Дано:

$\Delta y = 1{,}75$ м

$\lambda = 1$ м

$\Delta\varphi - ?$

Розв'язок:

Згідно із рівнянням (7.3.1) фаза коливань записується як

$$\varphi = \omega(t - \frac{y}{\upsilon}).$$

Різницю фаз коливань двох точок в один і той самий момент часу знайдемо як

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega\left(t - \frac{y_1}{\upsilon}\right) - \omega\left(t - \frac{y_2}{\upsilon}\right) = \frac{\omega}{\upsilon}\left(y_2 - y_1\right).$$

Отже, формула для різниці фаз коливань двох точок, що знаходяться на одному промені, набирає вигляду

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{\upsilon}\Delta y, \qquad (2.3.4)$$

де Δy – відстань між точками. Використаємо формулу для періоду коливань джерела:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{2.3.5}$$

З іншого боку, згідно з (2.3.2)

$$T = \frac{\lambda}{\upsilon}. \tag{2.3.6}$$

З прирівнювання виразів (2.3.5) і (2.3.6) виражаємо циклічну частоту:

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{\upsilon} \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda}. \tag{2.3.7}$$

Після підстановки виразу (2.3.7) у формулу (2.3.4) маємо:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda}\frac{\Delta y}{\upsilon} = \frac{2\pi\Delta y}{\lambda},$$

або після підстановки числових значень отримаємо:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot 1{,}75}{1} = 3{,}5\pi .$$

Відповідь: різницю фаз коливань двох точок 3,5π.

<u>Приклад 3:</u>

Яка частота коливань, якщо найменша відстань між точками, що коливаються в однакових фазах, дорівнює Δy=1 м. Швидкість поширення хвиль υ=300 м/с.

Дано:
$\Delta y = 1$ м
$\upsilon = 300$ м/с
$\nu - ?$

Розв’язок:

У попередній задачі отримана формула для знаходження різниці фаз:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta y}{\lambda}.$$

Із врахуванням (2.3.2), (2.1.4) маємо:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}, \tag{2.3.8}$$

де ν – частота коливань. Отже, для різниці фаз із урахуванням співвідношення (2.3.8) одержуємо:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu\Delta y}{\upsilon}. \tag{2.3.9}$$

Із співвідношення (2.3.9) отримаємо вираз для знаходження частоти коливань:

$$\nu = \frac{\upsilon\Delta\varphi}{2\pi\Delta y}. \tag{2.3.10}$$

Згідно умови задачі розглядають дві найближчі точки, що коливаються в однакових фазах. Це означає, що точки знаходяться на відстані, що рівна довжині хвилі λ. Різниця фаз між такими точками дорівнює Δφ=2π. Підставляючи це значення в формулу (2.3.10), маємо

$$\nu = \frac{2\pi\upsilon}{2\pi\Delta y} = \frac{\upsilon}{\Delta y},$$

або після підстановки числових значень отримаємо:

$$\nu = \frac{300}{1} = 300\ \text{Гц}.$$

Відповідь: частота коливань 300 Гц.

Приклад 4:

Точка, що знаходиться на відстані y=0, 5 м від джерела коливань, має в момент часу t=Т/3 зміщення, що дорівнює половині амплітуди. Знайти довжину хвилі, якщо при t=0 зміщення джерела дорівнює нулю.

Дано:

$y = 0{,}5$ м

$t = \frac{T}{3}$

$x(t) = \frac{A}{2}$

$x(t=0,\ y=0) = 0$

$\lambda - ?$

Розв'язок:

З умови $x(t$=0, y=0)=0 випливає, що рівняння хвилі записується через синус:

$$x = A\sin\omega\left(t - \frac{y}{\upsilon}\right).$$

За умовою у час t=T/3 зсув при y=0,5 м дорівнює x=A/2, отже, маємо:

$$\frac{A}{2} = A\sin\omega\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{\upsilon}\right),\ \ \sin\omega\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{\upsilon}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\omega\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{\upsilon}\right) = \arcsin\frac{1}{2},\ \ \omega\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{\upsilon}\right) = \frac{\pi}{6}. \qquad (2.3.11)$$

Після підстановки виразу $\omega = \frac{2\pi}{T}$ в співвідношення (2.3.1) отримаємо:

$$\frac{2\pi}{T}\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{\upsilon}\right) = \frac{\pi}{6},\ \ \frac{2}{T}\left(\frac{T}{3} - \frac{y}{\upsilon}\right) = \frac{1}{6},$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2y}{T\upsilon} = \frac{1}{6},\ \ T\upsilon = 4y.$$

Оскільки $\lambda = \upsilon T$, маємо:

$$\lambda = 4y,$$

або після підстановки числових значень отримаємо:

$$\lambda = 4 \cdot 0{,}5 = 2\ \text{м}.$$

Відповідь: довжина хвилі 2 м.

Приклад 5:

Точки A, B та C лежать на лінії поширення плоскої монохроматичної хвилі. Точки B та C віддалені від точки A на відстані l_1=15 см та l_2=30 см відповідно. Швидкість поширення хвилі υ=0,6 м/с. Коливання в точці A відбуваються за законом x_A=0,05cos(2πt) (м). Записати рівняння коливань в точках B та C.

Дано:	СІ:	Розв'язок:
$x_A = 0{,}05\cos(2\pi t)$, м $l_1 = 15$ см $l_2 = 30$ см $x_B(t),\ x_C(t) - ?$	$l_1 = 0{,}15$ м $l_2 = 0{,}3$ м	Згідно з умовою задачі в точці A початкова фаза φ=0, її координату приймемо x_A=0. Тоді, x_B=l_1, x_C=l_2. Оскільки хвиля поширюється зі швидкістю υ, то коливання в точках B та C відстають по фазі від коливань у точці A і згідно з рівнянням (2.3.1) мають вигляд:

$$x_B = x_m \cos(2\pi t - \frac{2\pi l_1}{\upsilon}),$$

$$x_C = x_m \cos(2\pi t - \frac{2\pi l_2}{\upsilon}).$$

У числовому вигляді:

$$x_B = 0{,}05\cos\left(2\pi t - \frac{2\pi \cdot 0{,}15}{0{,}06}\right) = 0{,}05\sin\left(2\pi t\right),$$

$$x_C = 0{,}05\cos\left(2\pi t - \frac{2\pi \cdot 0{,}3}{0{,}06}\right) = -0{,}05\cos\left(2\pi t\right).$$

Відповідь: рівняння коливань в точці B $x_B = 0{,}05\sin\left(2\pi t\right)$ та в точці C $x_C = -0{,}05\cos\left(2\pi t\right)$.

Приклад 6:

Джерело створює плоску звукову хвилю з частотою ν=500 Гц і амплітудою x_m=5 мкм. Коливання в джерелі відбуваються за законом косинуса з нульовою початковою фазою. Для точки, що віддалена від джерела на відстань l=170 м, і моменту часу t=1 с визначити: а) зміщення частинок середовища від положення рівноваги x; б) швидкість їх коливального руху υ; в) прискорення частинок a. Швидкість звуку прийняти υ=340 м/с.

Дано:	СІ:	Розв'язок:
$\nu = 500$ Гц $x_m = 5$ мкм $l = 170$ м $t = 1$ с $\upsilon = 340$ м/с $x, \upsilon, a - ?$	$x_m = 5 \cdot 10^{-6}$ м	а) згідно з рівнянням (2.3.1) можна записати: $x = x_m \cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu l}{\upsilon})$. (2.3.12) Підставивши числові дані, отримаємо: $x = 5\cdot 10^{-6}\cos(1000\pi - \frac{1000\pi \cdot 170}{340}) = 5\cdot 10^{-6}$ м. б) Швидкість коливального руху частинок у

хвилі – це похідна від зміщення по часу: υ=$x'(t)$. Взявши похідну від функції (2.3.12), дістанемо:

$$\upsilon = -2\pi\nu x_m \cdot \sin(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu l}{\upsilon}). \qquad (2.3.13)$$

Підставивши числові дані, отримаємо:

$$\upsilon = -1000\pi\nu \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(1000\pi - \frac{1000\pi \cdot 170}{340}) = 0 .$$

в) Прискорення частинок – це похідна швидкості коливального руху по часу: $a = \upsilon'(t)$. Взявши похідну від функції (2.3.13), знаходимо:

$$a = -\left(2\pi\nu\right)^2 x ,$$

де, згідно з результатом пункту а), $x = 5 \cdot 10^{-5}$ м.

Отже

$$a = -\left(2\pi \cdot 500\right)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = -49{,}3 \text{ м/ с}^2 .$$

Відповідь: а) зміщення частинок середовища від положення рівноваги $x = 5 \cdot 10^{-6}$ м; б) швидкість їх коливального руху $\upsilon = 0$; в) прискорення частинок $a = -0{,}49{,}3$ м/с^2.

Приклад 7:

У плоскій монохроматичній хвилі частота коливань частинок середовища $\nu = 10$ Гц. Різниця фаз коливань у двох точках, які лежать на лінії поширення хвилі на відстані $\Delta l = 100$ см одна від одної, дорівнює $\Delta\varphi = \pi/4$. Визначити швидкість поширення хвилі.

Дано:	СІ:
$\nu = 10$ Гц	
$\Delta l = 100$ см	$\Delta l = 1$ м
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$	
$\upsilon - ?$	

Розв'язок:

Різниця фаз коливань у двох точках:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l , \qquad (2.3.14)$$

де Δl – задана відстань між точками, λ – довжина хвилі.

Швидкість поширення хвилі υ виражається через довжину хвилі λ:

$$\upsilon = \lambda\nu . \qquad (2.3.15)$$

Виразивши величину Δl з співвідношення (2.3.14) і підставивши її у формулу (2.3.15), отримаємо:

$$\upsilon = \frac{2\pi\nu\Delta l}{\Delta\varphi} .$$

Підставивши числові дані, отримаємо:

$$\upsilon = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 1}{\pi / 4} = 80 \text{ м/ с} .$$

Відповідь: швидкість поширення хвилі 80 м/с.

Приклад 8:

По озеру рухається катер, хвилі від якого дістаються до берега за час t=1 хв. Відстань між гребенями хвиль l=0,5 м, час між ударами хвиль об берег τ=0,5 с. Визначити відстань L від катера до берега.

Дано:	**СІ:**
$t = 1$ хв	$t = 60$ с
$l = 0{,}5$ м	
$\tau = 0{,}5$ с	
$L - ?$	

Розв'язок:

Відстань між гребнями хвиль – це довжина хвилі; час між ударами хвиль об берег дорівнює періоду коливань. Скориставшись зв'язком між довжиною хвилі λ, періодом коливань T та швидкістю поширення хвилі v, знайдемо:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{l}{\tau}.$$

Тоді відстань, яку проходить хвиля за час t, становить:

$$L = \upsilon t = \frac{l}{\tau} t.$$

Підставивши числові дані, отримаємо:

$$L = \frac{0{,}5}{0{,}5} \cdot 60 = 60 \text{ м}.$$

Відповідь: катер пливе на відстані 60 м від берега.

Приклад 9:

Тепловоз подає звуковий сигнал з частотою ν_0=400 Гц. Пасажир, який стоїть на платформі сприймає частоту сигналу ν=380 Гц. Визначити швидкість V та напрям руху тепловоза. Швидкість звуку в повітрі прийняти υ=340 м/с.

Дано:
$\nu_0 = 400$ Гц
$\nu = 380$ Гц
$\upsilon = 340$ м/с
$V - ?$

Розв'язок:

Рівняння хвилі (2.3.1), (2.3.4), а також її параметри (період T, частоти ν та ω, швидкість υ, довжина хвилі λ) визначені для випадку, коли джерело і спостерігач нерухомі відносно середовища, в якому поширюється хвиля. В такому разі частота(або період) хвилі дорівнює частоті коливань в джерелі. При цьому швидкість поширення хвилі (швидкість поширення коливань відносно середовища) залежить тільки від властивостей середовища.

Але якщо джерело або спостерігач (чи обоє) рухаються відносно середовища, характеристики хвилі змінюються. Цим і пояснюється те, що для пасажира на платформі (точка $S_п$ на рис. 2.3) частота звуку ν відрізняється від частоти джерела ν_0, розміщеного на рухомому тепловозі.

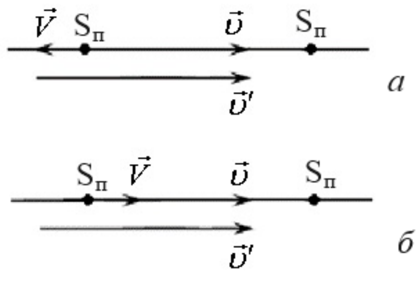


Рис. 2.3

Пасажир (спостерігач) зафіксує частоту сигналу:

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda}, \qquad (2.3.16)$$

де λ – довжина звукової хвилі, створюваної рухомим тепловозом. Довжина хвилі – це відстань між сусідніми «гребенями» хвилі (для звукової хвилі такими «гребенями» є точки з максимальним значеннями тиску або концентрації молекул (густини) повітря). Джерело на тепловозі посилає ці гребені з інтервалом часу T_0, отже

$$\lambda = \upsilon' T_0 = \frac{\upsilon'}{\nu_0}. \qquad (2.3.17)$$

де υ' – швидкість хвилі відносно тепловоза у напрямку до пасажира.

Швидкість $\vec{\upsilon}'$ виражається через швидкість звуку $\vec{\upsilon}$ та швидкість тепловоза $\vec{V}$ класичною формулою додавання швидкостей:

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{V} \Rightarrow \quad \upsilon' = \upsilon \pm V, \qquad (2.3.18)$$

де знак "+" відноситься до випадку, коли тепловоз віддаляється від пасажира (рис. 2.3, *а*), а знак "-" – коли наближається (рис. 2.3, *б*).

Підставивши вираз (2.3.18) у формулу (2.3.17), отримаємо

$$\lambda = \frac{\upsilon \pm V}{\nu_0}.$$

Таким чином, у відповідності з формулою (1)

$$\nu = \frac{\upsilon \nu_0}{\upsilon \pm V} = \frac{\nu_0}{1 \pm V/\upsilon}.$$

Оскільки сприймана частота менша за частоту джерела ($\nu<\nu_0$), це означає, що тепловоз віддаляється від спостерігача. Отже, у формулі використовуємо знак плюс

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + V/\upsilon} \Rightarrow \quad V = \left(\frac{\nu_0}{\nu} - 1\right)\upsilon.$$

Підставивши числові дані, отримаємо:

$$V = \left(\frac{400}{380} - 1\right) \cdot 380 = 17{,}9 \text{ м/с}.$$

Відповідь: тепловоз віддаляється від пасажира зі швидкістю 17,9 м/с.

<u>Приклад 10:</u>

Чи однакової висоти звук буде у таких випадках: а) джерело звуку рухається назустріч нерухомому спостерігачу зі швидкістю 40 м/с; б) спостерігач рухається назустріч нерухомому джерелу із тією самою швидкістю? Частота джерела звуку 600 Гц.

Дано:	**Розв'язок:**
$\upsilon_{\text{с}1} = 0$ $\upsilon_{\text{д}1} = 40$ м/с $\upsilon_{\text{с}2} = 40$ м/с $\upsilon_{\text{д}2} = 0$ $\nu = 600$ Гц $\upsilon = 340$ м/с $\nu_1, \nu_2 - ?$	Частота коливань, що сприймається спостерігачем (ефект Доплера): $$\nu' = \frac{\upsilon \pm \upsilon_{\text{с}}}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{д}}}\nu,$$ де $\upsilon_{\text{с}}$ та $\upsilon_{\text{д}}$ – швидкості руху спостерігача та джерела пружної хвилі відносно середовища (м/с); υ – швидкість поширення хвилі в цьому середовищі (м/с); ν – частота коливань, що випромінюються джерелом (Гц). Знаки згори відповідають руху спостерігача та джерела назустріч один одному, нижні відповідають їх руху у протилежних напрямах.

Оскільки за умовою в обох випадках відбуваються наближення об'єктів, використовуємо для розрахунку частот формулу із верхніми знаками:

$$\nu_1 = \frac{\upsilon + \upsilon_{\text{с}1}}{\upsilon - \upsilon_{\text{д}1}}\nu, \quad \nu_1 = \frac{(340+0)\cdot 600}{340-40} = 680\ \text{Гц};$$

$$\nu_2 = \frac{\upsilon + \upsilon_{\text{с}2}}{\upsilon - \upsilon_{\text{д}2}}\nu, \quad \nu_2 = \frac{(340+40)\cdot 600}{340-0} = 670{,}6\ \text{Гц}.$$

Отже, ці частоти істотно відрізняються.

Відповідь: Частота коливань: а) 680 Гц; б) 670,6 Гц.

2.3.3 Задачі для самостійного розв'язування

1. Джерело здійснює коливання згідно із законом x=5sin3140t. Знайдіть зміщення $x(y,t)$ від положення рівноваги, швидкість $\upsilon(y,t)$ та прискорення $a(y,t)$ точки, що знаходиться на відстані y=340 м від джерела, через час Δt=1 с після початку коливань. Швидкість поширення хвилі υ=340 м/с.

2. Дві точки знаходяться на прямій, уздовж якої поширюється хвиля зі швидкістю υ=50 м/с. Період коливань T=0,05 с, відстань між точками Δy=50 см. Знайти різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань у цих точках.

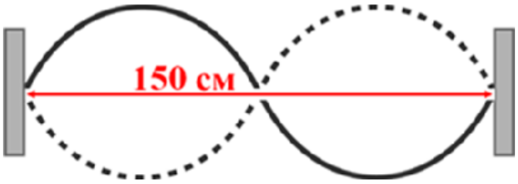
3. Відстань між найближчими гребнями хвиль в морі 6 м. Човен качається на хвилях, що поширюються зі швидкістю 2 м/с. Яка частота ударів хвиль об корпус човна?

4. Дві машини рухаються назустріч із швидкостями υ_1=20 м/с та υ_2=10 м/с. Перша машина подає сигнал із частотою ν_1= 800 Гц. Якої частоти ν' сигнал почує водій іншої машини: а) до зустрічі машин; б) після їх зустрічі?

5. Рівняння хвилі має вид x=0,01cos(250t-20y). З якою швидкістю υ розповсюджується ця хвиля?

6. Повз нерухомого спостерігача, що стоїть на березі озера, за 6 с пройшло 4 гребня хвилі. Відстань між першим і третім гребнями дорівнює 12 м. Визначити період коливання T частинок хвилі, швидкість поширення υ і довжину хвилі λ.

7. Між опорами укріплена струна, на якій створена стояча хвиля (рис.). Відстань між опорами l=150 см. Чому дорівнює довжина хвилі λ?



8. Знайти довжину хвилі λ коливань, якщо відстань між першою та четвертою пучностями стоячої хвилі l=15 см.

9. Знайти зміщення x від положення рівноваги точки, що віддалена від джерела коливань на відстань $l=\lambda/12$ для моменту часу $t=T/6$. Амплітуда коливань A=0,05 м.

10. Знайти координати вузлів $x_в$ і пучностей $x_п$, якщо: а) відбиття відбувається від менш щільного середовища: б) відбиття відбувається від більш щільного середовища. Довжина хвилі, що біжить λ=12 см.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Загородній В. В. Загальна фізика. Механіка [Електронний ресурс] : підручник для студентів спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / В. В. Загородній ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2-е вид., виправл. і доповн. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,89 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 364 с.

2. Загородній В. В. Механіка в задачах [Електронний ресурс]: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Прикладна фізика» спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / В. В. Загородній, С. В. Бех ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 4.54 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 402 с.

3. Фізика. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка: навчальний посібник / Ю. О. Шкурдода, О. О. Пасько, О. А. Коваленко. – Суми : Сумський державний університет, 2021. – 221 с.

4. Сергєєва О. Є. Основи загальної фізики. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електрика [Текст]: навч. посіб. / Сергєєва Олександра Євгенівна, Федосов Сергій Никифорович; Одес. нац. акад. харч. технологій, Каф. фізики і матеріалознавства. – Одеса : ОНАХТ, 2018.

5. Збірник задач із загальної фізики [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів інженерно-технічних спеціальностей./ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.П. Бригінець, І.М. Репалов, Л.П. Пономаренко, Н.О. Якуніна. – Електронні текстові дані (1 файл: 4.1Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 230 с.

6. Ю.І. Горобець, О.Ю. Горобець, А.М. Кучко, С.О. Решетняк, А.М. Красіко, М.Г. Мусієнко, Т.М. Ніколаєва, П.О. Юрачківський, Л.Г. Лосицька. Фізика. Механіка. – К.: Хімджест, 2018. – 192 с.

7. Лекції з механіки: навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів / В. М. Дубовик, В. М. Сухов. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 312 с.

Навчальне видання

Титаренко Валентина Василівна
Куцева Наталія Олександрівна
Журавльов Михайло Олександрович

ФІЗИКА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи у 3 частинах
Частина 3. Механіка рідини. Механічні коливання та хвилі

для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей
131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство,
133 Галузеве машинобудування

Видано в авторській редакції

Електронний ресурс.
Підписано до видання 12.11.2024. Авт. арк. 4,03.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.