Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

Національний технічний університет
ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
1899

Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус, О.Д. Станіна

Методи оптимізації та дослідження операцій

навчальний наочний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

УДК 517.2
К 70

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний наочний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 124 Системний аналіз (протокол № 2 від 14.02.2025)*

Рецензенти:
Ю. П. Синиціна – кант. техн. наук, доц. (Дніпровський державний університет внутрішніх справ);
О.Д. Кічмаренко – д-р. фіз.-мат. наук, доц. (Одеський національний університет імені І.І. Мечникова).

Коряшкіна Л.С.

К 70 Методи оптимізації та дослідження операцій [Електронний ресурс] : навч. наоч. посіб. / Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус, О.Д. Станіна; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025 – 275 с.

У навчальному наочному посібнику розглянуто основні розділи дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій», що входить до обов’язкових у програмі підготовки здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 124 Системний аналіз, галузі знань 12 Інформаційні технології.

УДК 517.2

Зміст

Вступ	
Тема 1. Вступ до дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій»	6
Тема 2. Задачі лінійного програмування	21
Тема 3. Симплекс-метод	45
Тема 4. Метод штучного базису	69
Тема 5. Двоїстість у лінійному програмуванні	87
Тема 6. Задача лінійного програмування транспортного типу	106
Тема 7. Цілочислові задачі	133
Тема 8. Задача комівояжера. Метод гілок і меж	143
Тема 9. Динамічне програмування. Принцип оптимальності Беллмана	161
Тема 10. Задачі нелінійної оптимізації	177
Тема 11. Методи одновимірної умовної оптимізації. Градієнтні методи багатовимірної безумовної оптимізації	197
Тема 12. Задачі управління запасами	216
Тема 13. Задачі мережевого планування та управління	237
Тема 14. Системи масового обслуговування	257
Список рекомендованих джерел	272

Вступ

Дисципліна **Методи оптимізації та дослідження операцій** має практичне спрямування та застосовується для ефективного управління системами різноманітного характеру, які можна описати за допомогою математичних моделей. Саме розгляду деяких класичних задач (їх математичних моделей і методів розв'язування) присвячено це видання.

Теми в тексті навчального наочного посібника відповідають робочій програмі дисципліни «Методи оптимізації і дослідження операцій», яка розроблена в межах освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів спеціальності 124 Системний аналіз.

Посібник також можна використовувати в підготовці бакалаврів спеціальностей 121 Програмна інженерія, 122 Комп'ютерні науки, 275 Транспортні технології, які опановують дисципліну «Дослідження операцій».

Після засвоєння матеріалу дисципліни, здобувач має показати такі **результати навчання**:

– вміти використовувати стандартні схеми для розв’язування комбінаторних та логічних задач, що сформульовані природною мовою; застосовувати класичні алгоритми для перевірки властивостей та класифікації об’єктів, множин, відношень, графів, груп, кілець, решіток, булевих функцій тощо

– знати основни теорії оптимізації, оптимального керування, теорії прийняття рішень, вміти застосовувати їх на практиці для розв’язування прикладних задач управління і проектування складних систем;

– знати основни математичного моделювання, вміти будувати та досліджувати математичні моделі природних, техногенних, економічних і соціальних об’єктів та процесів.

Тема 1. Вступ до дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій»


Кожного дня ми вирішуємо задачу вибору лише одного варіанту з ряду можливих

Дослідження операцій

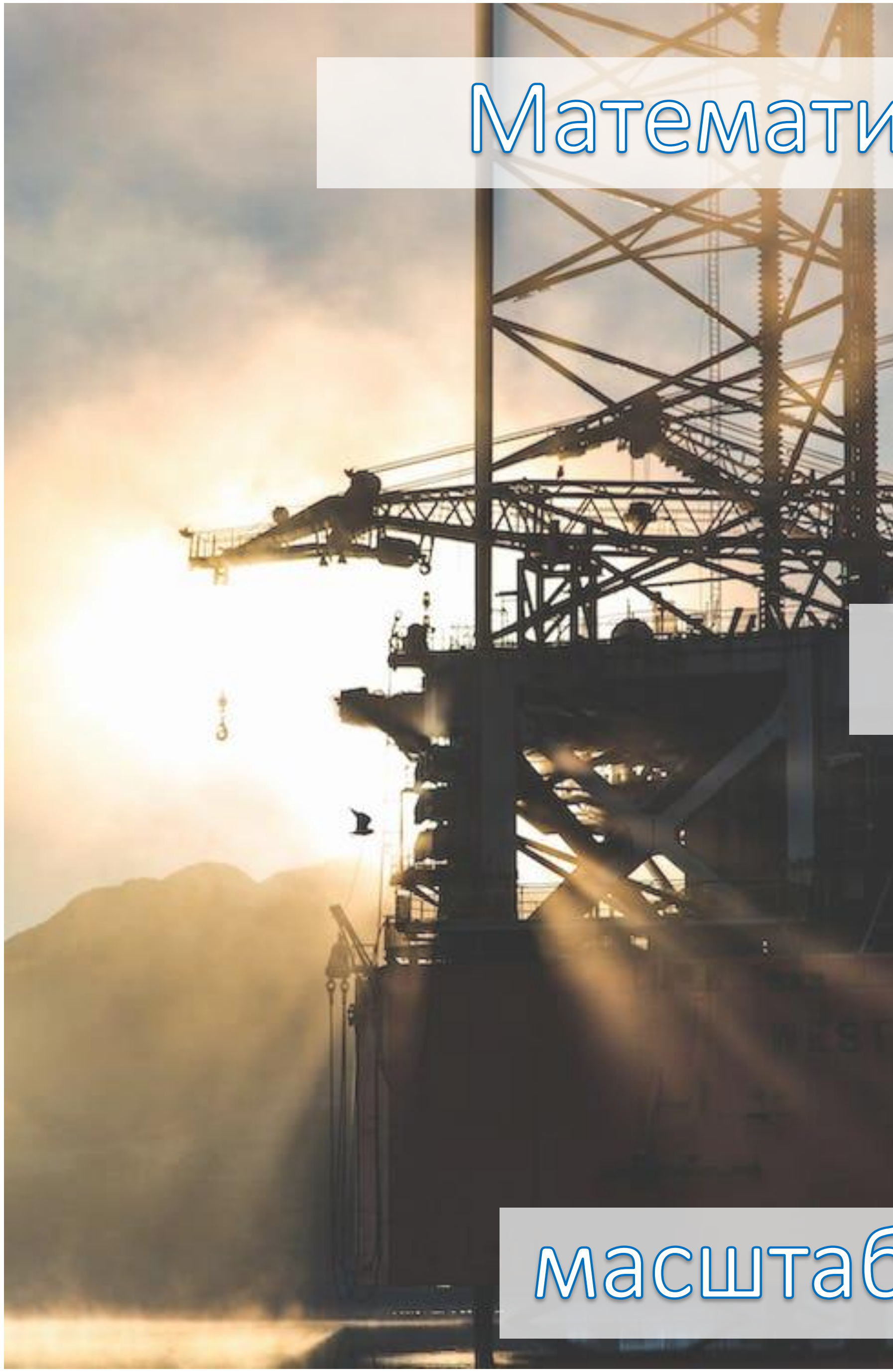
- це застосування математичних, кількісних методів для обґрунтування рішень у всіх галузях цілеспрямованої людської діяльності

Операція

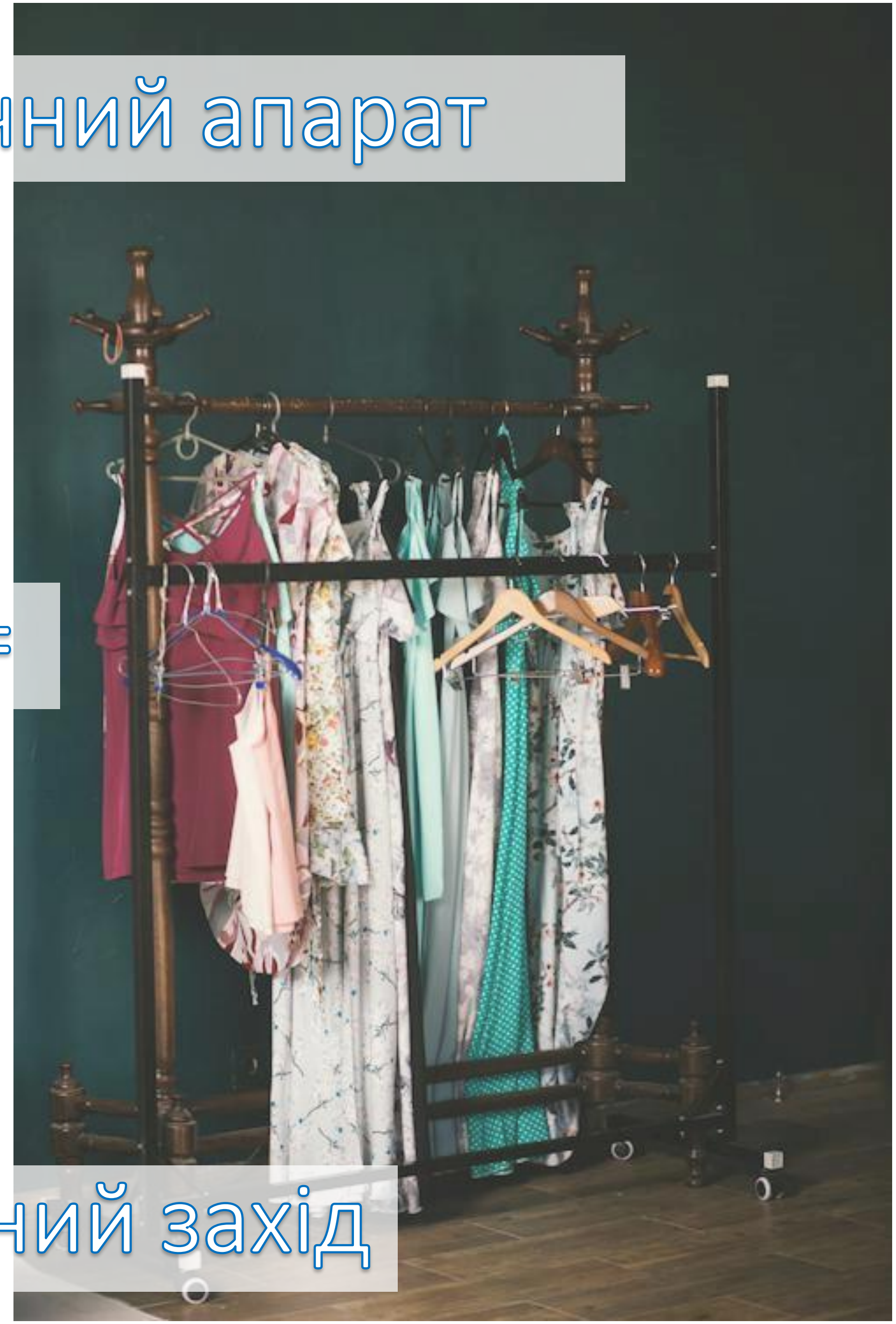
- це будь-який захід (система дій), об'єднаний єдиним задумом і спрямований на досягнення поставленої мети

Операція є завжди ***керованим*** заходом

Математичний апарат

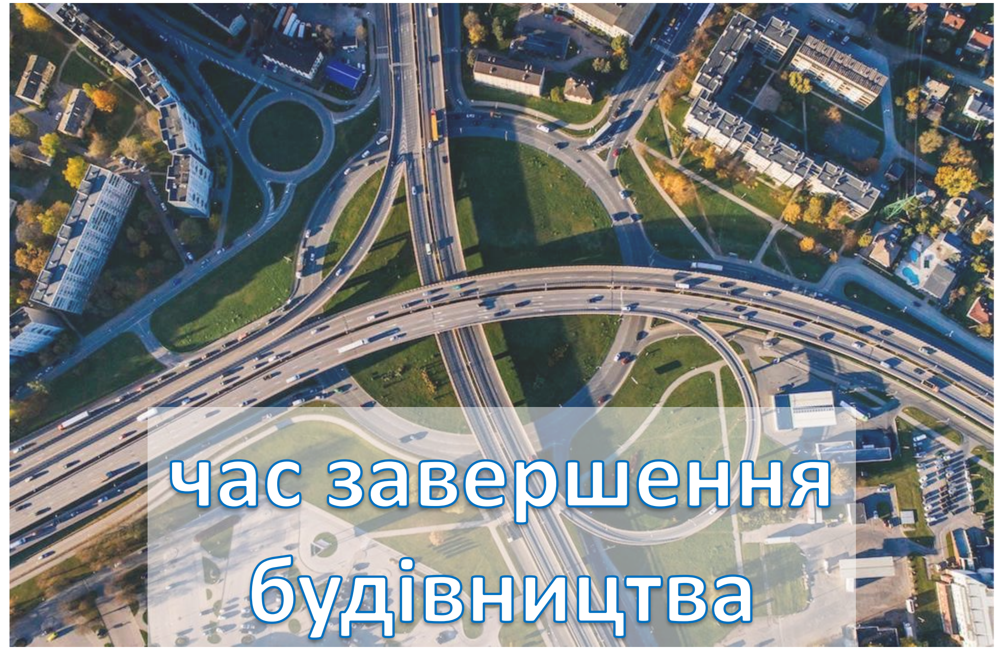


=

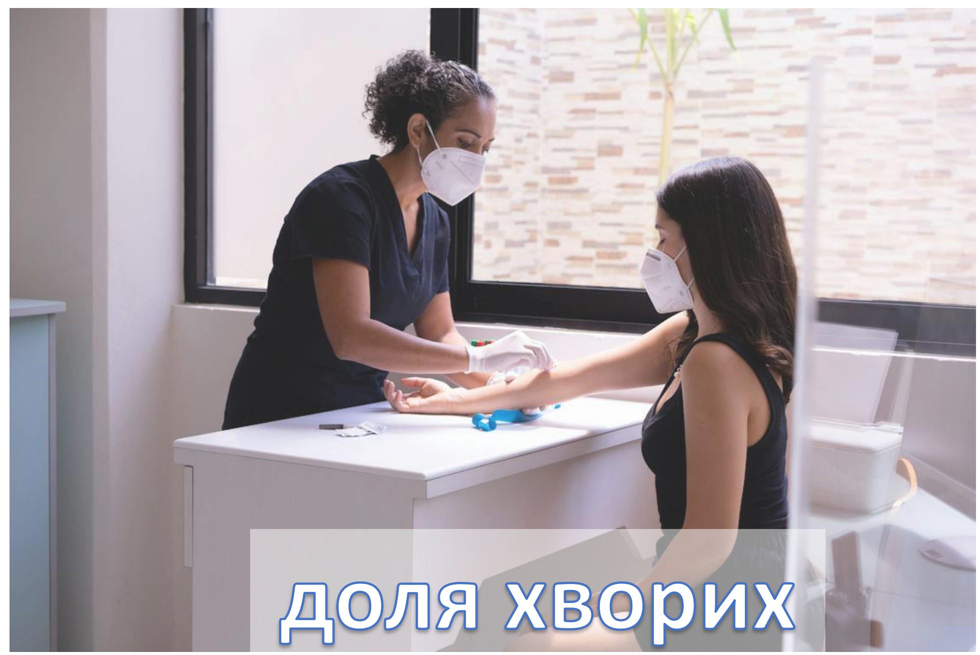


масштабний захід


витрати на перевезення
сировини


час завершення
будівництва


прибуток


доля хворих

Рішення

- це будь-який певний вибір параметрів, який залежить від нас

Оптимальне рішення (розв'язок)

- це рішення, яке за тими чи іншими ознаками є кращим у порівнянні з іншими

Множина можливих рішень

- це умови, які зафіксовані від самого початку і не можуть бути порушені

Сукупність елементів розв'язку

$$x \in X$$

Множна можливих розв'язків

Показник ефективності (цільова функція)

- це якісний критерій, за допомогою якого порівнюють між собою різноманітні розв'язки

цільова функція

$$F \to max$$

або

$$F \to min$$

Математична модель

- це спосіб опису реальної життєвої ситуації за допомогою математичної мови

Задачі дослідження операцій

Прямі

(Що буде, коли x=...)

Зворотні

(Як обрати x, аби ...)

Методологія

Основні етапи вирішення реальних задач за допомогою дослідження операцій:

- Визначення цільової функції
- Визначення допустимої множини рішень
- Безпосередньо постановка оптимізаційної задачі (математична модель)
- Вибір найкращого методу розв’язування задачі
- Реалізація та аналіз результатів

Постановка задачі

Обмеження може і не бути

$$f(x) \to \min\,(\max),\ x \in \Omega,$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N:\quad g_i(x) = 0,\quad 1 \leqslant i \leqslant s, s < N\}.$$

Розв'язок може бути глобальний чи локальний

$f(x)$ – цільова функція

$x \in R^N$ – шукана змінна,

$g_i(x)$ – функція обмежень

Приклад задачі

Студент має борги з дисципліни: **5** домашніх (ДР) та **3** практичних роботи (ПР). За кожну виконану ДР він отримує **6** балів, а за кожну виконану ПР – **10**.

Скільки робіт кожного виду повинен зробити студент, щоб отримати максимальну кількість балів до залікової неділі, якщо всього він може виконати не більше 6 робіт?

Розв'язок задачі

Студент має борги з дисципліни: **5** домашніх (ДР) та **3** практичних роботи (ПР). За кожну виконану ДР він отримує **6** балів, а за кожну виконану ПР – **10**. Скільки робіт кожного виду повинен зробити студент, щоб отримати максимальну кількість балів до залікової неділі, якщо всього він може виконати **не більше 6** робіт?

x_1 – кількість ДР, x_2 - кількість ПР

Цільова функція

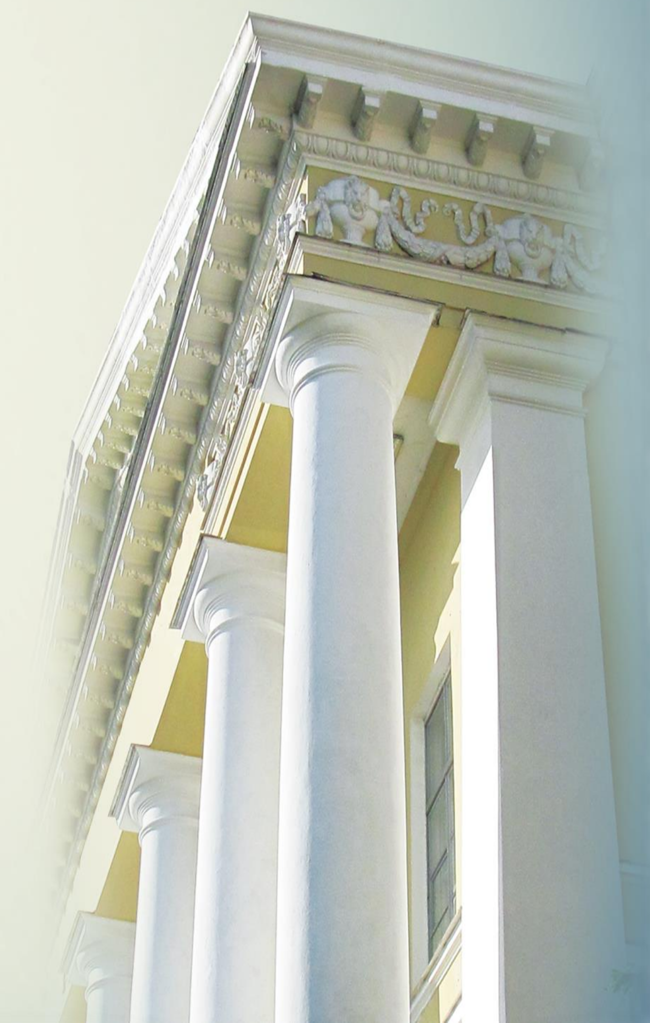
$$6x_1 + 10x_2 \rightarrow max$$

Обмеження

$$\begin{cases} x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{ціле} \end{cases}$$

Відповідь: 3 ПР та 3 ДР

Тема 2. Задачі лінійного програмування



Математична модель задачі лінійного програмування (ЛП)

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n + c \rightarrow opt \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n \qquad (3)$$

(1) – цільова функція, (2) – обмеження, (3) – умови невід'ємності змінних.

Поняття оптимального розв'язку

Точка $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ називається ***допустимою точкою*** задачі ЛП, якщо вона задовольняє обмеженням (2), (3).

Сукупність всіх допустимих точок утворює ***множину (область) допустимих розв'язків*** (ОДР) задачі лінійного програмування.

Точка $x^* = (x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*)$ з ОДР називається ***оптимальним розв'язком задачі максимізації***, якщо $L(x^*) \geq L(x)$, тобто

$$c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \cdots + c_n x_n^* \geq c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n.$$

Точка $x^* = (x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*)$ з ОДР називається ***оптимальним розв'язком задачі мінімізації***, якщо $L(x^*) \leq L(x)$, тобто

$$c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \cdots + c_n x_n^* \leq c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n.$$

Геометрична інтерпретація задачі ЛП

Опуклою лінійною комбінацією елементів $X_1,\ldots,X_k$ з простору R^n називають елемент X вигляду

$$X = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k,$$

де всі $\lambda_i \geq 0$ і $\lambda_1+\ldots+\lambda_k = 1$.

Множина $M \subset R^n$ називається ***опуклою***, якщо $M = \varnothing$ і разом з будь-якими двома елементами X_1 та X_2 містить також і їхню довільну опуклу лінійну комбінацію.

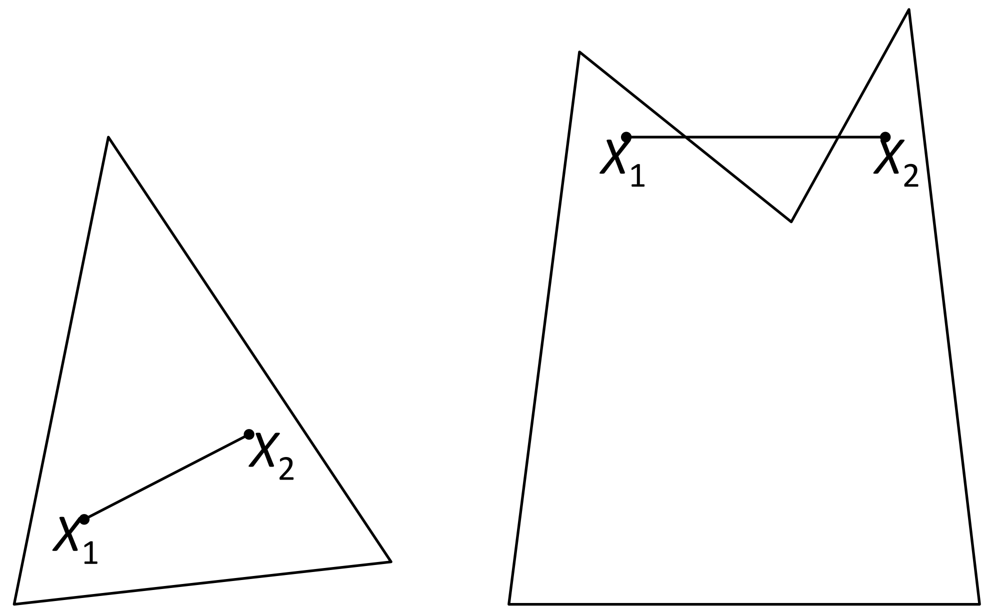


Рис. 1. Опукла і неопукла множини з R^2

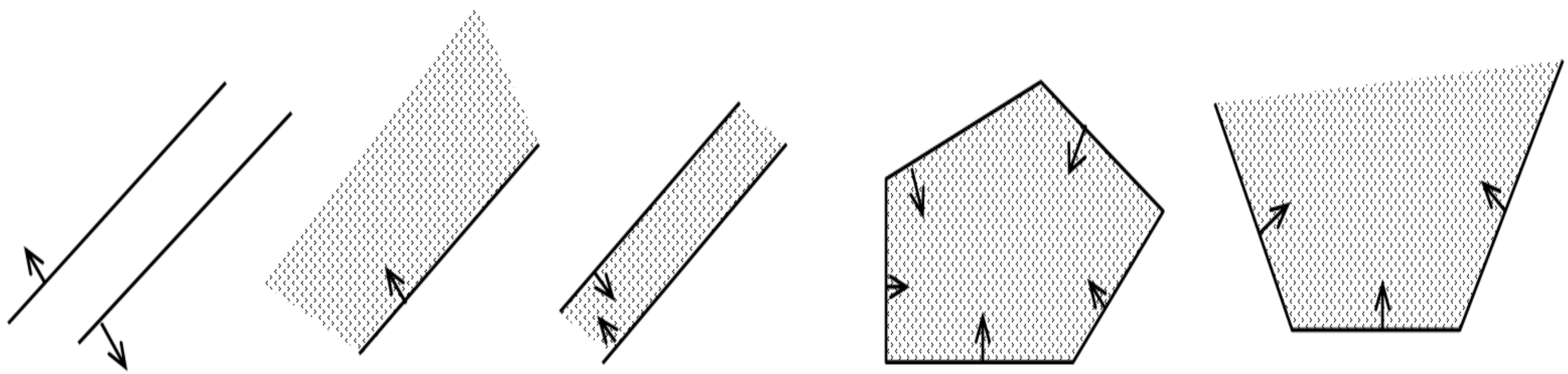
Геометрична інтерпретація: ***опуклість множини*** $M \subset R^n$ означає, що разом з будь-якими двома точками вона містить і відрізок, що їх з’єднує (рис. 1).

Геометрична інтерпретація задачі ЛП

Множина розв'язків системи обмежень (2), (3) та множина розв'язків задачі лінійного програмування (1) – (3) є опуклою множиною.

Обмежену множину розв'язків системи обмежень ЗЛП називають ***опуклим багатогранником***, а необмежену – ***опуклою багатогранною множиною***.

В R^2 – це опуклі багатокутники або опуклі багатокутні множини (рис. 2).



а) б) в) д) е)

Рис. 2. Опуклі багатокутники та багатокутні множини

Геометрична інтерпретація задачі ЛП

Точку опуклої множини, що не є опуклою лінійною комбінацією ніяких інших її точок, називають ***кутовою*** або ***екстремальною*** (або ще *вершиною*).

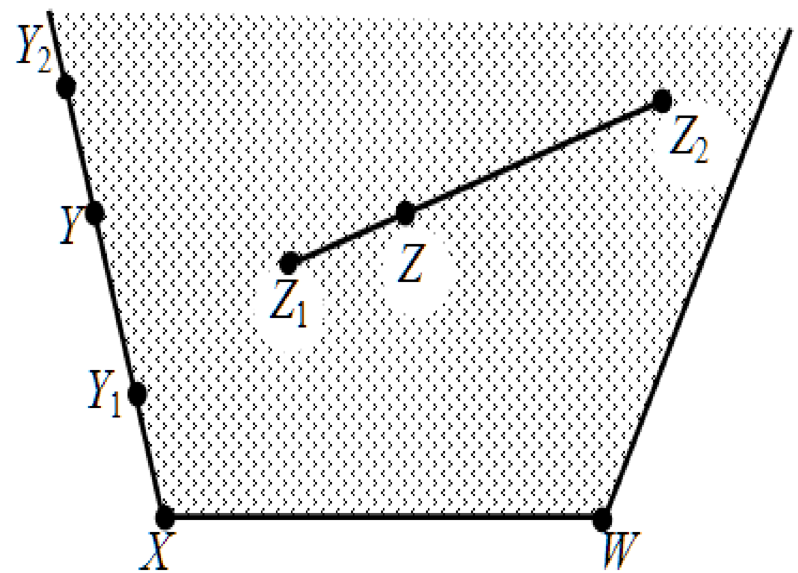


Рис. 3. Вершини, граничні і допустимі точки опуклої множини

На рис. 3 точки X і W є її вершинами (кутові, екстремальні точки), а точки Y та Z – ні.

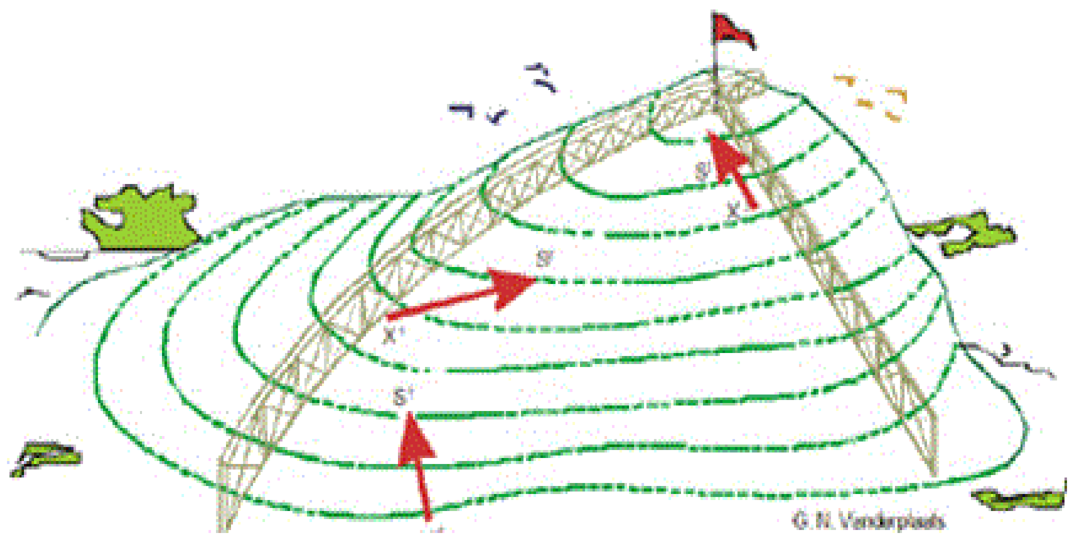
Геометрична інтерпретація задачі ЛП

Лінією рівня функції $f(x_1, x_2)$ називається множина всіх точок простору R^2, в яких функція набуває деякого сталого значення.

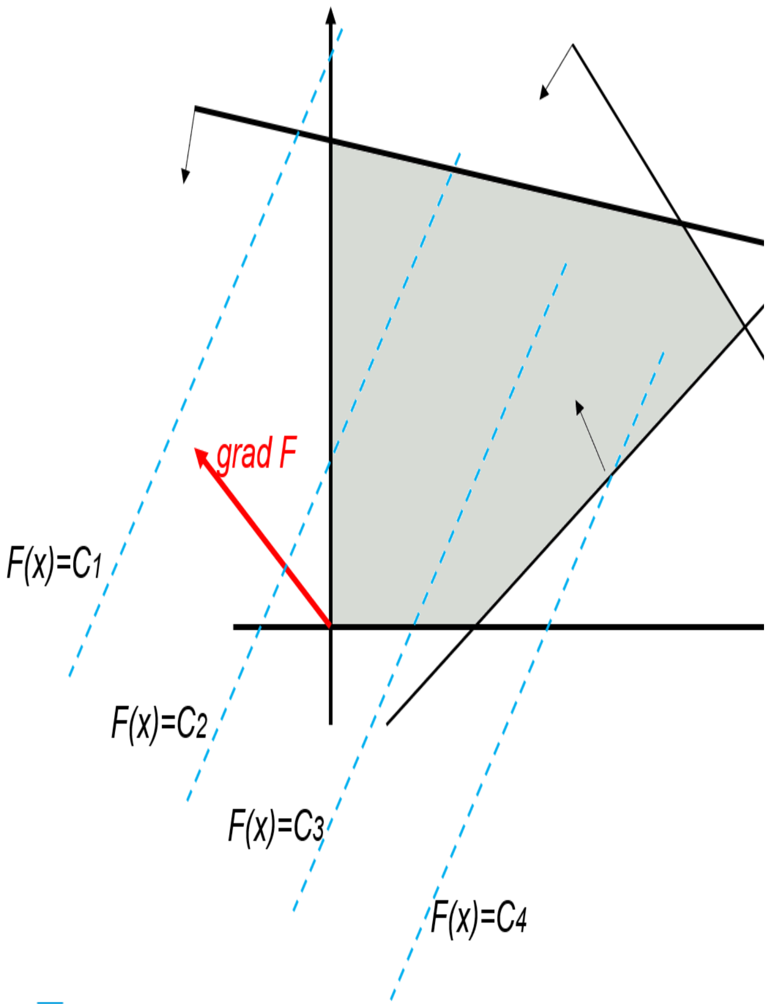
Градієнтом функції $f(x_1, x_2)$ називається вектор, що складається з частинних похідних функції. Тобто вектор $grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$.

Основна властивість градієнта - він вказує **напрям найшвидшого зростання функції**.

В напрямку антиградієнта ($-grad\ f$) функція найскоріше спадає.



Властивості задачі ЛП



1. Множиною допустимих розв'язків задачі лінійного програмування завжди є опуклий багатогранник, обмежений або не обмежений (багатогранна множина).

2. Лінії рівня цільової функції – прямі; градієнт функції – вектор, перпендикулярний до її ліній рівня.

3. Якщо задача ЛП має розв’язок, то хоча б один з них перебуває у кутовій точці.

4. Задача ЛП немає розв’язків у двох випадках: 1) множина допустимих розв’язків є порожньою; 2) цільова функція необмежена на допустимій множині

Геометричний метод розв'язування задачі ЛП

Застосовується до задач лінійного програмування з ***двома змінними*** ($\boldsymbol{n = 2}$) або до тих, що можуть бути зведені до задачі з двома змінними, тобто система обмежень якої містить *n* невідомих і *m* лінійно незалежних рівнянь, причому $n - m \leq 2$.

$$c_1x_1 + c_2x_2 \to max, \tag{4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Алгоритм графічного методу розв'язання задачі ЛП

1. Будуємо множину допустимих розв'язків задачі ЛП, враховуючи обмеження (5) задачі ЛП (4)-(5). Якщо ОДР виявилася порожньою, робимо висновок про те, що задача ЛП розв'язків не має, інакше переходимо на крок 2.

2. Будуємо $c(c_1, c_2)$ – вектор найскорішого зростання цільової функції.

3. Будуємо довільну лінію рівня $L(x) = L_0$, перпендикулярну до вектора *c* всередині ОДР.

4. При розв’язанні задачі на максимум переміщуємо лінію рівня $L(x) = L_0$ в напрямку *c* до тих пір, поки вона не буде дотикатися множини допустимих розв'язків в її крайньому положенні. У випадку розв'язання задачі на мінімум лінію рівня $L(x) = L_0$ слід переміщувати в напрямку антиградієнта.

5. Визначаємо оптимальний план $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ і екстремальне значення цільової функції $L_* = L(x^*)$.

Приклад розв’язування задачі ЛП

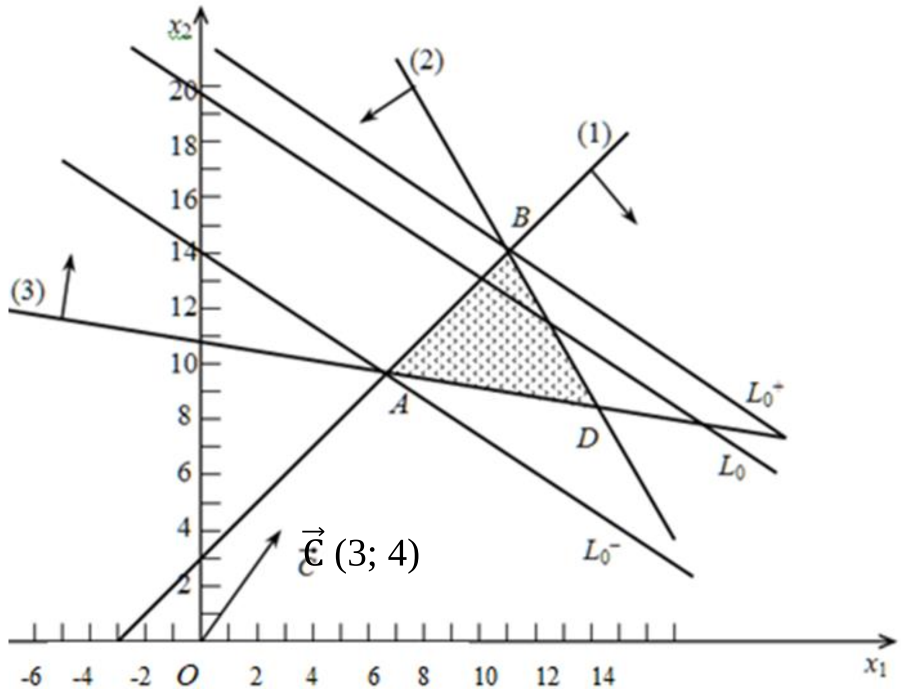
Знайти значення змінних x_1, x_2, за яких функція

$$L(x) = 3x_1 + 4x_2$$

приймає максимальне значення за умов:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 97, \\ x_1 + 7x_2 \geq 74, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Максимальне значення цільової функції в точці *B*. Її координати визначають як перетин прямих (1) і (2):

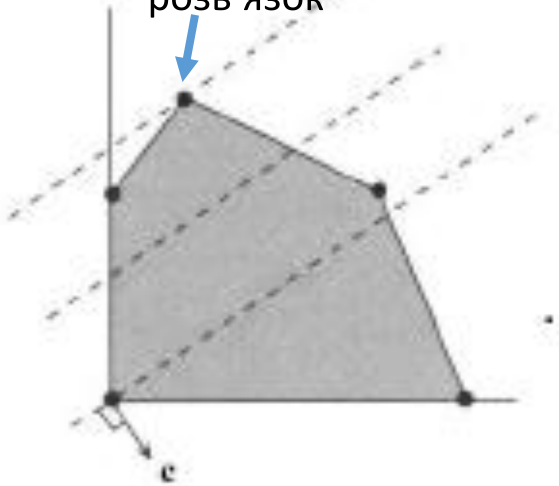
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 = 97, \end{cases}$$

$x_1 = 11$, $x_2 = 14$. $L_{max} = 3 \cdot 11 + 4 \cdot 14 = 89$.

Окремі випадки графічного методу

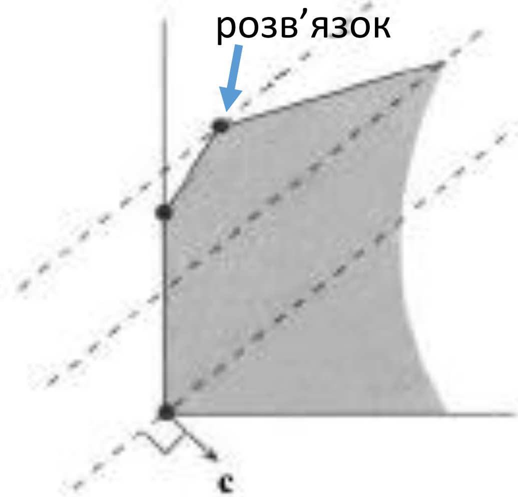
Задача має єдиний розв’язок

Єдиний оптимальний розв’язок



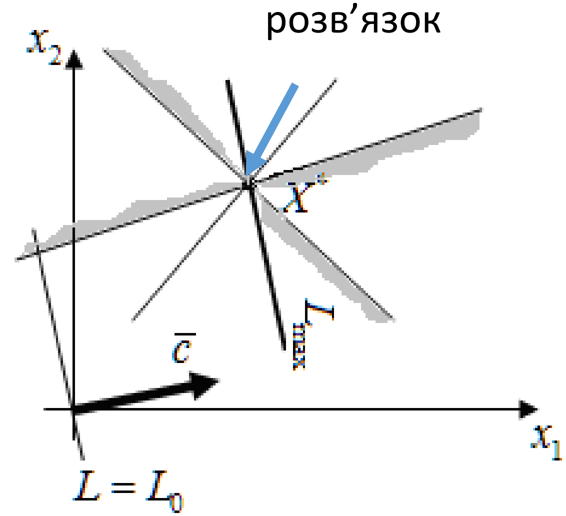
a) ОДР обмежена (задача мінімізації)

Єдиний оптимальний розв’язок



b) ОДР необмежена (задача мінімізації)

Єдиний оптимальний розв’язок



c) ОДР вироджена (задача максимізації та мінімізації)

Окремі випадки графічного методу

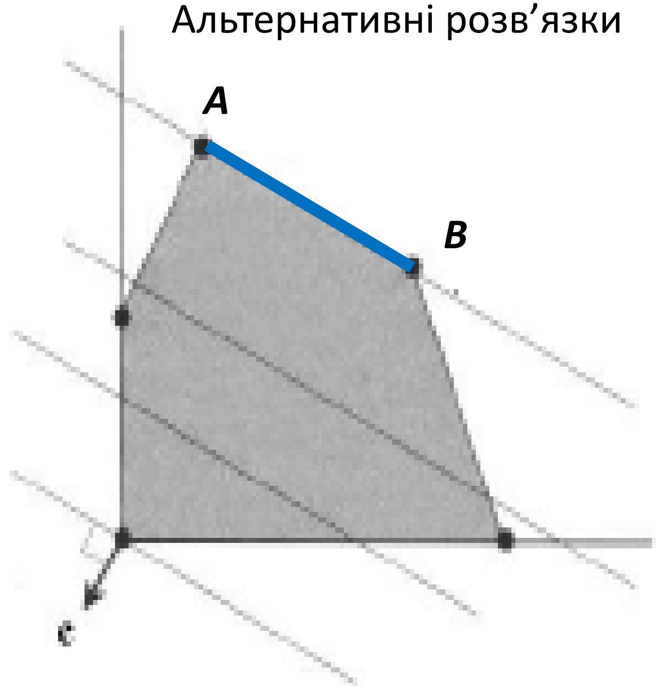
Задача має нескінченну множину розв'язків

(задача мінімізації)

a) ОДР обмежена, оптимальні розв'язки – відрізок *AB*;

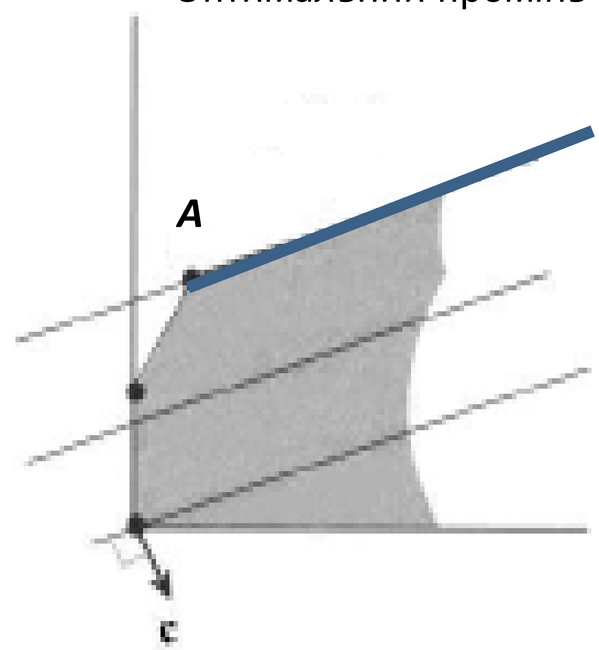
b) ОДР необмежена, оптимальні розв'язки – промінь з початком у точці *A*.

Альтернативні розв'язки



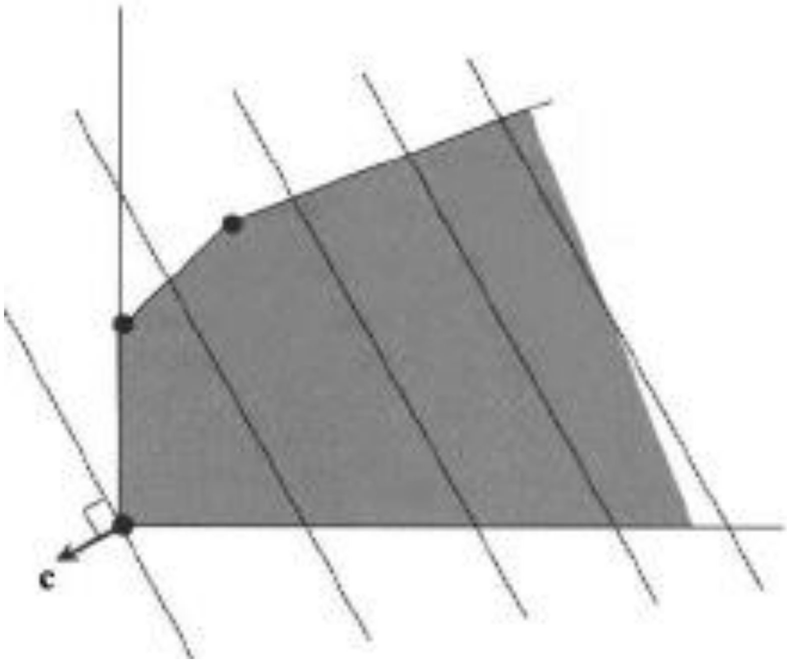
a)

Оптимальний промінь

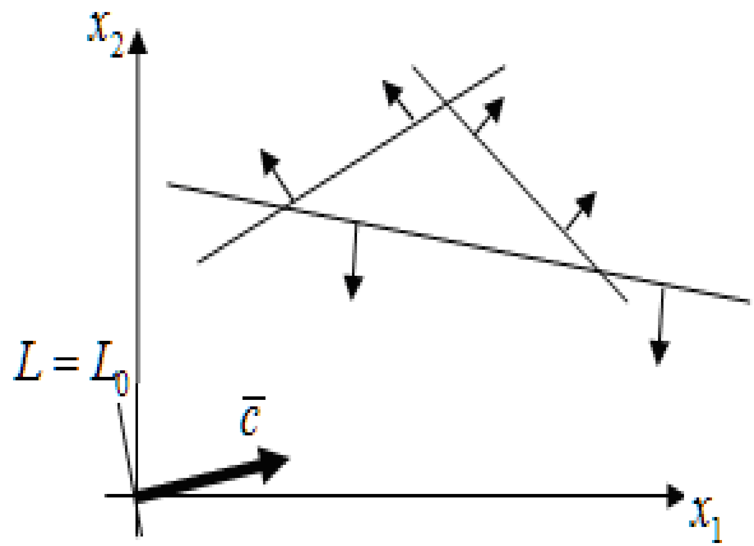


b)

Окремі випадки графічного методу



a) Функція не обмежена
на ОДР (задача мінімізації)



b) ОДР є порожньою множиною,
обмеження не сумісні

Загальна постановка задачі ЛП

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n + c \rightarrow opt \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n \qquad (3)$$

(1) – цільова функція, може бути max або min

(2) – обмеження, можуть бути ≤, ≥, =

(3) – умови невід’ємності, можуть бути визначені не для всіх змінних.

Стандартна (симетрична) форма задачі ЛП

задовольняє таким умовам:

- цільова функція спрямована на ***максимум***;
- система обмежень складається з нерівностей виду $\le$;
- на змінні накладена умова невід’ємності

або:

- цільова функція спрямована на ***мінімум***;
- система обмежень складається з нерівностей виду $\ge$;
- на змінні накладена умова невід’ємності.

Стандартна форма задачі лінійного програмування

$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow max$	$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow min$
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n$	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n$

Приведення задачі ЛП до стандартної форми

1. Для того, щоб змінити знак обмеження, помножуємо його на (-1).

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \quad \Rightarrow \quad -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \ge -b_i$$

2. Якщо цільова функція $L(x) \to max$, то $-L(x) \to min.$

Задача у загальній формі	Задача у стандартній формі
$L(x) = x_1 + 2x_2 - 1.5x_3 \to max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \ge 10, \\ 3x_1 + 2x_2 - 1.5x_3 \le 15, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 \le 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$	$L(x) = x_1 + 2x_2 - 1.5x_3 \to max$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 5x_3 \le -10, \\ 3x_1 + 2x_2 - 1.5x_3 \le 15, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 \le 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$

Канонічна форма задачі ЛП

- цільова функція спрямована на ***максимум***;
- система обмежень складається тільки ***з рівностей*** (=);
- коефіцієнти правої частини обмежень $b_i \geq 0,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ m$;
- на всі змінні накладена умова невід'ємності.

$$L(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \rightarrow max \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (5)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n \quad (6)$$

Приведення задачі ЛП до канонічної форми форми

1. Для того, щоб змінити знак коефіцієнта обмеження, помножуємо його на (-1). Якщо в обмеженні $b_i \leq 0,\ mo\ -b_i \geq 0$,

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq (\geq) b_i$, тоді $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \geq (\leq)(-b_i)$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 5x_3 &\leq -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq -10 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 &\geq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 10 \end{aligned}$$

2. Якщо цільова функція $L(x) \to min$, то $-L(x) \to max$

$L(x) = x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to min$ $\qquad$ $L(x) = -x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to max$

Приведення задачі ЛП до канонічної форми форми

3. Для того, щоб перетворити обмеження у вигляді нерівності на рівність, необхідно:

- Якщо обмеження ≤, додати до нього додаткову додатну змінну;
- Якщо обмеження ≥, відняти від нього додаткову додатну змінну

  (свою для кожного обмеження).

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$, то $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j$, то $a_{\mathrm{j}1}x_1 + a_{\mathrm{j}2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - x_{n+j} = b_j$

4. Якщо для змінної x_j не задано умови невід'ємності, замінюємо її різницею двох додатних змінних x_j' та x_j'', $x_j = x_j' - x_j''$.

$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4$, $x_1, x_3 \geq 0$, x_2 - вільна змінна. Замінюємо $x_2 = x_2' - x_2''$,

$$x_1 + 2\,x_2' - 2x_2'' - 5x_3 = 4$$

Приведення задачі ЛП до канонічної форми

$$L(x) = x_1 + 2x_2 - 5x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 15, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 \geq 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1{,}2$$

$$L(x) = x_1 + 2x_2 - 5x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_6 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 4{,}5{,}6{,}7$$

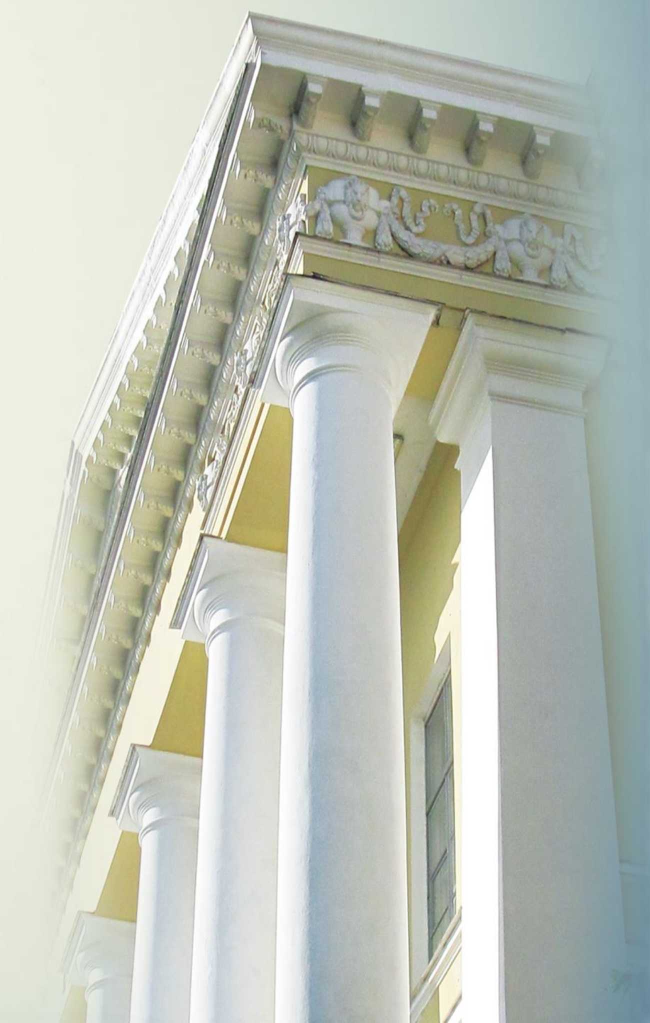
$$x_3 = x_3' - x_3''$$

$$L(x) = x_1 + 2x_2 - 5x_3' + 5x_3'' \rightarrow max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3\,x_3' - 3x_3'' - x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3'' + x_5 = 15, \\ 2x_1 - x_2 - 4\,x_3' + 4x_3'' - x_6 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3' - x_3'' + x_7 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 7$$

Тема 3. Симплекс-метод



Задача лінійного програмування

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow max \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (5)$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \; 2, \ldots, \; n \quad (6)$$

Допустимий розв'язок ЗЛП ***X* = (*x*$_1$, *x*$_2$, … *x*$_n$)** – це невід'ємний розв'язок системи рівнянь (5).

Коли ***n* > *m*** (5) система має нескінченну множину розв'язків

Введемо сукупність векторів

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

і запишемо систему (5) у вигляді:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b \quad (5')$$

Поняття опорного розв’язку задачі ЛП

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \quad (4)$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b \quad (5')$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \; 2, \ldots, \; n \qquad (6)$$

Опорним розв’язком (планом) задачі (4) – (6) називається допустимий вектор ***X* = (*x*$_1$, *x*$_2$, … *x*$_n$)** , ненульовим компонентам якого відповідає система *m лінійно* незалежних векторів з n векторів обмежень $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Якщо ненульових компонент ***m,*** то опорний розв’язок називається ***невиродженим.***

У ***виродженому*** опорному плані кількість ненульових елементів менша за ***m.***

В опорному плані ***m*** ненульових компонент, що відповідають системі лінійно незалежних векторів обмежень, називають ***базисними****, решту* ***(n – m)*** нульових елементів - ***небазисними.***

Кожному опорному допустимому розв’язку відповідає кутова точка множини допустимих розв’язків.

Приклад: $F = 2x_1 + 3x_2 \to max$

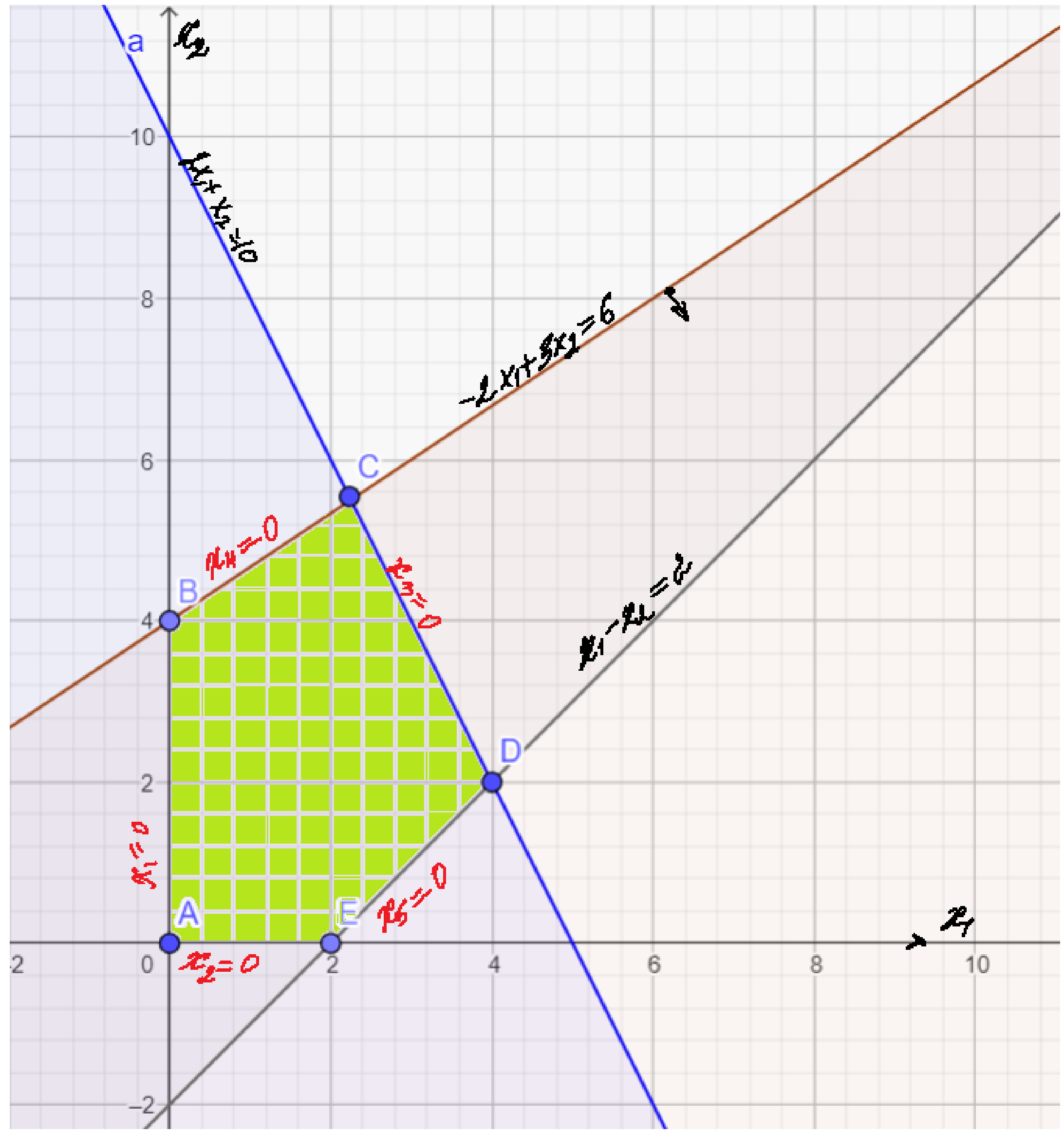
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Канонічна форма системи обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Координати вершин допустимого многогранника у 5-вимірному просторі:

A (0; 0; **10; 12; 2)**
B (0; **4; 6;** 0; **4)**
C (2.23; 5.54; 0; 0; **5.31)** **- оптимальний розв'язок**
D (4; 2; 0; **14;** 0)
E (2; 0; **6; 16;** 0)



Симплекс метод

Ідея симплекс-методу – послідовний перехід від одного допустимого базисного розв’язку до іншого з послідовним покращенням цільової функції.

Схема методу

1. Складають першу симплексну таблицю і отримують початковий допустимий план.

2. Оцінюють складений план на оптимальність. Якщо отриманий план оптимальний – задачу розв’язано: п.5, кінець алгоритму; інакше: п.3.

3. Перехід до нового допустимого плану.

4. Перехід до п.2.

5. Кінець алгоритму.

Заповнення початкової симплекс-таблиці

а) у стовпчик «$X_{баз}$» записують базисні змінні;

б) стовпчик «$C_{баз}$» становлять коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

в) у стовпчик «B» записують праві частини обмежень задачі;

г) над змінними $x_1, x_2, \ldots x_n$ надписують коефіцієнти цільової функції c_j при відповідних змінних;

ґ) у стовпчики $x_1, x_2, \ldots x_n$ заносять коефіцієнти обмежень при цих змінних;

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	c_1	c_2	…	c_n	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	…	x_n	
$c_{баз1}$	$x_{баз1}$	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	
$c_{баз2}$	$x_{баз2}$	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	
$c_{баз\ m}$	$x_{баз\ m}$	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	
	F	Δ_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	

д) заповнюють рядок F за таким правилом:

$\Delta_0 = c_{баз1}\, b_1 + c_{баз2}\, b_2 + \ldots + c_{баз\ m}\, b_m$, $\Delta_j = c_{баз1}\, a_{1j} + c_{баз2}\, a_{2j} + \ldots + c_{баз\ m}\, a_{mj} - c_j$, $j = 1,2,\ldots n$

Табличний симплекс-метод

Базисними будуть змінні, яким відповідають одиничні стовпці, тобто ті, що містять лише одну одиницю.

Базисних змінних має бути стільки, скільки обмежень у задачі.

Допустимий розв'язок $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ за таблицею записується таким чином:

– усі базисні змінні дорівнюють відповідним значенням у стовпці B,
– небазисні змінні дорівнюють 0.

Приклад заповнення початкової симплекс-таблиці

$C_{баз}$	$X_{баз}$	B	c_1	c_2	…	c_n	0	0	…		0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…		x_{n+m}	
0	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	a_{1n}	…		a_{1n}	
0	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…		a_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	
0	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…		1	
	F	0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…		0	

$X_0 = (0, 0, \ldots 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $F(X_0) = 0$

Оцінка складеного плану на оптимальність

1) Якщо у симплекс-таблиці усі $\Delta_j \geq 0$, $j = 1,2,\ldots n$ – отриманий розв’язок є оптимальним для задачі максимізації.

2) Серед чисел Δ_j , $j = 1,2,\ldots n$ знаходяться від'ємні та у відповідному до деякого числа стовпчику немає жодного додатного – тоді задача розв'язків не має;

3) Якщо у симплекс-таблиці серед значень Δ_j , $j = 1,2,\ldots n$ є від’ємні та в кожному відповідному до них стовпчику є хоча б одне додатне число. Це означає, що розв’язок не є оптимальним, опорний план можна покращити, в цьому разі переходять до нової симплексної таблиці.

Перехід до нового допустимого плану

Здійснюється заміною існуючого базису таким чином, щоб збільшити значення цільової функції.

1. Заміна базису, при цьому деяка змінна вилучається з базису, а замість неї вводиться інша.
2. Перерахунок елементів таблиці.

Знаходження нового базису

а) **визначення змінної, що вводиться у новий базис:** серед чисел *F*-рядка: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \quad \Delta_n$ визначають найменше (найбільше за модулем) від'ємне. Стовпчик, в якому це число знаходиться, називається *ведучим* (*розв’язувальним*), а відповідна йому змінна вводиться у новий базис. Припустимо, це стовпчик ***s***

$C_{баз}$	$X_{баз}$	B	c_1 x_1	c_2 x_2	… …	c_s x_s	… …	c_n x_n	0 x_{n+1}	0 x_{n+2}	… …	0 x_{n+m}	Симплекс-відношення
$c_{баз1}$	$x_{баз1}$	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	1	a_{1n}	…	a_{1n}	
$c_{баз2}$	$x_{баз2}$	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2s}	…	a_{2n}	0	1	…	a_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$c_{базr}$	$x_{базr}$	b_r	a_{r1}	a_{r2}	…	a_{rs}	…	a_{rn}	0	…	1	a_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$c_{базm}$	$x_{базm}$	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{ms}	…	a_{mn}	0	0	…	1	
	F	Δ_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_s	…	Δ_n	0	0	…	0	

Ведучий стовпчик

$$\Delta_s = \min_{\Delta_j < 0} \Delta_j$$

Знаходження нового базису

б) **визначення змінної, що вилучається з базису:** обчислюють симплексне відношення $\frac{b_i}{a_{is}}$ для додатних елементів ведучого стовпчика. Серед них знаходять найменше. Відповідний рядок називається ведучим (розв’язувальним), а відповідна змінна вилучається з базису. Позначимо цей рядок *r*.

$C_{баз}$	$X_{баз}$	B	c_1	…	c_s	…	c_n	0	0	…	0	Симплекс-відношення
			x_1	…	x_s	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	
$c_{баз1}$	$x_{баз1}$	b_1	a_{11}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	1	a_{1n}	…	a_{1n}	$\frac{b_1}{a_{1s}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$c_{базr}$	$x_{базr}$	b_r	a_{r1}	…	a_{rs}	…	a_{rn}	0	…	1	a_{2n}	$\frac{b_r}{a_{rs}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$c_{баз\,m}$	$x_{баз\,m}$	b_m	a_{m1}	…	a_{ms}	…	a_{mn}	0	0	…	1	$\frac{b_m}{a_{ms}}$
	F	Δ_0	Δ_1	…	Δ_s	…	Δ_n	0	0	…	0	

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}}$$

Ведучий рядок

Знаходження нового базису

На перетині ведучого рядка і ведучого стовпчика знаходиться **ведучий (розв'зувальний) елемент**, відносно якого виконують перерахунок елементів нової симплексної таблиці.

$C_{баз}$	$X_{баз}$	B	c_1 x_1	… …	c_s x_s	… …	c_n x_n	0 x_{n+1}	0 x_{n+2}	… …	0 x_{n+m}	Симплекс-відношення
$c_{баз1}$	$x_{баз1}$	b_1	a_{11}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	1	a_{1n}	…	a_{1n}	$\frac{b_1}{a_{1s}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$c_{базr}$	$x_{базr}$	b_r	a_{r1}	…	a_{rs}	…	a_{rn}	0	…	1	a_{2n}	$\frac{b_r}{a_{rs}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$c_{баз\,m}$	$x_{баз\,m}$	b_m	a_{m1}	…	a_{ms}	…	a_{mn}	0	0	…	1	$\frac{b_m}{a_{ms}}$
	F	Δ_0	Δ_1	…	Δ_s	…	Δ_n	0	0	…	0	

Ведучий елемент

Заповнення нової симплексної таблиці

а) у стовпчик «$X_{баз}$» записують нові базисні змінні;

б) стовпчик «$C_{баз}$» становлять коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

в) над змінними $x_1, x_2, \ldots x_n$ надписують коефіцієнти цільової функції c_j при відповідних змінних;

г) елементи ведучого рядка ділять на ведучий елемент і заносять до нової таблиці;

ґ) всі елементи ведучого стовпчика (за виключенням ведучого елемента) замінюють на 0;

д) клітинки таблиці, що залишилися, заповнюють за правилом чотирикутника:

$$a_{ij}^{\text{нов}} = \frac{a_{ij}^{\text{ст}} a_{rs} - a_{is}^{\text{ст}} a_{rj}^{\text{ст}}}{a_{rs}}$$

Перерахунок симплексної таблиці

$C_{баз}$	$X_{баз}$	B	c_1	…	c_s	…	c_n	0	0	…	0
			x_1	…	x_s	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}
$c_{баз1}$	$x_{баз1}$	b_1	a_{11}	…	a_{is}	…	a_{ij}	1	a_{1n}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$c_{базr}$	$x_{базr}$	b_r	a_{r1}	…	a_{rs}		a_{rj}	0	…	1	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$c_{базm}$	$x_{базm}$	b_m	a_{m1}	…	a_{ms}	…	a_{mn}	0	0	…	1
	F	Δ_0	Δ_1	…	Δ_s	…	Δ_n	0	0	…	0

$$a_{ij}^{нов} = \frac{a_{ij}^{ст} a_{rs} - a_{is}^{ст} a_{rj}^{ст}}{a_{rs}}$$

Зауваження до використання симплексного методу

1) при переході до нової симплексної таблиці елементи *F*- рядка можна обчислювати не лише за правилом чотирикутника, а й за правилом їх знаходження під час складання першої симплексної таблиці;

2) якщо не переходити від пошуку мінімуму до пошуку максимуму функції, при застосуванні симплексного методу в *F*-рядку вилучають додатні елементи; ведучий стовпчик визначається за найбільшим додатним числом *F*-го рядка; всі інші етапи симплексного методу аналогічні описаним вище. Одержане кінцеве значення цільової функції в цьому разі потрібно помножити на –1;

Приклад заповнення початкової симплекс-таблиці

Вихідна задача ЛП

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 & (2) \\ x_2 \leq 5 & (3) \\ 3x_1 \leq 21 & (4) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Канонічна форма задачі ЛП

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ldots x_6 \geq 0$$

Приклад заповнення початкової симплекс-таблиці

Канонічна форма задачі ЛП

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + \quad x_4 = 16 \\ \quad x_2 + \quad x_5 = 5 \\ 3x_1 + \quad x_6 = 21 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \dots x_6 \geq 0$$

$$X_0 = (0, 0, 18\ 16, 5, 21)$$

$$F(X_0) = 0$$

Початкова сиплекс–таблиця до задачі

$C_{i\ баз}$	$X_{б}$ аз	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	18	1	3	1	0	0	0	
0	x_4	16	2	1	0	1	0	0	
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	
0	x_6	21	3	0	0	0	0	1	
	F	0	–2	–3	0	0	0	0	

Приклад розв'язування задачі

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	18	1	3	1	0	0	0	
0	x_4	16	2	1	0	1	0	0	
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	
0	x_6	21	3	0	0	0	0	1	
	F	0	–2	–3	0	0	0	0	

$X_0 = ?$

Розв'язок оптимальний?

Ведучий стовпчик?

Ведучий рядок?

Ведучий елемент?

$$\Delta_s = \min_{\Delta_j<0} \Delta_j$$

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}}$$

Приклад розв'язування задачі

$C_{i\ баз}$	X баз	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	18	1	3	1	0	0	0	6
0	x_4	16	2	1	0	1	0	0	16
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	5
0	x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
	F	0	–2	–3	0	0	0	0	

C_i баз	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	

X_0 = (0, 0, 18 16, 5, 21)

$F(X_0) = 0$

Розв'язок не оптимальний

- ✓ елементи ведучого рядка ділять на ведучий елемент;
- ✓ елементи ведучого стовпчика (за виключенням ведучого елемента) замінюють на 0;
- ✓ клітинки таблиці:

$$a_{ij}^{\text{нов}} = \frac{a_{ij}^{\text{ст}} a_{rs} - a_{is}^{\text{ст}} a_{rj}^{\text{ст}}}{a_{rs}}$$

- ✓ F розраховується:

$\Delta_0 = c_{\text{баз}1}\, b_1 + c_{\text{баз}2}\, b_2 + \ldots + c_{\text{баз}\ m}\, b_m$,

$\Delta_j = c_{\text{баз}1}\, a_{1j} + c_{\text{баз}2}\, a_{2j} + \ldots + c_{\text{баз}\ m}\, a_{mj} - c_j$,

$j = 1,2,\ldots n$

Приклад розв'язування задачі

C_i баз	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	3	1	0	1	0	-3	0	
0	x_4	11	2	0	0	1	-1	0	
3	x_2	5	0	1	0	0	1	0	
0	x_6	21	3	0	0	0	0	1	
	F	15	–2	0	0	0	3	0	

$X_1 = (\ 0,\ 5,\ 3\ 11,\ 0,\ 21)$

$F(X_1) = 15$

Розв'язок оптимальний?

Ведучий стовпчик?

Ведучий рядок?

Ведучий елемент?

$$\Delta_s = \min_{\Delta_j < 0} \Delta_j$$

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{a_{is} > 0} \frac{b_i}{a_{is}}$$

Приклад розв'язування задачі

C_i баз	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	3	1	0	1	0	-3	0	3
0	x_4	11	2	0	0	1	-1	0	5,5
3	x_2	5	0	1	0	0	1	0	-
0	x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
	F	15	–2	0	0	0	3	0	

C_i баз	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	F								

$X_1 = (0, 5, 3\ 11, 0, 21)$

$F(X_1) = 15$

- ✓ елементи ведучого рядка ділять на ведучий елемент;
- ✓ елементи ведучого стовпчика (за виключенням ведучого елемента) замінюють на 0;
- ✓ клітинки таблиці:

$$a_{ij}^{нов} = \frac{a_{ij}^{ст} a_{rs} - a_{is}^{ст} a_{rj}^{ст}}{a_{rs}}$$

- ✓ F розраховується:

$\Delta_0 = c_{баз1}\, b_1 + c_{баз2}\, b_2 + \ldots + c_{баз\, m}\, b_m$,

$\Delta_j = c_{баз1}\, a_{1j} + c_{баз2}\, a_{2j} + \ldots + c_{баз\, m}\, a_{mj} - c_j$,

$j = 1,2,\ldots n$

Приклад розв'язування задачі

C_i баз	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_1	3	1	0	1	0	-3	0	-
0	x_4	5	0	0	-2	1	5	0	1
3	x_2	5	0	1	0	0	1	0	5
0	x_6	12	0	0	-3	0	9	1	12/9
	F	21	0	0	2	0	-3	0	

$X_1 = (3, 5, 0, 5, 0, 12)$

$F(X_1) = 21$

Розв'язок оптимальний?

Ведучий стовпчик?

Ведучий рядок?

Ведучий елемент?

$$\Delta_s = \min_{\Delta_j < 0} \Delta_j$$

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{a_{is} > 0} \frac{b_i}{a_{is}}$$

Приклад розв'язування задачі

C_i баз	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_1	3	1	0	1	0	-3	0	-
0	x_4	5	0	0	-2	1	5	0	1
3	x_2	5	0	1	0	0	1	0	5
0	x_6	12	0	0	-3	0	9	1	12/9
	F	21	0	0	2	0	-3	0	

C_i баз	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_1	6	1	0	-0,2	0,6	0	0	
0	x_5	1	0	0	-0,4	0,2	1	0	
3	x_2	4	0	1	0,4	-0,2	0	0	
0	x_6	3	0	0	0,6	-1,8	0	1	
	F	24	0	0	0,8	0,6	0	0	

$X_1 = (3, 5, 0, 5, 0, 12)$

$F(X_1) = 21$

- ✓ елементи ведучого рядка ділять на ведучий елемент;
- ✓ елементи ведучого стовпчика (за виключенням ведучого елемента) замінюють на 0;
- ✓ клітинки таблиці:

$$a_{ij}^{нов} = \frac{a_{ij}^{ст} a_{rs} - a_{is}^{ст} a_{rj}^{ст}}{a_{rs}}$$

- ✓ F розраховується:

$$\Delta_0 = c_{баз1}\, b_1 + c_{баз2}\, b_2 + \ldots + c_{баз\, m}\, b_m ,$$
$$\Delta_j = c_{баз1}\, a_{1j} + c_{баз2}\, a_{2j} + \ldots + c_{баз\, m}\, a_{mj} - c_j ,$$
$$j = 1,2,\ldots n$$

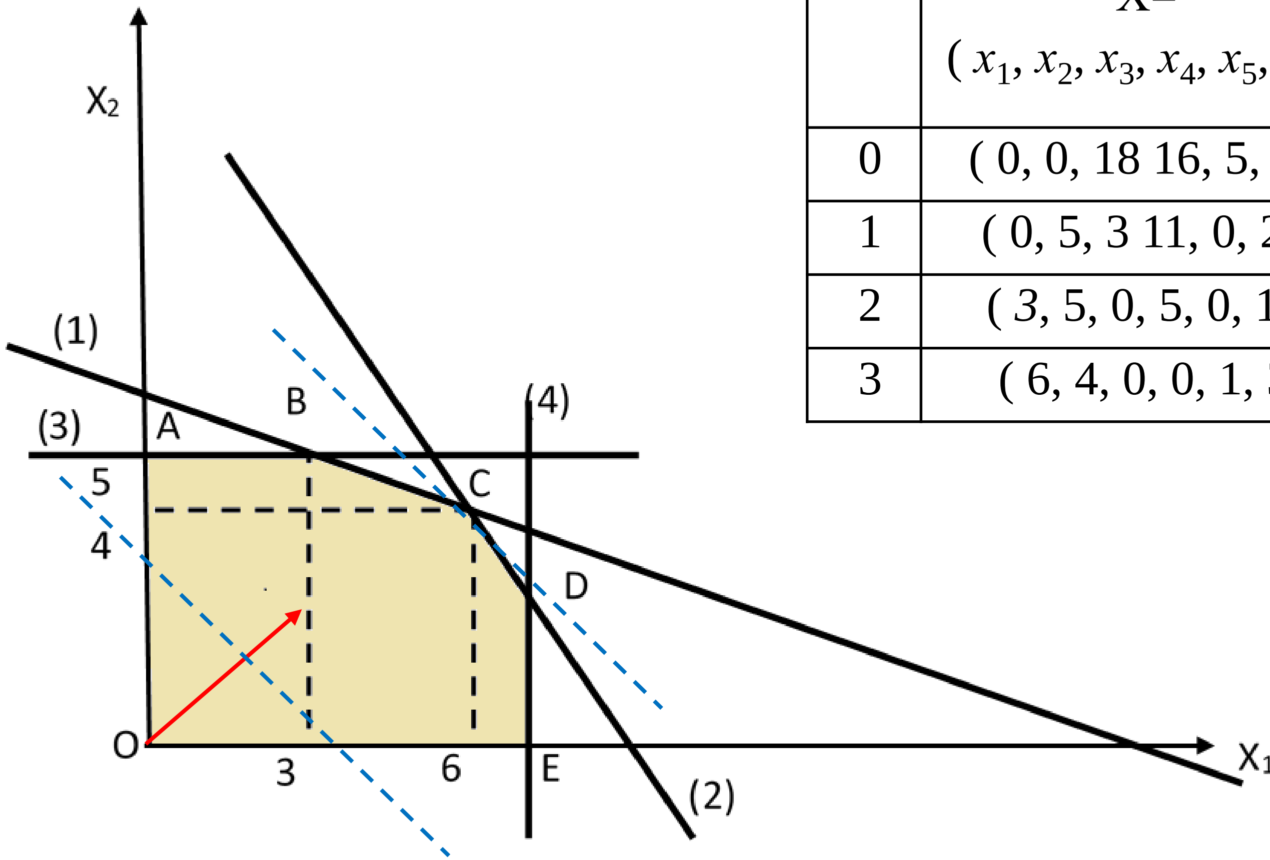
Приклад розв'язування задачі

Розв'язок оптимальний?

C_i баз	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_1	6	1	0	-0,2	0,6	0	0	
0	x_5	1	0	0	-0,4	0,2	1	0	
3	x_2	4	0	1	0,4	-0,2	0	0	
0	x_6	3	0	0	0,6	-1,8	0	1	
	F	24	0	0	0,8	0,6	0	0	

ТАК

Порівняння із геометричним методом



	X= ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,$)	Точка на графіку	F(X)= $2x_1+3x_2$,
0	(0, 0, 18 16, 5, 21)	O	0
1	(0, 5, 3 11, 0, 21)	A	15
2	(3, 5, 0, 5, 0, 12)	B	21
3	(6, 4, 0, 0, 1, 3)	C	24

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 & (2) \\ x_2 \leq 5 & (3) \\ 3x_1 \leq 21 & (4) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Тема 4. Метод штучного базису

.

Приклад заповнення початкової симплекс-таблиці

Канонічна форма задачі ЛП

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + \quad x_4 = 16 \\ \quad x_2 + \quad x_5 = 5 \\ 3x_1 + \quad x_6 = 21 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ldots x_6 \geq 0$$

Початкова сиплекс–таблиця до задачі

$C_{i\text{ баз}}$	$X_{\text{баз}}$	B	2	3	0	0	0	0	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	18	1	3	1	0	0	0	
0	x_4	16	2	1	0	1	0	0	
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	
0	x_6	21	3	0	0	0	0	1	
	F	0	–2	–3	0	0	0	0	

$$X_0 = (0, 0, 18\ 16, 5, 21)$$

$$F(X_0) = 0$$

Метод штучного базису

Симплексний метод зі штучним базисом застосовують у тих випадках, коли з початкової системи обмежень не можна визначити потрібної кількості базисних векторів.

Схема методу

1. У кожне обмеження, для якого немає базисної змінної (це обмеження типу $\geq$ або =) необхідно ввести деяку змінну, щоб відповідний вектор мав потрібні координати. Ця змінна вводиться лише для можливості одержання системи одиничних векторів. Такі змінні називаються ***штучними***, позначаються y_j, $j = 1,m$.
2. Штучні змінні вводяться у цільову функцію з коефіцієнтом –M (для задачі максимізації) або M (для задачі мінімізації). Отримана форма задачі називається розширеною.
3. Для розширеної форми заповнюється початкова симплекс-таблиця.
4. ...

Далі буде…

Побудова розширеної форми задачі

Канонічна форма задачі ЛП

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 - x_6 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_7 = 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \dots x_7 \geq 0$$

Розширена форма задачі ЛП

$$F = 2x_1 + 3\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{My_1} - \boldsymbol{My_2} \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + \boldsymbol{y_1} = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 - x_6 + \boldsymbol{y_2} = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_7 = 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \dots x_7, y_1, y_2 \geq 0$$

Заповнення початкової симплекс-таблиці

Розширена форма задачі ЛП

$$F = 2x_1 + 3x_2 - My_1 - My_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + y_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 - x_6 + y_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_7 = 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ldots x_7, y_1, y_2 \geq 0$$

$\Delta_0 = c_{\text{баз}1}\, b_1 + c_{\text{баз}2}\, b_2 + \ldots + c_{\text{баз}\, m}\, b_m$,
$\Delta_j = c_{\text{баз}1}\, a_{1j} + c_{\text{баз}2}\, a_{2j} + \ldots + c_{\text{баз}\, m}\, a_{mj} - c_j$,
$j = 1,2,\ldots n$

Початкова сиплекс–таблиця до задачі

C_i баз	X баз	B	2	3	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y_1	y_2	
$-M$	y_1	6	1	3	-1	0	0	0	0	1	0	
0	x_4	16	2	1	0	1	0	0	0	0	0	
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	
$-M$	y_2	5	-1	5	0	0	0	-1	0	0	1	
0	x_7	3	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	
	F	0	-2	-3	0	0	0	1	0	0	0	
	M	-11	0	-8	1	0	0	0	0	0	0	

$\Delta_0 = \mathbf{0} - \mathbf{11}\text{M}$ $\Delta_1 = \mathbf{-2} - \mathbf{0}\text{M}$, $\Delta_2 = \mathbf{-3} - \mathbf{8}\text{M}$,

Метод штучного базису

Схема методу (продовження)

4. Перетворюємо отриману симплекс-таблицю за правилами симплекс-методу. Коли штучна змінна виходить із базису – відповідний їй стовбчик виключається із таблиці.

5. Коли всі штучні змінні вийшли з базису – отримано початковий допустимий розв’язок. Далі застосовують звичайний симплекс-метод.

Вибір ведучого стовбця та рядка

C_i баз	X баз	B	2	3	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y_1	y_2	
$-M$	y_1	6	1	3	-1	0	0	0	0	1	0	2
0	x_4	16	2	1	0	1	0	0	0	0	0	16
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	5
$-M$	y_2	5	-1	5	0	0	0	-1	0	0	1	1
0	x_7	3	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	3
	F	0	-2	-3	0	0	0	0	0	0	0	
	M	-11	0	-8	1	0	0	1	0	0	0	

Пошук початкового базисного розв'язку

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	Симплекс-відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y_1	y_2	
$-M$	y_1	6	1	3	−1	0	0	0	0	1	0	2
0	x_4	16	2	1	0	1	0	0	0	0	0	16
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	5
$-M$	y_2	5	−1	5	0	0	0	−1	0	0	1	1
0	x_7	3	−1	1	0	0	0	0	1	0	0	3
	F	0	−2	−3	0	0	0	0	0	0	0	
	M	−11	0	−8	1	0	0	1	0	0	0	

- ✓ елементи ведучого рядка ділять на ведучий елемент;
- ✓ елементи ведучого стовпчика (за виключенням ведучого елемента) замінюють 0.
- ✓ клітинки таблиці

$$a_{ij}^{нов} = \frac{a_{ij}^{ст} a_{rs} - a_{is}^{ст} a_{rj}^{ст}}{a_{rs}}$$

✓F розраховується

$\Delta_0 = c_{баз1}\, b_1 + c_{баз2}\, b_2 + \ldots + c_{баз\ m}\, b_m$,

$\Delta_j = c_{баз1}\, a_{1j} + c_{баз2}\, a_{2j} + \ldots + c_{баз\ m}\, a_{mj} - c_j$,

$j = 1,2,\ldots n$

Пошук початкового базисного розв'язку

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	СВ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y_1	y_2	
$-M$	y_1	6	1	3	-1	0	0	0	0	1	0	2
0	x_4	16	2	1	0	1	0	0	0	0	0	16
0	x_5	5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	5
$-M$	y_2	5	-1	5	0	0	0	-1	0	0	1	1
0	x_7	3	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	3
	F	0	-2	-3	0	0	0	0	0	0	0	
	M	-11	0	-8	1	0	0	1	0	0	0	

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	0	$-M$	СВ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y_1	
$-M$	y_1	3	1,6	0	-1	0	0	0,6	0	1	1,87
0	x_4	15	2,2	0	0	1	0	0,2	0	0	6,82
0	x_5	4	0,2	0	0	0	1	0,2	0	0	20
3	x_2	1	$-0,2$	1	0	0	0	$-0,2$	0	0	–
0	x_7	2	0,8	0	0	0	0	0,2	1	0	2,5
	F	3	$-2,6$	0	0	0	0	$-0,6$	0	0	
	M	-3	$-1,6$	0	1	0	0	$-0,6$	0	0	

X=(0; 1; 0; 15; 4; 0; 2)

Для вихідної задачі ЛП цей розв'язок не є допустимим

Пошук початкового базисного розв'язку

$C_{i\ баз}$	X баз	B	2	3	0	0	0	0	0	$-M$	СВ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y_1	
$-M$	y_1	3	1,6	0	-1	0	0	0,6	0	1	1,87
0	x_4	15	2,2	0	0	1	0	0,2	0	0	5
0	x_5	4	0,2	0	0	0	1	0,2	0	0	20
3	x_2	1	$-0,2$	1	0	0	0	$-0,2$	0	0	–
0	x_7	2	0,8	0	0	0	0	0,2	1	0	2,5
	F	3	$-2,6$	0	0	0	0	$-0,6$	0	0	
	M	-3	$-1,6$	0	1	0	0	$-0,6$	0	0	

$X_0 = (1,875; 1,375; 0; 9,375; 3,625; 0; 0,5)$

$F(X_0) = 7,875$

Знайдено **допустимий** розв'язок

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
2	x_1	1,875	1	0	$-0,625$	0	0	0,375	0
0	x_4	10,875	0	0	1,375	1	0	$-0,625$	0
0	x_5	3,625	0	0	0,125	0	1	0,125	0
3	x_2	1,375	0	1	$-0,125$	0	0	$-0,125$	0
0	x_7	3,5	0	0	-0,5	0	0	0,5	1
	F	7,875	0	0	$-1,625$	0	0	0,375	0

Пошук розв'язку

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	0	СВ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
2	x_1	1,875	1	0	−0,625	0	0	0,375	0	–
0	x_4	10,875	0	0	1,375	1	0	−0,625	0	7,9
0	x_5	3,625	0	0	0,125	0	1	0,125	0	29
3	x_2	1,375	0	1	−0,125	0	0	−0,125	0	
0	x_7	3,5	0	0	-0,5	0	0	0,5	1	
	F	7,875	0	0	−1,625	0	0	0,375	0	

$X_0 = (2,5;\ 1,5;\ 1;\ 7,5;\ 3,5;\ 0;\ 0)$
$F(X_0) = 9,5$

Знайдено розв'язок

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	0	СВ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
2	x_1	6,8	1	0	0	0,454	0	0,09	0	
0	x_3	7,9	0	0	1	0,727	0	-0,454	0	
0	x_5	2,6	0	0	0	-0,09	1	0,181	0	
3	x_2	2,4	0	1	0	0,09	0	-0,181	0	
0	x_7	7,5	0	0	0	0,363	0	0,272	1	
	F	20,7	0	0	0	1,181	0	-0,36	3,25	

Пошук розв'язку

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	0	СВ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
2	x_1	6,8	1	0	0	0,454	0	0,09	0	75
0	x_3	7,9	0	0	1	0,727	0	-0,454	0	
0	x_5	2,6	0	0	0	-0,09	1	0,181	0	14,5
3	x_2	2,4	0	1	0	0,09	0	-0,181	0	
0	x_7	7,5	0	0	0	0,363	0	0,272	1	27,3
	F	20,7	0	0	0	1,181	0	-0,36	3,25	

$X_0 = (5{,}5; 5; 14{,}5; 0; 0; 14{,}5; 3{,}5)$

$F(X_0) = 26$

Знайдено розв'язок

$C_{i\ баз}$	$X_{баз}$	B	2	3	0	0	0	0	0	СВ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
2	x_1	5,5	1	0	0	0,5	-0,5	0	0	
0	x_3	14,5	0	0	1	0,5	2,5	0	0	
0	x_6	14,5	0	0	0	-0,5	5,5	1	0	
3	x_2	5	0	1	0	0	1	0	0	
0	x_7	3,5	0	0	0	0,5	-1,5	0	1	
	F	26	0	0	0	1	2	0	0	

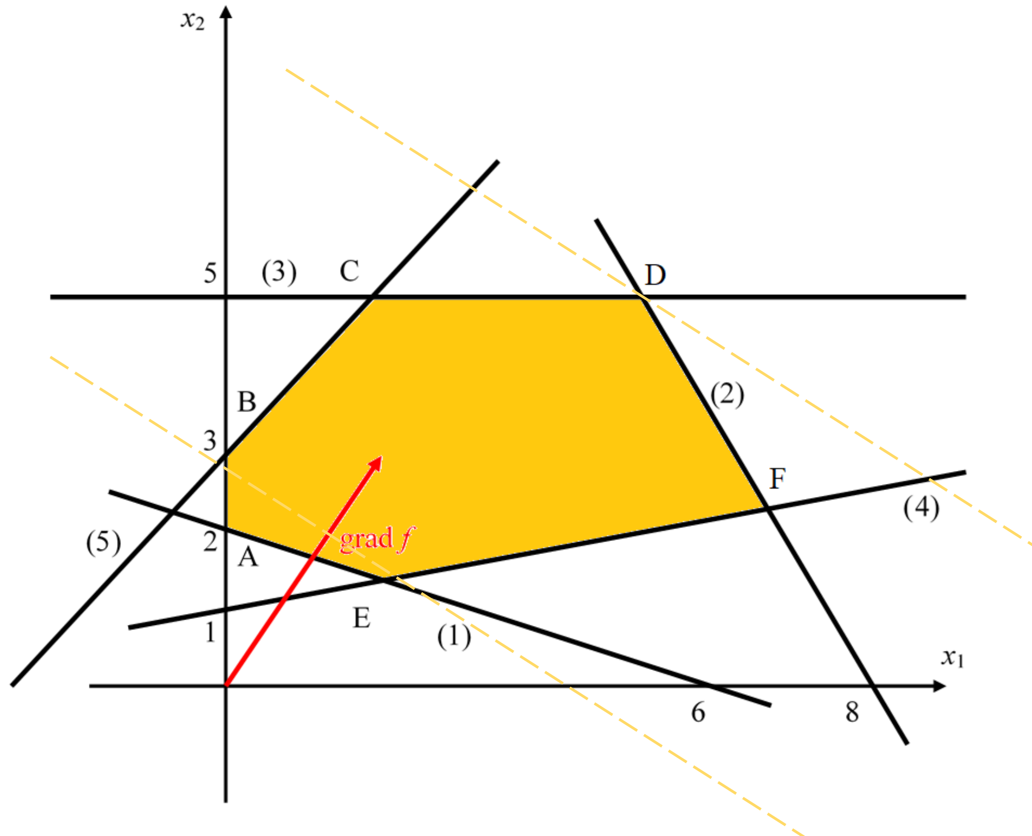
Геометрична інтерпретація методу

X= (0; 1; 0; 15; 4; 0; 2)
Розв'язок не є допустимим

X_0 = (1,875; 1,375; 0; 9,375; 3,625; 0; 0,5)
$F(X_0)$ =7,875
Знайдено допустимий розв'язок: т. E

X_1 = (6,818; 2,36; …)
$F(X_0)$ =20,73: т. F

X_2 = (5,5; 5; …)
$F(X_0)$ =26: т. D



Особливі випадки симплекс-методу

1. Виродженість
2. Альтернативні розв’язки
3. Необмеженість функції
4. Відсутність допустимих розв’язків

Особливі випадки симплекс-методу

1.Виродженість. Відповідає ситуації, коли одна або кілька базисних змінних дорівнюють 0 (відповідні значення в стовпчику В дорівнюють 0).

Це означає, що в задачі є принаймні одне надлишкове обмеження.

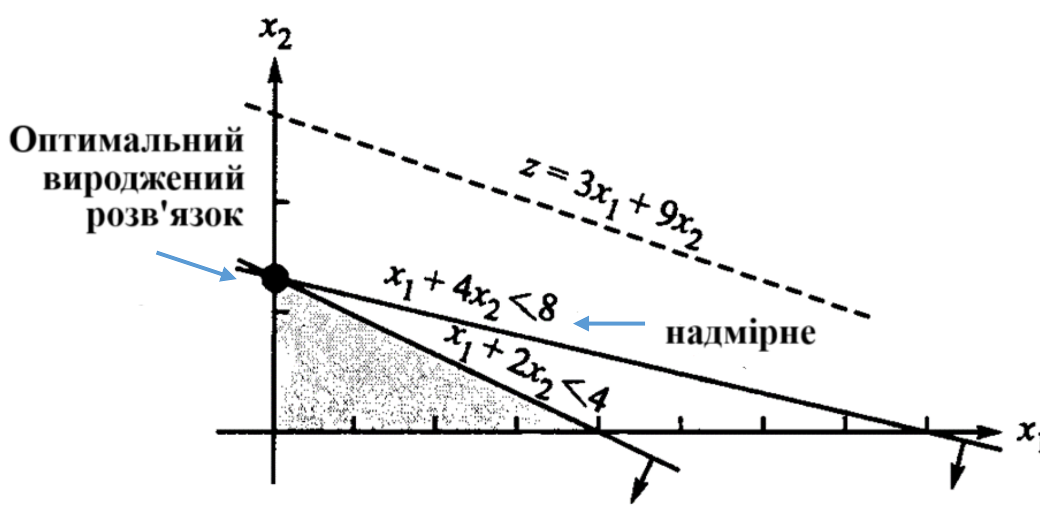
			3	9	0	0	
Сб	Хб	В	Х1	Х2	Х3	Х4	СВ
9	Х2	2	0	1	1/2	-1/2	
3	Х1	0	1	0	-1	2	
	F	18	0	0	3/2	3/2	

Приклад

$$z = 3x_1 + 9x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



Особливі випадки симплекс-методу

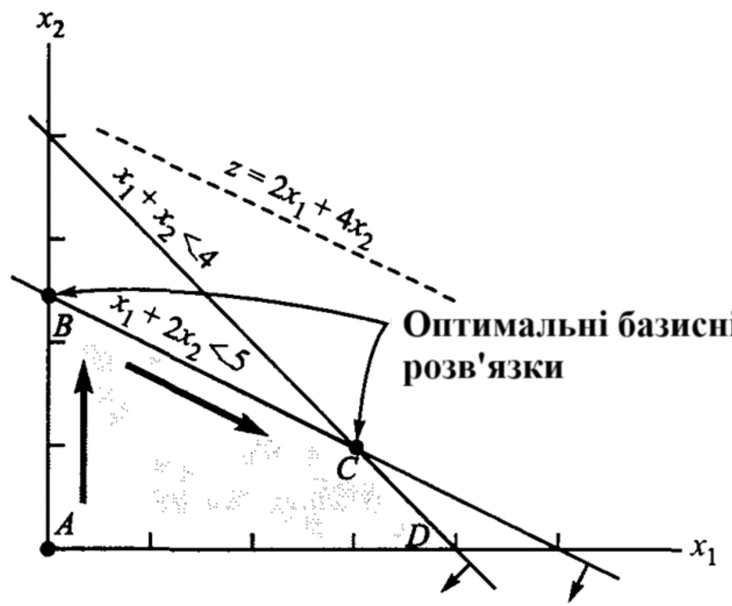
2. Альтернативні розв’язки. Це ситуація, коли лінія рівня функції паралельна одній з границь і ми маємо нескінченну множинц розв’язків. В цьому разі симплекс-метод дозволяє відшукати один з них.

			2	**4**	**0**	**0**	
Сб	Хб	B	X1	X2	X3	X4	CB
4	X2	1	0	1	1	-1	
2	X1	3	1	0	-1	2	
	F	10	0	0	2	0	

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Особливі випадки симплекс-методу

3. **Необмеженість функції.** В цьому випадку задача не має розв'язків. У симлекс-таблиці існує стовбчик, де немає жодного додатного елемента.

			2	**1**	**0**	**0**	
Сб	Хб	В	Х1	Х2	Х3	Х4	СВ
0	Х3	10	1	-1	1	0	
0	Х4	40	2	0	0	1	
	F	0	-2	-1	0	0	

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 10 \\ 2x_1 \le 40 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Особливі випадки симплекс-методу

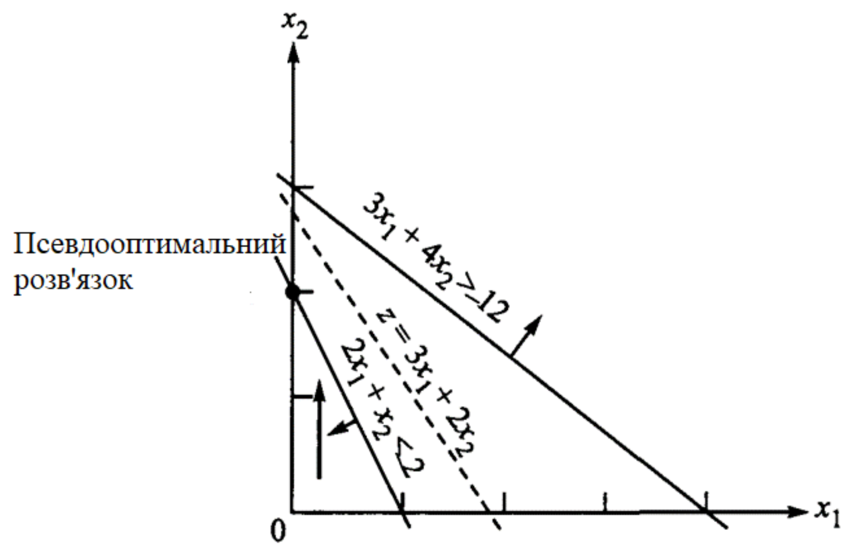
4. Відсутність допустимих розв’язків. Це ситуація, коли обмеження задачі не сумісні. В цьому разі штучні змінні не виходять з базису (принаймні одна з них має ненульове значення).

			3	**2**	**0**	**0**	**-M**
Сб	Xб	B	X1	X2	X3	X4	Y
2	X2	2	2	1	0	1	0
-M	Y	4	-5	0	-1	-4	1
	F	4	1	0	0	2	0
	M	-4	5	0	1	4	0

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Тема 5. Двоїстість у лінійному програмуванні

Симетричні форми запису задачі лінійного програмування

$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow max$	$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow min$
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n$	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n$

Поняття двоїстої задачі

Вихідна задача лінійного програмування називається **прямою**.
Двоїста задача формулюється за допомогою певних правил з прямої задачі.

Пряма задача

$$F = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c_n\, x_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{k1}\, x_1 + a_{k2}\, x_2 \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+11}\, x_1 + a_{k+12}\, x_2 \ldots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,k},\ \ k \le n\right).$$

Двоїста задача

$$F^* = b_1\, y_1 + b_2\, y_2 + \cdots + b_m\, y_m \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots \\ a_{1s}\, y_1 + a_{2s}\, y_2 \ldots + a_{ms}y_m \ge c_s, \\ a_{1s+1}\, y_1 + a_{2s+1}\, y_2 \ldots + a_{ms+1}y_m = c_{s+1}, \\ \ldots \\ a_{1n}\, y_1 + a_{2n}\, y_2 \ldots + a_{mn}y_n = c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1,s},\ \ s \le m\right).$$

Економічна постановка задачі лінійного програмування

прямої

необхідно визначити такий план випуску продукції, який за умови обмежених ресурсів забезпечив би найбільшу сумарну виручку від реалізації виробленої продукції

двоїстої

необхідно визначити такі ціни на ресурси $\mathbf{y_i}$, за яких загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою, а витрати на ресурси при виробництві кожного виду продукції будуть не меншими від ціни реалізації цієї продукції

Зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з взаємно двоїстих задач має оптимальний розв'язок, його має і друга, при цьому оптимальні значення їх цільових функцій рівні: $F_{max} = Z_{min}$. Якщо цільова функція однієї із задач не обмежена, умови другої несумісні.

Друга теорема двоїстості. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють абсолютним значенням коефіцієнтів при відповідних змінних цільової функції вихідної задачі, що записана через неосновні змінні її оптимального розв'язку.

Третя теорема двоїстості. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють значенням часткових похідних цільової функції $F_{max}(b)$ з відповідними аргументами, тобто

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i^*}, \quad i=1,2,\dots,m.$$

Правила побудови двоїстої задачі

1) пряму задачу записати в одній із симетричних форм: якщо задача на максимум, то обмеження-нерівності мають бути (≤), якщо на мінімум – то (≥);

2) кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі;

3) кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі;

4) коефіцієнтами при невідомих цільової функції двоїстої задачі є праві частини співвідношень системи обмежень (вільні члени системи обмежень) прямої задачі;

5) якщо цільова функція прямої задачі прямує до максимуму, то цільова

функція двоїстої задачі – до мінімуму, і навпаки;

Правила побудови двоїстої задачі

6) матриця коефіцієнтів при невідомих системи обмежень двоїстої задачі будується шляхом транспонування матриці коефіцієнтів при невідомих прямої задачі;

7) правими частинами співвідношень системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при невідомих цільової функції прямої задачі;

8) якщо змінна x_j прямої задачі може набувати лише невід'ємних значень, то відповідне *j*-те обмеження двоїстої задачі буде нерівністю, якщо ж

змінна x_j може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то *j*-те співвідношення системи обмежень двоїстої задачі буде рівністю.

9) якщо *i*-те співвідношення прямої задачі є нерівністю, то *i*-та змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$, у протилежному разі змінна y_i може набувати як додатних, так і від'ємних значень (вільна змінна).

Загальний вигляд пари двоїстих задач

Пряма задача

$$F = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \dots + c_n\, x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \ldots + a_{1n} x_n \le b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \ldots + a_{2n} x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{k1}\, x_1 + a_{k2}\, x_2 \ldots + a_{kn} x_n \le b_k, \\ a_{k+11}\, x_1 + a_{k+12}\, x_2 \ldots + a_{k+1n} x_n = b_{k+1}, \\ \ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 \ldots + a_{mn} x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,k},\ k \le n\right).$$

Двоїста задача

$$F^* = b_1\, y_1 + b_2\, y_2 + \dots + b_m\, y_m \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 \ldots + a_{m1} y_m \ge c_1, \\ a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \ldots + a_{m2} y_m \ge c_2, \\ \ldots \\ a_{1s}\, y_1 + a_{2s}\, y_2 \ldots + a_{ms} y_m \ge c_s, \\ a_{1s+1}\, y_1 + a_{2s+1}\, y_2 \ldots + a_{ms+1} y_m = c_{s+1}, \\ \ldots \\ a_{1n}\, y_1 + a_{2n}\, y_2 \ldots + a_{mn} y_n = c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \ (i = \overline{1,s},\ s \le m).$$

Приклад побудови двоїстої задачі

Вихідна задача ЛП

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 16 & (2) \\ x_2 \leq 5 & (3) \\ -x_1 + 5x_2 \geq 5 & (4) \\ -x_1 + x_2 = 3 & (5) \end{cases}$$

$$x_i \geq 0$$

Симетрична форма задачі ЛП

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 - 5x_2 \leq -5 \\ -x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0$$

Двоїста задача ЛП

$$Z = -6y_1 + 16y_2 + 5y_3 - 5y_4 + 3y_5 \to \min$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_4 - 1y_5 \geq 2 \\ -3y_1 + y_2 + y_3 - 5y_4 + 1y_5 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

Геометрична інтерпретація двоїстих задач

Вихідна задача ЛП

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ \quad x_1 + \ x_2 \le 8, \end{cases}$$

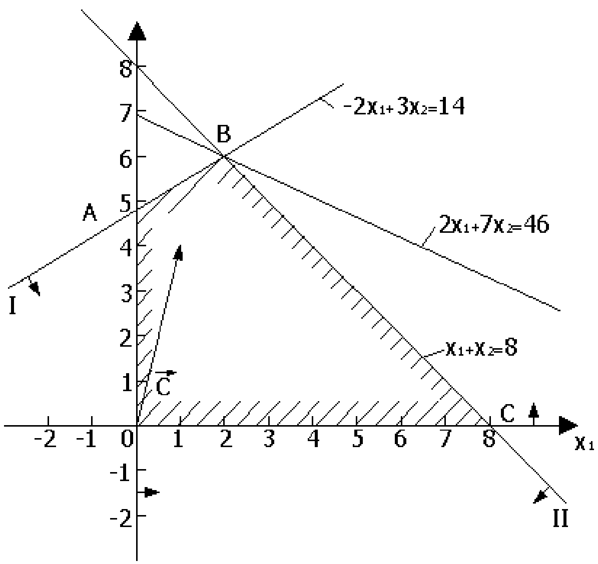
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

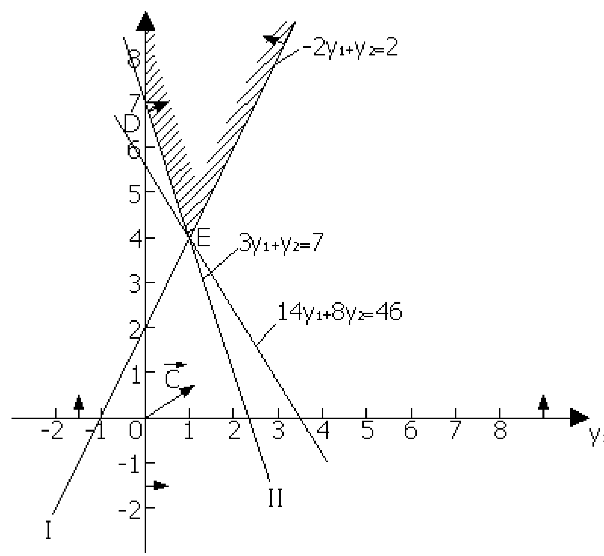
Двоїста задача ЛП

$$F^* = 14x_1 + 8x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2, \\ \ 3y_1 + \ y_2 \ge 7, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$





Інтерпретація симплекс-таблиці для двох взаємодвоїстих задач

Змінні двоїстої задачі	B	c_1	c_2	$\ldots$	c_n
		x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Коефіцієнти цільової функції прямої задачі

Змінні прямої задачі

Обмеження прямої задачі

Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі

Обмеження двоїстої задачі

Приклад запису розв'язків прямої та двоїстої задачі

$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3 \end{cases}$$

$y_i \ge 0 (i = 1,2,3,4).$

Оптимальний розв'язок ПЗ: $X^* = (6;4;0;0;1;3)$, $F_{max} = 24$.

Оптимальний розв'язок ДЗ: $Y^* = (4/5;3/5;0;0;0;0)$, $Z_{min} = 24$.

№п/п	базис	Вільні члени	Змінні					
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_1	6	1	0	-1/5	3/5	0	0
2	x_5	1	0	0	-2/5	1/5	1	0
3	x_2	4	0	1	2/5	-1/5	0	0
4	x_6	3	0	0	3/5	-9/5	0	1
	F	24	0	0	4/5	3/5	0	0
			y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4

Змістовна постановка задачі

Компанія виробляє фарбу для зовнішніх та внутрішніх робіт. Дані задачі показано у таблиці. Відділ маркетингу компанії обмежив щоденне виробництво фарби для внутрішніх робіт (2 т), а також висунув умови, щоб щоденне виробництво фарби для внутрішніх робіт не перевищувало такий показник фарби для зовнішніх робіт.

	Витрати сировини на 1 т фарби		**Максим. можливі щоденні витрати**
	Для внутрішніх робіт	Для зовнішніх робіт	
Сировина М1	6	4	24
Сировина М2	1	2	6
Дохід (тис.дол.) на тону фарби	5	4	

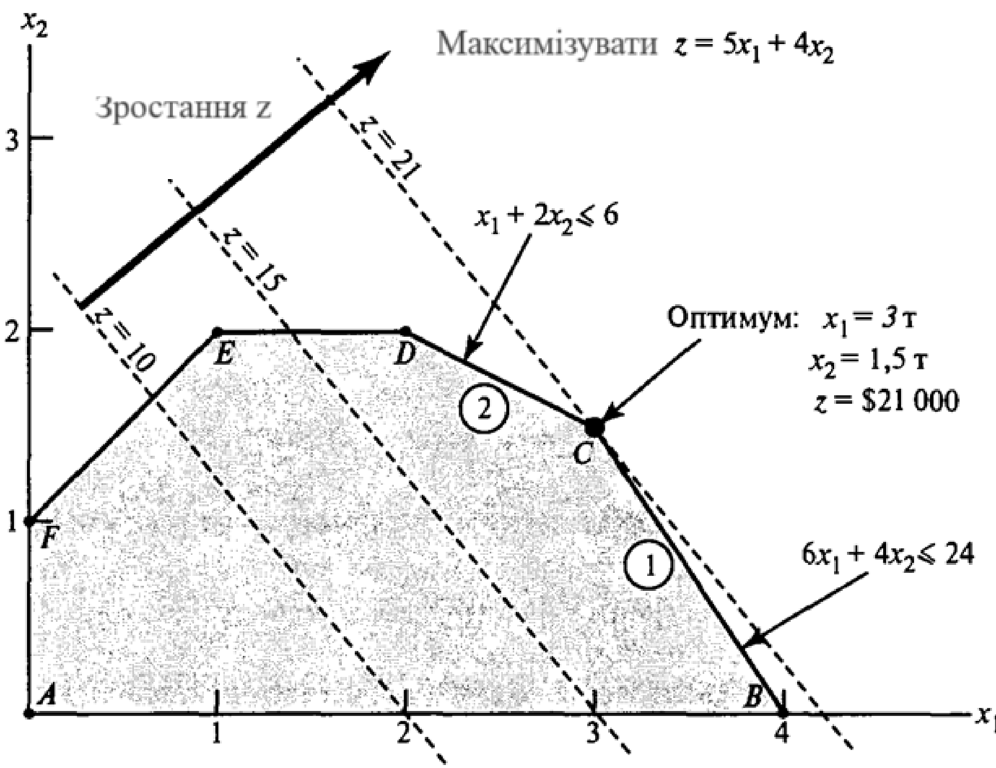
Необхідно визначити оптимальне співвідношення між виробництвом фарби для внутрішніх і зовнішніх робіт, яке максимізує дохід компанії.

Математична модель та геометрична інтерпретація

$$5x_1 + 4x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, & (1) \\ x_1 + 2x_2 \le 6 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ x_2 \le 2 & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



x_1– щоденний об'єм виробництва фарби для зовнішніх робіт,

x_2– щоденний об'єм виробництва фарби для внутрішніх робіт.

Аналіз чутливості моделі

Аналіз чутливості – це вивчення впливу параметрів моделі на оптимальний розв’язок задачі.

- Зміна коефіцієнтів цільової функції
- Зміна значень правої частини обмежень задачі

Зміна коефіцієнтів цільової функції

Зміна значень коефіцієнтів цільової функції приводить до зміни кута нахилу градієнта, і тоді розв’язок може бути в іншій кутовій точці.

Кут нахилу визначається відношенням c_1/c_2 (c_2/c_1).

Інтервал оптимальності – це інтервал для значення c_1/c_2 (c_2/c_1), в якому оптимальний розв’язок залишається незмінним.

Зміна коефіцієнтів цільової функції

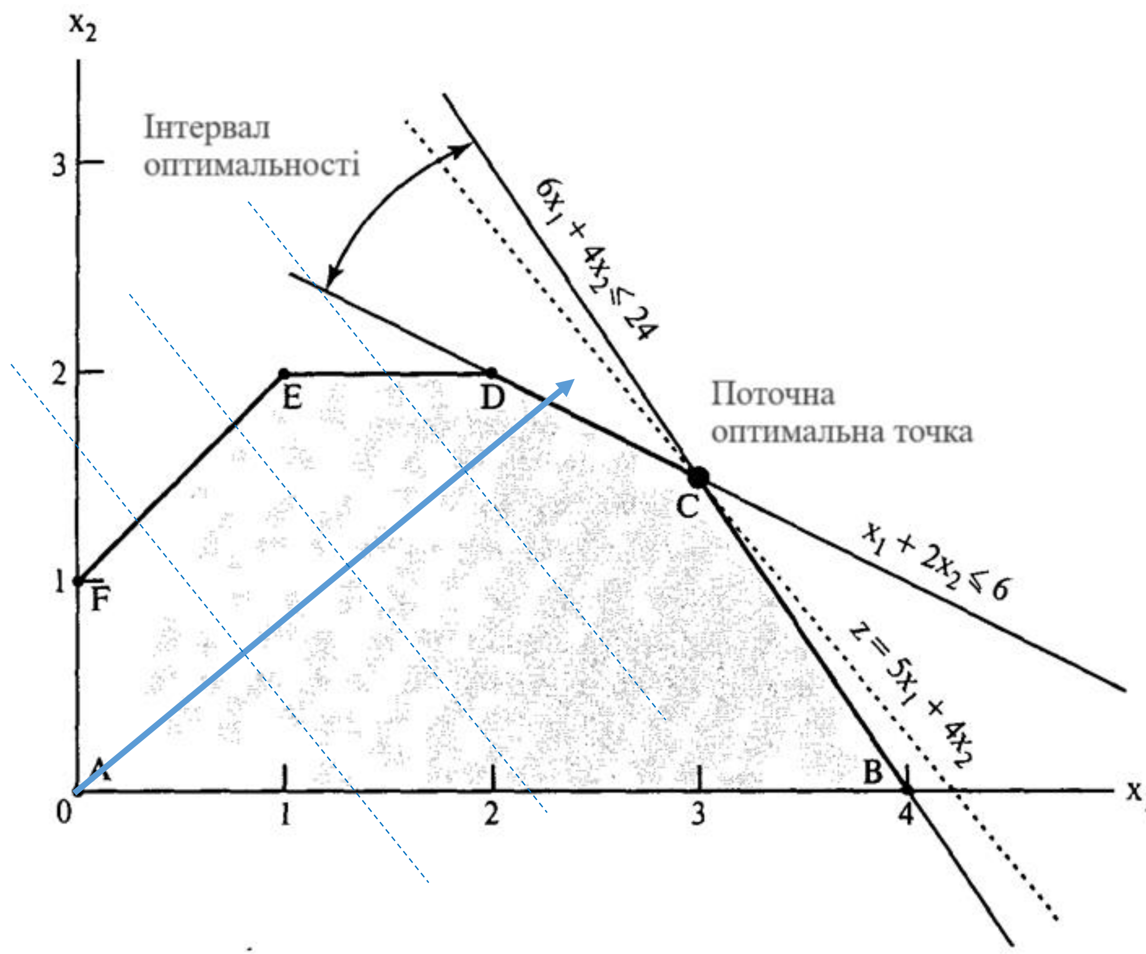
$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

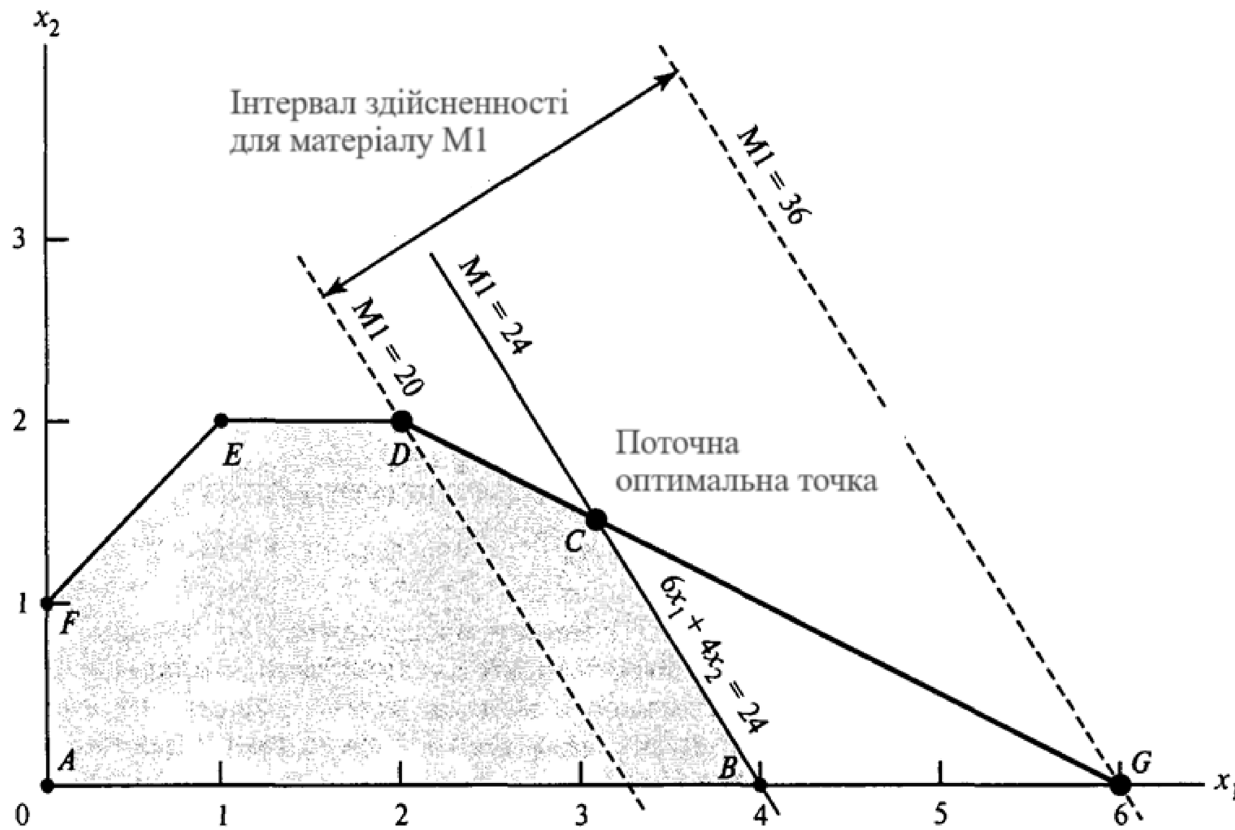
$$\frac{4}{6} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{2}{1}, \qquad c_1 \neq 0,$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{6}{4}, \qquad c_2 \neq 0$$



Доступність ресурсів

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ \quad x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

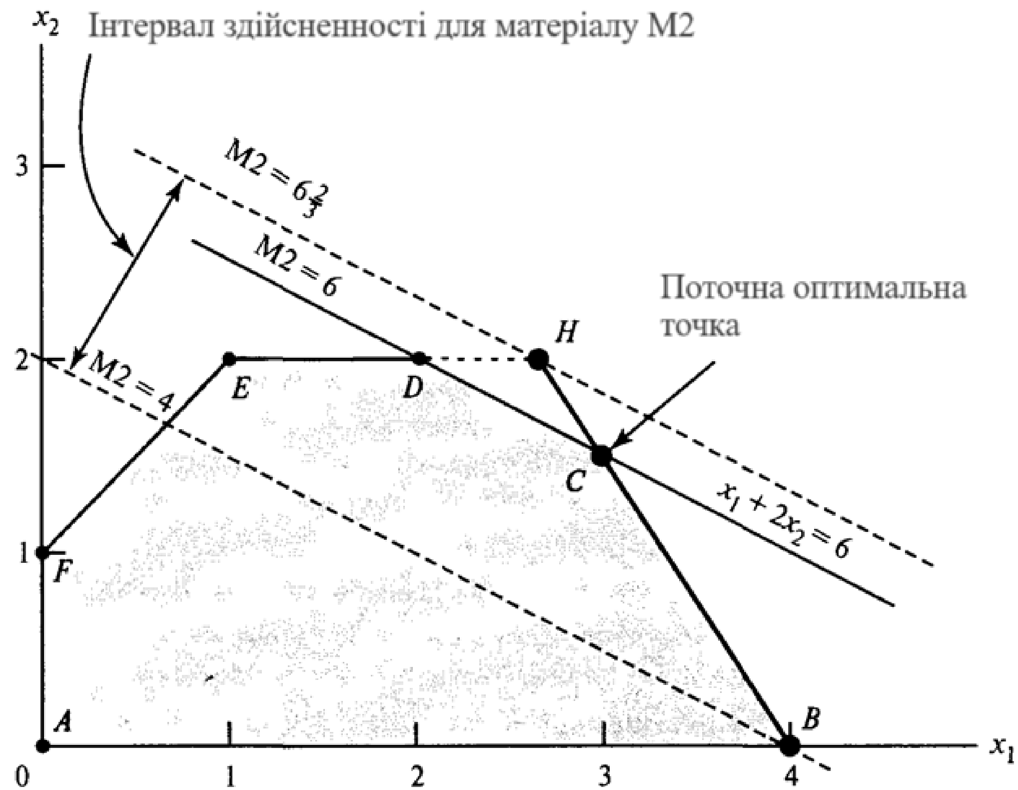


При зміні кількості ресурсу М1 від **20** до **36 т** (інтервал здійсненності) значення цільової функції відповідають положенню точки **С** на відрізку **DG**

Доступність ресурсів

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ \quad x_1 + 2x_2 \le 6 \\ \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

При зміні кількості ресурсу М2 від **4** до **6 2/3 т** (інтервал здійсненності) значення цільової функції відповідають положенню точки **С** на відрізку **ВН**



Тема 6. Задача лінійного програмування транспортного типу

Змістовна постановка задачі лінійного програмування транспортного типу

Нехай однорідний вантаж зосереджений у m постачальників в обсягах $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Його необхідно доставити *n* споживачам в обсягах $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Відомі c_{ij} – вартості перевезення одиниці вантажу від кожного i-го постачальника кожному j-му споживачу.

Потрібно скласти такий план перевезень, при якому всі запаси у постачальників вивезені, потреби всіх споживачів будуть повністю задовольнено, а сумарні витрати на перевезення всіх вантажів будуть мінімальними.

Математична постановка задачі лінійного програмування транспортного типу

запаси постачальників $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$,
попит споживачів $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і
матриця вартостей:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

b_i / a_i	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}
…				
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}

Математична постановка задачі лінійного програмування транспортного типу

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min \qquad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right), \qquad (4)$$

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача; c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача; a_i – запаси продукції i-го постачальника; b_j – попит на продукцію j-го споживача.

Транспортна задача

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (5)$$

таку транспорту задачу називають ***збалансованою*** або ***закритою***.

Якщо умова (5) не виконується, транспортну задачу називають ***незбалансованою*** або ***відкритою***.

Допустимим планом **(**або просто ***планом*****)** транспортної задачі називають будь-який розв’язок системи обмежень (2) – (4).

Допустимий план позначають матрицею $x = \{x_{ij}\}\ \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$.

Опорний план перевезень в ТЗ (у закритій формі) є невід’ємним, він задовольняє умовам (6), (7), а його додатним компонентам відповідає система лінійно незалежних векторів-умов системи обмежень (6), (7).

Якщо опорний план є ***невиродженим***, у ньому кількість додатних компонент дорівнює $(m + n - 1)$.

У ***виродженому*** опорному плані таких компонент менше.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = \{x_{ij}^*\}$ $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$, яка задовольняє умовам (2) – (4) задачі і забезпечує найменше значення цільової функції (1).

Математична постановка задачі лінійного програмування транспортного типу

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow min \qquad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right), \qquad (4)$$

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача; c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача; a_i – запаси продукції i-го постачальника; b_j – попит на продукцію j-го споживача.

Приведення задачі до закритої форми

У випадку $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

потрібно ввести до розгляду фіктивного споживача B_{n+1} з попитом $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і вартістю перевезення одиниці продукції $c_{i,n+1} = 0 \ (i = \overline{1,m})$,

У випадку $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

потрібно ввести до розгляду фіктивного постачальника A_{m+1} з обсягом постачання $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і вартістю перевезення одиниці продукції $c_{m+1,j} = 0 \ (j = \overline{1,n})$.

При цьому розмірність ТЗ, тобто кількість невідомих в задачі, збільшиться відповідно або на m, або на n змінних.

Метод потенціалів розв’язування транспортної задачі

Алгоритм

1. Заповнення початкової транспортної таблиці.

2. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі.

2. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

3. Якщо умова оптимальності виконується, отримуємо оптимальний розв’язок транспортної задачі, перехід на п. 5.

4. Якщо ж умова оптимальності не виконується, визначається наступний опорний план і перехід до кроку 2.

5. Кінець алгоритму.

Заповнення транспортної таблиці

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min \qquad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right), \qquad (4)$$

b_i / a_i	B_1	B_2	…	B_N	***Запаси***
A_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
…					…
A_M	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
Потреба	b_1	b_2	…	b_n	

Побудова початкового опорного плану

Метод північно-західного кута

min{12,15} min{14,3}

$\sum_{j=1}^{n} b_j = 80;\quad \sum_{i=1}^{m} a_i = 80$

b_i / a_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	*Запаси*
A_1	*10* **12**	*7* **3**	*4*	*6*	*8*	***15***
A_2	*4*	*1* **11**	*10* **14**	*5*	*8*	***25***
A_3	*7*	*4*	*5* **12**	*8* **8**	*1*	***20***
A_4	*10*	*3*	*6*	*4* **10**	*4* **10**	***20***
Потреба	***12***	***14***	***26***	***18***	***10***	

15-12=3 3-3=0

25-11=14 14-14=0

20-12=8 8-8=0

20-10=10 10-10=0

min{11,25}

12-12=0 14-3=11 26-14=12 18-8=10 10-10=0

11-11=0 12-12=0 10-10=0

m=4, n=5, m+n-1=8

Z(x)=12*10+3*7+11*1+14*10+12*5+8*8+10*4+10*4=496

Побудова початкового опорного плану

Метод мінімальної вартості (за строкою)

min{26,15}

b_i / a_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	10	7	4 **15**	6	8	15
A_2	4 **11**	1 **14**	10	5	8	25
A_3	7	4	5 **10**	8	1 **10**	20
A_4	10 **1**	3	6 **1**	4 **18**	4	20
Потреба	12	14	26	18	10	

$\sum_{j=1}^{n} b_j = 80;\quad \sum_{i=1}^{m} a_i = 80$

15-15=0

25-14=11 11-11=0

20-10=10 10-10=0

20-18=2 2-1=1 1-1=0

min{20,10}

min{14,25}

12-11=1 14-14=0 26-15=11 18-18=0 10-10=0

1-1=0 11-10=1

1-1=0

m=4, n=5, m+n-1=8

Z(x)=15*4+11*4+14*1+10*5+10*1+1*10+1*6+18*4=266

Побудова початкового опорного плану

Метод мінімальної вартості (за стовбцем)

min{14,13}

min{15,26}

b_i / a_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	*Запаси*
A_1	*10*	*7*	*4* **15**	*6*	*8*	***15***
A_2	*4* **12**	*1* **13**	*10*	*5*	*8*	***25***
A_3	*7*	*4*	*5* **11**	*8*	*1* **9**	***20***
A_4	*10*	*3* **1**	*6*	*4* **18**	*4* **1**	***20***
Потреба	***12***	***14***	***26***	***18***	***10***	

min{12,20}

12-12=0 14-13=1 26-15=11 18-18=0 10-9=1

1-1=0 11-11=0 1-1=0

$\sum_{j=1}^{n} b_j = 80; \quad \sum_{i=1}^{m} a_i = 80$

15-15=0

25-12=13 13-13=0

20-11=9 9-9=0

20-1=19 19-18=1 1-1=0

m=4, n=5, m+n-1=8

Z(x)=15*4+12*4+13*1+11*5+9*1+1*3+18*4+1*4=264

Побудова початкового опорного плану

Метод мінімальної вартості (за матрицею)

min{26,15}

b_i / a_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	10	7	4 **15**	6	8	15
A_2	4 **11**	1 **14**	10	5	8	25
A_3	7	4	5 **10**	8	1 **10**	20
A_4	10 **1**	3	6 **1**	4 **18**	4	20
Потреба	12	14	26	18	10	

$\sum_{j=1}^{n} b_j = 80; \quad \sum_{i=1}^{m} a_i = 80$

15-15=0

25-14=11 11-11=0

20-10=10 10-10=0

20-18=2 2-1=1 1-1=0

12-11=1 14-14=0 26-15=11 18-18=0 10-10=0

1-1=0

11-10=1

1-1=0

min{14,25}

min{20,10}

m=4, n=5, m+n-1=8

Z(x)=15*4+11*4+14*1+10*5+10*1+1*10+1*6+18*4=266

Перевірка плана на оптимальність

Теорема (**умова оптимальності опорного плану транспортної задачі**).

Опорний план $X^* = \{x_{ij}^*\}$ є оптимальним тоді і тільки тоді, коли існують числа u_i та v_j, для яких виконуються умови

$$u_i + v_j = c_{ij},\ x_{ij} > 0, \tag{8}$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij},\ x_{ij} = 0 \tag{9}$$

для всіх $i = \overline{1, m}$ та $j = \overline{1, n}$.

Величини u_i та v_j називають відповідно ***потенціалами*** постачальників та споживачів.

Перевірка плану на оптимальність

a_i \ b_i	B_1	B_2	…	B_N	*Запаси*	u_i
A_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1	u_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2	u_2
…					…	…
A_M	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m	u_m
Потреба	b_1	b_2	…	b_n		u_i
V_j	v_1	v_2	…	v_n		

Перевірка плану на оптимальність

1) Складаємо систему рівнянь

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

для всіх $x_{ij} > 0$
(заповнені клітинки таблиці, m+n-1 рівняння).

2) Знаходимо u_i , v_j $i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$

3) Обчислюємо $c'_{ij} = u_i + v_j$ для всіх $x_{ij} = 0$ (незаповнені клітинки таблиці).

4) Якщо всі $c'_{ij} \leq c_{ij}$, план є оптимальним, інакше – план не оптимальний і необхідно перейти до нового опорного плану.

Перевірка плану на оптимальність

b_i / a_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси	ui
A_1	10 **12**	7 **3**	16 4	19 6	10 8	15	$u_1 = 0$
A_2	4 4	1 **11**	10 **14**	13 5	13 8	25	$u_2 = -6$
A_3	-1 7	-4 4	5 **12**	8 **8**	8 1	20	$u_3 = -11$
A_4	-5 10	-8 3	1 6	4 **10**	4 **10**	20	$u_4 = -15$
Потреба	12	14	26	18	10		
v_j	$v_1 = 10$	$v_2 = 7$	$v_3 = 16$	$v_4 = 19$	$v_j = 19$		

$u_1 + v_1 = 10$

$u_1 + v_2 = 7$

$u_2 + v_2 = 1$

$u_2 + v_3 = 10$

$u_3 + v_3 = 5$

$u_3 + v_4 = 8$

$u_4 + v_4 = 4$

$u_4 + v_5 = 4$

План не оптимальний

Перехід до нового опорного плану

1. Визначити величину x_{ps}, для якої порушено умову оптимальності. Якщо клітинок, на яких порушується умова оптимальності, декілька, вибирають ту, якій відповідає найбільше значення величини $\Delta_{ij} = c'_{ij} - c_{ij}$, тобто $\Delta_{ps} = max\,\Delta_{ij}$.

2. Для вибраної клітинки будують цикл перерахування,

3. Виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці завжди знак «+», а всім іншим – почергово знаки «–» та «+»;

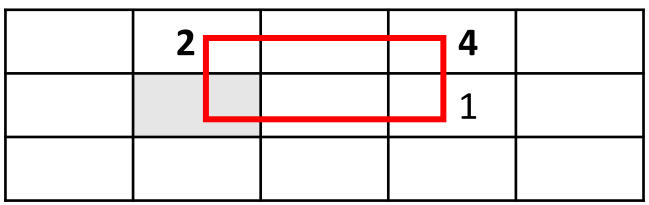
2) визначають величину θ, яка вказує, наскільки слід змінити величини перевезень в компенсаційному ланцюжку за правилом: $\theta = min(x_{ij}^{-})$;

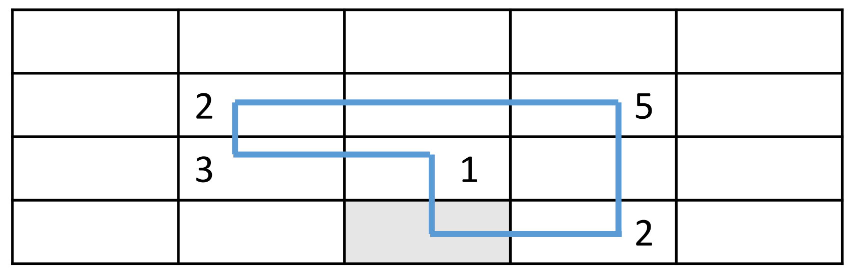
3) всі обсяги перевезень, що позначені в ланцюжку знаком «–», зменшуються на величину θ, а позначені знаком «+» – збільшуються на θ.

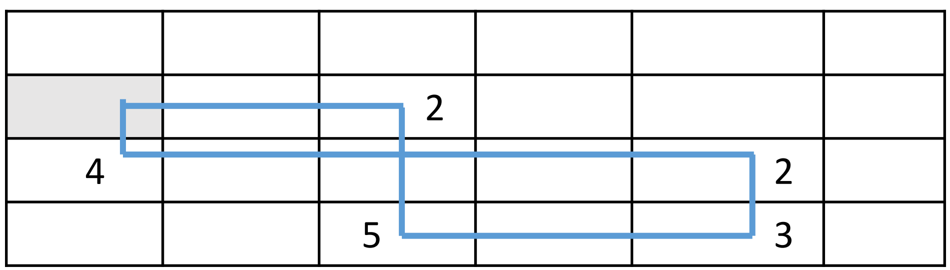
Перехід до нового опорного плану

Правило побудови циклу

Циклом у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці (повертають тільки під прямим кутом).







Перехід до нового опорного плану

b_i / a_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	*Запаси*	*ui*
A_1	10 **12**	- 7 **3**	16 4	19 6 +	10 8	15	u_1
A_2	4 4	+ 1 **11**	- 10 **14**	13 5	13 8	25	u_2
A_3	-1 7	-4 4	+ 5 **12**	8 - **8**	8 1	20	u_3
A_4	-5 10	-8 3	1 6	4 **10**	4 **10**	20	u_4
Потреба	12	14	26	18	10		
v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_j		

min {3, 14, 8}=3

Перехід до нового опорного плану

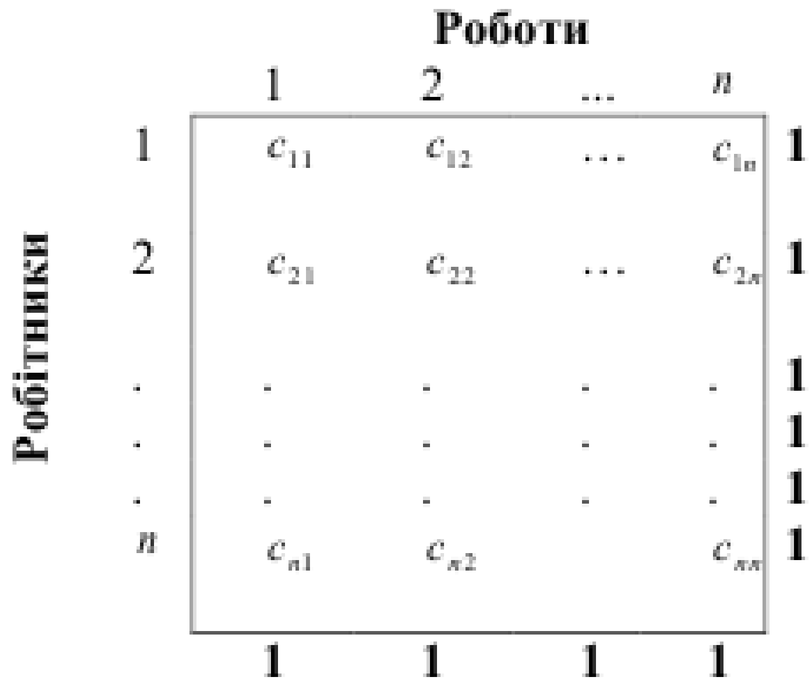
b_i / a_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	*Запаси*	*ui*
A_1	10 **12**	7	4	6 **3**	8	15	u_1
A_2	4	1 **14**	10 **11**	5	8	25	u_2
A_3	7	4	5 **15**	8 **5**	1	20	u_3
A_4	10	3	6	4 **10**	4 **10**	20	u_4
Потреба	12	14	26	18	10		
v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_j		

Z(x)=12*10+3*6+14*1+11*10+15*5+5*8+10*4+10*4=457

Z(x)пред=496

Задача про призначення

Нехай маємо *n* видів робіт і стільки ж робітників. Кожен робітник може виконати будь-яку роботу, але з різним ступенем майстерності. Якщо на деяку роботу призначають робітника саме тієї кваліфікації, яка необхідна для її виконання, вартість виконання цієї роботи буде нижчою, ніж при призначенні на цю роботу робітника іншої кваліфікації.



Мета – знайти такий розподіл робітників по всіх роботах, що є у наявності, щоб загальна вартість виконання комплексу робіт була мінімальною.

Задача про призначення

Математична модель

Знайти

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \left(i = \overline{1,n}\right);$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \left(j = \overline{1,n}\right);$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо робітник } i \text{ призначений на роботу } j \\ 0, & \text{у протилежному разі} \end{cases}$$

Угорський метод

1. У кожному рядку знаходять мінімальний елемент і віднімають його від інших елементів рядка.

2. В одержаній матриці у кожному стовпчику знаходять мінімальний елемент і віднімають його від інших елементів відповідних стовпчиків.

3. У отриманій матриці нульові елементи визначають оптимальний розв'язок.

$$C1 = \begin{pmatrix} 15 & 10 & \mathbf{9} & 12 \\ 9 & 15 & 10 & \mathbf{8} \\ 10 & 12 & \mathbf{8} & 9 \\ 12 & 15 & \mathbf{10} & 10 \end{pmatrix}.$$

$$C2 = \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ \mathbf{1} & 7 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

$$Cp = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В кожному рядку та стовпці є один нуль

Мінімальне значення цільової функції

Z=**9**+**8**+**8**+**10**+**1**+**1**=37

Угорський метод

Приклад

$$C1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 10 & 9 \\ 4 & 5 & 11 & 7 \\ 8 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$C3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & \mathbf{0} & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

!!! **Відсутній розв’язок**

Угорський метод

Додаткові кроки

1. У матриці проводять мінімальну кількість горизонтальних і вертикальних прямих для закреслення всіх нульових елементів.

2. Знаходять найменший невикреслений елемент: віднімають його від інших невикреслених елементів і додають до елементів, що знаходяться на перетині проведених на попередньому кроці прямих.

3. Якщо оптимальний розв'язок не отримано, повторюють кроки 1,2.

$$C3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0	3	5	2
~~2~~	~~0~~	~~0~~	~~2~~
0	1	7	3
~~3~~	~~2~~	~~0~~	~~0~~

$$C4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мінімальне значення цільової функції

Z=1+7+4+5+3+1=21

Тема 7. Цілочислові задачі

Постановка задачі дискретного програмування

Дискретними задачами дослідження операцій називають задачі, в яких одна, декілька або всі змінні набувають лише дискретних значень.

Задачі ***цілочисельного*** програмування (ЦЛП) – це задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень.

$$\max(min)\, F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \qquad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1, n}\right)$$

$$x_j \ - \text{цілі числа} \left(j = \overline{1, n}\right)$$

Особливості задач дискретного програмування

1. **Нерегулярність.** Дискретні задачі характеризуються тим, що область допустимих значень не опукла та незв’язна.

2. Складності при визначенні околу. Близькі одна до одної точки можуть суттєво відрізнятися за значеннями функції в них. Тому в задачах дискретного програмування близькість двох точок x_1 та x_2 множини *G* визначається за оцінюванням значень функції в цих точках $f(x_1)$ та $f(x_2)$.

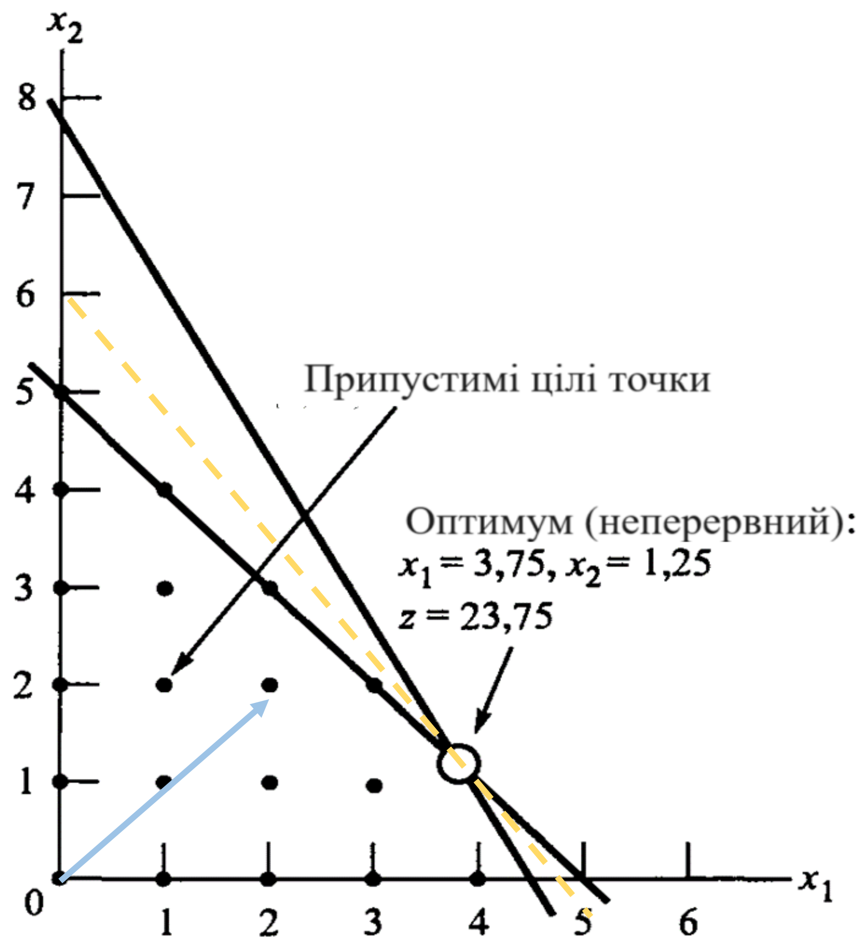
3. Виконання перебору значної кількості варіантів допустимих рішень **потребує застосовування ЕОМ** з великою обчислювальною потужністю.

Необхідність спеціальних методів

Максимізувати $z = 5x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\ \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ - \text{цілі} \end{cases}$$

Округлення оптимального розв'язку ***не гарантує отримання оптимального розв'язку*** *цілочислової задачі.*



Основні групи методів

– **методи відтинання** – основна ідея – поступове «звуження» області допустимих розв'язків задачі, яка розглядається:

- методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);
- методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

– **комбінаторні методи** – реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів:

- метод гілок і меж.

Метод гілок та меж для задачі ЦЛП

1. На множині допустимих планів G_0 знаходять оптимальне значення функції цілі, відкинувши умови цілочисельності. При цьому знаходять оцінку функції якості отриманого плану. Якщо план *X0* задовольняє умовам цілочисельності, він вважається оптимальним для ЗЛП. Інакше – переходимо до п.2.

2. Починають розвивати процес розгалуження. Для цього вибирають деяку нецілочислову компоненту $x_j = x_{j0}, 1 \leq j \leq n$. При цьому множину G_0 розбивають на дві підмножини $G_0 \subset G_j^{(1)} \cup G_j^{(2)}$, що не перетинаються.

Операцію реалізіють так:

$$G_j^{(1)} = \{\bar{x}: \bar{X} \in G_0; x_j \leq [x_{j0}]\},$$

$$G_j^{(2)} = \{\bar{x}: \bar{X} \in G_0; x_j \geq [x_{j0}] + 1\}.$$

3. Розв’язуємо отримані задачі, змінюючи при цьому оцінку якості на кращу . Якщо при цьому отримано цілочисельноий розв’язок, він буде оптимальним, інакше переходимо до п.2.

Приклад розв'язування задачі ЦЛП

ЛП0: z= $5x_1$+$4x_2 \to$ max

$x_1 + x_2 \leq 5$

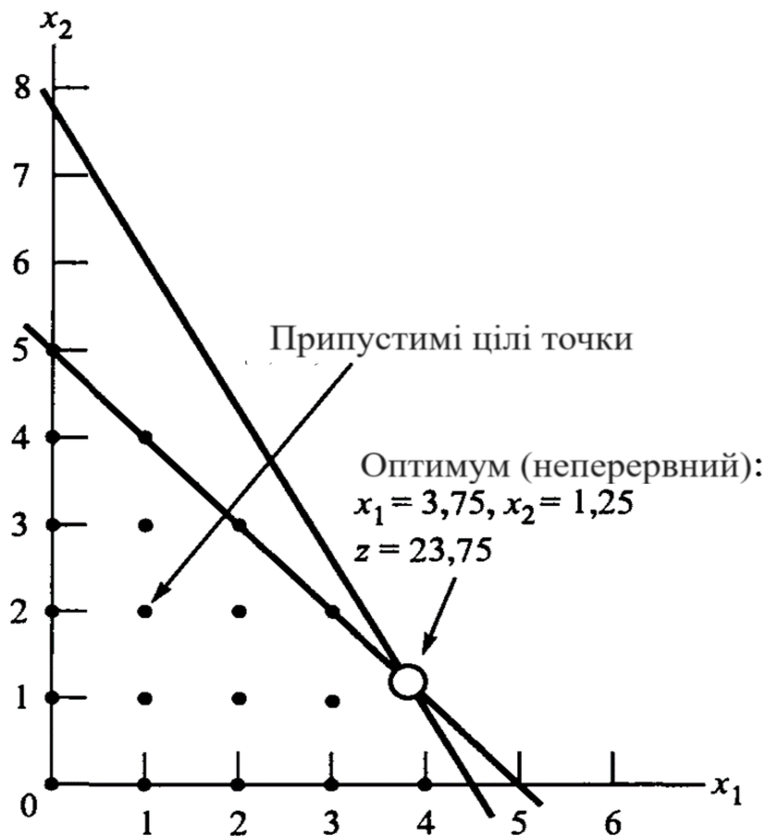
$10x_1 + 6x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Оптимальний розв'язок:
$x_1 = 3{,}75$; x_2=1,25; z= 23,75

$x_1 = 3{,}75;$

$x_1 \leq 3$ $x_1 \geq 4;$



Приклад розв'язування задачі ЦЛП

ЛП1: $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$10x_1 + 6x_2 \leq 45$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \geq 0$

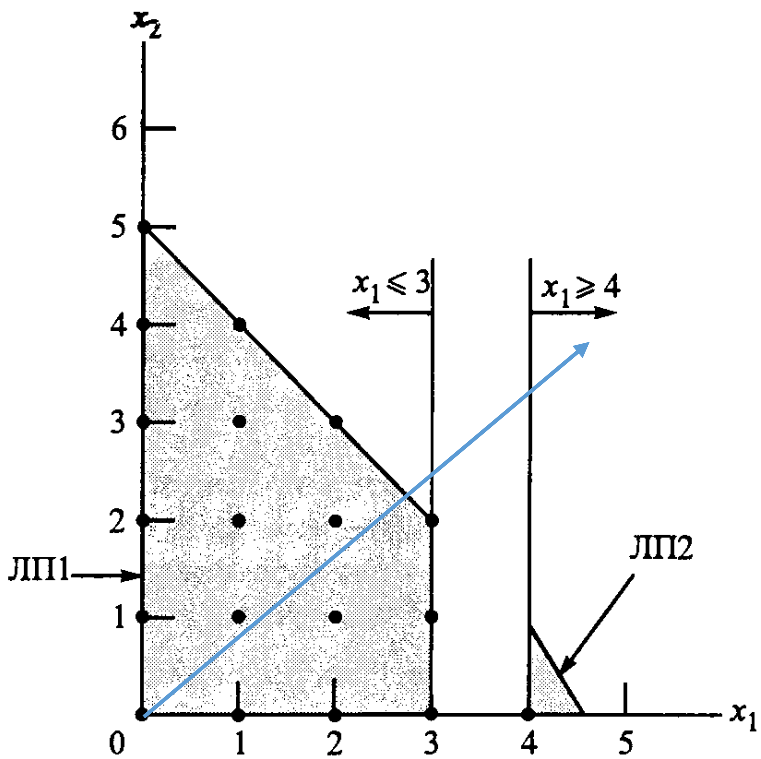
ЛП2: $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$10x_1 + 6x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 4$

$x_2 \geq 0$



Приклад розв'язування задачі ЦЛП

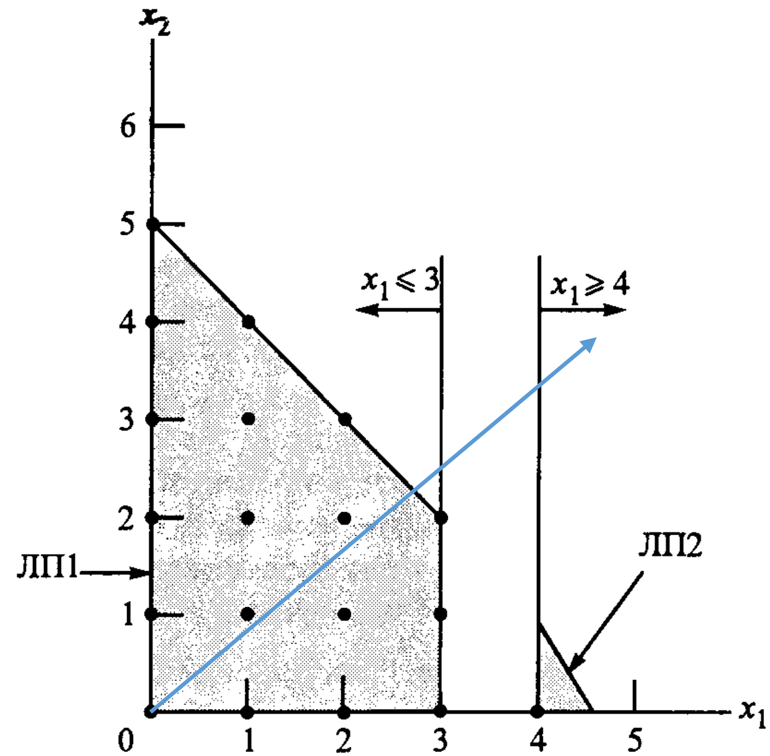
$x_1 = 3{,}75;$

$x_1 \leq 3$ | $x_1 \geq 4;$

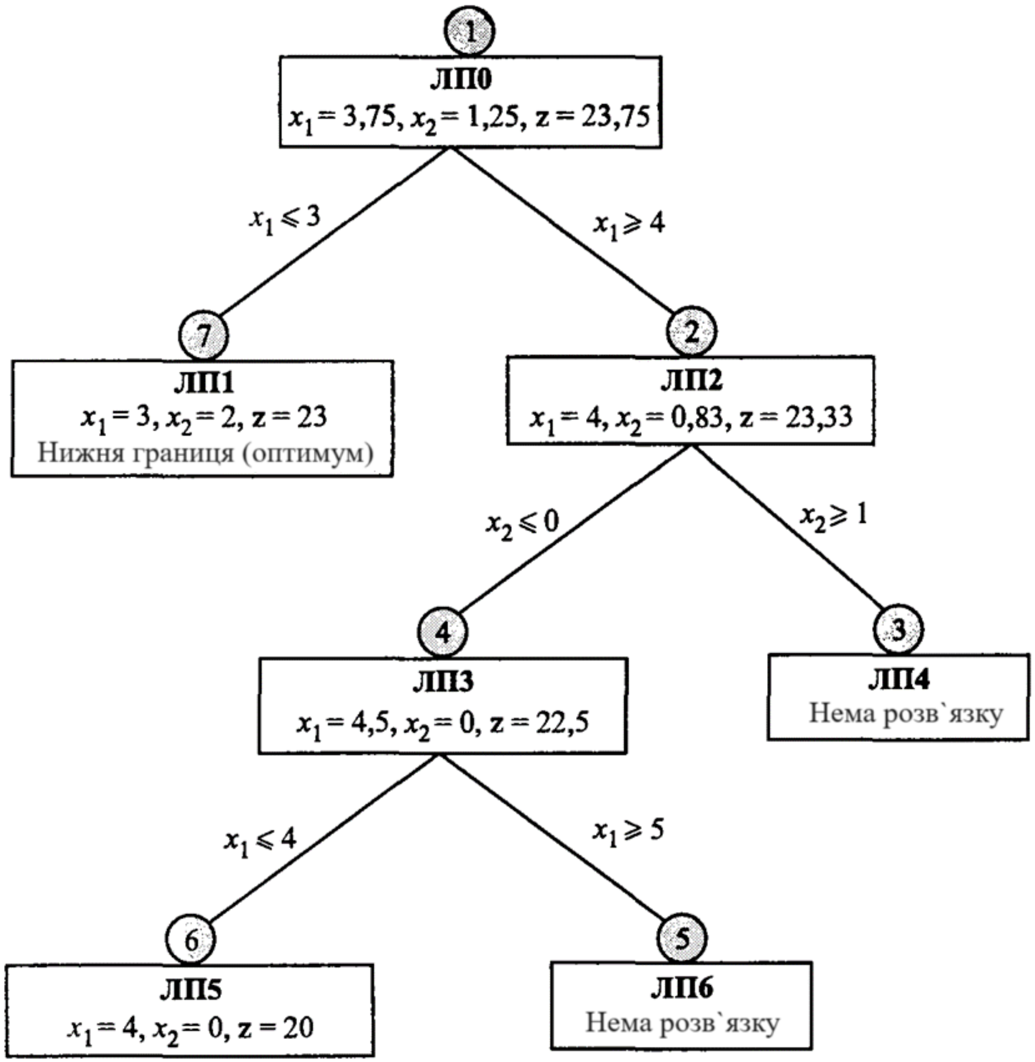
$x_1 = 3$
$x_2 = 2$
$z = 23$

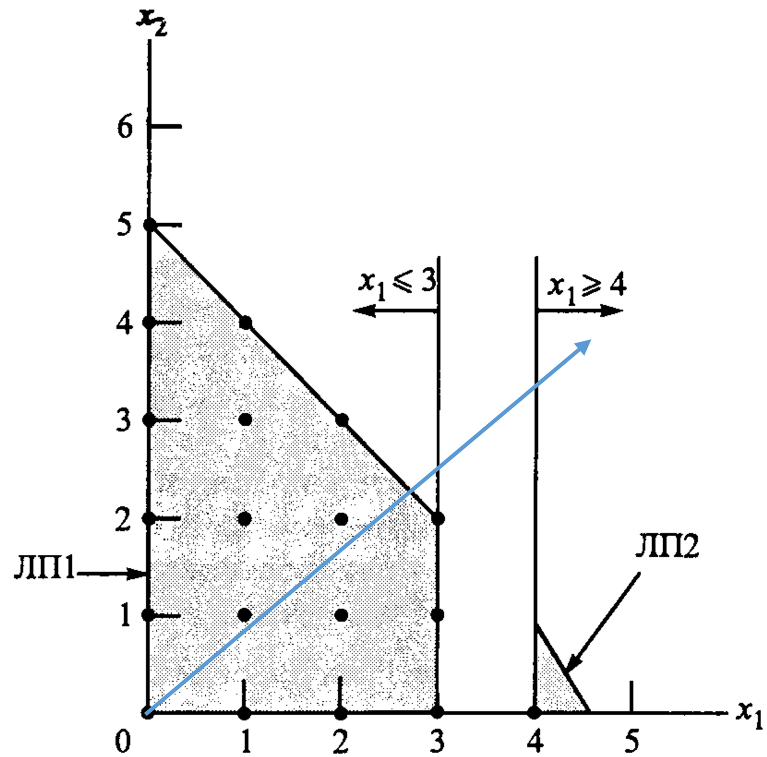
$x_1 = 4$
$x_2 = 0{,}83$
$z = 23{,}33$

Нижня границя (оптимум)

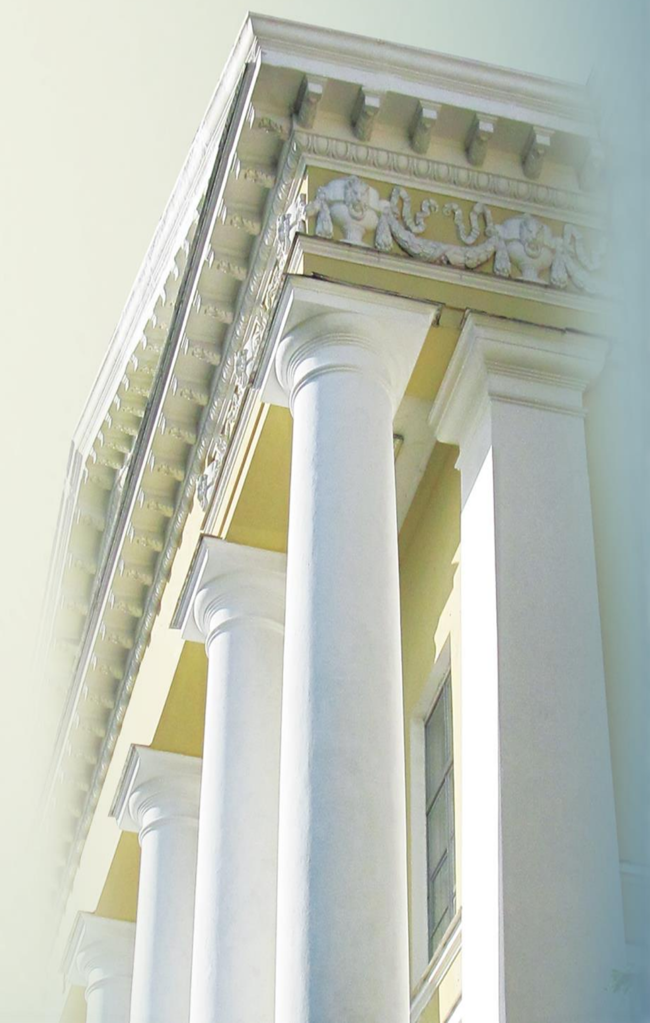


Приклад розв’язування задачі ЦЛП





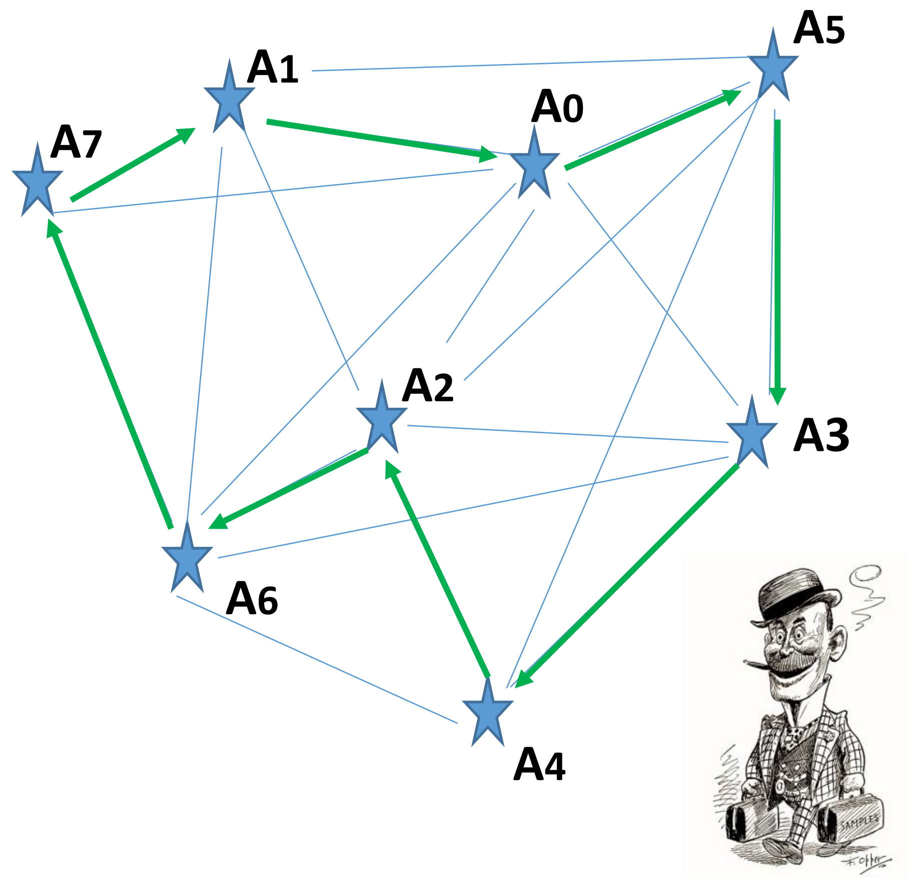
Тема 8. Задача комівояжера. Метод гілок і меж



Задача комівояжера (ЗК)

Є кількість міст і відстані між ними. Комівояжер (роз'їзний торговець) повинен виїхати з першого, відвідати по одному разу в певному порядку всі інші і повернутися в початковий пункт.

Необхідно знайти такий порядок відвідування міст, щоб довжина замкнутого маршруту комівояжера була мінімальною.



Математична постановка задачі

I. Задано квадратну матрицю вартостей $[d_{ij}]_n$, d_{ij} - цілі, невід'ємні, довільні числа, $d_{ii} = \infty$.

Потрібно знайти циклічну перестановку τ^* її стовпчиків, яка мінімізує функцію

$$D(\tau) = \sum_{i=1}^{n} d_{i\tau[i]}.$$

$\tau = (\tau[1], \tau[2], \ldots, \tau[n])$ – циклічна перестановка, якій відповідає маршрут комівояжера $(\tau[1], \tau[2], \ldots, \tau[n], \tau[1])$.

Величина $D(\tau)$ - вартість маршруту.

Задача комівояжера (ЗК)

II. Задано квадратну матрицю відстаней між пунктами $A_1, \ldots, A_n$: $\left[c_{ij}\right]_n$,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо здійснюється перехід з } A_i \text{ в } A_j, \\ 0, \text{ в противному випадку, } \quad i \neq j, i, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \forall i = \overline{1, n}, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \forall j = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad \forall i, j = \overline{2, n}, u_2, \ldots, u_n \text{ – довільні змінні} \qquad (4)$$

$$x_j = 0 \vee 1 \quad i, j = \overline{1, n} \qquad (5)$$

Обмеження (4) призначені забезпечити зв’язність маршруту комівояжера - вони виключають з розгляду довільний цикл, що не проходить через пункт 1.

Метод Літтла

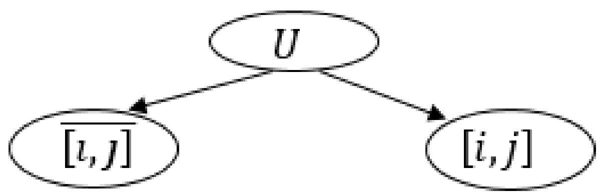
0. Нехай U – множина всіх допустимих маршрутів комівояжера.

1. За деяким правилом оцінюємо знизу довжини всіх її елементів.

2. Множину U розбиваємо на дві підмножини, базуючись на тому, що переїзд з міста i до міста j може бути включений в оптимальний маршрут або виключений з нього.

Першу підмножину $[i, j]$ складають всі маршрути, які містять безпосередній переїзд з міста i до міста j,

другу $\overline{[i, j]}$ – маршрути, які не містять безпосередній переїзд з міста i до міста j.



Ідея методу гілок та меж. Метод Літтла

3. Для кожної з підмножин за тим самим правилом, що й для U, визначаємо нижню границю довжин всіх її маршрутів.

4. Порівнюючи отримані величини, виявляємо ту підмножину, яка з найбільшою ймовірністю містить оптимальний маршрут. Вона аналогічно **розбивається на дві**, і знову **уточнюються нижні границі** довжин всіх маршрутів, і так до тих пір, поки не буде знайдений єдиний цикл.

5. Аналізуємо дерево розв’язування.

Якщо серед обірваних його гілок виявляться такі, що мають нижню оцінку довжин всіх своїх елементів, меншу за довжину побудованого маршруту, ці гілки за таким самим правилом розгалужуємо доти, поки або не буде знайдений маршрут меншої довжини, або не переконаємося у відсутності кращого серед цих підмножин.

Гілки, для яких виявиться, що нижня границя перевищує або дорівнює довжині знайденого маршруту, **виключаються** з подальшого розгляду.

Обчислення нижньої границі для відповідних підмножин

Обчислення оцінок базується на тому, що зміна довжини всіх шляхів, які ведуть в дане місто, або всіх шляхів, котрі виходять з даного міста на одну й ту саму величину, приводить до нової задачі, оптимальний маршрут якої збігається з оптимальним маршрутом початкової задачі.

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[a_i=\min\limits_j c_{ij}]{} C^1=\begin{pmatrix} {c_{11}}^1 & {c_{12}}^1 & \dots & {c_{1n}}^1 \\ {c_{21}}^1 & {c_{22}}^1 & \dots & {c_{2n}}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {c_{n1}}^1 & {c_{n2}}^1 & \dots & {c_{nn}}^1 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_j=\min\limits_i {c_{ij}}^1]{} C^2=\begin{pmatrix} {c_{11}}^2 & {c_{12}}^2 & \dots & {c_{1n}}^2 \\ {c_{21}}^2 & {c_{22}}^2 & \dots & {c_{2n}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {c_{n1}}^2 & {c_{n2}}^2 & \dots & {c_{nn}}^2 \end{pmatrix}$$

$${c_{ij}}^1=c_{ij}-a_i,\ i=1,\dots,n,j=1,\dots,n \qquad {c_{ij}}^2={c_{ij}}^1-b_j, i=1,\dots,n, j=1,\dots,n.$$

Величини $a_i, i=1,\dots,n$ та $b_j, j=1,\dots,n$ називаються ***константами зведення***, матриця C^2 – ***зведеною***

$$\boldsymbol{h}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a_i}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{b_j},$$

де h – ***нижня грань*** функції цілі на множині U. Тому $m(U)=h$.

Вибір дуги (i, j),

яка задає розбиття множини, що розглядається, на дві підмножини

Виключенню переходу (i, j) з маршруту відповідає заміна $c_{ij} = \infty$ у вихідній (або зведеній) матриці відстаней.

Отже, з'являється можливість провести додаткове зведення матриці та уточнити нижню оцінку довжин всіх маршрутів, що включені до відповідної підмножини.

Включення переходу (i, j) до маршруту комівояжера означає:

1) скорочення розмірності матриці (викреслюється i-й рядок та j-й стовпчик);
2) виключення переходу (j, i) з метою уникнення появи замкненого маршруту, який не проходить через всі пункти;
3) можливість покращення нижньої оцінки довжин всіх маршрутів, що увійдуть для створеної підмножини.

Вибір дуги (i, j),

яка задає розбиття множини, що розглядається, на дві підмножини

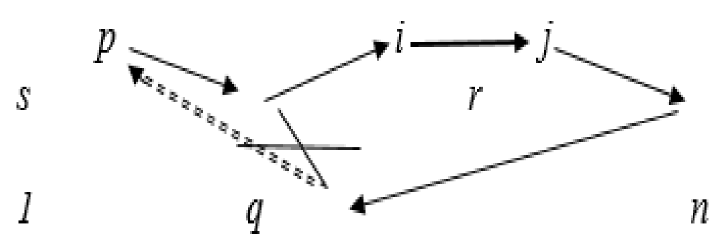


Рис. 1. Виключення переходу (q,p)

Найбільш імовірно, що до оптимального маршруту будуть включені ті переходи (i, j), для яких в зведеній матриці $c_{ij} = 0$.

Заборона включення саме цих дуг суттєво збільшує нижню оцінку довжин всіх таких маршрутів, оскільки виключення дуги (i, j) означає заміну $c_{ij} = \infty$, і отриману матрицю можна додатково звести, враховуючи константи зведення в i-му рядку та j-му стовпчику.

Найбільш вагоме зростання нижньої оцінки викликає той елемент зведеної матриці відстаней, для якого:

а) $c_{ij} = 0$,

б) величина $\theta_{ij} = \min_{m \neq i} c_{mj} + \min_{k \neq j} c_{ik}$ є максимальною.

Обчислювальна схема методу Літтла

1. Здійснюється зведення матриці відстаней С, яка відповідає допустимій множині U. В результаті отримуємо матрицю C^0 (далі С).

   Нехай $m* = \infty, k = 0, [i_0, j_0] = \mathrm{U}$.

2. Обчислюється сума констант зведення $h = \sum_i a_i + \sum_j b_j$.

   $m([i_0, j_0]) = h = \sum_i a_i + \sum_j b_j$.

3. $k = k + 1$.

4. Обираються претенденти для включення в маршрути множини $[i_k, j_k]$ – пари (i, j), для яких $c_{ij} = 0$.

   Для них розраховуються величини $\theta_{ij} = \min\limits_{m \neq i} c_{mj} + \min\limits_{k \neq j} c_{ik}$.

Обчислювальна схема методу Літтла

(продовження)

5. Визначається $\theta_{i_k j_k} = \max_{ij} \theta_{ij}$ для всіх c_{ij}, що дорівнюють нулю. Пара (i_k, j_k) буде ініціювати розгалуження. Вона включається в усі маршрути множини $[i_k, j_k]$ і забороняється в $\overline{[i_k, j_k]}$.

6. В матриці C елемент $c_{j_k i_k}$ замінюється на ∞. Над отриманою матрицею здійснюється операція додаткового зведення. В результаті отримуємо матрицю $\bar{C}$, що відповідає множині $\overline{[i_k, j_k]}$. Сума констант зведення - $\theta_{i_k j_k}$, і оцінка довжин маршрутів з $\overline{[i_k, j_k]}$:

$$m\left(\overline{[i_k, j_k]}\right) = m([i_{k-1}, j_{k-1}]) + \theta_{i_k j_k}.$$

Якщо вона не менша за межу $m*$, цю множину вважаємо **прозондованою**.

Обчислювальна схема методу Літтла

(продовження)

7. В матриці C викреслюється i_k-й рядок, j_k-й стовпчик, задається деяке $c_{qp} = \infty$, якщо перехід (q,p) приводить до виникнення підциклу.

Отримана матриця зводиться, обчислюється сума констант зведення $d_1{}^k$.

Розраховується оцінка множини $m([i_k, j_k])$.

Коли $m([i_k, j_k]) \geq m*$, множина вважається прозондованою і виконується п. 9, якщо ні, запам'ятовується пара (i_k, j_k).

8. Якщо порядок матриці C дорівнює 2, множина $[i_{k+1}, j_{k+1}]$ складається з єдиного маршруту. Додаємо до поточного маршруту два переходи, що залишилися в цій матриці, і замикаємо його.

Величина $m([i_{k+1}, j_{k+1}])$ визначає довжину шляху комівояжера.

Отриманий цикл запам'ятовується як **претендент на оптимальний**.

Верхня межа $m*$ стає такою, що дорівнює довжині цього маршруту.

Обчислювальна схема методу Літтла

(продовження)

9. Оцінки всіх підмножин, які не було прозондовано, порівнюються з новою верхньою межею $m*$. Ті з них, що більші за неї або дорівнюють їй, виключаються з розгляду (зондуються).

10. Якщо висячих вершин немає, процес зупиняється. **Розв'язком задачі є маршрут**, котрий було занотовано як претендент на оптимальний (довжина його дорівнює $m*$).

Переглядаються всі висячі вершини дерева та знаходиться та, яка має мінімальну оцінку. Вона підлягає розгалуженню.

Здійснюється перехід до п. 3.

Приклад розв’язання ЗК

Розв'яжемо задачу комівояжера з наступною матрицею відстаней C

$$
\begin{matrix}
\infty & 1 & 2 & 5 & 2 \\
1 & \infty & 5 & 6 & 4 \\
6 & 3 & \infty & 4 & 2 \\
5 & 1 & 1 & \infty & 5 \\
4 & 3 & 4 & 2 & \infty
\end{matrix}
$$

Нехай початковий руху (1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,1).
Вартість такого переміщення:
F=1+5+4+5+4=19.

Приклад розв'язування задачі

Знайдемо нижню оцінку довжини всіх гамільтонових контурів

$$h = \sum_{i=1}^{5} a_i + \sum_{j=1}^{5} b_j \,,$$

де $a_i = \underset{j=\overline{1,5}}{\min} c_{ij};\, b_j = \underset{i=\overline{1,5}}{\min}(c_{ij} - a_i)\ \forall i, j$:

	1	2	3	4	5	a_i
1	∞	1	2	5	2	1
2	1	∞	5	6	4	1
3	6	3	∞	4	2	2
4	5	1	1	∞	5	1
5	4	3	4	2	∞	2

	1	2	3	4	5
1	∞	0	1	4	1
2	0	∞	4	5	3
3	4	1	∞	2	0
4	4	0	0	∞	4
5	2	1	2	0	∞
b_j	0	0	0	0	0

h =1+1+2+1+2=7.

Отже, оптимальна вартість h ≤ F* ≤ F або 7 ≤ F* ≤ 19 .

Приклад розв'язування задачі

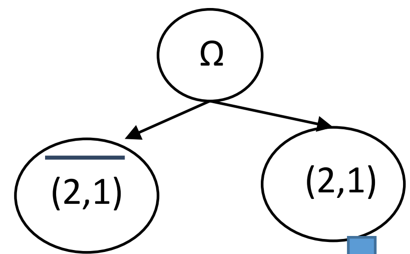
	1	2	3	4	5
1	∞	0	1	4	1
2	0	∞	4	5	3
3	4	1	∞	2	0
4	4	0	0	∞	4
5	2	1	2	0	∞

Розраховуємо $\theta_{ij} = \min_{m\neq i} c_{mj} + \min_{k\neq j} c_{ik}$

$$\left.\begin{aligned}
\theta_{12} &= 1+0=1\\
\theta_{21} &= 3+2=5\\
\theta_{35} &= 1+1=2\\
\theta_{42} &= 0+0=0\\
\theta_{43} &= 0+1=1\\
\theta_{54} &= 1+2=3
\end{aligned}\right\} \quad \text{Max } (2,1)=5$$

θ_{12}

	1	2	3	4	5
1	∞	0	1	4	1
2	0	∞	4	5	3
3	4	1	∞	2	0
4	4	0	0	∞	4
5	2	1	2	0	∞



h =h+5=7+5=12

	1	2	3	4	5	a
1	∞	0	1	4	1	0
2	∞	∞	4	5	3	3
3	4	1	∞	2	0	0
4	4	0	0	∞	4	0
5	2	1	2	0	∞	0
b	2	0	0	0	0	

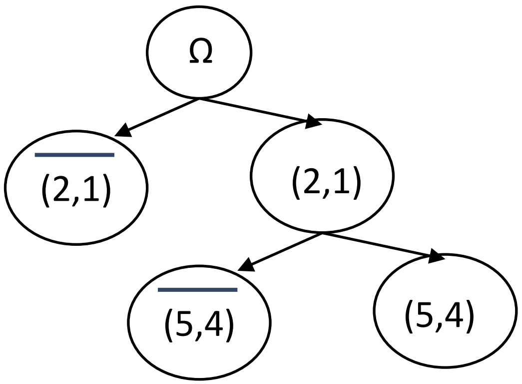
h =h+1=7+1=8

	2	3	4	5	a
1	∞	1	4	1	1
3	1	∞	2	0	0
4	0	0	∞	4	0
5	1	2	0	∞	0
b	0	0	0	0	

Приклад розв'язування задачі

0	2	3	4	5
1	∞	0	3	0
3	1	∞	2	0
4	0	0	∞	4
5	1	2	0	∞

$$\left.\begin{array}{l}\theta_{13} = 0+0=0 \\ \theta_{15} = 0+0=0 \\ \theta_{35} = 1+0=1 \\ \theta_{42} = 0+1=1 \\ \theta_{43} = 0+0=0 \\ \theta_{54} = 1+2=3\end{array}\right\} \text{Max } (5,4)=3$$



$h = h+5 = 8+4 = 12$

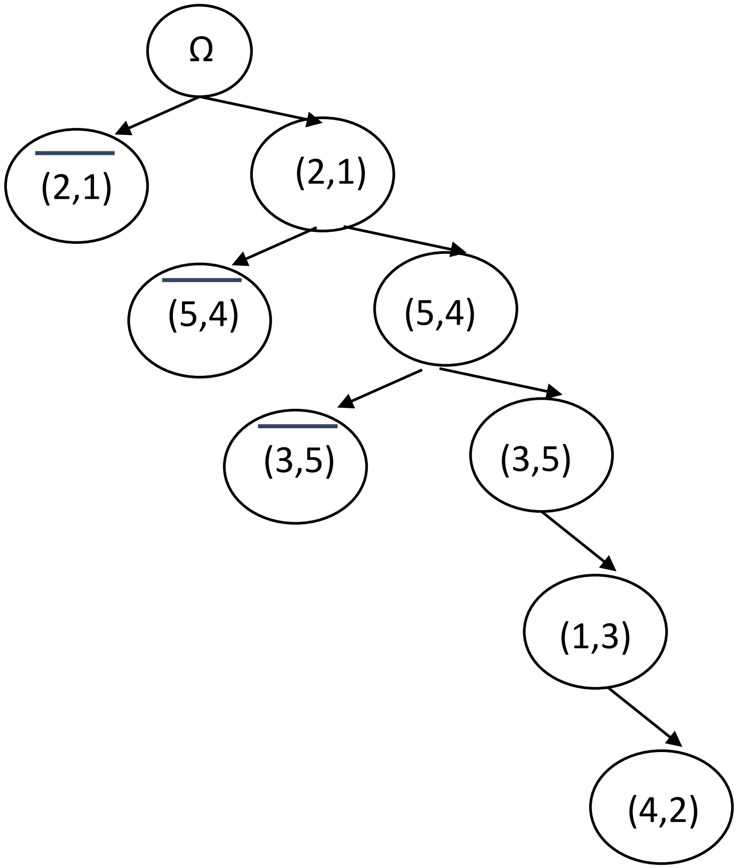
	2	3	4	5	a
1	∞	1	4	1	1
3	1	∞	2	0	0
4	0	0	∞	4	0
5	1	2	∞	∞	1
b	0	0	2	0	

$h = h+1 = 8+0 = 8$

	2	3	5	a
1	∞	0	0	0
3	1	∞	0	0
4	0	0	∞	0
b	0	0	0	

$$\left.\begin{array}{l}\theta_{13} = 0+0=0 \\ \theta_{15} = 0+0=0 \\ \theta_{35} = 1+0=1 \\ \theta_{42} = 0+1=1 \\ \theta_{43} = 0+0=0\end{array}\right\} \text{Max } (3,5)=1$$

Приклад розв'язування задачі

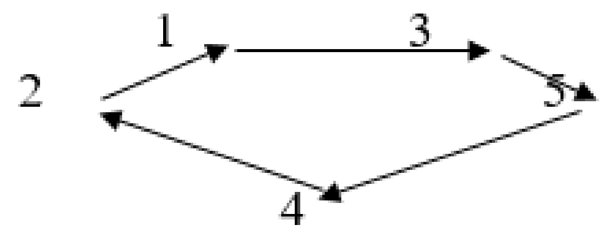


h =h+1=8+1=9

	2	3	5	a
1	∞	0	0	0
3	1	∞	∞	1
4	0	0	∞	0
b	0	0	0	

h =h+0=8+0=8

	2	3	a
1	∞	0	0
4	0	∞	0
b	0	0	



Оптимальний маршрут комівояжера

Тема 9. Динамічне програмування. Принцип оптимальності Беллмана

Динамічне програмування

Динамічне програмування – метод оптимізації, що застосовується до операцій, в яких процес ухвалення рішення може бути розбитий на етапи (кроки). Такі процеси називають ***багатокроковими*****.**

Приклади багатокрокових процесів

- економічний процес розподілу коштів між підприємствами,
- використання ресурсів протягом низки років,
- заміна та ремонт устаткування,
- визначення часу поповнення запасів і т.п.

Постановка задачі динамічного програмування

Нехай розглядається ***керований процес***.

В результаті керування система (об'єкт керування) $\boldsymbol{S}$ переводиться з початкового стану $\mathbf{s_0}$ у стан $\hat{\boldsymbol{s}}$.

Припустимо, що керування можна розбити на *n* кроків.

Рішення приймається послідовно на кожному кроці, а керування, що переводить систему *S* із початкового стану в кінцевий, є сукупність *n* покрокових керувань.

X_k - керування на *k-му* кроці $(k=l, 2, ..., n)$.

$X(X_1, X_2, ..., Xn)$ – керування, що переводить систему *S* зі стану s_0 у стан $\hat{s}$.

s_k - стан системи після *k-го* кроку керування

$s_0, s_1, ..., s_{k-1}, s_k..., s_{n-1}, s_n=\hat{s}$ - послідовність станів

Схема прийняття рішень в задачах ДП

$$S_0 \xrightarrow{X_1} S_1 \xrightarrow{X_2} S_2 \xrightarrow{X_3} \ldots \xrightarrow{X_n} S_n$$

Показник ефективності керованої операції – цільова функція – залежить від початкового стану і керування:

$$Z=F(s_0,X). \qquad (1)$$

Властивості задачі ДП

1. Стан S_k системи наприкінці *k-го* кроку залежить тільки від попереднього стану S_{k-1} і керування на *k-му* кроці X_k. Ця вимога називається «***відсутністю зворотного зв'язку***»:

$$s_k = f_k(s_{k-1}, X_k)\,, \quad k= 1,2,\ldots,n, \qquad (2)$$

(2) називаються *рівняннями станів.*

2. Цільова функція (1) є ***адитивною від показників ефективності кожного кроку***. Якщо

$Z_k = f_k(s_{k-1}, X_k)\,,$ $k=1,\ldots,n,$ - показник ефективності *k-го* кроку, то цільова функція

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1}, X_k)\,. \qquad (3)$$

Динамічне програмування

Задача ДП: визначити таке припустиме керування *X,* що переводить систему *S* зі стану s_0 у стан $\hat{s}$, при якому цільова функція (3) приймає найбільше (найменше) значення

Принцип оптимальності Беллмана

Для будь-якого стану ***s*** *системи, отриманого в результаті якого-небудь числа кроків, на найближчому кроці потрібно вибирати керування так, щоб воно в сукупності з оптимальним керуванням на всіх наступних кроках приводило до оптимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний.*

Рівняння Беллмана

Замість вихідної задачі ДП із фіксованим числом кроків *п* і початковим станом s_0 розглянемо послідовність задач, приймаючи послідовно n=1, 2, ... при різних станах системи *s.*

Однокроковий процес

n-й крок: $s_{n\text{-}1}$ – стан системи на початку n-го кроку, $s_n = \hat{s}$ – кінцевий стан,
X_n – керування на n-му кроці,
$f_n(s_{n\text{-}1}, X_n)$ – цільова функція (виграш) n-го кроку.

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{X_n} f_n(s_{n-1}, X_n)\,. \qquad (4)$$

Рішення $X^*_n(s_{n\text{-}1})$, при якому досягається $Z_n^*(s_{n-1})$, називається ***умовним оптимальним керуванням на п-му кроці***.

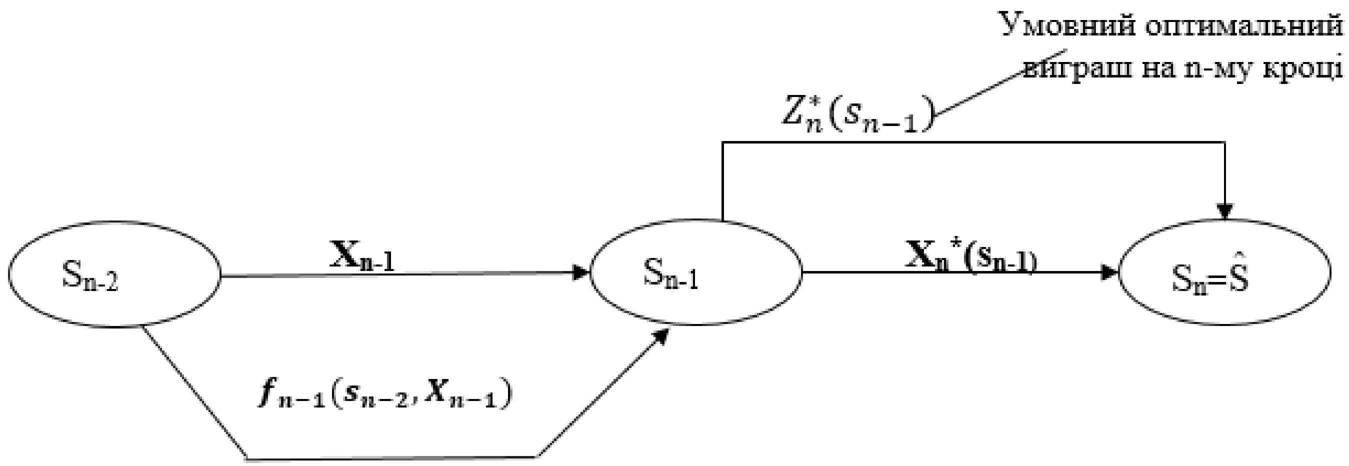
Рівняння Беллмана

Двокроковий процес

(n -1),n-й кроки: s_{n-2} – стан системи на початку (n-1)-го кроку,

X_{n-1} – керування на n-му кроці,

$f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1})$ – цільова функція (виграш) (n-1)-го кроку



$$X_{n-1}^*(s_{n-2}): \quad Z_{n-1}^*(s_{n-2}) = \max_{X_{n-1}}[f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1})]. \qquad (5)$$

Рівняння Беллмана

(n-k)-кроковий процес

K, (k+1), …n-й кроки: s_{n-k} – стан системи на початку ***k***-го кроку,

X_k – керування на ***k*** -му кроці,

$f_k(s_{k-1}, X_k) + Z^*_{k+1}(s_k)$ – цільова функція

$X^*_k(s_{k-1})$:

$$Z^*_k(s_{k-1}) = \max_{Xk}[f_k(s_{k-1}, X_k) + Z^*_{k+1}(s_k)] \,, \quad (6)$$

рівняння Беллмана

де $k = n$-1, n-2, …, 2, 1.

$X^*_k(s_{k-1})$ називається ***умовним оптимальним керуванням на k-му кроці***

Внаслідок умовної оптимізації знаходимо:

$$Z^*_n(s_{n-1}) ,…, Z^*_{k+1}(s_k), Z^*_k(s_{k-1}),…, Z^*_1(s_0),$$

$$X^*_n(s_{n-1}) ,…, X^*_{k+1}(s_k), X^*_k(s_{k-1}),…, X^*_1(s_0) \,.$$

$$\boldsymbol{Z_{max} = Z^*_1(s_0)}$$

Рівняння Беллмана

$Z_{max} = Z_1^*(s_0)$ ⇨ $X_1^* = X_1^*(s_0)$ ⇨ $s_1 = \phi_1(s_0, X_1^*)$ ⇨ $X_2^* = X_2^*(s_1)$ ⇨

і т.д. за ланцюжком

$$s_0 \Rightarrow X_1^* \to s_1^* \Rightarrow X_2^* \to s_2^* \Rightarrow \ldots \Rightarrow X_{n-1}^* \to s_{n-1}^* \Rightarrow X_n^* \to s_n^* = \hat{s}$$

$X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$ - оптимальне керування

Альтернативою до ДП є ***метод повного перебору***.

Переваги методу ДП:

- на етапі умовної оптимізації *відкидаються варіанти, які свідомо є неоптимальними*.
- *можливість аналізу розв'язку на чутливість* до зміни початкового стану s_0 та кількості кроків *n*.

Приклад задачі ДП

Задача про заміну обладнання

Дані: первісна вартість обладнання $p_o = 4000$;
його ліквідна вартість – $\phi(t) = p_o 2^{-t}$;
вартість зберігання протягом року – $r(t) = 0{,}1 p_o (t+1)$;
t – вік устаткування,
n = 5 – термін експлуатації, наприкінці якого воно продається.

Критерій оптимальності – сумарні витрати на експлуатацію устаткування протягом n років з урахуванням первісної купівлі і наступного продажу.

Визначити оптимальні терміни заміни устаткування.

Приклад задачі ДП

Постановка завдання: потрібно розподілити **90 тис. грн** між чотирма підрозділами підприємства таким чином, щоб воно в цілому отримало найбільший прибуток. Залежність одержуваної величини від об'ємів виділених грошових коштів наведена в таблиці

Обсяги	10	20	30	40	50	60	70	80
Підрозділ 1	27	35	49	56	61	72	79	75
Підрозділ 2	23	36	45	55	57	69	78	88
Підрозділ 3	19	38	39	62	67	60	77	81
Підрозділ 4	25	37	37	56	61	70	73	89

Розв'язування методом динамічного програмування

1 етап.

Підрозділ/ Виділені кошти	10	20	30	40	50	60	70	80
1	27	35	49	56	61	72	79	75

Розв'язування методом динамічного програмування

2 етап.

2 \ 1	10-27*	20-35	30-49	40-56	50-61	60-72	70-79	80-75
10-23	20-50*	30-58	40-72*	50-79	60-84	70-95	80-102	90-98
20-36	30-63*	40-71	50-85*	60-92	70-97	80-108	90-115	
30-45	40-72*	50-80	60-94*	70-101	80-106	90-117		
40-55	50-82	60-90	70-104*	80-111*	90-116			
50-57	60-84	70-92	80-106	90-113				
60-69	70-96	80-104	90-118*					
70-78	80-105	90-113						
80-88	90-115							

Розв'язування методом динамічного програмування

3 етап.

3 \ 1+2	10-27*	20-50*	30-63	40-72	50-85	60-94	70-104	80-111	90-118
10-19	20-46	30-69*	40-82	50-91	60-104	70-113	80-123	90-130	
20-38	30-65	40-88*	50-101*	60-110	70-123	80-132	90-142		
30-39	40-66	50-89	60-102	70-111	80-124	90-133			
40-62	50-89	60-112*	70-125*	80-134*	90-147*				
50-67	60-94	70-117	80-130	90-139					
60-60	70-87	80-110	90-123						
70-77	80-104	90-127							
80-81	90-108								

Розв'язування методом динамічного програмування

4 етап.

4 \ 1+2+3	10-27	20-50	30-69	40-88	50-101	60-112	70-125	80-134	90-147
10-25								90-159	
20-37							90-162*		
30-37						90-149			
40-56					90-157				
50-61				90-149					
60-70			90-139						
70-73		90-123							
80-89	90-116								

Розв'язування методом динамічного програмування

Відповідь:

Підрозділ	Виділені кошти (тис. грн)	Отриманий прибуток (тис. грн)
4	20	37
3	40	62
2	20	36
1	10	27
Усього	90	162

Тема 10. Задачі нелінійної оптимізації

Постановка задачі нелінійної оптимізації програмування

f(x) → min,   x∈X .

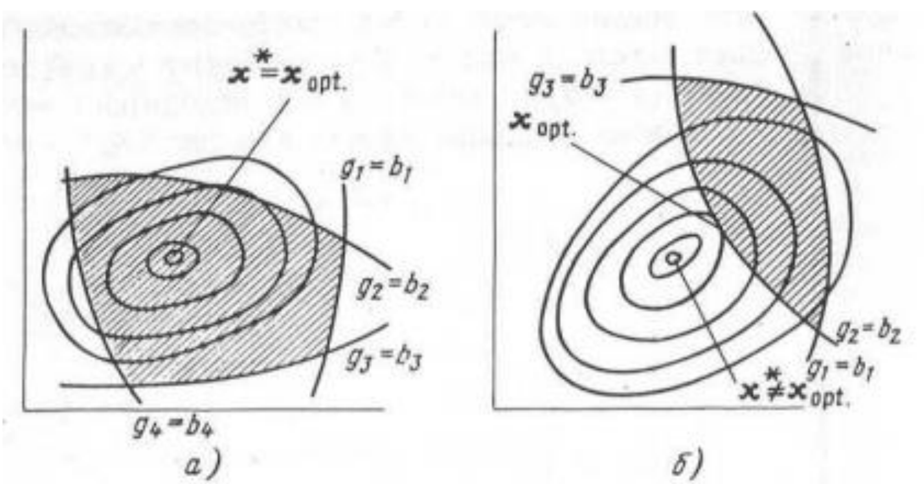
безумовна оптимізація

$$f(x) \to \min_{x \in \mathrm{R}^n}$$

умовна оптимізація

$$f(x) \to \min_{x \in D}$$

$$D = \left\{ x \in R^n, \middle| \begin{array}{l} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, \quad i = \overline{1, r} \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{r+1, m} \end{array} \right\}$$



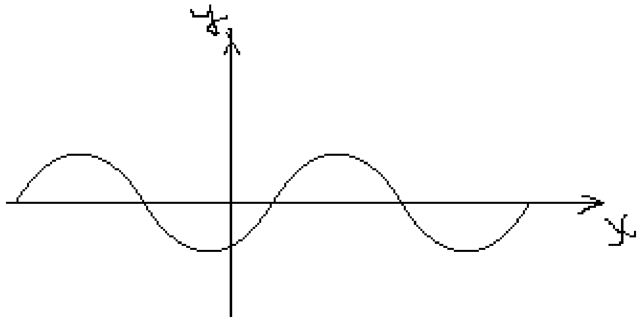
Геометрична інтерпретація задачі умовної оптимізації

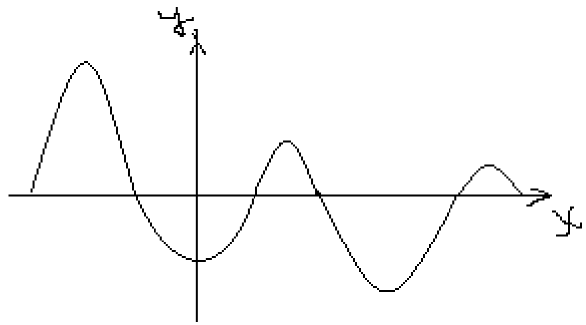
Порівняння задач лінійного та нелінійного програмування (НП)

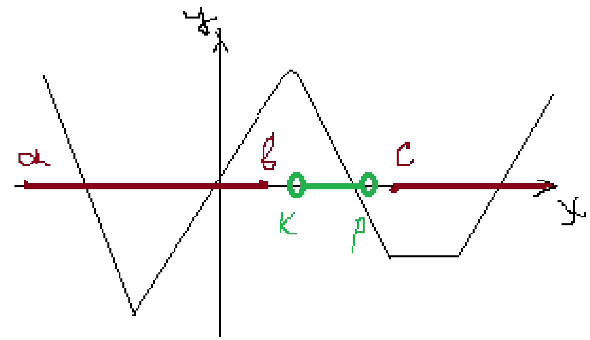
Задачі лінійного програмування	Задачі нелінійного програмування
1. Область Ω допустимих планів являє собою випуклу множину із кінцевим числом екстремальних (кутових) точок	1. Множина Ω допустимих планів може бути невипуклою, незв'язною і мати нескінченну кількість кутових точок.
2. Экстремального значення лінійна цільова функція z(X) набуває в одній з екстремальних точок (на границі множини Ω допустимих розв'язків).	2. Экстремум может бути не тільки на межі, але і всередині множини Ω допустимих розв'язків.
3. Экстремальне значення z(X) цільової функції являє собою глобальний максимум або мінімум.	3. Цільова функція z(X) в множині Ω допустимих розв'язків може мати кілька локальних екстремумів.

Особливості задач НП

- багатоекстремальність;
- область допустимих розв’язків (ОДР) може не бути опуклою, може бути незв’язною, тобто складатися з декількох частин, що не перетинаються;
- оптимальний план (план, на якому досягається, наприклад, глобальний максимум) може бути як внутрішньою, так і граничною точкою множини допустимих розв’язків;
- показник ефективності та обмеження можуть мати кутові точки та розриви.







1. Багатоекстремальність

Визначення 1. Точка $x^* \in X$ називається *розв'язком задачі мінімізації*, або *точкою глобального мінімуму*, якщо

$$f\left(x^*\right) \le f\left(x\right),\ \forall x \in X\ . \tag{2}$$

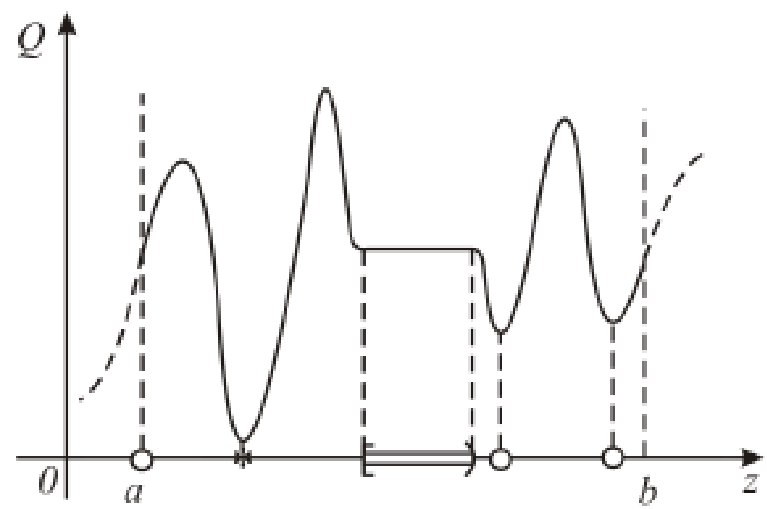
Визначення 2. Точка $x^* \in X$ називається *локальним розв'язком задачі мінімізації*, або *точкою локального мінімуму*, якщо існує число $\varepsilon > 0$, для якого буде справедливим таке твердження:

$$f\left(x^*\right) \le f\left(x\right),\ \forall x \in X \bigcap U_\varepsilon\left(x^*\right), \tag{3}$$

де $U_\varepsilon\left(x^*\right)$ – ε-окіл точки x^*.

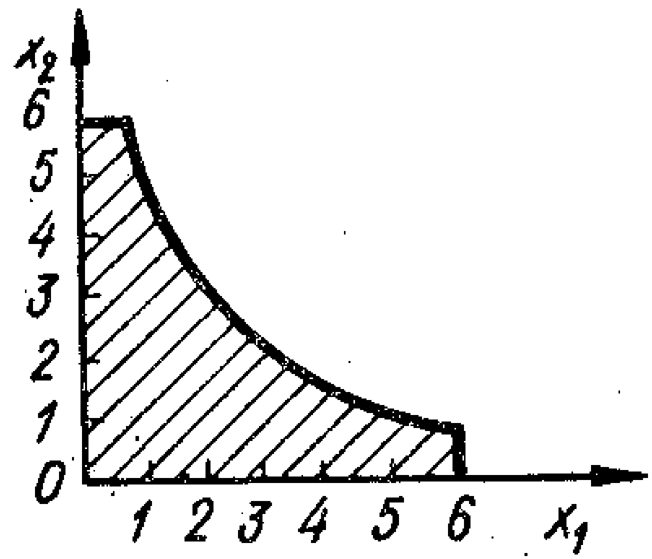
○, *, [⟹] - точки локальних мінімумів

* - точка глобального мінімума



Приклади множин допустимих планів у задачі НП

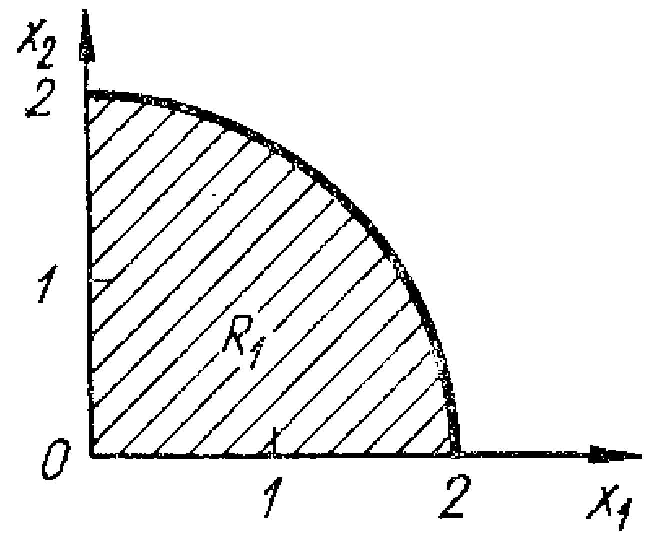
$$g_1(x_1, x_2) = 6 - x_1 \geq 0;$$
$$g_2(x_1, x_2) = 6 - x_2 \geq 0;$$
$$g_3(x_1, x_2) = 6 - x_1 x_2 \geq 0;$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$



Множина допустимих розв’язків не є випуклою

Приклади множин допустимих планів у задачі НП

$$g_1(x_1, x_2) = 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0;$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$



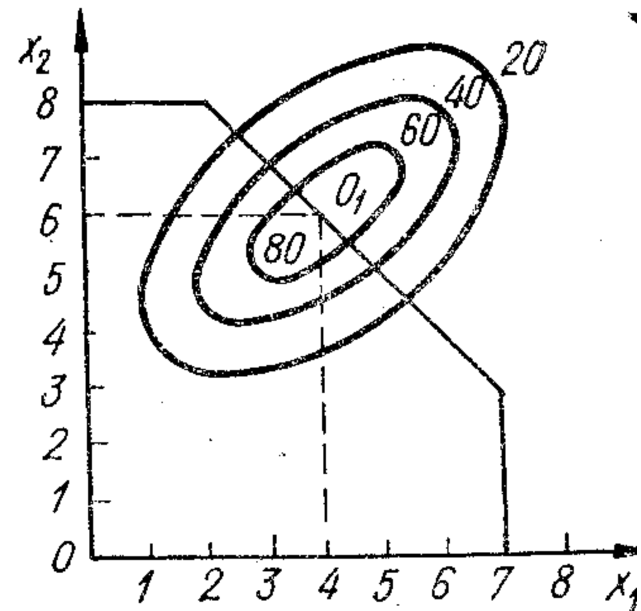
Множина допустимих розв'язків випукла,

але має нескінченну кількість кутових точок

Приклади множин допустимих планів у задачі НП

$$max(10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2) = \max f(x_1, x_2);$$

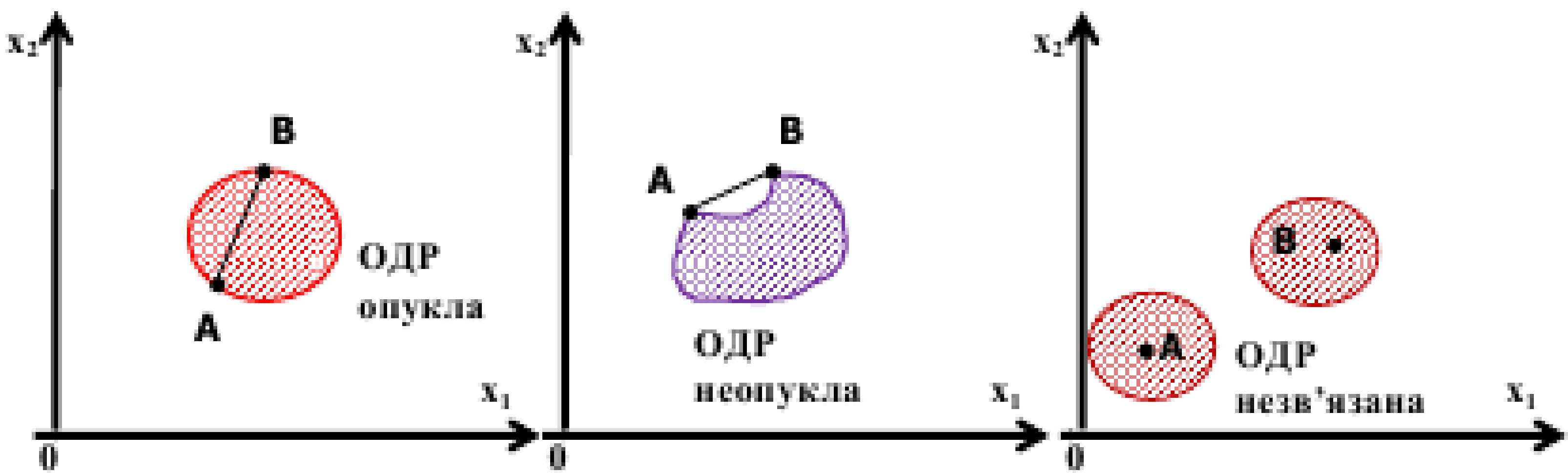
$$g_1(x_1, x_2) = 7 - x_1 \geq 0;$$
$$g_2(x_1, x_2) = 8 - x_2 \geq 0;$$
$$g_3(x_1, x_2) = 10 - x_1 - x_2 \geq 0$$



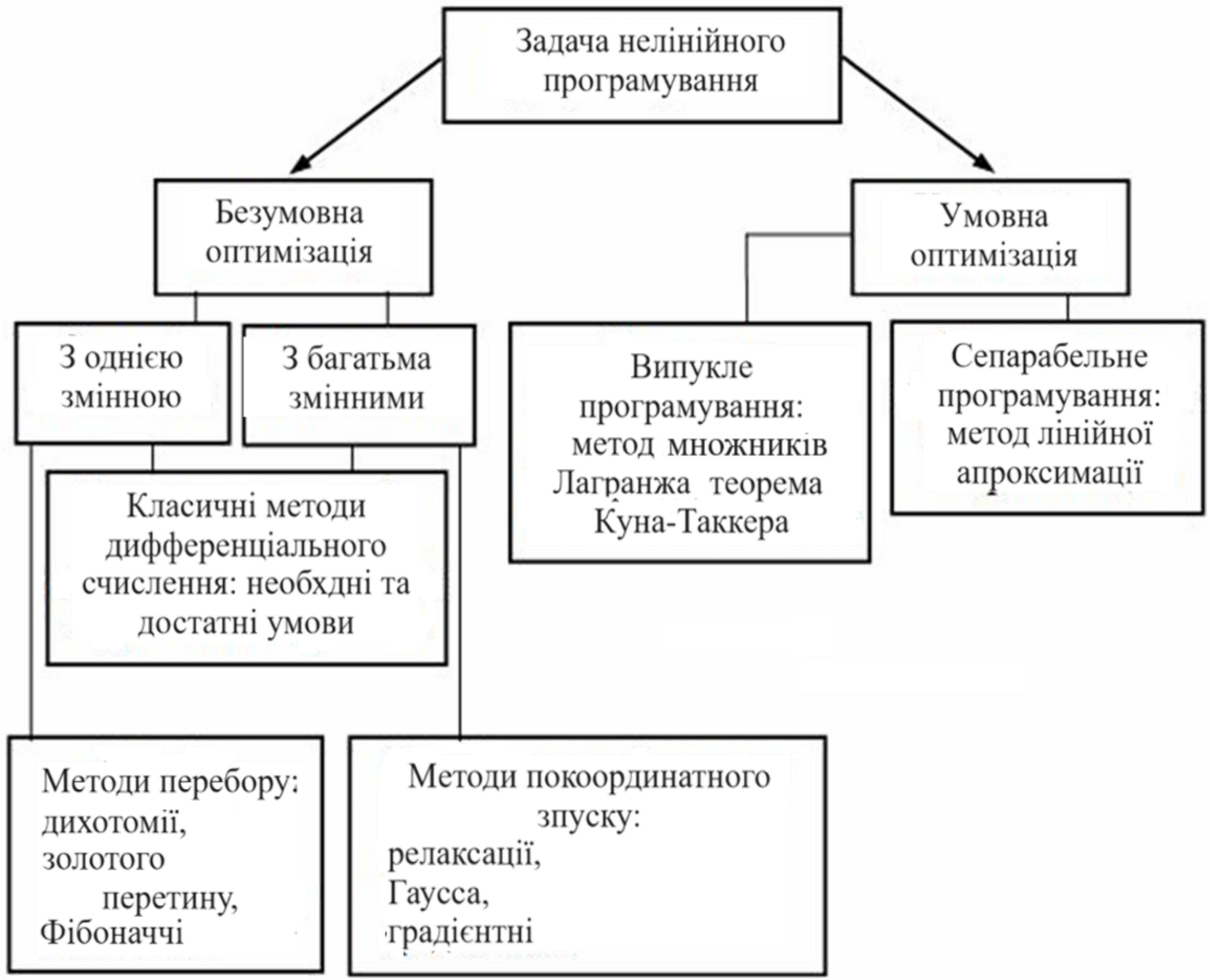
Множина допустимих розв'язків випукла, являє собою багатокутник, але оптимальний розв'зок знаходиться не в кутовій точці

Висновок

Задачі нелінійного програмування суттєво відрізняються за своєю структурою і властивостями від задач ЛП, тому не існує єдиного методу розв’язування таких задач. Кожна з них потребує спеціального розгляду.



Класифікація задач НП та методів, що застосовуються для їх розв'язування



Геометричний метод розв'язування задачі нелінійного програмування

1) знаходять область допустимих розв'язків задачі, визначену обмеженнями задачі (якщо вона порожня, задача не має розв'язку);

2) будують сімейство функцій $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$, h - параметр;

3) визначають функцію з найменшим (або найбільшим) значенням параметра h на множині допустимих розв'язків або встановлюють неможливість розв'язання задачі через необмеженість функції знизу (зверху) на множині допустимих розв'язків;

4) знаходять точку множини допустимих розв'язків, через яку проходить графік функції мінімального (максимального) рівня, та обчислюють значення функції у цій точці.

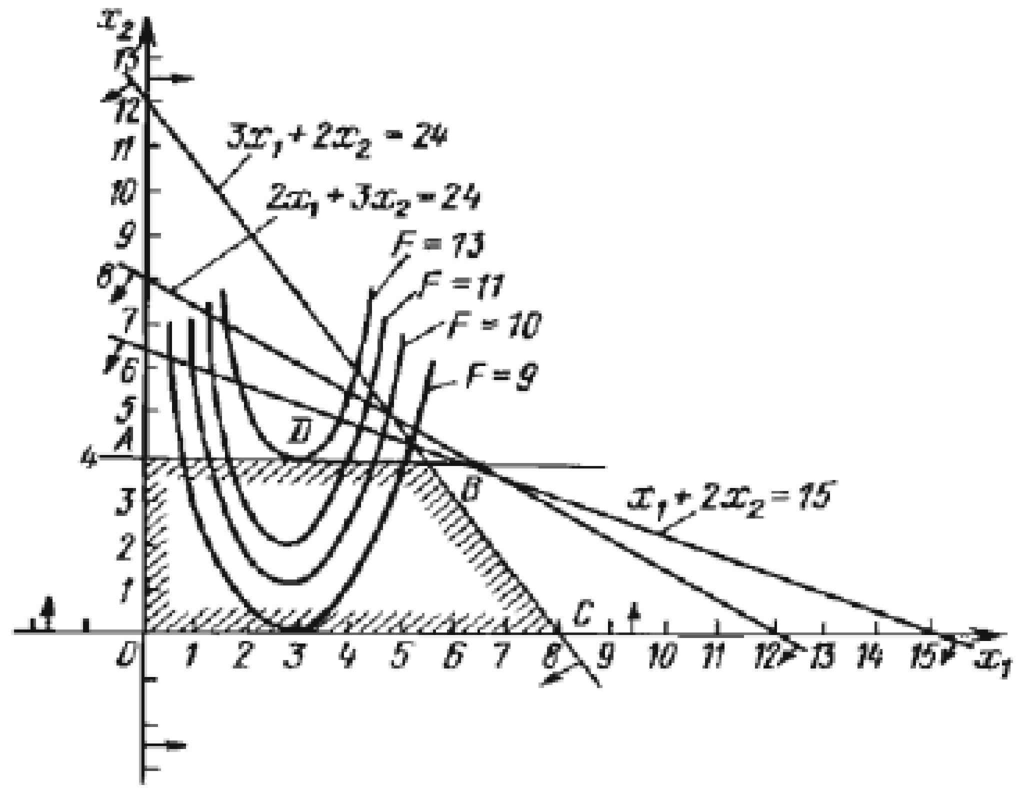
Геометричний метод.

Приклад 1

Знайти максимальне значення функції

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 < 24; \\ x_1 + 2x_2 \le 15; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24; \\ x_2 \le 4; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13; \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$X* = (3; 4).$$

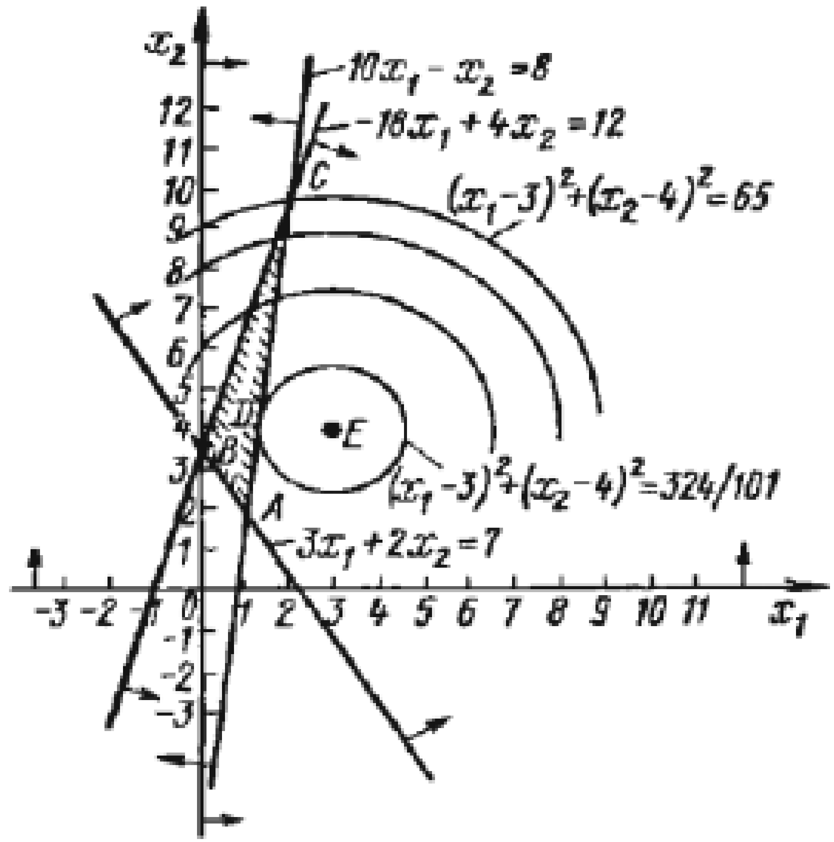
Геометричний метод.

Приклад 2

Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7; \\ 10x_1 - x_2 \leq 8; \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$



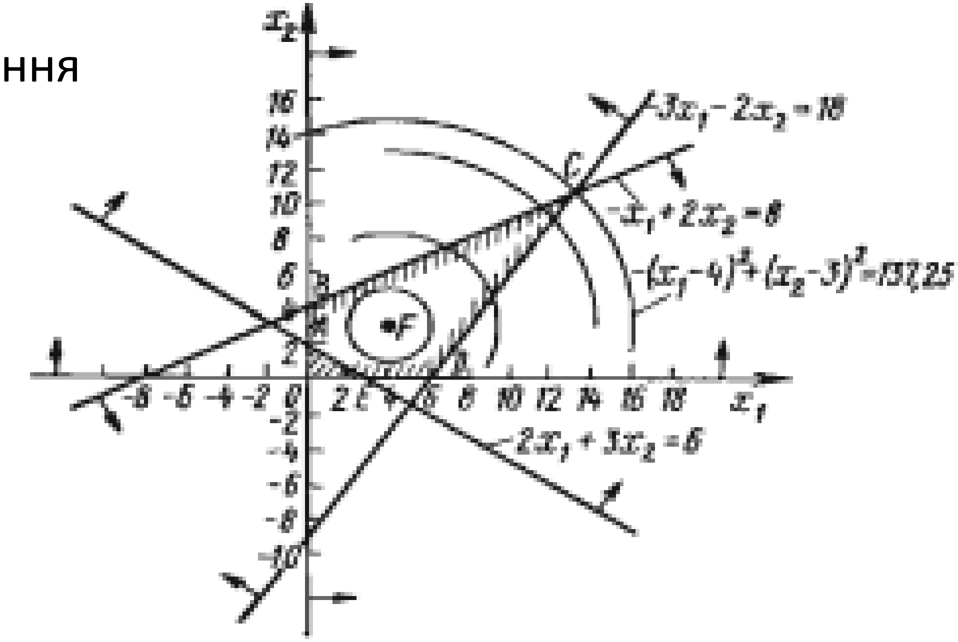
Геометричний метод.

Приклад 3

Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6; \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$



Метод множників Лагранжа

Розглянемо окремий випадок загальної задачі нелінійного програмування, у якій:

- система обмежень складається лише з рівнянь,
- відсутні умови невід'ємності змінних,
- функції f та g_i неперервні разом зі своїми частинними похідними:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) \to \max(min)$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = b_i, \qquad (i = \overline{1, m})$$

Алгоритм визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа

1) Вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, які називаються ***множниками Лагранжа***, і складають функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)].$$

2) знаходять частинні похідні від функції Лагранжа за змінними x_j та λ_i і прирівнюють їх до нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

Алгоритм визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа

3) розв'язують отриману систему рівнянь і знаходять точки, в яких цільова функція задачі може мати екстремум;

4) серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, в яких досягається екстремум, і обчислюють значення цільової функції у цих точках.

$$f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow extr$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 25 \\ x_1 x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 4)^2 \rightarrow extr$$

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \leq 8$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,2}$$

$$z = 9x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 36x_2 \rightarrow extr,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 24; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 35; \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Метод множників Лагранжа.

Приклад 1

За планом виробництва продукції підприємству потрібно виготовити **180 штук** виробів. Ці вироби можна виготовляти двома технологічними способами.
При виробництві I способом затрати становлять $4x_1+x_1^2$ грош. од., а при виготовленні виробів II способом вони становлять $8x_2+x_2^2$ грош. од. Визначити, скільки виробів кожним із способів потрібно виготовити так, щоб загальні затрати підприємства на виробництво продукції були мінімальними.

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \rightarrow min$$
$$x_1 + x_2 = 180, \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

Метод множників Лагранжа.

Приклад 1

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Другі частинні похідні функції F додатні, отже, у цій точці функція f має умовний мінімум.

$$x_1^* = 91, x_2^* = 89;$$

$$4 \cdot 91 + 91^2 + 8 \cdot 89 + 89^2 = 17\,278 \text{ грн}$$

Метод множників Лагранжа.

Приклад 2

Знайти точки екстремуму функції $f = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 = 5$

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 5 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1^* = {}^5/_2, x_2^* = {}^5/_2; \quad F_{min} = {}^{25}/_2$$

Тема 11. Методи одновимірної умовної оптимізації. Градієнтні методи багатовимірної безумовної оптимізації

Унімодальність функції

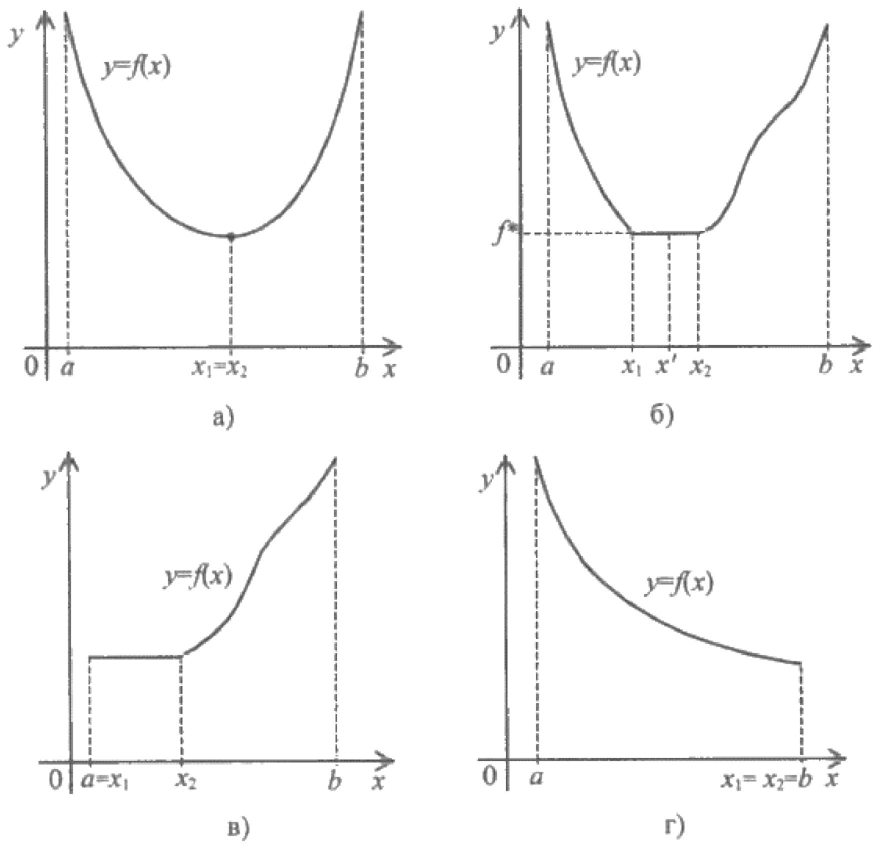


Рис.1.

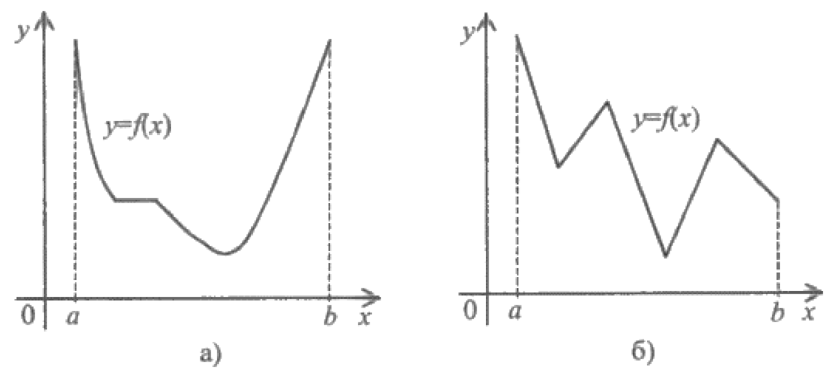


Рис. 25.2.

Задача одновимірної умовної оптимізації

$$f(x) \to \min, \quad x \in [\, a, b \,]$$

Припущення: цільова функція в допустимій області має властивість *унімодальності*, тобто має лише один локальний мінімум

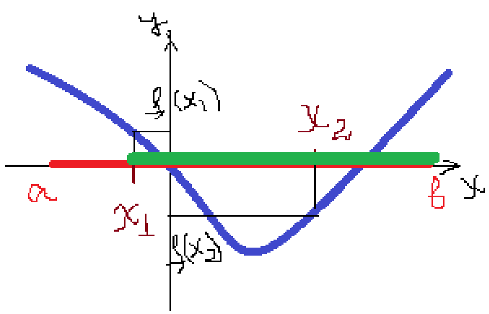
Тому що для *унімодальної* функції $f\,(x)$ порівняння значень у двох різних точках інтервалу пошуку дозволяє визначити, у якому із заданих двома зазначеними точками підінтервалів точки оптимуму відсутні.

Правило виключення інтервалів. Нехай всередині цього інтервалу $[a, b]$ функція є $f\,(x)$ *унімодальною*, тобто має один мінімум у точці x^*.

Розглянемо точки x_1 і x_2 : $a < x_1 < x_2 < b$.

Якщо $f\,(x_1) > f\,(x_2)$, то $x^* \in (x_1, b)$.

Якщо $f\,(x_1) < f\,(x_2)$, то x^* належить (a, x_2).



Методи пошуку на основі виключення інтервалів

Перший етап установлення границь інтервалу: Вибирається вихідна точка, і на основі правила виключення будується відносно широкий інтервал, що містить точку оптимуму.

Приклад: (***евристичний метод Свенна***) *(k + 1)-а* точка визначається за рекурентною формулою:

$$\mathbf{x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,}$$

x_0 – довільно обрана початкова точка;

Δ – величина кроку, підбирається певним чином. Знак Δ визначається шляхом порівняння значень $f(x_0)$, $f(x_0 + |\Delta|)$ та $f(x_0 - |\Delta|)$.

Якщо $f(x_0 - |\Delta|) > f(x_0) > f(x_0 + |\Delta|)$, то величина $\Delta > 0$.

Якщо $f(x_0 - |\Delta|) < f(x_0) < f(x_0 + |\Delta|)$, то $\Delta < 0$.

Якщо $f(x_0 - |\Delta|) > f(x_0) < f(x_0 + |\Delta|)$, то $x^* \in (x_0 - |\Delta|\,;\ x_0 + |\Delta|)$, і пошук завершено.

Якщо $f(x_0 - |\Delta|) < f(x_0) > f(x_0 + |\Delta|)$, то маємо суперечність припущенню про унімодальність.

Другий етап зменшення інтервалу: Процедура зменшення інтервалу пошуку для одержання уточнених оцінок координат оптимуму.

Приклад: Визначити інтервал пошуку мінімуму функції $\boldsymbol{f}$ **(**$\boldsymbol{x}$**) = (100 – $\boldsymbol{x}$)^2**. Початкова точка $\boldsymbol{x_0}$ **= 30**, крок **|Δ| = 5**.

Обчислюємо значення функції $\boldsymbol{f(x_0), f(x_0 + |\Delta|)}$ **і** $\boldsymbol{f(x_0 - |\Delta|)}$**:**

$f(x_0) = f(30) = 4\,900$; $f(x_0 + |\Delta|) = f(35) = 4\,225$; $f(x_0 - |\Delta|) = f(25) = 5\,625$.

Оскільки $\boldsymbol{f(x_0 - |\Delta|) > f(x_0) > f(x_0 + |\Delta|)}$, то величина $\boldsymbol{\Delta > 0}$, а $\boldsymbol{x^* > 30}$.

Застосовуємо рекурентну формулу Свенна:

$x_1 = x_0 + \Delta = 30 + 5 = 35;$ $f(x_1) = f(35) = 4\,225 < f(x_0);$

$x_2 = x_1 + 2\Delta = 35 + 2 * 5 = 45;$ $f(x_2) = f(45) = 3\,025 < f(x_1);$

$x_3 = x_2 + 2^2\Delta = 45 + 4 \cdot 5 = 65;$ $f(x_3) = f(65) = 1\,225 < f(x_2);$

$x_4 = x_3 + 2^3\Delta = 65 + 8 \cdot 5 = 105;$ $f(x_4) = f(105) = 25 < f(x_3);$

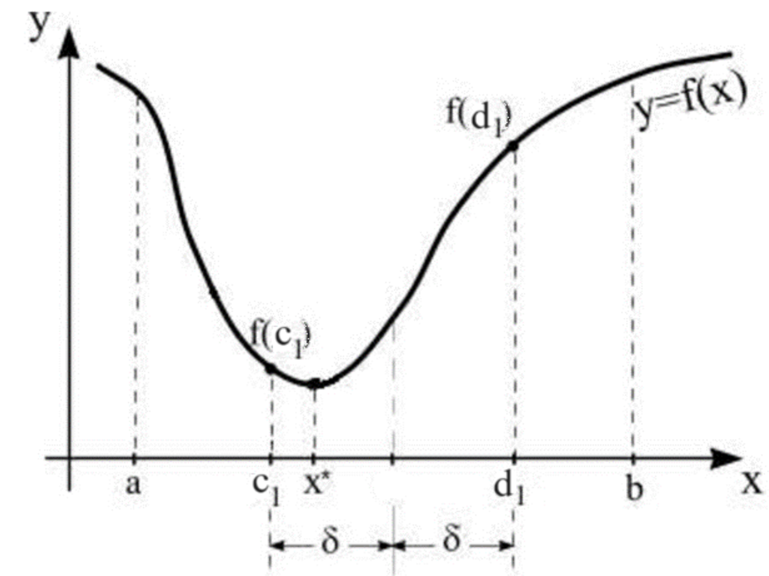
$x_5 = x_4 + 2^4\Delta = 105 + 16 \cdot 5 = 185;$ $f(x_5) = f(185) = 7\,225 > f(x_4).$

У останній точці значення функції вже перевищує попереднє.

Отже, $\boldsymbol{65 < x^* < 185}$.

Метод поділу інтервалу навпіл (метод дихотомії)

Знайти мінімальне значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.



Покласти $a_1 = a$, $b_1 = b$, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$.

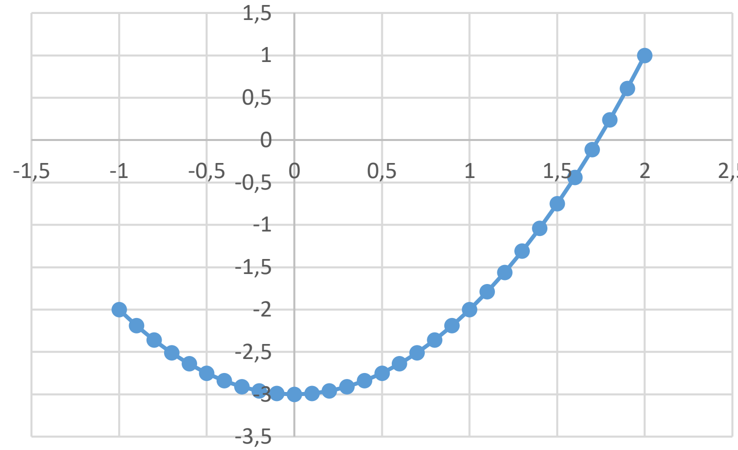
1. Знайти точки $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{\lambda}{2}$; $d_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{\lambda}{2}$.
2. Обчислити значення $f(c_1)$ і $f(d_1)$.
3. Порівняти $f(c_1)$ і $f(d_1)$.

   Якщо $f(c_1) \le f(d_1)$, то покласти $a_2 = a_1$, $b_2 = d_1$

   Якщо $f(c_1) > f(d_1)$, то покласти $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$.
4. Обчислити $L = b - a$. Якщо величина $|L|$ менша за заздалегідь встановлену точність ε, то закінчити пошук. Кінцева точка $x_m = \frac{a + b}{2}$.

У протилежному разі повернутися до кроку 1.

Приклад: $f(x) = x^2 - 3 \rightarrow min,\ x \in [-1,2];\ \lambda=0,1;\ \varepsilon = 0,01$



$a_1 = -1,\ b_1 = 2.$

1. $c_1 = \dfrac{-1+2}{2} - \dfrac{0,1}{2} = 0,45;$

   $d_1 = \dfrac{-1+2}{2} + \dfrac{0,1}{2} = 0,55$

   $f(c_1) = -2,7975;$

   $f(d_1) = -2,6975;$

   $f(c_1) \le f(d_1) \rightarrow$

   $a_2 = -1,\ b_2 = 0,55$

2. $c_2 = \dfrac{-1+0,55}{2} - \dfrac{0,1}{2} = -0,275;$

   $d_2 = \dfrac{-1+0,55}{2} + \dfrac{0,1}{2} = -0,175$

   $f(c_1) = -2,924;$

   $f(d_1) = -2,969;$

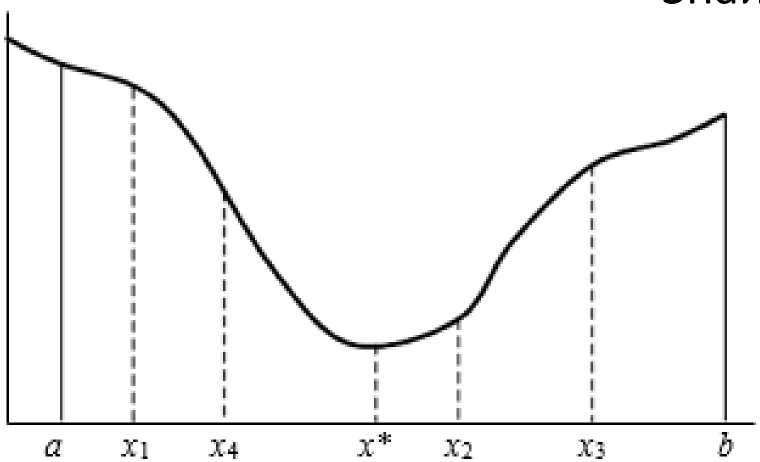
   $f(c_1) > f(d_1)$ … і т.д.

n	a	b	x_c	c	d	f(c)	f(d)	eps
1	-1	2	0,5	0,4995	0,5005	-2,7505	-2,7495	1,5
2	-1	0,5005	-0,24975	-0,25025	-0,24925	-2,93737	-2,93787	0,75025
3	-0,25025	0,5005	0,125125	0,124625	0,125625	-2,98447	-2,98422	0,375375
4	-0,25025	0,125625	-0,06231	-0,06281	-0,06181	-2,99605	-2,99618	0,187938
5	-0,06281	0,125625	0,031406	0,030906	0,031906	-2,99904	-2,99898	0,094219
6	-0,06281	0,031906	-0,01545	-0,01595	-0,01495	-2,99975	-2,99978	0,047359
7	-0,01595	0,031906	0,007977	0,007477	0,008477	-2,99994	-2,99993	0,02393
8	-0,01595	0,008477	-0,00374	-0,00424	-0,00324	-2,99998	-2,99999	0,012215
9	-0,00424	0,008477	0,002119	0,001619	0,002619	-3	-2,99999	0,006357
10	-0,00424	0,002619	-0,00081	-0,00131	-0,00031	-3	-3	0,003429
11	-0,00131	0,002619	0,000655	0,000155	0,001155	-3	-3	0,001964

Метод Фібоначчі

Ряд Фібоначчі - ряд натуральних чисел, в якому кожен наступний член ряду є сумою двох попередніх членів: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …,** і т. д.

Знайти мінімальне значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.



Припустимо, що існує інтервал (x_1, x_3) і відоме значення функції $f(x_2)$ всередині цього інтервалу

Якщо можна обчислити функцію всього один раз у точці x_4, то де варто помістити точку x_4 для того, щоб одержати найменший можливий інтервал, що містить точку мінімуму?

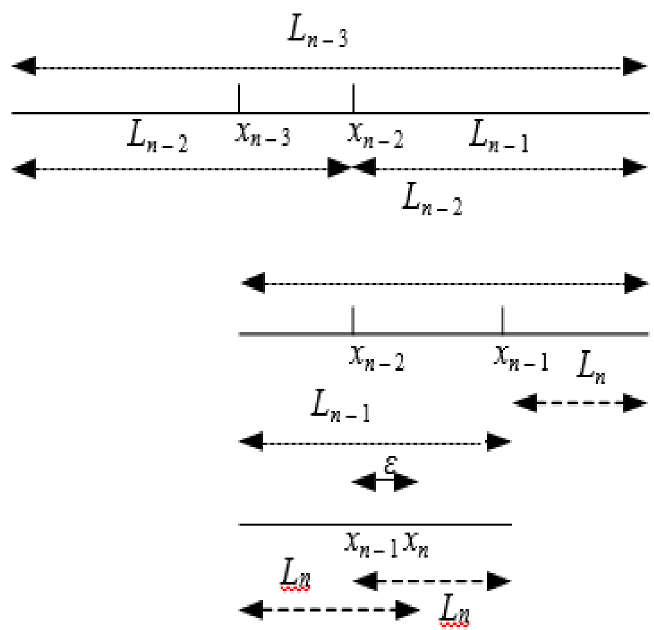
Нехай $x_2 - x_1 = L$ і $x_3 - x_2 = R$, причому $L > R$, якщо відомі x_1, x_2 та x_3. Якщо x_4 знаходиться в інтервалі (x_1, x_2), то:

1) якщо $f(x_4) < f(x_2)$, то новим інтервалом буде (x_1, x_2) довжиною $x_2 - x_1 = L$;
2) якщо $f(x_4) > f(x_2)$, то новим інтервалом буде (x_4, x_3) довжиною $x_3 - x_4$.

Алгоритм методу Фібоначчі

1. Для заданої точності визначають N = $\frac{b-a}{\varepsilon}$ та
$$L = (b - a)$$
2. Обчислюють n: $F_{n+1} \leq$ N $< F_{n+2}$ і формується масив чисел Фібоначчі.
3. $c = a + \frac{F_{n-1}}{F_n} L$ і $d = a + \frac{F_n}{F_{n+1}} L$; $f_1 = F(c)$ і $f_2 = F(d)$.
4. Якщо $f_1 > f_2$, то $a = c$, $c = d$, $f_2 = f_1$, $d_1 = a + (b - c)$,
   інакше $b = d, d = c, \; f_2 = f_1, c = \; b - (d - a)$.
4. $n = n - 1$.
5. Повторюємо кроки 1-3 до тих пір, поки $n > 2$.

6. Кінцева точка $x_m = \frac{a+b}{2}$.



Пошук за допомогою методу Фібоначчі забезпечує найбільше відносне зменшення вихідного інтервалу при одній і тій самій кількості обчислень значень функції.

Приклад: $f(x) = x^{2} - 3 \to min, x \in [-1,2]; \varepsilon = 0, 1$

Послідовність Фібоначчі має вигляд:

i	0	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

$$N = \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{2+1}{0{,}1} = 30, \ n = 8; \quad L = 2 + 1 = 3$$

1. $c = -1 + \frac{13}{34}3 \approx 0{,}15; d = -1 + \frac{21}{34}3 \approx 0{,}85;$

   $f(c) = -2{,}97$

   $f(d) = -2{,}26.$

   $f(c) < f(d)$

2. $b = 0{,}85, d = 0{,}15,$

   $f(d) = -2{,}97,$

   $c = 0{,}85 - (0{,}15 + 1) \approx$
   $\approx -0{,}29.$

   $f(c) = -2{,}91$

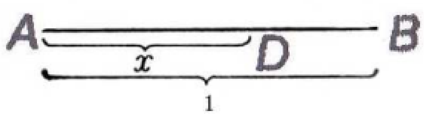
   $f(c) > f(d)$ … і т.д.

Фібоначчі

n	a	b	L	c	d	f(c)	f(d)	eps
1	-1	2	3	0,147059	0,857143	-2,97837	-2,26531	1,5
2	-1	0,857143	1,857143	-0,28992	0,147059	-2,91595	-2,97837	0,928571
3	-0,28992	0,857143	1,147059	0,147059	0,420168	-2,97837	-2,82346	0,573529
4	-0,28992	0,420168	0,710084	-0,01681	0,147059	-2,99972	-2,97837	0,355042
5	-0,28992	0,147059	0,436975	-0,12605	-0,01681	-2,98411	-2,99972	0,218487
6	-0,12605	0,147059	0,273109	-0,01681	0,037815	-2,99972	-2,99857	0,136555
7	-0,12605	0,037815	0,163866	-0,07143	-0,01681	-2,9949	-2,99972	0,081933
8	-0,07143	0,037815	0,109244	-0,01681	-0,01681	-2,99972	-2,99972	**0,054622**
9	-0,07143	-0,01681	0,054622	-0,07143	-0,01681	-2,9949	-2,99972	0,027311
10	-0,07143	-0,01681	0,054622	-0,01681	-0,07143	-2,99972	-2,9949	0,027311
11	-0,07143	-0,07143	-4E-15	-0,12605	-0,01681	-2,98411	-2,99972	-2E-15

Метод «золотого перетину»

Знайти мінімальне значення функції *f* (*x*) на відрізку [*a*, *b*].



В методі золотого перетину за основу береться принцип поділу відрізка у відношенні

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} \quad \to \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

З останнього виразу можна знайти, що

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

C – перша точка золотого перетину для AB та друга для AD;
D – друга точка золотого перетину для AB та перша для CB.

Алгоритм методу «золотого перетину»

Покласти $a_1 = a$, $b_1 = b$, $\varepsilon > 0$.

1. Знайти точки $c_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_1 - a_1) + a_1$;

   $d_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1) + a_1$

2. Обчислити значення $f(c_1)$ і $f(d_1)$.
3. Порівняти $f(c_1)$ і $f(d_1)$.

   Якщо $f(c_1) \le f(d_1)$, то покласти $a_2 = a_1$, $b_2 = d_1$, $d_2 = c_1$,

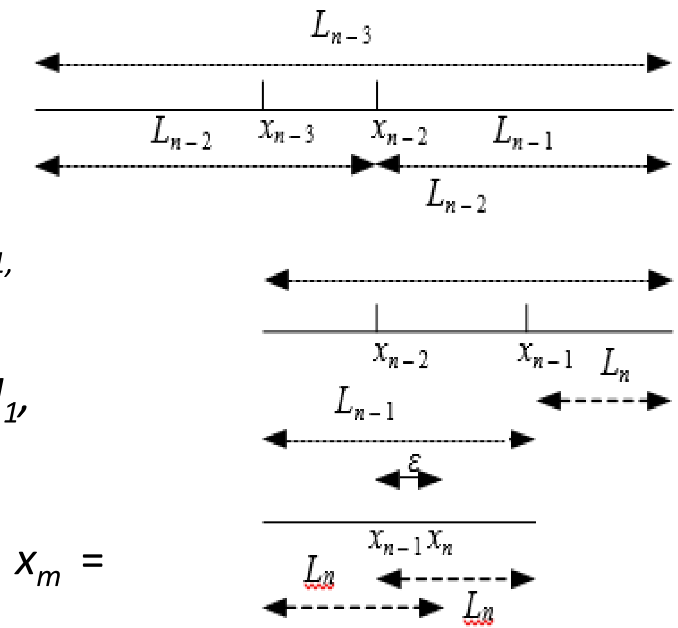
   $c_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_2 - a_2) + a_2$

   Якщо $f(c_1) > f(d_1)$, то покласти $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$, $c_2 = d_1$,

   $d_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_2 - a_2) + a_2$

4. Якщо $\frac{b-a}{2} < \varepsilon$, то закінчити пошук. Кінцева точка $x_m = \frac{a+b}{2}$.

У протилежному разі повернутися до кроку 3.



Приклад: $f(x) = x^2 - 3 \rightarrow min,\ x \in [-1,2];\ \varepsilon = 0,1$

$a_1 = -1,\ b_1 = 2$

1. $c_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(2+1) - 1 = 0,14;$ $d_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(2+1) - 1 = 0,85$

   $f(c_1) = -2,97$ $f(d_1) = -2,27.$

   $f(c_1) \le f(d_1), \rightarrow\ a_2 = -1,\ b_2 = 0,85,\ d_2 = 0,14,\ c_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(0,85+1) + 1 = -0,29$

   Критерій закінчення $\frac{0,85+1}{2} = 0,92 > \varepsilon.$

2. $a_2 = -1,\ b_2 = 0,85$

   $c_2 = -0,29;\ d_2 = 0,14$

   $f(c_1) = -2,91$

   $f(d_1) = -2,98.$

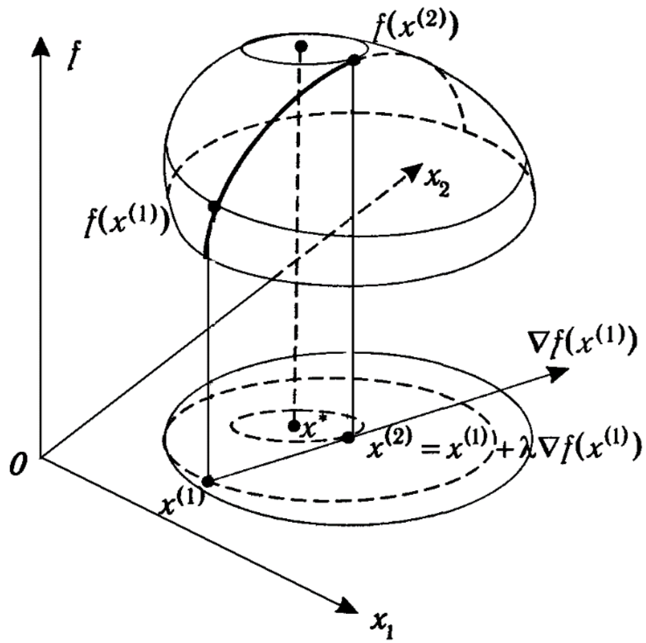
   $f(c_1) \le f(d_1), \rightarrow$

… і т.д.

n	a	b	L=b-a	c	d	f(c)	f(d)	eps
1	-1	2	3	0,145898	0,854102	-2,97871	-2,27051	1,5
2	-1	0,854102	1,854102	-0,2918	0,145898	-2,91486	-2,97871	0,927051
3	-0,2918	0,854102	1,145898	0,145898	0,416408	-2,97871	-2,8266	0,572949
4	-0,2918	0,416408	0,708204	-0,02129	0,145898	-2,99955	-2,97871	0,354102
5	-0,2918	0,145898	0,437694	-0,12461	-0,02129	-2,98447	-2,99955	0,218847
6	-0,12461	0,145898	0,27051	-0,02129	0,042572	-2,99955	-2,99819	0,135255
7	-0,12461	0,042572	0,167184	-0,06075	-0,02129	-2,99631	-2,99955	0,083592
8	-0,06075	0,042572	0,103326	-0,02129	0,003106	-2,99955	-2,99999	0,051663
9	-0,02129	0,042572	0,063859	0,003106	0,018181	-2,99999	-2,99967	0,031929
10	-0,02129	0,018181	0,039467	-0,00621	0,003106	-2,99996	-2,99999	0,019733
11	-0,00621	0,018181	0,024392	0,003106	0,008864	-2,99999	-2,99992	0,012196

Градієнтні методи мінімізації функції багатьох змінних

$$f(x) \to \min_{x \in R^n}$$



Напрям зростання функції в точці $x^{(1)}$

$x^{(q+1)} = x^{(q)} - \lambda \nabla f\left(x^{(q)}\right)$, *q=0,1,2,…*

$\nabla f\left(x^{(q)}\right)$ - градієнт функції

Метод найшвидшого спуску:

Нехай $x = x^{(q)} - \lambda \nabla f\left(x^{(q)}\right)$:

$$f(x) = f\left(x^{(q)} - \lambda \nabla f\left(x^{(q)}\right)\right) = \phi(\lambda),$$

або в покоординатній формі

$$\phi(\lambda) = f\left(x_1^{(q)} - \lambda \frac{\partial f\left(x^{(q)}\right)}{\partial x_1}, \ldots, x_n^{(q)} - \lambda \frac{\partial f\left(x^{(q)}\right)}{\partial x_n}\right).$$

Обираємо таке значення $\tilde{\lambda}$, яке мінімізує функцію

$$\phi(\lambda) \left(\phi(\tilde{\lambda}) = \min_{\lambda > 0} \phi(\lambda)\right).$$

Критерій зупинки: $\left|\nabla f\left(x^{(q)}\right)\right| < \varepsilon$.

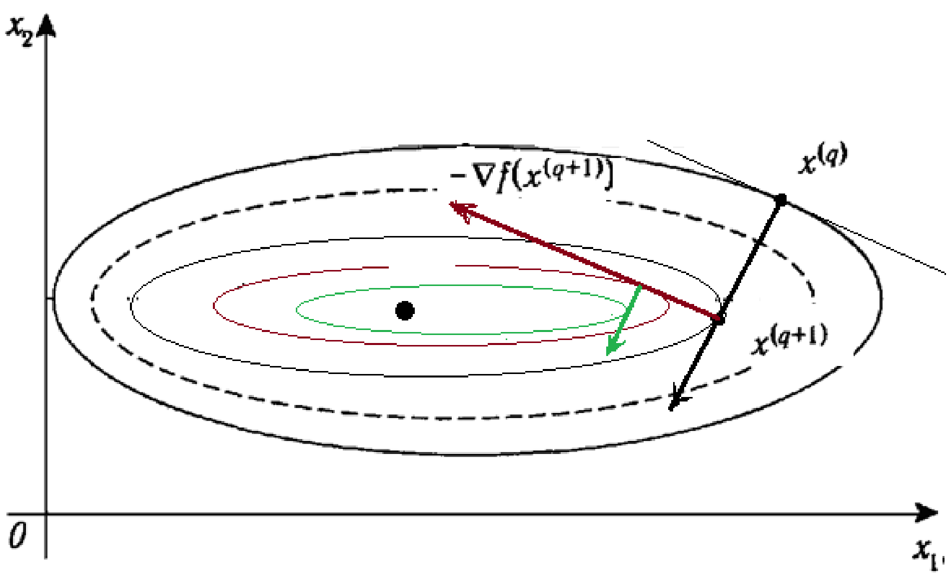
Градієнтні методи (геометрична інтерпретація)

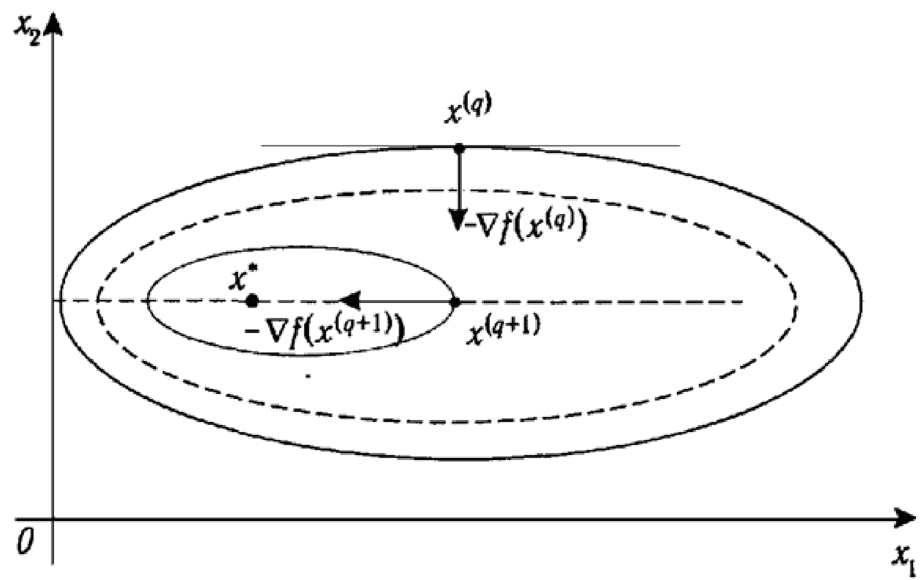
$$f(x) \to \min_{x \in R^n}$$

$$x^{(q+1)} = x^{(q)} - \lambda \nabla f\left(x^{(q)}\right)$$

Якщо точка $x^{(q+1)}$ відповідає оптимальному значенню $\lambda = \tilde{\lambda}$, то в ній має виконуватися умова

$$d\phi(\tilde{\lambda})/d\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f\left(x^{(q)} - \tilde{\lambda}\nabla f\left(x^{(q)}\right)\right)\nabla f\left(x^{(q)}\right) = 0.$$





Приклади побудови функцій зовнішнього і внутрішнього штрафу

$$\min_{x \in E_n} \{ f_0(x) : x \in X, f_i(x) \le 0, \quad i = \overline{1, m} \}$$

$$\min_{x \in X} \bar{S}_t(x))$$

$$\bar{S}_t(x) = f_0(x) + P_t(x), \quad P_t(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in X, f_i(x) \le 0, i = \overline{1, m} \\ \infty \text{ у противному випадку} \end{cases}$$

1) $\rho^* = \min_{x \in X} S_1(x, s)$, де $S_1(x, s) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} s_i \, max\{0, f_i(x)\}$

2) $\min_{x \in X} S_2(x, p)$, де $S_2(x, p) = f_0(x) + p \, max\left\{0, \max_{1 \le i \le m} f_i(x)\right\}$.

Зовнішній штраф:

$$\varphi_1(x,\, C) = C\sum_{i=1}^{m}\left[\max\left(0,\, g_i(x)\right)\right]^q, \quad q > 0;$$

$$\varphi_2(x,\, C) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad g_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1,\, \ldots,\, m, \\ C\exp\left\{-\dfrac{1}{\max\limits_{i=1,\,\ldots,\,m} g_i(x)}\right\} & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

$$\varphi_3(x,\, C) = \sum_{i=1}^{m} \exp\{Cg_i(x)\};$$

Внутрішній штраф:

$$\varphi_4(x,\, C) = \begin{cases} -\dfrac{1}{C}\sum\limits_{i=1}^{m} g_i^{-1}(x), & \text{якщо} \quad g_i(x) < 0, \quad i = 1,\, \ldots,\, m, \\ +\infty & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

$$\varphi_5(x,\, C) = \begin{cases} -\dfrac{1}{C}\sum\limits_{i=1}^{m} \ln[-g_i(x)], & \text{якщо} \quad g_i(x) < 0, \\ & \qquad i = 1,\, \ldots,\, m, \\ +\infty & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Способи задання штрафної функції

$$P_k(x) = k\sum_{s=1}^{p}[\max\{\boldsymbol{g_s}(\boldsymbol{x}), 0\}]^2,$$

$$P_k(x) = k\sum_{s=1}^{p} max\{\boldsymbol{g_s}(\boldsymbol{x}), 0\},$$

$$P_k(x) = \frac{1}{k}exp[max\{\boldsymbol{g_s}(\boldsymbol{x}), 0\}]$$

$$P_k(x) = k\max_{1\le s\le p}\{max\{\boldsymbol{g_s}(\boldsymbol{x}), 0\}\}$$

$$P_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{p}\frac{1}{-\boldsymbol{g_s}(\boldsymbol{x})},$$

$$P_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{p}\frac{1}{[\boldsymbol{g_s}(\boldsymbol{x})]^2},$$

$$P_k(x) = -\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{p} ln(-\boldsymbol{g_s}(\boldsymbol{x})).$$

Приклад: $f(x) = (x-5)^2 \to min$, коли $x \le 1$

Скориставшись функцією штрафу виду (3), запишемо розширену функцію:

$$f_k(x) = (x-5)^2 + k[\max\{x-1{,}0\}]^2$$

і розв'яжемо рівняння

$$\frac{df_k(x)}{dx} = 0.$$

$$\frac{df_k(x)}{dx} = 2x - 10 + 2k \cdot \max\{x-1{,}0\} = 0,$$

або

$$\max\{2x - 10 + 2k \cdot (x-1), 2x - 10\} = 0.$$

Якщо $x > 1$, то $2x - 10 + 2k \cdot (x-1) = 0$, звідки $x = \frac{\kappa+5}{\kappa+1}$. Якщо ж $x \le 1$, то $2x - 10 = 0$, але останнє рівняння задовольняє $x = 5 > 1$. Тому ясно, що єдиним розв'язком рівняння $\frac{df_k(x)}{dx} = 0$ є точка $x_k^* = \frac{\kappa+5}{\kappa+1}$.

Тема 12. Задачі управління запасами

Загальна постановка задачі

Під ***запасами*** можуть розуміти:

- готову продукцію,
- сировину,
- напівфабрикати,
- верстати,
- інструменти,
- транспортні засоби,
- готівку та ін.

Економічний збиток обумовлюють і надмірна наявність запасів, і їх недостатність.

Мета будь-якого підприємства − розробити таку программу роботи, при якій загальна сума витрат на виробництво продукції і утримання запасів мінімізується за умови повного і своєчасного задоволення попиту на продукцію.

Загальна постановка задачі

Необхідно скласти план випуску деякого виду виробів:

- N часових відрізків
- точний прогноз попиту
- попит неоднаковий
- продукція (часу t) може бути використана для покриття попиту
- доцільно виробляти обсяг продукції, що перевищує його попит
- зберігати надлишки до задоволення подальших потреб
- зберігання запасів й передбачає витрати

Основні характеристики моделей управління запасами

1. Попит. Попит на продукт, що запасається, може бути детермінованим або випадковим.

2. Поповнення складу. Поповнення складу може відбуватися або періодично через конкретні інтервали часу, або по мірі вичерпаності запасів.

3. Об'єм замовлення. При періодичному поповненні та випадковому вичерпанні запасів об'єм заказу може залежати від того стану, який спостерігається в момент подачі замовлення.

4. Час доставки. Замовлене поповнення поставляється на склад миттєво, затримка поставок на фіксований або випадковий
інтервал часу.

Основні характеристики моделей управління запасами

5. Вартість поставки. Вартість кожної поставки складається з разових витрат та витрат, що залежать від об’єму партії.

6. Витрати на зберігання. Контрольною величиною є об’єм запасів, що зберігаються.

7. Штраф за дефіцит. Відсутність запасів в потрібний момент призводить до збитків, пов’язаних з простоєм обладнання, неритмічністю виробництва і т.п.

8. Номенклатура запасу. В самих простих випадках - однотипні вироби або однотипна продукція. В більш складних випадках - багатономенклатурний запас.

Управління запасами

Під **управлінням запасами** розуміють контроль за їх рухом і прийняття рішень, спрямованих на економію часу і коштів за рахунок мінімізації витрат на утримання запасів, необхідних для забезпечення безперебійного процесу операційної діяльності компанії.

Ефективне управління товарно-матеріальними запасами (ТМЗ) дозволяє:

- зменшити виробничі втрати;
- прискорити оборотність цієї категорії оборотних активів;
- звести до мінімуму надлишки;
- знизити ризик старіння та псування товарів;
- знизити витрати на зберігання ТМЗ.

Основні етапи управління запасами:

1. Аналіз складу, структури, динаміки загальної величини запасів за підсумками попередніх періодів.

2. Оптимізація загальної суми запасів і розміру їх основних груп, що включаються до складу поточних активів.

3. Побудова ефективних систем контролю за рухом запасів в компанії.

Типи моделей управління запасами

Типи моделей управління запасами

Основні фактори при побудові моделі управління запасами:

- характер попиту;
- запізнення надходжень виконання замовлень
- поповнення замовлення;
- період часу (зміна рівня запасу)
- кількість пунктів накопичення запасу
- кількість видів продукції

Оптимізація величини запасів

Планування запасів може вирішуватися двома базовими способами організації закупівель: "зі складу" (push) і «з продажу" (pull).

Методи оптимізації запасів

Види запасів	Методи оптимізації
Запаси сировини і матеріалів	Нормування запасів Визначення оптимального розміру замовлення (модель ***EOQ)*** Контроль запасів методом ***ABC***
Незавершене виробництво	Нормування незавершеного виробництва Бюджетування виробництва
Запаси готової продукції	Нормування запасів готової продукції Визначення оптимальної партії замовлення готової продукції (модель ***EPR)***

Нормування запасів

Нормою запасу називається розрахункова мінімальна кількість предметів праці, яка має знаходитися у виробничих або торговельних підприємств для забезпечення безперебійного постачання процесів виготовлення продукції та її реалізації.

Норма обігових коштів – відносна величина, що виражає мінімальний економічно обґрунтований обсяг запасів матеріальних цінностей і залежить від умов постачання та збуту, особливостей виробничого процесу, його тривалості, вдосконалення технологічних процесів і норм витрачання матеріалів і т. д.

При обчисленні норм запасів ресурсів використовують **три групи методів**: евристичні, техніко-економічні та економіко-математичні.

Визначення оптимального розміру замовлення

Розрахунок EOQ проводиться на основі загальних сумарних витрат:

$$Cz = Ck + Cs + Cx + Cl + Cd\ ,$$

де

Ck – витрати на придбання (визначаються вартістю одиниці продукції)

Cs – витрати на оформлення замовлення (пов'язані з розміщенням замовлення та його транспортуванням)

Cx – витрати на зберігання запасу (утримання на складі);

Cl – потенційні втрати прибутку через відсутність запасу;

Cd - можливі втрати у зв’язку з браком довіри покупців.

Контроль запасів методом АВС

ABC-аналіз - це метод класифікації товарів за пріоритетністю на основі обраних критеріїв, де А - високий пріоритет, В - середній, С - низький. ABC-аналіз базується на принципі Парето (правило 80/20).

Алгоритм

1. Поставити мету (напр., стимулювати продажі залишків)
2. Вибрати об'єкти для аналізу (категорія товару)
3. Визначити критерії (напр., прибуток)
4. Внести дані в загальну таблицю та порівняти внесок кожного об'єкта
5. Просегментувати отримані результати за групами.

! Не можна використовувати для товарів-новачків !

Прості моделі управління запасами

Нехай функції A(t), B(t), та R(t) виражають відповідно поповнення запасів, їх витрати та попит на продукт, що запасається, на проміжку часу [0, t]. Похідні цих функцій за часом a(t), b(t), r(t) - ***інтенсивності поповнення, витрат та попиту*** (відповідно).

Рівень запасу в момент t визначається основним рівнянням запасів:

$$J(t) = J_0 + A(t) - B(t), \qquad (1)$$

де J_0 – початковий запас.

Рівняння (1) в інтегральній формі:

$$J(t) = J_0 + \int_0^t a(t)dt - \int_0^t b(t)dt, \qquad (2)$$

Приклад

Інтенсивність надходження деталей на склад готової продукції цеха складає на початку зміни **5 дет./хв**, протягом першої години лінійно зростає, досягаючи до її кінця **10 дет./хв**, а потім залишається постійною.

Припускаючи, що надходження деталей на склад відбувається безперервно протягом всіх семи годин зміни, а їх вивіз зі складу виконується лише в кінці робочого дня, записати вираз для рівня запасу в довільний момент часу та, використовуючи його, знайти кількість деталей на складі через **30 хв** після початку роботи.

Розв`язок

$b(t) = 0$
$a(t) = kt - b$
$a(0) = 5$, отже $b = 5$

При $t = 60$, $a(60) = 10$, тоді $10 = k \cdot 60 + 5$,звідки $k = {}^{1}/_{12}$

Для першої години зміни $a(t) = ({}^{1}/_{12})t + 5$, а пізніше - $a(t) = 10$.

$J(t) = \int_0^t (t/12+5)dt = \frac{t^2}{24} + 5t$, (для першої години)

$J(t) = \int_0^{60} (t/12+5)dt + \int_{60}^{t} 10dt = \left(\frac{t^2}{24} + 5t\right)\begin{matrix}60\\0\end{matrix} + 10t\begin{matrix}t\\60\end{matrix}$, (для наступних годин)

Відповідь:

$J(t) = \int_0^{30} (t/12+5)dt = \frac{t^2}{24} + 5t\begin{matrix}30\\0\end{matrix} = \frac{30^2}{24} + 5 \cdot 30 = \frac{900}{24} + 150 = 187{,}5$ дет.

Статична детермінована модель без дефіциту

Нехай загальне споживання продукту, що запасається, за розглянутий інтервал часу θ дорівнює N. Розглянемо просту модель, в якій b(t)=b. Цю інтенсивність можна знайти як

$$b = N / \Theta. \qquad (3)$$

Поповнення замовлення відбувається партіями однакового об’єму: a(t) = 0 при всіх t, крім моментів поставки продукту, коли a(t) = n, де n – об’єм партії. Оскільки інтенсивність витрат дорівнює b, вся партія буде використана за час

$$T = n / b, \qquad (4)$$

Статична детермінована модель без дефіциту

Якщо відлік часу почати з моменту надходження першої партії, то рівень запасу в початковий момент дорівнює об’єму цієї партії n, тобто J(0) = n.

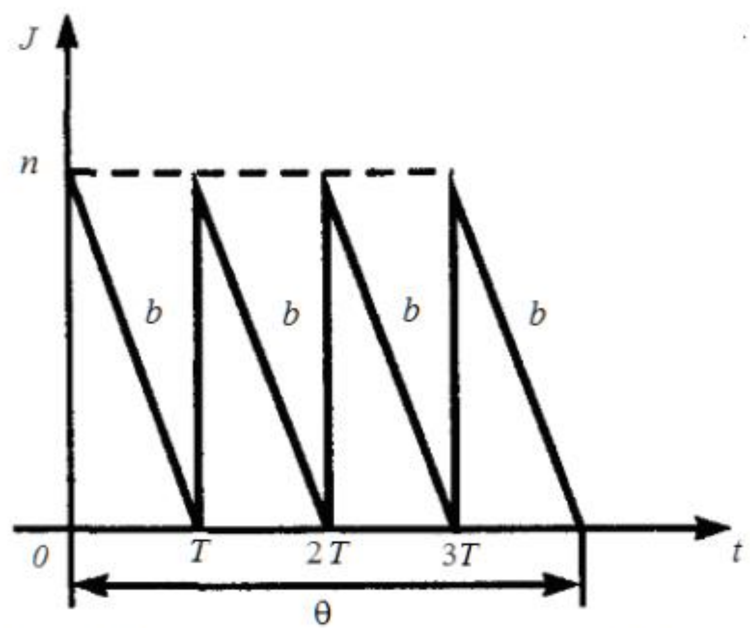


Рис. 2. Залежність рівня запасу від часу

Статична детермінована модель без дефіциту

Постановка задачі: визначити такий об'єм партії n, при якому сумарні витрати (C) на створення (C_1) та зберігання (C_2) запасу були б мінімальними.

Затрати зберігання запасу за проміжок часу θ складають:

$$C_1 = c_1 \mathrm{k} = c_1 \frac{N}{n}, \quad C_2 = \frac{c_2 n T}{2} k = \frac{c_2 n T}{2} \cdot \frac{N}{n} = \frac{c_2 T N}{n} = \frac{c_2 \theta n}{2}. \tag{7}$$

$$\widetilde{n_0} = \sqrt{\frac{2 c_1 b}{c_2}}. \tag{8}$$

(8) - формула Вілсона або формула найбільшого економічного об'єму партії.

Час витрати оптимальної партії

$$T_0 = \frac{n_0}{b} = n_0 \frac{\theta}{N}.$$

Приклад

Потреба складального підприємства в деталях певного типу складає **120000 деталей на рік**, причому ці деталі витрачаються в процесі виробництва рівномірно та безперервно. Деталі замовляються раз на рік та поставляються партіями однакового об’єму, вказаного в замовленні. Зберігання деталей на складі коштує **0,35** грошових одиниць на добу, а поставка партії – **10000** грошових одиниць.

Затримка виробництва через відсутність деталей неприпустима.

Встановити найбільш економічний об’єм партії та інтервал між поставками, які необхідно вказати в замовлені (постачальник не припускає затримки поставок).

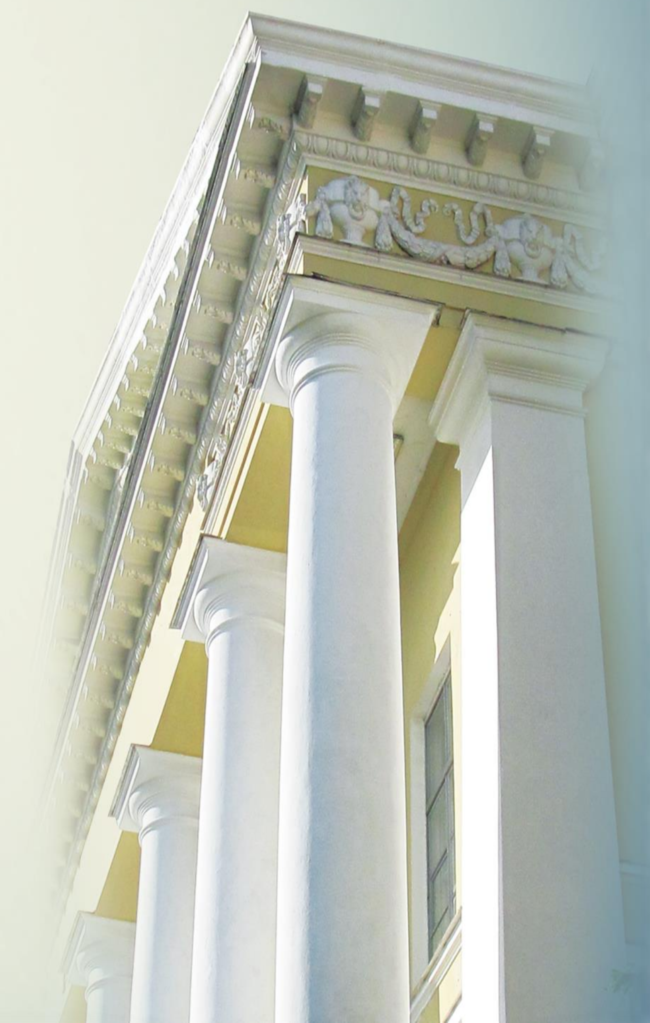
Розв`язок задачі

$C_1 = 10000$ грош. од.,
$\Theta = 1$ рік = 365 днів
N =120000 деталей

$$n_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 120000}{0{,}35 \cdot 365}} \approx 4335 \text{ (дет)}$$

$$\mathrm{T}_0 = n_0 \frac{\theta}{N} \approx 13 \text{ днів}$$

Тема 13. Задачі мережевого планування та управління



Основні поняття

Методи мережевого планування і управління використовуються під час розробки складних комплексних проєктів.

Приклади

1) будівництво та реконструкція будь-яких об'єктів;

2) виконання науково-дослідних і конструкторських робіт;

3) підготовка виробництва до випуску продукції;

4) переозброєння армії;

5) розгортання системи медичних або профілактичних заходів.

Види планувань

Структурне планування:

1) розбиття проєкту на чіткі операції, для яких визначається тривалість.
2) побудова мережевого графіка, який характеризує взаємозв'язки робіт.

Календарне планування:

1) побудова календарного графіка, що визначає моменти початку і закінчення кожної роботи.
2) визначаються тимчасові характеристики всіх робіт з метою проведення оптимізації мережевої моделі.

О**перативне керування:**

1) складання періодичних звітів про хід виконання проєкту.
2) мережева модель коригується, внаслідок чого розробляється новий календарний план решти проєкту.

Структурне планування

Робота – це певний процес, що приводить до досягнення певного результату і вимагає витрат яких-небудь ресурсів, має протяжність в часі.

За своєю фізичною природою її можна розглядати як:

– **дію**: заливка фундаменту бетоном, складання заявки на матеріали, вивчення кон'юнктури ринку;

– **процес**: старіння виливків, витримування вина, травлення плат;

– **очікування** поставки комплектуючих або деталі в черзі до верстата.

За кількістю затраченого часу робота може бути:

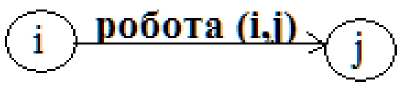
– **дійсною**, тобто такою, що вимагає витрат часу;

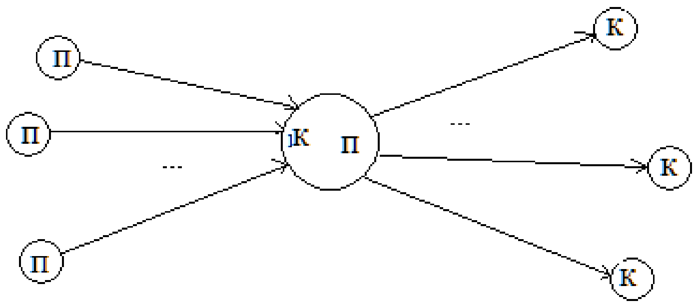
– **фіктивною** – яка не вимагає витрат часу і є зв'язком між будь-якими роботами: передача змінених креслень від конструкторів до технологів, здача вищому у ранзі підрозділу звіту про техніко-економічні показники роботи.

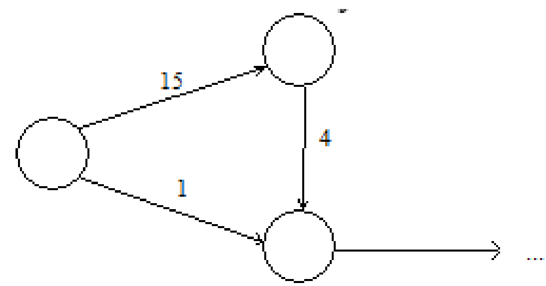
Подія – це момент часу, коли завершуються одні операції і починаються інші, а також результат, і на відміну від самих робіт не має протяжності в часі.

Правила побудови мережевого графіка

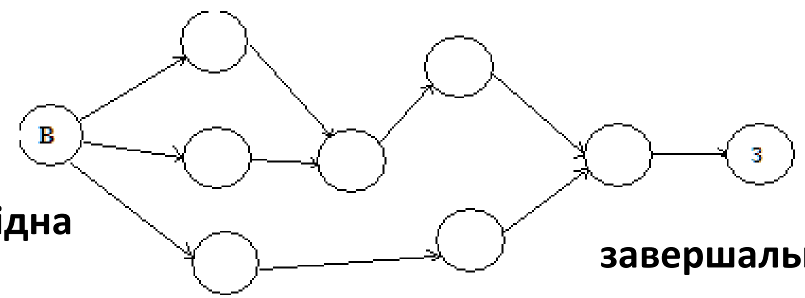
- довжина стрілки не залежить від часу виконання роботи:





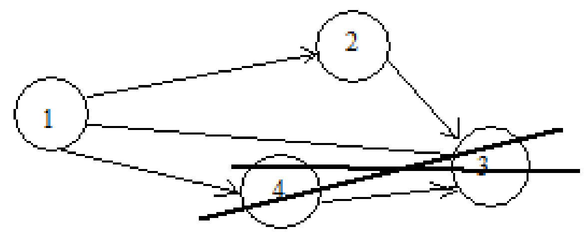


- номер початкової події має бути меншим за номер кінцевої:



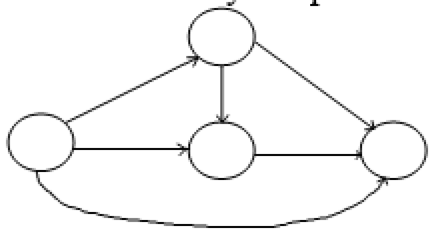
вихідна

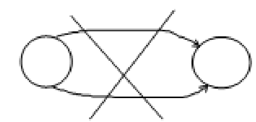
завершальна

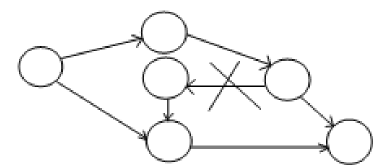


Правила побудови мережевого графіка

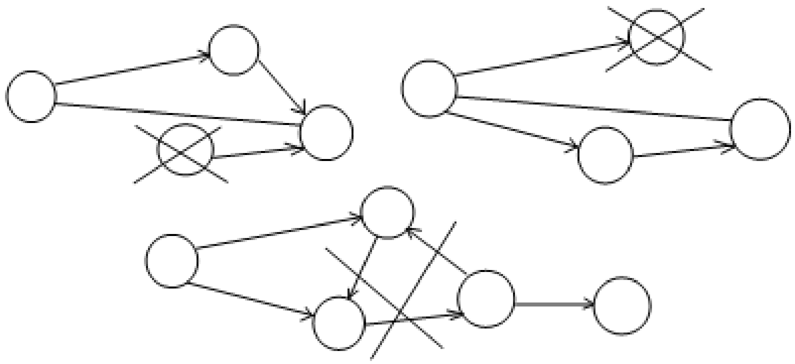
– стрілка не обов'язково повинна бути прямолінійним відрізком:

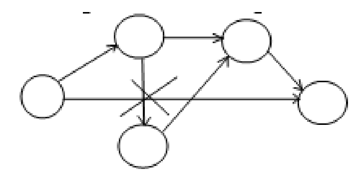




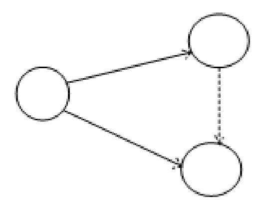


– не повинно бути висячих подій, крім вихідної; тупикових подій, крім завершальної; циклів:





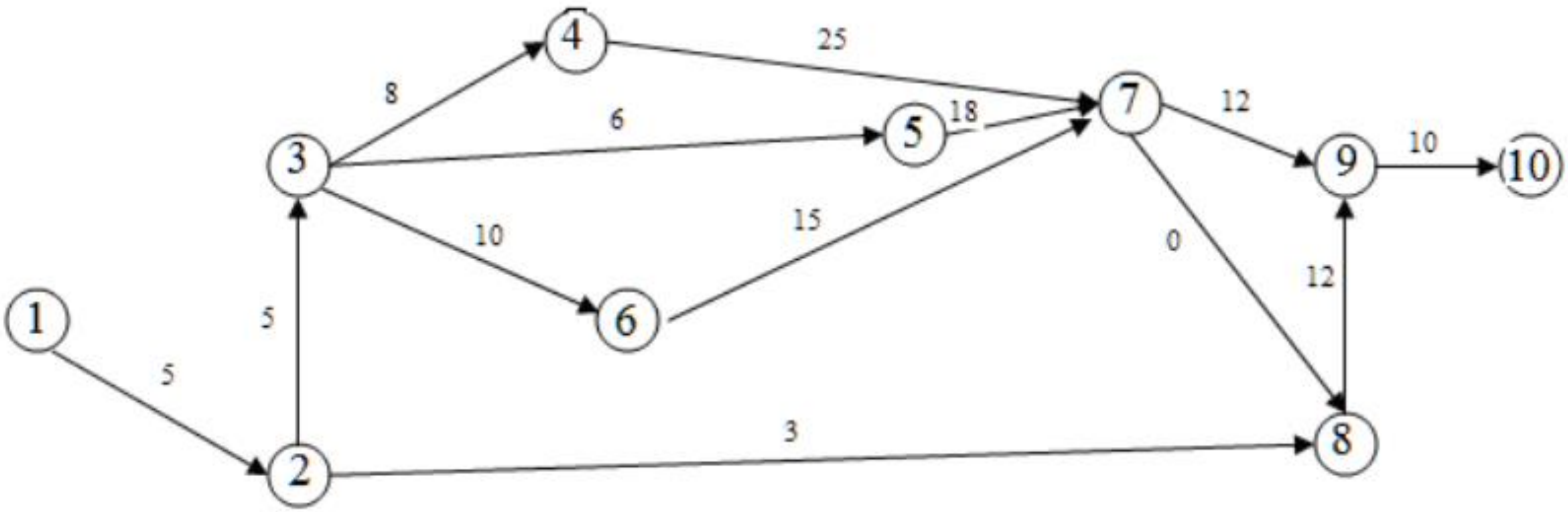
– для дійсних робіт використовуються суцільні, а для фіктивних – пунктирні стрілки:



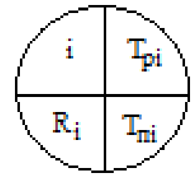
Приклад побудови мережевого графіка

Робота	Зміст роботи	Попередня	Паралельна	Наступна	Код	t_{ij}
A	Розробка технічних умов для стенда	-	-	B,C	1,2	**5**
B	Загальне компонування стенда	A	C	D,E,F	2,3	**5**
C	Розробка і видача ТЗ на складання робочої документації з експлуатації стенда	A	B,D,E,F,G,H,I	L	2,8	**3**
D	Розробка технології виготовлення електричної частини стенда	B	E,F	G	3,4	**8**
E	Розробка технології виготовлення механічної частини стенда	B	D,F	H	3,5	**6**
F	Оформлення та розміщення замовлень на елементи, що закуповуються	B	D,E	I	3,6	**10**
G	Виготовлення електричної частини стенда	D	H,I	J,K	4,7	**25**
H	Виготовлення механічної частини стенда	E	G,I	J,K	5,7	**18**
I	Виконання замовлень на закупні елементи	F	H,G	J,K	6,7	**15**
J	Передача інформації про характеристики стенда для розробки робочої документації з експлуатації стенда	G,H,I	K	L	7,8	**0**
K	Збирання стенда	G,H,I	J,L	M	7,9	**12**
L	Розробка робочої документації	J	K	M	8,9	**12**
M	Контрольні випробування стенда	L,K	-	-	9,10	**10**

Приклад побудови мережевого графіка

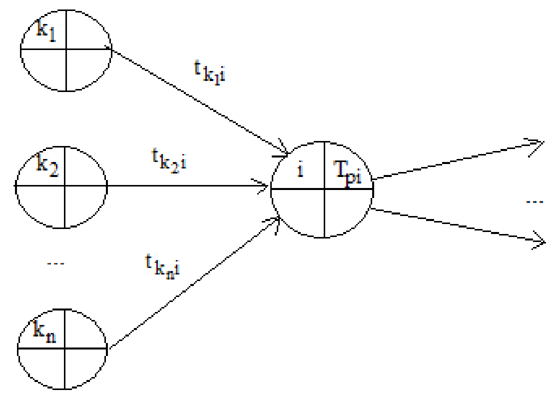


Календарне планування



Часові параметри подій

- ранній термін настання події i – $T_{\text{р}}(i)$;
- пізній термін настання події i – $T_{\text{п}}(i)$;
- резерв часу настання події i – $R(i)$.



Для вихідної події $T_{\text{р}}(i) = T_{\text{п}}(i) = 0$.

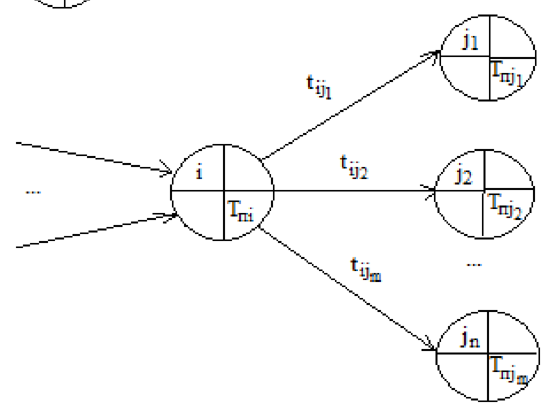
Для решти подій $T_{\text{р}}(i) = \max\limits_{k<i}\left[T_p(k) + t(k,i)\right]$.

Для завершальної події $T_{\text{п}}(i) = T_p(i)$

Для решити подій:

$$T_{\text{п}}(i) = \min_{j>i}[T_{\text{п}}(j) - t(i,j)]$$

$$R(i) = T_{\text{п}}(i) - T_{\text{р}}(i)$$



Календарне планування

Шлях **–** це будь-яка послідовність робіт в мережевому графіку, в якій кінцева подія однієї роботи збігається з початковою наступної

Повним називається шлях від вихідної до завершальної події

Критичним є максимальний за тривалістю повний шлях

Підкритичним – повний шлях, найближчий за тривалістю до критичного

Часовими параметрами роботи є

- ранній строк початку $T_{рп}(i,j)$, $T_{рп}(i,j)$= $T_р(i)$
- пізній строк початку $T_{пп}(i,j)$, $T_{пп}(i,j)$=$T_п(j) - t(i,j)$ або $T_{пп}(i,j)$=$T_{рп}(i,j) - t(i,j)$;
- ранній строк закінчення $T_{рз}(i,j), T_{рз}(i,j)$=$T_р(i) + t(i,j)$ або $T_{рз}(i,j)$=$T_{рп}(i,j) + t(i,j)$
- пізній строк закінчення $T_{пз}(i,j), T_{пз}(i,j)$= $T_п(j)$.

Календарне планування

$$R_{\text{п}}(i,j) = T_{\text{п}}(j) - T_p(i) - t(i,j)$$

$R_{\text{п}}(i,j)$ демонструє максимальний час, на який може бути збільшена тривалість роботи (i,j) або відстрочено її початок, щоб тривалість максимального шляху не перевищила тривалість критичного.

Найважливіша властивість повного резерву роботи (i,j) – це можливість його використовувати частково або повністю, при цьому зменшується повний резерв у операцій, що знаходяться з роботою (i,j) на одних шляхах.

Отже, повний резерв часу належить не одній роботі (i,j), а всім, які є на шляхах, що проходять через неї.

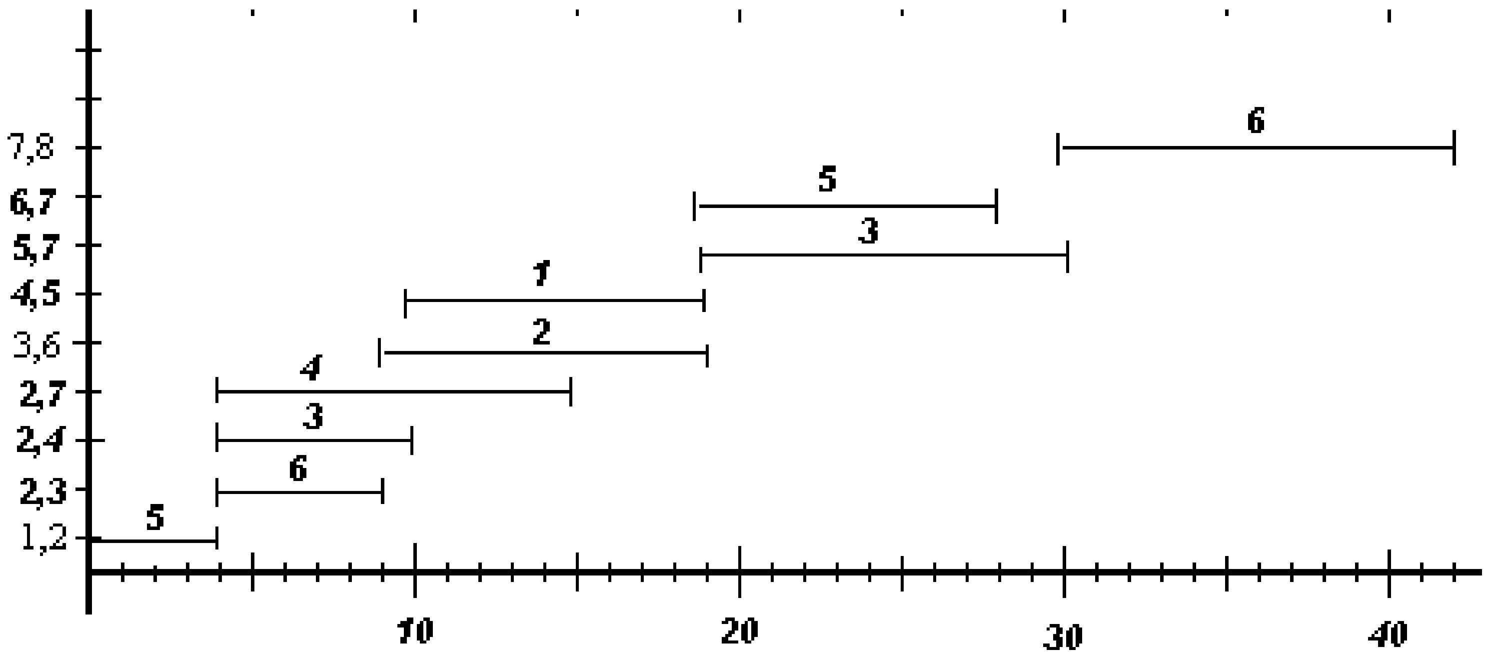
$$R_{\text{в}}(i,j) = T_{\text{р}}(j) - T_p(i) - t(i,j)$$

$R_{\text{в}}(i,j)$ показує максимальний час, на який можна збільшити тривалість окремої роботи або відстрочити її початок, не змінюючи ранніх термінів початку наступних робіт, за умови, що подія, яка безпосередньо передує, настала в свій ранній термін.

Використання вільного часу на одній з робіт не змінює величини вільних резервів часу інших робіт мережі.

Графік прив'язки

Графік прив'язки відображає взаємозв'язок виконуваних робіт в часі і будується на основі даних про ранні терміни їх початку і закінчення



Оптимизація використання ресурсу робочої сили

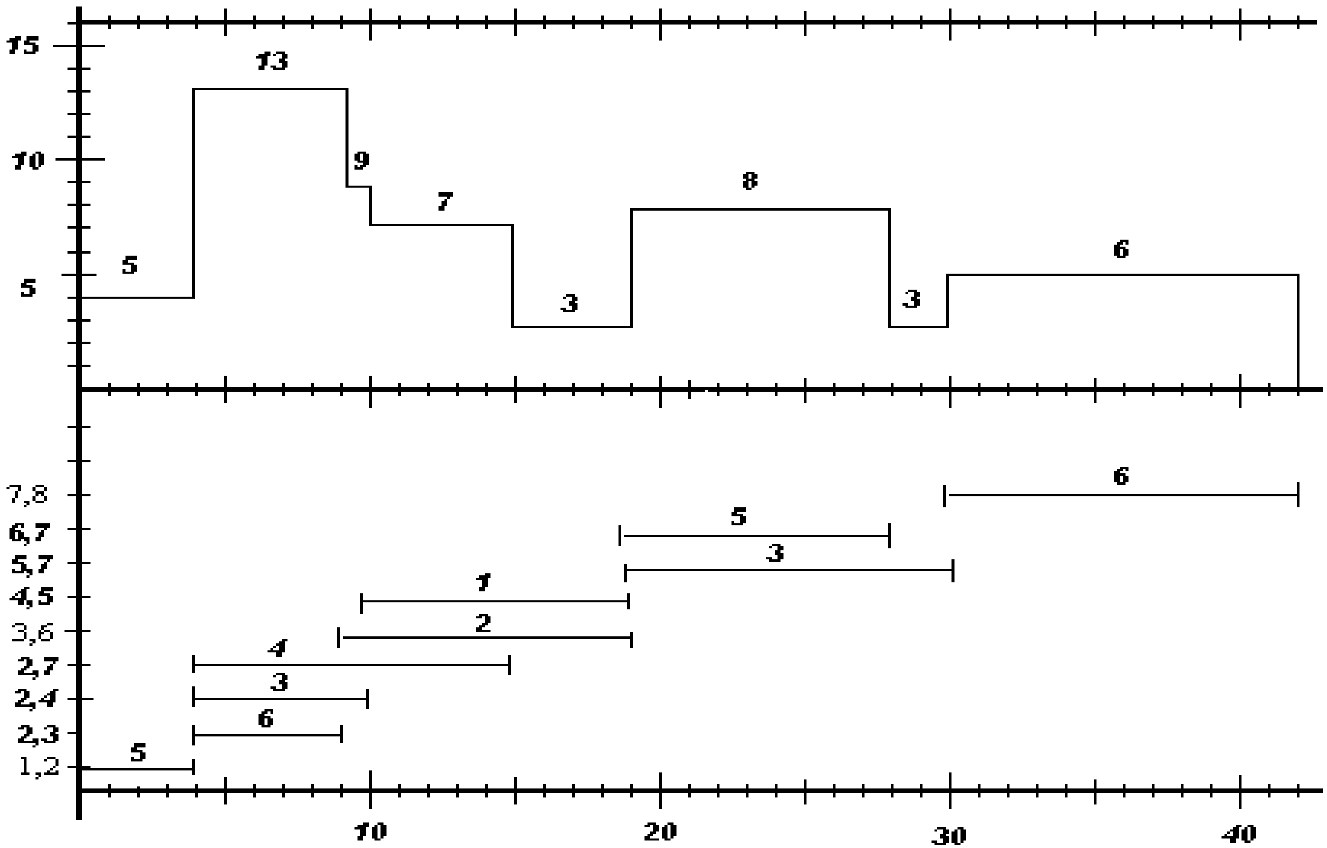
Мережеві роботи найчастіше прагнуть організувати таким чином, щоб:

– кількість одночасно зайнятих виконавців була мінімальною;

– вирівняти потребу в людських ресурсах протягом терміну виконання проєкту.

Для проведення подібних видів оптимізації необхідний ***графік завантаження***.

Графік завантаження



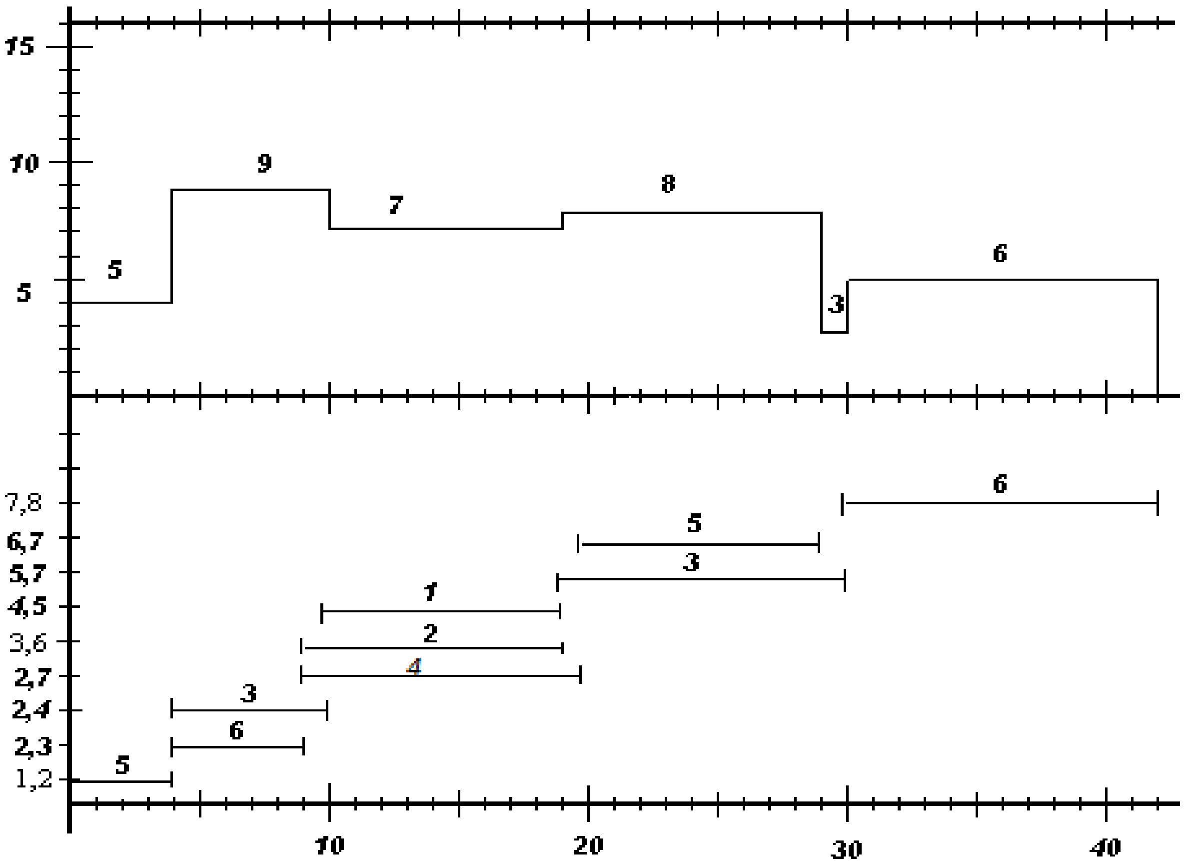
$R_в(2,7) = 15$; $R_в(6,7) = 2$,

$R_п(2,3) = R_п(3,6) =$
$= R_п(6,7) = 2$

$R_п(2,7) = 15.$

для зниження максимальної кількості одночасно зайнятих виконавців **з 13 до 9 осіб** **достатньо** **зсунути початок робіт (2, 7) і (3, 6) на 5 і 1 день відповідно.**

Графік завантаження



$R_в(2,7) = 15;\ R_в(6,7) = 2,$

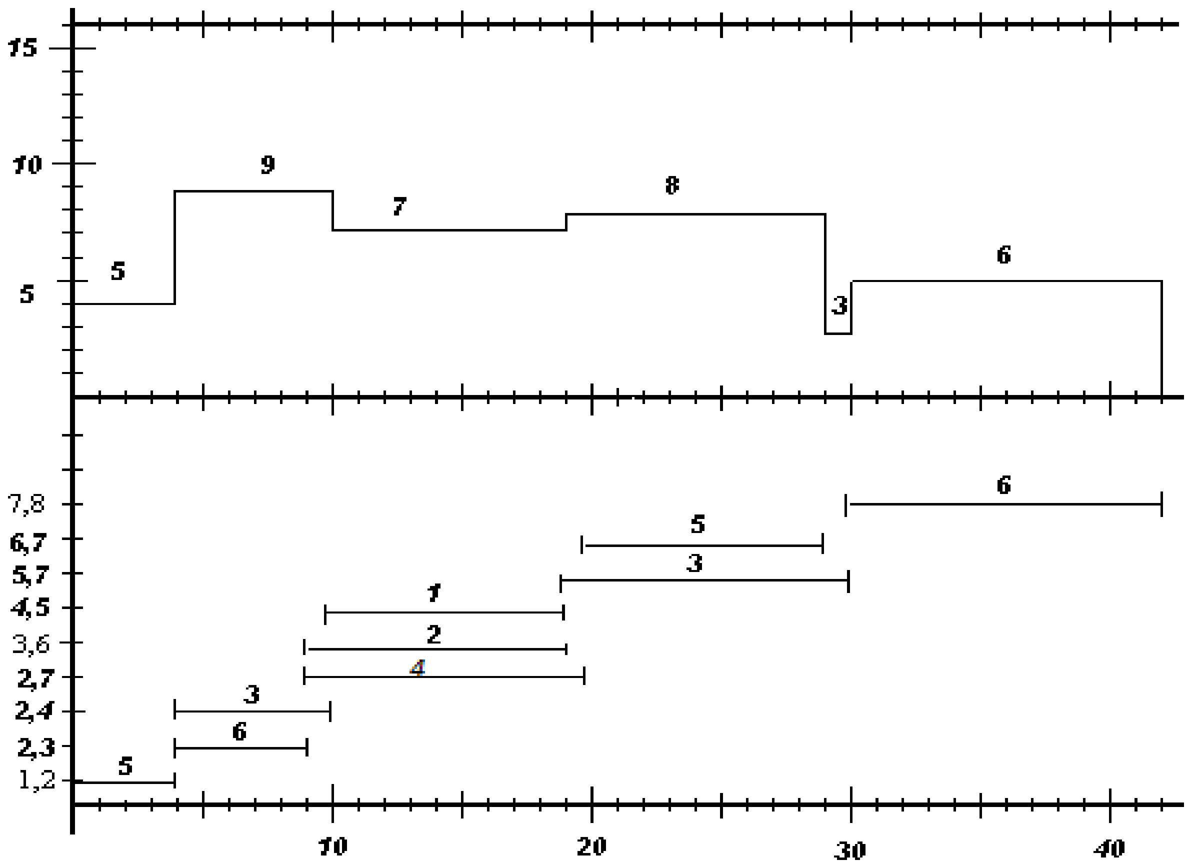
$R_п(2,3) = R_п(3,6) =$
$= R_п(6,7) = 2$

$R_п(2,7) = 15.$

для зниження максимальної кількості одночасно зайнятих виконавців **з 13 до 9 осіб достатньо було зсунути початок робіт $(2,7)$ і $(3,6)$ на 5 і 1 день відповідно.**

Графік завантаження

- оптимізація з метою вирівнювання завантаження



$R_{в}(2{,}7) = 15;\ R_{в}(6{,}7) = 2,$

$R_{п}(2{,}3) = R_{п}(3{,}6) =$
$= R_{п}(6{,}7) = 2$

$R_{п}(2{,}7) = 15.$

достатньо було
роботу (2,7) зрушити на 6 днів,
а роботу (6,7) – на 2 дні.

Оптимізація "час – витрати"

Вихідними даними для проведення оптимізації є:

- $T_{\text{н}}(i,j)$ – нормальна тривалість роботи;
- $T_{\text{у}}(i,j)$ – прискорена тривалість;
- $C_{\text{н}}(i,j)$ – витрати на виконання роботи в нормальний строк;
- $C_{\text{у}}(i,j)$ – витрати на виконання роботи в прискорений строк.

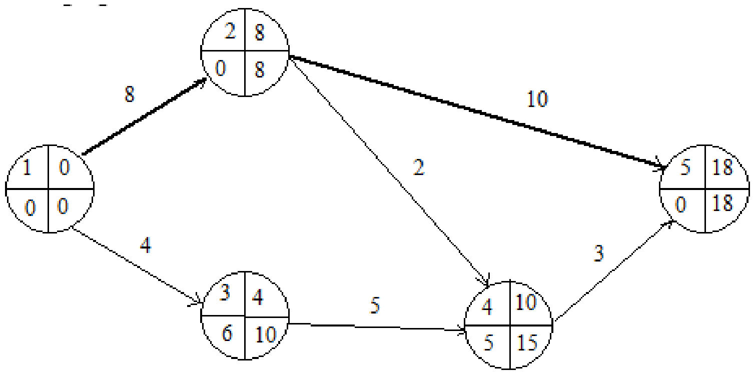
Приклад

(i,j)	Нормальний режим		Прискорений режим		$k(i,j)$
	$T_н(i,j)$	$C_н(i,j)$	$T_у(i,j)$	$C_у(i,j)$	
$(1,2)$	8	100	6	200	50
$(1,3)$	4	150	2	350	100
$(2,4)$	2	50	1	90	40
$(2,5)$	10	100	5	400	60
$(3,4)$	5	100	1	200	25
$(4,5)$	3	80	1	100	10

(0)

Критичний шлях: $L^0_{кр} = (1,2);(2,5),\quad T^0_{кр} = 18$

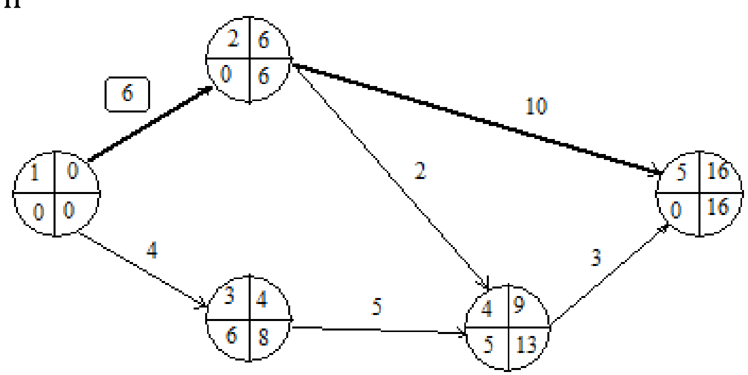
Підкритичний шлях: $L^0_{п} = (1,2);(2,4);(4,5),\ T^0_{п} = 13$



(1)

Критичний шлях: $L^1_{п} = (1,3);(3,4);(4,5),\ T^1_{кр} = 16$

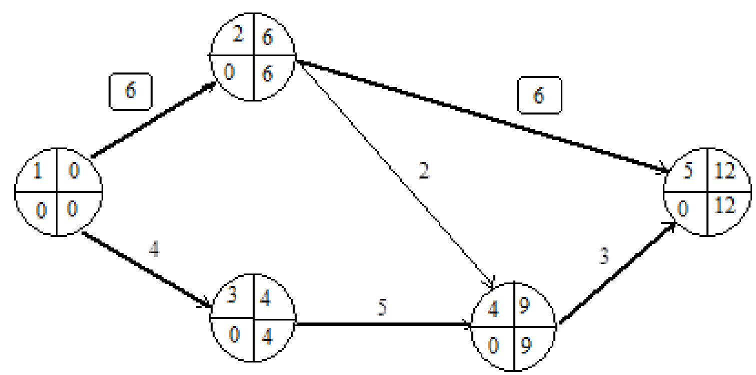
Підкритичний шлях: $L^1_{п} = (1,3);(3,4);(4,5),$
$T^1_{п} = 12$



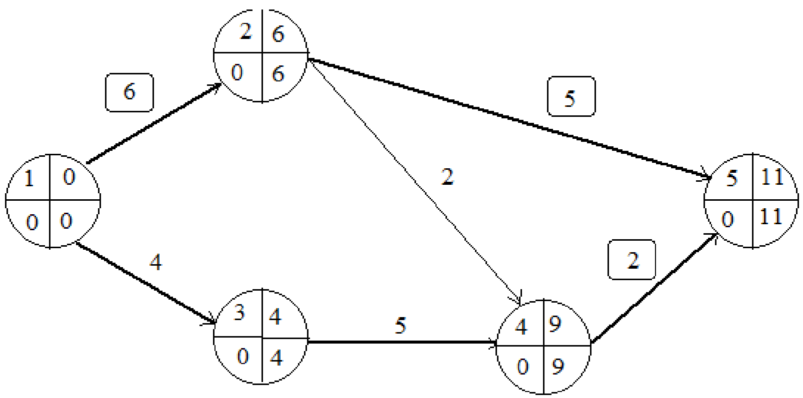
(2)

Критичний шлях:
$L^2_{кр} = (1,2);(2,5)$ та
$L^2_{кр} = (1,3);(3,4);(4,5),\ T^2_{кр} = 12$

Підкритичний шлях:
$L^2_{п} = (1,2);(2,4);(4,5),\ T^2_{п} = 11$



Критичний шлях:



Тривалість проєкту $T_{\text{кр}}^{3} = 11$
Критичні шляхи
$L_{\text{кр}}^{3} = (1{,}2); (2{,}5)$ і $L_{\text{кр}}^{3} = (1{,}3); (3{,}4); (4{,}5)$.
Підкритичний шлях $L_{\text{п}}^{3} =$
$(1{,}2); (2{,}4); (4{,}5)$, $T_{\text{п}}^{3} = 10$ днів

Оскільки всі критичні операції шляху $L_{\text{кр}}^{3} = (1, 2); (2, 5)$ стиснуті до встановленої межі $T_{\text{у}}(i, j)$, подальше скорочення тривалості проєкту не можливе.

Тема 14. Системи масового обслуговування

Основні поняття

Системами масового обслуговування (СМО) називають такі системи, в які у випадковий момент часу поступають заявки (запити, вимоги) на обслуговування, при цьому заявки, що надійшли, обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування.

Прикладами СМО можуть бути довідкові бюро, телефонні станції, станції технічного обслуговування, відділи магазинів, система станцій протиповітряної оборони та ін.

Основними елементами системи є:

- вхідний потік вимог;
- канали обслуговування;
- черга вимог;
- вихідний потік вимог.

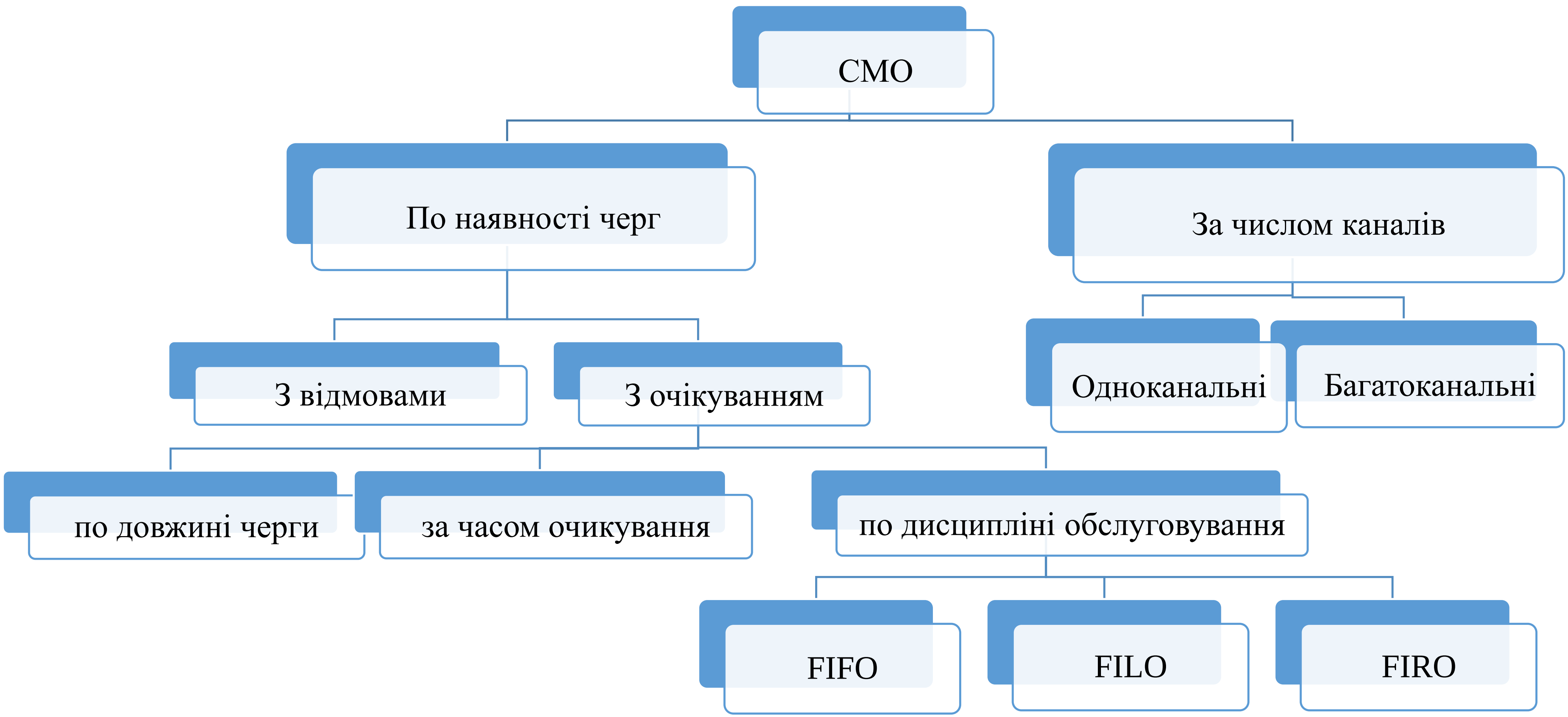
Основні поняття

Вимоги (заявки) на обслуговування надходять через дискретні (постійні або випадкові) інтервали часу. Важливо знати закон розподілу вхідного потоку.

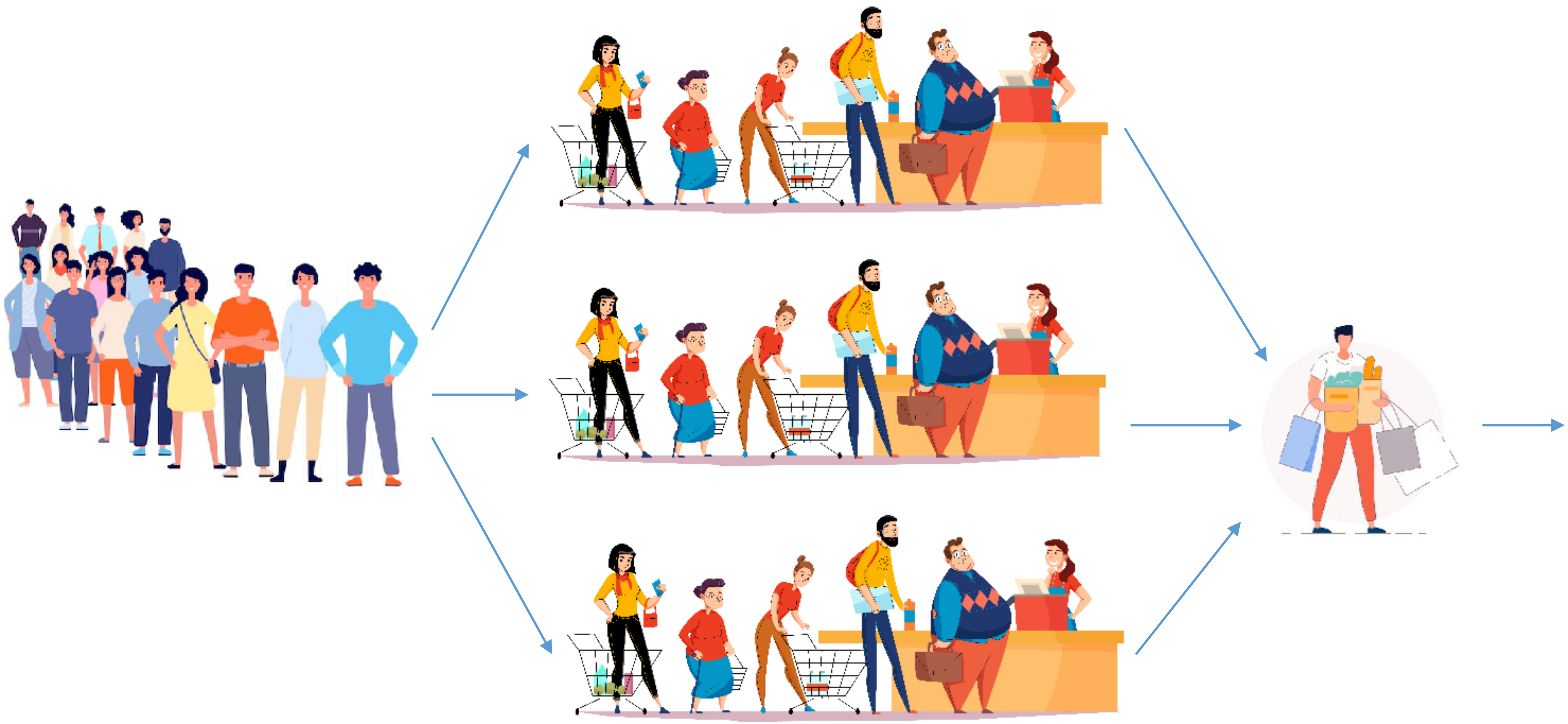
Канали (прилади) необхідні для обслуговування цих заявок. Обслуговування триває деякий час, постійний або випадковий.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, що пов’язують задані умови роботи СМО (число каналів, їх продуктивність, характер потоку заявок) з показниками ефективності СМО, які описують її здатність обслуговувати потік заявок.

Класифікація СМО



Приклад задачі



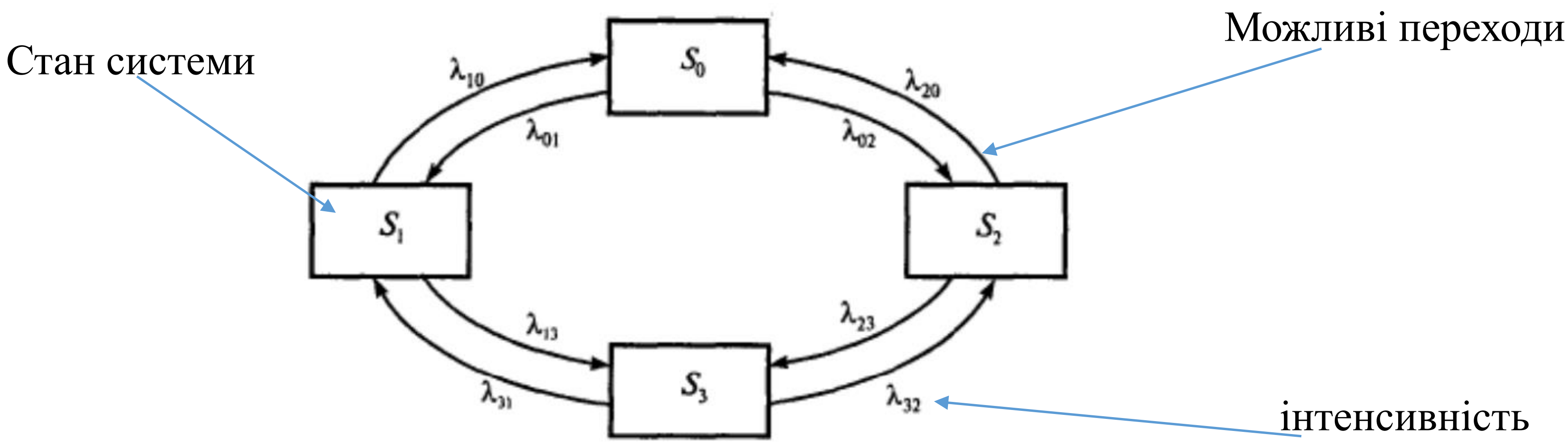
Процес роботи СМО

Процес роботи СМО є випадковим, тобто зі зміною стану будь-якої системи відповідно з імовірнісними закономірностями.
Процес є таким, що має ***дискретні стани***, якщо їх усі можна заздалегідь перерахувати, а перехід системи з стану в стан відбувається миттєво.

Математичний аналіз роботи СМО суттєво спрощується, якщо її процес є ***марковським***, або випадковим без післядії, коли для будь-якого моменту часу ймовірнісні характеристики в майбутньому залежать лише від його стану в даний момент і не залежать від того, коли і як система прийшла у цей стан.

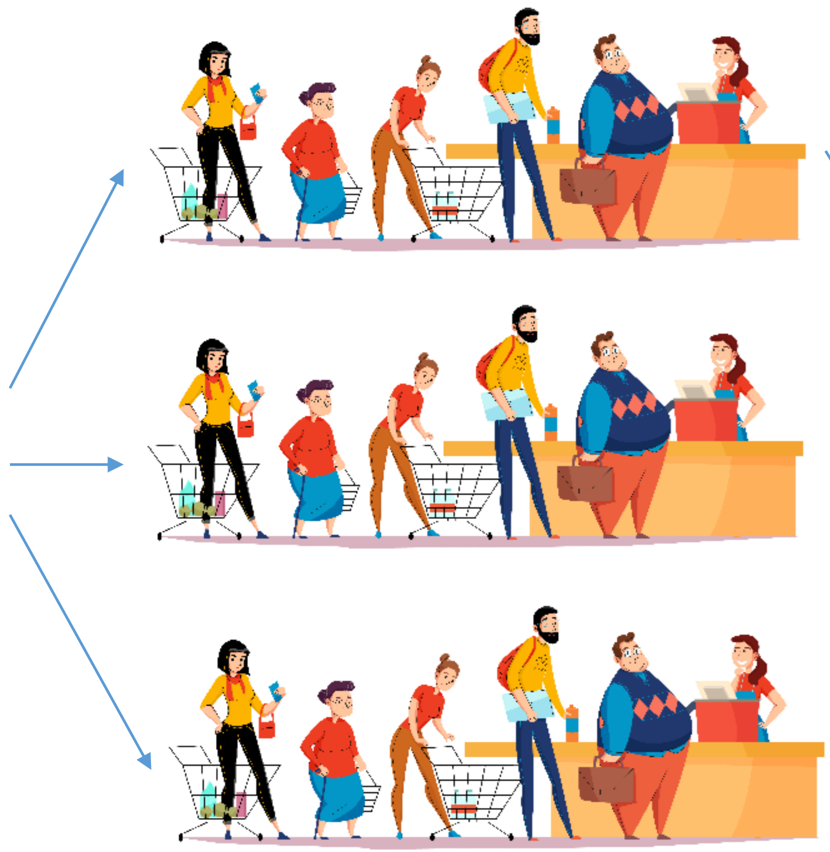
Граф станів

При аналізі випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою – так званим ***графом станів***.



Приклад задачі

Вхідний потік
Ранок (9 -12) – 50 чол.
День (12-15) – 100 чол.
Вечір (12-18) – 200 чол.



Середній час обслуговування однієї людини – 3 хв

Потік подій

Потік подій – це послідовність однорідних подій, що проходять одна за одною в якісь випадкові моменти часу (наприклад, потік викликів на телефонній станції, потік відмов комп'ютера, потік покупців і т.п.).

Характеризується ***інтенсивністю*** А – частотою появи подій N, що надходять в СМО в одиницю часу t.

$$a = \frac{N}{t} \qquad a_{\text{ранку}} = \frac{50\ \text{чол}}{180\ \text{хв}} = 0{,}28$$

Ранок	День	Вечір
0,28	0,56	1,11

Інтенсивність обслуговування

Інтенсивність обслуговування μ – швидкість обробки заявок в одиницю часу

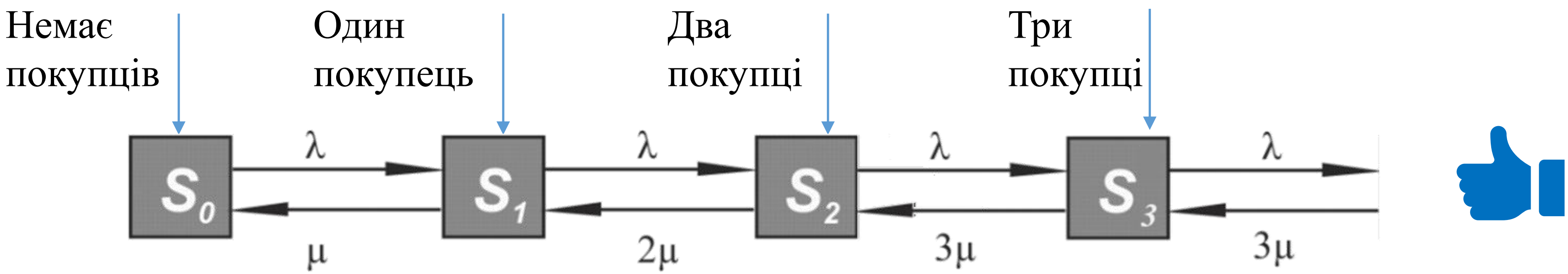
$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обр}}},$$

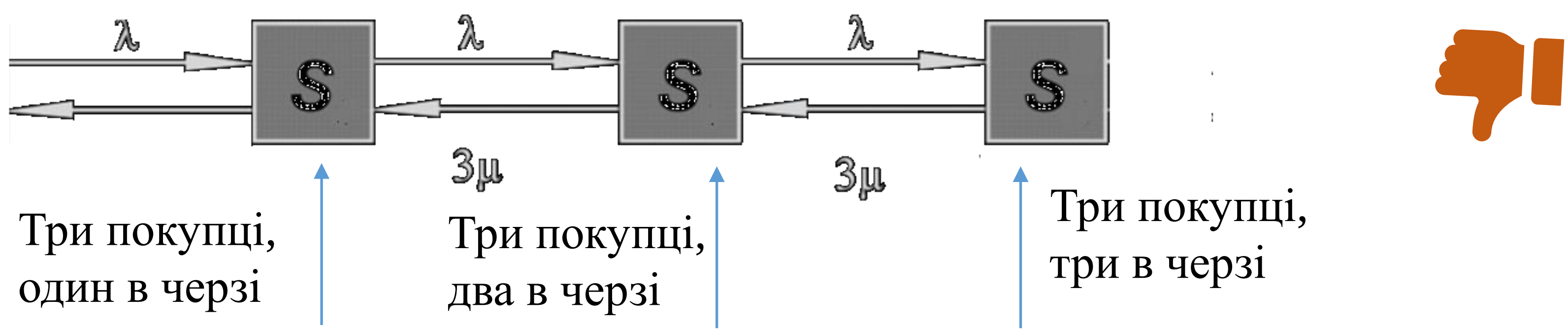
де tобр – це середній час роботи з одним клієнтом.

$$\mu = \frac{1 \text{ чол}}{3 \text{ хв}} = 0{,}3$$

Ранок	День	Вечір
0,3	0,3	0,3

Марковський процес



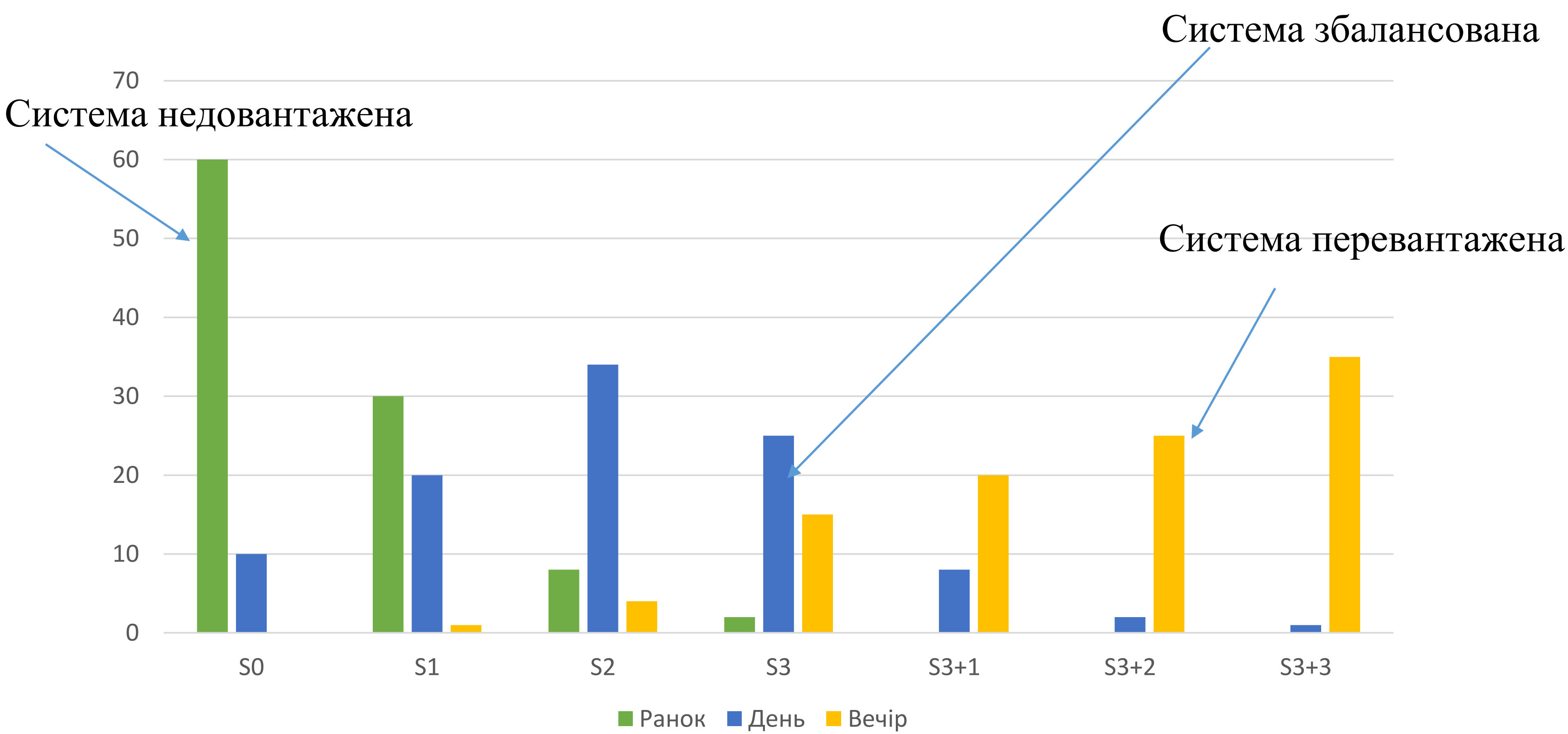


Показники ефективності СМО

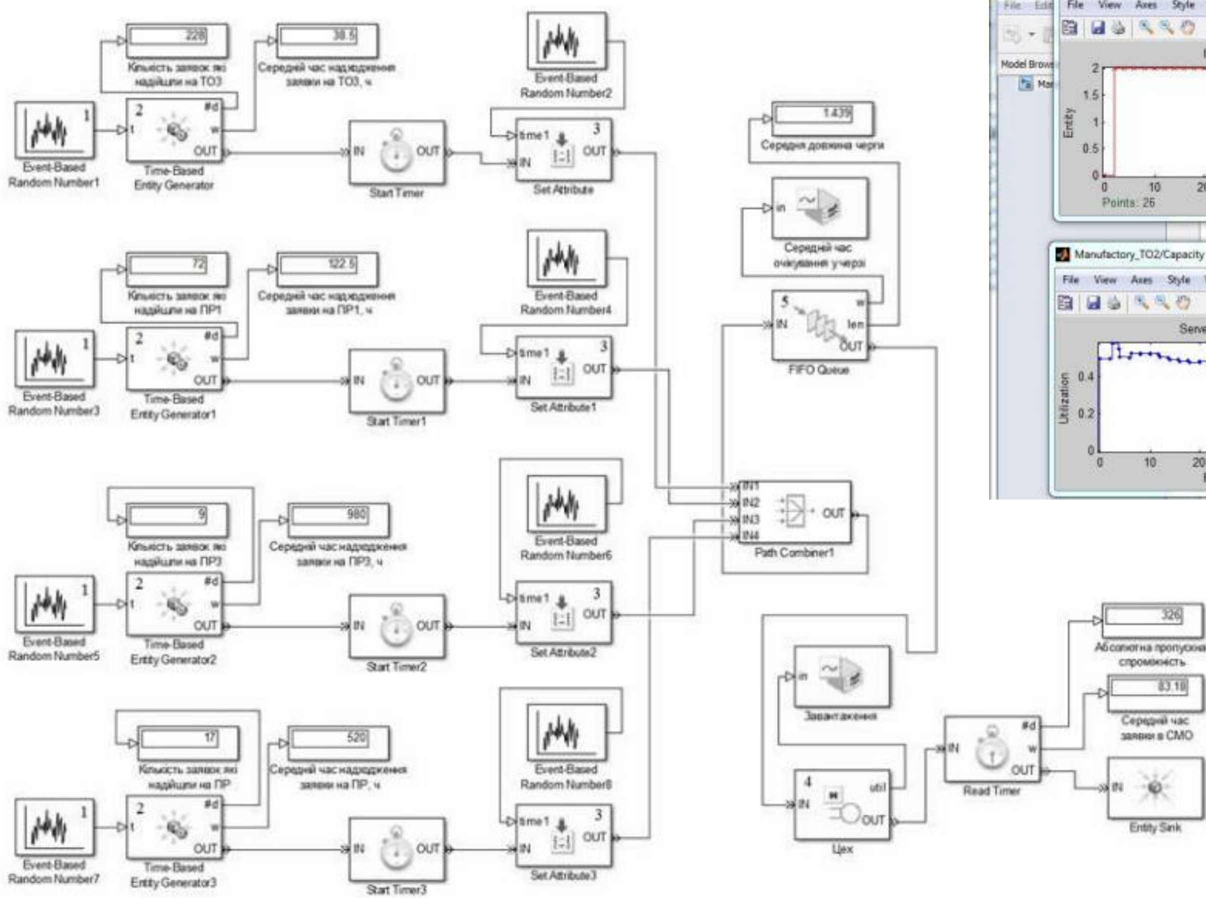
Показник	Сервісна дільниця з n постами обслуговування і необмеженою чергою	Сервісна дільниця з n постами обслуговування і кількістю m місць у черзі
Граничні ймовірності	$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}\right)^{-1},$ $p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0,\ k = \overline{1,n};$ $p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n!\,n^r} \cdot p_0,$ $r = 1,2,\dots;$	$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}(1-\rho/n)^m}{n \cdot n!\,(1-\rho/n)}\right)^{-1},$ $p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0,\ k = \overline{1,n};$ $p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n!\,n^r} \cdot p_0,\ r = \overline{1,m};$
Ймовірність того, що клієнт з’явиться у черзі	$P_{черги} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)} p_0$	$P_{черги} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)} p_0$
Ймовірність відмови	$P_{відм} = 0$	$P_{відм} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$
Абсолютна пропускна здатність	$A = \lambda Q$	$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$

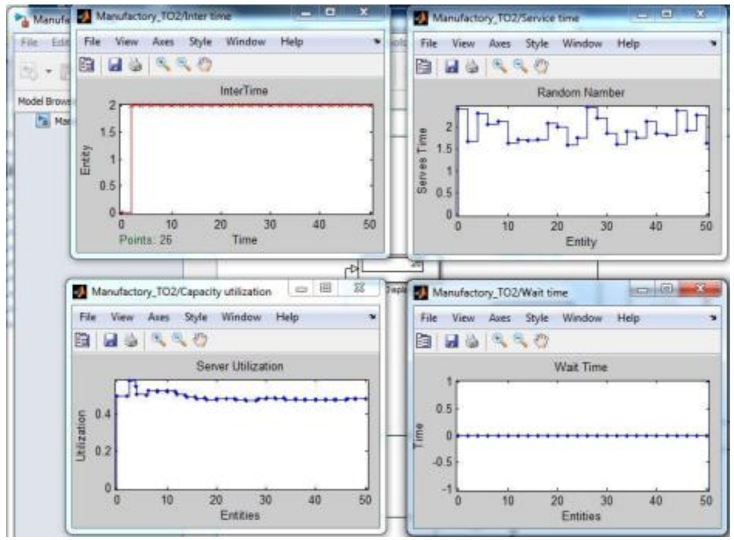
Показник	Сервісна дільниця з n постами обслуговування і необмеженою чергою	Сервісна дільниця з n постами обслуговування і кількістю m місць у черзі
Відносна пропускна здатність	$Q = 1$	$Q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$
Середнє число клієнтів у черзі	$L_{черги} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2};$	$L_{черги} =$ $= \frac{\rho^{n+1} p_0 \left[1 - \left(m + 1 - m\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$
Середнє число клієнтів, що обслуговуються	$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$	$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$
Середнє число клієнтів в системі	$L_{сист} = L_{черги} + \rho;$	$L_{сист} = L_{черги} + \bar{k};$
Середній час перебування клієнтів на дільниці	$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист};$	$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист};$
Середній час перебування клієнтів в черзі	$T_{черги} = \frac{1}{\lambda} L_{черги}$	$T_{черги} = \frac{1}{\lambda} L_{черги}$

Ймовірність станів



Імітаційне моделювання в Matlab





*при створенні слайду використано інформацію з джерела [11]

Список рекомендованих джерел

1. Одновол М.М., Коряшкіна Л.С., Гаранжа Д.М. Методи оптимізації та дослідження операцій. Методичні рекомендації до виконання курсової роботи з дисципліни для студентів спеціальності 124 Системний аналіз. Дніпро : Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка», 2023. 68 с.

2. Коряшкіна Л.С., Ус С.А. Практикум за курсом «Методи оптимізації та дослідження операцій». Частина I. Дослідження операцій : навч. посіб. Дніпро : Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». 2020. 182 с.

3. Коряшкіна Л.С., Ус С.А. Практикум за курсом «Методи оптимізації та дослідження операцій». Частина II. Нелінійне програмування: навч. посіб. Дніпро : Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». 2023. 220 с.

4. Безкровний О. І., Павленко В. І., Тимошенко А. Г. Дослідження операцій і методи прийняття технічних рішень : навч. посіб. Київ : Університет «Україна». 2019. 419 с.

5. Ємець О. О. Методи оптимізації та дослідження операцій : навч. посіб. Полтава : ПУЕТ, 2019. Ч. 1. 245 с.

6. Ємець О. О. Методи оптимізації та дослідження операцій : навч. посіб. Полтава : ПУЕТ, 2019. Ч. 2. 139 с.

7. Меньшикова О. В., Чмир О. Ю., Карабан О. О. Дослідження операцій : навч. посіб. Львів : ЛДУ БЖД. 2019. 196 с.

8. Ладієва Л. Р. Оптимазація систем керування : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2020. 211 с.

9. Яцько О. М., Томка Ю.Я. Дослідження операцій та теорія ігор : навч.-метод. посіб. Чернівці : Технодрук, 2023. 392 с.

10. Сікора Я. Б., Щехорський А.Й. , Якимчук Б.Л. Методи оптимізації та дослідження операцій : навч. посіб. Житомир : ЖДУ ім. Івана Франка, 2019. 148 с.

11. Математичні методи та моделі в спеціальних задачах. Моделювання систем масового обслуговування [Електронний ресурс] : метод. рекомендації до практ. занять та дипл. проект. / уклад. : Д. В. Бобирь, О. Б. Очкасов, М. В. Очеретнюк. Дніпро : Укр. держ. ун-т науки і технологій. 2022. 21 с.

12. Taha Hamdy A. Operation research : an introduction. 8th ed., 2007. 838 p.

Навчальне видання

Коряшкіна Лариса Сергіївна
Ус Світлана Альбертівна
Станіна Ольга Дмитрівна

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Навчальний наочний посібник

Видано в авторській редакції.

Підписано до видання 14.02.2025
Електронний ресурс. Авт. арк. 7,6.

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.

Відомості про авторів

Лариса Сергіївна Коряшкіна – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», автор понад 170 наукових та методичних праць, серед яких 4 монографії, 16 навчальних посібників, близько 70 наукових статей.
Наукові інтереси: моделювання складних систем; системний аналіз й оптимізація логістичних, виробничих, технологічних процесів.

Світлана Альбертівна Ус – кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», автор понад 170 наукових і методичних праць, серед яких дві монографії, 16 навчальних посібників, близько 70 наукових статей, експерт Національного агентства забезпечення якості вищої освіти.
Наукові інтереси: прийняття рішень в умовах невизначеності, моделювання складних систем

Ольга Дмитрівна Станіна – кандидат технічних наук, доцент кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», автор понад 60 наукових і методичних праць, серед яких підручник, дві монографії, два навчальних посібники, близько 20 наукових статей.
Наукові інтереси: методи оптимізації, теорія прийняття рішень.