

## **7. ВЕРТИКАЛЬНАЯ НАГРУЗКА НА ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ ОСНОВАНИЯ**

При написании настоящего раздела преследовалась цель получить ряд очень важных для выполнения практических расчетов оснований по деформациям формул и одновременно продемонстрировать предложенную нами технику решения представленных в разделе 3 уравнений.

Раздел имеет такую структуру.

1. Вначале в рамках модели упругой водонасыщенной среды было получено решение о приложенной к верхней границе невесомого полупространства сосредоточенной силы (аналог известной задачи Буссинеска [65], раздел 7.1). На этом этапе была продемонстрирована предложенная нами техника решения задач в рамках теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации.

2. После этого с использованием принципа суперпозиции полученные в разделе 7.1 результаты были обобщены на случай распределенной по площади круга и прямоугольника нагрузки (раздел 7.2).

3. Наконец, полученные в разделах 7.1 и 7.2 результаты были обобщены на случай обладающего свойством ползучести водонасыщенного основания (раздел 7.3).

### **7.1. ВЕРТИКАЛЬНАЯ СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА НА ГРАНИЦЕ УПРУГОГО ВОДОНАСЫЩЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

Для построения частного решения задачи используем систему уравнений (4.2.7), ее общее решение (6.2.4), а также начальные и граничные условия вида

$$\left. \begin{aligned}
 P(0, r, t) &= 0; \\
 P(\infty, r, t) &= 0; \\
 P(z, r, 0) &= 0; \\
 \sigma_{zz}(0, r, t) &= \frac{\delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot Q(t); \\
 \tau_{rz}(0, r, t) &= 0; \\
 U(\infty, r, t) &= 0; \\
 W(\infty, r, t) &= 0.
 \end{aligned} \right\} . \quad (7.1.1)$$

Здесь  $Q(t)$  - значение вертикальной сосредоточенной силы в момент времени  $t$ , а  $\delta(r)$  - дельта - функция Дирака [20].

С учетом равенств

$$\frac{\lambda + 2 \cdot G}{\lambda + G} = 2 \cdot (1 - \nu) \text{ и } c_k = 3 \cdot c_v \cdot \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}, \quad (7.1.2)$$

где  $c_k$  - коэффициент консолидации при компрессии, система уравнений (5.2.6)

примет вид:

$$U = \frac{\partial}{\partial r} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} F; \quad (7.1.3)$$

$$W = \frac{\partial}{\partial z} \Phi + 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \Delta F - \frac{\partial^2}{\partial z^2} F;$$

$$\Delta \Phi = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu) \cdot G \cdot \beta} \cdot P;$$

$$\Delta^2 F = 0;$$

$$\Delta^2 \cdot \left( c_k \cdot \Delta \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0;$$

$$c_\nu \cdot P - (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\beta}{3} \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} = 0;$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F - \frac{\partial^3 F}{\partial z^3};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z};$$

$$e = \Delta \Phi + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F;$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[ 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \Delta F - 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right] + 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}; \quad (7.1.3)$$

$$\omega = -(1-\nu) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Delta F;$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot G \cdot \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\lambda + 2 \cdot G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F - \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} \right) + \lambda \cdot \left( \Delta \Phi + \frac{G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F \right) - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{rr} = 2 \cdot G \cdot \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z} \right) + \lambda \cdot \left( \Delta \Phi + \frac{G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F \right) - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \cdot G \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} \right) + \lambda \cdot \left( \Delta \Phi + \frac{G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F \right) - \frac{1}{\beta} \cdot P;$$

$$\tau_{rz} = 2 \cdot G \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[ (1-\nu) \cdot \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \cdot F \right\}. \quad (7.1.3)$$

Далее применим к (7.1.3) одностороннее преобразование Лапласа по переменной  $t$  [44, 81]. Имеем:

$$\bar{U} = \frac{\partial}{\partial r} \bar{\Phi} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \bar{F};$$

$$\bar{W} = \frac{\partial}{\partial z} \bar{\Phi} + 2 \cdot (1-\nu) \cdot \Delta \bar{F} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{F};$$

$$\bar{P} = \beta \cdot (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \bar{\Phi};$$

$$\Delta^2 \bar{F} = 0; \quad (7.1.4)$$

$$\Delta^2 \cdot (c_k \cdot \Delta \bar{\Phi} - \varpi \cdot \bar{\Phi}) = 0;$$

$$c_v \cdot \bar{P} - \varpi \cdot \frac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}{3} \cdot \beta \cdot \bar{\Phi} - \varpi \cdot \frac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot (\lambda + G)} \cdot \beta \cdot G \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} = 0;$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} + 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta \bar{F} - \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2};$$

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 \bar{F}}{\partial r^2 \partial z};$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial r \partial z};$$

$$\bar{e} = \Delta \bar{\Phi} + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta \bar{F};$$

$$\bar{\gamma}_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[ 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \Delta \bar{F} - 2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2} \right] + 2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r \partial z};$$

$$\bar{\omega} = -(1 - \nu) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Delta \bar{F};$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = 2 \cdot G \cdot \left( \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} + \frac{\lambda + 2 \cdot G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta \bar{F} - \frac{\partial^3 \bar{F}}{\partial z^3} \right) + \lambda \cdot \left( \Delta \bar{\Phi} + \frac{G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta \bar{F} \right) - \frac{1}{\beta} \cdot \bar{P};$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = 2 \cdot G \cdot \left( \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 \bar{F}}{\partial r^2 \partial z} \right) + \lambda \cdot \left( \Delta \bar{\Phi} + \frac{G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta \bar{F} \right) - \frac{1}{\beta} \cdot \bar{P}; \quad (7.1.4)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = 2 \cdot G \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial r \partial z} \right) + \lambda \cdot \left( \Delta \bar{\Phi} + \frac{G}{\lambda + G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta \bar{F} \right) - \frac{1}{\beta} \cdot \bar{P};$$

$$\bar{\tau}_{rz} = 2 \cdot G \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z \partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[ (1 - \nu) \cdot \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \cdot \bar{F} \right\}. \quad (7.1.4)$$

Здесь  $\bar{y} = \int_0^{\infty} y(t) \cdot \exp(-\varpi \cdot t) dt$  а  $\varpi$  - параметр одностороннего преобразования

Лапласа [44, 81].

Далее применим преобразования Лапласа к граничным условиям (7.1.1) и учтем нулевые начальные условия. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}(0, r) &= 0; \\ \bar{P}(\infty, r) &= 0; \\ \bar{\sigma}_{zz}(0, r) &= \frac{\delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \bar{Q} = \frac{2}{\pi} \cdot \bar{Q} \cdot \int_0^{\infty} \alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \\ \bar{\tau}_{rz}(0, r) &= 0; \\ \bar{U}(\infty, r) &= 0; \\ \bar{W}(\infty, r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.5)$$

В данном конкретном случае неизвестными являются функции  $\bar{F}$ ,  $\bar{\Phi}$  и поровое давление  $\bar{P}$ . Решение задачи с учетом ее осевой симметрии ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F} &= \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot F(\alpha, z) \cdot d\alpha; \\ \bar{\Phi} &= \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \Phi(\alpha, z) \cdot d\alpha; \\ \bar{P} &= \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot P(\alpha, z) \cdot d\alpha; \end{aligned} \right\}, \quad (7.1.6)$$

где  $F(\alpha, z)$ ,  $\Phi(\alpha, z)$  и  $P(\alpha, z)$  - некоторые функции координаты  $z$  и параметров  $\alpha$  и  $\varpi$ .

Граничным условиям при  $z \rightarrow \infty$  удовлетворяют функции:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F} &= \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot [A \cdot \exp(-\alpha \cdot z) + B \cdot \alpha \cdot z \cdot \exp(-\alpha \cdot z)] \cdot d\alpha; \\ \bar{\Phi} &= \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[ \begin{array}{l} C \cdot \exp(-\alpha \cdot z) + D \cdot \alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot z) + \\ + E \cdot \exp(-\gamma \cdot z \cdot d\alpha) \end{array} \right] \cdot d\alpha; \\ \gamma &= \sqrt{\alpha^2 + \frac{\varpi}{c_k}}. \end{aligned} \right\}. \quad (7.1.7)$$

Здесь -  $A, B, C, D$  и  $E$  - подлежащие определению из граничных условий (7.1.6), третьего и шестого уравнения (7.1.4) коэффициенты, которые зависят от параметров  $\alpha$  и  $\varpi$ .

Из третьего уравнения (7.1.4) и второго (7.1.7) имеем:

$$\bar{P} = -k_1 \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[ \begin{array}{l} 2 \cdot D \cdot \alpha^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot z) + \\ + E \cdot (\alpha^2 - \gamma^2) \cdot \exp(-\gamma \cdot z) \end{array} \right] \cdot d\alpha; \quad (7.1.8)$$

$$k_1 = \beta \cdot (\lambda + 2 \cdot G).$$

Из шестого уравнения (7.1.4) имеем:

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left[ (k_3 \cdot \alpha^2 \cdot B - k_4 \cdot \alpha \cdot D) \cdot z \cdot \exp(-\alpha \cdot z) + \right. \\ \left. + \left[ \begin{array}{l} k_3 \cdot \alpha^2 \cdot (A - B) - \\ 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha^2 \cdot D - k_4 \cdot C \end{array} \right] \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \right] \cdot d\alpha = 0; \end{array} \right\} \quad (7.1.9)$$

$$k_1 = \beta \cdot (\lambda + 2 \cdot G);$$

$$k_2 = c_v;$$

$$k_3 = \varpi \cdot \beta \cdot G \cdot \frac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot (\lambda + 2 \cdot G)};$$

$$k_4 = \varpi \cdot \beta \cdot \frac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}{3};$$

$$k_5 = \frac{\lambda + 2 \cdot G}{\lambda + G} = 2 \cdot (1 - \nu).$$

Из граничных условий и условия равенства нулю несобственного интеграла (7.1.9) имеем такую систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $A, B, \dots, E$ :

$$\left. \begin{aligned}
& (\gamma^2 - \alpha^2) \cdot E - 2 \cdot \alpha^2 \cdot D = 0; \\
& (2 \cdot k_5 \cdot \alpha^2 - 4 \cdot \alpha^2) \cdot B + 2 \cdot C \cdot \alpha + 2 \cdot E \cdot \gamma - 2 \cdot \alpha \cdot D + 2 \cdot A \cdot \alpha^2 = 0; \\
& z_1 \cdot B + z_2 \cdot D + 2 \cdot G \cdot \alpha^2 \cdot C + z_3 \cdot E + 2 \cdot G \cdot A \cdot \alpha^2 - \frac{\bar{Q}}{2 \cdot \pi} \cdot \alpha = 0; \\
& -k_3 \cdot \alpha \cdot B - 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha^2 \cdot D - k_4 \cdot C + k_3 \cdot \alpha \cdot A = 0; \\
& k_3 \cdot \alpha^2 \cdot B - k_4 \cdot \alpha \cdot D = 0; \\
& z_1 = (2 \cdot \lambda \cdot k_5 \cdot \alpha^3 + 4 \cdot G \cdot k_5 \cdot \alpha^3 - 2 \cdot \lambda \cdot \alpha^3 - 6 \cdot G \cdot \alpha^3); \\
& z_2 = \frac{1}{\beta} \cdot (-4 \cdot G \cdot \beta \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \beta \cdot \alpha^2 + 2 \cdot k_1 \cdot \alpha^2); \\
& z_3 = -\lambda \cdot \alpha^2 + \lambda \cdot \gamma^2 + 2 \cdot G \cdot \gamma^2 - \frac{k_1 \cdot \gamma^2}{\beta} + \frac{k_1 \cdot \alpha^2}{\beta}; \\
& k_1 = \beta \cdot (\lambda + 2 \cdot G); \\
& k_2 = c_v; \\
& k_3 = \varpi \cdot \beta \cdot G \cdot \frac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot (\lambda + 2 \cdot G)}; \\
& k_4 = \varpi \cdot \beta \cdot \frac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G}{3}; \\
& k_5 = \frac{\lambda + 2 \cdot G}{\lambda + G} = 2 \cdot (1 - \nu) .
\end{aligned} \right\}$$

Определив неизвестные коэффициенты  $A, B, \dots, E$ , найдем осадку основания:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}(r) &= \bar{S}_0 \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot (1 + \bar{K}) \cdot d\alpha; \\ \bar{S}_0 &= \frac{\bar{Q}}{4 \cdot \pi \cdot G}; \\ \bar{K} &= \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot \alpha}{(1 - \nu) \cdot \gamma + \alpha \cdot \nu}; \\ \gamma &= \sqrt{\alpha^2 + \frac{\varpi}{c_k}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.10)$$

Оригинал (7.1.10) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} S(r, t) &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[ Q(t) + \int_0^t K_{\Phi}(t - \tau) \cdot Q(\tau) \cdot d\tau \right] \cdot d\alpha; \\ K_{\Phi}(t - \tau) &= b_1 \cdot \left\{ \begin{aligned} &\frac{\exp[-a^2 \cdot (t - \tau)]}{\sqrt{\pi \cdot (t - \tau)}} - \\ &- c \cdot \exp[-b^2 \cdot (t - \tau)] \cdot \operatorname{erfc}(c \cdot \sqrt{t - \tau}) \end{aligned} \right\}; \\ b_1 &= \frac{1 - 2 \cdot \nu}{(1 - \nu)} \cdot \alpha \cdot \sqrt{c_k}; \\ a^2 &= \alpha^2 \cdot c_k; \end{aligned} \right\} \quad (7.1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= \frac{1-2 \cdot v}{(1-v)^2} \cdot \alpha^2 \cdot c_k; \\ c^2 &= \left( \frac{v}{1-v} \right)^2 \cdot \alpha^2 \cdot c_k. \end{aligned} \right\}. \quad (7.1.11)$$

Для постоянной во времени нагрузки  $Q(t) = Q = const$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} S(r,t) &= \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left\{ \begin{aligned} &(1-v) \cdot [1 + \operatorname{erf}(a \cdot \sqrt{t})] + \\ &+ v \cdot \exp(-b^2 \cdot t) \cdot \operatorname{erfc}(c \cdot \sqrt{t}) \end{aligned} \right\} d\alpha; \\ a^2 &= \alpha^2 \cdot c_k; \\ b^2 &= \frac{1-2 \cdot v}{(1-v)^2} \cdot \alpha^2 \cdot c_k; \\ c^2 &= \left( \frac{v}{1-v} \right)^2 \cdot \alpha^2 \cdot c_k. \end{aligned} \right\}. \quad (7.1.12)$$

**Точное** решение (7.1.12) **существенно отличается** от известных **приближенных решений** данной задачи (см., например [60, 133, 134]).

Представляют интерес асимптотические оценки решения (7.1.12). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} S(r,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} [S(r,t)] = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) d\alpha; \\ S(r,\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [S(r,t)] = \frac{1-v}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot Q \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) d\alpha. \end{aligned} \right\}, \quad (7.1.13)$$

откуда

$$\frac{S(r, \infty)}{S(r, 0)} = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} [S(r, t)]}{\lim_{t \rightarrow 0} [S(r, t)]} = 2 \cdot (1 - \nu). \quad (7.1.14)$$

**Таким образом, при постоянной во времени внешней нагрузки за счет фильтрационной консолидации осадка основания возрастает в  $2 \cdot (1 - \nu)$  раза.**

Решения (7.1.11) и (7.1.12) для водонасыщенного основания играют ту же роль, что и задача Буссинеска для упругого, а именно - с их использованием и использованием принципа суперпозиции могут быть решены важные задачи об уплотнении водонасыщенного основания, находящегося под воздействием распределенной нагрузки (в том числе изменяющейся во времени).

При этом формулы (7.1.11) и (7.1.12) содержат несобственные интегралы, в силу чего имеют проблемы их применения для решения практических задач. Поэтому упростим подынтегральные функции таким образом, чтобы несобственные интегралы (7.1.11) и (7.1.12) вычислялись аналитически.

Для этой цели формулы (7.1.12) с использованием подстановок

$$\left. \begin{aligned} S^* &= \frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot r}{Q} \cdot S(r, t); \\ \xi &= \alpha \cdot r; \\ t^* &= \frac{c_k \cdot t}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.15)$$

приведем к виду

$$\left. \begin{aligned}
S^* &= \int_0^{\infty} J_0(\xi) \cdot \left\{ \begin{aligned}
&(1-\nu) \cdot \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(a^* \cdot \sqrt{t^*}\right) \right] + \\
&+ \nu \cdot \exp\left[-b^* \cdot t^*\right] \cdot \operatorname{erfc}\left(c^* \cdot \sqrt{t^*}\right)
\end{aligned} \right\} d\xi; \\
a^* &= \xi; \\
b^* &= \frac{1-2 \cdot \nu}{(1-\nu)^2} \cdot \xi^2; \\
c^* &= \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^2 \cdot \xi.
\end{aligned} \right\}. \tag{7.1.16}$$

Далее положим в (7.1.16)

$$\chi = \xi \cdot \sqrt{t^*}. \tag{7.1.17}$$

Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
S^* &= \int_0^{\infty} J_0(\xi) \cdot \left\{ \begin{aligned}
&(1-\nu) \cdot \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(a^{**} \cdot \chi\right) \right] + \\
&+ \nu \cdot \exp\left[-b^{**} \cdot \chi^2\right] \cdot \operatorname{erfc}\left(c^{**} \cdot \chi\right)
\end{aligned} \right\} d\xi; \\
a^{**} &= 1; \\
b^{**} &= \frac{1-2 \cdot \nu}{(1-\nu)^2}; \\
c^{**} &= \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^2.
\end{aligned} \right\}. \tag{7.1.18}$$

Представим подынтегральное выражение (7.1.18) в виде:

$$\left.
\begin{aligned}
\varphi &= (1 - \nu) \cdot \left[ 1 + \operatorname{erf}(a^{**} \cdot \chi) \right] + \nu \cdot \exp[-b^{**} \cdot \chi^2] \cdot \operatorname{erfc}(c^{**} \cdot \chi) \approx \\
&\approx \sum_{i=0}^{10} a_i^* \cdot T_i^*(\vartheta); \\
a^{**} &= 1; \\
b^{**} &= \frac{1 - 2 \cdot \nu}{(1 - \nu)^2}; \\
c^{**} &= \left( \frac{\nu}{1 - \nu} \right)^2; \\
\vartheta &= \exp(-\chi) .
\end{aligned}
\right\} , \quad (7.1.19)$$

где  $a_i$  - установленные в ходе аппроксимации функции  $\varphi$  коэффициенты (таблица

7.1.1), а  $T_i^*(x)$  - смещенные полиномы Чебышева первого рода [81, 84]. Здесь:

$$\left.
\begin{aligned}
T_0^*(\vartheta) &= 1; \\
T_1^*(\vartheta) &= -1 + 2 \cdot \vartheta = -1 + 2 \cdot \exp(-\chi); \\
T_2^*(\vartheta) &= 1 - 8 \cdot \vartheta + 8 \cdot \vartheta^2 = 1 - 8 \cdot \exp(-\chi) + 8 \cdot \exp(-2 \cdot \chi); \\
&u \ m.o.
\end{aligned}
\right\} . \quad (7.1.20)$$

Таблица 7.1.1  
Коэффициенты  $a_i^*$

$a_i^*$	Значения коэффициентов $a_i^*$ при коэффициенте Пуассона основания $\nu$ , равном			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
$a_0$	1,286131110	1,250675866	1,190457635	1,103558502
$a_1$	0,2398406603	0,2074727219	0,1541002734	0,808676758E-1
$a_2$	-0,05995044307	-0,541485474E-1	-0,431923643E-1	-0,250259147E-1
$a_3$	0,01184909593	0,908674804E-2	0,512771711E-2	0,126400407E-2
$a_4$	0,003582305787	0,333096490E-2	0,270110510E-2	0,149176832E-2
$a_5$	-0,002190785365	-0,177794716E-2	-0,115131567E-2	-0,457021722E-3
$a_6$	0,373459819E-3	0,251537829E-3	0,103912804E-3	0,368455196E-5
$a_7$	0,131296908E-3	0,125863292E-3	0,102630020E-3	0,538635041E-4
$a_8$	-0,128229593E-3	-0,105102055E-3	-0,691427251E-4	-0,285380739E-4
$a_9$	0,556012175E-4	0,423775176E-4	0,246418321E-4	0,850759075E-5
$a_{10}$	-0,135458344E-4	-0,908793168E-5	-0,400436323E-5	-0,680931042E-6

Далее из равенств (7.1.17)...(7.1.20) найдем:

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi &= (1 - \nu) \cdot \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \xi \cdot \sqrt{t^*} \right) \right] + \\
 &\nu \cdot \exp \left[ -\frac{1 - 2 \cdot \nu}{(1 - \nu)^2} \cdot \xi^2 \cdot t^* \right] \cdot \operatorname{erfc} \left( \left( \frac{\nu}{1 - \nu} \right) \cdot \xi \cdot \sqrt{t^*} \right) \approx \left. \right\} \cdot \quad (7.1.21) \\
 &\approx \sum_{i=0}^{10} a_i^* \cdot T_i^* \left[ \exp \left( i \cdot \sqrt{t^*} \cdot \xi \right) \right] .
 \end{aligned}
 \right.$$

Далее учтем известное равенство [50, 81].

$$\int_0^{\infty} J_0(\xi) \cdot \exp\left(i \cdot \sqrt{t^*} \cdot \xi\right) \cdot d\xi = \frac{1}{\sqrt{1+i^2 \cdot t^*}}. \quad (7.1.22)$$

С учетом преобразований (7.1.21) и (7.1.22) найдем окончательно значение несобственного интеграла (7.1.12):

$$\left. \begin{aligned} S(r,t) &\approx \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \sum_{i=0}^{10} a_i^* \cdot \sum_{j=0}^i b_j \cdot \varphi_j(r,t); \\ \varphi_j(r,t) &= \frac{1}{r} \quad \text{при } j=0; \\ \varphi_j(r,t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + j^2 \cdot c_k \cdot t}} \quad \text{при } j \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.23)$$

Здесь  $a_i^*$  - см. таблицу 7.1.1.

Необходимо отметить, что точность аппроксимации подынтегральной функции (7.1.18) с использованием ряда (7.1.19) весьма высока. Так, из рисунков 7.1.1 и 7.1.2 вытекает, что при удержании всего лишь двух членов ряда погрешность аппроксимации не превышает пяти процентов.

Формулы (7.1.23) существенно проще (7.1.12). При этом они содержат двойные ряды, что делает их неудобными для практического использования. Поэтому выполним перестройку рядов (7.1.23) таким образом, чтобы смещенные полиномы Чебышева первого рода были бы представлены в виде рядов функций [84]. Имеем:

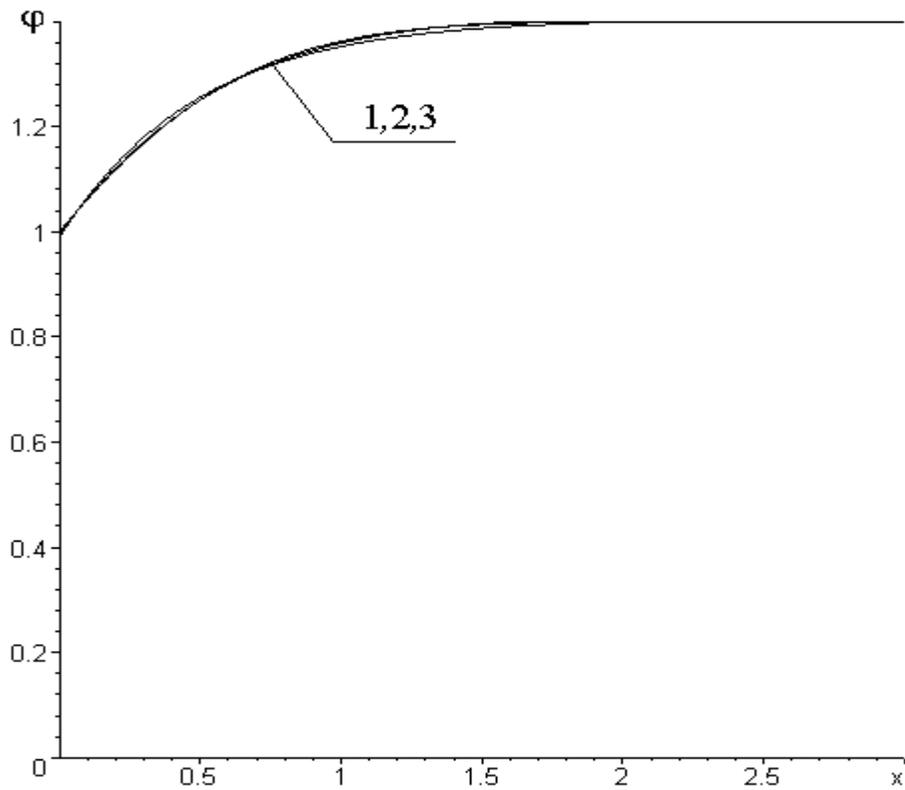


Рис. 7.1.1. Аппроксимация подынтегральной функции (7.1.19) на интервале  $x \in (0,3)$ . Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . 1 - точное значение функции; 2 - удержано десять членов ряда; 3 - удержано два члена ряда.

Примечание. Кривые 1,2 и 3 совпадают.

$$\left. \begin{aligned}
 S(r,t) &\approx \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i(r,t); \\
 \varphi_i(r,t) &= \frac{1}{r} \quad \text{при } i=0; \\
 \varphi_i(r,t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + i^2 \cdot c_k \cdot t}} \quad \text{при } i \neq 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.1.24)$$

Здесь  $a_i$  - см. таблицы 7.1.2. или 7.1.3.

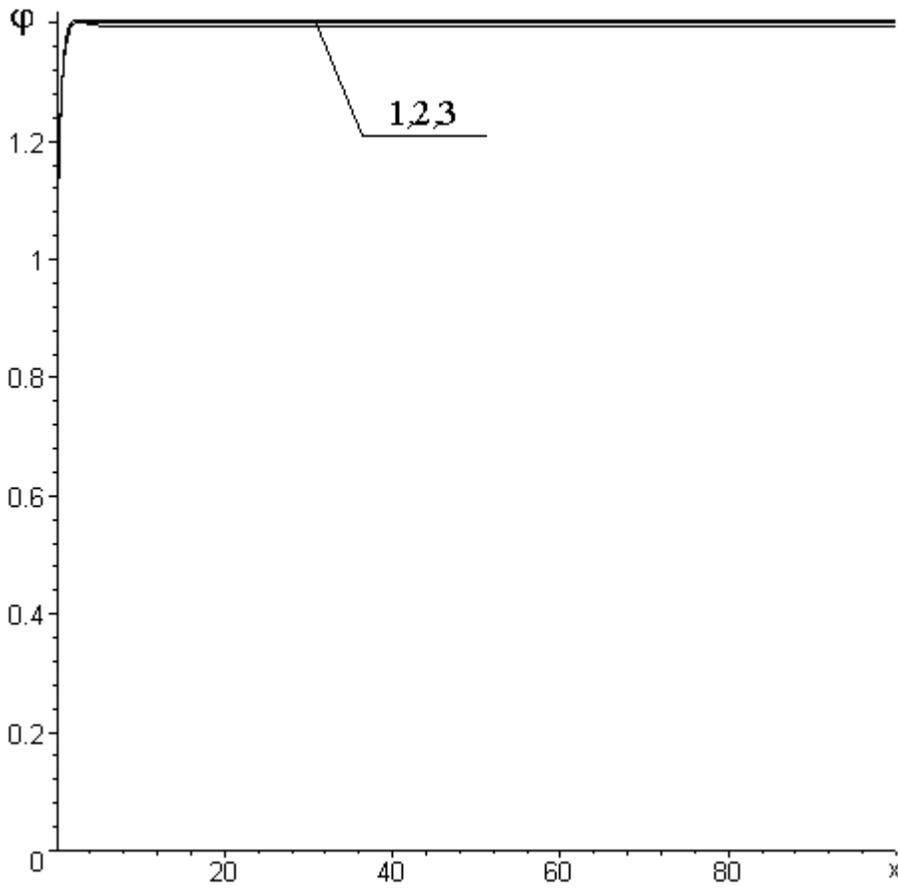


Рис. 7.1.2. Аппроксимация подынтегральной функции (7.1.19) на интервале  $x \in (0,100)$ . Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . 1 - точное значение функции; 2 - удержано десять членов ряда; 3 - удержано два члена ряда.

Примечание. Кривые 1,2 и 3 совпадают.

Далее рассмотрим случай изменяющейся во времени сосредоточенной силы  $Q(t)$ . Решение проблемы ищем в классе обобщенных функций [44, 81].

Таблица 7.1.2

Коэффициенты  $a_i$  при числе членов ряда (7.1.24)  $n = 10$ 

$a_i$	Значения коэффициентов $a_i$ при коэффициенте Пуассона основания $\nu$ , равном			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
$a_0$	1,459990109	1,399991311	1,299993742	1,159997143
$a_1$	0,0031408397	0,0026758509	0,0018552668	0,0008169921
$a_2$	-0,1653252977	-0,1368464505	-0,09134052235	-0,03870812265
$a_3$	3,273008973	2,636749111	1,694298532	0,6887699831
$a_4$	-28,63870618	-22,47796894	-13,88178083	-5,371805977
$a_5$	89,27777974	68,00329715	39,72607481	14,01209481
$a_6$	-155,5980547	-115,2088705	-63,66846484	-20,30105982
$a_7$	168,1473724	121,2318222	63,39831028	18,05305670
$a_8$	-112,4546432	-79,06412986	-39,10655847	-9,746284041
$a_9$	42,79735496	29,37797362	13,72705218	2,900126806
$a_{10}$	-7,101918436	-4,764693526	-2,099439591	-0,3570039742

Таблица 7.1.3

Коэффициенты  $a_i$  при числе членов ряда (7.1.24)  $n = 5$ 

$a_i$	Значения коэффициентов $a_i$ при коэффициенте Пуассона основания $\nu$ , равном			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
$a_0$	1,459945322	1,400022204	1,3000902248	1,160085048
$a_1$	-0,0109671023	-0,0136838354	-0,0143638715	-0,0093636329
$a_2$	0,4011229193	0,3747809672	0,3010337515	0,1606121078
$a_3$	-2,991578811	-2,553251907	-1,816869517	-0,853388905
$a_4$	3,262740397	2,702135883	1,819425521	0,7759341508
$a_5$	-1,121682102	-0,9103089500	-0,5894736271	-0,2339951220

Положим в (7.1.24):

$$\left. \begin{aligned} dQ &\approx \frac{\partial Q(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau; \\ \varphi_i(r,t) &= \frac{1}{r} \quad \text{при } i=0; \\ \varphi_i(r,t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + i^2 \cdot c_k \cdot (t - \tau)}} \quad \text{при } i \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.25)$$

Далее подставим (7.1.25) в (7.1.24) и проинтегрируем полученное таким образом выражение в пределах  $\tau \in (0, t)$ . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} S(r,t) &\approx \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^t \frac{\partial Q}{\partial \tau} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i(r, t - \tau) \right\} \cdot d\tau \\ \varphi_i(r,t) &= \frac{1}{r} \quad \text{при } i=0; \\ \varphi_i(r,t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + i^2 \cdot c_k \cdot (t - \tau)}} \quad \text{при } i \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.26)$$

После этого проинтегрируем (7.1.26) по частям. При этом положим, что

$$Q(t) = U_+(t) \cdot f(t). \quad (7.1.27)$$

Здесь  $U_+(t)$  - асимметричная функция Хевисайда [81], а  $f(t)$  - некоторая функция времени. С учетом того, что равенство (7.1.27) адекватно

утверждению о том, что в момент времени  $t = 0$  сосредоточенная сила  $Q(t) = 0$ ,  
имеем окончательно:

$$\left. \begin{aligned}
 S(r, t) &\approx \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left\{ \frac{Q(t)}{r} + \int_0^t K_{\phi}(r, t - \tau) \cdot Q(\tau) \right\} \cdot d\tau \\
 K_{\phi}(r, t - \tau) &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \psi_i(r, t - \tau); \\
 \psi_i(r, t - \tau) &= - \frac{1}{\left[ r^2 + i^2 \cdot c_k \cdot (t - \tau) \right]^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.1.28)$$

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В рамках модели упругой водонасыщенной среды и расчетной схемы полупространства получено точное решение об определении напряженно - деформированного состояния основания, находящегося под воздействием приложенной к его границе вертикальной сосредоточенной силы. Решение получено в рамках взаимосвязанной теории фильтрационной консолидации.

2. На конкретном примере (см. пункт один настоящих выводов) продемонстрирована предложенная нами техника решения задач определения напряженно - деформированного состояния водонасыщенных грунтовых оснований в рамках теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации.

3. Рассмотрены случаи постоянной во времени (частный случай) и изменяющейся во времени по произвольному закону (общий случай) внешней нагрузки.

4. Для случаев постоянной во времени и переменной по произвольному закону внешней нагрузки выполнена аппроксимация

подынтегральных функций с использованием рядов экспонент. Это позволило избавиться от входящих в формулы несобственных интегралов и получить приемлемые для решения практических задач аналитические зависимости осадки основания от времени, координаты и переменной во времени внешней нагрузки в виде сосредоточенной силы.

## 7.2. ВЕРТИКАЛЬНАЯ РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА НА ГРАНИЦЕ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Далее рассмотрим случай распределенной по площади прямоугольника со сторонами  $L$  и  $b$  нагрузки  $q(x, y, t)$  (рис. 7.2.1).

Вначале положим  $q(x, y, t) = q(x, y)$ , т.е. примем, что распределенная нагрузка не зависит от времени. Положим в (7.1.24)

$$\left. \begin{aligned} dQ &= q \cdot d\xi \cdot d\eta \\ u \\ r &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \end{aligned} \right\}. \quad (7.2.1)$$

В этом случае равенства (7.1.24) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} dS(x, y, \xi, \eta, t) &\approx \frac{q \cdot d\xi \cdot d\eta}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i(x, y, \xi, \eta, t); \\ \varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) &= \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad \text{при } i = 0; \\ \varphi_i(r, t) &= \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + i^2 \cdot c_k \cdot t}} \quad \text{при } i \neq 0. \end{aligned} \right\}. \quad (7.2.2)$$

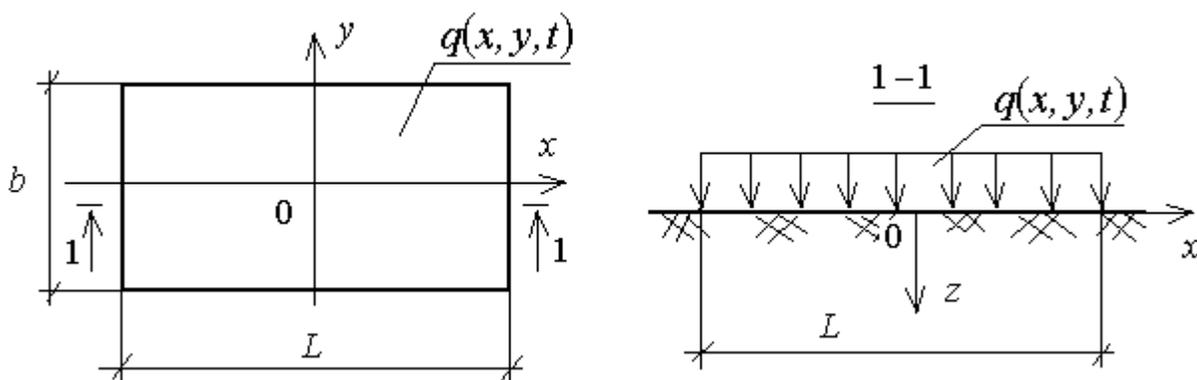


Рис. 7.2.1. К определению осадки основания под воздействием равномерно распределенной по площади прямоугольника нагрузки.

После этого проинтегрируем (7.2.2) на интервале  $\xi \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  и  $\eta \in \left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ .

Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 S(x, y, t) &\approx \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q(\xi, \eta) \cdot \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) \cdot d\xi \cdot d\eta; \\
 \varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) &= \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \text{ при } i = 0; \\
 \varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) &= \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + i^2 \cdot c_k \cdot t}} \text{ при } i \neq 0.
 \end{aligned} \right\} (7.2.3)$$

Равенства (7.2.3) позволяют определить осадку основания в произвольной точке с координатами  $(x, y)$  в момент времени  $t$ . При этом

предполагается, что в момент времени  $t = 0$  к основанию приложена распределенная нагрузка  $q(x, y)$ , распределенная по площади прямоугольника со сторонами  $(L, b)$ , см. рис. 7.2.1.

Далее положим, что внешняя нагрузка не зависит от координаты, т.е.  $q(x, y) = q = const$ . В этом случае равенства (7.2.3) примут вид:

$$\left. \begin{aligned}
 S(x, y, t) &\approx \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) \cdot d\xi \cdot d\eta; \\
 \varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) &= \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \text{ при } i = 0; \\
 \varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) &= \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + i^2 \cdot c_k \cdot t}} \text{ при } i \neq 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.2.4)$$

Для определения средней осадки фундамента в момент времени  $t$ , проинтегрируем (7.2.4) в пределах  $x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  и  $y \in \left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ , а полученный результат разделим на площадь прямоугольника, в пределах которого распределена нагрузка. Имеем:

$$S_{cp}(t) = \left. \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} S(x, y, t) \cdot dx \cdot dy = \right\} \quad (7.2.5.1)$$

$$\left. \begin{aligned}
&= \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) \cdot d\xi \cdot d\eta \right] \cdot \frac{dx \cdot dy}{L \cdot b}; \\
&\varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \text{ нпу } i = 0; \\
&\varphi_i(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + i^2 \cdot c_k \cdot t}} \text{ нпу } i \neq 0.
\end{aligned} \right\} (7.2.5.1)$$

Для составления таблиц выполним нормировку, положив в (7.2.5.1):

$$\left. \begin{aligned}
x &= x^* \cdot L; \\
y &= y^* \cdot L; \\
\xi &= \xi^* \cdot b; \\
\eta &= \eta^* \cdot b; \\
dx &= dx^* \cdot L; \\
dy &= dy^* \cdot L; \\
d\xi &= d\xi^* \cdot b; \\
d\eta &= d\eta^* \cdot b;
\end{aligned} \right\} (7.2.6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{L}{b}; \\ t^* &= \frac{c_k \cdot t}{b^2}; \\ S_{cp}^*(t) &= \frac{S_{cp}(t)}{S_{cp}(\infty)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.6.1)$$

С учетом преобразований (7.2.6.1) равенства (7.2.5.1) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} S_{cp}(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(x^*, y^*, t^*) \cdot dx^* \cdot dy^* = \\ &= \frac{q \cdot b \cdot L}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i^* \cdot d\xi^* \cdot d\eta^* \right] \cdot dx^* \cdot dy^*; \\ \varphi_i^* &= \frac{1}{b \cdot \sqrt{m^2 \cdot (x^* - \xi^*)^2 + (y^* - \eta^*)^2}} \quad \text{при } i = 0; \\ \varphi_i^* &= \frac{1}{b \cdot \sqrt{m^2 \cdot (x^* - \xi^*)^2 + (y^* - \eta^*)^2 + i^2 \cdot t^*}} \quad \text{при } i \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.5)$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned}
 S_{cp}^*(t) &= \frac{F_1(t)}{F_2(t)}; \\
 F_1(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i^* \cdot d\xi^* \cdot d\eta^* \right] \cdot dx^* \cdot dy^*; \\
 F_2(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_0 \cdot \varphi_0^* \cdot d\xi^* \cdot d\eta^* \right] \cdot dx^* \cdot dy^*; \\
 \varphi_i^* &= \frac{1}{\sqrt{m^2 \cdot (x^* - \xi^*)^2 + (y^* - \eta^*)^2}} \text{ при } i = 0; \\
 \varphi_i^* &= \frac{1}{\sqrt{m^2 \cdot (x^* - \xi^*)^2 + (y^* - \eta^*)^2 + i^2 \cdot t^*}} \text{ при } i \neq 0.
 \end{aligned} \right\} \cdot \quad (7.2.6)$$

При вычислении интегралов (7.2.6) интегрирование по переменной  $\xi^*$  выполнялось аналитически, а по переменной  $\eta^*$  - методом трапеций по 1001 точке. Результаты вычисления интегралов (7.2.6) представлены в таблице 7.2.1.

В ряде случаев интеграл (7.2.6) целесообразно представить в аналитической форме. Такая необходимость возникает при учете изменения во времени внешней нагрузки, учете ползучести грунтового скелета, при составлении программ для ЭВМ и т.д. Поэтому представленные в табличной форме зависимости относительной средней осадки от безразмерного времени на интервале  $t^* \in (0, 10000)$  были аппроксимированы конечными рядами

Таблица 7.2.1.

Зависимости относительной средней осадки  $S_{cp}^*(t^*)$   
от безразмерного времени  $t^*$

$t^*$	Зависимости относительной средней осадки $S_{cp}^*(t^*)$ от безразмерного времени $t^*$ при $n = \frac{L}{b} = 1$ и коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном:			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
0,000000	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000001	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000005	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000010	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000050	0,687	0,716	0,771	0,863
0,000100	0,690	0,719	0,773	0,865
0,000500	0,702	0,730	0,783	0,872
0,001000	0,711	0,739	0,790	0,876
0,005000	0,744	0,770	0,817	0,893
0,010000	0,766	0,790	0,833	0,903
0,050000	0,834	0,852	0,884	0,934
0,100000	0,867	0,882	0,908	0,948
1,000000	0,951	0,957	0,966	0,981
10,00000	0,984	0,986	0,989	0,994
100,0000	0,995	0,996	0,997	0,998
1000,000	0,998	0,999	0,999	0,999
10000,00	1,000	1,000	1,000	1,000

Продолжение таблицы 7.2.1

$t^*$	Зависимости относительной средней осадки $S_{cp}^*(t^*)$ от безразмерного времени $t^*$ при $n = \frac{L}{b} = 1,4$ и коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном:			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
0,000000	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000001	0,694	0,723	0,776	0,866
0,000005	0,696	0,724	0,778	0,867
0,000010	0,697	0,725	0,778	0,868
0,000050	0,700	0,728	0,781	0,869
0,000100	0,703	0,731	0,783	0,871
0,000500	0,713	0,740	0,791	0,876
0,001000	0,720	0,747	0,797	0,880
0,005000	0,748	0,773	0,819	0,894
0,010000	0,766	0,790	0,833	0,903
0,050000	0,827	0,845	0,878	0,930
0,100000	0,858	0,873	0,901	0,944
1,000000	0,945	0,951	0,962	0,979
10,00000	0,982	0,984	0,988	0,993
100,0000	0,994	0,995	0,996	0,998
1000,000	0,998	0,998	0,999	0,999
10000,00	0,999	0,999	1,000	1,000

Продолжение таблицы 7.2.1

$t^*$	Зависимости относительной средней осадки $S_{cp}^*(t^*)$ от безразмерного времени $t^*$ при $n = \frac{L}{b} = 1,8$ и коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном:			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
0,000001	0,698	0,726	0,779	0,868
0,000005	0,700	0,728	0,780	0,869
0,000010	0,700	0,728	0,781	0,869
0,000050	0,703	0,731	0,783	0,871
0,000100	0,706	0,733	0,785	0,872
0,000500	0,715	0,742	0,792	0,877
0,001000	0,721	0,748	0,797	0,880
0,005000	0,746	0,771	0,817	0,893
0,010000	0,763	0,787	0,830	0,901
0,050000	0,819	0,838	0,872	0,927
0,100000	0,849	0,865	0,894	0,940
1,000000	0,938	0,945	0,958	0,976
10,00000	0,980	0,982	0,986	0,992
100,0000	0,994	0,994	0,996	0,998
1000,000	0,998	0,998	0,999	0,999
10000,00	0,999	0,999	1,000	1,000

Продолжение таблицы 7.2.1

$t^*$	Зависимости относительной средней осадки $S_{cp}^*(t^*)$ от безразмерного времени $t^*$ при $n = \frac{L}{b} = 2,4$ и коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном:			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
0,000000	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000001	0,702	0,729	0,782	0,869
0,000005	0,703	0,731	0,782	0,870
0,000010	0,703	0,731	0,783	0,870
0,000050	0,706	0,734	0,785	0,872
0,000100	0,708	0,735	0,787	0,873
0,000500	0,716	0,743	0,793	0,877
0,001000	0,722	0,748	0,798	0,880
0,005000	0,744	0,769	0,815	0,891
0,010000	0,759	0,783	0,827	0,899
0,050000	0,810	0,830	0,866	0,923
0,100000	0,838	0,856	0,887	0,935
1,000000	0,929	0,937	0,951	0,973
10,00000	0,976	0,979	0,984	0,991
100,0000	0,992	0,993	0,995	0,997
1000,000	0,998	0,998	0,998	0,999
10000,00	0,999	0,999	0,999	1,000

Продолжение таблицы 7.2.1

$t^*$	Зависимости относительной средней осадки $S_{cp}^*(t^*)$ от безразмерного времени $t^*$ при $n = \frac{L}{b} = 3,2$ и коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном:			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
0,000000	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000001	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000005	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000010	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000050	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000100	0,687	0,716	0,771	0,863
0,000500	0,694	0,723	0,777	0,867
0,001000	0,700	0,728	0,781	0,870
0,005000	0,721	0,748	0,799	0,881
0,010000	0,736	0,762	0,810	0,889
0,050000	0,787	0,809	0,849	0,913
0,100000	0,815	0,835	0,870	0,925
1,000000	0,913	0,923	0,940	0,966
10,00000	0,970	0,973	0,979	0,988
100,0000	0,990	0,991	0,993	0,996
1000,000	0,997	0,997	0,998	0,999
10000,00	0,999	0,999	0,999	1,000

Продолжение таблицы 7.2.1

$t^*$	Зависимости относительной средней осадки $S_{cp}^*(t^*)$ от безразмерного времени $t^*$ при $n = \frac{L}{b} = 5,0$ и коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном:			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
0,000000	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000001	0,689	0,718	0,772	0,864
0,000005	0,690	0,719	0,773	0,864
0,000010	0,690	0,719	0,773	0,865
0,000050	0,692	0,721	0,775	0,866
0,000100	0,694	0,723	0,776	0,866
0,000500	0,700	0,729	0,781	0,870
0,001000	0,705	0,733	0,785	0,872
0,005000	0,723	0,750	0,800	0,882
0,010000	0,736	0,761	0,809	0,888
0,050000	0,779	0,802	0,843	0,909
0,100000	0,805	0,825	0,862	0,920
1,000000	0,897	0,908	0,928	0,959
10,00000	0,961	0,966	0,973	0,985
100,0000	0,987	0,989	0,991	0,995
1000,000	0,996	0,996	0,997	0,998
10000,00	0,999	0,999	0,999	1,000

$t^*$	Зависимости относительной средней осадки $S_{cp}^*(t^*)$ от безразмерного времени $t^*$ при $n = \frac{L}{b} = 10,0$ и коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном:			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
0,000000	0,685	0,714	0,769	0,862
0,000001	0,687	0,717	0,771	0,863
0,000005	0,688	0,717	0,772	0,864
0,000010	0,689	0,718	0,772	0,864
0,000050	0,690	0,719	0,773	0,865
0,000100	0,692	0,721	0,774	0,865
0,000500	0,697	0,725	0,779	0,868
0,001000	0,701	0,729	0,782	0,870
0,005000	0,716	0,743	0,794	0,878
0,010000	0,726	0,752	0,802	0,883
0,050000	0,762	0,786	0,830	0,901
0,100000	0,784	0,806	0,846	0,911
1,000000	0,868	0,882	0,907	0,947
10,00000	0,941	0,947	0,959	0,977
100,0000	0,980	0,982	0,986	0,992
1000,000	0,994	0,994	0,996	0,998
10000,00	0,998	0,998	0,999	0,999

ЭКСПОНЕНТ ВИДА

$$S_{cp}^*(t^*) = \sum_{i=1}^3 b_i \cdot \exp[-k \cdot (i-1) \cdot t^*], \quad (7.2.7)$$

где  $b_i$  - установленные в ходе аппроксимации данных таблицы 7.1.1 коэффициенты.

Их значения представлены в таблице 7.2.2.

Таблица 7.2.2

Значения коэффициентов  $b_i$  и показателей степени экспонент  $k$

Значения коэффициентов $b_i$ и показателя степени экспонент $k$ при				
коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном				
$b_i$	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
$\eta = \frac{L}{b} = 1,0$				
$b_1$	0,9842197590	0,9858940712	0,9888453352	0,9934998707
$b_2$	-0,1696495093	-0,1510296699	-0,1213066491	-0,0724390748
$b_3$	-0,1184291080	-0,1099686199	-0,0891018561	-0,0529446721
$k$	8,70	8,90	9,40	10,30
$\eta = \frac{L}{b} = 1,4$				
$b_1$	0,9829251329	0,9847479926	0,9880253273	0,9931231245
$b_2$	-0,1590291883	-0,1471314607	-0,1179874547	-0,0701999432
$b_3$	-0,1169081605	-0,1029663166	-0,0837976837	-0,0502043592
$k$	7,30	7,60	8,00	8,70

Продолжение таблицы 7.2.2

Значения коэффициентов  $b_i$  и показателей степени экспонент  $k$

$b_i$	Значения коэффициентов $b_i$ и показателя степени экспонент $k$ при коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
$\eta = \frac{L}{b} = 1,8$				
$b_1$	0,9812000087	0,9832516612	0,9868814004	0,9925030703
$b_2$	-0,1527732590	-0,1387666972	-0,1134348823	-0,0695560450
$b_3$	-0,1192618154	-0,1078770866	-0,0856741595	-0,0493568901
$k$	6,40	6,60	7,00	7,70
$\eta = \frac{L}{b} = 2,4$				
$b_1$	0,9788342891	0,9811425441	0,9852158222	0,9915732959
$b_2$	-0,1302711407	-0,1202743480	-0,1055642216	-0,0673637573
$b_3$	-0,1375432922	-0,1226211081	-0,0906309822	-0,0499226579
$k$	5,30	5,50	6,00	6,70
$\eta = \frac{L}{b} = 3,2$				
$b_1$	0,9742783761	0,9770885233	0,9820113930	0,9897441483
$b_2$	-0,1181437816	-0,1040039571	-0,0917358863	-0,0602267127
$b_3$	-0,1639978642	-0,1519619566	-0,1151268139	-0,0635444265
$k$	4,30	4,40	4,80	5,40

Значения коэффициентов  $b_i$  и показателей степени экспонент  $k$ 

$b_i$	Значения коэффициентов $b_i$ и показателя степени экспонент $k$ при коэффициенте Пуассона $\nu$ , равном			
	$\nu = 0,27$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,42$
$\eta = \frac{L}{b} = 5,0$				
$b_1$	0,9697244104	0,9728095898	0,9786108191	0,9877449888
$b_2$	-0,1105794123	-0,1021193941	-0,0786112795	-0,0471921674
$b_3$	-0,1603913590	-0,1437970063	-0,1202843727	-0,0719637304
$k$	3,40	3,60	3,80	4,20
$\eta = \frac{L}{b} = 10,0$				
$b_1$	0,9760349383	0,9786554563	0,9828743184	0,9899277745
$b_2$	-0,1628409231	-0,1397849444	-0,1197248225	-0,0683790668
$b_3$	-0,1093495211	-0,1069958351	-0,0792409507	-0,0502778227
$k$	0,90	0,90	1,00	1,10

Далее продемонстрируем технику использования данных таблиц 7.2.1 и 7.2.2 для практических расчетов.

Для определенности рассмотрим конкретную задачу - построим зависимость средней осадки фундамента от времени. Свойства основания, геометрические размеры фундамента и среднее давление под его подошвой представлены в таблице 7.2.3.

Таблица 7.2.3

## Свойства грунтового основания

№ пп.	Наименование характеристики	Единица измерения	Величина
1	Модуль общей деформации $E$	$кПа$	10000
2	Коэффициент Пуассона $\nu$	$д.ед.$	0,35
3	Константы Ламе	$\lambda, кПа$	4321
		$G, кПа$	3704
4	Коэффициент фильтрации $кф$	$\frac{см}{с}$	0,00001
5	Коэффициент консолидации при компрессии $c_K$	$\frac{м^2}{год}$	3,154
6	Размеры подошвы фундамента	$длина L, м$	5
		$ширина b, м$	5
7	Глубина заложения подошвы фундамента $d$	$м$	2,5
8	Среднее давление под подошвой фундамента $q$	$кПа$	250

Далее определим входящие в формулы (7.2.6) параметры. Для простоты изложения материала, осадку  $S_{cp}(\infty)$  определим по формуле Шлейхера [155]:

$$S_{cp}(\infty) = (1 - \nu^2) \cdot K_p \cdot K_1 \cdot \frac{q \cdot b}{E} = (1 - 0,35^2) \cdot 0,95 \cdot 0,88 \cdot \frac{250 \cdot 5}{10000} = 0,092 \text{ м} = 92 \text{ мм.}$$

Здесь  $K_p$  и  $K_1$  - коэффициенты, учитывающие соответственно глубину

заложения подошвы фундамента и его форму.

Необходимо отметить, что для определения средней осадки фундамента  $S_{cp}(\infty)$  также могут быть использованы другие методы расчета, например, методика ДБН [50, 51].

Далее определим входящий в (7.2.6) параметр  $m = \frac{L}{b} = \frac{5}{5} = 1$  и с использованием таблицы (7.2.1) перейдем от приведенных характеристик к фактическим (см. таблицу 7.2.4).

Для того, чтобы для построения зависимости “средняя осадка - время” использовать данные таблицы 7.2.2, выбираем соответствующие  $m = 1$  и  $\nu = 0,35$  коэффициенты  $b_i$  и показатель степени экспонент  $k$ . Далее с использованием формул (7.2.6) и (7.2.7) найдем:

$$\begin{aligned}
 S_{cp}(t) &= S_{cp}(\infty) \cdot \sum_{i=1}^3 b_i \cdot \exp[-k \cdot (i-1) \cdot t^*] = \\
 &= S_{cp}(\infty) \cdot \left\{ \begin{aligned} &b_1 + b_2 \cdot \exp\left(-k \cdot \frac{c_k \cdot t}{b^2}\right) + \\ &+ b_3 \cdot \exp\left(-2 \cdot k \cdot \frac{c_k \cdot t}{b^2}\right) \end{aligned} \right\} = \\
 &= 92 \cdot \left\{ \begin{aligned} &0,99895 - 0,12131 \cdot \exp(-1,1859 \cdot t) - \\ &- 0,0891 \cdot \exp(-2,3718 \cdot t) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

Результаты расчета по формулам (7.2.8) заносим в последний столбец таблицы 7.2.4. В графической форме данные последних трех столбцов

Таблица 7.2.4

Зависимости средней осадки фундамента от времени.

Безразмерные время и осадка фундамента		Фактическое время	Фактическая средняя осадка фундамента $S_{cp}(t)$ , мм	
$t^*$ <i>д.ед.</i>	$S_{cp}^*(t^*)$ <i>д.ед.</i>	$t = \frac{t^* \cdot b^2}{c_k}$ , ГОДЫ	Расчет по таблице 7.2.1	Расчет по формулам (7.2.8)
1	2	3	4	5
0,000000	0,769	0	70,748	71,616
0,000001	0,769	6,1E-06	70,748	71,617
0,000005	0,769	3,05E-05	70,748	71,618
0,000010	0,769	6,1E-05	70,748	71,619
0,000050	0,771	0,000306	70,932	71,629
0,000100	0,773	0,000613	71,116	71,642
0,000500	0,783	0,003103	72,036	71,745
0,001000	0,790	0,006262	72,68	71,873
0,005000	0,817	0,03238	75,164	72,864
0,010000	0,833	0,066027	76,636	74,022
0,050000	0,884	0,350349	81,328	80,797
0,100000	0,908	0,719721	83,536	85,363
1,000000	0,966	7,656944	88,872	90,973
10,00000	0,989	78,39252	90,988	90,974
100,0000	0,997	790,2663	91,724	90,974

Примечания:

1. В первом и втором столбцах таблицы представлены соответственно безразмерное время и относительная средняя осадка фундамента.

2. В третьем столбце таблицы представлено фактическое время.

3. В четвертом и пятом столбцах таблицы представлены значения средних осадок фундаментов, рассчитанных соответственно с использованием данных таблицы 7.2.1 и формул (7.2.8).

таблицы 7.2.4 представлены на рисунке 7.2.2.

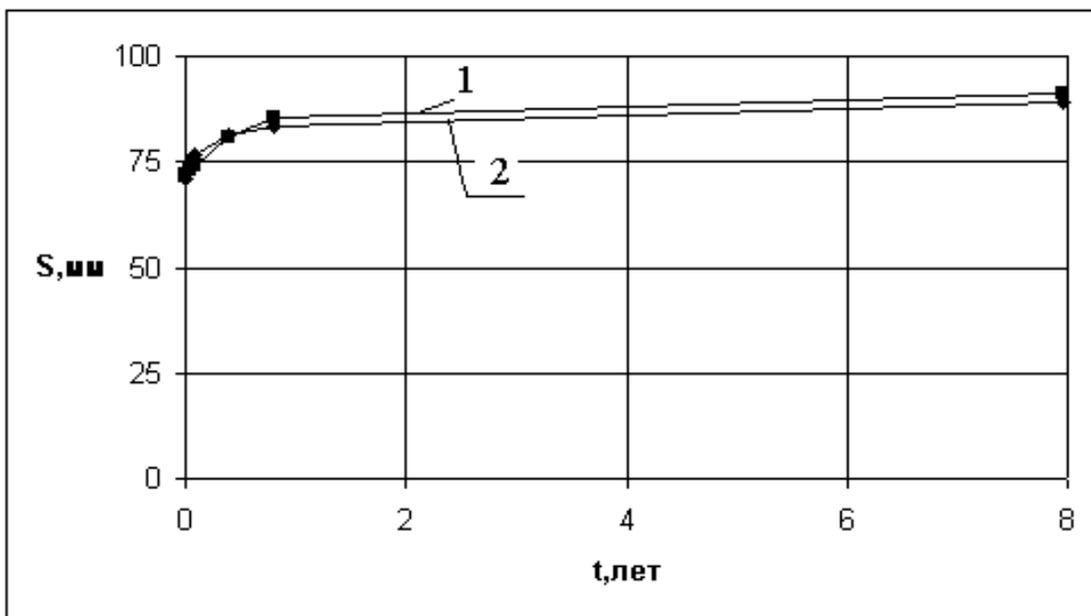


Рис. 7.2.2. Зависимости “осадка - время”. 1 - расчет по таблице 7.1.1; 2 - то же, с использованием аналитических зависимостей (7.2.7) и (7.2.8).

Из представленных в таблице 7.2.4 и на рисунке 7.2.2 данных вытекает, что за восемь лет осадка фундамента возрастет на 20 мм. Кроме того, анализ кривых на рисунке 7.2.2 и представленных в таблице 7.2.4 данных позволил нам сделать вывод о том, что построенные с использованием таблицы и аналитических зависимостей кривые “средняя осадка - время” практически полностью совпадают.

Если внешняя нагрузка изменяется во времени, то следует поступить так, как это было сделано в разделе 7.1, а именно.

1. Для расчета зависимостей “осадка - время” использовать принцип суперпозиции [104, 125, 127, 128].

2. Учесть, что внешняя нагрузка  $q(t)$  принадлежит к классу обобщенных функций [44], причем:

$$q(t) = U_+(t) \cdot f(t), \quad (7.2.9)$$

где  $U_+(t)$  - асимметричная функция Хевисайда, а  $f(t)$  - некоторая функция времени.

3. В рамках модели линейной упругой изотропной среды для случая квазистатической нагрузки  $q(t)$  определить осадку основания  $S^y(t)$ .

4. Определить дифференциал осадки  $S^y(t)$ :

$$dS^y(\tau) = \frac{\partial S^y(\tau)}{\partial \tau} \cdot d\tau. \quad (7.2.10)$$

5. С использованием принципа суперпозиции, (7.2.7) и (7.2.10) найти:

$$S_{cp}(t) = \int_0^t \frac{\partial S^y(\tau)}{\partial \tau} \cdot \sum_{i=1}^3 b_i \cdot \exp\left[-(i-1) \cdot k \cdot \frac{c_k \cdot (t-\tau)}{b^2}\right] \cdot d\tau. \quad (7.2.11)$$

6. Далее следует проинтегрировать (7.2.12) по частям и учесть что

$\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = 0$ , откуда  $\lim_{t \rightarrow 0} S^y(t) = 0$ . Имеем:

$$S_{cp}(t) = S^y(t) \cdot \sum_{i=1}^3 b_i - \left. \begin{aligned} & - \frac{c_k}{b^2} \cdot \int_0^t S^y(\tau) \cdot \sum_{i=2}^3 b_i \cdot k \cdot (i-1) \cdot \exp\left[-(i-1) \cdot k \cdot \frac{c_k \cdot (t-\tau)}{b^2}\right] \cdot d\tau \end{aligned} \right\}. \quad (7.2.12)$$

Для иллюстрации техники расчета средней осадки находящегося под воздействием фундамента используем данные таблицы 7.2.4 и формулу (7.2.12). Кроме того, примем, что среднее давление под подошвой фундамента за два года (т.е. за строительный период) возросло от нуля до 250 кПа (см. рис. 7.2.3).

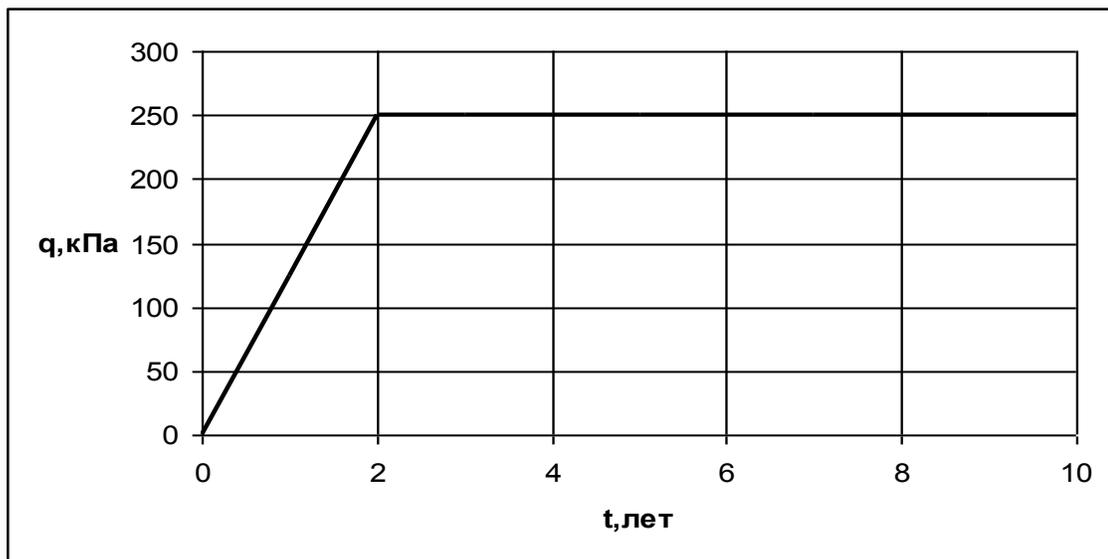


Рис. 7.2.3. Принятая при расчете средней осадки зависимость “нагрузка - время”

В аналитическом виде кривая 7.2.3 имеет вид:

$$q(t) = 250 \cdot \left\{ \frac{t}{2} \cdot [1 - U_+(t-2)] + U_+(t-2) \right\}.$$

Далее с использованием формулы Шлейхера определим среднюю осадку в рамках модели упругого неводонасыщенного основания. Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 S^y(t) &= (1 - \nu^2) \cdot K_p \cdot K_1 \cdot \frac{q(t) \cdot b}{E} = \\
 &= (1 - 0,35^2) \cdot 0,95 \cdot 0,88 \cdot \frac{5}{10000} \cdot 250 \cdot \\
 &\cdot \left\{ \frac{t}{2} \cdot [1 - U_+(t-2)] + U_+(t-2) \right\} = \\
 &= 92 \cdot \left\{ \frac{t}{2} \cdot [1 - U_+(t-2)] + U_+(t-2) \right\} \quad [мм]
 \end{aligned} \right\} \quad (7.2.13)$$

После этого подсчитаем входящие в формулу (7.2.12) параметры. Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 b_i &= 0,988845 - 0,12307 - 0,089102 = 0,778437; \\
 \text{при } i=2 \quad (i-1) \cdot k \cdot \frac{c_k}{b^2} &= (2-1) \cdot 9,4 \cdot \frac{3,154}{5^2} = 1,1859; \\
 \text{при } i=3 \quad (i-1) \cdot k \cdot \frac{c_k}{b^2} &= (3-1) \cdot 9,4 \cdot \frac{3,154}{5^2} = 2,3718; \\
 \frac{c_k}{b^2} \cdot b_2 \cdot k \cdot (2-1) &= \frac{3,154}{5^2} \cdot (-0,12307) \cdot 9,4 \cdot 1 = -0,14595; \\
 \frac{c_k}{b^2} \cdot b_2 \cdot (3-1) &= \frac{3,154}{5^2} \cdot (-0,089102) \cdot 9,4 \cdot 2 = -0,211333.
 \end{aligned} \right\}$$

Далее подставим полученные выше значения параметров в (7.2.12) и выполним процедуру интегрирования. Имеем:

$$\begin{aligned}
 S = & 45,61 \cdot [1 - U_+(t-2)] \cdot t + \\
 & + \left[ \begin{array}{l} 97,73 - \\ -4,77 \cdot \exp(-1,186 \cdot t + 2,372) - \\ -1,744 \cdot \exp(-2,732 \cdot t + 4,744) \end{array} \right] \cdot U_+(t-2) + \\
 & + 4,77 \cdot \exp(-1,186 \cdot t) + 1,744 \cdot \exp(-2,732 \cdot t) - 6,518.
 \end{aligned}
 \tag{7.2.14}$$

В графическом виде результаты расчета представлены на рисунке 7.2.4. Из рисунка вытекает, что после завершения строительства средняя осадка основания увеличилась всего на 6 миллиметров. При этом за строительный период осадка основания возросла от нуля до 85 мм.

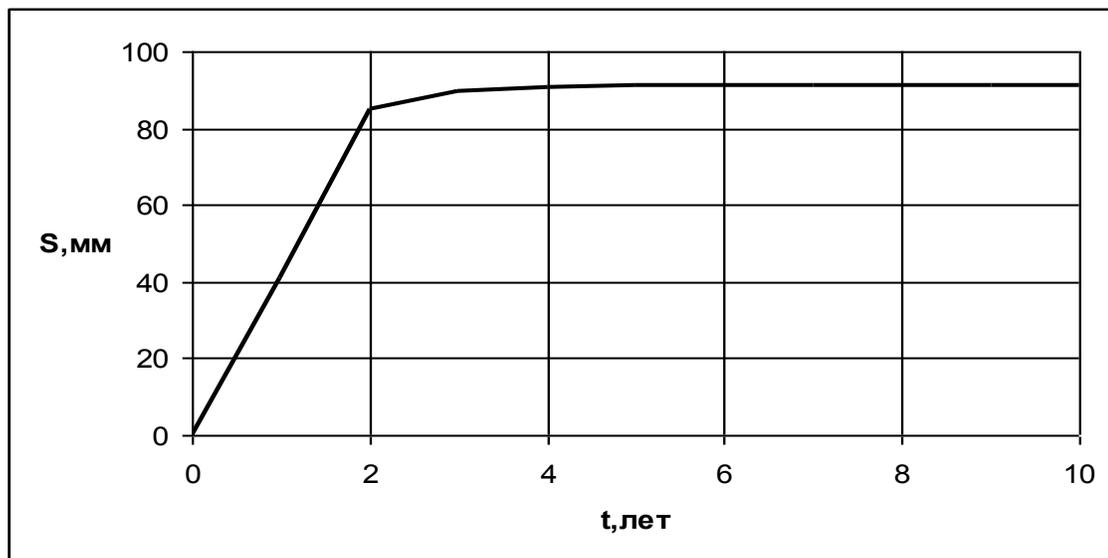


Рис. 7.2.4. Зависимость “осадка - время” находящейся под воздействием переменной нагрузки фундамента.

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В рамках модели упругого водонасыщенного основания и расчетной схемы полупространства, к верхней границе которого приложена распределенная по площади прямоугольника постоянная во времени нагрузка, разработан алгоритм расчета средних осадок.
2. Для прогноза средних осадок оснований фундаментов предложено использовать табличный и аналитический способы расчета (см. соответственно таблицу 7.1.1 и формулу (7.2.12)).
3. Полученные таким образом результаты (см. п. 1 и 2 настоящих выводов) обобщены на случай переменной во времени нагрузки на основание.

### **7.3. УЧЕТ ПОЛЗУЧЕСТИ ГРУНТОВОГО СКЕЛЕТА**

#### **7.3.1. ВЕРТИКАЛЬНАЯ СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА, ПРИЛОЖЕННАЯ К ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА. НЕВОДОНАСЫЩЕННОЕ ОСНОВАНИЕ**

Вначале рассмотрим случай постоянной во времени сосредоточенной силы. Согласно [127, 128] осадка упругого изотропного полупространства под воздействием вертикальной сосредоточенной постоянной во времени силы равна:

$$S(r) = \frac{1-\nu}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \frac{Q}{r}, \quad (7.3.1)$$

где  $Q$  - величина сосредоточенной силы,  $r$  - радиус, а  $\nu$  и  $G$  - соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига грунтового скелета.

Далее в соответствии с принципом Вольтерра [116] заменим в (7.3.1) упругие константы интегральными операторами. При этом в соответствии с принятыми нами допущениями учтем, что кривые сдвиговой и объемной ползучести подобны. Имеем:

$$S(r, t) = \frac{1-\nu}{2 \cdot \pi \cdot \tilde{G}} \cdot \frac{Q}{r} = \frac{1-\nu}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \frac{Q}{r} \cdot \left[ 1 + \int_0^t K(t, \tau) \cdot d\tau \right]. \quad (7.3.2)$$

Здесь  $K(t, \tau)$  - ядро ползучести грунтового скелета.

Далее рассмотрим случай переменной во времени силы  $Q(t)$ . В данном случае для квазистатической нагрузки решение задачи Буссинеска имеет вид:

$$S(r) = \frac{1-\nu}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \frac{Q(t)}{r}. \quad (7.3.3)$$

Заменяя в (7.3.3) упругие константы интегральными операторами найдем:

$$S(r, t) = \frac{1-\nu}{2 \cdot \pi \cdot \tilde{G}} \cdot \frac{Q(t)}{r} = \frac{1-\nu}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[ Q(t) + \int_0^t Q(\tau) \cdot K(t, \tau) \cdot d\tau \right]. \quad (7.3.4)$$

Равенства (7.3.2) и (7.3.4) позволяют при расчете осадок учитывать реологические свойства грунтового основания. При этом с использованием принципа суперпозиции эти формулы могут быть использованы для расчета осадок находящегося под воздействием распределенной нагрузки основания.

**7.3.2. ВЕРТИКАЛЬНАЯ СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА,  
ПРИЛОЖЕННАЯ К ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА.  
ВОДОНАСЫЩЕННОЕ ОСНОВАНИЕ**

Вначале рассмотрим случай постоянной во времени сосредоточенной силы (формулы (7.1.12), (7.1.23) и (7.1.25)). С использованием принципа Вольтерра найдем последовательно.

1. Из (7.1.12) имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 S(r,t) &= \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left\{ \begin{aligned} &f(\alpha, t) + \\ &+ \int_0^t K(t, \tau) \cdot f(\alpha, \tau) \cdot d\tau \end{aligned} \right\} \cdot d\alpha; \\
 f(\alpha, t) &= \left\{ \begin{aligned} &[(1-\nu) \cdot [1 + \operatorname{erf}(a \cdot \sqrt{t})]] + \\ &+ \nu \cdot \exp(-b^2 \cdot t) \cdot \operatorname{erfc}(c \cdot \sqrt{t}) \end{aligned} \right\}; \\
 a &= \alpha^2 \cdot c_k; \quad b^2 = \frac{1-2 \cdot \nu}{(1-\nu)^2} \cdot \alpha^2 \cdot c_k; \quad c^2 = \left( \frac{\nu}{1-\nu} \right)^2 \cdot \alpha^2 \cdot c_k.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.1)$$

2. Из (7.1.23) имеем :

$$\left. \begin{aligned}
 S(r,t) &= \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left\{ f(r,t) + \int_0^t K(t, \tau) \cdot f(r, \tau) \cdot d\tau \right\}; \\
 f(r,t) &= \sum_{i=0}^{10} a_i^* \cdot \sum_j^i b_j \cdot \varphi_j(r,t);
 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.2)$$

$$\left. \varphi_j(r,t) = \frac{1}{r} \text{ при } j=0; \quad \varphi_j(r,t) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + j^2 \cdot c_k \cdot t}} \text{ при } j \neq 0. \right\} \quad (7.3.2)$$

Здесь  $a_i^*$  - см. таблицу 7.1.1.

4. Наконец, из (7.1.24) имеем:

$$\left. \begin{aligned} S(r,t) &= \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left\{ \begin{aligned} &f(r,t) + \\ &+ \int_0^t K(t,\tau) \cdot f(r,\tau) \cdot d\tau \end{aligned} \right\} \cdot d\alpha; \\ f(r,t) &= \sum_{i=0}^n a_i \cdot \Phi_i(r,t); \\ \Phi_i(r,t) &= \frac{1}{r} \text{ при } i=0; \\ \Phi_i(r,t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + i^2 \cdot c_k \cdot t}} \text{ при } i \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.3)$$

Здесь  $a_i$  - см. таблицы 7.1.2. или 7.1.3.

Отметим, что формулы (7.3.1)...(7.3.3) являются практически полностью идентичными. Различие между ними заключается в том, что формулы (7.3.2) и (7.3.3) являются различной формой записи аппроксимации точного решения (7.3.1).

Для учета переменной во времени сосредоточенной силы используем формулы (7.1.11) и (7.1.28). С использованием принципа Вольтерра найдем последовательно.

1. Из равенств (7.1.11) имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 S(r,t) &= \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left\{ f(\alpha, t) + \int_0^t K(t, \tau) \cdot f(\alpha, \tau) \cdot d\tau \right\} \cdot d\alpha; \\
 f(\alpha, t) &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[ Q(t) + \int_0^t K_{\phi}(t - \tau) \cdot Q(\tau) \cdot d\tau \right] \cdot d\alpha; \\
 K_{\phi}(t - \tau) &= b_1 \cdot \left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\exp[-a^2 \cdot (t - \tau)]}{\sqrt{\pi \cdot (t - \tau)}} \\
 &- c \cdot \exp[-b^2 \cdot (t - \tau)] \cdot \operatorname{erfc}(c \cdot \sqrt{(t - \tau)})
 \end{aligned} \right\}; \\
 b^2 &= \frac{1 - 2 \cdot v}{(1 - v)^2} \cdot \alpha^2 \cdot c_k; \quad b_1 = \frac{1 - 2 \cdot v}{(1 - v)} \cdot \alpha \cdot \sqrt{c_k}; \\
 c^2 &= \left( \frac{v}{1 - v} \right)^2 \cdot \alpha^2 \cdot c_k; \quad a^2 = \alpha^2 \cdot c_k.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.4)$$

2. Из равенств (7.1.28) имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 S(r,t) &= \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left\{ \begin{aligned}
 &f(r, t) + \\
 &+ \int_0^t K(t, \tau) \cdot f(r, \tau) \cdot d\tau
 \end{aligned} \right\}; \\
 f(r,t) &\approx \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left\{ \frac{Q(t)}{r} + \int_0^t K_{\phi}(r, t - \tau) \cdot Q(\tau) \right\} \cdot d\tau;
 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_{\phi}(r, t - \tau) &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \psi_i(r, t - \tau); \\
 \psi_i(r, t - \tau) &= - \frac{1}{\left[ r^2 + i^2 \cdot c_k \cdot (t - \tau) \right]^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.5)$$

Отметим, что различие между формулами (7.3.4) и (7.3.5) заключается в том, что (7.3.5) является аппроксимацией точного решения (7.3.4).

Если обозначить обусловленную фильтрационной консолидацией осадку точки основания с координатой  $r$  в момент времени  $t$  как  $S_{\phi}(r, t)$ , то формулы (7.3.1)...(7.3.5) можно привести к единообразной форме записи:

$$S(r, t) = S_{\phi}(r, t) + \int_0^t K(t, \tau) \cdot S_{\phi}(r, \tau) \cdot d\tau. \quad (7.3.6)$$

Здесь  $S(r, t)$  - осадка точки основания с координатой  $r$  в момент времени  $t$ , обусловленная фильтрационной консолидацией и ползучестью грунтового скелета;  $S_{\phi}(r, t)$  - то же, фильтрационной консолидацией. При этом в зависимости от необходимой точности решения задачи и характера изменения во времени сосредоточенной силы  $Q$  (т.е. от того, является сосредоточенная сила функцией времени или константой) для расчета осадки  $S_{\phi}(r, t)$  следует использовать формулы либо (7.1.12) либо (7.1.23) либо (7.1.25) либо (7.1.11) либо (7.1.28).

### 7.3.3. ВЕРТИКАЛЬНАЯ РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА, ПРИЛОЖЕННАЯ К ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА. НЕВОДОНАСЫЩЕННОЕ ОСНОВАНИЕ

Если к основанию приложена постоянная во времени нагрузка, то для определения средней осадки в момент времени  $t$  следует вначале в рамках модели упругого невесомого основания определить осадку  $S_{cp}^y$ , а затем с использованием принципа Вольтерра найти:

$$S_{cp}(t) = S_{cp}^y \cdot \left[ 1 + \int_0^t K(t, \tau) \cdot d\tau \right]. \quad (7.3.7)$$

Здесь  $S_{cp}(t)$  - средняя осадка области, загруженной постоянной во времени распределенной по площади прямоугольника нагрузкой в момент времени  $t$ ;  $S_{cp}^y$  - то же, рассчитанная в рамках модели невесомого упругого основания;  $K(t, \tau)$  - ядро ползучести грунтового скелета.

Если приложенная к основанию нагрузка изменяется во времени, то для расчета средней осадки загруженной области следует использовать равенство вида:

$$S_{cp}(t) = S_{cp}^y(t) + \int_0^t S_{cp}^y(\tau) \cdot K(t, \tau) \cdot d\tau. \quad (7.3.8)$$

Здесь  $S_{cp}^y(t)$  - рассчитанная в рамках модели невесомого упругого основания средняя осадка области, загруженной переменной во времени распределенной по площади прямоугольника нагрузкой.

### 7.3.4. ВЕРТИКАЛЬНАЯ РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА, ПРИЛОЖЕННАЯ К ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА. ВОДОНАСЫЩЕННОЕ ОСНОВАНИЕ.

Для определения средних осадок основания, обусловленных распределенной по площади прямоугольника постоянной во времени нагрузкой используем полученное нами равенство (7.2.8) и принцип Вольтерра. Имеем:

$$S_{cp}(t) = S_{cp}^{\phi}(t) + \int_0^t S_{cp}^{\phi}(\tau) \cdot K(t, \tau) \cdot d\tau, \quad (7.3.9)$$

где 
$$S_{cp}^{\phi}(t) = S_{cp}(\infty) \cdot \left\{ b_1 + b_2 \cdot \exp\left(-k \cdot \frac{c_k \cdot t}{b^2}\right) + b_3 \cdot \exp\left(-2 \cdot k \cdot \frac{c_k \cdot t}{b^2}\right) \right\} -$$

обусловленная фильтрационной консолидацией осадка основания. Здесь  $b_1, b_2, b_3$  и  $k$  - см. таблицу 7.2.2.

Если приложенная к основанию нагрузка изменяется во времени, то входящую в равенство (7.3.9) осадку  $S_{cp}^{\phi}(t)$  следует определять по формуле (7.2.12).

Далее рассмотрим конкретный пример. В качестве исходных данных примем представленные в таблице 7.2.3 свойства грунта и представленную на рисунке 7.2.3 зависимость “нагрузка - время”.

Для описания свойства ползучести грунтового скелета примем составное экспоненциальное ядро ползучести вида:

$$K(t, \tau) = \delta \cdot \exp[-\delta_1 \cdot (t - \tau)] + \gamma \cdot \exp(-\gamma_1 \cdot \tau).$$

Кроме того, для определенности примем параметры ползучести

$\delta, \delta_1, \gamma$  и  $\gamma_1$  равными:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 0,05 \frac{1}{200}; \\ \delta_1 &= 0,10 \frac{1}{200}; \\ \gamma &= 0,025 \frac{1}{200}; \\ \gamma_1 &= 0,05 \frac{1}{200}. \end{aligned} \right\}.$$

Для расчета средней осадки фундамента используем равенство (7.3.9) при учете равенства (7.2.12).

Обусловленная фильтрационной консолидацией основания зависимость “осадка - время” была получена в разделе 2 (формула (7.2.14)). Подставим ее в (7.3.9) и выполним процедуру интегрирования. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} S(t) &= f_1(t) \cdot U_+(t-2) + f_2(t); \\ f_1(t) &= (407,2 + 22,8 \cdot t) \cdot \exp(-0,05 \cdot t) + 2,068 \cdot \exp(-2,422 \cdot t) - \\ &- 68,41 \cdot t - 48,8 \cdot \exp(-1,19 \cdot t) - 282,81 \cdot \exp(-0,1 \cdot t) + \\ &+ 1,034 \cdot \exp(-1,24 \cdot t) - 195,93 \cdot \exp(-2,37 \cdot t) - 35,19; \\ f_2 &= (-452,81 - 22,8) \cdot \exp(-0,05 \cdot t) + 4,55 \cdot \exp(-1,19 \cdot t) + \end{aligned} \right\} \quad (7.3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} &+1,71 \cdot \exp(-2,37 \cdot t) - 0,018 \cdot \exp(-2,42 \cdot t) + 68,41 \cdot t + 215,11 - \\ &- 0,096 \cdot \exp(-1,24 \cdot t) + 231,55 \cdot \exp(-0,10 \cdot t). \end{aligned} \right\} \quad (7.3.10)$$

На рисунке 7.3.1 представлены графические зависимости средней осадки фундамента от времени, рассчитанные по формулам (7.2.14) и (7.3.10). Первая кривая соответствует случаю основания, грунтовый скелет которого не обладает свойством ползучести.

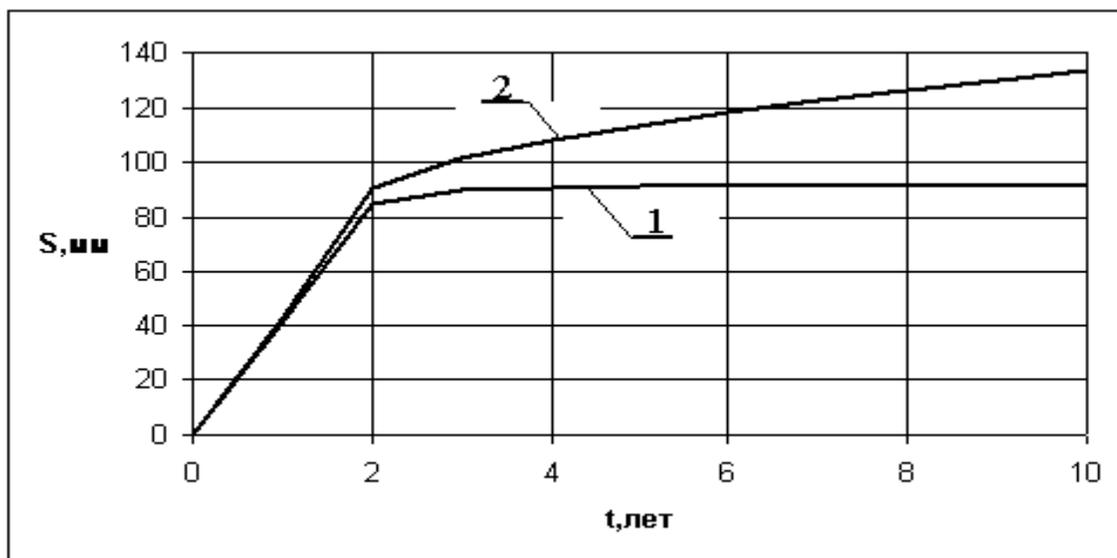


Рис. 7.3.1. Зависимости средней осадки фундамента на водонасыщенном основании от времени. 1 – осадка, рассчитанная без учета ползучести грунтового скелета основания; 2 - то же, с учетом ползучести.

Анализ кривых на рисунке 7.3.1 позволил нам сделать вывод о том, что в данном конкретном случае не учет ползучести грунтового скелета основания привел к занижению расчетной средней осадки на 42 миллиметра (или 46 %). Это свидетельствует об актуальности проблемы учета свойства ползучести при расчете оснований зданий и сооружений по деформациям.

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В рамках модели обладающего свойством ползучести водонасыщенного основания и расчетной схемы полупространства, к верхней границе которого приложена сосредоточенная постоянная во времени сила, разработан алгоритм расчета осадок основания.
2. Эти результаты обобщены на случай переменной во времени сосредоточенной силы.
3. В рамках модели обладающего свойством ползучести водонасыщенного основания и расчетной схемы полупространства, к верхней границе которого приложена распределенная постоянная во времени нагрузка, разработан алгоритм расчета средних осадок.
4. Эти результаты обобщены на случай переменной во времени распределенной нагрузки.
5. Показано, что неучет ползучести грунтового скелета при расчете оснований по деформациям приводит к занижению средних осадок фундаментов.

#### **7.4. ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ**

1. В рамках модели упругого водонасыщенного основания, теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации и расчетной схемы полупространства получено точное решение об определении напряженно - деформированного состояния основания, находящегося под воздействием приложенной к его границе вертикальной сосредоточенной силы.

2. Продемонстрирована техника решения задач определения напряженно - деформированного состояния водонасыщенных грунтовых оснований в рамках теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации.

3. Рассмотрены случаи постоянной во времени и изменяющейся во времени по произвольному закону сосредоточенной силы.

4. Получены необходимые для решения практических задач формулы для расчета осадок основания как функций времени и координаты. При этом выполнен учет постоянной и переменной во времени сосредоточенной силы.

5. В рамках модели упругого водонасыщенного основания и расчетной схемы полупространства, к верхней границе которого приложена распределенная по площади прямоугольника постоянная во времени нагрузка, разработан алгоритм расчета средних осадок загруженной области. Для этой цели предложено использовать табличный и аналитический способы расчета.

6. Полученные таким образом результаты обобщены на случай переменной во времени распределенной нагрузки.

7. В рамках модели обладающего свойством ползучести водонасыщенного основания и расчетной схемы полупространства, к верхней границе которого приложена сосредоточенная постоянная во времени сила, разработан алгоритм расчета осадок основания.

8. Эти результаты обобщены на случай переменной во времени сосредоточенной силы.

9. В рамках модели обладающего свойством ползучести водонасыщенного основания и расчетной схемы полупространства, к верхней границе которого приложена распределенная постоянная во времени распределенная нагрузка, предложены формулы для расчета средних осадок загруженной области.

10. Эти результаты обобщены на случай переменной во времени распределенной нагрузки.

11. Показано, что не учет ползучести грунтового скелета при расчете оснований по деформациям приводит к занижению средних осадок оснований фундаментов.