МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Л.С. Коряшкіна, М.М. Udновол, О.Д. Станіна

ПРАКТИКУМ З МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕНЬ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

УДК 519.6
К 70

Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 124 Системний аналіз
(протокол № 1 від 22.01.2025)

Рецензенти:

Ю. П. Синицiна – канд. техн. наук, доц. (Дніпровський державний університет внутрішніх справ);

Д. О. Сердюк – магістр з системного аналізу, математик-програміст (мережа магазинів «АТБ»).

Коряшкіна Л.С.

К 70 Практикум з методів обчислень [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Л.С. Коряшкіна, М.М. Одновол, О.Д. Станіна ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024 – 120 с.

У навчальному посібнику розглянуто основні розділи дисципліни обов’язкового циклу «Методи обчислень», а саме: елементи теорії похибок, розв’язування нелінійних рівнянь, систем лінійних алгебраїчних рівнянь, інтерполяція та апроксимація, числові інтегрування та диференціювання, а також наближене розв’язування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Кожна частина видання містить теоретичний матеріал, необхідний для розуміння теоретичних основ дисципліни, і приклади розв’язування типових задач.

Рекомендовано для здобувачів ступеня бакалавра галузі знань 12 «Інформаційні технології», а також для студентів інших спеціальностей, які мають намір сформувати уявлення про застосування методів обчислень.

УДК 519.6

ЗМІСТ

ВСТУП

Бурхливий розвиток науки і техніки в сучасному світі тісно пов’язаний з використанням комп’ютерів і математичного моделювання. Завдяки використанню сучасної обчислювальної техніки з’являється можливість не тільки використовувати прості розрахунки, а й проводити експерименти, що дозволяє уникати випробувань різних систем у реальних умовах, коли потрібно велика кількість ресурсів.

Технологія дослідження складних явищ базується на вивченні побудованих за допомогою комп'ютерних програм математичних моделей певного об’єкта. Цей метод дослідження називають обчислювальним експериментом. Схема його застосування включає такі основні етапи: побудова математичної моделі об’єкта дослідження, яка може бути подана у вигляді систем рівнянь (алгебраїчних, диференціальних, трансцендентних); розв'язування побудованої задачі; проведення обчислень та аналіз отриманих результатів. Саме на другому етапі застосовують обчислювальну техніку. Така інтерпретація експерименту (побудова «дискретної моделі»), що доступна для реалізації на комп’ютері, називається числовим методом. Наприклад, якщо математичною моделлю експерименту є диференціальне рівняння, то числовим методом в цьому випадку може бути різницеве рівняння апроксимації разом з алгоритмом його розв'язування. за допомогою комп’ютерної програми, у результаті чого мають число або таблицю чисел. Отже, йдеться про методи, за допомогою яких розв’язок математичної задачі має не аналітичний вигляд, а числовий. У цьому посібнику описано використання таких методів.

Видання розраховано на здобувачів спеціальності 124 Системний аналіз, в програму підготовки яких включено дисципліну «Методи обчислень». Мета посібника, як і дисципліни в цілому, – це формування компетентностей у застосуванні числових методів до розв’язування задач різноманітної тематики.

У виданні розглянуто основні теоретичні розділи дисципліни, зокрема елементи теорії похибок, наближений розв’язок нелінійних рівнянь, розв’язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь, інтерполяцію та апроксимацію функції, числове диференціювання та інтегрування, наближений розв’язок звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, способи обчислення власних значень і власних векторів матриць, розв'язування граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь. Зміст посібника повністю відповідає програмі навчальної дисципліни «Методи обчислень».

Для кращого засвоєння здобувачем вищої освіти навчального матеріалу та оволодіння методами обчислень у кожному розділі посібника подано теоретичні відомості, необхідні для розуміння і подальшого використання цих знань на практиці, а також приклади розв'язування типових задач.

Автори сподіваються, що викладений у посібнику матеріал сприятиме формуванню кваліфікації фахівця у сфері інформаційних технологій, розвитку його самостійного мислення й творчої активності.

Практична робота № 1. Елементи теорії похибок

Мета: навчитися розраховувати абсолютну та відносну похибку розрахунків.

План

1. Постановка задачі
2. Округлення чисел
3. Абсолютна та відносна похибки
4. Вірні та значущі цифри

Основні теоретичні відомості

Наближеним числом c називається число, яке незначно відрізняється від точного C та яке замінює останнє під час проведення обчислень. Якщо відомо, що $c < C,$ то c називається наближеним значенням числа C **з нестачею**; якщо $c > C,$ то – **з надлишком**.

Технологія округлення чисел.

1. Якщо старший розряд, що відкидається, менше 5, попередня йому цифра в числі не змінюється.

2. Якщо старший розряд, що відкидається, більше 5, попередня цифра в числі збільшується на 1.

3. Якщо старший розряд, що відкидається, дорівнює 5, за загальноприйнятою угодою попередня йому парна цифра в числі не змінюється (наприклад, $c = 3.965$; $c^* \approx 3.96$), а непарна – збільшується на одиницю (наприклад, $c = 3.915$; $c \approx 3.92$).

4. При округленні цілого числа відкинуті знаки не слід замінювати нулями, треба застосовувати множення на відповідні степені 10.

Абсолютна похибка $\Delta(X)$ наближеного числа a, яка визначається рівністю

$$\Delta(X) = |x - a|$$

або

$$x = a \pm \Delta(X).$$

Відносна похибка наближеного числа a, яка визначається рівністю

$$\delta(X) = \frac{\Delta(X)}{|a|} = \left|\frac{x - a}{a}\right|$$

або

$$\delta(X) = \frac{\Delta(X)}{|a|} \cdot 100\%.$$

Гранична абсолютна похибка Δa – це верхня оцінка модуля абсолютної похибки числа *x*, тобто

$$|\Delta x| \le \Delta a.$$

Справжнє значення числа *x* перебуватиме в інтервалі з межами $(a - \Delta a)$ – з нестачею і $(a + \Delta a)$ – з надлишком, тобто:

$$(a - \Delta a) \le x \le (a + \Delta a).$$

Умовилися для наближених чисел за результатами округлень, як Δ приймати одиницю або 1/2 одиниці залишеного розряду числа. Першу умову називають похибкою у «широкому» значенні, другу – у «вузькому» значенні.

Запис наближених чисел повинен підпорядковуватися правилам, пов'язаним з поняттями *вірних цифр*.

Будь-яке десяткове число

$$x = \pm\alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_{-1} \cdot \alpha_{-2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{-m}$$

представимо у вигляді

$$x = \pm\alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0 + \alpha_{-1} \cdot 10^{-1} + \alpha_{-2} \cdot 10^{-2} + \\ + \ldots + \alpha_{-m} \cdot 10^{-m}$$

де α_i – цифри числа, 10^i – їх позиція ($\pm i$).

Перша зліва відмінна від нуля цифра числа *x* і всі розташовані праворуч від неї цифри називаються ***значущими***. Значуща цифра α_i називається ***правильною*** (у вузькому значенні), якщо абсолютна похибка числа вбирається у $\frac{1}{2}$ одиниці розряду, відповідного цієї цифрі, тобто. $\Delta a \leq \frac{1}{2} \cdot 10^i$, де 10^i вказує номер розряду ($\pm i$).

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Завдання:

1. Визначити, яка рівність э точнішою (див. табл.1).
2. Округлити сумнівні цифри числа, залишивши вірні знаки:
   а) у вузькому значенні;
   б) у широкому значенні.
   Визначити граничні абсолютну та відносну похибки результату.
3. Знайти граничні абсолютну та відносну похибки чисел, якщо вони мають лише вірні цифри:
   а) у вузькому значенні;
   б) у широкому значенні.

Приклад розв'язування типової задачі

Завдання а). Яка рівність точніша $\frac{12}{7} = 1.71; \quad \sqrt{11} = 3.32$?

Розв'язання. Розрахуємо наближене значення $a = \frac{12}{7} \approx 1.7143; \quad b = \sqrt{11} \approx 3.3166$ та позначимо $\tilde{a} = 1.71; \quad \tilde{b} = 3.32$.

Тоді

$$\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| = |1.7143 - 1.71| = 0.0043 \leq 0.0044,$$

$$\delta_{\tilde{a}} = \frac{\Delta\tilde{a}}{\tilde{a}} = \frac{0.0044}{1.71} \leq 0.0026 = 0.26\%.$$

$$\Delta\tilde{b} = \left|b - \tilde{b}\right| = |3.3166 - 3.32| = 0.0034 \leq 0.0035,$$

$$\delta_{\tilde{b}} = \frac{\Delta\tilde{b}}{\tilde{b}} = \frac{0.0035}{3.32} \leq 0.0011 = 0.11\%.$$

Оскільки $\delta_{\tilde{a}} = 0.26\%$ більше за $\delta_{\tilde{b}} = 0.11\%$, то рівність $\sqrt{11} = 3.32$ визначено точнішою.

Завдання б). Округлити сумнівні цифри числа, залишивши вірні знаки: 1) у вузькому значенні; 2) у широкому значенні. Визначити граничні абсолютну та відносну похибки результату.

Розв'язання.

1) Дано наближене число, де $\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \leq 0{,}0027$.

Визначимо число вірних знаків у $\tilde{a} = 3.567 \pm 0{,}0027$ у вузькому значенні, використовуючи такий вираз:

$$\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \leq \frac{1}{2}10^{m-n+1}.$$

Оскільки всяке додатне число a може бути представлено у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу:

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots,$$

представимо число a у вигляді такого дробу:

$$a = 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + \ldots$$

Позаяк $m = 0$, і вірною є нерівність

$$0.0027 \leq \frac{1}{2}10^{-2},$$

маємо

$$\frac{1}{2}10^{-2} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$$

і отримаємо $m - n + 1 = -2$, $\quad n = 3$. Округлимо $\tilde{a} = 3.567$ до трьох вірних знаків і отримаємо $\tilde{a}_1 = 3.57$ з похибкою округлення

$$\Delta_{\text{окр}} = |\tilde{a} - \tilde{a}_1| = |3.657 - 3.67| = 0.003.$$

При цьому похибка отриманого наближеного числа дорівнює

$$\Delta\tilde{a}_1 = \Delta\tilde{a} + \Delta_{\text{окр}} = 0.0027 + 0.003 = 0.0057.$$

Визначимо число вірних знаків наближеного числа $\tilde{a}_1 = 3{,}57$.

$$\left(0.0057 \le \frac{1}{2}10^{-1}\right) = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1},$$

$m - n_1 + 1 = -1,\ n_1 = 2$. Округлимо $\tilde{a}_1 = 3{,}57$ до двох вірних знаків і отримаємо $\tilde{a}_2 = 3{,}6$ з похибкою округлення $\Delta_{\text{окр}1} = 0.03$. При цьому похибка отриманого наближеного числа $\tilde{a}_2 = 3{,}6$ дорівнює $\Delta\tilde{a}_2 = \Delta\tilde{a}_1 + \Delta_{\text{окр}1} = 0.0357$.

Визначимо число вірних знаків наближеного числа $\tilde{a}_2 = 3{,}6$:

$$\left(0.0357 \le \frac{1}{2}10^{-1}\right) = \frac{1}{2}10^{m-n_2+1},$$

отже $m - n_2 + 1 = -1, n_2 = 2$.

Оскільки $n_2 = n_1$, наближене число $\tilde{a}_2 = 3{,}6$ має лише вірні знаки.

Визначимо граничну відносну похибку наближеного числа $\tilde{a}_2 = 3{,}6 \pm 0.0357$. Для цього використовуємо визначення граничної похибки:

$$\delta_{\widetilde{a_2}} = \frac{\Delta\tilde{a}_2}{|\tilde{a}_2|} \approx \frac{0.0357}{3.6} = 0.00992 \approx 1\%.$$

2) Дано наближене число $\tilde{a} = 18.965$; $\delta = 0.35\%$, де $\Delta\tilde{a} \simeq \tilde{a} \cdot \delta \le \Delta_{\tilde{a}} = 0.067$. Визначимо <u>число вірних знаків у широкому сенсі,</u> використовуючи такий вираз:

$$\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \le 10^{m-n+1}.$$

Позаяк $m = 1$, і вірна нерівність $(0.067 \le 10^{-1}) = 10^{m-n+1}$, то отримаємо $m - n + 1 = -1,\ n = 3$. Округлимо $\tilde{a} = 18.965$ до трьох вірних знаків і отримаємо $\tilde{a}_1 = 19.0$ з похибкою округлення

$$\Delta_{\text{окр}} = |\tilde{a} - \tilde{a}_1| = |18.965 - 19.0| = 0.035.$$

При цьому похибка отриманого наближеного числа дорівнює

$$\Delta\tilde{a}_1 = \Delta a + \Delta_{\text{окр}} = 0.067 + 0.035 = 0.102.$$

Визначимо число вірних знаків наближеного числа $\tilde{a}_1 = 19.0$.

$(0.102 \le 10^0) = 10^{m-n_1+1}$, $m - n_1 + 1 = 0$, $n_1 = 2$. Округлимо $\tilde{a}_1 = 19.0$ до двох вірних знаків і отримаємо $\tilde{a}_2 = 19$ з похибкою округлення $\Delta_{\text{окр}1} = 0.0$. При цьому похибка отриманого наближеного числа $\tilde{a}_2 = 19$ дорівнює

$$\Delta\tilde{a}_2 = \Delta a_1 + \Delta_{\text{окр}1} = 0.102.$$

Визначимо число вірних знаків наближеного числа $\tilde{a}_2 = 19$.

З умови $(0.102 \leq 10^0) = 10^{m-n_2+1}$ отримаємо $m - n_2 + 1 = 0$, $n_2 = 2$. Оскільки $n_2 = n_1$, наближене число $\tilde{a}_2 = 19$ має лише вірні знаки.

Визначимо граничну відносну похибку наближеного числа $\tilde{a}_2 = 19 \pm 0.102$. Для цього використовуємо визначення граничної похибки:

$$\delta_{\widetilde{a_2}} = \frac{\Delta\tilde{a}_2}{|\tilde{a}_2|} \approx \frac{0.102}{19} = 0.0054 \approx 0.54\%.$$

Завдання в). Знайти граничні абсолютну та відносну похибки чисел, якщо вони мають лише вірні цифри: 1) у вузькому значенні; 2) у широкому значенні.

1) Дано наближене число $\tilde{a} = 23.56$.

Оскільки це число має тільки вірні цифри у вузькому сенсі , то $m = 1$, $n = 4$. Визначимо граничну абсолютну похибку числа з виразу

$$\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \leq \frac{1}{2}10^{m-n+1}.$$

Тоді

$$\Delta\tilde{a} \leq \left(\frac{1}{2}10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^{1-4+1} = \frac{1}{2}10^{-2}\right).$$

Отже, для абсолютної похибки маємо $\Delta\tilde{a} = \frac{1}{2}10^{-2} = 0.005$. Для визначення граничної відносної похибки числа можна використовувати вираз:

$$\delta_{\tilde{a}} = \frac{\Delta\tilde{a}}{|\tilde{a}|} = \frac{0.005}{23.56} \approx 0.0002 \approx 0.02\%.$$

2) Дано наближене число $\tilde{a} = 0.73$.

Оскільки це число має лише вірні цифри у широкому сенсі, то $m = -1$, $n = 3$. Визначимо граничну абсолютну похибку числа з виразу $\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \leq 10^{m-n+1}$. Тоді

$$\Delta\tilde{a} \leq (10^{m-n+1} = 10^{-1-2+1} = 10^{-2}).$$

Отже, для абсолютної похибки маємо $\Delta\tilde{a} = 10^{-2} = 0.01$. Для визначення граничної відносної похибки числа можна використовувати вираз

$\delta_{\tilde{a}} = \frac{\Delta\tilde{a}}{|\tilde{a}|} \approx \frac{0.01}{0.73} \approx 0.014 \approx 1.4\%.$

Таблиця №1. Завдання до практичної роботи №1

Варіант	1	2		3	
		а)	б)	а)	б)
1	$\frac{7}{3}=2.33;\ \sqrt{42}=6.48$	3.4852 ± 0.0047	$12.8969;\delta=0.39\%$	245.67	8.4296
2	$\frac{21}{29}=0.724;\ \sqrt{83}=9.11$	$2.5439;\delta=0.69\%$	0.48652 ± 0.0089	2.6087	78.296
3	$\frac{4}{7}=0.235;\ \sqrt{10}=3.16$	513.4852 ± 0.087	$120.839;\delta=0.054\%$	12.356	0.04296
4	$\frac{12}{7}=1.71;\ \sqrt{63}=7.94$	$102.86;\delta=0.59\%$	0.38554 ± 0.0087	45.067	2.894
5	$\frac{14}{17}=0.823;\ \sqrt{58}=7.61$	30.852 ± 0.077	$142.789;\delta=0.73\%$	98.123	128.96
6	$\frac{5}{3}=1.667;\ \sqrt{7}=2.64$	$0.89569;\delta=0.05\%$	3.141592 ± 0.00987	445.94	0.4796
7	$\frac{16}{7}=2.28;\ \sqrt{14}=3.74$	0.058948 ± 0.00447	$1282.789;\delta=0.83\%$	67.607	6.453
8	$\frac{20}{3}=1.54;\ \sqrt{6.8}=2.61$	37.7682 ± 0.0049	$182.778;\delta=0.69\%$	745.607	2.4896
9	$\frac{18}{7}=2.57;\ \sqrt{18}=4.24$	$8.5447;\delta=0.29\%$	0.98752 ± 0.0069	7.687	87.586
10	$\frac{19}{9}=2.11;\ \sqrt{7}=2.64$	531.4875 ± 0.078	$12.389;\delta=0.015\%$	0.02356	308.096
11	$\frac{23}{15}=1.53;\ \sqrt{27}=5.19$	$1.8467;\delta=0.027\%$	17.854 ± 0.00687	145.467	0.0397
12	$\frac{18}{17}=1.06;\ \sqrt{15}=3.87$	0.4856 ± 0.0047	$124.879;\delta=0.53\%$	98.1203	12.896
13	$\frac{5}{13}=0.385;\ \sqrt{\frac{3}{20}}=0.387$	$8.5969;\delta=0.9\%$	$\sqrt{\pi}\pm 0.00867$	748.259	3.345
14	$\frac{11}{7}=1.57;\ \sqrt{3}=1.73$	0.04568 ± 0.00487	$1078.987;\delta=0.183\%$	6.7692	0.6453
15	$\frac{10}{7}=1.43;\ \sqrt{14}=3.74$	8.7858 ± 0.0046	$1.8969;\delta=0.079\%$	0.2467	18.416

Продовження таблиці №1

Варіант	а)	б)		в)	
		1	2	1	2
16	$\frac{29}{21} = 1.38;\ \sqrt{18} = 4.243$	$5.4394; \delta = 0.03\%$	4.5675 ± 0.0078	2.087	0.786
17	$\frac{7}{3} = 2.33;\ \sqrt{8} = 2.83$	113.8352 ± 0.068	$122.239;\ \delta = 0.54\%$	52.308	0.0049
18	$\frac{7}{12} = 0.583;\ \sqrt{23} = 4.796$	$132.86; \delta = 0.09\%$	0.38775 ± 0.0097	0.067	20.974
19	$\frac{17}{14} = 1.21;\ \sqrt{8} = 2.83$	52.875 ± 0.0047	$742.123;\ \delta = 0.023\%$	9.1230	0.1289
20	$\frac{11}{3} = 3.667;\ \sqrt{12} = 3.464$	$20.959; \delta = 0.019\%$	3.141592 ± 0.00877	45.904	0.20796
21	$\frac{22}{7} = 3.143;\ \sqrt{14} = 3.742$	0.05695 ± 0.00347	$2242.789;\ \delta = 0.23\%$	676.007	0.6453
22	$\frac{19}{13} = 1.46;\ \sqrt{6} = 2.45$	373.786 ± 0.00039	$471.123;\ \delta = 0.33\%$	1456.07	0.1894
23	$\frac{8}{7} = 1.143;\ \sqrt{3} = 1.732$	$8.5677;\ \delta = 2.9\%$	0.48857 ± 0.0082	0.0687	587.056
24	$\frac{20}{9} = 2.22;\ \sqrt{7} = 2.65$	347.4875 ± 0.0042	$12.389;\ \delta = 1.15\%$	0.09326	100.026
25	$\frac{13}{15} = 0.87;\ \sqrt{5} = 2.24$	$11.867;\ \delta = 0.47\%$	37.884 ± 0.0086	14.047	0.1367
26	$\frac{8}{13} = 0.62;\ \sqrt{13} = 3.61$	1.8856 ± 0.0047	$194.279;\ \delta = 0.13\%$	98.13	0.0856
27	$\frac{6}{13} = 0.462;\ \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707$	$859.69;\ \delta = 0.1\%$	$\sqrt{\pi} \pm 0.00167$	3.1415	117.45
28	$\frac{9}{7} = 1.29;\ \sqrt{3} = 1.73$	$\sqrt{3} \pm 0.00257$	$1238.471;\ \delta = 3.03\%$	0.7062	10.653
29	$\frac{8}{13} = 0.615;\ \sqrt{7} = 2.646$	$8.5969;\ \delta = 5.1\%$	$\sqrt{5} \pm 0.0025$	141.26	3.1415
30	$\frac{11}{7} = 1.57;\ \sqrt{3} = 1.73$	$e \pm 0.00048$	$1078.987;\ \delta = 10.0\%$	17.29	0.0064

Контрольні питання

1. Дайте визначення та наведіть приклади усувної та непереборної похибок.
2. Що означає цифра, вірна у широкому сенсі?
3. Що означає цифра, вірна у строгому значенні?
4. Що таке абсолютна похибка?
5. Що таке відносна помилка?
6. Що таке похибка округлення?
7. Як визначити кількість вірних цифр?
8. Як вирахувати відносну похибку, знаючи абсолютну?
9. Як з абсолютної похибки обчислити відносну похибку?
10. Як класифікуються види помилок?
11. Яка похибка округленого числа?

Практична робота № 2. Наближений розв'язок нелінійних рівнянь. Відокремлення коренів. Уточнення коренів методами дихотомії та ітерацій

Мета: навчитися знаходити наближені корені нелінійних рівнянь за допомогою методів половинного поділу та ітерацій. Навчитися розробляти програми, що реалізують ці методи.

План

1. Постановка задачі
2. Метод половинного поділу (дихотомії)
3. Метод ітерації

Основні теоретичні відомості

1. Постановка задачі

Дано нелінійне рівняння $F(x) = 0$, де функція $y = F(x)$ визначена та неперервна для всіх $x \in [a, b]$, причому функція змінює знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Знайти наближене рішення даного рівняння $F(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$, а також необхідне для цього число розбиття відрізка $[a, b]$.

2. Метод половинного поділу (дихотомії)

Наближений розв'язок $\tilde{\xi}$ та похибка наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$ знаходяться за наступною схемою:

$$\tilde{\xi} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \Delta\tilde{\xi} = \frac{b_n - a_n}{2}, \qquad n = 0,1,2, \dots; a_0 = a, b_0 = b;$$

де $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$, задовольняє умовам:

$$F(a_n) \cdot F(b_n) < 0,$$

$$b_n - a_n \le \varepsilon.$$

З останнього виразу визначається число розбиття відрізка

$$n \ge log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

3. Метод ітерації

Дано нелінійне рівняння $F(x) = 0$, де функція $y = F(x)$ визначена та неперервна для всіх $x \in [a, b]$, причому функція змінює знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$. Знайти наближене рішення даного рівняння $F(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Наближений розв'язок $\tilde{\xi}$ та похибка наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$ знаходяться за наступною схемою:

- рівняння $F(x) = 0$ приводиться до виду $x = \varphi(x)$, де функція $y = \varphi(x)$ задовольняє умовам: $\varphi(x) \in [a, b]$, диференційована на даному відрізку та $0 < |\varphi'(x)| \le q < 1$;
- будується ітераційна послідовність виду $x_{n+1} = \varphi(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, де x_0 вибирається довільно з цього відрізка, наприклад, $x_0 = \frac{b+a}{2}$;
- вважаючи $\tilde{\xi} = x_n$ наближене значення кореня $\tilde{\xi}$, для похибки отримаємо $\Delta_{\tilde{\xi}} = \left|\xi - \tilde{\xi}\right| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$, а оскільки за умовою $\Delta_{\tilde{\xi}} \le \varepsilon$, то ітераційний процес продовжимо до виконання умови $|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$, при цьому наближене значення кореня визначається як $\tilde{\xi} = x_n$.

Наближений розв'язок $\tilde{\xi}$ та похибка наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi} = x_n, \qquad \Delta_{\tilde{\xi}} = |x_n - x_{n-1}|\frac{q}{1-q} \le \varepsilon.$$

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

1. Знайти аналітичний розв'язок рівняння та відокремити його корені (див. табл.1) графічно чи програмно.

2. Уточнити усі корені рівняння методом дихотомії та ітерацій з точністю $\varepsilon = 0.0001$.

3. Програмно реалізувати один із методів, зазначених у другому пункті.

Таблиця 1. Початкові дані

Варіант	Основне завдання	Додаткове завдання
1	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0$	$lg(x) - \dfrac{5}{3x+2} = 0$
2	$2e^x + 3x + 1 = 0$	$x^3 - 6x^2 + 9 = 0$
3	$x^2 - 3 + 0.5^x = 0$	$x^3 + x - 3 = 0$
4	$5\,sin(x) = x - 1$	$x^3 - 1.2x^2 + x + 3 = 0$
5	$cos(x + 0.3) = x^2$	$x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$
6	$x^4 - x - 1 = 0$	$x^2 - 2\,cos(x) = 0$
7	$x^2 - 20\,sin(x) = 0$	$x^3 - 3x - 3 = 0$
8	$2\,lg(x) - \dfrac{x}{2} + 1 = 0$	$3x - cos(x) - 2 = 0$
9	$2x^2 - 0.5^x - 3 = 0$	$x + 3\,lg(x) = 1.25$
10	$2^x - 3x - 2 = 0$	$tg(0.5x - 1.2) = x^2 - 1$
11	$ctg(x) - \dfrac{x}{3} = 0$	$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$
12	$2x - lg(x) - 3 = 0$	$2x - lg(x) - 2 = 0$
13	$lg(x) - \dfrac{4}{2x+1} = 0$	$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
14	$5x + lg(x) = 3$	$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$
15	$x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0$	$cos(2x - 0.5) = x^2$
16	$x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$	$3\,sin(x) = x - 1.2$

Варіант	Основне завдання	Додаткове завдання
17	$2e^x + 5x^2 + 1 = 0$	$3x - cos(x) - 1 = 0$
18	$2\,sin(x) = x - 2$	$x^3 - 4x^2 + 2x - 3 = 0$
19	$cos(x - 0.5) = x^2$	$x^3 + 12x^2 - 5 = 0$
20	$x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$	$lg(x) - \frac{5}{2x+1} = 0$
21	$3x^2 - 2\,sin(x) = 0$	$3e^x + 5x + 1 = 0$
22	$2\,lg(x) - \frac{x}{3} + 1.5 = 0$	$x^2 - 2\,sin(x) = 0$
23	$x^3 - 2x + 4 = 0$	$x + lg(x) = 0.35$
24	$x^2 + 4\,sin(x) = 0$	$x + 2\,lg(x) = 1.45$
25	$x^3 - 6x - 7 = 0$	$3x - 2\,cos(x) - 1 = 0$
26	$4x - cos(x) - 1 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$
27	$x + lg(x) = 0.45$	$cos(2x + 0.3) = x^2 - 2x - 1$
28	$tg(0.3x + 0.5) = x^2$	$x^4 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$
29	$x^3 - 3x^2 + 2x - 1.5 = 0$	$2x - lg(x) - 3 = 0$
30	$2x - lg(x) - 5 = 0$	$tg(3x + 0.5) = x^2$

Приклад розв'язування типової задачі

Завдання: відокремити корені рівняння

$$y = 3 \cdot sin(x) - 1.75 = 0$$

графічно чи програмно; уточнити корені рівняння з точністю $\varepsilon = 0.0001$.

Розв'язування.

Для графічного відокремлення коренів рівняння зобразимо його на координатній площині (рис.1). Легко побачити, що рівняння має декілька розв'язків, один з яких знаходиться на інтервалі [0,5; 1]. Уточнимо корінь рівняння з точністю $\varepsilon = 0.0001$.

x	y
0	-1,75
0,5	-0,3117
1	0,77441
1,5	1,24248
2	0,97789
2,5	0,04542
3	-1,3266
3,5	-2,8023
4	-4,0204
4,5	-4,6826
5	-4,6268

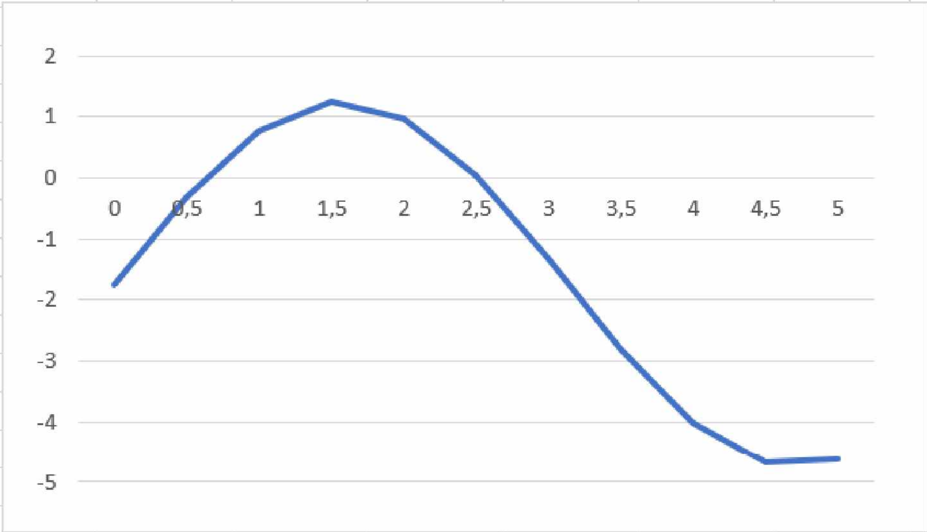

Рисунок 1. Графічне відокремлення коренів

<u>Метод половинного ділення</u>. Отже, розглянемо відрізок [0,5; 1], який містить корінь, та будемо його уточнювати за методом дихотомій згідно формул:

$$\tilde{\xi} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \Delta\tilde{\xi} = \frac{b_n - a_n}{2}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

де

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n},$$

$$F(a_n) \cdot F(b_n) < 0.$$

Покладемо також умову зупинки поділу відрізка навпіл $\frac{b_n - a_n}{2} \le 0.0001$.

За цією схемою маємо:

$$a_0 = 0{,}5,\ \ b_0 = 1, \qquad c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75;$$

$$F(a_0) = 3 \cdot sin(\,0.5) - 1.75 = -0.31172,$$

$$F(b_0) = 3 \cdot sin(\,1) - 1.75 = 0.774413,$$

$$F(c_0) = 3 \cdot sin(\,0.75) - 1.75 = 0.294916,$$

$$F(a_0) \cdot F(c_0) = -0.31172 \cdot 0.294916 = -0.09193.$$

Перевіряємо умову закінчення

$$\frac{b_0 - a_0}{2} 0.25 > 0.0001.$$

Отже, необхідно переходити на наступну ітерацію.

Подальші розрахунки представлено в таблиці (табл. 2).

Таблиця 2. Метод дихотомії

Ітерація	a_i	b_i	$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$	$F(a_i)$	$F(b_i)$	$F(c_i)$	$F(a_i) \cdot F(c_i)$	Умова зупинки
1	0.5	1	0.75	-0.3117	0.7744	0.2949	-0.0919	ні
2	0.5	0.75	0.625	-0.3117	0.2949	0.0053	-0.0016	ні
3	0.5	0.625	0.5625	-0.3117	0.0052	-0.1501	0.0468	ні
4	0.562	0.625	0.5938	-0.1501	0.0052	-0.0716	0.0107	ні
5	0.593	0.625	0.6094	-0.0716	0.0052	-0.0329	0.0023	ні
6	0.6094	0.625	0.6172	-0.0329	0.0052	-0.0138	0.0004	ні
7	0.6172	0.625	0.6211	-0.0138	0.0052	-0.0042	5.82E-05	ні
8	0.6211	0.625	0.6230	-0.0042	0.0052	0.00054	-2.3E-06	ні
9	0.6211	0.6230	0.6220	-0.0042	0.0005	-0.0018	7.79E-06	ні
10	0.6220	0.6230	0.6226	-0.0018	0.0005	-0.0006	1.2E-06	ні
11	0.6225	0.6230	0.6228	-0.0006	0.0005	-5.8E-05	3.8E-08	ні
12	0.6228	0.6230	0.6229	-5.8E-05	0.0005	0.0002	-1.4E-08	ні
13	0.6228	0.6229	0.6228	-5.8E-05	0.0002	9.06E-05	-5.3E-09	так

Отже, наближений корінь рівняння був знайдений на 13-й ітерації і дорівнює $x_{15} = 0.622864$.

Метод ітерацій. Візьмемо відрізок [0.5; 1], який містить корінь, та будемо його уточнювати за методом ітерацій. Для знаходження кореня рівняння знайдемо його похідну та допоміжні коефіцієнти (на проміжку [0.5; 1]) для розрахунків (табл. 3):

$y = 3 \cdot sin(x) - 1.75 = 0,$

$y' = 3\, cos(x).$

Таблиця 3. Допоміжні розрахунки методу ітерацій

<table>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>F ' = 3 cosx</td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-4.2744</td><td>1.6209</td><td></td></tr>
<tr><td>-0.5</td><td>-3.1883</td><td>2.6327</td><td>Максимальне значення похідної (M) – 3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-1.75</td><td>3</td><td>Мінімальне значення похідної (m) - 1.6209069</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>-0.3117</td><td>2.6327</td><td rowspan="3">Параметр $q = 1 - \frac{m}{M} = 0{,}459697694$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.7744</td><td>1.6209</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>1.2425</td><td>0.2122</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.9779</td><td>-1.2484</td><td rowspan="3">Параметр $\lambda = \frac{1}{M} = 0{,}333333333$</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>0.0454</td><td>-2.4034</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-1.3266</td><td>-2.9700</td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>-2.8023</td><td>-2.8094</td><td rowspan="4">Критерій закінчення ітераційного процесу $\Delta = \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon = 0{,}000118$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-4.0204</td><td>-1.9609</td></tr>
<tr><td>4.5</td><td>-4.6826</td><td>-0.6324</td></tr>
<tr><td>5</td><td>-4.6268</td><td>0.8510</td></tr>
</table>

Будемо уточнювати корінь за методом ітерацій згідно формули

$$x_i = x_{i-1} - \lambda f(x_{i-1}).$$

Покладемо умову зупинки методу

$$|x_i - x_{i-1}| \frac{q}{1-q} \leq \varepsilon.$$

За схемою методу маємо:

$$a_0 = 0{,}5,\ b_0 = 1;$$

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75;$$

$$x_2 = 0.75 - 0.33 \cdot (3 \cdot sin(1) - 1.75) = 0.6517.$$

Перевіряємо умову закінчення

$$|0.6517 - 0.75| \frac{0.4597}{1 - 0.4597} = 0.0836 > 0.0001.$$

Отже, необхідно переходити на наступну ітерацію.

Подальші розрахунки представлено в таблиці (табл. 4).

Таблиця 4. Метод ітерацій

Ітерація	x_i	$x_i - x_{i-1}$	Похибка	Умова зупинки
1	0,75			
2	0.65169	0.0983	0.0836	ні
3	0.62849	-0.0232	-0.0197	ні
4	0.62390	-0.0046	-0.0039	ні
5	0.62302	-0.0009	-0.0007	ні
6	0.62286	-0.0002	-0.0001	ні
7	0.62283	-3.07E-05	-2.62E-05	так

Отже, наближений корінь рівняння був знайдений на 7-й ітерації і дорівнює $x_7 = 0{,}622834$.

Контрольні питання

1. Як визначається похибка методу ітерації для заданої точності?
2. Як відокремлюються корені рівняння?
3. Як залежить похибка результату вибору наближеного рішення?
4. Як знаходиться рівносильне рівняння, що застосовується для ітераційного процесу? Який критерій вибору еквівалентного

рівняння?

5. Як обчислюється наближений корінь рівняння та яка його похибка?
6. Яка ідея методу ітерації? Надайте геометричні ілюстрації.
7. Яка ідея методу половинного поділу відрізка? Надайте геометричну ілюстрацію.
8. Яка умова повинна виконуватися для збіжності ітераційної послідовності?
9. Які позитивні та негативні сторони методу ітерації (порівняти з методом поділу відрізка навпіл)?
10. Які умови мають бути виконані для застосування методу ітерації?
11. Які умови мають бути виконані для застосування методу половинного поділу відрізка?
12. Якою має бути величина кроку при відокремленні кореня?

Практична робота № 3. Наближений розв'язок нелінійних рівнянь. Метод хорд. Метод дотичних (Ньютона). Їх комбінація

Мета: навчитися знаходити наближені корені нелінійних рівнянь за допомогою методів хорд, дотичних та хорд і дотичних. Навчитися розробляти програми, що реалізують ці методи.

План

1. Метод хорд
2. Метод Ньютона (метод дотичних)
3. Метод хорд та дотичних

Основні теоретичні відомості

1. Метод хорд

Постановка задачі. Дано нелінійне рівняння $F(x) = 0$, де функція $y = F(x)$ визначена та неперервна для всіх $x \in [a, b]$, причому функція змінює знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Знайти наближене рішення даного рівняння $F(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Наближений розв'язок $\tilde{\xi}$ та похибка наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$ знаходяться за наступною схемою:

якщо $F(b) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$, то

$$x_0 = a,$$

$$x_{n+1} = b - \frac{F(b)}{F(b) - F(x_n)}(b - x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

якщо $F(a) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$, то

$$x_0 = b,$$

$$x_{n+1} = a - \frac{F(a)}{F(x_n) - F(a)}(x_n - a), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Наближений розв’язок $\tilde{\xi}$ та похибка наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi} = x_{n+1}, \ \Delta\tilde{\xi} = |x_{n+1} - \xi| \le \varepsilon.$$

2. Метод Ньютона (метод дотичних)

Постановка задачі. Дано нелінійне рівняння $F(x) = 0$, де функція $y = F(x)$ визначена та неперервна для всіх $x \in [a, b]$, причому функція змінює знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$. Знайти розв’язок даного рівняння з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Наближений розв’язок $\tilde{\xi}$ та похибка наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$ знаходяться за наступною схемою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

якщо $F(b) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$, то $x_0 = b$;

якщо $F(a) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$, то $x_0 = a$.

Наближений розв’язок $\tilde{\xi}$ та похибка наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi} = x_{n+1}, \qquad \Delta\tilde{\xi} = |x_{n+1} - \xi| \le \varepsilon.$$

3. Метод хорд и дотичних

Постановка задачі. Дано нелінійне рівняння $F(x) = 0$, де функція $y = F(x)$ визначена та неперервна для всіх $x \in [a, b]$, причому функція змінює знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Знайти наближене рішення даного рівняння $F(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Наближений розв’язок $\tilde{\xi}$ та похибка наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$ знаходяться за наступною схемою:

якщо $F(b) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$, то

$$x_0 = a,$$

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{F(\bar{x}_n)}{F(\bar{x}_n) - F(x_n)}(\bar{x}_n - x_n),$$

$$x_0 = b, \qquad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{F(\bar{x}_n)}{F'(\bar{x}_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

якщо $F(a) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$, то

$$x_0 = b, \qquad x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{F(\bar{x}_n)}{F(x_n) - F(\bar{x}_n)}(x_n - \bar{x}_n),$$

$$x_0 = a, \qquad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{F(\bar{x}_n)}{F'(\bar{x}_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Наближений розв’язок $\tilde{\xi}$ та похибка наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi} = \frac{x_{n+1} + \bar{x}_{n+1}}{2}, \Delta\tilde{\xi} = \frac{1}{2}|x_{n+1} - \bar{x}_{n+1}| \le \varepsilon.$$

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

1. Знайти аналітичний розв’язок рівняння та відокремити його корені (див. табл.1) графічно чи аналітично.

2. Уточнити усі корені рівняння методом хорд, дотичних та хорд й дотичних з точністю $\varepsilon = 0.0001$.

3. Програмно реалізувати один із методів, зазначених у другому пункті.

Приклад розв’язування типової задачі

Завдання: За основу візьмемо рівняння з минулої практичної:

$y = 3 \cdot sin(x) - 1.75 = 0.$

Як вже було визначено раніше, один з коренів цього рівняння знаходиться на відрізку [0,5; 1] (див. рис. 1).

Метод дотичних (Ньютона). Розглянемо відрізок [0,5; 1], який містить корінь, та будемо його уточнювати за методом дотичних. Для знаходження кореня рівняння знайдемо його похідні (рис. 2):

$y = 3 \cdot sin(x) - 1.75 = 0,$

$y' = 3\,cos(x),$

$y'' = -3\,sin(x).$

x	y	[illegible]	[illegible]
-1	-4,27441	1,62091	2,52441
-0,5	-3,18828	2,63275	1,43828
0	-1,75	3	0
0,5	-0,31172	2,63275	-1,43827
1	0,77441	1,62091	-2,52441
1,5	1,24248	0,21221	-2,99248
2	0,97789	-1,24844	-2,72789
2,5	0,04546	-2,40343	-1,79546
3	-1,32664	-2,96998	-0,42336
3,5	-2,80235	-2,80637	1,05235
4	-4,02041	-1,96093	2,27041
4,5	-4,68259	-0,63239	2,93259
5	-4,62677	0,85099	2,87677

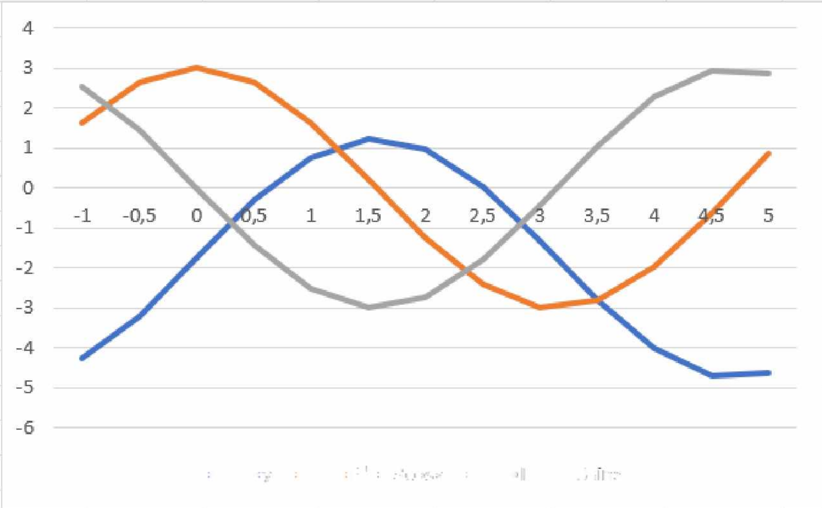

Рисунок 2. Вихідні дані методу дотичних

Будемо уточнювати корінь за методом дотичних згідно формули

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Покладемо умову зупинки методу $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$.

З таблиці похідних бачимо, що виконується умова $F(a) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$, а отже, в якості початкової точки візьмемо $x_0 = a = 0.5$. За схемою методу маємо:

$$x_1 = 0.5 - \frac{3 \cdot sin(0.5) - 1.75}{3\,cos(0.5)} = 0.6184.$$

Перевіряємо умову закінчення $|0.6184 - 0.5| = 0.1184 > 0.0001$. Отже, необхідно переходити на наступну ітерацію. Подальші розрахунки представлено в таблиці (табл. 5).

Отже, наближений корінь рівняння був знайдений на 4-й ітерації і дорівнює $x_4 = 0.622827$.

Таблиця 5. Метод дотичних

Ітерація	x_i	$F(x_i)$	$F'(x_i)$	Похибка	Умова зупинки
1	0.5	-0.3117	2.6328		
2	0.6184	-0.0108	2.4444	0.1184	ні
3	0.6228	-1.7E-05	2.4367	0.0044	ні
4	0.6228	-4.3E-11	2.4367	6.98E-06	так

Метод хорд. Розглянемо відрізок [0,5; 1], який містить корінь, та будемо його уточнювати за методом хорд. Для знаходження кореня рівняння скористаємося вже знайденими похідними.

З таблиці похідних бачимо, що виконується умова $F(a) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$, а отже, розрахунок нових значень змінної будемо шукати за формулою

$$x_{n+1} = a - \frac{F(a)}{F(x_n) - F(a)}(x_n - a).$$

За схемою методу маємо: $x_0 = b = 1$. Отже,

$$x_1 = 0.5 - \frac{3 \cdot sin(0.5) - 1.75}{(3 \cdot sin(1) - 1.75) - (3 \cdot sin(0.5) - 1.75)}(1 - 0.5) = 0.6435.$$

Перевіряємо умову закінчення $|1 - 0.5| = 0.5 > 0.0001$. Отже, необхідно переходити на наступну ітерацію.

Подальші розрахунки представлено в таблиці (табл. 6).

Отже, наближений корінь рівняння був знайдений на 5-й ітерації і дорівнює $x_5 = 0{,}622828$.

Таблиця 6. Метод хорд

Ітерація	x_i	$F(x_i)$	$x - a$	Умова зупинки
1	1	0.7744	0.5	
2	0.64350	0.05	0.1435	ні
3	0.62366	0.0020	0.1236	ні
4	0.62286	8.16E-05	0.12286	ні
5	0.62282	3.25E-06	0.12282	так

Метод хорд та дотичних. Розглянемо відрізок [0,5; 1], який містить корінь, та будемо його уточнювати за методом хорд та дотичних. Для знаходження кореня рівняння скористаємося вже знайденими похідними.

З таблиці похідних бачимо, що виконується умова $F(a) \cdot F''(x) > 0$ на $[a, b]$, а отже, розрахунок нових значень змінної будемо шукати за формулою

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{F(\bar{x}_n)}{F(x_n) - F(\bar{x}_n)}(x_n - \bar{x}_n).$$

За схемою методу маємо: $x_0 = b = 1$. Отже,

$$x_1 = 0.5 - \frac{3 \cdot sin(0.5) - 1.75}{(3 \cdot sin(1) - 1.75) - (3 \cdot sin(0.5) - 1.75)}(1 - 0.5) = 0.6435.$$

Перевіряємо умову закінчення

$$\frac{|1 - 0.5|}{2} = 0.1782 > 0.0001.$$

Отже, необхідно переходити на наступну ітерацію. Подальші розрахунки представлено в таблиці (табл. 7).

Таблиця 7. Метод хорд та дотичних

Ітерація	x_i	$\bar{x}_i$	$F(x_i)$	$F(\bar{x}_i)$	$F'(\bar{x}_i)$	Похибка	Умова зупинки
1	1	0.5	0.7744	-0.3117	2.6327		
2	0.6435	0.6184	0.05	-0.0108	2.4444	0.1782	ні
3	0.62286	0.62282	8.11E-05	-1.7E-05	2.4367	0.0103	ні
4	0.62282	0.62282	2.03E-10	-4.3E-11	2.4367	1.66E-05	так

Наближений корінь рівняння знайдений на 4-й ітерації і дорівнює

$$x_4 = 0{,}622827.$$

Контрольні питання

1. Як виглядає ідея методу дотичних?
2. Які основні переваги методу Ньютона у порівнянні з іншими чисельними методами?
3. Чому для методу дотичних важливо, щоб початкове наближення було достатньо близьким до шуканого кореня?
4. У чому різниця між методом січних і методом дотичних?
5. Як вибираються початкові наближення для методу січних?
6. Як впливає вибір початкових наближень на швидкість збіжності методу січних?
7. Як комбінуються метод дотичних та метод січних у змішаному підході?
8. Чому для нелінійних рівнянь часто обирають саме змішаний метод? Які його основні переваги?
9. Наведіть приклад рівняння, для якого метод Ньютона працює значно швидше, ніж метод січних.
10. Як впливає гладкість функції на точність методів дотичних і січних?
11. Опишіть ситуацію, коли метод Ньютона може втратити збіжність або перейти в нескінченний цикл.
12. Як перевірити, що знайдене наближення дійсно відповідає кореню рівняння, а не є «псевдокоренем»?

Практична робота № 4. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь ітераційними методами

Мета: навчитися знаходити наближені розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою методу простої ітерації та методу Зейделя. Навчитися розробляти програми, що реалізують ці методи.

План

1. Постановка задачі
2. Метод простої ітерації
3. Метод Зейделя

Основні теоретичні відомості

Постановка задачі. Знайти наближене рішення системи лінійних рівнянь алгебри

$$Ax = b,$$

де $A = \{a_{i,j}\}$, $i,j = \overline{1,n}$, $x = (x_i)^T$, $b = (b_i)^T$, $i = \overline{1,n}$.

Нехай $|A| \neq 0$, тоді система має єдиний розв'язок.

Метод простої ітерації.

Приведемо систему до еквівалентного вигляду (далі буде указаний спосіб такого приведення)

$$x = \alpha x + g.$$

Виберемо деяке початкове наближення $x^{(0)}$, виходячи з якого побудуємо наближення $x^{(1)}$ за формулою

$$x^{(1)} = \alpha x^{(0)} + g.$$

Аналогічно, виходячи із $x^{(1)}$, будуємо

$$x^{(2)} = \alpha x^{(1)} + g$$

і т.д. Якщо вже побудоване наближення $x^{(k)}$, то наступне наближення будується за наступною формулою **методу простої ітерації** (або методу послідовних наближень):

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + g, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Якщо послідовність $\{x^{(k)}\}$ збіжна, то будемо говорити, що метод простої ітерації збігається .

Зауважимо, що $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ є розв'язком системи $x = \alpha x + g$, а отже, і системи $Ax = b$. Аби упевнитися в цьому, достатньо в формулі методу перейти до границі.

Дослідження методу простої ітерації потребує вирішення таких питань:

1. За яких умов метод збігається?
2. Як вибрати початкове наближення $x^{(0)}$?
3. Які критерії закінчення ітераційного процесу?
4. Які способи зведення системи $Ax = b$ до вигляду, зручного для ітерування?

Надамо відповіді на ці питання у вказаній послідовності.

Для того, щоб метод простої ітерації *збігався*, необхідно і достатньо, щоб усі власні значення матриці α були за модулем менші 1. Але ці умови важко перевірити, оскільки вони вимагають знання власних значень матриці α. На практиці часто користуються наступною **достатньою ознакою збіжності:** метод простої ітерації буде збіжним, якщо якась норма матриці α є меншою 1.

Таке твердження дає низку зручних для перевірки достатніх ознак збіжності: $\|\alpha\|_p < 1$, де $p = \{m, l, k\}$ – канонічні норми:

$$\|\alpha\|_m = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}| \right\}, i = \overline{1,n},$$

$$\|\alpha\|_l = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{i,j}| \right\}, j = \overline{1,n},$$

$$\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{i,j}\right|^2}.$$

Ітераційна послідовність продовжується до виконання умови

$$\left\|x^{(S)} - x^{(S-1)}\right\|_p \le \frac{1 - \|\alpha\|_p}{\|\alpha\|_p}\varepsilon, \qquad x^{(0)} = \beta, \qquad s = 1,2,\ldots$$

Тоді за наближений розв'язок можна обрати $\xi = x^{(S)}$, при цьому похибка складатиме

$$\Delta_\xi = \left\|x^{(S)} - x^{(S-1)}\right\|_p \cdot \frac{\|\alpha\|_p}{1 - \|\alpha\|_p}.$$

Якщо якась норма матриці α, що погоджена з даною нормою векторів, менша 1, то справедлива оцінка

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \frac{\left\|\alpha^k\right\|}{1 - \|\alpha\|}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

Взагалі, для будь-якого i справедливою є наступна нерівність:

$$\left\|x^{(i+1)} - x^*\right\| \le \|\alpha\| \cdot \left\|x^{(i)} - x^*\right\|,$$

яка характеризує так звану лінійну швидкість збіжності методу простої ітерації (або збіжність зі швидкістю геометричної прогресії із знаменником $q = \|\alpha\|$). Ясно, що чим менше q, тим вища фактична швидкість збіжності методу.

Немає ніяких обмежень щодо вибору початкового наближення розв'язку при реалізації методу простої ітерації для системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Однак невдалий вибір призводить до збільшення кількості необхідних ітерацій.

Із довільності у виборі $x^{(0)}$ випливає важлива властивість ітераційного методу, яка називається **властивістю самовиправленості**: окремі помилки в підрахунках не впливають на факт збіжності методу, оскільки помилкове наближення можна розглядати як новий початковий вектор. Однак велика кількість таких помилок може значно уповільнити збіжність методу.

Критерії закінчення ітераційного процесу. Звичайно при розв'язуванні системи ітераційним методом потрібно знайти розв'язок із заданою точністю, тобто таке наближення $x^{(k)}$, що

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \leq \varepsilon.$$

Ця умова буде свідомо виконуватися, якщо права частина оцінки менша від ε, тобто якщо

$$\frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| < \varepsilon.$$

Розв'язавши цю нерівність відносно k і взявши найменший розв'язок, одержимо кількість наближень, необхідну для отримання розв'язку із заданою точністю ε.

Слід зауважити, що одержана таким чином кількість наближень може виявитися перебільшеною, тому на практиці часто застосовують інший критерій, який не потребує знання кількості наближень. Він базується на таких міркуваннях: оскільки послідовність $\left\{x^{(k)}\right\}$ збігається, то вона є фундаментальною, зокрема,

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad k \to \infty.$$

Тому процес побудови послідовності наближень природно продовжувати доти, доки не виконається умова

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| < \varepsilon,$$

де ε – задана точність. Цей критерій закінчення рахування найбільш часто застосовується на практиці, хоча є, взагалі кажучи, "несправжнім" , оскільки, незважаючи на те, що величини $\left\|x^{(k)} - x^*\right\|$ та $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$ одночасно прямують до нуля, але може так трапитися, що $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$ вже близька до нуля, а $\left\|x^{(k)} - x^*\right\|$ ще достатньо велика і навпаки.

За справжнім критерієм, як вже було зазначено, для одержання розв'язку з точністю ε треба перевірити умову

$$\frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| \leq \varepsilon.$$

Якщо $\|B\| \le \frac{1}{2}$, то $\|x^{(k)} - x^*\| \le \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$, тому у цьому випадку "несправжній" критерій збігається із "справжнім" .

Розглянемо спосіб зведення системи до вигляду, зручного для ітерування, який використовується в методі простої ітерації, що носить назву **метод Якобі**.

Припустимо, що матриця A така, що діагональні елементи за модулем більше суми модулів решти елементів рядка або стовпця (у цьому випадку кажуть, що діагональні елементи домінують у рядках або стовпцях). Розглянемо для визначеності випадок домінування діагональних елементів у рядках:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Тоді перетворення системи до вигляду, зручного для ітерування, зводиться до розв'язання кожного рівняння відносно діагонального невідомого, тобто:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку

$$\|\alpha\|_m = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1.$$

Це означає, що виконується одна із достатніх умов збіжності і метод Якобі збігається. Аналогічно у випадку домінування діагональних елементів у стовпцях буде виконуватися інша умова $\|\alpha\|_l < 1$.

Зауважимо, що в практичних задачах часто вдається довільну систему з невиродженою матрицею звести до вигляду, в якому домінують діагональні елементи, за допомогою елементарних перетворювань над рівняннями системи.

Метод Зейделя. Нехай задана система $Ax = f$ з невиродженою матрицею A. Зведемо її до вигляду, зручного для ітерування: $x = \alpha x + \beta$.

Метод Зейделя є модифікацією методу простої ітерації, що полягає у використанні на кожному кроці вже знайдених координат вирахуваного (k+1)-го наближення

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1 \\
x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2 \\
x_3^{(k+1)} = \alpha_{31}x_1^{(k+1)} + \alpha_{32}x_2^{(k+1)} + \alpha_{33}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{n2}x_2^{(k+1)} + \alpha_{n3}x_3^{(k+1)} + \ldots + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n
\end{array}\right\}.$$

або у більш компактній формі:

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}x_j^{(k)},\ i = \overline{1,n}.$$

Визначення збіжності та оцінка похибки проводиться так само, як і для методу ітерації. Зобразимо матрицю α у вигляді

$$\alpha = H + F,$$

де

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вигляд матриць H та F підказаний формулами методу Зейделя. З урахуванням цього представлення метод Зейделя можна записати як

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k+1)} + Fx^{(k)} + g$$

або

$$(E - H)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + g.$$

Матриця $E - H$ неособлива (вона трикутна і на головній діагоналі стоять одиниці, а тому $det(E - H) = 1$), отже, можна записати

$$x^{(k+1)} = (E - H)^{-1}Fx^{(k)} + (E - H)^{-1}g.$$

Отриману формулу можна тлумачити як метод простої ітерації для системи

$$x = (E - H)^{-1}Fx + (E - H)^{-1}g.$$

Таким чином, метод Зейделя є еквівалентним методу простої ітерації. На основі необхідної і достатньої умови збіжності методу простої ітерації робимо висновок, що для збіжності методу Зейдедя необхідно і достатньо, щоб усі власні значення матриці $(E - H)^{-1}F$ були за модулем менші 1, інакше кажучи, щоб усі корені рівняння

$$det((E - H)^{-1}F - \lambda E) = 0$$

були за модулем менші 1.

На основі достатньої умови збіжності методу простої ітерації можна сформлювати наступну умову: для того, щоб метод Зейделя збігався, достатньо аби будь-яка норма матриці $(E - H)^{-1}F$ була менша 1.

Більш зручними достатніми умовами збіжності безпосередньо в термінах матриці α, є наступні: для того, щоб метод Зейделя збігався, достатньо щоб виконувалась одна з двох умов:

$$\|\alpha\|_m = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1;$$

$$\|\alpha\|_l = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1.$$

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Завдання:

1. Вирішити систему лінійних рівнянь методом ітерації та методом Зейделя з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$.

2. Проаналізувати отримані розв'язки між собою та з точним розв'язком.

3. Програмно реалізувати один із зазначених методів.

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
1	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -2; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ -x_1 - x_2 - 2.3x_3 = 0.3; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -1; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$	17	$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 2.5x_3 = -0.5; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -6; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - 3.5x_3 = -0.5; \\ -3.2x_1 + 2x_2 - x_3 = -5.4. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$
5	$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - 2.5x_3 = -1.5; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -2; \\ -0.5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -10; \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$	21	$\begin{cases} 1.5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 3; \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$	22	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -4; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$	23	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 1.5x_3 = 0.5; \\ 3.2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3.4. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 1.5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -5; \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -1; \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 1.4x_3 = 0.7; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1.5; \\ 3.5x_1 - x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$	25	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -3; \\ 2x_1 + 1.2x_2 - 4.3x_3 = -2. \\ -6x_1 + 3.3x_2 + 2x_3 = 2.3. \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 4; \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
12	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ 3.1x_1 - x_2 - 2x_3 = 6.3. \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1; \\ 1.5x_1 - x_2 + 0.5x_3 = 0. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0.5. \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ -1.4x_1 + 0.1x_2 + 2x_3 = 3.5; \\ 1.25x_1 + 0.3x_2 - 0.55x_3 = -1 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -2; \\ 1.1x_1 + 0.3x_2 - 2x_3 = -1.2; \\ -1.75x_1 + 0.25x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 2; \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Приклад розв'язування типової задачі

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 &= 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 &= 9 \\ 0{,}04x_1 + 0{,}08x_2 - 4x_3 &= 20 \end{aligned}\right\}$$

методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

Розв'язання. Оскільки діагональні коефіцієнти мають значну перевагу над іншими коефіцієнтами при невідомих, то для зведення системи до вигляду, зручного для ітерування, достатньо кожне рівняння розв'язати відносно діагонального невідомого:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 \\ x_2 &= 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3 \\ x_3 &= 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 \end{aligned}\right\}.$$

За початкове наближення до розв'язку системи візьмемо стовпець вільних членів, тобто

$$x_1^{(0)} = 2, \qquad x_2^{(0)} = 3, \qquad x_3^{(0)} = 5.$$

Підставляючи ці значення у праві частини наведеної системи, одержимо компоненти першого наближення до розв'язку:

$$x_1^{(1)} = 2 - 0{,}06 \cdot 3 + 0{,}02 \cdot 5 = 1{,}92;$$

$$x_2^{(1)} = 3 - 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}05 \cdot 5 = 3{,}19;$$

$$x_3^{(1)} = 5 - 0{,}01 \cdot 2 + 0{,}02 \cdot 3 = 5{,}04.$$

Підставляючи тепер у праві частини наведеної системи знайдені значення, одержуємо компоненти другого наближення до розв'язку:

$$x_1^{(2)} = 1{,}9094, \qquad x_2^{(2)} = 3{,}1944, \qquad x_3^{(2)} = 5{,}0446.$$

Після нової підстановки будемо мати компоненти третього наближення:

$$x_1^{(3)} = 1{,}90923, \qquad x_2^{(3)} = 3{,}19495, \qquad x_3^{(3)} = 5{,}04485.$$

Оскільки

$$\left| x_i^{(2)} - x_i^{(3)} \right| < 0{,}001; \qquad i = 1,2,3,$$

то процес побудови наближень можна зупинити і прийняти

$$x_1^* \approx x_1^{(3)}, \qquad x_2^* \approx x_2^{(3)}, \qquad x_3^* \approx x_3^{(3)},$$

де x_1^*, x_2^*, x_3^* – компоненти точного розв'язку системи.

<u>Приклад 2</u>**.** Систему

$$\left.\begin{array}{l} (A) 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3 = 0 \\ (\text{Б}) x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0 \\ (\text{В}) 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 = 0 \\ (\text{Г}) 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 4 = 0 \end{array}\right\}$$

привести до вигляду, зручного для ітерування.

<u>Розв’язання.</u> Зведемо цю систему до системи з домінуючими діагональними коефіцієнтами. Для цього за перше рівняння системи візьмемо рівняння (Г), за третє – (Б). Для одержання другого рівняння достатньо скласти різницю (А) – (В), а за четверте рівняння можна взяти лінійну комбінацію 2(А) – (Б) + 2(В) – (Г).

Тоді

$$\left.\begin{array}{l} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad - 1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 - 2 = 0 \\ 3x_1 \qquad\qquad - 9x_4 - 10 = 0 \end{array}\right\}.$$

Розв'язавши цю систему відносно діагональних невідомих, будемо мати систему

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 - 0{,}2x_4 - 0{,}4 \\ x_2 = 0{,}2x_1 - 0{,}2x_3 \qquad\qquad + 0{,}2 \\ x_3 = 0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 + 0{,}2x_4 - 0{,}4 \\ x_4 = 0{,}333x_1 \qquad\qquad\quad - 1{,}111 \end{array}\right\},$$

до якої можна застосувати метод простої ітерації.

Завдання: розв’язати систему лінійних рівнянь з точністю $\varepsilon = 0.0001$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Розв’язування. Перш ніж переходити до безпосереднього розв’язування системи рівнянь, зазначимо, що її визначник відмінний від нуля (дорівнює 34), а це значить, що система має єдиний розв’язок. Далі перевіримо умову збіжності, а саме той факт, що діагональні коефіцієнти мають значну перевагу над іншими коефіцієнтами при невідомих. Легко побачити, що ця умова не виконуються для заданої системи, тому її необхідно за допомогою елементарних перетворень записати так, аби умова виконувалася. Оскільки умова не виконується лише в першому рівнянні, перепишемо його, віднявши від першого рівняння друге, та отримаємо: $3x_1 + x_2 - x_3 = 2$. Тоді система прийме вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Легко побачити, що для такої системи виконується умова збіжності. Надалі будемо розв’язувати саме її.

Метод ітерацій. Отже, перепишемо задану систему у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 + x_2 + x_3}{3}, \\ x_2 = \dfrac{1 + x_1 + 2x_3}{4}, \\ x_3 = \dfrac{8 - x_1 + x_2}{3}. \end{cases}$$

Для подальших розрахунків будемо використовувати формули: $x = \beta + \alpha \cdot x$, де $\alpha = \{\alpha_{i,j}\}$, $\alpha_{i,j} = -\frac{a_{i,j}}{\bar{a}_{i,i}}$, $\quad i \neq j$, , $\alpha_{i,i} = 0, \beta_i = \frac{b_i}{\bar{a}_{i,i}} i, j = \overline{1, n}$.

За схемою методу маємо: $x_0 = (0; 0; 0)$. Отже,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 + 0 + 0}{3} = 0.6667, \\ x_2 = \dfrac{1 + 0 + 2 \cdot 0}{4} = 0.25, \\ x_3 = \dfrac{8 - 0 + 0}{3} = 2.6667. \end{cases}$$

Перевіряємо умову закінчення:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6667 \\ 0.25 \\ 2.6667 \end{pmatrix} \right\| \geq 0.001.$$

Отже, необхідно переходити на наступну ітерацію. Подальші розрахунки представлено в таблиці (табл. 8).

Таблиця 8. Метод простої ітерації

Ітерація	x_1	x_2	x_3	Похибка			Умова зупинки
0	0	0	0				
1	0.6667	0.25	2.6667	0.6667	0.3	2.6667	ні
2	1.4722	1.75	2.5278	0.8056	1.5	0.1389	ні
3	0.9259	1.8819	2.7593	0.5463	0.1319	0.2315	ні
4	0.9591	1.8611	2.9853	0.0332	0.0208	0.2261	ні
5	1.0414	1.9824	2.9673	0.0823	0.1213	0.0180	ні
6	0.9950	1.9940	2.9803	0.0464	0.0116	0.0130	ні
7	0.9954	1.9889	2.9997	0.0005	0.0051	0.0193	ні
8	1.0036	1.9987	2.9978	0.0081	0.0098	0.0019	ні

Ітерація	x_1	x_2	x_3	Похибка			Умова зупинки
9	0.9997	1.9998	2.9984	0.0039	0.0011	0.0005	ні
10	0.9995	1.9991	3.0000	0.0002	0.0007	0.0017	ні
11	1.0003	1.9999	2.9999	0.0008	0.0008	0.0002	так

Відтак, наближений корінь системи рівнянь був знайдений на 11-й ітерації і дорівнює $x = (1;2;3)$.

Приклад 3. Методом Зейделя розв'язати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1{,}2 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 \\ x_2 &= 1{,}3 - 0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 \\ x_3 &= 1{,}4 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 \end{aligned}\right\}.$$

Розв'язання. Система вже зведена до вигляду, зручного для ітерування, причому виконана умова збіжності $\|\alpha\|_m < 1$.

Візьмемо початкове наближення

$$x_1^{(0)} = 1{,}2; \qquad x_2^{(0)} = 0; \qquad x_3^{(0)} = 0.$$

Застосовуючи процес Зейделя, послідовно одержимо

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 0 - 0{,}1 \cdot 0 = 1{,}2 \\ x_2^{(1)} &= 1{,}3 - 0{,}2 \cdot 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 0 = 1{,}06 \\ x_3^{(1)} &= 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 1{,}2 - 0{,}2 \cdot 1{,}06 = 0{,}948 \end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 1{,}06 - 0{,}1 \cdot 0{,}948 = 0{,}9992 \\ x_2^{(2)} &= 1{,}3 - 0{,}2 \cdot 0{,}9992 - 0{,}1 \cdot 0{,}948 = 1{,}00536 \\ x_3^{(2)} &= 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 0{,}9992 - 0{,}2 \cdot 1{,}00536 = 0{,}999098 \end{aligned}\right\}.$$

Аналогічно можна одержати і такі наближення (наведені результати обчислень з точністю до чотирьох знаків):

$$x_1^{(3)} = 0{,}9996, \qquad x_2^{(3)} = 1{,}0001, \qquad x_3^{(3)} = 1{,}0000,$$

$$x_1^{(4)} = 1{,}0000, \qquad x_2^{(4)} = 1{,}0001, \qquad x_3^{(4)} = 1{,}0000.$$

Точний розв'язок системи

$$x_1^* = 1, \qquad x_2^* = 1, \qquad x_3^* = 1.$$

Завдання 2. Методом Зейделя розв'язанти систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 + x_2 + x_3}{3}, \\ x_2 = \dfrac{1 + x_1 + 2x_3}{4}, \\ x_3 = \dfrac{8 - x_1 + x_2}{3}. \end{cases}$$

Метод полягає у використанні на кожному кроці вже знайдених координат вирахуваного (k+1)-го наближення. Для подальших розрахунків будемо використовувати формули: $x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$.

За схемою методу маємо: $x_0 = (0; 0; 0)$. Отже,

$$\begin{cases} x_1^1 = \dfrac{2 + x_2^0 + x_3^0}{3} = \dfrac{2 + 0 + 0}{3} = 0.6667, \\ x_2^1 = \dfrac{1 + x_1^1 + 2x_3^0}{4} = \dfrac{1 + 0.6667 + 0}{4} = 0.25, \\ x_3^1 = \dfrac{8 - x_1^1 + x_2^1}{3} = \dfrac{8 - 0.6667 + 0.25}{3} = 2.6667. \end{cases}$$

Перевіряємо умову закінчення:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6667 \\ 0.25 \\ 2.6667 \end{pmatrix} \right\| \geq 0.001.$$

Отже, необхідно переходити на наступну ітерацію.

Подальші розрахунки приведемо в таблиці 9.

Таблиця 9. Метод Зейделя

Ітерація	x_1	x_2	x_3	Похибка			Умова зупинки
0	0	0	0				
1	0.6667	0.25	2.6667	0.6667	0.2500	2.6667	ні
2	1.4722	1.9514	2.8264	0.8056	1.7014	0.1597	ні
3	0.9583	1.9028	2.9815	0.5139	0.0486	0.1551	ні
4	1.0262	1.9973	2.9904	0.0679	0.0945	0.0089	ні
5	0.9977	1.9946	2.9990	0.0285	0.0027	0.0086	ні
6	1.0015	1.9998	2.9995	0.0038	0.0053	0.0005	ні
7	0.9999	1.9997	2.9999	0.0016	0.0002	0.0005	ні
8	1.0001	2.0000	3.0000	0.0002	0.0003	0.0001	так

Отже, наближений корінь системи рівнянь був знайдений на 8-й ітерації і дорівнює $x = (1;2;3)$.

Контрольні питання

1. Критерій вибору рівносильної системи рівнянь.
2. Назвіть відомі вам методи розв'язання СЛАУ.
3. Основна ідея методу ітерації.
4. Постановка задачі.
5. Сформулювати канонічні норми, які є у методі ітерації.
6. У чому відмінність методу Зейделя від методу ітерації?
7. Чим точні методи від наближених?
8. Як визначається похибка методу ітерації за заданої точності, що застосовується для ітераційного процесу?
9. Яким чином будується рівносильна система рівнянь, що застосовується для ітераційного процесу?
10. Яка умова має виконуватися для збіжності ітераційного процесу?

Практична робота № 5. Інтерполяція функції

Мета: навчитися інтерполювати функції та знаходити її значення в точці за допомогою поліному Лагранжа та Ньютона. Навчитися розробляти програми, що реалізують ці методи.

План

1. Постановка задачі
2. Поліном Ньютона і Лагранжа для функції, заданої у рівновіддалених вузлах
3. Поліном Лагранжа і Ньютона для функції, заданої у нерівновіддалених вузлах

Основні теоретичні відомості

Постановка задачі. Функція $y = f(x)$ визначено на відрізку $[a; b]$, задана своїми значеннями y_i у вузлах $x_i \in [a; b]$, тобто $y_i = f(x_i)$. Визначити значення функції $y_\xi = y(\xi)$ у точці $\xi \in [a; b]$.

1. **Поліном Ньютона і Лагранжа для функції, заданої у нерівновіддалених вузлах**. Нехай вузли інтерполяції $x_0, x_1, \ldots, x_n$ є нерівновіддаленими. Тоді інтерполяційний многочлен Лагранжа записується у наступному вигляді:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{(x_k - x_j)},$$

або

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k),$$

де $\omega_{n+1}(x)$ – многочлен степеня $(n+1)$:

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n),$$

а $\omega'_{n+1}(x_k)$ – його похідна у точці x_k:

$$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n).$$

Залишковим членом інтерполяційного многочлена зветься функція

$$R_n = f(x) - L_n(x).$$

Нехай $M_{n+1} = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$. Тоді справедливою є оцінка

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}.$$

У випадку, коли останні задаються на довільній системі значень аргументу для побудови інтерполяційного многочлена Ньютона використовуються поділені різниці функції.

Поділеними різницями першого порядку називають величини

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \ldots$$

Поділені різниці першого порядку використовуються у побудові *поділених різниць другого порядку*

$$f\left(x^0, x^1, x^2\right) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \ldots$$

Поділені різниці порядку $(k + 1)$ $(k = 2,3,\ldots)$ визначаються за допомогою поділених різниць попереднього порядку k за формулою:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) - f(x_0, x_1, \ldots, x_k)}{x_{k+1} - x_0}.$$

При практичній побудові поділених різниць обчислення зручно розташовувати у вигляді таблиці

x_0	$f(x_0)$				
		$f(x_0, x_1)$			
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$		
		$f(x_1, x_2)$		$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3)$		$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
		$f(x_2, x_3)$		$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2, x_3, x_4)$		
		$f(x_3, x_4)$			
x_4	$f(x_4)$				

Перший інтерполяційний многочлен Ньютона записується у наступний спосіб:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Многочлен Ньютона повністю задовольняє вимоги поставленої задачі, тобто степінь многочлена не перевищує степеня n, а також $P_n(x_i) = y_{i.}$

Якщо припустити, що точка інтерполяції розташована поблизу кінцевої точки x_n таблиці. У цьому випадку вузли інтерполяції слід брати у порядку x_n, $x_n - h,\ x_n - 2h, \ldots$ Тоді формула Ньютона для інтерполювання назад матиме вигляд

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n) \times$$

$$\times (x - x_{n-1}) + \ldots + f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1).$$

2. Поліном Ньютона і Лагранжа для функції, заданої у рівновіддалених вузлах. Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і задана своїми значеннями y_i в рівновіддалених вузлах $x_i \in [a; b]$, $x_{i+1} = x_i + h, h = const > 0$, то задача інтерполяції розв'язується у двох випадках.

Коли точка $\xi \in [a; b]$ знаходиться на початку таблиці значень $x_i \in [a; b]$, використовується перша інтерполяційна формула Ньютона:

$$P_n(\xi) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots +$$

$$+\frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q=\frac{\xi-x_0}{h},$$

$$\Delta y_i = y_{i+1}-y_i,$$

$$\Delta^{k+1}y_i=\Delta^k y_{i+1}-\Delta^k y_i,\ \ \Delta^0 y_i=y_i.$$

Тоді

$$y_\xi = f(\xi)\approx P_n(\xi),$$

$$\Delta_{y(\xi)}=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\bar{\xi})\right|\cdot\prod_{k=0}^{n}(q-k),\quad \bar{\xi}\in[a;b].$$

Коли точка $\xi\in[a;b]$ знаходиться наприкінці таблиці значень $x_i\in[a;b]$, використовується *друга інтерполяційна формула Ньютона*:

$$P_n(\xi)=y_n+q\Delta y_n+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-1}+\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-2}+\dots+$$

$$+\frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

де $q=\frac{x_n-\xi}{h}$.

Тоді

$$y_\xi = f(\xi)\approx P_n(\xi),$$

$$\Delta_{y(\xi)}=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\bar{\xi})\right|\cdot\prod_{k=0}^{n}(q+k),\qquad \bar{\xi}\in[a;b].$$

2. Інтерполяційна формула Лагранжа. Якщо функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ і дана своїми значеннями y_i у не рівновіддалених вузлах

$$x_i\in[a;b],\qquad x_{i+1}\neq x_i+h,\qquad h=const>0,$$

то задача інтерполяції розв'язується за допомогою полінома Лагранжа:

$$L_n(\xi)=\sum_{i=0}^{n}y_i\prod_{k\neq i,0}^{n}\left(\frac{\xi-x_k}{x_i-x_k}\right),$$

$$y_\xi = f(\xi) \approx L_n(\xi),$$

$$\Delta_{y(\xi)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(\xi - x_k)}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\bar{\xi})\right|, \qquad \bar{\xi} \in [a;b].$$

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Завдання:

1. Знайти наближене значення функції при заданому значенні аргументу за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа, якщо функція задана в рівновіддалених вузлах $y_i = f(x_i)$; $x_i = x_0 + i \cdot h$; $h = const$; $i = \overline{0,6}$, $y_\zeta = f(\xi)$; y_ζ–? (табл. 1).

2. Знайти наближене значення функції при заданому значенні аргументу за допомогою відповідного інтерполяційного полінома Ньютона, якщо функція задана в рівновіддалених вузлах.

3. Проаналізувати отримані розв’язки.

4. Програмно реалізувати один із зазначених методів.

Приклад розв’язування типових задач

Приклад 1. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції $f(x)$, значення якої подано в таблиці

i	0	1	2	3
x_i	0	0,1	0,3	0,5
y_i	– 0,5	0	0,2	1

Розв’язання. За формулою інтерполяційного многочленаЛагранжа для функції, яка задана в нерівновіддалених вузлах, для $n = 3$ дістанемо вираз $L^{(3)}(x)$ при

$k = 0; 2; 3$:

$$\boldsymbol{L_0^{(3)} = \frac{(x-0,1)(x-0,3)(x-0,5)}{(-0,1)(-0,3)(-0,5)} = -\frac{x^3-0,9x^2+0,23x-0,015}{0,015}};$$

$$\boldsymbol{L_2^{(3)}(x) = \frac{x(x-0,1)(x-0,5)}{0,3\cdot 0,2\cdot(-0,2)} = -\frac{x^3-0,6x^2+0,05x}{0,012}};$$

$$\boldsymbol{L_3^{(3)} = \frac{x(x-0,1)(x-0,3)}{0,5\cdot 0,4\cdot 0,2} = -\frac{x^3-0,4x^2+0,03x}{0,04}},$$

($\boldsymbol{L_1^{(3)}}$ у даному випадку знаходити не слід, оскільки $y_1 = 0$). Тоді потрібний многочлен буде мати вигляд

$$L_3(x) = L_0^{(3)}(x)y_0 + L_2^{(3)}(x)y_2 + L_3^{(3)}(x)y_3 = \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{73}{12}x - 0{,}5.$$

Постановка задачі. Дана функція $y = f(x)$ зі своїми значеннями $y_i = f(x_i)$, де $x_i \in [a; b]$, $i = \overline{0,n}$. Знайти інтерполюючу функцію $F(x)$ таку, що $F(x_i) = y_i$, для $\forall x_i \in [a; b]$, $i = \overline{0,n}$.

Задача інтерполяції полягає у знаходженні значення функції $y = f(x)$ при $x = \xi$, для чого вважають, що $f(\xi) \approx F(\xi)$.

Метод Лагранжа. Розглянемо рішення задачі інтерполяції для функції, заданої у табличній формі (табл. 11), використовуючи метод Лагранжа для рівновіддалених вузлів.

Таблиця 10. Початкові дані

x_i	2	2.14	2.28	2.42	2.56	2.7	2.84
y_i	7.2744	7.7151	7.8899	7.7373	7.2005	6.2312	4.7916

Знайти $y_\xi = f(\xi)$ при $\xi = 2.6$.

Знайдемо різницю $\xi - x_i$, наприклад, $\xi - x_1 = 2.6 - 2 = 0.6$. Подальші розрахунки занесемо до таблиці 12. Знайдемо різницю $x_i - x_k$, наприклад, $x_1 - x_2 = 2 - 2.14 = -0.14$. Подальші розрахунки занесемо до таблиці 13, причому на головній діагоналі запишемо одиниці.

Таблиця 11. Початкові дані

Варіант		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	0,9950	0,9988	0,9512	0,3679	0,3679	0,4311	0,6664	1,7151	1,0806	6,8621
	1,15	1,1424	1,1481	1,0857	0,3064	0,2317	0,3044	0,4329	1,7834	1,0805	7,4816
	1,3	1,2890	1,2973	1,2182	0,2399	0,1419	0,2198	0,2406	1,8803	0,9042	8,0055
	1,45	1,4348	1,4462	1,3486	0,1771	0,0842	0,1635	0,0903	1,9696	0,5067	8,4128
	1,6	1,5796	1,5949	1,4770	0,1237	0,0483	0,1263	-0,0178	1,9978	-0,1495	8,6805
	1,75	1,7233	1,7433	1,6034	0,0819	0,0267	0,1021	-0,0861	1,9035	-1,0918	8,7858
	1,9	1,8658	1,8914	1,7278	0,0514	0,0142	0,0872	-0,1185	1,6344	-2,3342	8,7075
$\xi =$		1,23	1,47	1,52	1,16	1,23	1,47	1,52	1,48	1,18	1,25

Продовження таблиці 12

Варіант		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	1	0,2955	0,8408	0,6694	0,7358	1,0000	1,1651	0,6670	1,7552	1,6829	2,9736
	1,13	0,3758	0,9499	0,5508	0,4936	1,0250	1,0929	0,4623	1,9088	2,3097	3,2084
	1,26	0,4650	1,0589	0,4532	0,3245	1,1013	1,0797	0,2885	2,0362	3,0231	3,4131
	1,39	0,5630	1,1678	0,3729	0,2084	1,2371	1,1206	0,1459	2,1352	3,8012	3,5816
x_i	1,52	0,6694	1,2767	0,3069	0,1306	1,4502	1,2181	0,0352	2,2035	4,6148	3,7078
	1,65	0,7838	1,3854	0,2525	0,0797	1,7713	1,3812	-0,0443	2,2392	5,4279	3,7850
	1,78	0,9060	1,4940	0,2078	0,0473	2,2520	1,6261	-0,0948	2,2407	6,1986	3,8070
ξ =		1,23	1,47	1,35	1,16	1,20	1,47	1,60	1,48	1,18	1,25

Продовження таблиці 13

Варіант		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	1	0,8896	0,5414	0,7955	1,5576	1,1884	1,2693	0,1034	0,9483	1,6829	1,9093
	1,08	1,0936	0,5849	0,6732	1,3835	1,2362	1,2220	0,6080	0,8732	2,2220	1,6681
	1,16	1,3230	0,6284	0,5743	1,2316	1,3132	1,1956	1,0359	0,7750	2,8621	1,4193
	1,24	1,5786	0,6720	0,4938	1,0982	1,4238	1,1863	1,3901	0,6556	3,6065	1,1620
	1,32	1,8609	0,7156	0,4276	0,9801	1,5749	1,1914	1,6745	0,5176	4,4560	0,8956
	1,4	2,1705	0,7593	0,3728	0,8752	1,7765	1,2083	1,8936	0,3640	5,4082	0,6197
	1,48	2,5077	0,8031	0,3272	0,7815	2,0432	1,2347	2,0529	0,1982	6,4569	0,3345
$\xi =$		1,23	1,47	1,15	1,17	1,25	1,47	1,10	1,14	1,05	1,25

Зауваження. Надалі проміжні значення будуть представлені в тексті з чотирма знаками після коми, хоча всі обчислення будуть проводитися з шістьма знаками після коми.

Таблиця 14. Різниця $\xi - x_i$

x_i	2	2,14	2,28	2,42	2,56	2,7	2,84
$\xi - x_i$	0,6	0,46	0,32	0,18	0,04	-0,1	-0,24

Таблиця 15. Таблиця різниць $\boldsymbol{x_i - x_k}$

x_i / x_k	2	2,14	2,28	2,42	2,56	2,7	2,84
2	1	0,14	0,28	0,42	0,56	0,7	0,84
2,14	-0,14	1	0,14	0,28	0,42	0,56	0,7
2,28	-0,28	-0,14	1	0,14	0,28	0,42	0,56
2,42	-0,42	-0,28	-0,14	1	0,14	0,28	0,42
2,56	-0,56	-0,42	-0,28	-0,14	1	0,14	0,28
2,7	-0,7	-0,56	-0,42	-0,28	-0,14	1	0,14
2,84	-0,84	-0,7	-0,56	-0,42	-0,28	-0,14	1

Подальші розрахунки приведемо в таблиці 14.

Так, наприклад, перший рядок таблиці розраховується наступним чином:

$$\frac{\xi - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{0.46}{-0.14} = -3.2857,$$

$$\frac{\xi - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{0.32}{-0.28} = -3.2857$$

і т.д.

$$\prod_{k \neq i} P_{i,k}(\xi) = -3.2857 \cdot (-1.1429) \cdot \ldots \cdot 0.2857 = 0.0047.$$

$$y_i \prod_{k \neq i} P_{i,k}(\xi) = 7.2744 \cdot 0.0047 = 0.0341.$$

Наступні рядки таблиці 14 розраховуються аналогічним чином.

На рисунку 3 представлено графічне зображення початкових даних (сині ромби) та інтерполяції (помаранчева точка). З цього представлення можна сказати, що отримане наближене рішення задачі інтерполяції цілком відповідає вихідним даним.

Таблиця 16. Таблиця значень

$\frac{\xi - x_i}{x_k - x_i}$							$\prod_{k \neq i} P_{i,k}(\xi)$	$y_i \prod_{k \neq i} P_{i,k}(\xi)$
	-3,2857	-1,1429	-0,4286	-0,0714	0,1429	0,2857	0,0047	0,0341
4,2857		-2,2857	-0,6429	-0,0952	0,1786	0,3429	-0,0367	-0,2833
2,1429	3,2857		-1,2857	-0,1429	0,2381	0,4286	0,1320	1,0412
1,4286	1,6429	2,2857		-0,2857	0,3571	0,5714	-0,3128	-2,4202
1,0714	1,0952	1,1429	1,2857		0,7143	0,8571	1,0557	7,6014
0,8571	0,8214	0,7619	0,6429	0,2857		1,7143	0,1689	1,0525
0,7143	0,6571	0,5714	0,4286	0,1429	-0,7143		-0,0117	-0,0562
$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k \neq i} P_{i,k}(\xi) = F(\xi) =$								6,9695483

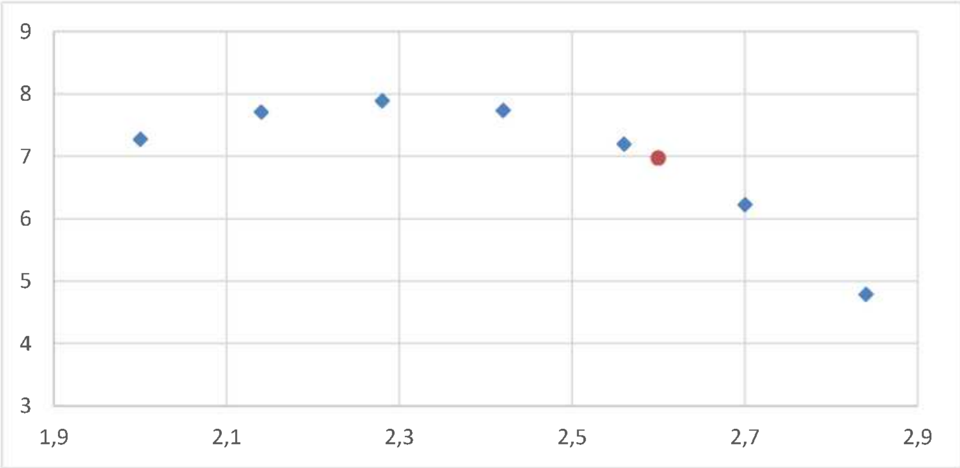

Рисунок 3. Інтерполяція функції

Метод Ньютона. Розглянемо рішення тієї ж задачі інтерполяції для функції, заданої таблицею своїх значень (табл. 10), використовуючи метод Ньютона для рівновіддалених вузлів.

Оскільки $\xi = 2.6$ знаходиться в кінці таблиці, то застосовуємо для вирішення задачі наближення другу інтерполяційну формулу Ньютона:

$$P_n(\xi) = y_n + q\Delta y_n + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-2} + \dots +$$

$$+ \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{x_n - \xi}{h}.$$

Тоді

$$y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi).$$

Складемо кінцеві різниці. Наприклад,

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 7{,}7151 - 7{,}2744 = 0{,}4407$$

і т.д.

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 1{,}291115 - 1{,}128114 = 0{,}163001$$

і т.д.

Інші значення розраховуються аналогічним чином (див. табл. 15).

Таблиця 17. Скінченні різниці

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
7,2744	0,4407	-0,2659	-0,0615	0,0047	0,0038	-0,0018
7,7151	0,1748	-0,3274	-0,0568	0,0085	0,002	
7,8899	-0,1526	-0,3842	-0,0483	0,0105		
7,7373	-0,5368	-0,4325	-0,0378			
7,2005	-0,9693	-0,4703				
6,2312	-1,4396					
4,7916						

Використовуючи отримані кінцеві різниці, представимо поліном Ньютона $P_n(x)$, вводячи позначення

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2{,}6 - 2{,}84}{0{,}14} = \text{-1,714285714},$$

отримаємо наступні значення:

q	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$q+4$	$q+5$
-1,7143	-0,7143	0,2857	1,2857	2,2857	3,2857

Складемо таблицю для обчислення доданків у другій інтерполяційній формулі Ньютона (табл.14). Так, для $k = 6$ маємо:

$$S_6 = -1.7143 \cdot (-0.7143) \cdot 0.2857 \cdot 1.2857 \cdot 2.2857 \cdot 3.2857 = 3.3782,$$

$$\frac{S_6}{6!} = \frac{3.3782}{720} = 0.0047,$$

$$\Delta^6 y_i = -0.0018,$$

$$\frac{S_6}{6!} \Delta^6 y_1 = 0.0047 \cdot (-0.0018) = -0.000008.$$

Відповідно, для $k = 5$ маємо:

$$S_5 = -1.7143 \cdot (-0.7143) \cdot 0.2857 \cdot 1.2857 \cdot 2.2857 = 1.0281$$

і т.д.

Таблиця 18. Обчислення доданків

k	$S_k = \\ = \prod_{i=1}^{k}(q+i-1)$	$k!$	$\frac{S_k}{k!}$	$\Delta^k y_{n-k}$	$\frac{S_k}{k!}\Delta^k y_{n-k}$
6	3,3782	720	0,0047	-0,0018	-8,44E-06
5	1,0281	120	0,0086	0,0020	1,71E-05
4	0,4498	24	0,0187	0,0105	0,0002
3	0,3499	6	0,0583	-0,0378	-0,0022
2	1,2245	2	0,6122	-0,4703	-0,2879
1	-1,7143	1	-1,7143	-1,4396	2,4679
0	1	1	1	4,7916	4,7916
				$P_2(2.6) =$	6,96954834

На рисунку 4 представлено графічне зображення початкових даних (сині ромби) та інтерполяції (помаранчева точка). З цього представлення можна сказати, що отримане наближене рішення задачі інтерполяції цілком відповідає вихідним даним.

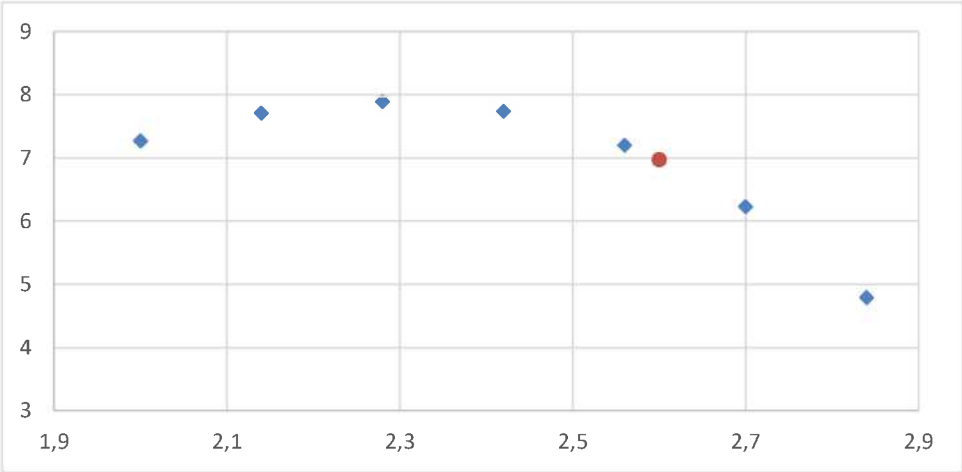

Рисунок 4. Інтерполяція функції за допомогою інтерполяційного многочлена Ньютона

Контрольні питання

1. Від чого залежить точність одержуваного формулою Лагранжа результату?
2. Геометрична ілюстрація завдання інтерполяції.
3. За яких умов можливе зворотне інтерполювання?
4. Запишіть інтерполяційні формули Лагранжа та Ньютона.
5. Коли поліном порядку буде апроксимований формулою Лагранжа із найменшою похибкою?
6. Навести формулу Лагранжа. Дати оцінку похибки.
7. Постановка задачі інтерполювання.
8. У чому різниця між задачами інтерполяції та екстраполяції?
9. У яких випадках застосовуються формули Ньютона для інтерполювання вперед?
10. У яких випадках застосовуються формули Ньютона для інтерполювання назад?
11. Що таке зворотне інтерполювання?
12. Як виглядає формула Лагранжа для рівновіддалених вузлів?

Практична робота № 6. Апроксимація функції

Мета: навчитися апроксимувати функції та знаходити її емпіричну формулу та значення в точці за допомогою метода найменших квадратів. Навчитися розробляти програми, що реалізують ці методи.

План

1. Постановка задачі
2. Метод найменших квадратів

Основні теоретичні відомості

<u>Постановка задачі.</u> Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$, задана своїми значеннями y_i , $x_i \in [a; b]$, тобто $y_i = f(x_i)$. Вивести емпіричну формулу для функції $y = f(x)$ та визначити значення функції $y_\xi = y(\xi)$ у точці $\xi \in [a; b]$.

Метод найменших квадратів. Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і задана своїми значеннями y_i в $x_i \in [a; b]$, то вивести емпіричну формулу для функції можна за допомогою певного многочлена виду

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

при $m \leq n$, де n - кількість вузлів апроксимації (при $m = n$ маємо задачу інтерполяції).

Мірою відхилення багаточлена від заданої функції прийнято вважати суму квадратів різниці між значеннями багаточлена та функції:

$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2.$$

Ідея методу полягає в побудові апроксимуючого багаточлена $\varphi(x)$ таким чином, щоб міра S була якомога меншою. Для цього частинні похідні по всім змінним прирівнюються нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + \ldots + a_mx_i^m - y_i) = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + \ldots + a_mx_i^m - y_i)x_i = 0; \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + \ldots + a_mx_i^m - y_i)x_i^m = 0. \end{cases}$$

За допомогою отриманої системи алгебраїчних рівнянь визначають змінні $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та виводять емпіричну формулу для функції за допомогою многочлена виду:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m.$$

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Завдання:

1. Використовуючи метод найменших квадратів, вивести емпіричну формулу для функції $y = f(x)$, яка задана таблично (див. табл. 10).

2. Знайти наближене значення функції при заданому значенні аргументу. Проаналізувати отримані розв'язки та порівняти їх із розв'язками, отриманими в попередній лабораторній роботі.

3. Програмно реалізувати зазначений метод.

Приклад розв'язування типової задачі

Постановка задачі. Дана функція $y = f(x)$ своїми значеннями $y_i = f(x_i)$, де $x_i \in [a; b]$, $\quad i = \overline{0, n}$. Вивести її емпіричну формулу $F(x)$ таку, що $F(x_i) = y_i$, для $\forall x_i \in [a; b]$, $\quad i = \overline{0, n}$.

Метод найменших квадратів. Розглянемо рішення задачі апроксимації для функції, заданої таблично (табл. 17), використовуючи метод найменших квадратів.

Таблиця 19. Початкові дані

x_i	2	2,14	2,28	2,42	2,56	2,7	2,84
y_i	7,2744	7,7151	7,8899	7,7373	7,2005	6,2312	4,7916

Знайти $y_\xi = f(\xi)$ при $\xi = 2.6$.

Зобразимо табличні дані у вигляді графіку (рис. 5). Легко побачити, що в якості емпіричної функції доцільно обрати графік параболи:

$$y \approx \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

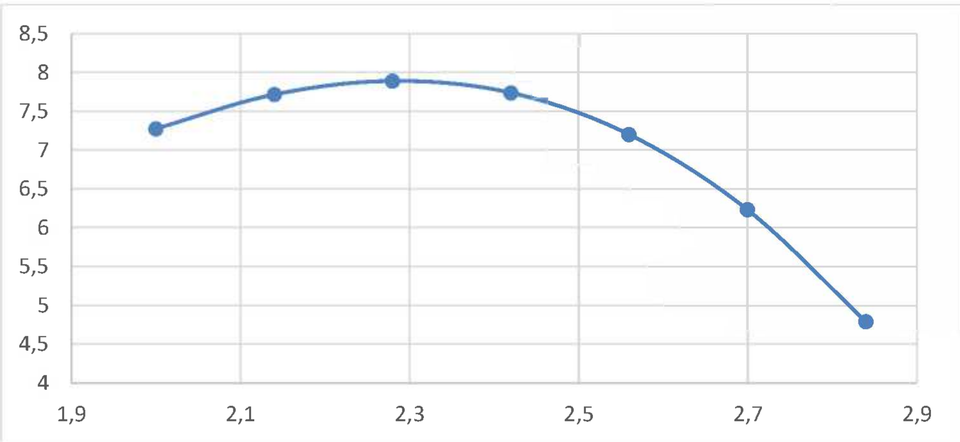

Рисунок 5. Графік функції

Отже, маємо:

$$m = 2, n = 4, \phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2,$$

$$y = \begin{pmatrix} 7.2744 \\ 7.7151 \\ 7.8899 \\ 7.7373 \\ 7.2005 \\ 6.2312 \\ 4.7916 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} 2^0 & 2 & 2^2 \\ 2.14^0 & 2.14 & 2.14^2 \\ 2.28^0 & 2.28 & 2.28^2 \\ 2.42^0 & 2.42 & 2.42^2 \\ 2.56^0 & 2.56 & 2.56^2 \\ 2.7^0 & 2.7 & 2.7^2 \\ 2.84^0 & 2.84 & 2.84^2 \end{pmatrix}.$$

Для подальших розрахунків обчислимо:

$$\Phi^T\Phi = \begin{pmatrix} 7 & 16.94 & 41.5436 \\ 16.94 & 41.5436 & 94.92 \\ 41.5436 & 103.1917 & 259.4412 \end{pmatrix}, \Phi^T y = \begin{pmatrix} 48.84 \\ 116.638 \\ 282.019 \end{pmatrix}.$$

Тоді, згідно схеми розрахунків, маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7a_0 + 16.94a_1 + 41.5436a_2 = 48.84; \\ 16.94a_0 + 41.5436a_1 + 94.92a_2 = 116.638; \\ 41.5436a_0 + 103.1917a_1 + 259.4412a_2 = 282.019. \end{cases}.$$

Звідки, за допомогою методу оберненої матриці, наприклад, знаходимо значення параметрів емпіричної формули: $a_0 = -41.9338$, $a_1 = 43.8807$, $a_2 = -9.6516$. Таким чином, отримуємо наступну апроксимацію функції, заданої у табличному виді:

$$y \approx -41.9338 + 43.8807x - 9.6516x^2.$$

Графічне представлення отриманої апроксимуючої функції представлено на рисунку 6.

Таким чином, шукане наближене значення функції при $\xi = 2.6$ дорівнює:

$$y(2.6) \approx -41.9338 + 43.8807 \cdot 2.6 - 9.6516 \cdot (2.6)^2 = 6.9112.$$

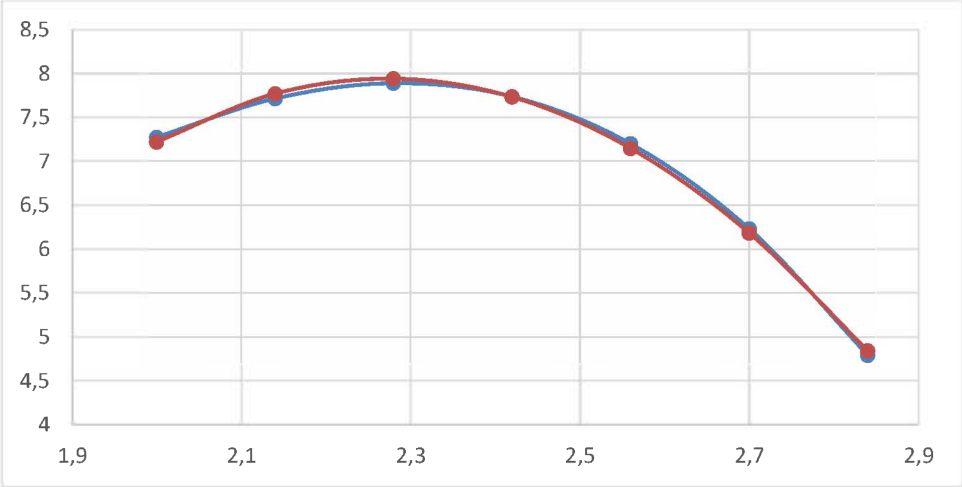

Рисунок 6. Апроксимуюча функція

Контрольні питання

1. Постановка задачі апроксимації функцій.
2. Що є вихідними даними у задачі апроксимації функцій?
3. Суть методу найменших квадратів.
4. Коли використовується метод найменших квадратів?
5. Відмінність методу інтерполювання від методу найменших квадратів.
6. Геометрична ілюстрація методу найменших квадратів.
7. Які основні критерії якості апроксимації?
8. Які математичні задачі можуть бути розв'язані за допомогою апроксимації?
9. Як змінюється точність апроксимації зі збільшенням порядку полінома? Чи завжди це покращує результат?
10. Які ви знаєте методи апроксимації функцій?
11. Як побудувати поліноміальну апроксимацію для заданих даних?
12. У яких випадках апроксимація дає кращий результат, ніж інтерполяція?

Практична робота № 7. Числове диференціювання

Мета: навчитися диференціювати функції за допомогою інтерполяційного полінома Ньютона. Навчитися розробляти програми, що реалізують ці методи.

План

1. Постановка задачі
2. Диференціювання функції

Основні теоретичні відомості

Постановка задачі. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і задана своїми значеннями y_i у точках $x_i \in [a; b]$. Для наближеного диференціювання функцію $y = f(x)$ замінюють інтерполюючою функцією $F(x)$ і вважають

$$f(x) \approx F(x), f^{(k)}(x) \approx F^{(k)}(x), k = 1,2,3, \dots, n;$$

з похибкою $R(x) = f(x) - F(x)$, $R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - F^{(k)}(x) = r_k(x)$, $k = 1,2,3, \dots, n$.

Тоді при $k = 1$ отримаємо

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \approx$$

$$\approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right],$$

а при $k = 2$

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + \frac{q-1}{1}\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right].$$

Якщо $x = x_0$, то

$$q = \frac{x - x_0}{h} = |x = x_0| = 0.$$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots\right],$$

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right],$$

$$R'(x_0) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(\bar{x}), \qquad \bar{x} \in [a; b].$$

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Завдання:

1. Знайти наближене значення першої та другої похідних функції при заданому значенні аргументу за допомогою відповідного інтерполяційного полінома Ньютона, якщо функція задана в рівновіддалених вузлах (вихідні значення взяти з попередньої роботи).

$y_i = f(x_i)$; $x_i = x_0 + i \cdot h$; $h = const$; $i = \overline{0,6}$;

$y'_\xi = f'(\xi)$; $y'_\xi - ?$; $y''_\xi = f''(\xi)$; $y''_\xi - ?$.

2. Проаналізувати отримані розв'язки.

3. Програмно реалізувати зазначений метод.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.15	1.1	1.2	1.3	1.4	1.25

Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ξ	1.2	1.3	1.14	1.25	1.16	1.24	1.12	1.2	1.3	1.26

Варіант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ξ	1.2	1.23	1.25	1.24	1.15	1.16	1.2	1.1	1.17	1.3

Приклад розв’язування типової задачі

Постановка задачі. Функція задана в рівновіддалених вузлах своїми значеннями y_i у вузлах x_i. Знайти наближене значення першої та другої похідних функції при заданому значенні аргументу $\xi = 1.6$, де $h = 0.71$.

x_i	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26
y_i	0,778801	1,906915	3,19803	4,479744	5,645985	6,637627	7,42804

Оскільки функція, дана в рівновіддалених вузлах, а $\xi = 1.6$, знаходиться в кінці таблиці, використовуємо другу інтерполюючу формулу Ньютона.

Для цього знайдемо кінцеві різниці $\Delta^k y_i$, $\quad k = \overline{1, n-1}$.

Наприклад,

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 1{,}906915 - 0{,}778801 = 1{,}128114$$

і т.д.

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 1{,}291115 - 1{,}128114 = 0{,}163001$$

і т.д.

Інші значення розраховуються аналогічним чином (див. табл.).

Використовуючи отримані кінцеві різниці, випишемо інтерполяційний поліном Ньютона $P_n(x)$.

Таблиця. Скінченні різниці для функції y

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0,7788	1,1281	0,1630	-0,1724	0,0663	-0,0194	0,0049
1,9069	1,2911	-0,0094	-0,1061	0,0469	-0,0145	
3,1980	1,2817	-0,1155	-0,0591	0,0325		
4,4797	1,1662	-0,1746	-0,0266			
5,6459	0,9916	-0,2012				
6,6376	0,7904					
7,4280						

Вважаючи $y(x) \approx P_n(x)$, $y'(x) \approx P_n'(x)$, $y''(x) \approx P_n''(x)$, вводячи позначення

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.6 - 1}{0.71} = 0.84507,$$

отримаємо

$$y'(x) = P_n'(\xi) == \Delta y_0 + \frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{4q^3 - 18q^2 + 22q - 6}{4!}\Delta^4 y_0 +$$

$$+\frac{5q^4 - 40q^3 + 105q^2 - 100q + 24}{5!}\Delta^5 y_0 +$$

$$+\frac{6q^5 - 75q^4 + 340q^3 - 675q^2 + 548q - 120}{6!}\Delta^6 y_0 = 1.715956.$$

$$y''(x) = P_n''(\xi) = \Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{12q^2 - 36q + 22}{4!}\Delta^4 y_0 +$$

$$+\frac{20q^3 - 120q^2 + 210q - 100}{5!}\Delta^5 y_0 +$$

$$+\frac{30q^4 - 300q^3 + 1020q^2 - 1350q + 548}{6!}\Delta^6 y_0 =$$

$$= 0.375504.$$

Зауваження. Очевидно, що у разі коли значення ξ знаходиться ближче до кінця таблиці значень функції, необхідно застосувати другу інтерполюючу формулу Ньютона, інакше похибка отриманого наближеного значення похідної буде великою.

Контрольні питання

1. Основна ідея наближеного чисельного диференціювання.
2. Порівняння методів.
3. Постановка задачі чисельного диференціювання.
4. Яким чином можна підвищити точність чисельного диференціювання?
5. Формули чисельного диференціювання.
6. Обчислення похідної першого та другого порядку.
7. Непереборна похибка формул чисельного диференціювання.
8. Що відбувається з похибкою округлення зі зростанням порядку похідної при чисельному диференціюванні?
9. Чим чисельне диференціювання відрізняється від аналітичного?
10. У яких випадках чисельне диференціювання є необхідним?
11. Яким умовам повинна задовольняти функція, щоб її похідну можна було обчислити чисельно?
12. Як оцінити похибку чисельного диференціювання за відомою аналітичною формою функції?

Практична робота № 8. Числове інтегрування

Мета: навчитися інтегрувати функції за допомогою формул лівих, правих та середніх прямокутників, трапецій та Сімпсона. Навчитися розробляти програми, що реалізують ці методи.

План

1. Постановка задачі
2. Формул лівих, правих та середніх прямокутників
3. Формула трапецій
4. Формула Сімпсона

Основні теоретичні відомості

<u>*Постановка задачі*</u>. Нехай функція $y = f(x)$ визначена та інтегрована на відрізку $[a; b]$. Необхідно знайти значення певного інтегралу $I = \int_a^b f(x)dx$, коли первісна $F(x)$, $F'(x) = f(x)$ невідома чи її важко знайти, чи $y = f(x)$ задана своїми значеннями $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $x_i \in [a; b]$.

Загальний підхід у чисельному інтегруванні полягає в наступному:

- Для функції $y = f(x)$ будується апроксимуюча функція $F(x)$ так, щоб $f(x) \approx F(x)$ на відрізку $[a; b]$, при цьому клас апроксимуючої функції $F(x)$ може залежати від властивостей функції $y = f(x)$, від необхідної точності обчислення інтеграла, від числа арифметичних дій, від часу роботи алгоритму тощо;
- Функція $F(x)$ вибирається так, щоб інтеграл $\int_a^b F(x)dx$ легко "брався";
- Функція $F(x)$ вибирається так, щоб $I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b F(x)dx$ чи $\left|I - \int_a^b F(x)dx\right| \leq \varepsilon$, де ε - точність обчислення інтеграла, що задається.
- Для застосування методів чисельного інтегрування ділять відрізок

$[a;b]$ системою рівновіддалених точок $x_i = x_0 + i \cdot h$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = \overline{0,n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$ на відрізки $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$ та розглядають суму інтегралів

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

З цих міркувань і припущень зазвичай використовують такі формули чисельного інтегрування.

Формула лівих прямокутників. У цьому випадку $f(x)$ на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ замінюється функцією $F(x) = f(x_k)$, тоді

$$I_k \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dx = f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx = f(x_k)[x_{k+1} - x_k] = h \cdot f(x_k),$$

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} h \cdot f(x_k) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k),$$

$$\Delta_I \leq \frac{n \cdot h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Формула правих прямокутників. У цьому випадку $f(x)$ на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ замінюється функцією $F(x) = f(x_{k+1})$, тоді

$$I_k \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1})dx = f(x_{k+1})\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx = f(x_k)[x_{k+1} - x_k] = h \cdot f(x_{k+1}),$$

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} h \cdot f(x_{k+1}) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}),$$

$$\Delta_I \leq \frac{n \cdot h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Формула середніх прямокутників. У цьому випадку $f(x)$ на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ замінюється функцією $F(x) = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$, тоді

$$I_k \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)dx = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx =$$

$$= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)[x_{k+1} - x_k] = h \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right),$$

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} h \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right),$$

$$\Delta_I \le \frac{n \cdot h^3}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Формула трапецій. У цьому випадку $f(x)$ на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ замінюється функцією $F(x) = \frac{1}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$, тоді

$$I_k \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]dx = \frac{1}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx =$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})],$$

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})],$$

$$\Delta_I \le \frac{n \cdot h^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Формули Ньютона-Котеса. Якщо $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ замінити інтерполюючим поліномом Лагранжа $F(x) = L_n(x)$, то отримаємо формули Ньютона-Котеса:

$$I = (b - a) \sum_{k=0}^{n} y_k H_k,$$

$$H_k = \frac{(-1)^k}{(n-k)!\, n} \cdot \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{(q-k)} dq,$$

$$q^{[n+1]} = q(q-1)(q-2) \cdots (q-n).$$

При $n = 1$ отримаємо з цих відношень формулу трапеції.

Формула Сімпсона. Виходить з формул Ньютона-Котеса при парному числі розбиття $n = 2m$ відрізка $[a; b]$ та розгляді інтерполяції функції $f(x)$ на трьох точках, тобто $f(x)$ наближається квадратичним тричленом виду $F(x) = cx^2 + dx + e$:

$$I = \frac{h}{3}\sum_{k=0}^{m-1}[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})],$$

$$\Delta_I \le \frac{n \cdot h^5}{180} \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Завдання:

1. Знайти наближене значення інтеграла за формулами лівих, правих та середніх прямокутників, трапецій та Сімпсона з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$;

2. Проаналізувати отримані розв'язки.

3. Програмно реалізувати один із зазначених методів.

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$I = \int_{0.4}^{1.2} \frac{cos(0.07 + 0.5x)dx}{0.4 + \sqrt{x^2 + 1}}$	16	$I = \int_{1.2}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$
2	$I = \int_{0.1}^{1.7} \frac{sin(0.04 + 1.5x)dx}{1.4 + cos(2.4 - 0.3x)}$	17	$I = \int_{0.1}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 6.8}}$
3	$I = \int_{0.15}^{1.3} \frac{(0.06 + 2.5x)^2dx}{1.1 + sin(1.2 - 0.3x)}$	18	$I = \int_{1}^{3.5} \frac{ln(10.8)dx}{\sqrt{x^2 + 5.4}}$
4	$I = \int_{0.2}^{1.6} \frac{cos^2(0.07 - 2.5x)dx}{2.5 + \sqrt{x^2 + 1}}$	19	$I = \int_{0.15}^{2.1} \frac{x^2\, log(6.3)dx}{\sqrt{2x^2 + 7.6}}$

Варіант	Завдання
5	$I=\int_{0.1}^{1.7}\frac{sin^2(0.02+0.7x)dx}{1.1-cos(1.3-0.4x)}$
6	$I=\int_{0.1}^{1.7}\frac{2.3-sin(0.3+0.25x)dx}{0.4+cos^2(1.6-0.1x)}$
7	$I=\int_{0.4}^{1.2}\frac{cos(0.5+0.5x)dx}{0.4+\sqrt{x^2+7}}$
8	$I=\int_{0.1}^{1.7}\frac{sin(0.16+1.5x)dx}{1.4+cos(9-0.3x)}$
9	$I=\int_{0.15}^{1.3}\frac{(0.54+2.5x)^2dx}{1.1+sin(10.8-0.3x)}$
10	$I=\int_{0.2}^{1.6}\frac{cos^2(0.7-2.5x)dx}{2.5+\sqrt{x^2+10}}$
11	$I=\int_{0.1}^{1.7}\frac{sin^2(0.22+0.7x)dx}{1.1-cos(1.69-0.4x)}$
12	$I=\int_{0.1}^{1.7}\frac{2.3-sin(3.6+0.25x)dx}{0.4+cos^2(19.2-0.1x)}$
13	$I=\int_{0.4}^{1.2}\frac{cos(0.1+0.5x)dx}{0.4+\sqrt{x^2+10}}$

Варіант	Завдання
20	$I=\int_{1}^{1.7}\frac{x\cdot exp(-0.4)dx}{\sqrt{8-2x}}$
21	$I=\int_{1.2}^{2.8}\frac{ln(21)dx}{\sqrt{4x^2+3x+8.4}}$
22	$I=\int_{1.2}^{2.1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+22}}$
23	$I=\int_{0.1}^{1.8}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+9.2}}$
24	$I=\int_{1}^{3.5}\frac{ln(14.4)dx}{\sqrt{x^2+5.4}}$
25	$I=\int_{0.15}^{2.1}\frac{x^2\,log(8.3)dx}{\sqrt{2x^2+10}}$
26	$I=\int_{1}^{1.7}\frac{x\cdot exp(-0.52)dx}{\sqrt{10.4-2x}}$
27	$I=\int_{1.2}^{2.8}\frac{ln(27)dx}{\sqrt{4x^2+3x+10.8}}$
28	$I=\int_{1.2}^{2.1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+28}}$

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
14	$I = \int_{0.1}^{1.7} \frac{sin(0.28 + 1.5x)dx}{1.4 + cos(17 - 0.3x)}$	29	$I = \int_{0.1}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 11.6}}$
15	$I = \int_{0.15}^{1.3} \frac{(0.9 + 2.5x)^2 dx}{1.1 + sin(18 - 0.3x)}$	30	$I = \int_{1}^{3.5} \frac{ln(18)dx}{\sqrt{x^2 + 5.4}}$

Приклад розв'язування типової задачі

Завдання. Обчислити наближено інтеграл

$$\int_{0.1}^{0.485} \frac{sin(x)dx}{x}.$$

Розв'язання. Спочатку відрізок $[a, b]$ розіб'ємо на $n = 26$ частин і знайдемо похідні:

$$y_i = f(x_i) = \frac{sin(x_i)}{x_i},$$

$$y_i' = f'(x_i) = -\frac{sin(x_i) - x_i\, cos(x_i)}{x_i^2},$$

$$y_i'' = f''(x_i) = -\frac{(x_i^2 - 2)\, sin(x_i) + 2x_i\, cos(x_i)}{x_i^3},$$

$$y_i^{(4)} = f^{(4)}(x_i) = \frac{(x_i^4 - 12x_i^2 + 24)\, sin(x_i) + (2x_i^3 - 24x_i)\, cos(x_i)}{x_i^5},$$

$x_i = a + i \cdot h$, якщо $h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{0.6-0.1}{26} \approx 0.01923$.

Таким чином, маємо:

$x_0 = a = 0.1$,

$$y_i = \frac{sin(0.1)}{0.1} = 0.9983,$$

$$y_i' = -\frac{sin(0.1) - (0.1 \cdot cos(0.1))}{(0.1)^2} = -0.0333,$$

$$y_i'' = -\frac{((0.1)^2 - 2)\,sin(\,0.1) + 2 \cdot 0.1 \cdot cos(\,0.1)}{(0.1)^3} = -0.3323,$$

$$y_i^{(4)} = \frac{((0.1)^4 - 12 \cdot (0.1)^2 + 24)\,sin(\,0.1) + (2(0.1)^3 - 24 \cdot 0.1)\,cos(\,0.1)}{(0.1)^5}$$

$$= 0.1993.$$

Подальші розрахунки представлено в таблиці 18.

Таблиця 20. Чисельне інтегрування

x_i	y_i	$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$	y_i'	y_i''	$y_i^{(4)}$
0,1	0,9983	0,9980	-0,0333	-0,3323	0,1993
0,1192	0,9976	0,9972	-0,0397	-0,3319	0,1990
0,1385	0,9968	0,9963	-0,0461	-0,3314	0,1986
0,1577	0,9959	0,9953	-0,0524	-0,3309	0,1982
0,1769	0,9948	0,9942	-0,0588	-0,3302	0,1978
0,1962	0,9936	0,9930	-0,0651	-0,3295	0,1973
0,2154	0,9923	0,9916	-0,0715	-0,3287	0,1967
0,2346	0,9909	0,9901	-0,0778	-0,3278	0,1961
0,2538	0,9893	0,9885	-0,0841	-0,3269	0,1954
0,2731	0,9876	0,9867	-0,0903	-0,3259	0,1947
0,2923	0,9858	0,9849	-0,0966	-0,3248	0,1939
0,3115	0,9839	0,9829	-0,1028	-0,3237	0,1931
0,3308	0,9819	0,9808	-0,1091	-0,3225	0,1922
0,35	0,9797	0,9786	-0,1152	-0,3212	0,1913
0,3692	0,9774	0,9763	-0,1214	-0,3198	0,1903
0,3885	0,9750	0,9738	-0,1275	-0,3184	0,1893

x_i	y_i	$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$	y_i'	y_i''	$y_i^{(4)}$
0,4077	0,9725	0,9712	-0,1337	-0,3169	0,1883
0,4269	0,9699	0,9685	-0,1397	-0,3153	0,1871
0,4462	0,9672	0,9657	-0,1458	-0,3137	0,1860
0,4654	0,9643	0,9628	-0,1518	-0,3120	0,1847
0,4846	0,9613	0,9598	-0,1578	-0,3102	0,1835
0,5038	0,9582	0,9566	-0,1637	-0,3083	0,1822
0,5231	0,9550	0,9534	-0,1696	-0,3064	0,1808
0,5423	0,9517	0,9500	-0,1755	-0,3044	0,1794
0,5615	0,9483	0,9465	-0,1813	-0,3024	0,1779
0,5808	0,9447	0,9429	-0,1871	-0,3003	0,1764
0,6	0,9411	0,9392	-0,1929	-0,2981	0,1749

Графік шуканої функції представлено на рисунку 7.

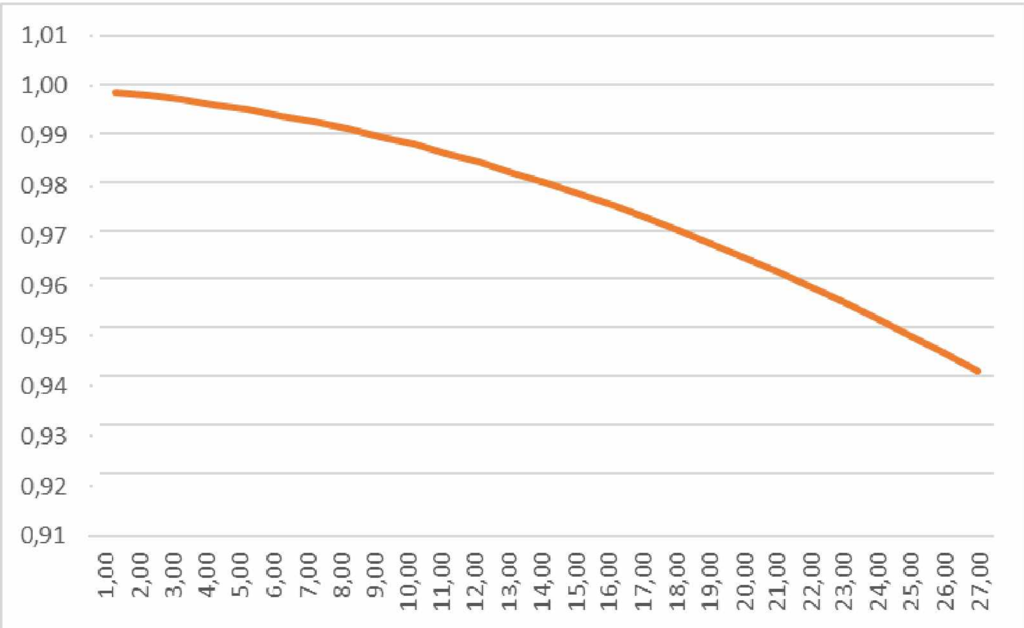

Рисунок 7. Графік функції

Обчислимо значення інтеграла <u>методом лівих прямокутників</u>, використовуючи вираз:

$$S_{\text{лев.пр}} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = 0{,}0192 \cdot (0{,}9983 + 0{,}9976 + \ldots + 0{,}9447) =$$

$$= 0{,}488730039.$$

Обчислимо значення інтеграла <u>методом правих прямокутників</u>, використовуючи вираз:

$$S_{\text{прав.пр}} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 0{,}0192 \cdot (0{,}9976 + 0{,}9968 + \ldots + 0{,}9411) =$$

$$= 0{,}487628821.$$

Обчислимо значення інтеграла <u>методом середніх прямокутників</u>, використовуючи вираз:

$$S_{\text{ср.пр}} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = 0{,}0192 \cdot (0{,}9980 + 0{,}9972 + \ldots + 0{,}9429) =$$

$$= 0{,}488186808.$$

Обчислимо значення інтеграла <u>методом трапецій</u>, використовуючи вираз:

$$S_{\text{тр}} = h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) =$$

$$= 0{,}0192 \cdot (\frac{0{,}9983 + 0{,}9411}{2} + 0{,}9976 + 0{,}9968 +$$

$$+ \ldots + 0{,}9447) = 0{,}48817943.$$

Обчислимо значення інтеграла <u>методом Сімпсона</u>, використовуючи вираз:

$$S_{\text{тр}} = \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2\text{i}}) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2\text{i}-1}) + f(x_0)\right) = \frac{0{,}0192}{3} \cdot (0{,}9983 +$$

$$+ 2(0{,}9968 + 0{,}9948 + \ldots + 0{,}9483) + 4(0{,}9976 + 0{,}9959 + \ldots + 0{,}9447) + 0{,}9411) =$$

$$= 0{,}488184349.$$

Контрольні питання

1. Геометричні ілюстрації чисельного інтегрування.
2. Основна ідея наближеного чисельного інтегрування.
3. Порівняння методів.
4. Постановка задачі чисельного інтегрування.
5. Формули Ньютона – Котеса.
6. Чисельне інтегрування методами прямокутників (лівого, правого, середнього), похибка методу.
7. Чисельне інтегрування методом Сімпсона, похибка методу.
8. Чисельне інтегрування шляхом трапеції, похибка способу.
9. Який вплив зменшує кількість розбиття на відрізку [a;b] на похибку інтегрування?
10. Який з відомих вам методів інтегрування має найменшу точність?
11. Який із вивчених вами методів чисельного інтегрування має найбільшу точність?
12. Якій кількості кратна кількість інтервалів розбиття в методі Сімпсона?

Практична робота № 9. Наближений розв'язок звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

Мета: навчитися наближено розв'язати звичайне диференціальне рівняння першого порядку за допомогою метода Ейлера, Ейлера з уточненням та Рунге-Кутта четвертого порядку. Навчитися розробляти програми, що реалізують ці методи.

План

1. Постановка задачі
2. Метод Ейлера
3. Метод Ейлера з уточненням
4. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку

Основні теоретичні відомості

Постановка задачі. Нехай задане звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0.$$

Необхідно знайти розв'язок рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам.

Зазвичай, для розв'язування таких завдань використовують наступні методи наближеного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Метод Ейлера-Коші. Метод Ейлера є найпростішим чисельним методом інтегрування диференціального рівняння. Його недоліки – мала точність і систематичне нагромадження помилок. Розрахунки проводяться за наступними формулами:

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})], \\ \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^3), i = 0,1,2, \dots . \end{cases}$$

Метод Ейлера з уточненням. Основна проблема малої неточності методу Ейлера полягає у непостійності похідної на відрізку. Шоб цього уникнути, можна використовувати метод Ейлера з уточненням, який замінює похідну на її середнє значення. Цей метод є більш точним. Розрахунки проводяться за наступними формулами:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}\right)\right], \qquad i = 0,1,2, \dots. \\ k = \overline{1,n}, \left|y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)}\right| < \varepsilon, \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^3), \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Є одним з найрозповсюджених методів наближеного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Має достатньо високу точність розв’язку. Розрахунки проводяться за наступними формулами:

$$\begin{cases} k_{1,i} = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_{2,i} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{1,i}\right), \\ k_{3,i} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,i}\right), \\ k_{4,i} = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_{3,i}\right), \end{cases}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right),$$

$$\Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^5), i = 0,1,2, \dots.$$

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Завдання:

1. Знайти наближені значення рішення звичайного диференціального рівняння на відрізку з кроком за початковою умовою, використовуючи

а) метод Ейлера;

б) метод Ейлера з уточненням;

в) метод Рунге-Кутта четвертого порядку.

2. Для тестових прикладів знайти точні розв'язки та порівняти отримані результати.

3. Програмно реалізувати один із запропонованих методів.

Варіант	$y' = f(x)$	$[a; b]$	h	$y(x_0) = y_0$
1	$y' = \dfrac{x+y}{x}$	$[1; 2]$	0.05	$y(1) = 0$
2	$y' = \dfrac{1+xy}{x^2}$	$[1; 2]$	0.05	$y(1) = 0$
3	$xy' - y = x^2 \cdot sin(x)$	$\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + 1\right]$	0.05	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
4	$xy' - y = \dfrac{x}{ln(x)}$	$[e; e + 1.5]$	0.075	$y(e) = 0$
5	$xy' = y\, ln(x)$	$[1; 3]$	0.1	$y(1) = e$
6	$xy' - y = x \cdot sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$[1; 2]$	0.1	$y(1) = \dfrac{\pi}{2}$
7	$x^2y' = y(x-1)$	$[1; 2]$	0.05	$y(1) = e$
8	$y' = \dfrac{1+ln(x)}{x} - \dfrac{y}{x}$	$[1; 2]$	0.05	$y(1) = 0$
9	$y' = \dfrac{x+y}{x}$	$[e; 2e]$	$\dfrac{e}{20}$	$y(e) = e$
10	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$	$[0; 1]$	0.05	$y(0) = 0$
11	$y' + y \cdot tg(x) = sin(2x)$	$[0; 1]$	0.05	$y(0) = -1$

Варіант	$y' = f(x)$	$[a; b]$	h	$y(x_0) = y_0$
12	$xy' - y^2\, ln(x) + y = 0$	$[1; 2]$	0.05	$y(1) = 1$
13	$y' \sin(x) = y\, ln(y)$	$\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$	$\frac{\pi}{30}$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$
14	$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$	$[0; 2]$	0.1	$y(0) = 1$
15	$y' - y \cdot tg(x) = sec(x)$	$[0; 1.5]$	0.1	$y(0) = 0$
16	$xy' - \frac{y}{x+1} = x$	$[1; 2]$	0.05	$y(1) = 0$
17	$y' - \frac{y}{1-x^2} = x + 1$	$[0; 1.5]$	0.1	$y(0) = 1$
18	$y' = x + cos\frac{y}{\sqrt{10}}$	$[0{,}6; 2]$	0,07	$y(0{,}6) = 0{,}8$
19	$y' = x + cos\frac{y}{\sqrt{7}}$	$[0{,}5; 2]$	0,1	$y(0{,}5) = 0{,}6$
20	$y' = x + cos\frac{y}{\pi}$	$[1{,}7; 2{,}7]$	0,05	$y(1{,}7) = 5{,}3$
21	$y' = x + cos\frac{y}{2{,}25}$	$[1{,}4; 3]$	0,1	$y(1{,}4) = 2{,}2$
22	$y' = x + cos\frac{y}{e}$	$[1{,}4; 3]$	0,1	$y(1{,}4) = 2{,}5$
23	$y' = x + cos\frac{y}{\sqrt{2}}$	$[0{,}8; 1{,}6]$	0,05	$y(0{,}8) = 1{,}4$
24	$y' = x + cos\frac{y}{\sqrt{3}}$	$[1{,}2; 2{,}2]$	0,05	$y(0{,}6) = 0{,}8$
25	$y' = x + cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	$[2{,}1; 3{,}5]$	0,075	$y(2{,}1) = 2{,}5$
26	$y' = x + sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$[1{,}8; 2{,}8]$	0,05	$y(1{,}8) = 2{,}6$
27	$y' = x + sin\frac{y}{3}$	$[1{,}6; 3]$	0,07	$y(1{,}6) = 4{,}6$
28	$y' = x + sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$[0{,}6; 1{,}7]$	0,05	$y(0{,}6) = 0{,}8$

Варіант	$y' = f(x)$	$[a;b]$	h	$y(x_0) = y_0$
29	$y' = x + sin\frac{y}{\sqrt{7}}$	$[0{,}5; 1{,}2]$	0,05	$y(0{,}5) = 0{,}6$
30	$y' = x + sin\frac{y}{\pi}$	$[1{,}7; 3{,}2]$	0,1	$y(1{,}7) = 5{,}3$

Приклад розв'язування типової задачі

Знайти наближене рішення задачі Коші для звичайного рівняння першого порядку:

$$y' = \frac{y}{x} + x \cdot cos(x) = f(x, y), \quad x \in [0.5; 2.5], \quad y(0.5) = 0.239713$$

методом Ейлера, Ейлера з уточненням та Рунге-Кутта з кроком $h = 0.05$.

Метод Ейлера. За методом Ейлера наближене рішення шукається за схемою

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad y_0 = y(x_0), \quad x_i = x_{i-1} + h.$$

За цією схемою маємо:

$$x_0 = 0.5; \quad y_0 = 0.239713; \quad y' = f(x_0, y_0) = \frac{0.239713}{0.5} + 0.5 \cdot cos(0.5) =$$

$$= 0{,}918217281$$

$$x_1 = 0.5 + 0.05 = 0.55; \quad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$= 0.239713 + 0.05 \cdot 0{,}918217281 =$$

$$= 0{,}285623864; \quad y' = f(x_0, y_0) = \frac{0{,}285623864}{0.55} + 0.55 \cdot cos(0.55) =$$

$$= 0{,}988204604$$

Інші розрахунки представлено в таблиці 19.

Таблиця 21. Метод Ейлера

i	x_i	$f(x_i, y_i)$	y_i	$y_{точн}$
0	0,5	0,9182	0,2397	0,2397
1	0,55	0,9882	0,2856	0,2875
2	0,6	1,0536	0,3350	0,3388
3	0,65	1,1139	0,3877	0,3934
4	0,7	1,1688	0,4434	0,4510
5	0,75	1,2179	0,5019	0,5112
6	0,8	1,2608	0,5627	0,5739
7	0,85	1,2972	0,6258	0,6386
8	0,9	1,3268	0,6906	0,7050
9	0,95	1,3494	0,7570	0,7727
10	1	1,3648	0,8245	0,8415
11	1,05	1,3726	0,8927	0,9108
12	1,1	1,3729	0,9613	0,9803
13	1,15	1,3654	1,0300	1,0497
14	1,2	1,3500	1,0982	1,1184
15	1,25	1,3268	1,1657	1,1862
16	1,3	1,2955	1,2321	1,2526
17	1,35	1,2563	1,2969	1,3172
18	1,4	1,2092	1,3597	1,3796
19	1,45	1,1541	1,4201	1,4394
20	1,5	1,0913	1,4778	1,4962
21	1,55	1,0209	1,5324	1,5497

i	x_i	$f(x_i, y_i)$	y_i	$y_{точн}$
22	1,6	0,9429	1,5834	1,5993
23	1,65	0,8577	1,6306	1,6448
24	1,7	0,7654	1,6735	1,6858
25	1,75	0,6662	1,7117	1,7220
26	1,8	0,5605	1,7451	1,7529
27	1,85	0,4486	1,7731	1,7784
28	1,9	0,3308	1,7955	1,7980
29	1,95	0,2074	1,8121	1,8115
30	2	0,0789	1,8224	1,8186
31	2,05	-0,0543	1,8264	1,8191
32	2,1	-0,1918	1,8237	1,8127
33	2,15	-0,3331	1,8141	1,7993
34	2,2	-0,4777	1,7974	1,7787
35	2,25	-0,6252	1,7735	1,7507
36	2,3	-0,7749	1,7423	1,7151
37	2,35	-0,9265	1,7035	1,6720
38	2,4	-1,0792	1,6572	1,6211
39	2,45	-1,2327	1,6032	1,5625
40	2,5	-1,3862	1,5416	1,4962

Побудуємо графіки точних та наближених значень функції $y = y(x)$ (рис. 8).

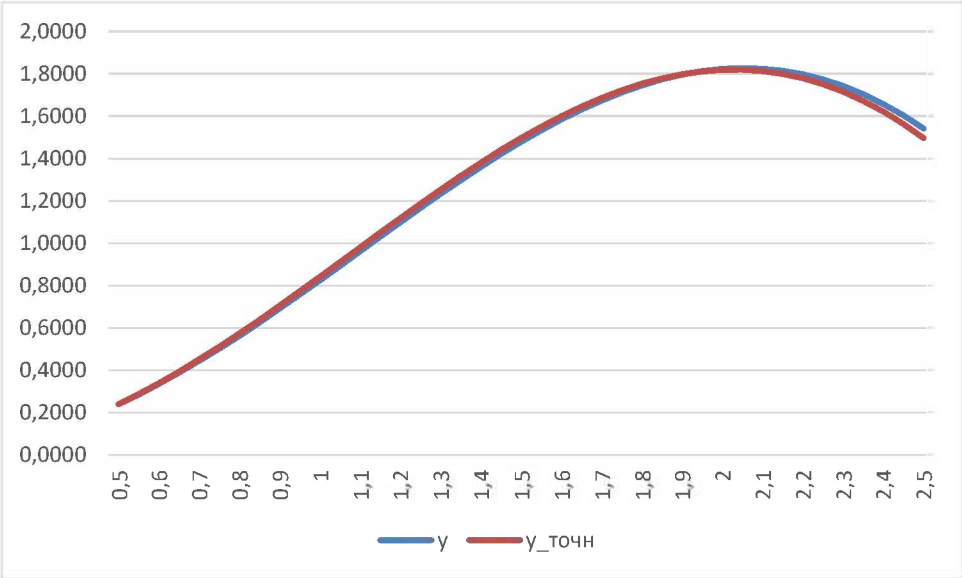

Рисунок 8. Графіки точних та наближених значень функції $\boldsymbol{y = y(x)}$

З отриманих наближених значень і графіків випливає, що метод Ейлера дозволяє добре описати функцію, що шукається на якісному рівні, але дає досить велику похибку чисельних значень. Тому метод Ейлера може бути використаний при якісній оцінці рішення шуканої функції, а для знаходження чисельних значень слід використовувати точніші методи.

Метод Ейлера з уточненням. Вихідне завдання розглянемо у наступній постановці:

$y' = \frac{y}{x} + x \cdot cos(x) = f(x,y), \quad x \in [1; 1.25], \quad y(1) =$ 0,84147, ξ=0,0001.

За методом Ейлера з уточненням наближене рішення шукається за схемою

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)\right], \qquad i = 0,1,2, \ldots \\ k = \overline{1,n}, \left|y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)}\right| < \varepsilon, \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^3), \end{cases}$$

За цією схемою маємо:

$$x_0 = 1; \quad y_0 = 0.84147; \quad y' = f(x_0, y_0) = \frac{0.84147}{1} + 1 \cdot cos(1) = 0{,}84147$$

$$x_1 = 1 + 0.05 = 1.05; \quad f(x_0, y_0) = \frac{0.84147}{1.05} + 1.05 \cdot cos(1.05)$$
$$= 1{,}381772306;$$
$$y_1^{(0)} = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1{,}381772306 + 0.05 \cdot 0{,}84147 = 0{,}910558615;$$
$$f\left(x_1, y_1^{(0)}\right) = \frac{0{,}910558615}{1.05} + 1.05 \cdot cos(1.05) = 1{,}38965;$$
$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right] = 0.84147 + \frac{0{,}05}{2} \times$$
$$\times [1{,}381772306 + 1{,}38965] = 0{,}91076.$$

Перевіряємо умову закінчення $\left|y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)}\right| = |0{,}91076 - 0{,}84147| > 0.0001$. Отже, ітерація продовжується:

$$x_1 = 1 + 0.05 = 1.05; \quad y_0 = 0.84147; \quad f(x_0, y_0) = 1{,}381772306;$$
$$y_1^{(0)} = y_1^{(1)} = 0{,}91076;$$
$$f\left(x_1, y_1^{(0)}\right) = \frac{0{,}91076}{1.05} + 1.05 \cdot cos(1.05) = 1{,}38984;$$
$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right] = 0.84147 + \frac{0{,}05}{2} \times$$
$$\times [1{,}381772306 + 1{,}38984] = 0{,}91076.$$

Перевіряємо умову закінчення $\left|y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)}\right| = |0{,}91076 - 0{,}91076| < 0.0001$. Отже, можна переходити на наступну ітерацію. Подальші розрахунки представлено в таблиці 20.

Таблиця 22. Метод Ейлера з уточненням

x	$f(x)$	$y_{i+1}^{(k-1)}$	$f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)$	$\frac{[f_i + f_{i+1}]}{2}$	$y_{i+1}^{(k)}$	Критерій закінчення
1	1,3818	0,8415			0,8415	
1,05	1,3818	0,9106	1,3896	1,3857	0,9108	ще
	1,3818	0,9106	1,3898	1,3858	0,9108	все

x	$f(x)$	$y_{i+1}^{(k-1)}$	$f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)$	$\frac{[f_i + f_{i+1}]}{2}$	$y_{i+1}^{(k)}$	Критерій закінчення
1,1	1,3898	0,9803	1,3901	1,3900	0,9803	ще
	1,3898	0,9803	1,3901	1,3900	0,9803	все
1,15	1,3901	1,0498	1,3826	1,3863	1,0496	ще
	1,3901	1,0498	1,3824	1,3863	1,0496	все
1,2	1,3824	1,1187	1,3671	1,3748	1,1183	ще
	1,3824	1,1187	1,3668	1,3746	1,1183	все
1,25	1,3667	1,1866	1,3435	1,3551	1,1861	ще
	1,3667	1,1866	1,3430	1,3549	1,1860	все

З отриманих наближених значень випливає, що метод Ейлера з уточненням дозволяє добре описати функцію, що шукається, як на якісному, так і на кількісному рівні. Тому метод Ейлера з уточненням може бути використаний для практичного застосування знаходження наближеного рішення шуканої функції.

Метод Рунге-Кутта. Вихідне завдання розглянемо у наступній постановці:

$$y' = \frac{y}{x} + x \cdot cos(x) = f(x,y), \quad x \in [0.5; 2.5], \quad y(0.5) = 0.2397.$$

За методом Рунге-Кутта наближене рішення шукається за схемою

$$\begin{cases} k_{1,i} = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_{2,i} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{1,i}\right), \\ k_{3,i} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,i}\right), \\ k_{4,i} = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_{3,i}\right), \end{cases}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right),$$

$$\Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^5), i = 0,1,2, \dots$$

За цією схемою маємо:

$x_0 = 0.5; \quad y_0 = 0.239713;$

$$k_{1,0} = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.05 \cdot \left(\frac{0.239713}{0.5} + 0.5 \cdot cos(0.5)\right) = 0.0459;$$

$$x_0 + \frac{h}{2} = 0,5 + \frac{0,05}{2} = 0,525; \quad y_0 + \frac{1}{2}k_{1,0} = 0,2397 + \frac{0,0459}{2} = 0,2627;$$

$$k_{2,0} = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_{1,0}\right) = 0.05 \cdot \left(\frac{0,2627}{0,525} + 0,525 \cdot cos(0,525)\right)$$
$$= 0.0477;$$

$$y_0 + \frac{1}{2}k_{2,0} = 0,2397 + \frac{0,0477}{2} = 0,2636; \quad x_0 + h = 0,5 + 0,05 = 0,55;$$

$$k_{3,0} = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_{2,0}\right) = 0.05 \cdot \left(\frac{0,2636}{0,55} + 0,55 \cdot cos(0,55)\right)$$
$$= 0.0478;$$

$$y_0 + k_{3,0} = 0,2397 + 0,0478 = 0,2875;$$

$$k_{4,0} = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_{3,0}) = 0.05 \cdot \left(\frac{0,2875}{0,55} + 0,55 \cdot cos(0,55)\right) = 0.0496;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_{1,0} + 2k_{2,0} + 2k_{3,0} + k_{4,0}) = 0.239713 +$$
$$+ \frac{1}{6}(0.0459 + 2 \cdot 0.0477 + 2 \cdot 0.0478 + 0.0496) = 0,2875.$$

Подальші розрахунки представлено в таблиці 21.

Таблиця 23. Метод Рунге-Кутта 4-го порядку

x_i	y_i	f_{1i} [1]	f_{2i}	f_{3i}	f_{4i}	$k_{1,i}$	$k_{2,i}$	$k_{3,i}$	$k_{4,i}$	Точне знач.
0,5	0,2397	0,9182	0,9546	0,9563	0,9917	0,0459	0,0477	0,0478	0,0496	0,2397
0,55	0,2875	0,9916	1,0256	1,0271	1,0599	0,0496	0,0513	0,0514	0,0530	0,2875
0,6	0,3388	1,0598	1,0913	1,0926	1,1227	0,0530	0,0546	0,0546	0,0561	0,3388
0,65	0,3934	1,1226	1,1513	1,1524	1,1797	0,0561	0,0576	0,0576	0,0590	0,3934
0,7	0,4510	1,1796	1,2053	1,2062	1,2305	0,0590	0,0603	0,0603	0,0615	0,4510
0,75	0,5112	1,2304	1,2530	1,2537	1,2748	0,0615	0,0627	0,0627	0,0637	0,5112
0,8	0,5739	1,2747	1,2941	1,2946	1,3123	0,0637	0,0647	0,0647	0,0656	0,5739
0,85	0,6386	1,3123	1,3282	1,3286	1,3428	0,0656	0,0664	0,0664	0,0671	0,6386
0,9	0,7050	1,3428	1,3551	1,3555	1,3660	0,0671	0,0678	0,0678	0,0683	0,7050
0,95	0,7727	1,3660	1,3747	1,3749	1,3818	0,0683	0,0687	0,0687	0,0691	0,7727
1	0,8415	1,3818	1,3867	1,3868	1,3899	0,0691	0,0693	0,0693	0,0695	0,8415
1,05	0,9108	1,3899	1,3910	1,3910	1,3902	0,0695	0,0695	0,0696	0,0695	0,9108
1,1	0,9803	1,3902	1,3874	1,3873	1,3825	0,0695	0,0694	0,0694	0,0691	0,9803
1,15	1,0497	1,3825	1,3758	1,3756	1,3669	0,0691	0,0688	0,0688	0,0683	1,0497

[1] де $f_{1i} = f\left(x_i, y_i\right)$; $f_{1i} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{1,i}\right)$; $f_{2i} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,i}\right)$; $f_{3i} = f\left(x_i + h, y_i + k_{3,i}\right)$

Продовження таблиці №21

x_i	y_i	f_{1i}[2]	f_{2i}	f_{3i}	f_{4i}	$k_{1,i}$	$k_{2,i}$	$k_{3,i}$	$k_{4,i}$	Точне знач.
1,2	1,1184	1,3669	1,3561	1,3559	1,3431	0,0683	0,0678	0,0678	0,0672	1,1184
1,25	1,1862	1,3431	1,3284	1,3281	1,3113	0,0672	0,0664	0,0664	0,0656	1,1862
1,3	1,2526	1,3113	1,2925	1,2922	1,2714	0,0656	0,0646	0,0646	0,0636	1,2526
1,35	1,3172	1,2714	1,2486	1,2482	1,2234	0,0636	0,0624	0,0624	0,0612	1,3172
1,4	1,3796	1,2234	1,1966	1,1962	1,1674	0,0612	0,0598	0,0598	0,0584	1,3796
1,45	1,4394	1,1674	1,1368	1,1362	1,1036	0,0584	0,0568	0,0568	0,0552	1,4394
1,5	1,4962	1,1036	1,0690	1,0685	1,0320	0,0552	0,0535	0,0534	0,0516	1,4962
1,55	1,5497	1,0320	0,9937	0,9931	0,9529	0,0516	0,0497	0,0497	0,0476	1,5497
1,6	1,5993	0,9529	0,9108	0,9102	0,8663	0,0476	0,0455	0,0455	0,0433	1,5993
1,65	1,6448	0,8663	0,8207	0,8200	0,7726	0,0433	0,0410	0,0410	0,0386	1,6448
1,7	1,6858	0,7726	0,7235	0,7228	0,6721	0,0386	0,0362	0,0361	0,0336	1,6858
1,75	1,7220	0,6721	0,6196	0,6189	0,5649	0,0336	0,0310	0,0309	0,0282	1,7220
1,8	1,7529	0,5649	0,5093	0,5085	0,4514	0,0282	0,0255	0,0254	0,0226	1,7529
1,9	1,7980	0,3320	0,2706	0,2699	0,2071	0,0166	0,0135	0,0135	0,0104	1,7980

[2] де $f_{1i}=f\left(x_i,y_i\right)$; $f_{1i}=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{1}{2}k_{1,i}\right)$; $f_{2i}=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{1}{2}k_{2,i}\right)$; $f_{3i}=f\left(x_i+h,y_i+k_{3,i}\right)$

Продовження таблиці №21

x_i	y_i	f_{1i}[3]	f_{2i}	f_{3i}	f_{4i}	$k_{1,i}$	$k_{2,i}$	$k_{3,i}$	$k_{4,i}$	Точне знач.
1,95	1,8115	0,2071	0,1431	0,1423	0,0770	0,0104	0,0072	0,0071	0,0038	1,8115
2	1,8186	0,0770	0,0106	0,0097	-0,0578	0,0039	0,0005	0,0005	-0,0029	1,8186
2,05	1,8191	-0,0578	-0,1265	-0,1273	-0,1970	-0,0029	-0,0063	-0,0064	-0,0098	1,8191
2,1	1,8127	-0,1970	-0,2676	-0,2684	-0,3399	-0,0098	-0,0134	-0,0134	-0,0170	1,8127
2,15	1,7993	-0,3399	-0,4123	-0,4131	-0,4862	-0,0170	-0,0206	-0,0207	-0,0243	1,7993
2,2	1,7787	-0,4862	-0,5600	-0,5609	-0,6353	-0,0243	-0,0280	-0,0280	-0,0318	1,7787
2,25	1,7507	-0,6353	-0,7104	-0,7112	-0,7867	-0,0318	-0,0355	-0,0356	-0,0393	1,7507
2,3	1,7151	-0,7867	-0,8627	-0,8635	-0,9399	-0,0393	-0,0431	-0,0432	-0,0470	1,7151
2,35	1,6720	-0,9399	-1,0166	-1,0174	-1,0943	-0,0470	-0,0508	-0,0509	-0,0547	1,6720
2,4	1,6211	-1,0943	-1,1713	-1,1721	-1,2493	-0,0547	-0,0586	-0,0586	-0,0625	1,6211
2,45	1,5625	-1,2493	-1,3265	-1,3273	-1,4044	-0,0625	-0,0663	-0,0664	-0,0702	1,5625
2,5	1,4962	-1,4044	-1,4814	-1,4822	-1,5590	-0,0702	-0,0741	-0,0741	-0,0779	1,4962

[3] де $f_{1i} = f\left(x_i, y_i\right)$; $f_{1i} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{1,i}\right)$; $f_{2i} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,i}\right)$; $f_{3i} = f\left(x_i + h, y_i + k_{3,i}\right)$

Контрольні питання

1. Метод Рунґе-Кутта. Оцінка похибки методу на кроці.
2. Основні положення методу Ейлера з уточненням. Геометрична інтерпретація.
3. Основні положення методу Ейлера. Геометрична інтерпретація.
4. Основні положення методу Ейлер-Коші. Геометрична інтерпретація.
5. Постановка задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.
6. Що таке багатокрокові методи? Як будуються обчислювальні схеми за їх допомогою?
7. Як поставлено завдання Коші для звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків?
8. Який метод є точнішим?
9. Який метод є менш точним?
10. Чим покращений метод Ейлера відрізняється від звичайного?
11. Чому методи Рунге-Кутта є популярними для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь?
12. Як порівняти ефективність методів Ейлера та Рунге-Кутта?

Практична робота № 10. Методи обчислення власних значень і власних векторів матриць

Мета: навчитися точно та наближено знаходити власні значення та власні вектори матриці за допомогою методів Крилова та ітерацій. Навчитися програмно реалізовувати ці методи.

План

1. Постановка задачі.
2. Метод Крилова.
3. Метод ітерацій.

Основні теоретичні відомості

<u>Постановка задачі</u>. Нехай задана квадратна матриця А розмірності $n \times n$

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Необхідно обчислити для неї власні значення та відповідні їм власні вектори.

Метод Крилова. Метод Крилова відноситься до точних методів знаходження власних значень та відповідних їм власних векторів.

Нехай

$$D(\lambda) = det(A - \lambda E) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n$$

є характеристичним многочленом матриці A. З урахуванням тотожності Гамільтона – Келі будемо мати:

$$A^n + p_1A^{n-1} + \dots + p_nE = \theta.$$

Поклавши $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ та $A^k y^{(0)} = y^{(k)}$, $k = 1,2,\dots,n.$ отримаємо вираз:

$$\left.\begin{array}{c} p_1y_1^{(n-1)}+p_2y_1^{(n-2)}+..+p_ny_1^{(0)}=-y_1^{(n)} \\ p_1y_2^{(n-1)}+p_2y_2^{(n-2)}+\ldots+p_ny_2^{(0)}=-y_2^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1y_n^{(n-1)}+p_2y_n^{(n-2)}+\ldots+p_ny_n^{(0)}=-y_n^{(n)} \end{array}\right\},$$

звідки можна визначити невідомі $p_1, p_2, \ldots, p_n$. У випадку, коли система не має єдиного розв'язку, необхідно обрати інший початковий вектор $y^{(0)}$ і перерахувати систему.

Для знаходження власних векторів матриці розкладемо вектор $y^{(0)}$ за власними векторами: $y^{(0)} = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \ldots + c_nx^{(n)}$.

Тоді власні вектори u_i матриці A, які відповідають власним числам λ_i, можна представити як лінійну комбінацію векторів y_i із співвідоношення

$$u_i = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} y_{nj}.$$

Метод ітерацій. Нехай A – дійсна матриця розмірності $n \times n$. Причому найбільше за модулем власне значення дійсне і є простим коренем характеристичного рівняння, тобто

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_i| \geq \ldots \geq |\lambda_n|,\ i = 1,2,\ldots n.$$

Покладемо $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ та знайдемо $y^{(k)} = Ay^{(k-1)}$, $k = 1,2,\ldots$, якщо $\lambda_1^k = \frac{y_1^k}{y_1^{k-1}}$. Якщо $\left|\lambda_1^k - \lambda_1^{k-1}\right| \leq \varepsilon$ – відбувається завершення ітераційного процесу за умови, що $\lambda_1 = \lambda_1^k$.

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Завдання:

1. Знайти всі власні значення та власні вектори для заданої матриці A за допомогою методу Крилова.

2. Знайти найбільше власне значення та відповідний власний вектор за допомогою методу ітерацій. Порівняти отримані результати.

3. Програмно реалізувати один з методів.

Варіант	Матриця A	Варіант	Матриця A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 6 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -9 & 3 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -8 & -3 & 4 \\ -13 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -8 \\ 4 & 1 & -13 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 4 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 4 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Варіант	Матриця A	Варіант	Матриця A
12	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\3 & -1 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 4\\-1 & 2 & 5\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\3 & 6 & 0\\-4 & 2 & 1\end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\0 & 6 & 3\\1 & 2 & -4\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\2 & -1 & 1\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\2 & 1 & 3\\-2 & 4 & 7\end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\2 & 0 & 1\\3 & 1 & 0\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\-1 & 3 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Приклад розв’язування типової задачі

Нехай дана матриця

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 1 & -4\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

За початковий вектор виберемо $y^{(0)} = (1,1,1)^T$.

<u>Метод Крилова</u>. Обчислимо для неї всі власні значення та власні вектори. Розрахуємо їх:

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 1 & -4\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix},$$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 1 & -4\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-11\\25\end{pmatrix},$$

$$y^{(3)} = Ay^{(2)} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 1 & -4\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-11\\25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19\\-102\\125\end{pmatrix}.$$

Складемо матричне рівняння $p_1y^2 + p_2y^1 + p_3y^0 = -y^3$:

$$\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\-11 & 0 & 1\\25 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\102\\-125\end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} 3p_1 + 3p_2 + p_3 = 19, \\ -11p_1 + p_3 = 102, \\ 25p_1 + 5p_2 + p_3 = -125. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо значення коефіцієнтів: $p_1 = -7;\ p_2 = 5;\ p_3 = 25$ і записуємо характеристичне рівняння:

$$D(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 5\lambda + 25 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо його корені:

$$\lambda_1 = 5;\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.45;\ \lambda_3 = 1 - \sqrt{6} \approx -1.45.$$

Використовуючи отримані значення, визначимо власні вектори вихідної матриці за формулою

$$u_i = q_{0j} y^{(2)} + q_{1j} y^{(1)} + q_{2j} y^{(0)}.$$

Коефіцієнти q визначаються за схемою Горнера:

$$q_{0j} = 1;\ q_{ij} = \lambda_{i0} q_{j-1i} + p_i.$$

Для $\lambda_1 = 5$ маємо:

$$q_{01} = 1;$$

$$q_{11} = 5 \cdot 1 - 7 = -2;$$

$$q_{21} = 5 \cdot (-2) + 5 = -5.$$

Для $\lambda_2 = 3.45$ маємо:

$$q_{02} = 1;$$

$$q_{12} = 3.45 \cdot 1 - 7 = -3.55;$$

$$q_{22} = 3.45 \cdot (-3.55) + 5 = -7.25.$$

Для $\lambda_3 = -1.45$ маємо:

$$q_{03} = 1;$$

$$q_{13} = -1.45 \cdot 1 - 7 = -8.45;$$

$$q_{23} = -1.45 \cdot (-8.45) + 5 = 17.25.$$

Далі можемо знайти власні вектори:

$$u_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 25 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 25 \end{pmatrix} - 3.55 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 7.25 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.9 \\ -18.25 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 25 \end{pmatrix} - 8.45 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 17.25 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.1 \\ 6.25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки отриманих результатів розгорнемо вихідну матрицю і визначимо її власні вектори методом безпосереднього розгортання.

Характеристичний многочлен для даної матриці має вигляд:

$$D(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - p_1\lambda^2 + p_2\lambda - p_3).$$

Знаходимо $p_1 = 1 + 1 + 5 = 7$.

Число діагональних мінорів другого порядку в матриці третього порядку $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$. Виписуємо ці мінори і складаємо їх:

$$p_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 5 + 5 = 5;$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -25.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 5\lambda + 25 = 0.$$

Дане рівняння ідентичне рівнянню, отриманому за допомогою методу Крилова. Скористаємося вже обчисленими коренями: $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$; $\lambda_3 = 1 - \sqrt{6} \approx -1.45$.

Визначимо, наприклад, власний вектор u_3, що відповідає $\lambda_3 = -1.45$:

$$(A - \lambda_1 E)u_3 = \begin{pmatrix} 2.45 & 2 & 0 \\ 3 & 2.45 & -4 \\ 0 & 0 & 6.45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

чи

$$\begin{cases} 2.45 \cdot u_{31} + 2 \cdot u_{32} = 0 \\ 3 \cdot u_{31} + 2 \cdot u_{32} - 4 \cdot u_{33} = 0 \\ 6.43 \cdot u_{33} = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, приймемо $u_{31} = 1$, тоді $u_{32} = -1.225$; $u_{33} = 0$.

Шуканий вектор матриці A, знайдений з точністю до постійного множника C, для власного значення матриці $\lambda_3 = -1.45$ буде:

$$u_3 = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1.225 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Взявши $C = -5.1$, одержимо вектор, що збігається до другого знака з вектором, одержаним за допомогою методу Крилова:

$$u_3 = \begin{pmatrix} -5.1 \\ 6.25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічні результати можна отримати при обчисленні власних значень u_1 та u_2.

Ітераційний метод. Обчислимо максимальне власне значення, якщо $\varepsilon = 10^{-3}$. Для кроку $k = 0$ маємо

$$y^{(1)} = Ay_1{}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda^1 = \frac{3}{1} = 3,$$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 25 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \frac{3}{3} = 1.$$

Перевіримо умову зупинки $|\lambda^2 - \lambda^1| = 2 > \varepsilon$. Отже, необхідно переходити на наступну ітерацію. Подальші розрахунки представлено в таблиці (табл. 22).

Таблиця 24. Ітераційний метод

k	y			λ	Ум. виходу
0	1	1	1		
1	3	0	5	3	2
2	3	-11	25	1	7,333
3	-19	-102	125	-6,333	18,070
4	-223	-659	625	11,737	4,827
5	-1541	-3828	3125	6,910	0,942
6	-9197	-20951	15625	5,968	0,412
7	-51099	-111042	78125	5,556	0,210
8	-273183	-576839	390625	5,346	0,123
9	-1426861	-2958888	1953125	5,223	0,076
10	-7344637	-15051971	9765625	5,147	0,049
11	-37448579	-76148382	48828125	5,099	0,032

k	y			λ	Ум. виходу
12	-189745343	-383806619	244140625	5,067	0,021
13	-957358581	-1929605148	1220703125	5,045	0,014
14	-4816568877	-9684493391	6103515625	5,031	0,010
15	-24185555659	-48548262522	30517578125	5,021	0,007
16	-121282080703	-243175241999	152587890625	5,015	0,005
17	-607632564701	-1217373046608	762939453125	5,010	0,003
18	-3042378657917	-6092028553211	3814697265625	5,007	0,002
19	-15226435764339	-30477953589462	19073486328125	5,005	0,001
20	-76182342943263	-152451206194979	95367431640625	5,003	

Отже, максимальне власне значення було знайдено на 20-й ітерації, і воно дорівнює $\lambda_1 = 5$, що відповідає власному значенню, отриманому в методі Крилова. Для розрахунку власного вектора скористаємося нормуванням, а саме:

$$y = \frac{y}{max\, y} = \frac{1}{95367431640625} \cdot \begin{pmatrix} -76182342943263 \\ -152451206194979 \\ 95367431640625 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.8 \\ -1.6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, обидва методи дають однакові власні значення та відповідні їм власні вектори.

Контрольні питання

1. Що таке власні значення та власні вектори матриці?.
2. Опишіть, як визначаються власні значення квадратної матриці. Яке рівняння лежить в основі цього процесу?
3. Основні положення методу Крилова.
4. Що таке ітераційні методи розв'язання задачі на власні значення? Чим вони відрізняються від прямих методів?
5. Як вибір початкового наближення впливає на результат ітераційного методу?
6. Чи завжди квадратна матриця має стільки власних значень, скільки у неї рядків і стовпців?
7. Як метод Крилова адаптується для вирішення задач з

комплексними власними значеннями?

8. Які критерії зупинки використовуються в ітераційних методах?
9. Яка головна мета методу Крилова у задачах на власні значення?
10. Які дані потрібно знати, щоб почати використовувати метод Крилова для обчислення власних значень?

Практична робота № 11. Розв'язування граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь

Мета: навчитися наближено розв'язувати граничні задачі для звичайних диференціальних рівнянь за допомогою методів скінченних різниць, прогону та редукції. Навчитися розробляти програми, що реалізують ці методи.

План

1. Постановка задачі
2. Метод скінчених різниць
3. Метод прогону
4. Метод редукції

Основні теоретичні відомості

Постановка задачі. Розглянемо методи розв'язування граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь на прикладі рівняння другого порядку. Нехай задане лінійне диференціальне рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

де функції p(x), q(x), f(x) неперервні, і потрібно знайти його розв'язок, що задовольняє крайовим умовам

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ – задані постійні, причому

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0.$$

Необхідно знайти розв'язок $y(x)$.

Метод скінченних різниць. Нехай $x_i = i \cdot h, \quad h = \frac{1}{n}$.

Виконаємо заміну в кожному внутрішньому вузлі x_i похідних $y'(x_i),\ y''(x_i)$ кінцево-різницевими формулами:

$$y'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h};\ y'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h};$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

В результаті отримаємо систему $(n+1)$ лінійно-алгебраїчних рівнянь відносно $(n+1)$ невідомих y_i:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad (i = \overline{1, n-1}) \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо таблицю значень шуканої функції y.

Метод прогону. Спочатку рівняння дискретизують аналогічним до попереднього методу чином:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad (i = \overline{1, n-1})$$

та приводять до вигляду $a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i$, де

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}, \quad b_i = -\frac{2}{h^2} - 1, \quad c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}, \quad d_i = x_i.$$

Таким чином, з урахуванням початкових умов отримують систему лінійних рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 y_1 + c_1 y_2 = d_1 - a_1 y_a, \quad i = 1, \\ \dots \\ a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad i = \overline{2, n-2}, \\ \dots \\ a_{n-1} y_{n-2} + b_{n-1} y_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1} y_b, \quad i = n-1, \\ c_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Після чого виконується так званий «прямий хід» – розраховуються коефіцієнти прогонки:

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1}; \quad \beta_1 = \frac{d_1 - a \cdot y_0}{b};$$

$$\alpha_i = -\frac{c}{b + a \cdot \alpha_{i-1}};$$

$$\beta_i = \frac{d_1 - a \cdot \beta_{i-1}}{b + a \cdot \alpha_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

А далі виконується «зворотній хід» – розраховуються значення шуканої функції:

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Метод редукції. Це метод до розв’язання задач для диференціальних рівнянь, зокрема граничних задач, шляхом зведення рівняння вищого порядку до системи диференціальних рівнянь нижчого порядку. Для цього вводяться змінні $y_1 = y;\ y_2 = y'$, після чого переписують початкове рівняння у вигляді системи рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y_1{}' = y_2; \\ y_2{}' = f(x, y_1, y_2). \end{cases}$$

Отримана система рівнянь першого порядку розв’язується відповідним чисельним методом.

Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Завдання:

1. Наближено розв’язувати граничну задачу для звичайного диференціального рівняння за допомогою методів скінченних різниць, прогону та редукції.

2. Проаналізувати отримані розв’язки між собою та з точним розв’язком.

3. Програмно реалізувати один із зазначених методів.

Варіант	Завдання
1	$xy'' = 2, \quad y(e) = 1,\ y'(1) = 1$
2	$y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15$

Варіант	Завдання
3	$y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos\pi x}, \quad \rightleftarrows \quad y(0) = 3, y'(0) = 0.$
4	$y'' - 4y' + 5y = 2e^x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3;$
5	$y'' = \sin^2 x \cos x\,,\ y(0) = 3,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$
6	$y'' + 16y = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1.$
7	$y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4\,, \quad y'(0)$ $= 3(1 - \ln 2).$
8	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 8;$
9	$y'' = \ln 2x, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 0;$
10	$y'' - \dfrac{y'}{x} = x,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 0;$
11	$y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 8.$
12	$y'' + 4y = 8ctg2x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4.$
13	$y'' - y = 8e^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4;$
14	$y'' = \dfrac{\ln x}{x},\ y(e) = 1,\ y'(e) = 0;$
15	$y'' + \dfrac{y'}{x} = x,\ y(1) = y'(1) = 1;$
16	$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
17	$y'' + y' = e^x, \quad y(0) = \ y'(0) = 1;$
18	$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \quad y(0) = y'(0) = 2;$
19	$y'' = \dfrac{2}{x},\ y(e) = 1,\ y'(e) = 0;$
20	$xy'' - y' = x^2 e^x,\ y(0) = -1, y'(0) = 0;$
21	$y'' - 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$
22	$y'' - y' = -2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
23	$y'' + y = 2\cos x\,, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

Варіант	Завдання
24	$y'' + y = 2\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$
25	$xy'' \ln x = y', \ y(e) = 1, \ y'(e) = 0;$
26	$y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 8.$
27	$y'' + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
28	$y'' + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
29	$y'' - 3y' = 3(2 - x^2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
30	$y'' + y'tgx = \sin 2x, \ y'(0) = 0, y(0) = -1;$

Приклад розв'язування типової задачі

Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку на проміжку [0,1]

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x\ .$$

за умови: $y(0) = y'(0) = 1$.

Знайдемо точний розв'язок рівняння. Так як $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$, то розв'яжемо спочатку відповідне рівняння

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вид:

$k^2 + 2k + 1 = 0$, його корені $k_1 = -1$, $k_2 = -1$. Отже,

$$y_{о.о.} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Так як серед коренів характеристичного рівняння немає кореня $k = 0$, а права частина заданого рівняння представляє собою багаточлен першого степеня, то $y_{ч.н.}$ шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = Ax + B,$$

де A і B - невідомі коефіцієнти.

Диференціюючи $y_{ч.н.}$:

$$y'_{ч.н.} = A\ ; \quad y''_{ч.н.} = 0$$

і підставляючи в початкове рівняння, маємо:

$$2A + Ax + B = x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в правій і лівій частині останнього рівняння:

$$\begin{array}{c|c} x^1 & A = 1, \\ x^0 & 2A + B = 0. \end{array}$$

З другого рівняння знаходимо $B = -2A$; $B = -2$. Тоді $y_{ч.н.} = x - 2$. Отже, маємо:

$$y_{о.н.} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x - 2.$$

Підставивши початкові дані $y(0) = y'(0) = 1$, отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 + 0 - 2 = 1 \\ 1 - (C_2 \cdot 0 - C_2 + C_1) e^0 = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1 - 2 = 1 \\ 1 + C_2 - C_1 = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 3 \end{cases}.$$

Отже, розв'язок задачі: $y = 3e^{-x} + 3xe^{-x} + x - 2$.

Метод скінченних різниць. Розділимо проміжок [0,1] на 5 рівних відрізків та дискретизуємо рівняння, використовуючи кінцево-різницеві формули:

$$x_i = i \cdot h, \quad h = \frac{1}{h} = \frac{1}{5} = 0.2,$$

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2 \cdot \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = x_i, \quad (i = \overline{1, n-1}) \\ \alpha_0 y_0 = 1, \\ \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = 1. \end{cases}$$

Перепишемо перше рівняння у вигляді

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + (y_{i+1} - y_{i-1}) \cdot h + y_i \cdot h^2 = x_i \cdot h^2,$$

$$y_{i+1}(1 + h) + y_i\left(h^2 - 2\right) + y_{i-1}(1 - h) = x_i \cdot h^2,$$

тоді

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ 1.2y_2 - 1.96y_1 + 0.8y_0 = 0.008 \\ 1.2y_3 - 1.96y_2 + 0.8y_1 = 0.016 \\ 1.2y_4 - 1.96y_3 + 0.8y_2 = 0.024 \\ 1.2y_5 - 1.96y_4 + 0.8y_3 = 0.032 \\ 0.2y_1 - 0.2y_0 = 1 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему отримуємо наступні значення:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 \approx 1.2 \\ y_2 \approx 1.3 \\ y_3 \approx 1.34 \\ y_4 \approx 1.34 \\ y_5 = 1.32 \end{cases}$$

Метод редукції. Введемо допоміжні змінні: $z_1 = y$; $z_2 = y'$, тоді $z_1{}' = z_2$; $z_2{}' = x^2 - 2z_2 - z_1$. Отримаємо систему

$$\begin{cases} z_1{}' = z_2; \\ z_2{}' = x^2 - 2z_2 - z_1. \end{cases}$$

Отримана система рівнянь першого порядку розв'язується відповідним чисельним методом, наприклад, методом Ейлера (табл. 23).

Таблиця 25. Розв'язок системи методом Ейлера

n	x	z_1	z_2
0	0	1	1
1	0.2	1.2	0.4
2	0.4	1.28	0.04
3	0.6	1.288	-0.152
4	0.8	1.2576	-0.2288
5	1	1.21184	-0.2288

В таблиці 24 приведено порівняння результатів отриманих скінченних різниць та редукції з точним розв'язком.

Таблиця 26. Порівняння методів

x	Метод		
	редукції	скінченних різниць	точний розв'язок
0	1	1	1
0.2	1.2	1.2	1.147
0.4	1.28	1.300	1.215
0.6	1.288	1.337	1.234
0.8	1.258	1.337	1.226

Для методу прогону розглянемо теж диференційне рівняння $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x$, але з новими умовами: $y(0) = 1;\ y(1) = 2$

Як було показано вище, це рівняння має розв'язок виду

$$y_{о.н.} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x - 2.$$

Підставивши початкові дані $y(0) = 1;\ y(1) = 2$, отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 + 0 - 2 = 1 \\ C_1 e^{-1} + C_2 \cdot 1 \cdot e^{-1} + 1 - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 - 2 = 1 \\ e^{-1}(C_1 + C_2) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_1 + C_2 = 3e \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 3e - 3 \approx 5.15 \end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі:

$$y = 3e^{-x} + 5.15xe^{-x} + x - 2.$$

Метод різницевого прогону. Згідно з методом прогону розрахуємо допоміжні коефіцієнти:

$$a = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} = 25 - 5 = 20;$$

$$b = -\frac{2}{h^2} + 1 = -50 + 1 = 49;$$

$$c = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} = 25 + 5 = 30;$$
$$d_i = x_i$$

Тоді для і=1 маємо:

$$\alpha_1 = -\frac{c}{b} = -\frac{30}{-49} = 0.612;$$
$$\beta_1 = \frac{d_1 - a \cdot y_0}{b} = \frac{0.2 - 20 \cdot 1}{-49} = 0.404$$

а для і=2 маємо:

$$\alpha_2 = -\frac{c}{b + a \cdot \alpha_1} = -\frac{30}{-49 + 20 \cdot 0.612} = 0.816;$$
$$\beta_2 = \frac{d_1 - a \cdot \beta_1}{b + a \cdot \alpha_1} = \frac{0.4 - 20 \cdot 0.404}{-49 + 20 \cdot 0.612} = 0.209$$

Подальші розрахунки представлено в таблиці 25. Заначимо, що значення $y_0 = 1, \quad y_5 = 2$ (за умовою), в той час як всі інші значення y розраховані згідно зворотного ходу. Так, наприклад,

$$y_4 = \alpha_4 y_5 + \beta_4 = 0.979 \cdot 2 + 0.045 = 2.004.$$

Таблиця 27. Метод різницевого прогону

n	x	a	b	c	d	α	β	y	Точне значення
0	0	20	-49	30	0			1,000	1,00
1	0,2	20	-49	30	0,2	0,612	0,404	1,506	1,50
2	0,4	20	-49	30	0,4	0,816	0,209	1,800	1,79
3	0,6	20	-49	30	0,6	0,918	0,110	1,949	1,94
4	0,8	20	-49	30	0,8	0,979	0,045	2,004	2,00
5	1	20	-49	30	1	1,020	-0,003	2,000	2,00

Контрольні питання

1. У чому полягає основна ідея методу скінчених різниць для розв'язання диференціальних рівнянь?
2. Як апроксимуються похідні за допомогою скінчених різниць? Наведіть приклади для першої та другої похідних.
3. Як змінюється точність методу скінчених різниць зі зменшенням кроку сітки h?
4. Як задаються граничні умови у методі скінченних різниць для крайових задач?
5. Що таке метод прогонки? У яких випадках він застосовується?
6. Як виглядає загальна структура тридіагональної системи рівнянь, для якої використовується метод прогонки?
7. Опишіть етапи прямого ходу методу прогонки. Яка роль коефіцієнтів α та β?
8. Як виконується зворотний хід методу прогонки?
9. Як працює метод редукції для розв'язування крайових задач? У чому полягає його основна ідея?
10. Які типи диференціальних рівнянь можна розв'язувати методом редукції?
11. Як у методі редукції здійснюється перетворення диференціального рівняння другого порядку у систему рівнянь першого порядку?
12. Чим метод редукції відрізняється від методу скінченних різниць або методу прогонки?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література:

1. Костюшко І. А., Любашенко Н. Д., Третиник В. В. Методи обчислень : підручник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2021. 243 с.

2. Чисельні методи розв’язання технічних задач: підручник / Н.С. Ремез, В.Б. Кисельов, А.О. Дичко, Ю.Ю. Мінаєва. Одеса : Гельветика, 2022. 186 с.

3. Коряшкіна Л. С., Одновол М. М. Чисельні методи : навч. посіб. Дніпропетровськ : Нац. гірн. ун-т, 2007. 220 с.

4. Чисельні методи : навч. посіб. / Л.О. Волонтир, О.В. Зелінська, Н.А. Потапова, І.А. Чіков. Вінниця : ВНАУ, 2020. 322 с.

5. Гончаров О. А., Васильєва Л. В., Юнда А. М. Чисельні методи розв’язання прикладних задач : навч. посіб. Суми : Сумський державний університет, 2020. 142 с.

6. Андруник В. А. Чисельні методи в комп’ютерних науках. Львів : Новий світ-2000, 2019. Т. 1. 470 с.

7. Вища математика. Числові методи : методичні рекомендації до самостійної роботи для студентів технічних спеціальностей / уклад. : І. О. Ластівка, В. К. Репета, О. Д. Глухов. Київ : НАУ, 2020. 56 с.

8. Ярошенко О.І., Григорків М.В. Числові методи : навч. посіб. Чернівці : Чернівець. нац. ун-т, 2018. 172 с.

9. Голубєва К. М., Кашпур О. Ф., Клюшин Д. А. Чисельні методи : навч. посіб. Київ : Людмила, 2022. 145 с.

10. Дейбук В. Г., Іванущак Н. М. Алгоритми та методи обчислень : навч. посіб. 2-ге вид., випр. та допов. Чернівці : ЧНУ ім. Ю. Федьковича : Рута, 2022. 140 с.

11. Бігун Я. Й. Числові методи: навч. посіб. Чернівец. нац. ун-т ім. Юрія Федьковича. Чернівці : ЧНУ ім. Ю. Федьковича: Рута, 2019. 435 с.

12. Методи та алгоритми комп'ютерних обчислень. Теорія і практика : підручник / Р. Н. Квєтний, Я. В. Іванчук, І. В. Богач, О. Ю. Софина, М. В. Барабан. Вінниця : ВНТУ, 2023. 280 с.

Додаткова література:

1. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.

2. Різницеві методи та сплайни в задачах багатовимірної інтерполяції / Р. Н. Квєтний, В. Ю. Дементьєв, М. О. Машницький, О. О. Юдін. Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. 87 с.

3. Усов А. В., Шпинковський О. А., Шпинковська М. І. Чисельні методи та їх реалізація у середовищі SCILAB : навч. посіб. Київ : Освіта України, 2013. 192 с.

4. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці : підручник. Київ : BHV, 2006. 480 с.

5. Базилевич Ю.М., Костюшко І.А., Станіна О.Д. Розв'язання системи рівнянь першого порядку у частинних похідних методами декомпозиції // Кібернетика та системний аналіз. 2023. Т. 59. № 3. С. 115 – 126.

6. Koriashkina L.S., Pravdivy A., Cherevatenko A.P. One way to solve problems of multi-zone dynamics models identification // Power Engineering, Control & Information Technologies in Geotechnical Systems. CRC Press / Balkema – Taylor & Francis Group. 2015. P. 153 – 160.

7. Koriashkina L.S., Cherevatenko A.P. The problem of multi-zone dynamics systems parametric identification // System technologies. 4 (99). Dnipropetrovsk. 2015. P. 88 – 101.

8. Норець Р. М., Коряшкіна Л. С. SIR-модель розповсюдження інфекції і маятникова міграція // Інформаційні технології: теорія і практика: Тези доповідей VI-ї всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених, 2023 р., м. Харків) [Електронний

ресурс]. Харків : ХНУМГ імені О.М. Бекетова, 2023. 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. С. 59 – 61.

Навчальне видання

Коряшкіна Лариса Сергіївна
Одновол Микола Миколайович
Станіна Ольга Дмитрівна

ПРАКТИКУМ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання 22.01.2025 р. Авт. арк. 9,1

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.