І.М. Пістунов

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

УДК 519.242:338.32.053.4
П34

Затверджено вченою радою як навчальний посібник
для студентів спеціальності 051 Економіка
(протокол № __ від __.__.2025).

Рецензенти:

Н.К. Васильєва, д-р екон. наук, проф., завідувач кафедри інформаційних систем і технологій Дніпровського державного аграрно-економічного університету;

К.Ф. Ковальчук, д-р екон. наук, проф., декан факультету економіки та менеджменту Інституту промислових та бізнес технологій Українського державного університету науки і технологій.

П34 Пістунов І.М. Економіко-математичне моделювання: навч. посібник. Дніпро : НТУ «ДП», 2024. 202 с.

Подано опис прийомів для створення лінійних та нелінійних моделей методами найменших квадратів, лінійного програмування, імітаційного моделювання, нейронних сіток, нечітких множин та планування експерименту з використанням таких програм як Excel, Statistica, Matlab.

Показано, як ці моделі можуть бути застосовані при знайденні оптимальних планів випуску продукції, використання їх у теорії ігор, транспортних задачах, тощо.

Посібник містить індивідуальні завдання, які дають поглиблене розуміння описаних методів та приймів.

Посібник базується на власних розробках автора, а також на літературних джерелах вітчизняних та зарубіжних авторів та на досвіді викладання дисциплін «Економіко-математичне моделювання», «Економічна кібернетика», «Методи прийняття управлінських рішень» за спеціальністю 051 Економіка в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».

УДК 519.242:338.32.053.4

© І.М. Пістунов, 2025
© НТУ« Дніпровська політехніка», 2025

ЗМІСТ

ВСТУП

Економіко-математичне моделювання є потужним інструментом, який використовується для аналізу та прогнозування різних економічних явищ і процесів. Його сутність полягає в застосуванні математичних методів і моделей для опису складних економічних систем і управління ними.

Перше, що варто зазначити, це те, що економіко-математичне моделювання дозволяє аналізувати взаємодію між різними чинниками економіки, такими як виробництво, споживання, інвестиції, торгівля та інші. Воно допомагає розуміти, як зміни в одному аспекті можуть впливати на інші аспекти економіки.

Друге, економіко-математичне моделювання дозволяє економістам та аналітикам проводити експерименти на віртуальних моделях, що дозволяє їм прогнозувати можливі наслідки різних політичних або економічних рішень. Це сприяє ухваленню більш обґрунтованих рішень і стратегій в умовах нестабільності та невизначеності.

Третє, економіко-математичні моделі дозволяють враховувати різні сценарії розвитку подій і визначати ймовірність виникнення тих чи інших результатів. Це особливо важливо для прогнозування ризиків і підготовки стратегій їх управління.

Четверте, моделі дозволяють економістам та політикам оцінювати ефективність різних економічних політик і заходів, а також виявляти можливі негативні наслідки перед їх введенням у життя.

П'яте, економіко-математичне моделювання є інструментом для вивчення довгострокових тенденцій і циклів в економіці, що дозволяє аналізувати їхні причини і впливати на них за допомогою відповідних політичних рішень.

Шосте, такі моделі дозволяють економістам проводити економічне прогнозування, що є важливим інструментом для бізнесу, урядових структур і інших суб'єктів, які планують свою діяльність в майбутньому.

Сьоме, економіко-математичне моделювання сприяє розвитку економічної науки, оскільки воно дозволяє економістам та дослідникам тестувати нові ідеї та концепції, розробляти більш точні теоретичні кістки і висувати нові гіпотези.

Восьме, нарешті, економіко-математичне моделювання є важливим інструментом для навчання майбутніх економістів і аналітиків, оскільки воно допомагає їм засвоювати складні економічні концепції і вміння аналізувати реальні економічні ситуації.

Отже, економіко-математичне моделювання відіграє ключову роль у сучасній економічній науці і практиці, забезпечуючи аналіз, прогнозування і оптимізацію різних аспектів економіки для підтримки прийняття обґрунтованих рішень і стратегій.

У цьому посібнику подані індивідуальні завдання, які використовують три програми Excel, Matlab та Statistica. Вказівки з роботи з цими програмами наведені нижче.

Порядок засвоєння матеріалу

1. Студент має ознайомитися з теорією, а потім із текстом чергового індивідуального завдання посібника. Ці індивідуальні завдання мають виконати всі студенти, що вивчають даний предмет і подати звіти з їх виконання у формати Excel або Word.
2. Завантажити одну з необхідних програм.
3. Провести необхідні розрахунки.
4. Кожен звіт повинен мати титульний лист за зразком, наведеним нижче, постановочну частин, де описується завдання, дані, отримані для виконання роботи, розрахунки та висновки. Останні пункт є обов’язковим. Висновки мають довести, що студент розуміє економічну сутність розрахунків, має усвідомити, що подібні розрахунки йому прийдеться робити на практиці, як спеціаліст з бізнес-аналітики.

5. Файли зі звітами треба розміщати у хмарному сховищі, вказаному викладачем, що проводить практичні заняття.
6. Якщо практична робота після перевірки не зарахована, треба виправити помилки згідно з зауваженнями викладача. Доопрацьована практична робота надається для повторної перевірки разом з першим варіантом.
7. Студент, що не виконав практичні роботи, до іспиту не допускається.
8. Приклад оформлення титульного листа

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кафедра економіки та економічної кібернетики

Економіко-математичне моделювання

Індивідуальне завдання №1

На тему: «Внутрішня торгівля»

Розробив(ла) ст. гр. 051-25-1

Косач-Квітка Л.П.

Прийняв:

д.т.н., проф. Пістунов І.М.

Дніпро

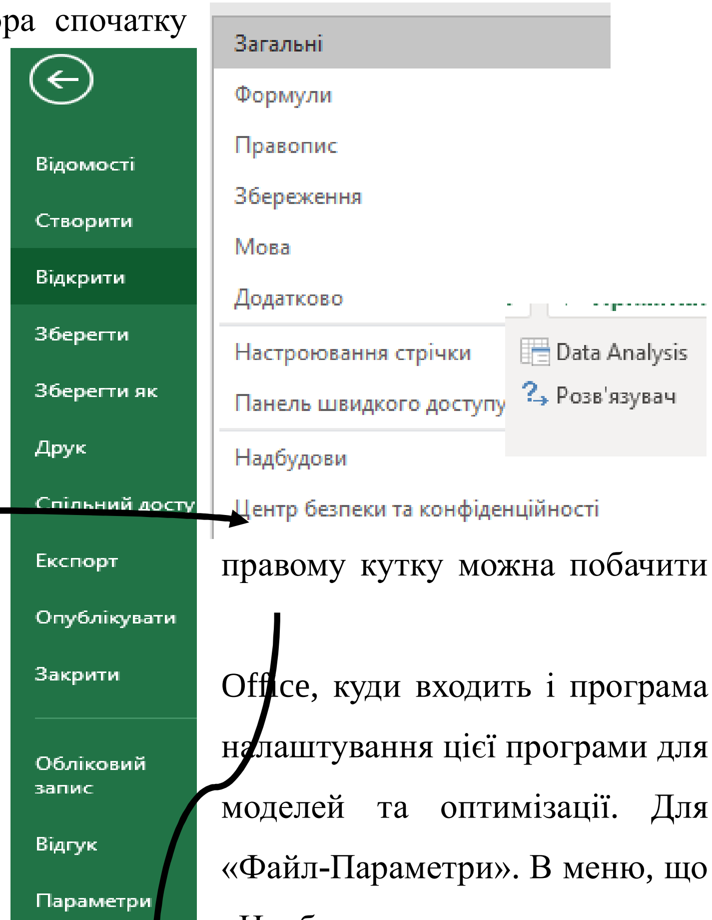
2025

Вказівки до роботи з Excel

1. Ті завдання, які студенти виконують із застосуванням табличного процесора Excel з версії Microsoft Office не пізніше 2007 року.

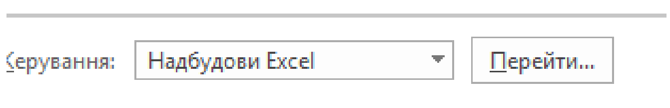
2. Числові значення кожного завдання обираються з таблиць, вміщених для кожного завдання окремо.

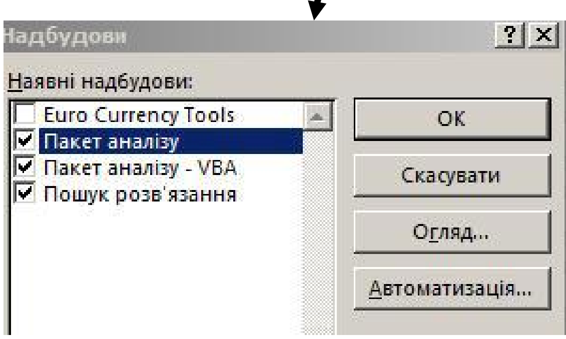
3. На сторінці процесора спочатку вставляється текст задачі, потім, значення букв, потім формула, за якою вирішується задача, далі рішення і текстові висновки.



4. Перед початком роботи потрібно налаштувати Microsoft Excel. Доступ до надбудов здійснюється через головне меню «Дані» і у правому кутку можна побачити ці надбудови .

Після інсталяції Microsoft Office, куди входить і програма Excel, необхідно провести налаштування цієї програми для розрахунків коефіцієнтів моделей та оптимізації. Для цього потрібно вибрати пункт «Файл-Параметри». В меню, що з'явиться, вибрати пункт «Надбудови».





Далі клацнути на кнопку «перейти» та відмітити вказані на рисунку позиції і натиснути «ОК» у цьому і наступних вікнах. Тепер в головному меню програми за пунктом «Дані» у правому кутку меню з’являться пункти «Data Analysis» та «Розв’язувач».

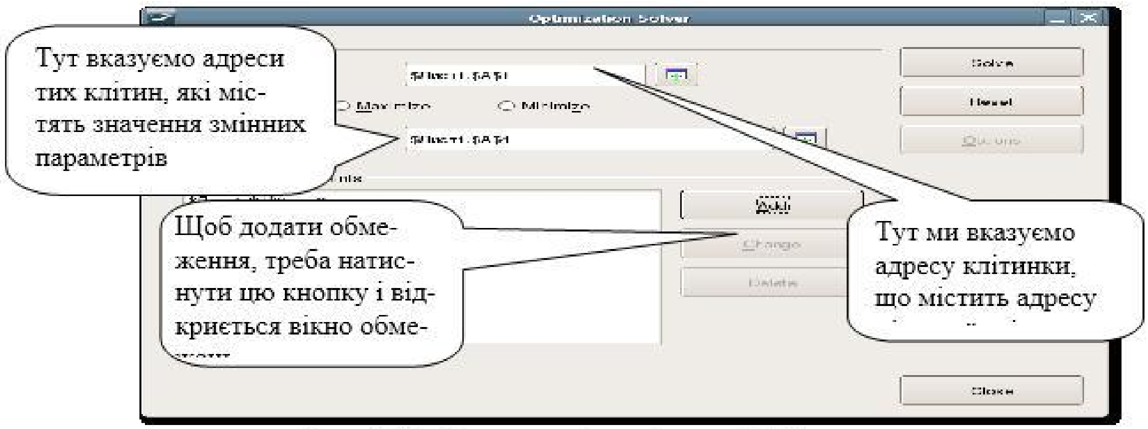
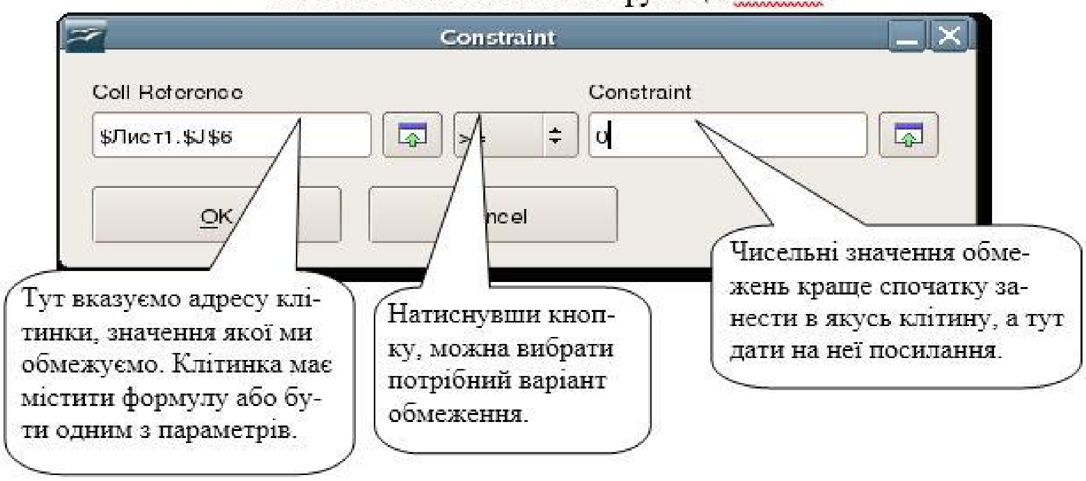
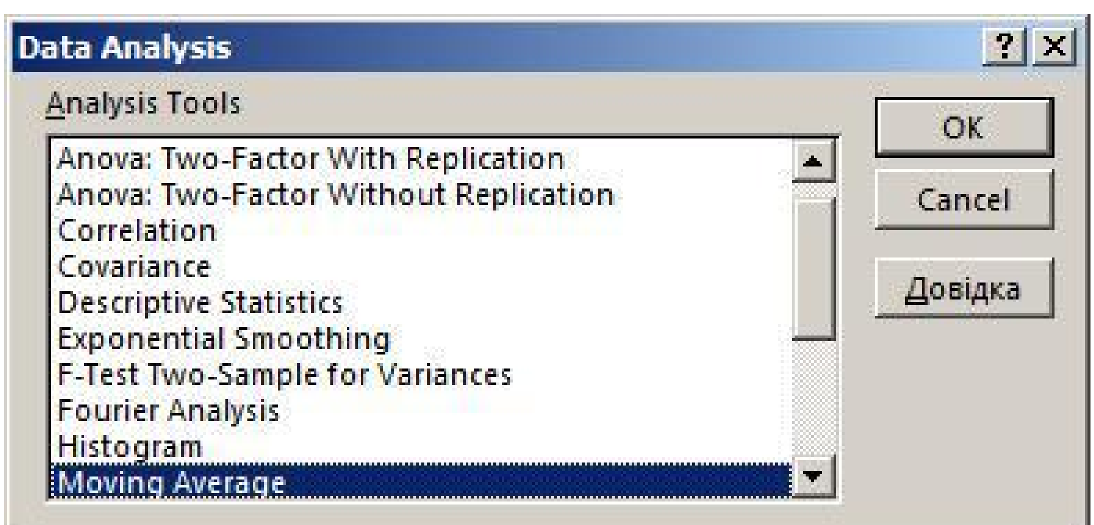


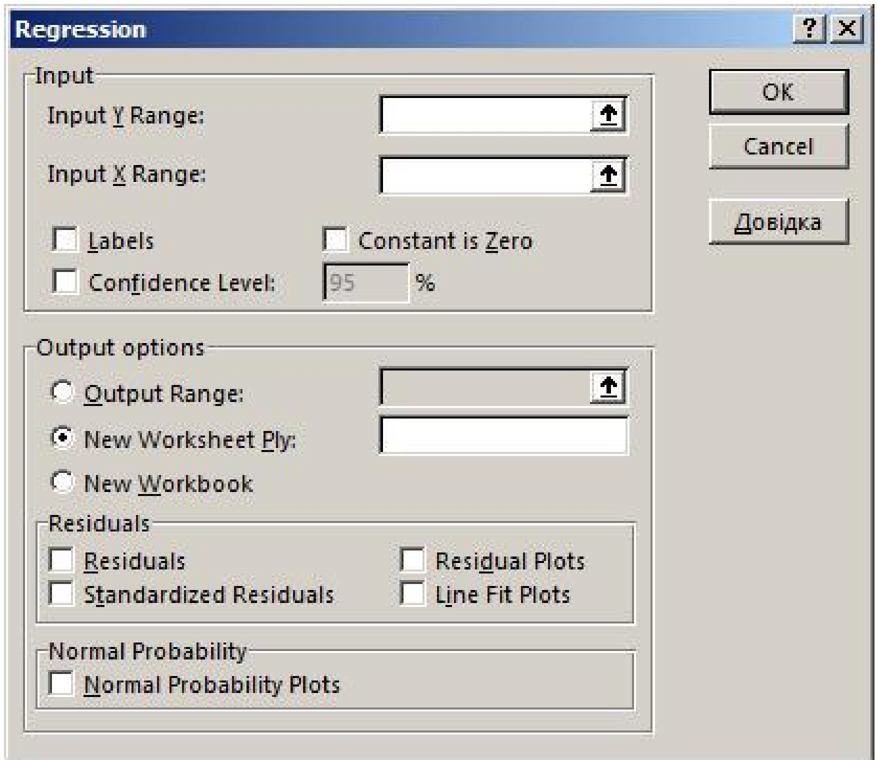
Рис. 3.12. Головне вікно функції Solver



5. При використанні функції «Аналіз даних» ви обираєте зі списку потрібний вид аналізу



Наприклад, якщо обираєте пункт «Регресія», то побачите наступне вікно



Порядок користування різними підпрограмами вам буде роз'яснено на практичних заняттях.

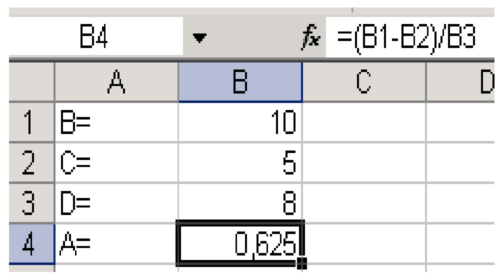
6. Завдання треба здавати в електронному вигляді на будь яких носіях у конвертах, які потрібно підписувати таким чином. Допускається здавати всі завдання на одному носії.

Задачу спочатку треба розв'язати в загальному вигляді з представлення формули рішення, в яку потім підставлені конкретні числові дані для свого варіанта. В деяких завданнях числові значення потрібно визначити за простою формулою. Наприклад, якщо в таблиці навпроти позначення C стоїть число 17, а числове значення в умові задачі подано як $0{,}01 \cdot C$, то це означає, що потрібно брати число $0{,}01 \cdot 17 = 0{,}17$.

Кожну тему супроводжують приклади вирішення із застосування таких прикладних пакетів як Open Office Calc, Microsoft Office Excel, Macsima та

MathCad. При цьому припускається, що студенти вже знайомі з порядком використання як електронних таблиць так і математичних процесорів.

Наприклад, якщо потрібно провести розрахунки за формулою $A = \dfrac{B - C}{D}$, для наступних числових значень параметрів B = 10, C = 5, D = 8, то в підрозділі буде наведено малюнок, в якому видно фрагмент вікна електронної таблиці, де колонку A займають тестові визначення невідомих у формулі, колонку B – їх числові значення. Вікно f_x містить саму формулу розрахунку, де вказано адреси клітинок, які містять числові дані.



Якщо будуть застосовані функції електронних таблиць, то буде показано їх вікно з уведеними туди параметрами

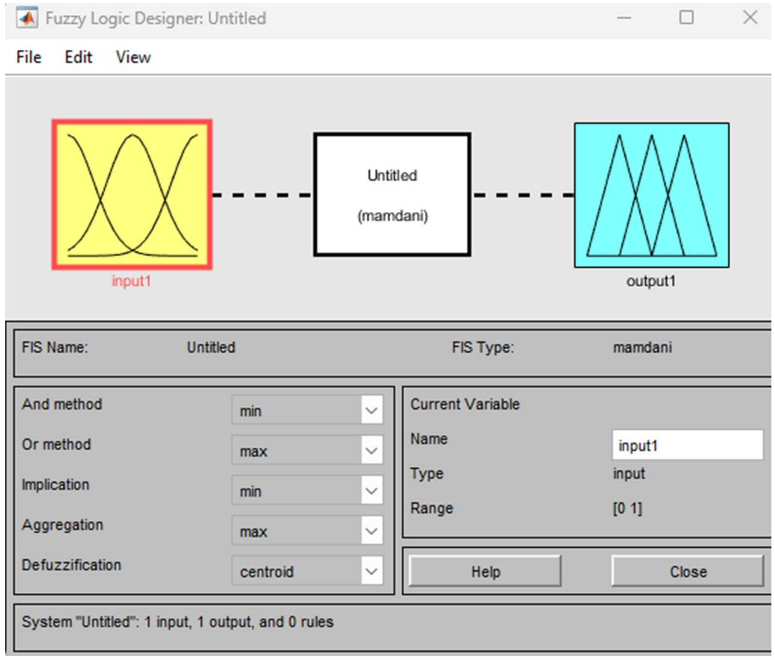
Вказівки до роботи з MATLAB

Завантажуйте програму MATLAB.

Розпакуйте пакет та інсталюйте програму згідно інструкції Readme.txt, що міститься у папці Serial.

Увімкніть програму і у вікні, що відкриється, напишіть команду fuzzy.

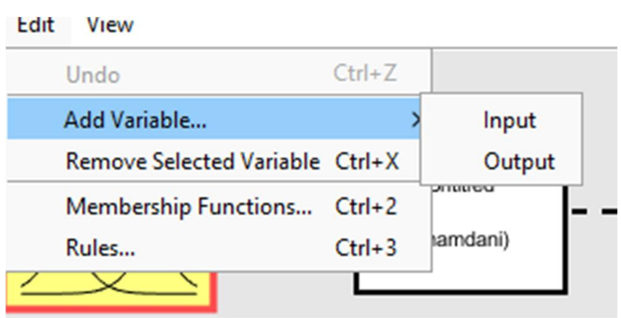
Відкриється основне вікно підпрограми, що моделює нечіткі множини**.**



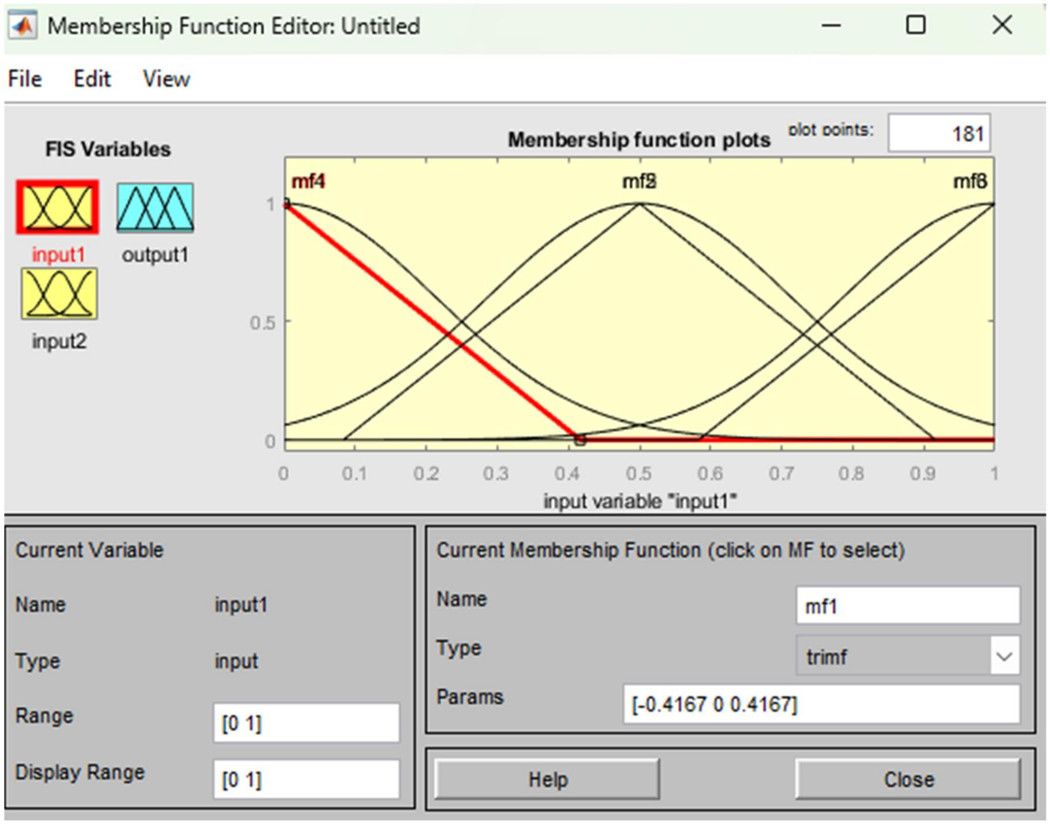
Це вікно графічно зображає стандартну конструкцію нечіткого логічного висновку виду ЯКЩО X1 TA X2 TO Y.

Тут вхідні сигнали задаються через input, а вихідний – через output.

Для збільшення їх числа скористайтеся меню Edit

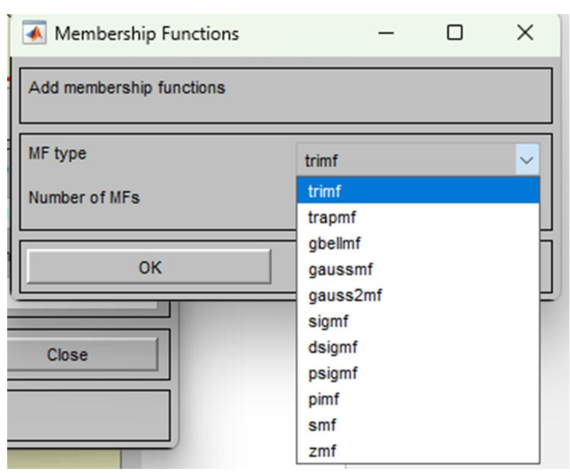


Створення виду графіку, що описує нечітку змінну виконується шляхом натискання на зображення конкретної змінної. У вікно Range ви вказуєте діапазон значень числового аргументу цієї нечіткої функції..

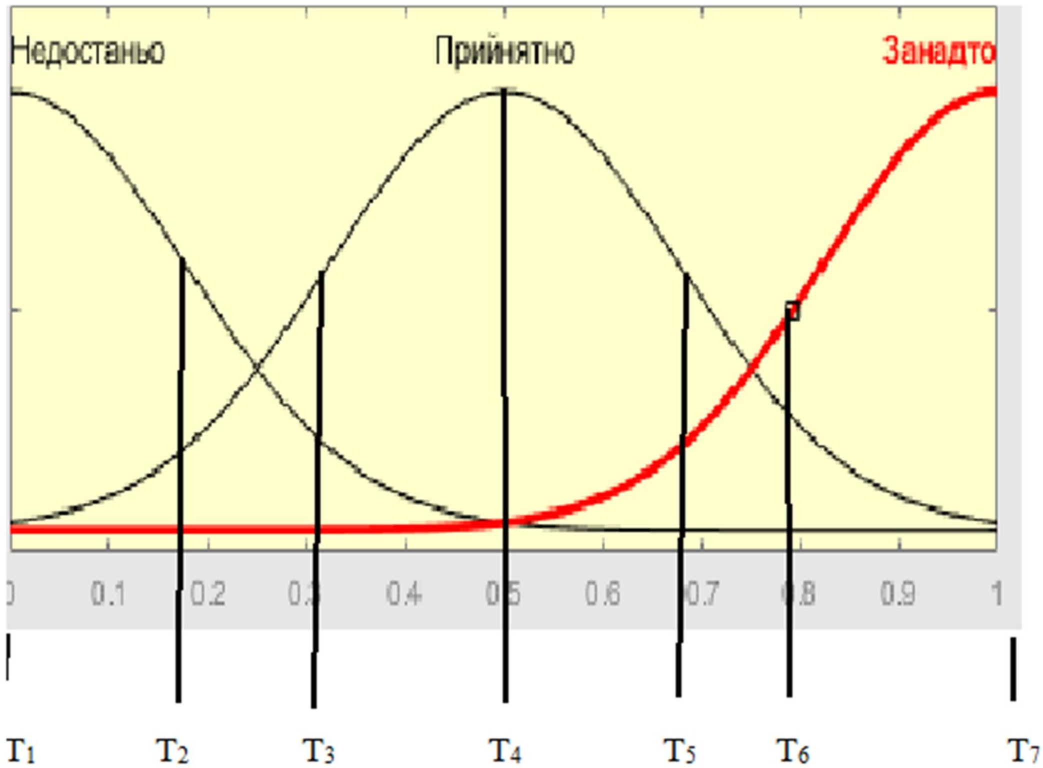


Вибір типу функції здійснюється чберез меню Edit – Add MFs…

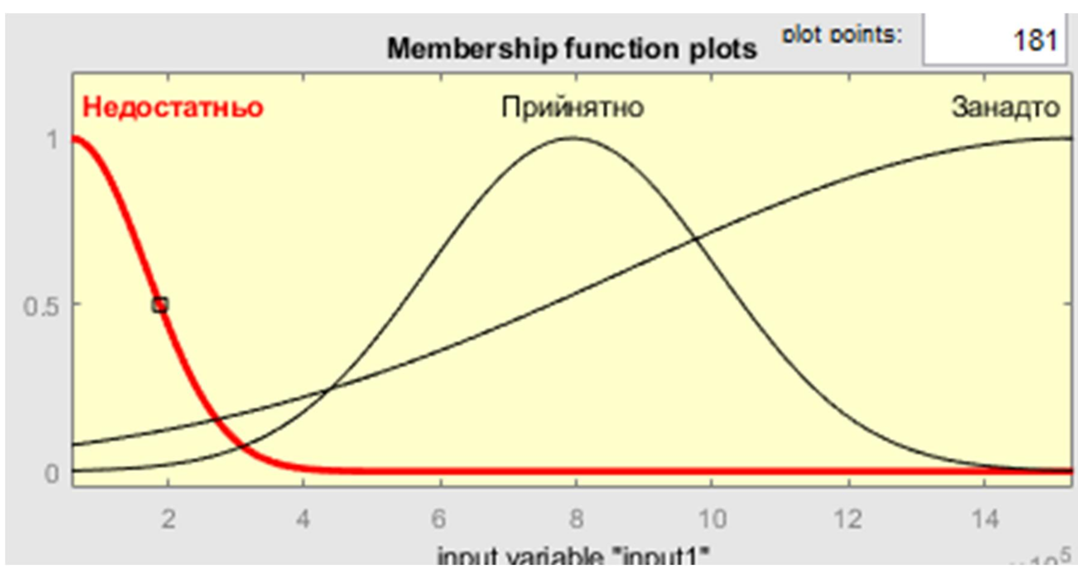
Варто пам’ятати, що кожна нечітка змінна повинна описуватися трьома нечіткими правилами типу: недостатньо, середнє та занадто.



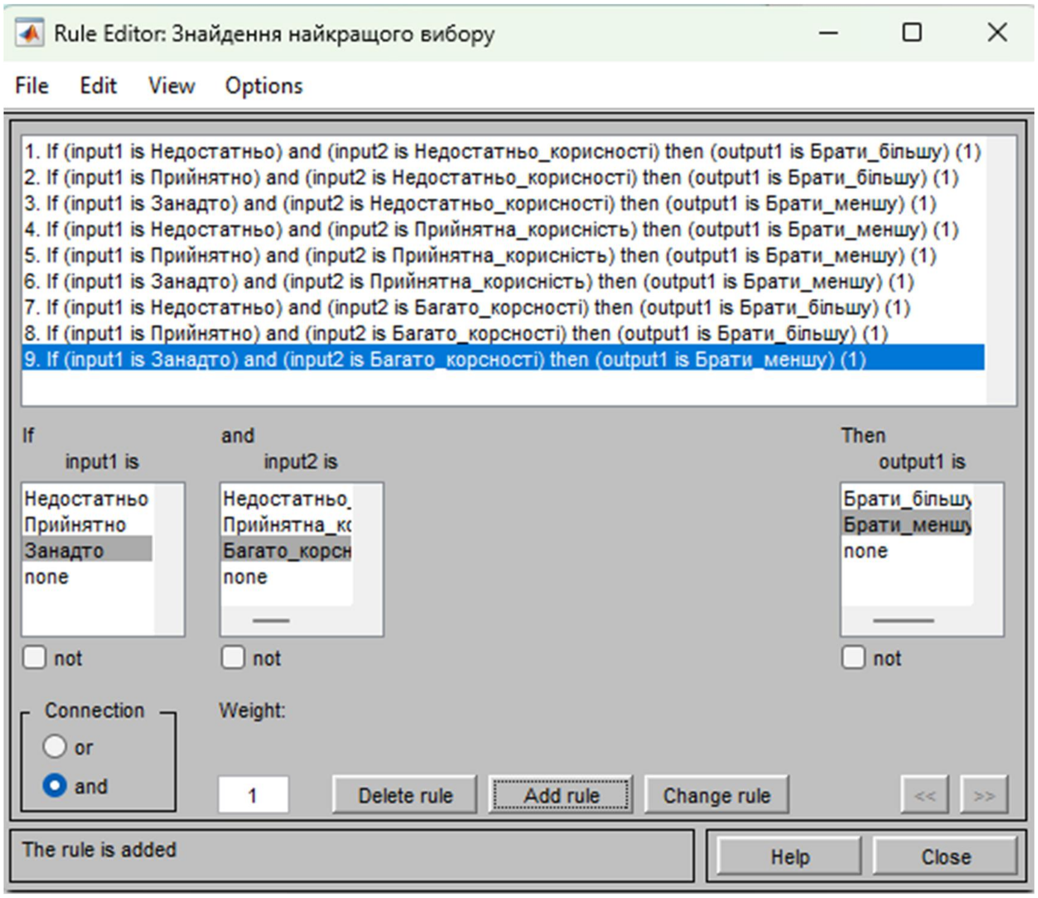
Завдання значень функції приналежності – це фактично визначення числових значень точок Т1 – Т7. Підгонка числових значень здійснюється простим рухом курсора при натиснутій лівій кнопці мишки, встановленого на кожен вид кривої.



Ось приклад такої зміни. Також кожна змінна і кожна крива цієї змінної може бути підписана її логічним значенням.

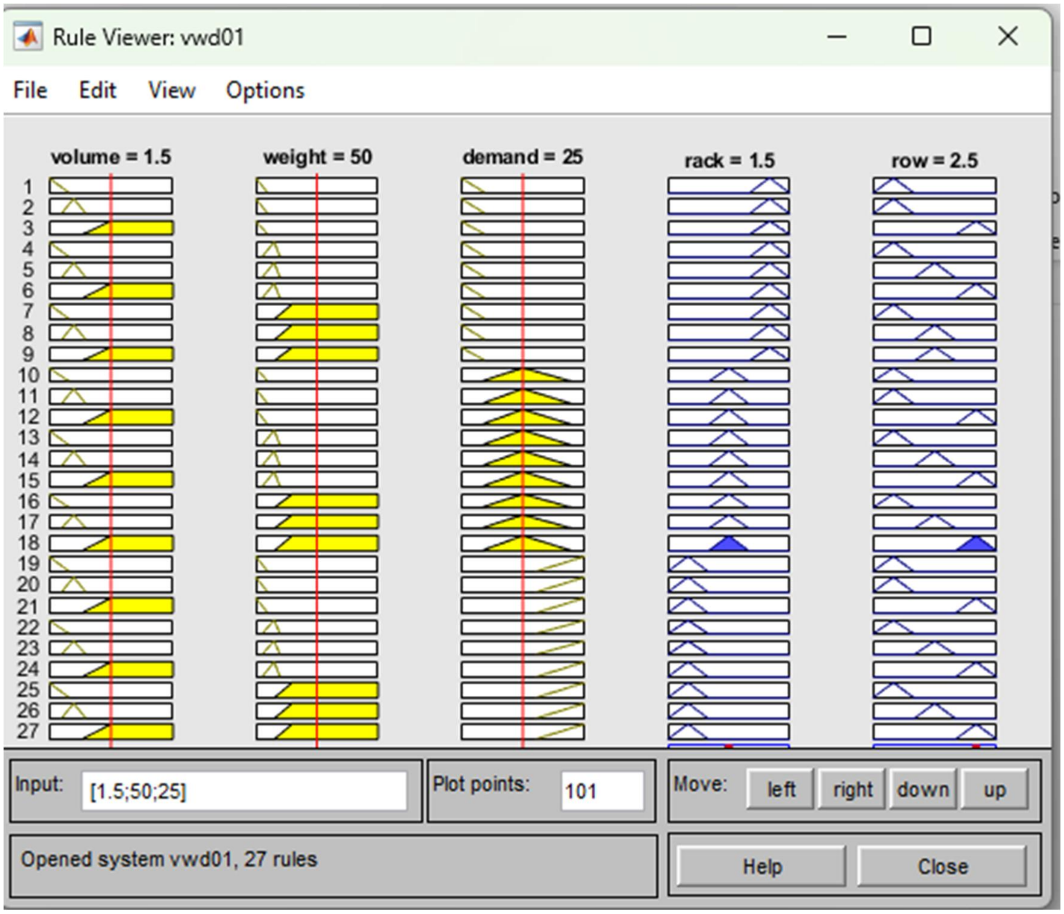


Завдання нечітких правил виконується через меню Edit – Rules або натисканням кнопки Ctlr + 3.



Тут ви послідовно задаєте кожне нечітке правило згідно логічних позначень ваших вхідних і вихідних нечітких змінних.

Натиснувши кнопку CTRL + 5 ви отримаєте графічне представлення нечіткого виводу.



Тепер у вас є можливість отримувати чіткі висновки за чіткими значення вхідних параметрів. Для зміни значення вхідного параметру, встановіть курсор мишки на червоній лінії, яка проходить спочатку через центр параметру. Натисніть ліву кнопку і рухайте мишку вліво-вправо, дивлячись на значення volume цього параметру. Коли це значення стане необхідним, відпустіть ліву кнопку і прочитайте значення volume на вихідному параметрі.

Таким чином ви можете скласти таблицю відповідних значень X та Y, яку в подальшому опишете якимось простим рівнянням методами, описаними в курсі Економетрика.

Вказівки до роботи з STATISTICA

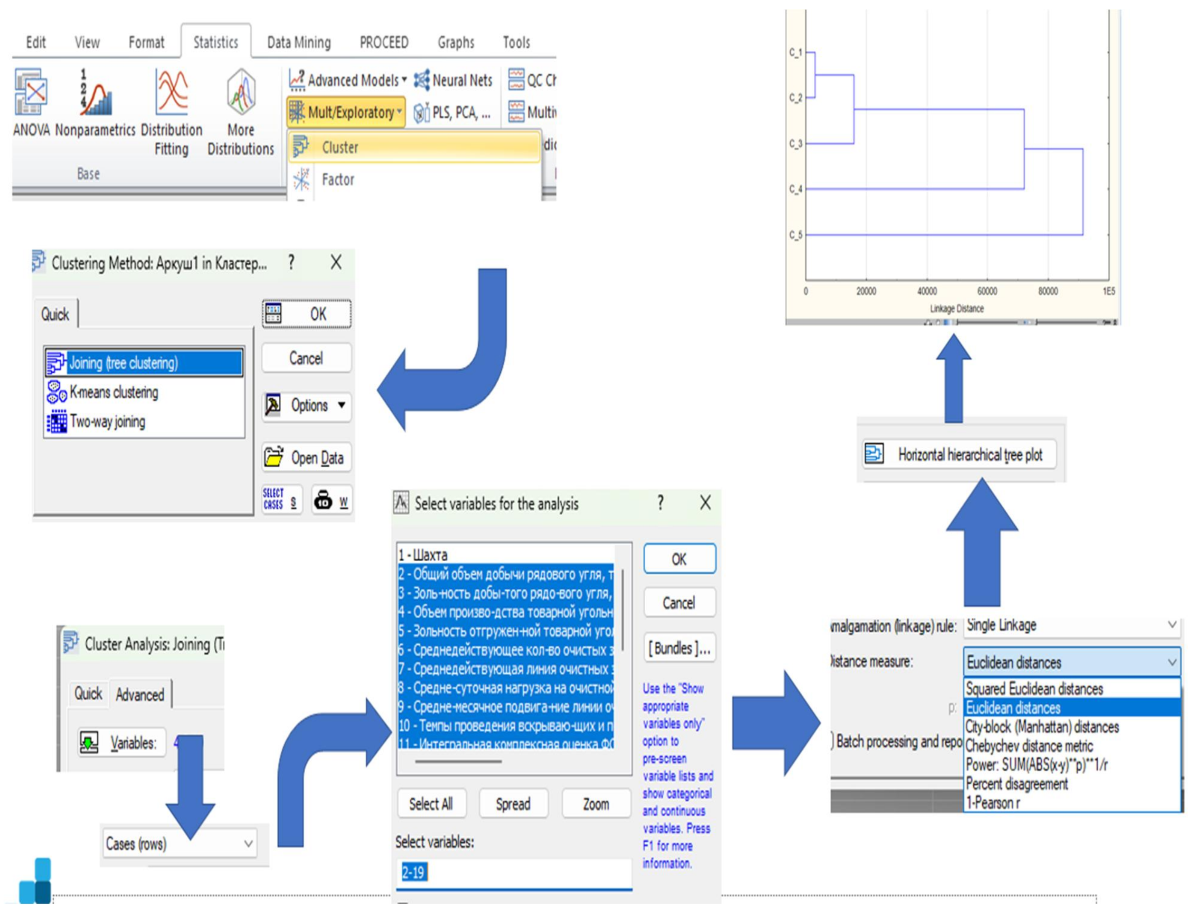
Розпакуйте на ваш комп’ютер та виконайте інсталяцію програми згідно інструкції, що міститься у папці ST10R під іменем Инструкция.txt.

Відкрийте програму та завантажте файл з даними.

Використайте пункт головного меню Statistics-Mult/Exploratory-Cluster.

Оберіть розрахунок міри відстані та отримайте графік міри близькості об’єктів.

Виділіть об’єкти у кластери згідно принципу «найбільшої сходинки».



Набуті компетенції

Після засвоєння матеріалу цього посібника, студенти мають отримати наступні компетенції

1. Глибоке розуміння різних типів моделей, включаючи лінійні, нелінійні, авторегресійні, трансцендентні, класичні імітаційні моделі, нейронні мережі та нечіткі моделі.
2. Отримання практичних навичок з програмного забезпечення: Інструкції щодо роботи з Excel, MATLAB і STATISTICA
3. Здатність до оптимізації і розв'язання складних завдань з оптимальних розрахунків, теорії ігор та розв'язання транспортної задачі.
4. Підготовка до наукових досліджень
5. Розширення теоретичних знань і отримання практичних навичок, необхідні для ефективного застосування моделювання в реальних економічних задачах.

Розділ 1.
МОДЕЛІ

Вивчивши матеріали цього розділу студенти зможуть створювати лінійні, трансцендентні та нелінійні моделі, а також використовувати нейронні сітки і нечіткі множини.

1.1. Модель

Модель – речова, знакова або уявна (мислена) система, що відтворює, імітує, відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки та/або/і характеристики об’єкта дослідження (оригіналу). Розрізняють фізичні, математичні та ін. моделі. Слово «модель» походить від латинського modulus, що означає міра, такт, ритм, величина. Воно пов'язане також із словом modus – копія, зразок.

Смислове навантаження терміну “модель” багатопланове:

а) зразок, взірцевий примірник чогось;

б) тип, марка конструкції;

в) те, що є матеріалом, натурою для відтворення;

г) зразок, з якого знімається форма для відливання в іншому матеріалі;

д) комп’ютерна модель,

е) розрахункова модель,

ж) теоретична модель (процесу, конструкції тощо).

Наприклад, модель – опис об'єкта (предмета, явища або процесу) на якій-небудь формалізованій мові, складений з метою вивчення його властивостей. Такий опис особливий корисний у випадках, коли дослідження самого об'єкта ускладнене або фізично неможливе.

Найчастіше в ролі моделі виступає інший матеріальний або уявний об'єкт, що замінює в процесі дослідження об'єкт-оригінал. Процес побудови моделі називається моделюванням. Таким чином, модель виступає як своєрідний інструмент для пізнання, який дослідник ставить між собою і об'єктом, і за допомогою якого вивчає об'єкт, що його цікавить.

Макетна модель – це реально існуюча модель, що відтворює модельовану систему у деякому масштабі

Математична модель – система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище.

При одержанні математичної моделі використовують загальні закони природознавства, спеціальні закони конкретних наук, результати пасивних та активних експериментів, імітаційне моделювання за допомогою ЕОМ. Математична модель дозволяє передбачити хід процесу, розрахувати цільову функцію (вихідні параметри процесу), керувати процесом, проектувати системи з бажаними характеристиками.

Для створення математичних моделей можна використовувати будь які математичні засоби – мову диференційних або інтегральних рівнянь, теорії множин, абстрактної алгебри, математичну логіку, теорії ймовірностей та інші. Процес створення математичної моделі називається математичним моделюванням. Це найзагальніший та найчастіше використаний в науці, зокрема, в кібернетиці, метод досліджень.

Якщо відношення задаються аналітично, то їх можна розв'язати в замкнутому вигляді (явно) відносно шуканих змінних як функції від параметрів моделі, або в частково замкнутому вигляді (неявно), коли шукані змінні залежать від одного або багатьох параметрів моделі. До моделей цього класу належать диференційні, інтегральні, різницеві рівняння, ймовірнісні моделі, моделі математичного програмування та інші.

Якщо не можна здобути точний розв'язок математичної моделі, використовуються чисельні (обчислювальні) методи або інші види моделювання.

У залежності від того, якими є параметри системи та зовнішні збурення математичні моделі можуть бути детермінованими та стохастичними. Останні мають особливо важливе значення при дослідженні і проектуванні великих систем зі складними зв’язками і властивостями, які важко врахувати. Математичний опис неперервного процесу (напр., диференційними рівняннями) являє собою неперервну математичну модель

Якщо ж математична модель описує стан системи тільки для дискретних значень незалежної змінної і нехтує характером процесів, які протікають у проміжках між ними, то така модель є дискретною (тут важливим є вибір кроку дискретності, від якого залежить точність опису реального об’єкта його математична модель). Якщо параметри об’єкта, для якого розробляють Математичної моделі, можна вважати незалежними від часу, то така система описується стаціонарною моделлю, характерна особливість якої – постійні коефіцієнти. У протилежному випадку математична модель є нестаціонарною.

Дискретна модель – математична чи імітаційна модель, змінні якої приймають тільки дискретні значення, тобто змінюються від одного значення до іншого і не приймають проміжних значень (наприклад, модель, що прогнозує рівні запасів організації, ґрунтуючись на вже відвантажених товарах). Протилежність: неперервна модель.

Алгебраїчна система (*алгебраїчна структура*) – в математиці це не порожня множина з заданим на ній набором операцій та відношень, що задовольняють деякій системі аксіом.

Основним завданням абстрактної алгебри є вивчення властивостей аксіоматично заданих алгебраїчних систем.

Формально: об'єкт $< A;\ \Omega_F;\ \Omega_R >$, де:

- A — не порожня множина,
- Ω_F — множина алгебраїчних операцій визначених на A,
- Ω_R — множина відношень визначених на A.

Множина A називається носієм алгебраїчної системи.

Множини Ω_F, Ω_R називається сигнатурою алгебраїчної системи.

Якщо алгебраїчна система не містить операцій, вона називається моделлю, якщо не містить відношень, то – алгеброю.

Якщо не розглядають ніяких аксіом, яким мають задовольняти операції, то алгебраїчна система називається універсальною алгеброю заданої сигнатури Ω_F .Концептуальна модель має такі ознаки:

1. Формулювання змістовного і внутрішнього представлення, що поєднує концепцію користувача і розробника моделі. Вона включає в явному виді логіку, алгоритми, припущення й обмеження.

2. Абстрактна модель, яка виявляє причинно-наслідкові зв'язки, властиві досліджуваному об'єкту в межах, визначених цілями дослідження. По суті, це формальний опис об'єкта моделювання, який відображає концепцію (погляд) дослідника на проблему.

Аналітична модель – один з класів математичного моделювання.

Перевагою аналітичної моделі є те, що розв'язки можна аналізувати математичними методами. Недоліком аналітичних моделей є спрощення реальних ситуацій з метою отримання аналітичних розв’язків.

В економіці - модель, що складається з системи розв'язних рівнянь, наприклад, система розв'язних рівнянь, що представляють закони попиту та пропозиції на світовому ринку.

1.2. Математичне моделювання

Математичне моделювання – метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей, дослідження цих моделей.

В основу методу покладено ідентичність форми рівнянь і однозначність співвідношень між змінними в рівняннях оригіналу і моделі, тобто, їх аналогії. Математичні моделі досліджуються, як правило, із допомогою аналогових обчислювальних машин, цифрових обчислювальних машин, комп'ютерів.

На початку 60-их років XX сторіччя було розроблено один із методів математичного моделювання – квазіаналогове моделювання. Цей метод полягає в дослідженні не досліджуваного явища, а явища або процесу іншої фізичної природи, яке описується співвідношеннями, еквівалентними відносно отримуваних результатів.

Розрізняють *геометричне. (наочне) моделювання,* здійснюване на макетах або об'ємних моделях. Вони передають в наочній формі просторові властивості об'єкту, його зовнішній вигляд, співвідношення і взаємозв’язок його частин. Такі, наприклад, модель, відтворююча форми літака, і макет мікрорайону.

Методами *фізичного моделювання* вивчають фізико-хімічні, технологічні, економічні процеси, що відбуваються в оригіналі. Раніше ці процеси вивчалися за допомогою аналогових пристроїв, придатних для моделювання різноманітних динамічних і статичних процесів. Але поява персональних комп’ютерів з сучасним математичним забезпеченням має величезні можливостями для моделювання поведінки складних систем (технічних, біологічних і економічних). Як правило, фізичне моделювання здійснюється на базі логіко-математичної моделі процесу, що вивчається, що грає роль проміжної ланки між об'єктом і його фізичною моделлю.

Фундаментальне значення у всіх областях науки і техніки має інформаційне моделювання. Як моделі тут використовуються схеми і графіки, креслення, а також символи, що формуються в слова, формули і рівняння. Ці матеріальні утворення можуть служити моделями лише у тому випадку, коли визначені допустимі для них операції перетворення і правила їх виконання. Найважливішу роль грає інформаційне моделювання, здійснюване засобами математичного і логічного апарату. Його називають логіко-математичним моделюванням. Використовувані при цьому символи (букви і цифри) і їх послідовності (формули, рівняння і нерівності) описують властивості оригіналу, що вивчаються, і є його логіко-математичною (або математичною) моделлю.

На рис. 1.1 наведено класифікацію прийомів та методів моделювання.

Аналіз економічних явищ, планування розвитку народного господарства, розробка ефективних методів управління, фізичне моделювання процесів в економічних системах і, нарешті, автоматизація планово-економічних розрахунків засновані на їх математичному або, як його зазвичай називають, економіко-математичному моделюванні. Точність і обґрунтованість аналізу і управління залежать від об'єктивності і точності віддзеркалення в моделях реальних економічних процесів, зв'язків між параметрами економічної системи, обмежень, що накладаються на неї зовнішніми умовами, достовірністю використовуваної інформації.

На рис. 1.2 представлено класифікацію методів моделювання соціально-економічних процесів і явищ.

Пояснимо наведені вище схеми для глибшого розуміння напрямків застосування методів моделювання при моделюванні соціально-економічних явищ.

Моделі лінійного програмування (параметричного, непараметричного, детерміністичного, стохастичного, цілочислового, не цілочислового) – вирішення завдань оперативно-календарного планування, технічної підготовки виробництва (складання карт, розкрою листових і смугових матеріалів, знаходження оптимальної шихти, виробничої суміші і т. п.), транспортних завдань і деяких завдань техніко-економічного планування (визначення оптимальної виробничої програми і т. і.);

- нелінійного програмування – ухвалення рішень в області техніко-економічного планування, оперативно-календарного планування, по питаннях загальної господарської політики підприємства, фінансування і кредитування;
- динамічного програмування – вибір політики заміни устаткування, оптимальний розподіл амортизаційних відрахувань на заміну устаткування і відновлення його, визначення оптимальних умов розширеного відтворення;
- блокового програмування – вирішення завдань великого розміру шляхом розбиття їх па ряд моделей з меншим числом змінних н обмежень;

- балансових методів аналізу – вирішення проблем пропорційного розвитку виробництва на різних рівнях, складання техпромфінплану підприємства в матричній формі;

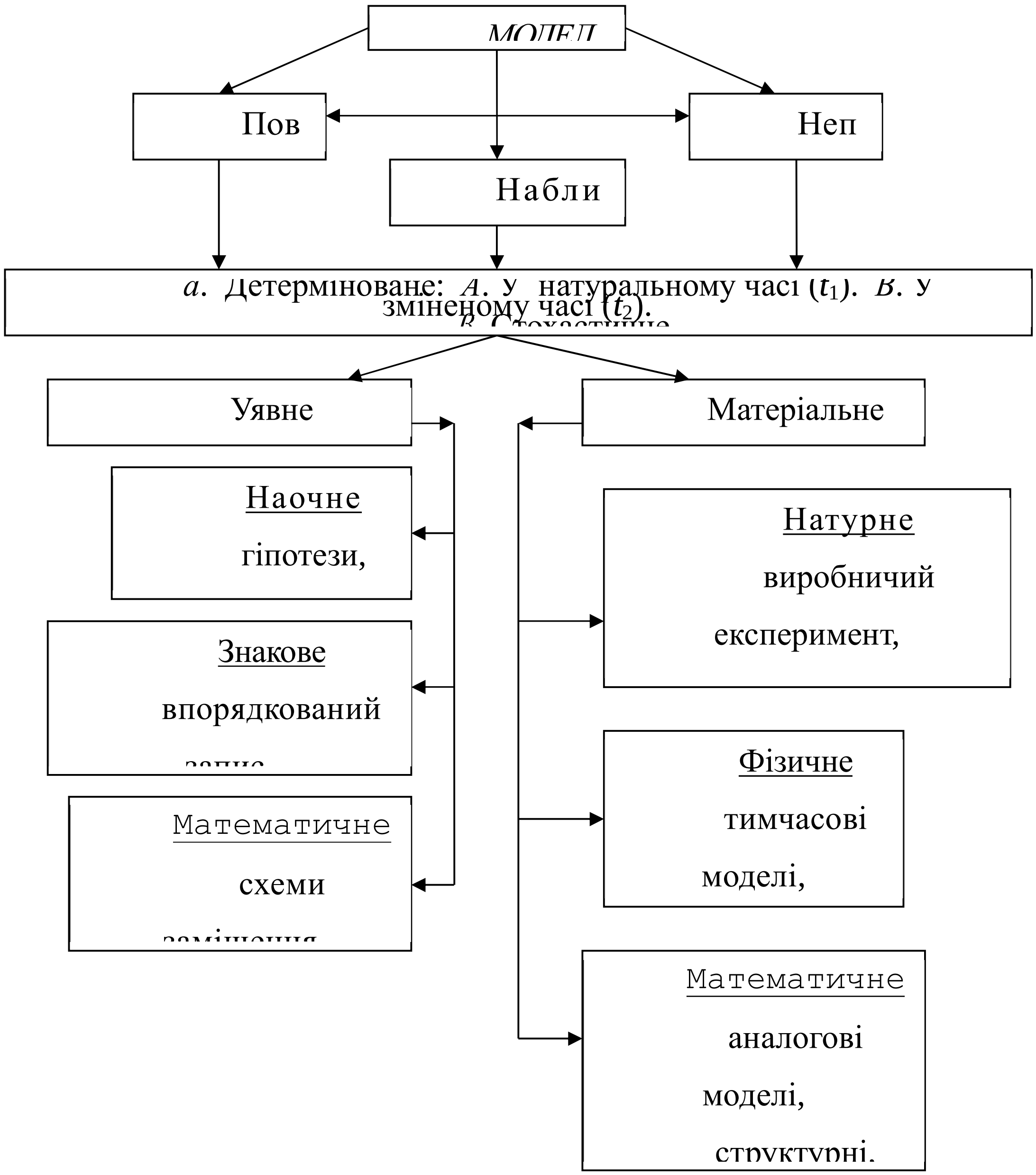


Рис. 1.1. Класифікація методів та прийомів моделювання

- мережевого планування – управління здійсненням крупних індивідуальних і рідше серійних розробок: є формою виразу ухваленого рішення (з вказівкою цілей, завдань, термінів виконання, виконавців, резервів), інструментом оперативного керівництва виконанням рішення і контролю за ходом виконання;

- транспортних завдань на мережі – розробка оптимальних схем прикріплення постачальників до споживачів;
- теорії аналізу кореляцій і регресії і теорії дисперсійного аналізу — вивчення статистичних взаємозв'язків в економічних процесах встановлення різних нормативів – трудових, вартісних, по витраті матеріалів і інших;
- теорії масового обслуговування – встановлення оптимальних співвідношень між розмірами основного і допоміжного виробництв і окремими частинами усередині кожного з них, якщо процеси в них мають елементи нерегулярності і можуть бути представлені як масове обслуговування;

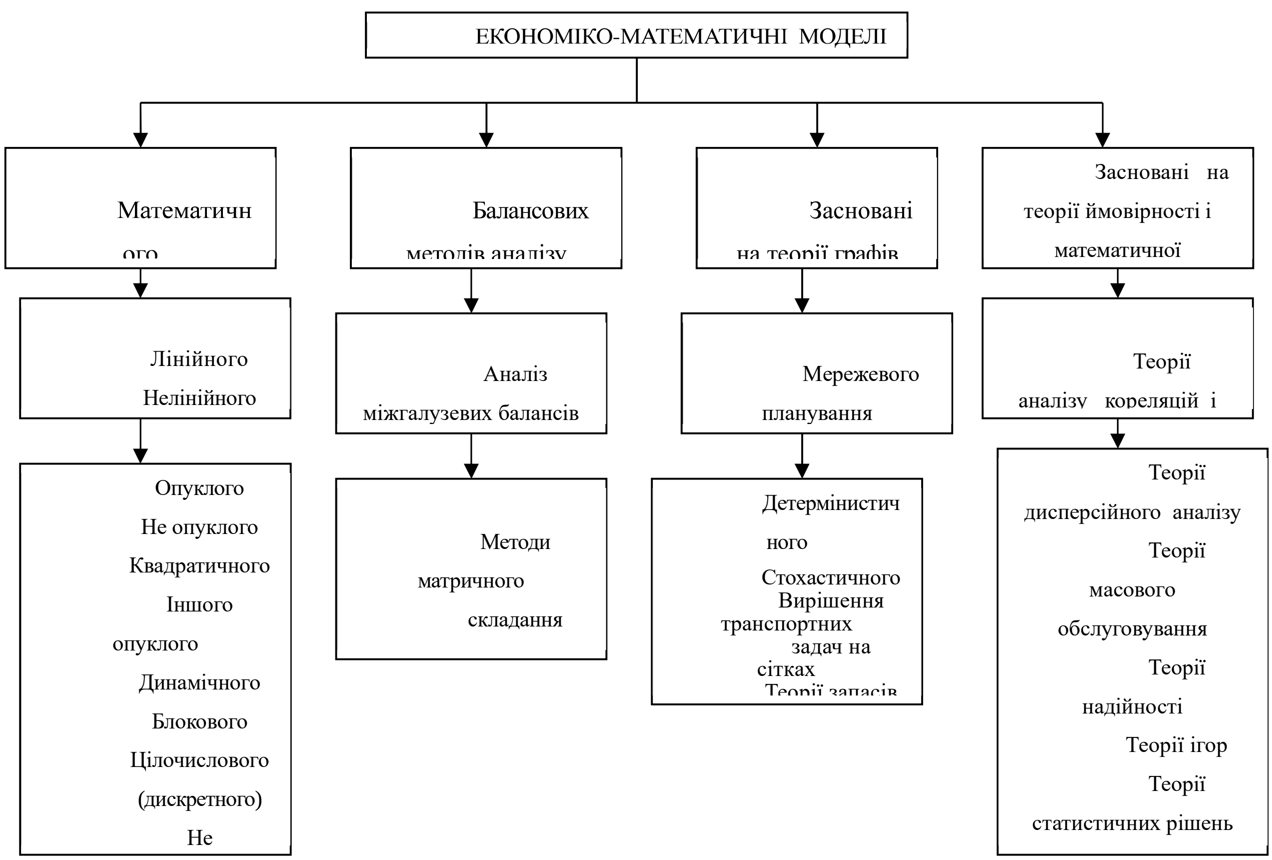


Рис. 1.2. Структура методів моделювання

- теорії надійності – вирішення проблем надійності і довговічності устаткування, підвищення якості продукції і роботи;
- теорії запасів – встановлення оптимальних розмірів оборотних фондів на підприємстві, вирішення деяких завдань оперативно-календарного планування в серійному і масовому виробництві, визначення оптимальних заділів;
- теорії ігор і теорії статистичних рішень – управління процесами взаємовідношення підприємства з ринком, страхування від стихійних лих, створення сезонних запасів сировини і матеріалів;
- теорії інформації – вдосконалення інформаційних потоків в управлінні, вирішення інших завдань, не інформаційних, але схожих за типом даних процесів;
- теорії розкладів – визначення раціональної послідовності запуску деталей у виробництво, встановлення оптимальної тривалості виробничого циклу виробів;
- статистичного моделювання – вирішення завдань теорій масового обслуговування, ігор, статистичних рішень, надійності, інформації, запасів, для яких немає власного математичного апарату.
- наочні і знакові – при оптимізації управлінських вирішень всіх видів, як і взагалі у всій економічній роботі, тому виділити переважну область їх застосування важко. Такі, як натуральні, фізичні, застосовуються при оптимізації управлінських рішень ще рідко, епізодично, що також утрудняє можливість виділення якихось конкретних областей переважного їх застосування.

1.3. Об’єкт. Його параметри і фактори

Об’єктом прийнято називати деяке явище, підприємство, механізм, технологічний процес, які є предметом вивчення дослідника.

Частіше, об’єкт зображується як прямокутник до якого проведені стрілки, деякі з яких входять у прямокутник, а деякі виходять. Ці стрілки позначають ті явища, які можна спостерігати і вимірювати за межами об’єкта. Ці явища називаються факторами. Розрізняють вхідні (позначаються стрілками до прямокутника) і вихідні (від прямокутника) фактори або входи та виходи. На рис. 1.1 показано приклад зображення об’єкта та вхідних (X_i) і вихідних ($У_i$) факторів. Вхідні фактори розділяються на фактори управління – такі фактори, значеннями яких може керувати дослідних за власним розсудом; збурення – фактори, значеннями яких керувати не можна, але їх можна виміряти; перешкоди – фактори, значеннями яких не тільки не можна керувати, але і величину перешкод частіше виміряти теж неможливо. Для того, щоб розділити ці вхідні фактори за змістом, інколи вживають окремі позначення для кожної з цих груп, наприклад, $\vec{U},\vec{Y},\vec{Z}$ відповідно. Тоді вихідні фактори позначаються як $\vec{X}$.

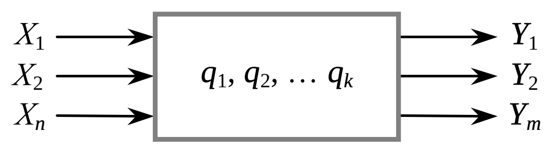


Рис. 1.3. Графічна схема об’єкта

Кожен об’єкт має власну структуру, яка, після взаємодії зі вхідними факторами, перетворює їх на вихідні фактори за певними правилами. Ці правила можуть бути виражені як вербально (словами) так і так допомогою системи рівнянь. Внутрішня структуЗра об’єкта характеризується параметрами, які представляють собою як правила перетворення вхідних факторів так і чисельні значення. На рис.1.1 вони позначаються як q_i, але існують і інші позначення такі як a_i, h_i тощо. Довільний реальний об’єкт має незліченну кількість властивостей (характеристик), і за кожною з них його можна віднести до тієї чи іншої системи як її елемент. Якщо, скажімо, розглядати університет як окрему систему, то з погляду його ректора, проректора з фінансово-господарських питань, головного бухгалтера, начальника служби охорони він складатиметься з різних підсистем та елементів, наділених неоднаковими функціональними властивостями.

Іншим прикладом може бути такий об’єкт як прибуток після сплати податків. Факторами управління для нього будуть – дохід та витрати, факторами збурення – ставки податків, а фактори перешкод у цьому випадку можна вважати економічну кон’юнктуру, яка наперед невизначеним чином впливає на витрати та доходи. Вихідним же фактором розглянутого об’єкту є сума чистого прибутку.

Введемо ще одне поняття – *внутрішній стан об’єкту.* З його допомогою кількісно характеризуються його істотні властивості. Так, з внутрішнім станом об’єкту – цеху, можуть бути співставлені наявні потужності, трудові ресурси, запаси предметів праці і т. д. Отже, внутрішній стан елементу відображає те, що цікавлять нас потенційні характеристики реального об'єкту - кількість речовини, енергії, інформації, його пропускну спроможність і ін. Зіставимо з ним n – вимірний вектор g (з безперервними або дискретними компонентами) так, що попарно помітним станам відповідають відповідні значення цього вектору. Його компоненти інколи $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ називають координатами стану або точками елементу, що відображає в n - вимірному просторі станів. Вектори і множина допустимих значень їх компонентів характеризують можливі стани елементів і інтенсивності їх входів і виходів.

Кількісні характеристики властивостей реального об'єкту в загальному випадку залежать від зовнішніх дій, і їх зміни обумовлюють зміни його стану. Так, виробнича потужність цеху змінюється з інтенсивністю, визначуваною інтенсивністю капітальних вкладень, що направляються на її приріст. Інтенсивність зміни стану оперативного накопичувача ЕОМ визначається інтенсивністю надходження в нього інформації.

1.4. Система

Системою є сукупність об'єктів і процесів, званих компонентами або елементами, взаємозв'язаних і таких, що взаємодіють між собою, які утворюють єдине ціле, таке, що володіє властивостями, не властивими складовим його компонентам, узятим окремо.

Функціонування елементів системи як єдиного цілого забезпечується *зв'язками* між її елементами. У технічній системі вони формуються при її проектуванні, в біологічній вони виникають природним чином в процесі зародження і розвитку організму., У економічних системах зв'язки можуть організовуватися в плановому порядку або складатися стихійно під впливом ринкового механізму. Склад елементів і спосіб їх об'єднання визначають структуру системи.

Кажучи про систему, зазвичай мають на увазі сукупність елементів (об'єктів), яка реалізовує між ними певні відносини, що цікавлять нас, з фіксованими властивостями. Економічною системою є, наприклад, підприємство як сукупність цехів, біологічною – система кровообігу, що включає серце і кровоносні судини, технічною – електронно-обчислювальна машина, що складається з комплексу пристроїв для обробки інформації.

Ці приклади ілюструють інтуїтивні уявлення про систему як об'єкт, об'єднуючий множину матеріальних елементів, які функціонують як єдине ціле.

Будь-який об'єкт, прийнятий як відправний, може бути представлений як елемент (або підсистема) деякої системи вищого рангу і як система по відношенню до деякої сукупності підсистем нижчого рангу. Рухаючись вгору по ступенях цієї ієрархії, ми прийдемо до «універсальної» системи – Всесвіту, рух вниз приведе нас до її первинного елементу – елементарної частинки. Тому при аналізі і проектуванні конкретної системи виникає проблема визначення тієї «ділянки» ієрархії, яка входить в її компетенцію, і вибору елементу, що приймається як «первинний».

Взаємодії реальних об'єктів, що охоплюються конкретною системою, і її взаємодії із зовнішнім середовищем такі ж різноманітні, як властивості об'єкту і середовища. Система має вхідні та вихідні фактори, має і свої параметри, але ці останні вже визначаються параметрами об'єктів, які складають систему. Систему також можна описати словесно, математично і графічно.

При аналізі і проектуванні системи беруть до уваги лише ті зв'язки, які істотно впливають на її функціонування; останніми нехтують, а у разі потреби систему захищають від їх «паразитного» впливу, що розглядається як обурення (перешкоди). Вживаючи поняття вхідних факторів (входів) елементу мають на увазі, що вони відображають найбільш істотні зв'язки (матеріально-речові і інформаційні) між об'єктами. Таким чином, поняття «система» є абстракцією не тільки відносно властивостей охоплюваних нею реальних об'єктів, але і відносно зв'язків між ними.

При описі системи для кожного з її елементів треба брати відповідні йому рівняння зв'язку між його входами і виходами з тією обмовкою, що функціональні змінні перейменовуються відповідно до прийнятих в системі. Об'єднані таким чином рівняння складуть систему рівнянь, які дають математичний опис системи.

На рис. 1.4 представлена спрощена схема підприємства як об'єкту управління. Аналіз таких об'єктів заснований на комплексному його розгляді як єдиного цілого, такого, що складається з взаємозв'язаних елементів, а також на з'ясуванні впливу цих елементів на функціонування всієї системи.

Частина системи, яка сприймає дію навколишнього середовища, називається входом системи, частина, яка впливає на навколишнє середовище і інші системи, називається виходом.

На вхід системи поступає три типи дій:

– вхідні керовані змінні $\vec{U} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ є вектором управлінь. У виробничо-економічних системах це. як правило, цілеспрямовано змінні ресурси (трудові. енергетичні, матеріальні);

– вхідні некеровані (але контрольовані) змінні $\vec{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ під якими у виробничій економіці розуміють, як правило, якість змінних цілеспрямовано ресурсів (якість сировини, кваліфікація фахівців, види енергетичних ресурсів і ін.). Їх називають збурення;

– неконтрольовані чинники $\vec{Z} = \{z_1, z_2, ..., z_k\}$ є вектором перешкод. По суті, це вектор, про який менеджерові відомо дуже мало або взагалі нічого не відомо. Тоді цей вектор взагалі не вра Збурення ɔ деякі статистичні характеристики компонентів вектору відомі, то їх слід враховувати при розробці моделі системи. Про наявність збурень, що діють на систему можна здогадатися тоді, коли при незмінних факторах керування та перешкод, вихідні фактори починають змінюватися.

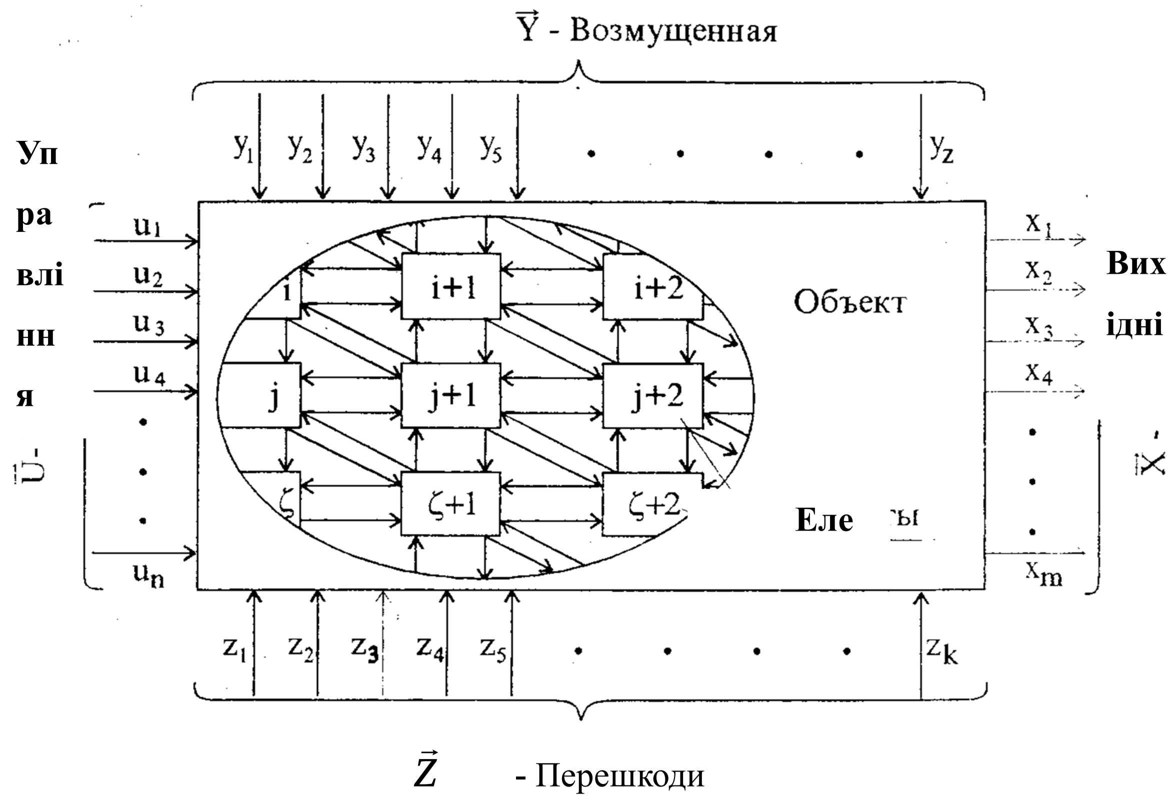


Рис. 1.4. Спрощена схема підприємства як об'єкту управління.

Будь-яка економічна, виробничо-економічна система призначена для перетворення векторів вхідних дій $\vec{Y}, \vec{U}, \vec{Z}$ у вектор вихідний змінної $\vec{X} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. У цьому і полягає суть виробничих процесів, що перетворюють матеріальні, енергетичні і трудові ресурси в продукт, що оцінюється економічними показниками (наприклад, собівартістю).

На рис. 1.3 вихідні змінні $x_1, x_2, ..., x_m$ характеризують результати роботи досліджуваної системи, а вектор $\vec{X}$ носить назву вектору стану.

Промислове виробництво, представлене у вигляді структури на рис. 1.2 можна розглядати як керований об'єкт. Процес виробництва тієї або іншої продукції завжди порушуватиметься унаслідок зміни вектору обурень $\vec{Y}$ об'єкту, що діє на вході. На практиці обуреннями є все ті випадкові дії на об'єкт, які відхиляють параметри виробничого процесу від заданих рівнів. На сучасних виробництвах можна виділити певні групи збурень:

y_1 – технологічні, такі, що характеризують відхилення параметрів процесів і засобів праці; y_2 – психофізичні і медичні, пов'язані із захворюванням працівників і коливаннями їх індивідуальної продуктивності праці залежно від зовнішніх умов; y_3 – соціальні, пов'язані з порушенням трудової дисципліни; y_4 – кліматичні; y_5 – організаційні і інформаційні, пов'язані з недосконалістю організації виробництва, планування, обробки і відображення інформації і ін. Таким чином, можна записати, що $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$.

Необхідно відзначити, що перераховані вище збурення діють на об'єкт із зовнішнього середовища, тому можуть бути охарактеризовані як первинні збурення (чинники, що збурюють). Треба також сказати, що дія первинних збурень породжує вторинні збурення, точка додатку яких вже не співпадає з первинними обуреннями із-за наявності внутрішніх зв'язків між елементами, що входять в об'єкт.

Організована (керована) виробнича система(об’єкт) повинна функціонувати таким чином: при зміні компонент $y_1, ..., y_r$ вектору збурень $\vec{Y}$ компоненти $u_1, ..., u_n$ вектору управлінь $\vec{U}$ змінюються так, щоб компоненти $x_1, x_2, ..., x_m$ вектору стану $\vec{X}$ відповідали плановим значенням. Такий об'єкт називається керованим.

Важливою властивістю складних систем є емерджентність – тобто наявність таких специфічних властивостей системи, які не випливають з властивостей, притаманних її елементам, а виникають у процесі їхньої взаємодії як наслідок відповідних кооперативних ефектів. Саме емерджентні властивості економічних систем є найменш доступними для спостереження та вимірювання, що вельми утруднює дослідження таких систем та управління ними. Загальні закономірності появи нових властивостей, породжуваних об’єднанням економічних об’єктів, явищ та процесів, можна виявити та кількісно описати, лише проаналізувавши значний обсяг інформації. Емерджентність легко зрозуміти на прикладах статистичної рівноваги: деякі ознаки можуть бути характерними для всієї статистичної сукупності явищ, не будучи характерцілого по окремих об'єктах і для виведення його властивостей на основі розглянутих властивостей складових його частин.

1.5. Підготовка даних до розрахунків

Будь-який вид моделювання починається з формування таблиці спостережень, в якій вхідні фактори розташовуються у лівих колонках, а вихідні – у правих. Запис чергового спостереження здійснюється в один рядок таблиці водночас усіх факторів. Якщо попередня гіпотеза про зв’язок вхідних і вихідних факторів включає в себе і час, цей фактор записується у першій колонці. Таким чино, загальний вид таблиці спостережень наступний (табл.. 1.1). Така таблиця називається вибіркою числових значень факторів соціально-економічної системи.

Таблиця 1.1

Приклад формату таблиці спостережень за факторами соціально-економічної системи

Час або дата спостереження	Вхідні фактори				Вихідні фактори			
	X_1	X_2	…	X_n	Y_1	Y_2	…	Y_m

З таблиці видно, що кількість вхідних факторів – n, а вихідних – m. Саме для таблиць такого виду і буде вестися подальше викладення матеріалу, причому, всі фактори – вхідні і вихідні – будуть позначатися як X_i.

Зібрані дані необхідно проаналізувати. Цей аналіз проводиться окремо для кожного фактору полягає у визначенні декількох параметрів, що їх характеризують. Це середнє, дисперсія, стандарт та варіація.

Середнє – це один з найбільш розповсюджених прийомів узагальнень. Правильне розуміння сутності середньої визначає її особливу значимість в умовах ринкової економіки, коли середнє через одиночне і випадкове дозволяє виявити загальне і необхідне, виявити тенденцію закономірностей економічного розвитку.

$$M_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\ , \qquad (1.1)$$

де X_i –окреме значення фактору; N – число одиниць сукупності (кількість вимірів цього фактору).

Але середня величина – це абстрактна, узагальнююча характеристика ознаки досліджуваної сукупності, вона не показує будівлі сукупності, що дуже істотно для її пізнання. Середня величина не дає представлення про те, як окремі значення досліджуваної ознаки групуються навколо середньої, чи зосереджені вони поблизу чи значно відхиляються від неї. У деяких випадках окремі значення ознаки близько примикають до середньої арифметичної і мало від неї відрізняються. У таких випадках середня добре представляє всю сукупність. В інші, навпаки, окремі значення сукупності далеко знаходяться від середньої, і середня погано представляє всю сукупність.

Коливання окремих значень характеризують показники варіації, через яку виявляється більшість статистичних закономірностей. Під варіацією в статистиці розуміють такі кількісні зміни величини досліджуваної ознаки в межах однорідної сукупності, що обумовлені перехресним впливом дії різних факторів.

Аналіз систематичної варіації дозволяє оцінити ступінь залежності змін у досліджуваній ознаці від визначаючих її факторів. Наприклад, вивчаючи силу і характер варіації у сукупності, можна оцінити, наскільки однорідною є дана сукупність у кількісному, а іноді і якісному відношенні, а отже, наскільки характерною є обчислена середня величина. Ступінь близькості даних окремих одиниць до середнього виміряється низкою абсолютних, середніх і відносних показників. Серед них:

Дисперсія – показник, що характеризує розсіювання значень ознаки щодо його середньої величини

$$D_X = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - M_X^2 \ , \qquad (1.2)$$

де X_i –окреме значення ознаки; M_X – середня арифметична ознаки; N – число значень ознаки.

Середнє квадратичне відхилення (або математичний стандарт чи просто стандарт)– це узагальнююча характеристика абсолютних розмірів варіації ознаки в сукупності. Середнє квадратичне відхилення є мірилом надійності середньої. Чим менше середнє квадратичне відхилення, тим краще середня арифметична відбиває собою всю вибірку. Середнє квадратичне відхилення – це квадратний корінь з дисперсії.

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} \ , \qquad (1.3)$$

де D_X – дисперсія ознаки.

Незважаючи на логічну подібність, дисперсія є більш чуттєвим до варіації, а, отже, й частіше застосовуваним показником.

Оскільки числові характеристики випадкової величини ми знаходимо за вибіркою конечного розміру, то ми не можемо визначити їх точно, а знаходимо тільки якусь оцінку, виникає питання, а на скільки ж воно відрізняється від справжнього значення середнього чи дисперсії?

Нехай нас цікавить величина інтервалу ε на який відхилиться від справжньої оцінки числової характеристики, розраховане за результатами експериментальної вибірки. При цьому ми повинні наперед визначити ймовірність β, значення якої викликало б у нас довіру до цього інтервалу (тобто високу ймовірність – 0.8, 0.9, 0.95...). Цей інтервал так і називається – “довірчим”.

Отже нам треба зробити дію, зворотну визначенню ймовірності того, що справжнє значення числової характеристики випадкової величини ($Чх[X]$)буде відрізнятися від його оцінки $O[X]$ не більше ніж на величину ε

$$P(|Чх[X]-O[X]|<\varepsilon)=\beta. \tag{1.4}$$

Коли буде знайдено ε, то справжнє значення числової характеристики буде знаходитися в межах $O[X]- \varepsilon < Чх[X] < O[X]+ \varepsilon$.

Розмір довірчого інтервалу для кожної числової характеристики можна знайти із застосуванням функції Лапласа

– для середнього $$\varepsilon_m = \ddot{\sigma}_X \Phi^{-1}(\beta)\ ; \tag{1.5}$$

– для дисперсії $$\varepsilon_D = \ddot{D}_X \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\frac{0{,}8N+1{,}2}{N(N-1)}}\ , \tag{1.6}$$

де, $\ddot{\sigma}_m = \sqrt{\dfrac{D_X}{N}}$; $\Phi^{-1}(\beta)$– зворотне значення функції Лапласа, тобто таке значення аргументу (квантиля – t), при якому функція Лапласа дорівнює β.

Функція Лапласа має вигляд $$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt\ , \tag{1.7}$$

але цей інтеграл у явному вигляді взяти неможливо, тому використовують таблиці його значень.

В деяких випадках перед початком статистичного аналізу потрібно виконати нормування чисельних значень нашої вибірки. Воно провадиться за формулою

$$X_i^н = \frac{X_i - M_X}{\sigma_X}. \tag{1.8}$$

Таке нормування з імовірністю 98% переведе всі значення X у діапазон [-4;+4] з середнім, що дорівнює 0, та стандартом, що дорівнює 1.

Якщо в процесі розрахунків за нормованими даними виникає потреба виконати денормування, то потрібна формула $X_i = \sigma_X X_i^н + M_X$. (3.9)

Мірою відносного відхилення значень випадкової величини відносно оцінки його середнього служить варіація та коефіцієнт варіації

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\ddot{D}(x)}{\ddot{M}(X)}; \quad K\mathrm{var}(X) = \frac{\ddot{\sigma}(x)}{\ddot{M}(X)}. \quad (1.10)$$

Приклад. Економічний процес було досліджено за 4-ма параметрами. Було отримано 5 точок значень цих параметрів. Провести нормування цих параметрів.

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4
1	87	0,39	560	2770
2	25	0,82	430	2590
3	67	0,29	270	2870
4	62	0,52	860	1920
5	53	0,54	790	2770

Розрахуємо середні для кожного параметра із застосуванням функції AVERAGE(), у дужках через двокрапку вкажемо діапазон адрес клітинок, які містять зміни значення першого фактору для всіх 5-ти точок. Далі знаходимо стандарт, використовуючи функцію STDEVA(), де так само подано діапазон клітинок для 1-го фактору І нарешті, за допомогою формули STANDARDIZE(X; M_X; σ_X) виконуємо нормування. Тут перше число – адреса клітинки, яка має бути нормована, 2-е – адреса клітинки, де є середнє, 3-є – клітинка, де є стандарт.

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1,25	-0,61	-0,09	0,48
2	-1,49	1,54	-0,62	0,02
3	0,36	-1,11	-1,27	0,74
4	0,14	0,04	1,13	-1,73
5	-0,26	0,14	0,85	0,48

Вікно функції STANDARDIZE представлене на рис. 1.5.

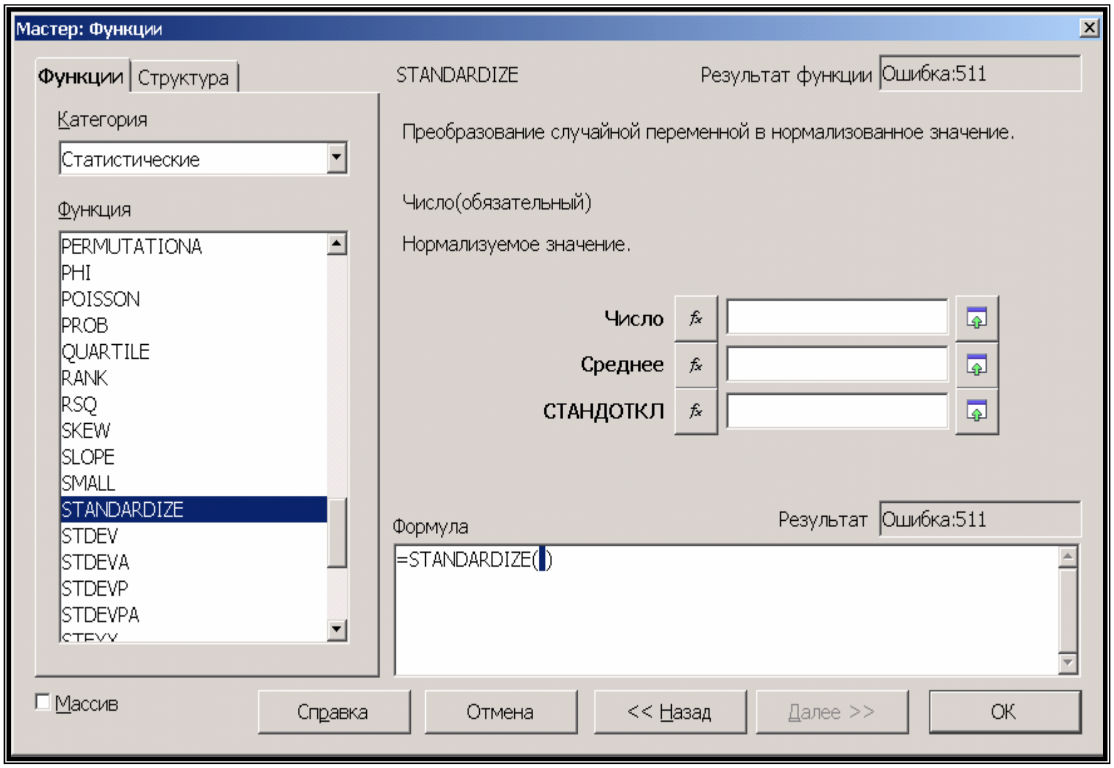


Рис. 1.5. Вікно функції STANDARDIZE з Excel

Знати закон розподілу кожного фактору соціально-економічної системи потрібно, щоб скористатися всіма вже раніше зробленими висновками щодо можливих характеристик цієї випадкової величини.

Для визначення того, якому закону підлягає випадкова величина, необхідно вибрати відомий закон (чи рівномірний, чи експоненціальний, чи нормальний, чи ще який) і висунути так звану «нуль-гіпотезу» про те, що математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення (чи дисперсія) для цього закону дорівнюють оцінкам цих величин, отриманих з результатів розрахунку за вибіркою випадкової величини (1.1)-(1.10) з певною довірчою ймовірністю p.

Далі, розбиваємо область існування випадкової величини на діапазони з урахуванням (1.2) і знаходимо відносні частоти k_i. Для кожного діапазону знаходимо ймовірності попадання випадкової величини в конкретний діапазон за формулою

$$P(x_i<x<x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i), \quad (1.11)$$

де x_i, x_{i+1} – значення випадкової величини на верхній і нижній межах i-го діапазону, $F(x)$ – прийнята ними як нуль-гіпотеза, функція розподілу, у якій параметрами математичного сподівання та дисперсії використовуються їхні оцінки, розраховані з експериментальної вибірки.

Нуль-гіпотеза приймається, якщо критерій узгодження Пірсона (або «хі-квадрат»)

$$\chi_P^2 = n\sum_{i=1}^{d}\frac{(p_i - k_i)^2}{p_i}, \qquad (1.12)$$

буде менший або дорівнювати табличному значенню цього критерію при достатньо великому значенні довірчої ймовірності.. Тут n – розмір вибірки, k_i – частоти на відповідних діапазонах; p_i – імовірності попадання випадкової величини в той же діапазон, по якому розраховані і відносні частоти, розраховані за формулою (4.13): d – загальна кількість діапазонів, на які розбита область існування випадкової величини.

Табличні значення критерію Пірсона $\chi^2(r, p)$ можна отримати, скориставшись функцієюХИ2ОБР(довірча ймовірність; число степенів свободи)

Інколи цю задачу вирішують через визначення рівня довірчої ймовірності. Тобто, за розрахованим значенням χ^2 та за числом степенів свободи знаходять, якій імовірності вони відповідають. А потім приймають рішення, чи можна довіряти отриманим результатам з такою ймовірністю. Для таких розрахунків існує функціяХИ2РАСП(розраховане значення χ2;число степенів свободи).

На рис. 1.6 наведено приклад розрахунку за критерієм Пірсона. Вибірка значень фактору, що досліджується, не наведена.

B18 =ХИ2ОБР(B17;B16)

	A	B	C	D	E	F
7	мін=	9	мах=	43		
8	k=	4	del=	8,5		
9	Діапазони		K	k	P	(k-P)^2 /P
10	мін	мах				
11	9	17,5	3	0,3	0,1866	0,0689
12	17,5	26	1	0,1	0,1391	0,011
13	26	34,5	1	0,1	0,1036	0,0001
14	34,5	43	5	0,5	0,0772	2,3144
15					Хі-кв.=	23,944
16	r=	2				
17	P=	0,95				
18	Хі таб=	0,10259				

Рис. 1.6. Приклад розрахунку

1.5.1. Дисперсійний аналіз факторів соціально-економічних систем

Завданням дисперсійного аналізу є вивчення впливу одного або декількох чинників на дану ознаку. Часто дослідник має у своєму розпорядженні не одну вибірку даних, а декілька. Наприклад, можна визначати зміну у часі валюти балансу підприємств роздрібної торгівлі, та металургійних комбінатів. При побудові математичної моделі потрібно вирішити для себе, чи можні ці вибірки поєднати в одну чи ні? Вирішенням цієї задачі займається декілька додаткових статистичних характеристик.

Коефіцієнт кореляції – параметр, який характеризує ступінь лінійного взаємозв'язку між двома вибірками, розраховується за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum(y_i - \bar{y})^2}} \quad (1.13)$$

Коефіцієнт кореляції змінюється від –1 (строго обернена лінійна залежність) до 1 (строго пряма пропорційна залежність). При значенні 0 лінійної залежності між двома вибірками немає.

Незважаючи на те, що задовільного рівня коефіцієнта кореляції по усім видам інвестування не було отримано, ми не можемо казати про повну відсутність зв'язку між досліджуваними змінними. Тому виникає необхідність визначення значимості отриманих коефіцієнтів шляхом отримання границь надійного інтервалу, в який потрапляє окремо досліджуваний коефіцієнт.

Для значимих параметрів зв'язку ці границі визначають надійні інтервали з наперед заданою надійністю γ. Для цього використовують z-перетворення Фішера.

Перетворення виконується за формулою $$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \qquad (1.14)$$

де z – z-перетворення Фішера, r – коефіцієнт кореляції.
Надійний інтервал для z визначається як

$$z' - t_\gamma \sqrt{\frac{1}{n-1-3}} \le z \le z' + t_\gamma \sqrt{\frac{1}{n-1-3}}\ , \qquad (1.15)$$

де n – кількість спостережень.

Є функція, що автоматично розраховують кореляцію

CORREL(адреси клітинок першого масиву даних;

адреси клітинок другого масиву даних)

Якщо потрібно дослідити взаємну кореляцію більше двох факторів, зручно використовувати програму Кореляція пакету аналізу .

Критерій Стьюдента використовується, щоб визначити, наскільки вірогідно, що дві вибірки узяті з генеральних сукупностей, мають одне і те ж середнє.

Якщо ймовірність невелика (<0,55), можна вважати, що вибірки мають істотно відмінні середні, а отже, їх не можні поєднувати в одну для побудови математичної моделі.

Для реалізації цього закону розподілу існує функція TTECT

TTECT(Дані 1; Дані 2; Режим; Тип)

Тут: Дані 1 перший масив даних; Дані 2 другий масив даних; Режим = 1, то функція використовує односторонній розподіл, якщо Режим = 2, то двосторонній розподіл; Тип є типом t - тесту (для перевірки за критерієм Стьюдента). Тип 1 означає двосторонній. Тип 2 означає дві вибірки, рівну вірогідність. Тип 3 означає дві вибірки, нерівну вірогідність.

Приклад

Визначити відмінність дисперсій двох вибірок, представлених нижче

X_1	0,45	0,59	0,78	0,04	0,44	0,32	0,92
X_2	0,34	0,29	0,88	0,87	0,68	0,28	0,88

Скористаємося функцією FTECT. Результат розрахунку показано на рис. 1.7. Імовірність 0,88 означає, що ці вибірки статистично взяті з однієї генеральної сукупності. Отже, їх можна поєднати в одну для побудови економіко-математичної моделі.

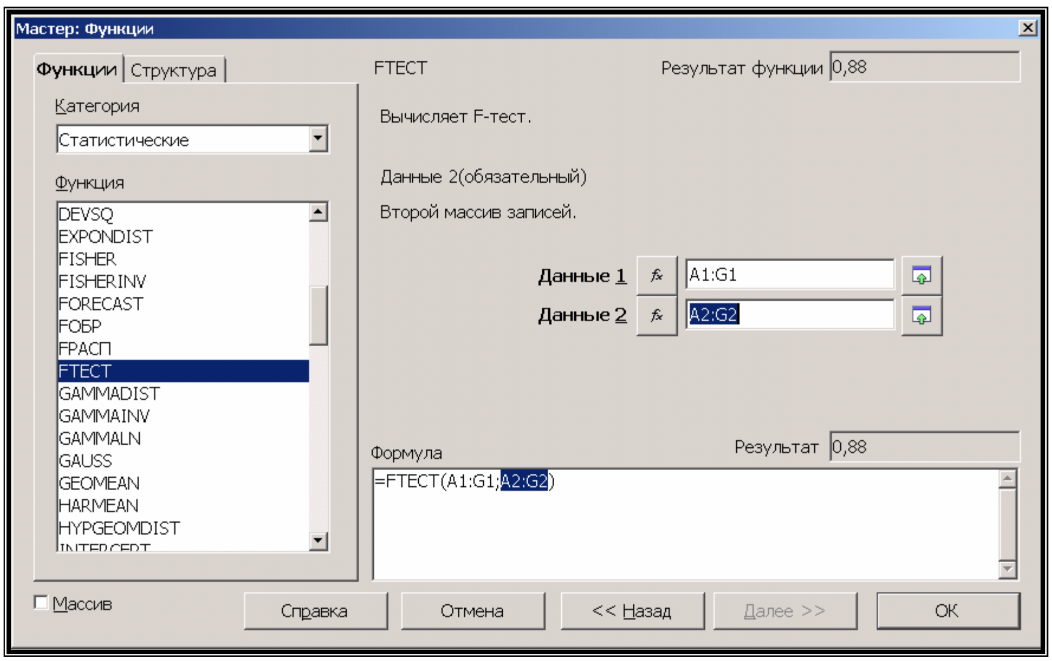


Рис. 1.7. Приклад роботи функції FTEST

F-тест (Фішера) визначає односторонню вірогідність того, що дисперсії аргументів массив1 і массив2 розрізняються неістотно. Ця функція використовується для того, щоб визначити, чи мають дві вибірки різні дисперсії. Наприклад, якщо дані результати тестування для приватних і суспільних шкіл, то можна визначити, чи мають ці школи різні рівні різнорідності учнів за наслідками тестування.

Якщо ймовірність буде невеликою (<0,55), це означає, що за дисперсією вибірки відрізняються істотно, а отже, при імітаційному моделюванні не можна використовувати дані з вибірок водночас.

Для реалізації цього тесту існує функція FTECT

FTECT(масив1;масив2)

Пояснимо критерій Фішера.

Нехай є N нормально розподілених генеральних сукупностей з рівними дисперсіями та, можливо, з різними математичними сподіваннями.

Із кожної сукупності робимо вибірку об'єму $\{n_i\}, i = 1, 2, \ldots, N,$

тоді $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$ - об'єм усієї вибірки.

Позначимо j варіант випадкової величини X з i-тої сукупності x_{ij}. Тоді середня арифметична вибірки із i-тої сукупності буде $x_i = \frac{1}{n_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, а середня усієї вибірки буде $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot n_i$.

При рівні значущості α треба перевірити основну гіпотезу про рівність математичних сподівань сукупностей, що розглядаються

При рівності дисперсій статистична характеристика буде мати розподіл Фішера з N - 1 та n - N степенів свободи. Тому в якості статистичної характеристики для перевірки цієї гіпотези візьмемо функцію

$$F = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\frac{1}{n-N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x})^2}, \quad (3.16)$$

Критичну область у цьому випадку знаходять з урахуванням умови $P(F > f_a) = \alpha$, де – f_a критичне значення

Приклад. Є дані про вартість (в тис. гривень) проданих трьох видів виробів певним магазином в окремі дні тижня розподілу Фішера.

Припускаючи нормальний закон розподілу одержаної суми кожного дня та рівність дисперсій, перевірити гіпотезу H_0: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ при рівні значущості α = 0,05,

вівторок	середа	четвер	п'ятниця	субота
10.2	10.8	10.7	13.0	12.0
11.5	9.8	11.5	13.2	11.5
12.0	12.1	12.0	11.5	11.8

Розв'язання. Умови прикладу дозволяють застосувати до розв'язання задачі критерій дисперсійного аналізу.

У цьому випадку маємо: N = 5; n_i = 3, i = 1,2,..., 5; n = 15. Знаходимо

$$x_1 = 11.2,\ x_2 = 10.8,\ x_3 = 11.4,\ x_4 = 12.6,\ x_5 = 11.8,\ \bar{x} = 11.6$$

Зробимо обчислення сум

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = 0.48 + 1.92 + 0.12 + 3 + 0.12 = 5.64,$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}(x_{ij} - \bar{x})^2 = 1.96 + 0.01 + 0.16 + 1 + 3.24 + 0.25 + 0.81 + 0.01 +$$
$$+0.16 + 1.96 + 2.56 + 0.01 + 0.15 + 0.01 + 0.04 = 12.34.$$

Тепер за формулою (3.16) знайдемо значення статистичної характеристики

$$F_{cn} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 5.64}{\frac{1}{10} \cdot 12.34} = 1.14$$

Із таблиці критичних значень розподілу Фішера зі степенями вільності N - l = 5-l = 4 та n - N = 15-5 = 10 і рівнем значущості α = 0,05 знаходимо $F_{kp} = f_{0.05} = 3.48.$

Одержали, що $F_{cn} = 1.14 < F_{kp} = 3.48,$ тому гіпотеза H_0 може бути прийнята.

Загальні принципи порівняння вибірок наступний:

1. Розраховуємо кореляцію, t- тест та F- тест для кожної пари вибіркових значень.

2. Вибірки можна об’єднувати в одну якщо кореляцію позитивна, а тести дають значну ймовірність (>0.65).

1.5.2. Аналіз соціально економічних систем методом експертних висновків

У тих випадках, коли об'єктивній інформації виявляється не досить для визначення чисельних значень необхідного фактору при аналізі соціально економічної системи, треба використовувати суб'єктивні оцінки, засновані на накопиченому досвіді, знаннях, ідеях, думках і припущеннях фахівців, привернутих до вироблення суб'єктивної оцінки.

Отримання об'єктивних оцінок базується на наступних загальних положеннях:

1) *аксіома незміщеності*, яка стверджує, що думка більшості є компетентною;

2) *аксіома транзитивності*, яка стверджує, що суб'єктивні оцінки можуть бути переміщені.

З цього виходить, що мірою якості суб'єктивних оцінок є їх розсіяння.

Для визначення взаємозв'язку між ознаками, передусім на основі бальних оцінок, застосовуються методи рангової кореляції. Рангами називають числа натурального ряду, які згідно зі значеннями ознаки надаються елементам сукупності і певним чином упорядковують її. Ранжування проводиться за кожною ознакою окремо: перший ранг надасться найменшому значенню ознаки, останній – найбільшому або навпаки. Кількість рангів дорівнює обсягу сукупності. З огляду на те, що рангова кореляція не потребує додержання будь-яких математичних передумов щодо розподілу ознак, зокрема вимоги нормальності розподілу, рангові оцінки щільності зв'язку доцільно використовувати для сукупностей невеликого обсягу, якими найчастіше і є економічні дані.

Для визначення міри зв'язку використовують коефіцієнт рангової кореляції, запропонований К. Спірменом
$$\rho = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}, \tag{1.17}$$

де n – число одиниць сукупності, d_i - різниця рангів за ознакою x та за ознакою y для i-ої одиниці сукупності.

Цей коефіцієнт має такі саме властивості, як і лінійний коефіцієнт кореляції: змінюється в межах від - 1 до + 1, водночас оцінює щільність зв'язку та вказує на його напрям.

Але при наявності співпадаючих значень рангів вищенаведена формула не працює. Тому замість неї використовують коефіцієнт кореляції рангів Кенделла, який порівнює ранги для всіх пар одиниць сукупності, що заздалегідь підпорядковані по значенню познаки x.

$$W = \frac{12\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{d}\rho_{ij} - \frac{d(m+1)}{2}\right)^2}{d^2(m^3 - m)}, \tag{1.18}$$

де d – кількість експертів, m – кількість критеріїв, ρ_{ij} – ранги.

Його використання доцільне, оскільки при розрахунку цього коефіцієнта не використовуються самі значення рангів, а тільки встановлюється більше або менше ранг даної одиниці, тобто немає необхідності при тотожності значень ознаки розраховувати середній ранг.

Але незважаючи на всі переваги традиційних методів, основаних на формулах Спірмена і Кенделла, вони часто не дають змоги отримати потрібний результат при недостатній погодженості об’єктів по одному з вимірювань та малому обсязі сукупності вимірювань. Крім того, подані формули потребують обробки при тотожності рангів об’єктів.

Для рішення даної проблеми пропонується використовувати модифікований коефіцієнт конкордації
$$W = 1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i - x_i|}{n(k_i - 1)}, \tag{1.19}$$

де n – об’єм вибірки, k_i – кількість ознак по i-му елементу вибірки.

В разі, коли $\underset{i}{\forall}(k_i = n)$ вид (3.19) спрощується

$$W = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - x_i|}{n(n-1)}, \tag{1.20}$$

Формула (3.19) є аналогом коефіцієнта Кенделла, але не має обмежень, що покладаються на неї. Наприклад, для знаходження кореляції між результатами, формула Кенделла потребує рангового перетворення з наступним усередненням показників для рівних рангів.

Модифікований коефіцієнт конкордації може працювати безпосередньо з вихідними даними. При цьому необхідно або зменшити все значення сукупності на величину мінімального значення, або привести (2.21) до виду

$$W = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|}{n(k - m)}, \tag{1.21}$$

де n - об’єм вибірки, k - максимально можливе значення ознаки, m - мінімально можливе значення ознаки.

Щоб можна було скористатися цими формулами, є функція автоматично визначення рангів чисел у вибірці

RANK(Число;Адреси клітинок масиву;Тип)

Адреси клітинок масиву треба задавати як константи, тобто додавати до них символ $. Тип = 0, якщо ранжування виконується у зростаючому порядку і Тип = 1, – якщо в порядку, що убуває.

Приклад. Сім експертів подали свої оцінки чисельного значення економічних факторів X_1 та X_2. Знайти міру узгодженості їх думок.

Чисельні значення експертних висновків наведено в таблиці. Там же подано ранжування у зростаючому порядку їх значень за допомогою функції RANK електронних таблиць Calc. На рис. 1.7 подано фрагмент цих розрахунків.

	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
Параметри	X_1	0,55	0,06	0,54	0,92	0,27	0,32	0,6
	X_2	0,78	0,77	0,98	0,14	0,93	0,29	0,78
Ранги	X_1	3	7	4	1	6	5	2
	X_2	3	5	1	7	2	6	4

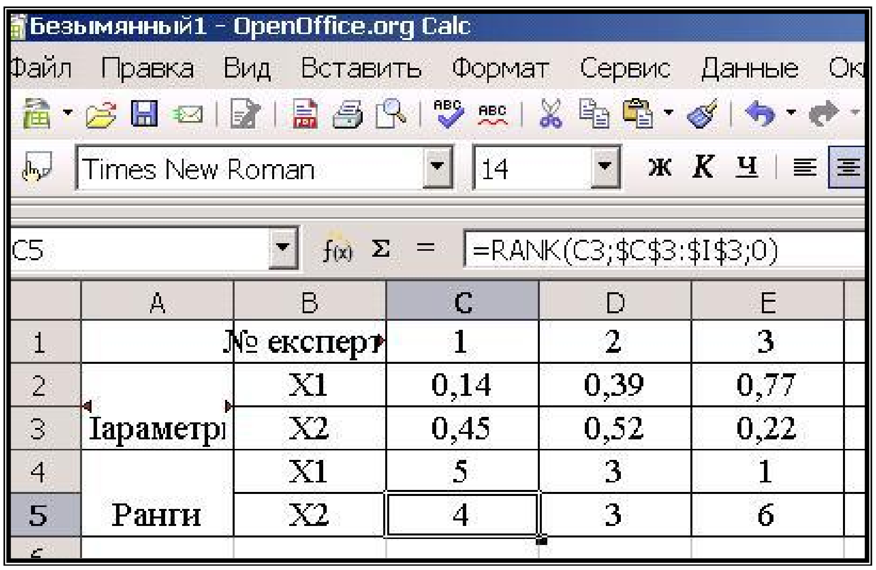


Рис. 1.7. Приклад визначення рангів експертних оцінок

Для вирішення подальшої задачі, скористаємося коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена (1.17). Число одиниць сукупності $n = 7$. Суму різниць рангів в квадраті знайдемо, використавши функцію SUMXMY2(масив1; масив2).

Вона дорівнює 67. Тоді, коефіцієнт Спірмена дорівнює -0,2.

Отже, міра узгодженості експертних оцінок двох економічних параметрів показує нам, що думки експертів не узгоджені, а отже, їх не можна використовувати для побудови економіко-математичної моделі.

1.6. Індивідуальне завдання №1. Статистичні розрахунки

Завдання: провести розрахунки на комп’ютері для визначення статистичних характеристик даних. Обрахувати дані експертних оцінок.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує номер за списком навчальної групи *Nг*.

Методичні вказівки: 1) за допомогою формули =RANDBETWEEN(*Nг*; (*Nг*+1))/341 в Excel генерується 3 колонки по 25 випадкових чисел, які в подальшому будуть використані в інших індивідуальних завданнях. Перші три колонки позначаються як X1, X2, X3, а остання – як Y.

2) цей масив даних треба скопіювати і вставити тільки значення на те саме місце, а потім зберегти в окремій сторінці Excel.

3) виконати статистичний аналіз всіх колонок даних, застосувавши підпрограму Описова статистика, яка знаходиться по меню Excel «Дані-Аналіз даних»

4) провести кореляційний аналіз цих чотирьох колонок.

5) Провести нормування всіх колонок таблиці і розмістити таблицю нормованих значень на окремій сторінці Excel. та зробити висновки за отриманими результатами.

6) виконати кореляційний аналіз нормованої таблиці і порівняти дві матриці кореляції.

7) вибрати дані з табл. 1.2 за номером по списку групи.

8) Вирішити задачу: Сім експертів подали свої думки щодо п’яти економічних параметрів. Визначити: 1) статистичні характеристики (середнє, стандарт) цих оцінок; 2) можливість поєднати ці вибірки в одну та міру узгодженості за Спірменом (через ранги та абсолютні значення).

Таблиця 1.2.

Варіанти завдань

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
1	X_1	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939
	X_2	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	X_3	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	X_4	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	X_5	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
2	X_1	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	X_2	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	X_3	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	X_4	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	X_5	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151
3	X_1	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	X_2	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	X_3	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	X_4	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	X_5	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
4	X_1	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	X_2	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	X_3	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	X_4	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	X_5	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
5	X_1	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	X_2	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	X_3	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	X_4	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	X_5	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
6	X_1	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	X_2	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_3	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	X_4	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424
	X_5	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
7	X_1	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848
	X_2	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545
	X_3	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121
	X_4	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424
	X_5	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909
8	X_1	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272
	X_2	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909
	X_3	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757
	X_4	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909
	X_5	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303
9	X_1	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787
	X_2	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181
	X_3	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666
	X_4	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060
	X_5	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757
10	X_1	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878
	X_2	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424
	X_3	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272
	X_4	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393
	X_5	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333
11	X_1	0,51	610	2180	160,93	4786,2	7,78087	4,46969
	X_2	0,81	270	1580	453,99	2522,0	4,71039	3,07575
	X_3	0,79	730	2110	406,56	3353,2	8,09490	3,62121
	X_4	0,54	280	2890	311,69	4814,8	7,32728	3,5
	X_5	0,53	760	1190	176,17	7824,1	4,32658	3,98484
12	X_1	0,45	440	1390	359,12	8426,0	7,57152	2,51515

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_2	0,83	540	1670	282,89	4012,4	10,3279	3,27272
	X_3	0,51	330	1200	489,56	7967,4	10,3279	2,90909
	X_4	0,3	500	2220	506,50	7222,3	4,60572	2,98484
	X_5	0,88	460	3060	237,16	6591,8	4,46615	1,77272
13	X_1	0,74	470	2290	411,64	3066,6	9,56036	1,63636
	X_2	0,6	660	2820	374,37	4069,7	9,59525	4,71212
	X_3	0,31	540	1290	425,19	4413,6	7,88555	1,80303
	X_4	0,82	680	1020	477,70	6219,2	6,38520	1,83333
	X_5	0,62	720	1690	340,49	6104,5	10,8513	3,63636
14	X_1	0,67	750	1980	238,85	6161,9	8,19958	3,86363
	X_2	0,5	800	2650	477,70	7766,8	9,69993	2,27272
	X_3	0,73	810	1910	421,80	3381,8	4,98953	1,60606
	X_4	0,67	700	2610	442,13	3496,5	9,66503	3,46969
	X_5	0,31	630	1740	333,71	5416,7	9,42079	2,75757
15	X_1	0,37	410	1260	362,51	8941,9	2,86113	2,28787
	X_2	0,88	850	1170	216,83	2206,8	5,58269	4,60606
	X_3	0,72	490	2410	413,33	7021,7	6,00139	2,30303
	X_4	0,5	570	1960	496,34	3553,8	7,43196	4,22727
	X_5	0,61	850	2380	513,28	4184,3	5,86182	2,16666
16	X_1	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939
	X_2	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	X_3	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	X_4	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	X_5	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
17	X_1	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	X_2	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	X_3	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	X_4	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	X_5	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
18	X_1	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	X_2	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	X_3	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	X_4	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	X_5	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
19	X_1	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	X_2	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	X_3	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	X_4	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	X_5	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
20	X_1	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	X_2	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	X_3	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	X_4	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	X_5	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
21	X_1	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	X_2	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454
	X_3	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	X_4	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424
	X_5	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
22	X_1	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848
	X_2	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545
	X_3	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121
	X_4	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424
	X_5	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909
23	X_1	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272
	X_2	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909
	X_3	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757
	X_4	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_5	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303
24	X_1	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787
	X_2	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181
	X_3	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666
	X_4	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060
	X_5	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757
25	X_1	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878
	X_2	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424
	X_3	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272
	X_4	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393
	X_5	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333
26	X_1	0,51	610	2180	160,93	4786,2	7,78087	4,46969
	X_2	0,81	270	1580	453,99	2522,0	4,71039	3,07575
	X_3	0,79	730	2110	406,56	3353,2	8,09490	3,62121
	X_4	0,54	280	2890	311,69	4814,8	7,32728	3,5
	X_5	0,53	760	1190	176,17	7824,1	4,32658	3,98484
27	X_1	0,45	440	1390	359,12	8426,0	7,57152	2,51515
	X_2	0,83	540	1670	282,89	4012,4	10,3279	3,27272
	X_3	0,51	330	1200	489,56	7967,4	10,3279	2,90909
	X_4	0,3	500	2220	506,50	7222,3	4,60572	2,98484
	X_5	0,88	460	3060	237,16	6591,8	4,46615	1,77272
28	X_1	0,74	470	2290	411,64	3066,6	9,56036	1,63636
	X_2	0,6	660	2820	374,37	4069,7	9,59525	4,71212
	X_3	0,31	540	1290	425,19	4413,6	7,88555	1,80303
	X_4	0,82	680	1020	477,70	6219,2	6,38520	1,83333
	X_5	0,62	720	1690	340,49	6104,5	10,8513	3,63636
29	X_1	0,67	750	1980	238,85	6161,9	8,19958	3,86363
	X_2	0,5	800	2650	477,70	7766,8	9,69993	2,27272
	X_3	0,73	810	1910	421,80	3381,8	4,98953	1,60606

№ п/п	№ експерта	1	2	3	4	5	6	7
	X_4	0,67	700	2610	442,13	3496,5	9,66503	3,46969
	X_5	0,31	630	1740	333,71	5416,7	9,42079	2,75757
30	X_1	0,37	410	1260	362,51	8941,9	2,86113	2,28787
	X_2	0,88	850	1170	216,83	2206,8	5,58269	4,60606
	X_3	0,72	490	2410	413,33	7021,7	6,00139	2,30303
	X_4	0,5	570	1960	496,34	3553,8	7,43196	4,22727
	X_5	0,61	850	2380	513,28	4184,3	5,86182	2,16666

1.7. Кластерний аналіз

При дослідженні різних соціально-економічних об’єктів, при отриманні вибірок про числові значення виникає питання про можливість угрупування цих даних. Така проблема вирішується методами автоматичної класифікації, серед яких найбільш зручним є кластерний аналіз.

Розглянемо інші методи класифікації, щоб зрозуміти межу застосування кластерного аналізу.

РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ – процес, при якому на підставі численних характеристик (ознак) якогось об'єкта визначається одна або кілька нових, найістотніших його характеристик, зокрема, його приналежність до певного класу об'єктів. Розв'язати задачу розпізнавання образів – значить за непрямими даними знайти правила, за якими кожному наборові значень ознак якогось об'єкта ставиться у відповідність одне рішення із заданої множини можливих рішень, що визначають істотні характеристики цього об'єкта.

ДИСКРИМІНАНТНИЙ АНАЛІЗ – використовується для ухвалення рішення про те, які перемінні розрізняють (дискримінують) дві або більш виникаючі сукупності (групи). Наприклад, економіст може записати різні характеристики подібних типів (груп) підприємств, щоб потім провести аналіз дискримінантної функції, що щонайкраще розділяє типи або групи.

Як видно з викладеного вище, кластерний аналіз корисний у випадках, коли практично невідомо наперед про можливу структуру класів об'єктів. А саме такою, частіше всього, є економіка, з її складністю зв'язків, розмаїтістю видів об'єктів, невизначеністю наслідків від керуючого впливу. Тому кластерний аналіз є найбільш прийнятним при дослідженні економічних систем.

Кожен економічний об'єкт може бути представлений одним і тим же набором факторів або параметрів. Наприклад, торгове підприємство може бути охарактеризоване такими факторами як виторг, обсяг реалізації, валюта балансу, кількість працівників, кількість торгових точок тощо. Позначимо кожен з цих факторів чи параметрів економічного об'єкта як X_i. Тут i – номер фактору, який характеризує об'єкт. Тобто, кожен об'єкт може бути представлений вектором

$$X = (X_1, X_2, ..., X_{Nf}) \qquad (1.22)$$

де N_f – кількість факторів. Цей вектор являє собою точку в гіперпросторі, який має розмірність N_f. Наприклад, якщо три об'єкти характеризуються двома факторами які мають значення відповідно, (1;2), (2;3) та (3;1) то їх можна представити як три точки на плоскому графіку (рис. 1.8).

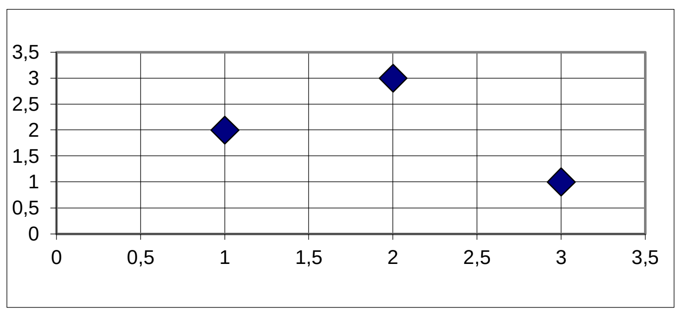


Рис. 1.8. Представлення трьох об'єктів, як точок на площині

І хоча фактори для всіх об'єктів, що розглядаються, є однаковими, їх числові значення будуть відрізнятися. Якщо охарактеризувати інший об'єкт аналогічним (1.1) вектором, який позначимо як Y, можна розрахувати міру близькості цих об'єктів.

Міра близькості або відстань між об'єктами розраховується за допомогою різних формул, які ще називаються метриками відстаней.

Відстань між двома об'єктами позначається як $d(x_i, y_i)$ – це не негативна функція близькості задається при наступних умовах:

1) Вона завжди більше або дорівнює нулю.

2) Відстань від точки X до точки Y така сама, як і від Y до X.

3) Якщо числові значення факторів двох об'єктів однакові, відстань між ними дорівнює нулю.

4) Нехай існує третя точка U. Тоді сума відстаней між точками XU та YU завжди більша ніж відстань поміж точками XY.

Або у вигляді формули це записується так:

$$\left.\begin{bmatrix} d(x_i, y_i) \geq 0 \\ d(x_i, y_i) = d(y_i, x_i) \\ d(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \\ d(x_i, y_i) \leq d(x_i, u_i) + d(u_i, y_i) \end{bmatrix}\right\} \forall \{i\} \in N \tag{1.23}$$

Найбільш розповсюдженою функцією відстані між двома об'єктами (X; Y) – є відстань у метриці Евкліда

$$d_E(x_i; y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{Nf} (x_i - y_i)^2} \tag{1.24}$$

Метрика Евкліда дозволяє не враховувати знакові розходження, пропорційно збільшує відстань між об'єктами у випадку різних абсолютних значень показників. У результаті збільшується розмірність кластерного поля, об'єкти штучно віддаляються друг від друга, у результаті чого границі між кластерами стають більш чіткими і точними.

Другий по значимості функцією відстані прийнято вважати міру несхожості Хемінга

$$d_{XEM}(x_i; y_i) = \sum_{i=1}^{Nf} (x_i - y_i) \tag{1.25}$$

Метрика Хемінга може використовуватися в тих випадках, коли знакові розходження характеристик об'єктів мають принципове значення. За рахунок нівелювання знакових розходжень показників об'єкти виявляються сконцентрованими до області ядра кластера, але при цьому утрачаються важливі знакові характеристики розходжень.

Несуттєво від метрики Евкліда відрізняється і функція відстані в метриці L-норма (d_L), яка інколи ще називається відстанню міських кварталів або манхеттенською відстанню

$$d_L(x_i; y_i) = \sum_{i=1}^{Nf} |x_i - y_i| \qquad (1.26)$$

Різниця у відстанях, обчислених за метриками у просторі Евкліда і *L*-норми, залежить від абсолютних числових значень і кількості розглянутих показників. У L - норми компактність вище, у середньому, на 3...10 відсотків, якщо $(x_i, y_i) \in [1;100]$, а при інтервалі $[0;1]$ компактність менше, у тих же пропорціях. Але з урахуванням визначеної невірогідності вихідних показників подібна різниця може бути визнана несуттєвою.

У деяких умовах класифікації, коли компактність кластерів занадто велика і розділити їх на підмножини досить складно, застосовують метрику «норма - верхня границя» або метрика Чєбишева

$$d_{SUP}(x_i; y_i) = SUP|x_i - y_i| \qquad (1.27)$$

Цей запис означає, що з усіх різниць значень факторів, взятих по модулю, потрібно вибрати одну – найбільшу. І саме вона буде характеристикою відстані між об’єктами. Використання цієї міри відстані може неправомірно змінити картину класифікації через зневагу усіма факторами крім одного. Тут необхідно теоретичне обґрунтування коректності обраної міри $(d_{\sup})$.

Узагалі, дослідник може використовувати безліч функцій відстані, запропонованих у різних роботах по кластерному аналізу, або власних. Відзначимо ще трохи функцій відстані, що згадуються часто.

Степенева відстань. Іноді бажають прогресивно збільшити або зменшити вагу, що відноситься до розмірності, для якої відповідні об'єкти сильно відрізняються. Це може бути досягнуто з використанням *степеневої відстані*:

$$d_S(x_i; y_i) = \left(\sum_{i=1}^{Nf} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{r}} \qquad (1.28)$$

де r і p - параметри, визначувані користувачем. Декілька прикладів обчислень можуть показати, як "працює" ця метрика. Параметр p відповідальний за поступове зважування різниць по окремих координатах, параметр r

відповідальний за прогресивне зважування великих відстаней між об'єктами. Якщо обидва параметри - r і p, рівні двом, то ця відстань співпадає з відстанню Евкліда.

Функція відстані Джеффріса-Матусіти

$$d_M(x_i; y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{Nf} (\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i})^2} \tag{1.29}$$

Функція Махаланобіса. Ця функція узагальнює можливі варіанти використання метрики Евкліда. Вона задана в матричній формі. Перетворення T (транспонування матриці) кореляційної матриці інваріантно-невиродженим лінійним перетворенням $D^2 = (X_i, X_j) = (X_i - X_j)^T W^{-1} (X_i - X_j)$, (2.30)

де $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n_1} x_i / n_1$, $\overline{Y} = \sum_{i=1}^{n_2} y_i / n_2$ – статистичні відстані між кластерами. W^{-1} – матриця, зворотна матриці розсіяння $W = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\overline{X} - \overline{Y})(\overline{X} - \overline{Y})^T$ (1.31)

Приклад. Побудувати матрицю відстаней для 4-х об’єктів, представлених двома факторами у наведеній нижче таблиці, за метрикою Махаланобіса.

№ об’єкта	X_1	X_2
1	1	2
2	1	3
3	2	2
4	3	1

Рішення цієї задачі будемо виконувати в пакеті MATLAB. Задамо вхідні дані: X = [1 2; 1 3; 2 2; 3 1]

Для розрахунку відстані використовуємо функцію *Y=pdist*(*X*,'*metric*') – де *X* – вектор вхідних даних, '*metric*' – вид функції відстані (можливі значення '*Euclid*' – метрика Евкліда, '*Mahal*' – метрика Махаланобіса, '*CityBlock*'– манхетенська відстань). Для розрахунку відстані за метрикою Махаланобіса скористаємося *Y=pdist*(*X*,'*mahal*'), результати роботи функції наведені в наступній таблиці, де в заголовках рядку і стовпця стоять номери

	1	2	3	4
1	0	2.35	2.00	2.35
2	2.35	0	1.23	2.45
3	2.00	1.23	0	1.23
4	2.35	2.45	1.23	0

об’єктів. Існує методика кластеризації повним перебором об’єктів із застосуванням Excel.

Методично цей спосіб кластеризації найбільш простий і надійний, але досить трудомісткий. Вона виконується в такому порядку.

1. Складемо вихідну матрицю спостережень над об'єктами.

2. Одержимо матрицю значень відстаней від довільно обраного об'єкта (його числової характеристики).

3. Введемо поняття приналежності i-го об’єкта до k-го кластера. Це буде матриця Q розмірності N_OхN_O, де N_O – кількість об’єктів, які розглядаються. В ній по стовпцям розташовані номера об’єктів, а по рядках – номера кластерів. Припускається, що кількість кластерів буде дорівнювати кількості об’єктів. Елементи цієї матриці представляють собою бінарні числа, тобто такі, які можуть приймати значення тільки 0 або 1.

4. Введемо цільову функцію, що відповідає обраному критерію внутрішньо групової однорідності об'єктів

$$Z = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} d_{ij} \to \max \qquad (1.31)$$

де q_{ij} – елемент матриці Q, d_{ij} – метрика відстані поміж об’єктами ($1 \le i,j \le N_O$).

5. Додамо до цільової функції обмеження

$$\sum_{i=1}^{N_0} q_{ij} \le N_0 \,, \qquad (1.32)$$

$$\sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = 1 \qquad (1.33)$$

Перше обмеження означає, що сума елементів q_{ij} по рядку не повинна перевищувати числа об’єктів, друге – що один і той же об’єкт не може бути включений до двох чи більше кластерів.

6. Останнє обмеження показує, що число об’єктів, включених до різних кластерів має дорівнювати їх загальній кількості

$$\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = N_0 \qquad (1.34)$$

Ознакою того, скільки об’єктів включено до кластера буде значення суми (2.3). Змінними параметрами задачі оптимізації будуть елементи матриці Q.

Приклад. Для матриці відстаней побудувати кластери методом повного перебору.

Перенесемо цю матрицю до Excel. Там же утворимо чисту матрицю, теж розміром 5х5, в якій будуть знаходитися елементи матриці *Q*. При цьому ми припускаємо, що номери стовпців у ній відповідають номерам об'єктів, а номери рядків – номерам кластерів. У матриці *Q* знайдемо суму по рядкам, що буде відповідати лівій частині обмеження (3.39), та по стовпцях – лівій частині обмеження (3.40). Далі знайдемо загальну суму елементів матриці *Q* згідно з (3.41). Сума знаходиться за допомогою функції *SUM*(*II*:JJ), де *II* – адреса першої клітинки, яка містить масив чисел, а *JJ* – адреса останньої клітинки. Тепер сформуємо цільову функцію виду (3,38). Для цього скористаємося функцією *SUMPRODUCT*(*II:JJ;NN:MM*), де *II:JJ* – адреса масиву відстаней, а *NN:MM* – адреса масиву матриці *Q*. Спочатку всі суми дадуть нуль, оскільки всі елементи матриці *Q* дорівнюють нулю. Застосувавши функцію Solver, ми позначаємо елементи матриці *Q*, як змінні параметри, що мають бінарний характер, спрямовуємо функціонал до мінімуму, додаємо обмеження і отримуємо наступне оптимальне рішення, для якого функціонал дорівнює 4,36.

	1	2	3	4	5
1	0	0,89	0,41	0,74	0,46
2	0,89	0	0,86	0,87	0,61
3	0,41	0,86	0	0,96	0,66
4	0,74	0,87	0,96	0	0,62
5	0,46	0,61	0,66	0,62	0

		Об'єкти					Сума по кластерам
		1	2	3	4	5	
Кластери	1	0	1	0	0	0	1
	2	1	0	0	0	0	1
	3	0	0	0	1	1	2
	4	0	0	1	0	0	1
	5	0	0	0	0	0	0
Сума по стовпцям		1	1	1	1	1	5

Аналіз результатів показує, що у перший кластер попав 2-й об'єкт, у другий кластер – 1-й, у третій кластер – 4-й та 5-й, у четвертий кластер – 3-й, у п’ятий – не включено жодного об’єкта.

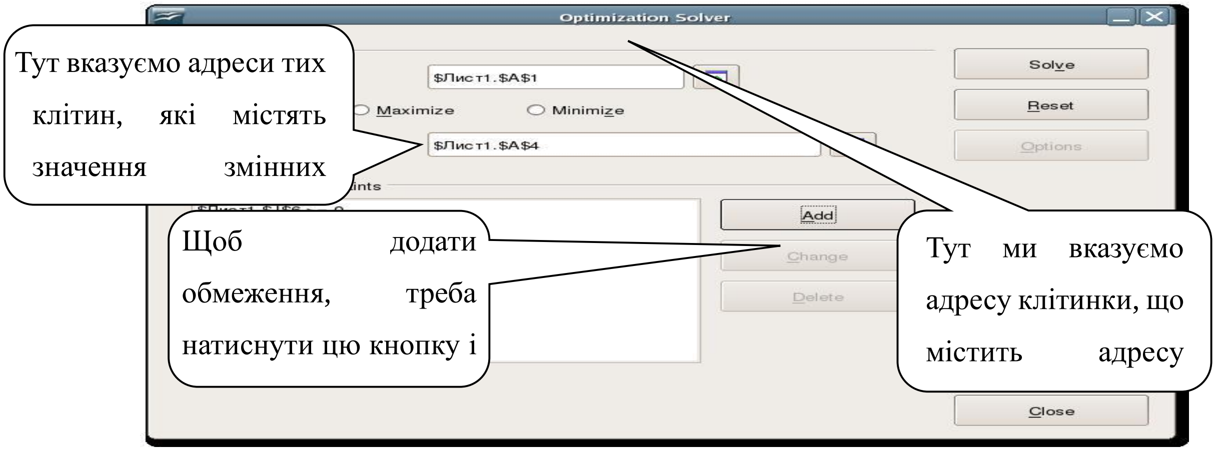


Рис. 3.12. Головне вікно функції Solver

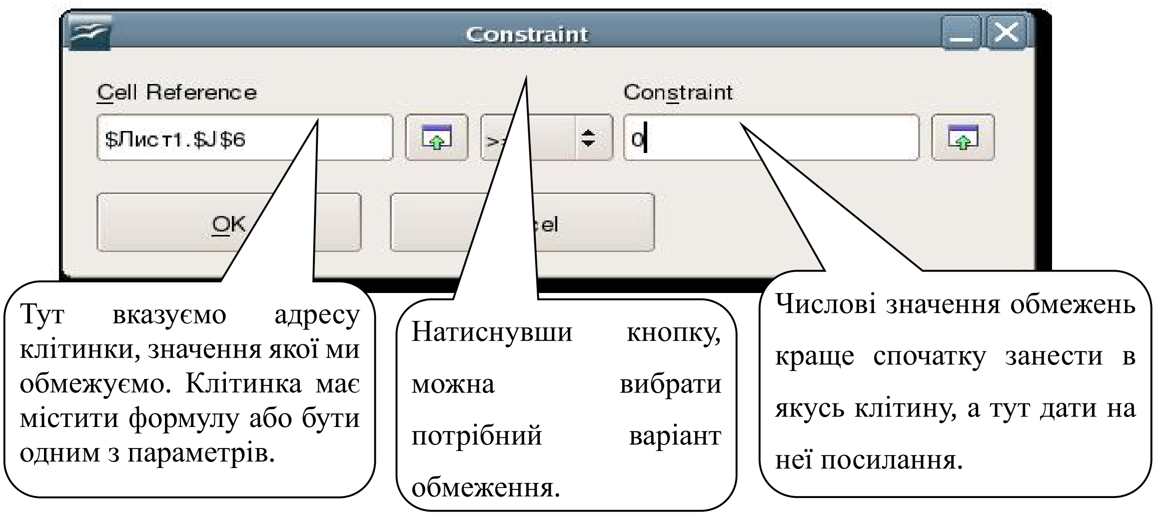


Рис. 1.9. Вікно введення обмежень функції Solver

1.8. Індивідуальне завдання №2. Кластерний аналіз прямим перебором

Завдання: Вивчити методи розрахунків відстаней між об’єктами за допомогою різних метрики Евкліда та кварталів та прийоми по їх автоматичній кластеризації..

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру за списком групи.

Методичні вказівки: 1) розрахувати матриці відстаней за метриками Евкліда, та Кварталів із застосуванням програми Statistica; Для цього:

А) скопіювати будь які 5 рядків із завдання і вставити їх у файл Excel, який необхідно зберегти у форматі 1997-2003 року. Ці дані означають, що ми маємо кластеризувати 5 об’єктів (5 рядків даних), які характеризуються дев’ятьма показниками 9дев’ять стовпців даних).

Б) Увімкнути програму Statistica та обрати пункт 

. Потім обрати пункт 

. І прибрати галочку з пункту 

.

В) Коли дані завантажаться, обрати пункти головного меню «Data Mining-Cluster». У вікні, що відкриється, обрати пункт K-Mean і встановити у вікні Number of clusters число 5. Натиснути вкладку «K-Mean» та обрати пункт Euclidian distance і натиснути ОК.

Г) Відкриється вікно вибору даних, в якому необхідно обрати праву частину вікна і натиснути Select All і натиснути ОК.

Д) У новому вікні обрати пункт Members&distances. Відкриється таблиця відстаней між об’єктами, яку необхідно скопіювати до таблиці Excel з поміткою Euclidian distance.

Е) Натиснути кнопку Cancel і повернутися до попереднього вікна і якому повторити пп. В) – Д), але обравши пункт City-block distance, і теж вставити матрицю відстаней у файл Excel.

2) Застосувавши функцію Solve електронних таблиць Excel, потрібно вирішити оптимальні задачі включення до кластерів для матриць відстаней, розрахованих за цими метриками.

3) Виконати кластеризацію, застосувавши програму Statistica для тих же даних і для тих же метрик, вказавши число кластерів таке, яке вийшло при прозрахунках за п. 2..

3) порівняти результати кластеризації і зробити висновки.

Таблиця 1.3

Варіанти завдань

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
0	64	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939	19602
	31	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606	7194
	39	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909	9504
	44	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363	11814
	87	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848	15378
1	25	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969	20262
	67	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484	7326
	62	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697	13530
	53	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151	13068
	42	0,42	610	1100	232,07	5474,0	4,29169	1,72727	6270
2	76	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121	11616
	35	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121	5214
	43	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848	14916
	52	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787	10164
3	33	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090	19338
	41	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909	20328
	69	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181	11352
	66	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575	13398
4	59	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333	13464
	68	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090	8316
	34	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393	17754
	38	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606	19866
	56	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545	5610
5	86	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818	17094
	81	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454	18084
	58	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151	6336
	40	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424	11352
	55	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484	9306
6	25	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848	20790
	69	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545	10164
	74	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121	17490
	72	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424	7062
	86	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909	20460
7	53	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272	5214
	36	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909	19866
	32	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757	9504
	71	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909	7194
	67	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303	5940
8	48	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787	18480
	29	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181	16962
	82	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666	19932
	53	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060	13200
	68	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757	6534

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
9	80	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878	11352
	75	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424	15444
	83	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272	6204
	38	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393	7524
	72	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333	9240

1.9. Спектральний аналіз

Цей вид аналізу застосовується у випадку дослідження періодичних процесів в соціально-економічних системах. Тобто тоді, коли припускається, що вони можуть бути описані періодичними функціями. Періодичні функції визначаються так. Для кожної з них існує число $T > 0$ таке, що при всіх x, що належать області визначення функції f, значення $x + T$ і $x - T$ також належать цій області і виконується рівність $f(x+T) = f(x)$.

Такі функції називаються Т - періодичними.

Для визначення періодичності серед отриманих даних використовується спектральний аналіз. Спектр виходить в результаті розкладання початкової функції, залежної від часу (часовий ряд) або просторових координат (наприклад, зображення) в базис деякої періодичної функції. Найчастіше для спектральної обробки використовується спектр Фурье, що отримується шляхом розкладання початкової функції в базис синуса (розкладання Фурье, перетворення Фурье).

Основний сенс перетворення Фурье в тому, що початкова неперіодична функція довільної форми, яку неможливо описати аналітично і в загальному випадку важка для обробки і аналізу, представляється у вигляді сукупності синусів або косинусів з різною частотою і амплітудою. Іншими словами, складна функція представляється у вигляді сукупності простіших (розкладання). Кожна синусоїда (або косинусоїда) з певною частотою і амплітудою, отримана в результаті розкладання Фурье, називається спектральною складовою або гармонікою. Спектральні складові утворюють спектр Фурье.

Візуально спектр Фурье представляється у вигляді графіка, на якому по горизонтальній осі відкладається кругова частота, а по вертикалі – амплітуда спектральних складових, що зазвичай позначається латинською буквою A. Тоді кожна спектральна складова може бути представлена у вигляді відліку, положення якого на горизонтальній осі відповідає частоті складової, а висота – її амплітуді. Гармоніка з нульовою частотою називається постійною складовою (у тимчасовому уявленні це пряма лінія).

Навіть простій візуальний аналіз спектру може багато сказати про характер функції, на основі якої він був отриманий.

Довжина хвилі функцій синуса або косинуса, як правило, виражається числом циклів (періодів) в одиницю часу (Частота), часто позначається як η; у деяких підручниках також використовують f). Наприклад, часовий ряд, що складається з кількості листів, що обробляються поштою, може мати 12 циклів в році: першого числа кожного місяця відправляється велика кількість кореспонденції (багато рахунків приходить саме першого числа кожного місяця); потім, до середини місяця, кількість кореспонденції зменшується; і потім знов зростає до кінця місяця. Тому кожен місяць коливання в кількості кореспонденції, що обробляється поштовим відділенням, проходитимуть повний цикл. Таким чином, якщо одиниця аналізу - один рік, то буде дорівнювати 12 (оскільки є 12 циклів в році). Звичайно, можуть бути і інші цикли з різними частотами. Наприклад, річні цикли (v = 1) і, можливо, тижневі цикли (v = 52 тижні в рік).

Модель лінійної множинної регресії може бути записана як

$$x_t = a_0 + \sum (a_k \cdot \cos(\lambda_k \cdot t) + b_k \cdot \sin(\lambda_k \cdot t)), \tag{1.35}$$

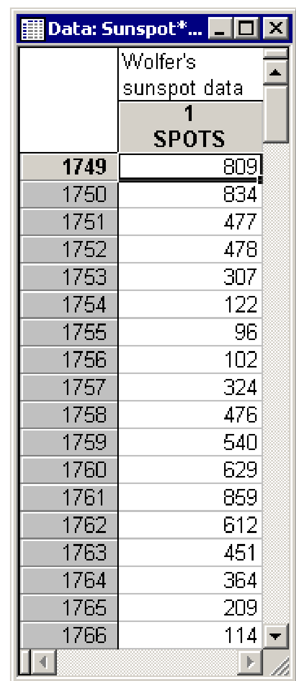
(для λ_k до k= 1 до q)

Наступне загальне поняття класичного гармонійного аналізу в цьому рівнянні λ_k – (лямбда) – це кругова частота, виражена в радіанах в одиницю часу, тобто $\lambda = 2 \cdot \pi \cdot \eta_k$, де π – константа (3.1416) і $\eta_k = \dfrac{k}{q}$.

Тут важливо усвідомити, що обчислювальне завдання підгонки функцій синусів і косинусів різних довжин до даних може бути вирішена за допомогою множинної лінійної регресії. Відмітимо, що коефіцієнти при косинусах і коефіцієнти при синусах – це коефіцієнти регресії, що показують ступінь, з яким відповідні функції корелюють з даними (відмітимо, що самі синуси і косинуси на різних частотах не корельовано або, іншою мовою, ортогональні. Таким чином, ми маємо справу з окремим випадком розкладання по ортогональних поліномах). Всього існує q різних синусів і косинусів; інтуїтивно ясно, що число функцій синусів і косинусів не може бути більше числа даних в ряду. Не вдаючись до подробиць, відзначимо, якщо N – кількість даних, то буде $N/2+1$ функцій косинусів і $N/2-1$ функцій синусів. Іншими словами, різних синусоїдальних хвиль буде стільки ж, скільки даних, і ви зможете повністю відтворити ряд по основних функціях. (Відмітимо, якщо кількість даних у ряді не парно, то останнє спостереження зазвичай опускається. Для визначення синусоїдальної функції потрібно мати, принаймні, дві точки: високого і низького піку).

У результаті, спектральний аналіз визначає найбільш характерні частоти, чиї періоди характеризують конкретну соціально-економічну систему.

Приклад. Файл містить частину відомих чисел сонячних плям з 1749 року по 1924 рік. Нижче показаний список перших декілька даних з файлу з прикладами розрахунку із застосуванням пакету прикладних програм STATISTICA (рис. 1.10). Для цього обирається пункти головного меню Statistics - Advanced Models – Time Series forecasting – Spectral (Fourier) analysis. У ньому обраєте потрібну колонку даних і натискаєте OK. Далі обираєте Single Series Fourier analysis і розрахунок буде виконано.


Data: Sunspot*...

	Wolfer's sunspot data 1 SPOTS
1749	809
1750	834
1751	477
1752	478
1753	307
1754	122
1755	96
1756	102
1757	324
1758	476
1759	540
1760	629
1761	859
1762	612
1763	451
1764	364
1765	209
1766	114

Рис.1.10. Файл даних.

Припускається, що кількість сонячних плям впливає на погоду на землі, а також на сільське господарство, на телекомунікації і так далі Застосовуючи цей аналіз, можна спробувати з'ясувати, чи дійсно активність сонячних плям має циклічну природу.

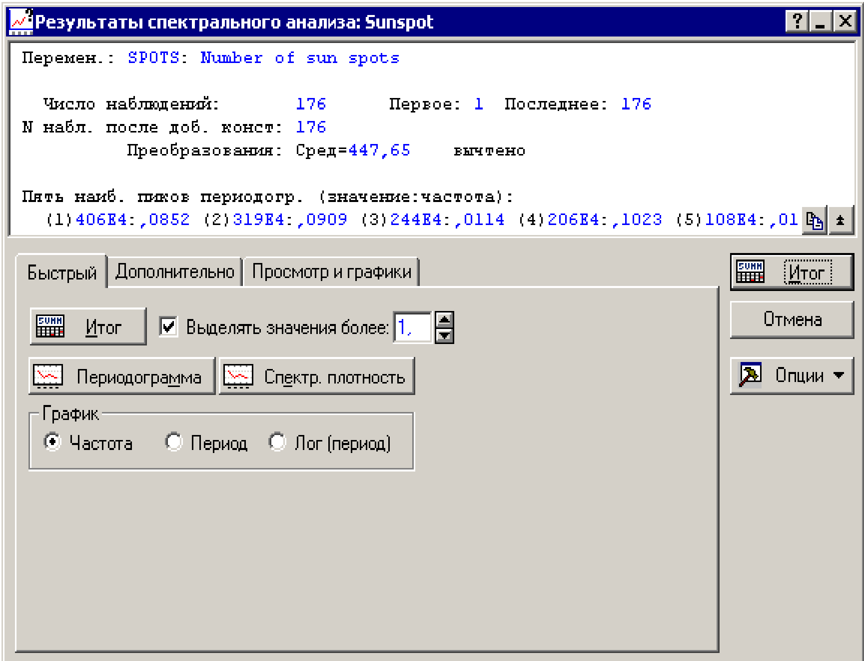


Рис. 3.8. Налаштування спектрального аналізу

Розділ інформації у верхній частині діалогового вікна показує деякі підсумкові статистики ряду (рис. 3.8). Він також показує п'ять найбільших піків періодограми (по частоті). Найбільших три піки на частотах 0.0852, 0.0909 і 0.0114. Ця інформація часто корисна при аналізі дуже великих рядів (наприклад, з більш ніж 100,000 спостереженнями), які непросто надати на одному графіку.

На графіку періодограми видно два чіткі піки (рис. 3.9-10). Максимальний – на частоті приблизно 0.9. Нижче показана частина таблиці результатів з найбільшим піком, встановленим за періодограмою.

Таким чином, Частота 0.0909 відповідає значенню 11 Періоду (число одиниць часу, потрібних на повний цикл). Оскільки дані сонячних плям в

Sunspot.sta є річними спостереженнями, можна укласти, що існує яскраво виражений 11-річний (можливо трохи довше чим 11-річний) цикл в активності сонячних плям.

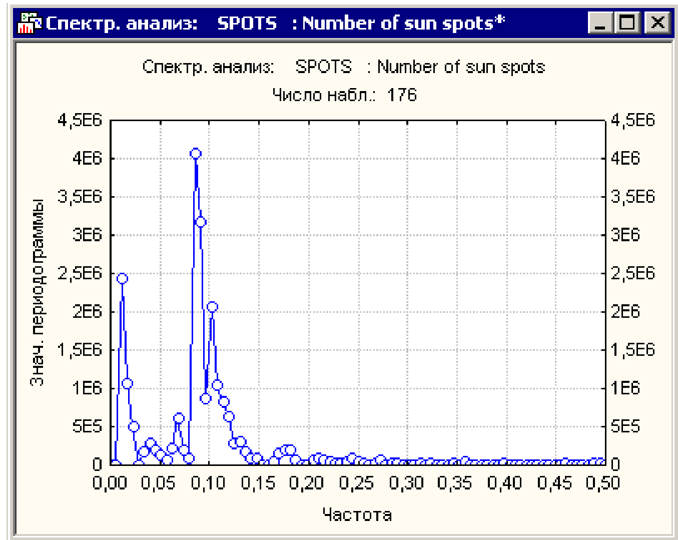


Рис. 1.11. Графік періодограми по частоті

Спектральна щільність. Зазвичай для обчислення оцінок спектральної щільності періодограму згладжують, щоб прибрати випадкові коливання.

Два піки стали тепер навіть виразніше. Подивимося на значення періодограми по періоду.

Знову видно, що існує яскраво виражений 11-річний цикл в активності сонячних плям; більш того, є ознаки існування тривалішого приблизно 80-ти - 90-річного циклу.

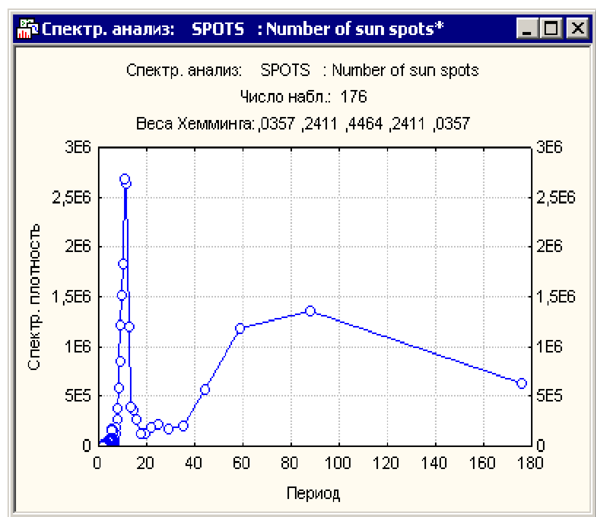


Рис. 1.12. Графік значень періодограми

1.10. Індивідуальне завдання №3. Визначення спектральних характеристик

Завдання: Вивчити спектральний аналіз даних з метою визначення наявності періодичних процесів

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує згенеровану в індивідуальному завдання №1 матрицю абсолютних значень і нормовану матрицю..

Методичні вказівки: 1) провести спектральний аналіз для кожної змінної в абсолютних значеннях і нормованої.

2) Визначити характерні частоти та їх амплітуди для обох типів даних – в абсолютних значеннях і нормованої.

3) порівняти характерні частоти і зробити висновки.

4) Звіт створити у програмі Word, розміщаючи копії екрану з поясненнями.

1.11. Метод найменших квадратів

З цього пункту ми починаємо власне побудову економіко-математичних моделей. Під цим терміном ховається наступна процедура:

1. Зібрати статистичні дані щодо зміни в часі економічних параметрів.
2. Провести їх статистичну обробку щодо їх достовірності.
3. Обрати формулу, яка, на вашу думку може пов'язати Y з Xi.
4. Розрахувати числові коефіцієнти цієї формули.
5. Визначити достовірність отриманої економіко-математичної моделі.

Саме пп. 3-5 і є процесом побудови моделі.

З опису видно, що найбільшу проблему становить визначення коефіцієнтів обраної моделі. У вирішенні цієї проблеми нам допоможе метод найменших квадратів, який має назву за основним принципом розрахунку коефіцієнтів: вони знаходяться при умові, що сума різниць квадратів справжнього значення Y та розрахованого за отриманою формулою, є мінімальним.

Метод найменших квадратів (МНК) є одним з фундаментальних методів у статистиці та математичному моделюванні, який використовується для апроксимації функцій, зокрема лінійних моделей, до емпіричних даних. Основна ідея полягає в тому, щоб знайти такі параметри моделі, які мінімізують суму квадратів відхилень між спостережуваними значеннями і тими, які передбачає модель.

Основні поняття:

Лінійна модель: МНК часто застосовується для лінійних моделей, що мають вигляд:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n + \varepsilon$$

де Y – залежна змінна, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні змінні, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ – параметри моделі, ε – помилка моделі.

Мінімізація помилок: Метод найменших квадратів шукає такі значення параметрів $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, щоб сума квадратів помилок ε_i була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_n X_{in}))^2$$

де N – кількість спостережень.

Формули для розрахунків параметрів:

Для визначення параметрів моделі $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ можна використовувати формули

1. **Матрична форма**:

Параметри можна знайти за допомогою матричного підходу:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

де:

- Y – вектор спостережень залежної змінної,
- X–- матриця з незалежними змінними,
- β – вектор параметрів моделі,

- ε – вектор помилок.

Параметри β можна знайти за формулою: $\beta = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$

Тут $(X\top X)^{-1}$ – обернена матриця від матриці $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$.

2. **Для простіших випадків**:

   У випадку однієї незалежної змінної X:

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}$$

Де $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ - середні значення змінних X і Y відповідно.

Всі ці математичні перетворення реалізовані в програмі Excel за пунктом меню «Дані-Аналіз даних -Регресія».

Ось який вигляд має вікно цієї функції (рис. 1.13).

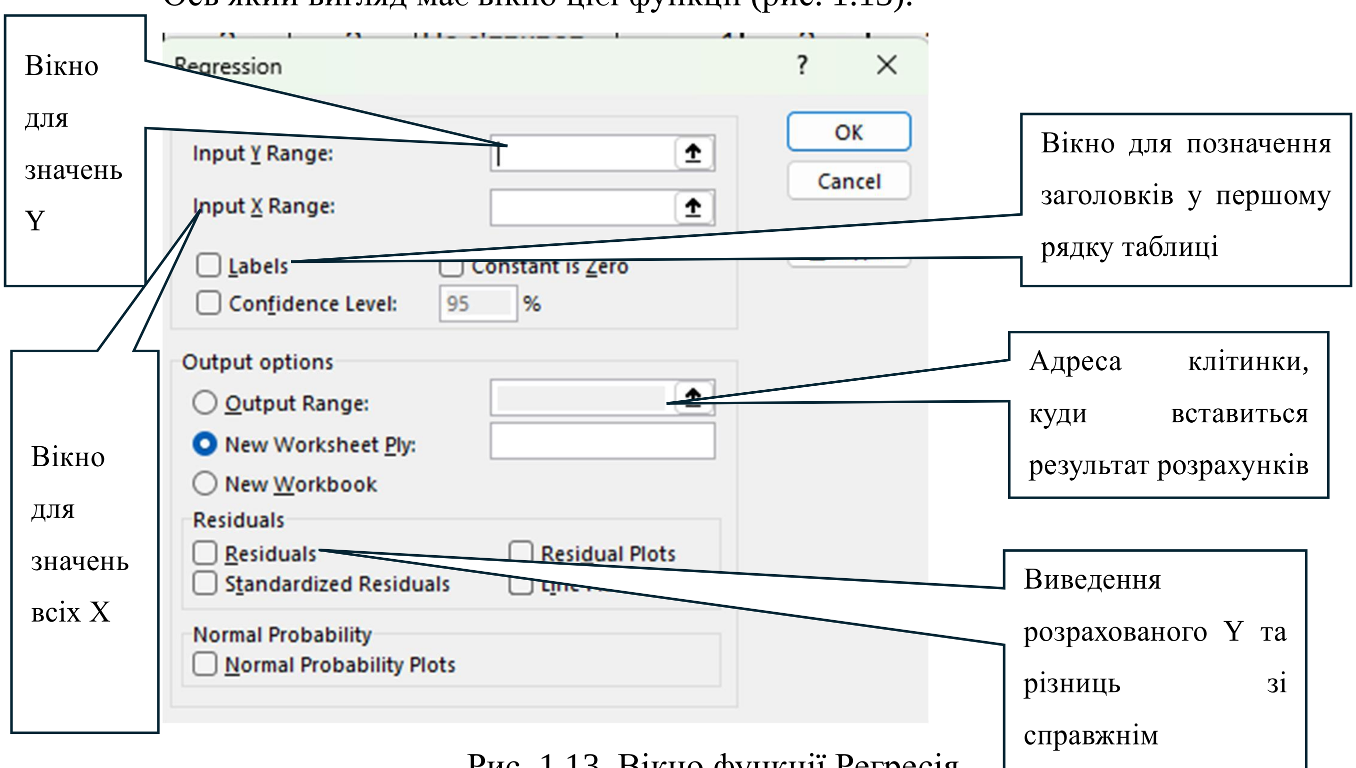


Рис. 1.13. Вікно функції Регресія

Приклад розрахунку коефіцієнтів $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ подано на рис. 1.14.

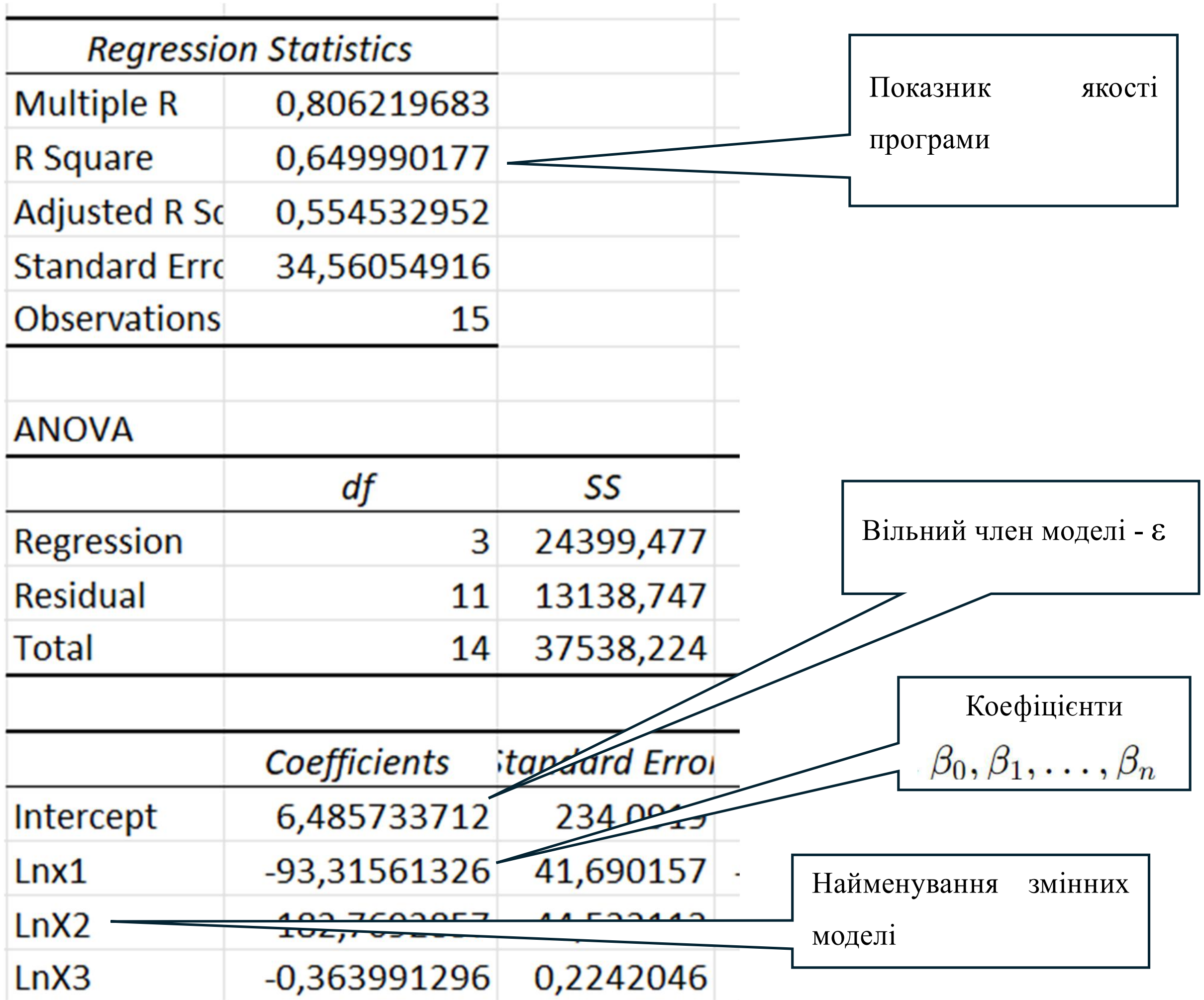


Рис. 1.14. Результат розрахунку коефіцієнтів лінійної моделі

Статистичні дослідження економічних систем і процесів, що відбуваються в них, провадяться для утворення їх результатів – таблиць з числовими значеннями різних економічних факторів. Збирання даних провадиться частіше всього для різних моментів часу (по роках, кварталах місяцях) або для одного моменту часу, але для різних економічних об’єктів. Їх розташовують в одному стовпці для одного моменту часу або для одного економічного об’єкту. Приклад таких статистичних таблиць в табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Статистика по шахті № 7 за 2006 р   Статистика по підприємствам за I квартал

Період	Рентабельність	Матеріали	Основні засоби
I квартал	5%	2500000	5200000
II квартал	4%	2200000	5100000
III квартал	1%	2800000	5400000
IV квартал	12%	1200000	5800000

Підприємства	Рентабельність	Матеріали	Основні засоби
Вагоноремонтний завод	2%	25000	690000
Металургійний комбінат	15%	9900000	5800000
Шахта № 7	5%	2500000	5200000
Трамвайне депо	-0,2%	12000	2800000

На першому етапі збирання статистичних даних всі фактори вважаються рівнозначними. Але для подальшої роботи по створенню математичних моделей, фактори треба розділити на вхідні і вихідні, або інакше, залежні і незалежні. Цей розподіл виконується довільно, згідно задач, які ставить перед собою дослідник. Наприклад, якщо потрібно побудувати модель впливу на рентабельність матеріалів та основних засобів, то рентабельність буде залежним фактором, а матеріали та основні засоби – незалежними. Залежних і незалежних факторів може бути декілька. Залежні позначаються як y_1, y_2, y_3......., а незалежні як x_1, x_3, x_3….

Для зручності подальшої обробки даних на комп’ютері, залежні і незалежні фактори розташовуються у сусідніх стовпцях таблиці, – кожна група окремо. Приклад такого угрупування показано в табл. 3.1.

Алгоритм синтезу квазілінийних статистичних моделей базується на положеннях регресивного аналізу, який дозволяє знайти емпіричну формулу залежності вихідних факторів від вхідних

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{K} a_i x_i \,, \tag{1.36}$$

де a_0 – коефіцієнти моделі, x_i – вхідні фактори, y – вихідний фактор.

На першому етапі розробки моделі довільної форми, висувається гіпотеза про можливий вигляд такої моделі.

Це може бути (тут і далі наводяться формули для одного залежного і одного незалежного фактору)

– поліном ***n***-го порядку $$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i ; \qquad (1.37)$$

– експоненційна функція $$y = a_0 \ell^{a_i x_i} ; \qquad (1.38)$$

– логарифмічна функція по основі *n* $$y = a_0 \log_n x ; \qquad (1.39)$$

– обернена степенева $$y = a_0 + \sum_{i=-n}^{-1} a_i x^i , \qquad (1.40)$$

де a_0 – константа, а a_i – коефіцієнти при вхідних факторах.

Якщо незалежних факторів декілька, можна утворити з них комплекси типу $x_1\, x_2$, $x_1/\, x_2$, x_1-x_2, log $x_1\, x_2$, і т. д, об’єднуючи їх по двоє, троє і більше.

Другим етапом роботи є додавання до початкової таблиці стовпців результатів математичних перетворень вигляду (1.37) - (1.40). Рекомендується результати перетворення кожного фактору розташовувати в сусідніх колонках таблиці, поруч з самим фактором.

Тепер таблиця підготовлена до розрахунку коефіцієнтів лінійної регресії виду

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{K} a_i x_i , \qquad (1.41)$$

де *K* – кількість вхідних факторів моделі. Оскільки при розрахунку коефіцієнтів регресії ми використовуємо чисельні значення не тільки самих вхідних факторів, але і їх математичні перетворення, фактично ми отримуємо нелінійну залежність y від x_i.

Для визначення параметрів лінійної регресії скористайтеся функцією

LINEST(Data_Y; Data_X; Linear_Type; Stats),

де Data_Y – масив даних вихідних факторів *y*. Має бути тільки один стовпець вихідного фактору; Data_X – масив вхідних параметрів, *x*, скільки потрібно стовпців; Linear_Type – ознака проходження лінії регресії через 0 (0 – проходить, 1 – не проходить); Stats – потреба виводити статистичні дані про розрахунок параметрів лінійної регресії (1 – якщо потрібно, 0 – непотрібно).

Наприклад (табл.1.5), для таблиці значень вхідних факторів X_1 та X_2 , та стовпчика значень Y. Покажемо фрагмент електронної таблиці. В ній незалежні фактори займають стовпчик A та B, а залежний – C.

Запишемо тепер формулу з адресами конкретних клітинок

=LINEST(C2:C8;A2:B8;1;1)

тут, Data_Y - це C2:C8; Data_X - це A2:B8; Linear_Type і Stats обоє дорівнюють 1. Як тільки натиснемо кнопку OK, виведе результати розрахунку в наступні клітинки:

Таблиця 1.5.

Приклад розрахунку коефіцієнтів лінійної регресії

	A	B	C	D	E	F	G
1	X1	X2	Y		Значення LINEST		
2	4	7	100		4,17	-3,48	82,33
3	5	9	105		5,46	10,96	9,35
4	6	11	104		0,87	5,06	#NA
5	7	12	108		13,21	4	#NA
6	8	15	111		675,45	102,26	#NA
7	9	17	120				
8	10	19	133				

E2 і F2: Коефіцієнти a_1 при вхідних параметрах залежності виду $y=a_0+a_1*x$ для значень X_1 і X_2. Порядок подання цих коефіцієнтів зворотній – в E2 коефіцієнт для X_2 і

F2: коефіцієнт для X_1.

G2: Коефіцієнт a_0.

E3 і F3: Стандартна помилка значення коефіцієнтів a_1.

G3: Стандартна помилка коефіцієнта a_0.

F4: Стандартна помилка регресії, обчисленої для значення Y.

E5: Значення F - критерію для аналізу якості апроксимації.

F5: Ступені свободи для аналізу якості апроксимації.

E6: Сума квадратів відхилення оцінених значень Y від їх середнього.

F6: Сума квадратів відхилення оцінених значень Y від наданих значень Y.

Після отримання числових значень коефіцієнтів квазілінійної статистичної моделі, виконаємо денормування коефіцієнтів при вхідних факторах та скорегуємо значення коефіцієнта a_0.

Пояснимо на прикладі це положення. Нехай шукалася залежність виду

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2. \tag{1.42}$$

Щоб отримати таку залежність, до таблиці зі значеннями X та У потрібно додати іще один стовпець зі значеннями X^2.

Аналогічно, для побудови залежностей виду (1.38) потрібно додати стовпці зі значеннями Ln Y. Тоді буде отримана залежність виду

$$\mathrm{Ln}\,Y = a_1X + a_0.$$

Візьмемо експоненту від лівої та правої частини, щоб отримати (1.38)

$$\boldsymbol{e^{LnY} = Y = e^{(a_1X + a_0)} = e^{\,a_0}e^{a_1X}}$$

Якщо взяти таблицю з двома X та одним У, де всі дані були логарифмовані, ми отримаємо залежність виду

$$\boldsymbol{Ln\,Y = a_0 + a_1Ln\,X_1 + a_2\,LnX_2}$$

Представимо, що a_0 помножений на 1, тобто на Ln **e.** Тоді, згідно властивостей логарифмів, цю формулу можна переписати таким чином

$$\boldsymbol{Ln\,Y = Ln\,e^{a_0} + Ln\,X_1^{a_1} + Ln\,X_2^{a_2}}$$

Звідкіля слідує що

$$\boldsymbol{Ln\,Y = Ln\,(e^{a_0}\,X_1^{a_1}\,X_2^{a_2})}$$

Подальші перетворення дадуть нам функцію Кобба-Дугласа, якщо в якості вхідних факторів було взято обсяг праці та капіталу, вихідного – об’єм виробництва.

$$\boldsymbol{Y = e^{a_0}\,X_1^{a_1}\,X_2^{a_2}}$$

Інколи, економічні фактори спостерігаються поодинці, тобто не має можливості поставити їм у відповідність якісь інші фактори, які можна було б позначити як незалежні, щоб побудувати модель. Буває й так, що такі фактори спостерігаються в залежності від часу, але інтервали спостереження дуже нерівномірні і кореляція між часом і цим фактором незначна. Тобто, час теж не можна вважати незалежним фактором, який впливає на фактор, що розглядається.

В цих випадках при побудові статистичної моделі в якості незалежних факторів беруть попередні значення фактору, зміна якого вивчається і для якого потрібно побудувати модель.

В залежності від кількості взятих попередніх значень фактору, модель може мати будь яку кількість вхідних факторів, але не більше ніж N-2, де N – кількість значень фактору, отриманих шляхом статистичних спостережень.

В загальному вигляді ця модель записується як

$$y = f(y_{-1}, y_{-2}, y_{-3} \ldots y_{-N}), \tag{1.43}$$

тут N – кількість попередніх значень фактору, для якого будується така модель. Функція ж залежності може бути будь-якою.

Таблиця 1.6.

Рентабельність	Попереднє значення рентабельності
5%	-
4%	5%
1%	4%
12%	1%

Для прикладу, користаємося табл. .1 і побудуємо табл. 4.3 для рентабельності, в залежності від її попереднього значення. Перенесемо попередні значення рентабельності в сусідній стовпець зі зміщенням на 1 позицію так, як це показують стрілочки. При цьому, загальна кількість даних, яка буде використана для розрахунку коефіцієнтів регресійної моделі буде зменшена на 1. Тепер попереднє значення рентабельності буде вхідним фактором такої моделі. Якщо враховувати більше попередніх значень, розмір таблиці буде зменшуватися, як показано на рис. 1. 15

Y3				
315	Y3			
315	315	Y3		
490	315	315	Y3	
325	490	315	315	Y3
365	325	490	315	315
430	365	325	490	315
360	430	365	325	490
480	360	430	365	325
415	480	360	430	365
280	415	480	360	430
370	280	415	480	360
355	370	280	415	480
265	355	370	280	415
455	265	355	370	280
442,4118198	455	265	355	370
372,888654	442,41182	455	265	355
455,9818511	372,88865	442,4118	455	265
	455,98185	372,8887	442,41182	455
		455,9819	372,88865	442,4118198
			455,98185	372,888654
				455,9818511

Рис. 1.15. Приклад побудови матриці для авторегресійної функції. Жовтим виділені значення функції, розраховані за її попередніми значеннями

Для знайдення коефіцієнтів такої функції, потрібно брати тільки прямокутну частину таблиці. Потім, коли коефіцієнти будуть розраховані, можна підставити у формулу попередні значення функції і отримати її нове прогнозоване значення.

1.12. Індивідуальне завдання №4.
Побудова лінійних, нелінійних та авторегресійних моделей

Завдання: Вивчити спектральний аналіз даних з метою визначення наявності періодичних процесів

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує згенеровану в індивідуальному завдання №1 матрицю абсолютних значень і нормовану матрицю.

Методичні вказівки: 1) розрахувати коефіцієнти для моделей виду (1.36) – (1.40).

2) Визначити якість цих моделей і порівняти, для якого перетворення якість вища..

3) для кожної з трьох факторів побудувати авторегресійні моделі для двох попередніх значень.

4) розрахувати прогноз на дві значення.

5) зробити висновки, розмістивши текст в Excel.

1.13. Трансцендентні моделі

Трансцендентні моделі є специфічним типом математичних моделей, які використовуються для опису складних фізичних або природних явищ. Основна відмінність трансцендентних моделей полягає в тому, що вони включають трансцендентні функції, такі як синус, косинус, експонента, логарифм і т.д., для опису залежностей між змінними.

Основні особливості трансцендентних моделей:

1. **Форма функцій**: Вони використовують трансцендентні функції для апроксимації або опису залежностей. Наприклад, у рівняннях можуть зустрічатися такі функції як $\sin(x)$, e^x, $\ln(x)$, інтегральні функції і т.д.

2. **Складність аналізу**: Трансцендентні моделі можуть бути складні для аналізу через складність їх математичної структури і часто вимагають числових методів для розв'язання.
3. **Застосування**: Вони часто використовуються в науці і техніці для опису фізичних явищ, які не можна адекватно моделювати за допомогою простіших лінійних або поліноміальних моделей. Прикладами можуть бути періодичні процеси в економіці, динаміка популяцій в біології, розповсюдження хвороб, хімічні реакції зі складними кінетиками тощо.
4. **Апроксимація даних**: Трансцендентні моделі часто використовуються для апроксимації експериментальних даних, коли існує необхідність точного відображення нелінійних залежностей.

Наприклад, модель, що описує розподіл популяції організмів в часі, може використовувати трансцендентні функції для урахування взаємодії між різними факторами, що впливають на ріст та зміну кількості організмів.

Таким чином, трансцендентні моделі відіграють важливу роль у математичному моделюванні складних фізичних, біологічних і хімічних процесів, де звичайні лінійні або поліноміальні моделі виявляються недостатніми для точного опису.

Головна відмінність цих моделей полягає у тому, що їх неможливо привести до суми перетворень окремих змінних

У цьому випадку потрібно також використовувати метод найменших квадратів, але тільки у тому, що знаходиться сума квадратів різниць справжнього значення У та розрахованого за моделлю.

Якщо спектральний аналіз соціально-економічної системи показав наявність деяких частот, що постійно присутні в різні моменти часу, коли проводився аналіз, рекомендується будувати періодичні моделі. Це такі моделі, в яких присутні тригонометричні періодичні функції. В деяких випадках дослідних може висунути гіпотезу про періодичність процесів апріорі.

В якості апроксимуючої залежності пропонується наступна формула

$$y = Ax^B + C(1 - e^{Dx})Sin(Ex^F + G) + H\,, \qquad (1.44)$$

де x – аргумент, y – функція, A - H – константи, e – основа натурального логарифму. В залежності від чисельних значень констант, ця формула дає множину кривих, представлену на рис. 1.16.

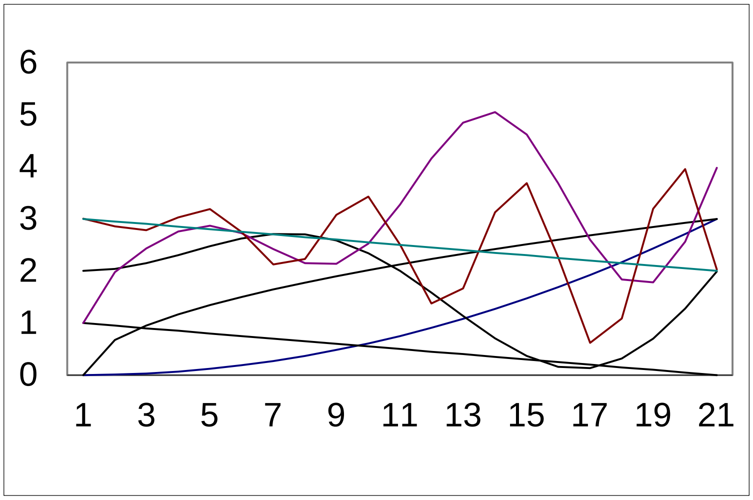


Рис. 1.16 Типи кривих, які можна створити за допомогою формули (1.44)

Вирішення задачі визначення числових значень коефіцієнтів такої моделі ускладнюється тим, що не існує таких математичних перетворень, які б дозволили лінеаризувати (4.14), щоб потім отримати значення констант A - H методом регресії. Тому для вирішення цієї задачі був застосований підхід, який враховує відсутність чи наявність знань про значення характерних частот чи періодів:

1. Встановити довільні значення констант A - H.
2. Для всіх значень аргументу і довільних значень констант розрахувати величину y, яку позначимо як y_p за формулою (1.44).
3. Для кожного значення функції знайти $(y_p - y_ф)^2$, де $y_ф$ – фактичне значення функції, отримане за статистичними даними.
4. Вирішити оптимальну задачу з функціоналом виду

$$\sum_{i=1}^{N}(y_p - y_{\hat{o}})^2 \to \min\,, \qquad (1.45)$$

а параметрами, що змінюються, будуть константи A - H. Де N – розмір статистичної вибірки.

Для збільшення точності розрахунку, рекомендується встановлювати обмеження на значення констант за наступним правилом:

1. На графіку, який було побудовано за статистичними даними, виділяється елемент кривої, що нагадує синусоїду і знаходиться проміжок значень аргументу, на якому ця синусоїда здійснює повне коливання – Δx. Тоді, для константи E треба встановити наступне обмеження

$$E \leq (0{,}5 - 1{,}5)\, 2\pi/\Delta x_1. \tag{1.46}$$

Якщо період знайдено за спектральним аналізом, то підставляти ці значення.

2. Початкові значення констант B та F рекомендується становити рівними одиниці, константи H – середньому арифметичному статистичного значення функції, константу – D = 0.05, A = 0.

3. Константа C визначається з максимальної амплітуди Δy тієї частини графіку, яка визначена як синусоїдальна, і має наступні обмеження

$$C \leq (0{,}4 - 0{,}6)\, \Delta y. \tag{1.47}$$

Якщо амплітуда знайдена за спектральним аналізом, то підставити її значення.

Розглянута вище методика для одного вихідного фактору може бути розповсюджена для будь-якої їх кількості. Це відбувається тоді, коли кількість характерних частот більше ніж одна. При цьому утворюється сума з формул виду (4.14), а далі вся процедура аналогічна. Тільки кількість змінних параметрів у (4.15) збільшується на кількість вхідних факторів, які включені до такої моделі.

Для прикладу, наведемо авторегресійну модель собівартості граніту Торчинського родовища (Дніпропетровська область) в якій було взято собівартість за попередній рік ($c_{t-12,1}$) та за попередні два роки ($c_{t-24,1}$).

$$\begin{aligned} C_{t,1} =& 1{,}342 c_{t-12,1}^{\;0{,}887} + 0{,}525(1\text{-}e^{-0{,}976 c_{t-12,1}})\sin(0{,}524 c_{t-12,1}^{\;1{,}187} + 0{,}664) - \\ &- 0{,}402 c_{t-24,1}^{\;0{,}686} + 0{,}288(1\text{-}e^{-0{,}106 c_{t-24,1}})\sin(0{,}524 c_{t-24,1}^{\;0{,}808} + 0{,}195) - 0{,}146. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Як видно з рис. 1.17, отримана функція майже точно повторює фактичні значення собівартості.

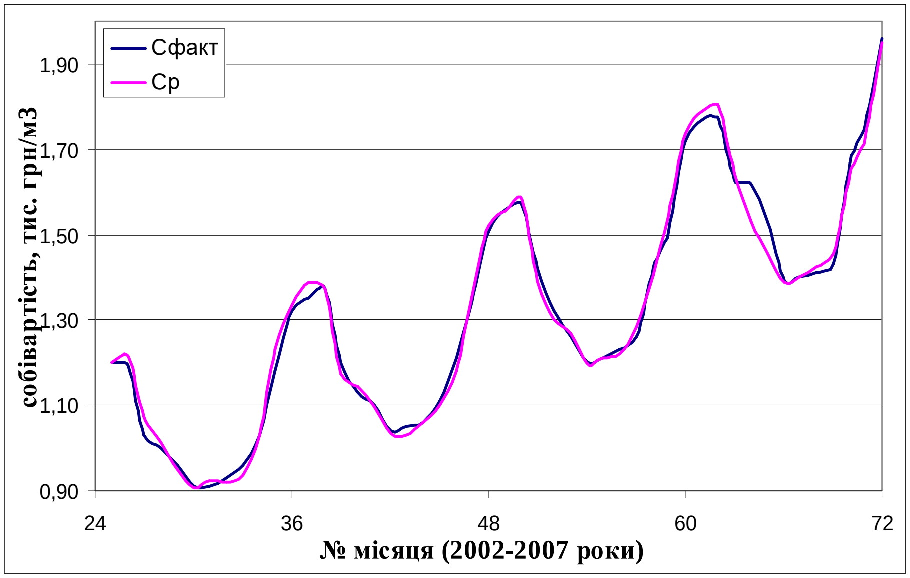


Рисунок 1.17. Порівняння фактичного та розрахункового значення собівартості Торчинського граніту

Запропонована методику була успішно використана для створення моделей споживання палива енергогенеруючою компанією, потоку замовлень на підприємстві зв'язку, розрахунку середньорічних температур, визначення врожайності зернових культур, тощо.

Для знайдення коефіцієнтів *A-H* рекомендується використання функції «Розв'язувач».

1.14. Індивідуальне завдання №5. Побудова трансцендентних моделей

Завдання: Вивчити метод знайдення коефіцієнтів трансцендентних функцій.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує згенеровану в індивідуальному завдання №1 матрицю абсолютних значень і нормовану матрицю.

Методичні вказівки: 1) Обрати формулу за останньою цифрою номеру за списком групи.

2) задати початкові значення коефіцієнтів (у більшості формул, окрім першої, присвоїти їм одиницю)..

3) Розрахувати значення Y і знайти суму квадратів ризниць поміж розрахованим і справжнім значенням Y.

4) вирішити пошук рішення, зробивши коефіцієнти змінним факторами, а суму квадратів – цільовою функцією, що прагне до нуля. Обмеженнями мають бути значення коефіцієнтів, що більше або дорівнюють нулю

5) знайдені коефіцієнти підставити у формулу і навести її у звіті. Зробити висновки, розмістивши текст в Excel.

Остання цифра номера за списком	Формула
0	$y = Ax^{B} + C(1 - e^{Dx})Sin(Ex^{F} + G) + H$, x = X_1
1	, $X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}$ де K = X_1, L = X_2
2	$U(x_1, x_2) = \left(\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho}\right)^{-1/\rho}$
3	$X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}$ де K = X_1, L = X_2, при умові, що $a_2 = 1 - a_1$
4	$\boldsymbol{Y = a_0 MAX\left(\frac{X_1}{a_1}; \frac{X_2}{a_2}\right)}$
5	$\boldsymbol{Y = a_0(Sin\, a_1\, X_1 - Cos\, a_2\, X_2)}$
6	$\boldsymbol{Y = a_0 a_1^{X_1}}$

Остання цифра номера за списком	Формула
7	$$Y = a_0 Sin^{(a_1 X_1)} a_2 X_2$$
8	$$Y = \frac{a_0}{a_1 + e^{-a_2 X_2}}$$
9	$$Y = a_0 - \frac{a_1}{a_2 + X_1^{a_3}}$$

1.15. Імітаційне моделювання

Імітаці́йне моделюва́ння – це метод, що дозволяє будувати моделі процесів, що описують, як ці процеси проходили б насправді.

Таку модель можна «програти» в часі як для одного випробування, так і заданої їх кількості. При цьому результати визначатимуться випадковим характером процесів. За цими даними можна отримати достатньо стійку статистику.

Імітаційне моделювання – це метод дослідження, заснований на тому, що система, яка вивчається, замінюється імітатором і з ним проводяться експерименти з метою отримання інформації про цю систему. Експериментування з імітатором називають імітацією (імітація – це збагнення суті явища, не вдаючись до експериментів на реальному об'єкті).

Імітаційне моделювання – це окремий випадок математичного моделювання. Існує клас об'єктів, для яких з різних причин не розроблені аналітичні моделі або не розроблені методи розв'язування задач про такі моделі. В цьому випадку математична модель замінюється імітатором або імітаційною моделлю.

Імітаційна модель – (у вузькому значенні) логіко-математичний опис об'єкта, який може бути використаний для експериментування на комп'ютері в цілях проектування, аналізу і оцінки функціонування об'єкта.

Ме́тод Мо́нте-Ка́рло (за назвою міста Монте-Карло, Монако, яке відоме своїми казино) – загальна назва групи числових методів, заснованих на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного (випадкового) процесу, який формується у той спосіб, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Використовується для розв'язування задач у фізиці, математиці, економіці, оптимізації, теорії управління тощо.

Метод Монте-Карло – це метод імітації для приблизного відтворення реальних явищ. Він об'єднує аналіз чутливості (сприйнятливості) і аналіз розподілу ймовірностей вхідних змінних. Цей метод дає змогу побудувати модель, мінімізуючи дані, а також максимізувати значення даних, які використовуються в моделі. Побудова моделі починається з визначення функціональних залежностей у реальній системі. Після чого можна одержати кількісний розв'язок, використовуючи теорію ймовірності й таблиці випадкових чисел.

Метод Монте-Карло широко використовується у всіх випадках симуляції на ЕОМ.

Метод Монте-Карло застосовується для апроксимації значення π. Після розміщення 30000 випадкових точок, оцінка для π знаходиться в межах 0,07 % від фактичного значення.

Не існує єдиного методу Монте-Карло, цей термін описує великий і широко використовуваний клас підходів. Проте ці підходи використовують в своїй основі єдиний шаблон:

1. Визначити область можливих вхідних даних.
2. Випадковим чином згенерувати вхідні дані із визначеної вище області за допомогою деякого заданого розподілу ймовірностей.
3. Виконати детерміновані обчислення над вхідними даними.

4. Проміжні результати окремих розрахунків звести у кінцевий результат.

Використання методів Монте-Карло вимагає великої кількості випадкових чисел, їх використання стимулювало розвиток багатьох генераторів псевдовипадкових чисел, які є набагато швидшими в використанні, ніж таблиці випадкових чисел, що раніше використовувалися для статистичної вибірки.

Перед тим як метод Монте-Карло був розроблений, тестування випробуванням раніше розумілося як детермінована задача, і статистична вибірка була використана для оцінки невизначеностей в моделюванні. Моделювання за методом Монте-Карло змінило цей підхід до вирішення задач з використанням детермінованих ймовірнісних аналогів.

Фізики з Лос-Аламоської наукової лабораторії досліджували радіаційний захист та відстань, яку нейтрони проходять через різні матеріали. Зважаючи на велику кількість необхідних даних, таких як середня відстань, яку нейтрони проходять в речовині до зіткнення з атомним ядром або скільки енергії нейтрони мають віддати, щоб зіткнутися з ядром, задача не могла бути розв'язана за допомогою аналітичних розрахунків.

Джон фон Нейман і Станіслав Улам запропонували розв'язати її на основі моделювання експерименту на комп'ютері за допомогою випадку. Будучи засекреченою, їхня робота потребувала кодової назви. Фон Нейман вибрав назву «Монте-Карло». Назва запозичена від казино Монте-Карло в Монако, для гри в якому дядько Улама позичав гроші.

Не існує єдиної думки про те, як визначити метод Монте-Карло. Наприклад, Ріплі визначає найбільш ймовірне моделювання як стохастичне моделювання, з використаним методу Монте-Карло для інтеграції і статистичних випробувань Монте-Карло. Савіловський розрізняє моделювання, метод Монте-Карло і моделювання по методу Монте-Карло: моделювання є фіктивним уявленням дійсності, метод Монте-Карло є методом, який може бути використаний для вирішення математичних або статистичних задач, і моделювання методом Монте-Карло використовує повторний відбір для визначення властивостей якогось явища (або поведінки). Приклади:

- Моделювання: Зображення однієї псевдо-випадкової однорідної змінної з інтервалу [0,1] може бути використане для імітації кидання монети: Якщо значення менше або дорівнює 0,50 вважають, що результат — орел, якщо значення більше ніж 0,50 позначають результат, як решка.

- Метод Монте-Карло: висипають коробку монет на столі, а потім обчислюють співвідношення монет, які приземляються різними сторонами.

- Моделювання Монте-Карло: Накреслюється велика кількість псевдовипадкових однорідних змінних з інтервалу [0,1], а також присвоюють значення менше або рівне 0,50 — моделювання методом Монте-Карло для поведінки повторних підкидань монет.

Методи моделювання Монте-Карло не завжди вимагають дійсно випадкових чисел для того, щоб бути корисними (хоча, для деяких додатків, таких як тестування на простоту, непередбачуваність є необхідною ознакою). Більшість найбільш корисних методів використовують детерміновані, псевдовипадкові послідовності, що роблять їх легкими для тестування і повторного запуску.

Все залежить від програми, але, як правило, вони повинні пройти ряд статистичних тестів. Тестування того чи іншого числа рівномірно розподілені або слідують іншому бажаному розподілу, коли визначена досить велика кількість елементів послідовності, вважається одним з найпростіших і найбільш поширених з цих методів. Слабкість кореляції між послідовними вибірками є часто бажаною або необхідною.

Характеристики високоякісного моделювання методом Монте-Карло:

- (Псевдо-випадковий) генератор чисел має певні характеристики (наприклад, довгий «період» до того, як послідовність повторюється)

- (Псевдо-випадковий) генератор чисел генерує значення, які проходять випробування на випадковість

- є достатня кількість зразків для забезпечення точних результатів

- використовується належний метод вибірки
- алгоритм, який використовується, є дієвим для ситуації, що моделюється
- він імітує явища.

Методи Монте-Карло особливо корисні для моделювання явищ зі значною невизначеністю вхідних даних і систем з великим числом пов'язаних ступенів вільності. Області застосування:

Методи Монте Карло дуже важливі в розрахунковій області фізики, фізичної хімії і пов'язаних з ними прикладних областях, а також в різноманітних додатках від розрахунків квантової хромодинаміки до проектування теплових екранів. У статистичній фізиці молекулярне моделювання Монте-Карло є альтернативою обчислювальної молекулярної динаміки, а також методи Монте-Карло використовуються для обчислення теорії статистичних полів елементарних частинок і полімерних систем[1]. У радіаційному матеріалознавстві бінарне наближення зіткнень для моделювання іонної імплантації, відбувається, як правило, на основі підходу Монте-Карло для вибору наступного атома при зіткненні. У експериментальній фізиці елементарних частинок методи Монте-Карло використовуються для розробки детекторів, розуміння їх поведінки і порівняння експериментальних даних з теорією. Методи Монте-Карло також використовуються для моделей, які складають основу сучасного прогнозування погоди.

Методи Монте-Карло широко використовується в техніці для аналізу чутливості та кількісного ймовірнісного аналізу в процесі проектування. Наприклад,

- У геостатистиці методи Монте-Карло лежать в основі проектування технологічних схем збагачення корисних копалин.
- При аналізі використання енергії вітру.
- Вплив забруднення при використанні дизельного палива в порівнянні з бензином.
- В динаміці рідин, зокрема, динаміці розрідженого газу.

- В автономних роботів, локалізацією Монте-Карло можна визначити положення робота. Це часто застосовується до стохастичних фільтрів, таких як фільтр Кальмана, який формує основу SLAM (одночасне відображення локалізації і алгоритму).
- В області телекомунікацій, при плануванні бездротової мережі, конструкція повинна працювати для широкого спектра сценаріїв, які залежать головним чином від кількості користувачів, їх місць і послуг, які вони хочуть використовувати. Продуктивність мережі потім оцінюються і, якщо результати не є задовільними, конструкція мережі підлягає процесу оптимізації.
- Для дослідження надійності техніки можна використовувати метод Монте-Карло, щоб генерувати середній час між виникненням несправностей і середній час ремонту компонентів.

Методи Монте-Карло також ефективні в рішеннях, пов'язаних з інтегральними рівняннями для радіаційних полів і перенесення енергії, і, таким чином, ці методи були використані в глобальних обчисленнях освітлення, які створюють фотореалістичні зображення віртуальних 3D-моделей, з застосуванням в відеоіграх, архітектурі, дизайні і кінематографічних спецефектах.

Методи Монте-Карло у фінансах часто використовуються для оцінки інвестицій в проектах на корпоративному рівні або для оцінки похідних фінансових інструментів. Вони можуть бути використані для моделювання графіків проекту, де використовуються агреговані оцінки для найгіршого випадку та найкращого варіанту, і найбільш ймовірна тривалість для кожного завдання, щоб визначити результати для всього проекту.

В дисертаційній роботі аспіранта нашої кафедри АА.Гаренка була розроблена схема імітаційної економіко-математичної моделі дослідження залежності собівартості продукції дробарної фабрики від параметрів рудопотоку з врахуванням багатозонального тарифу на електроенергію (рис.1.18).

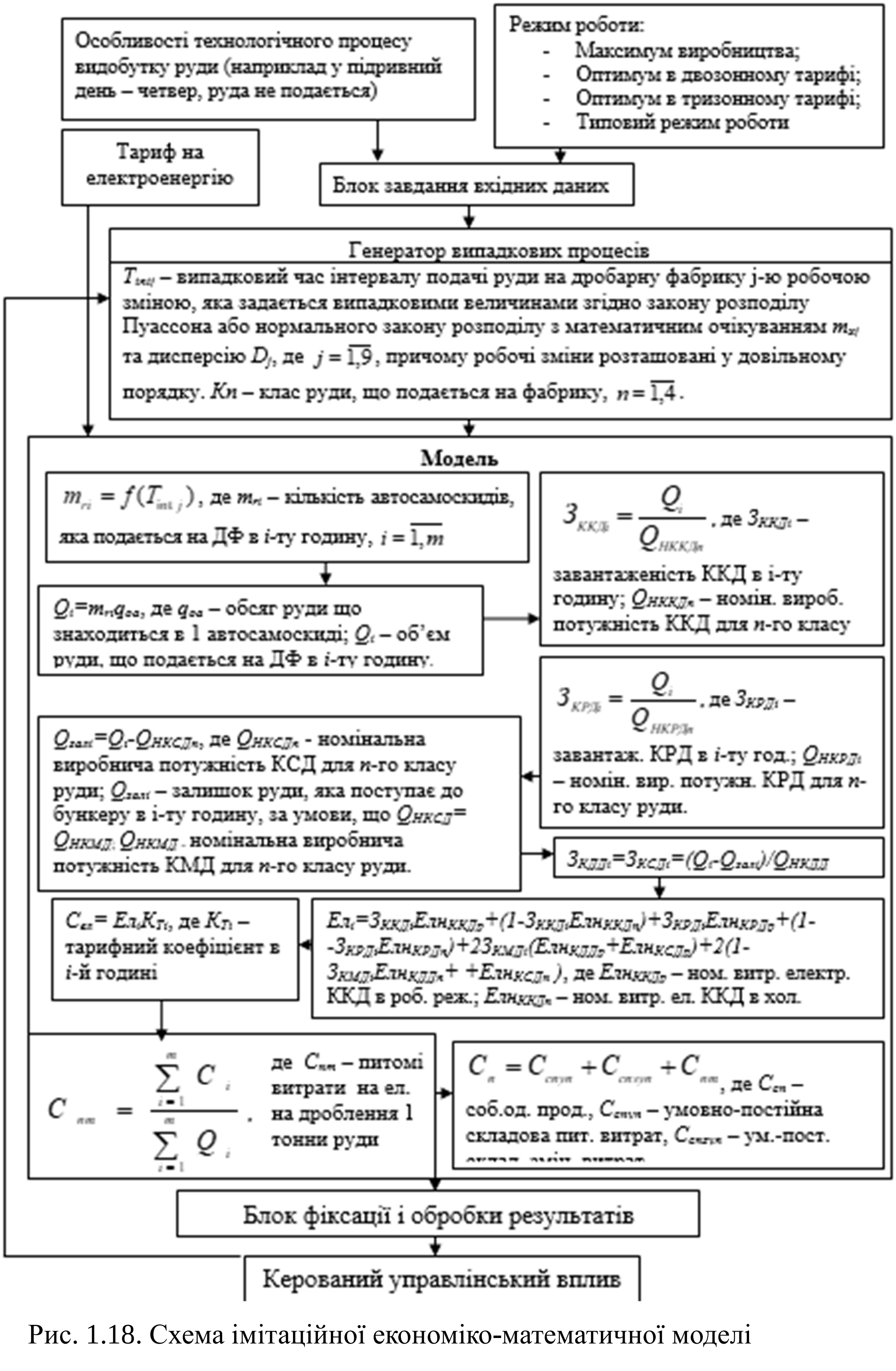


Рис. 1.18. Схема імітаційної економіко-математичної моделі

Завдяки цій схемі було досліджено залежності формування собівартості продукції дробарної фабрики від параметрів рудопотоку в умовах багатозональних тарифів на електроенергію, а також оптимальні режими роботи підприємства згідно оптимізаційних моделей.

1.16. Індивідуальне завдання №6. Побудова імітаційної моделі

Тема: Імітаційне моделювання бізнес-процесу

Завдання: синтезувати бізнес-модель та визначити статистичні характеристики діяльності планового відділу, що пройшов реорганізацію.

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує номер за списком навчальної групи *Nг*.

Методичні вказівки:

Моделюємо бізнес-процес узгодження рішення у плановому відділі за певний час, при умові, що структура проходження пропозицій змінилася. Схема структури обирається за останньою цифрою номеру за списком групи. Розрахунки ведуться на Excel.

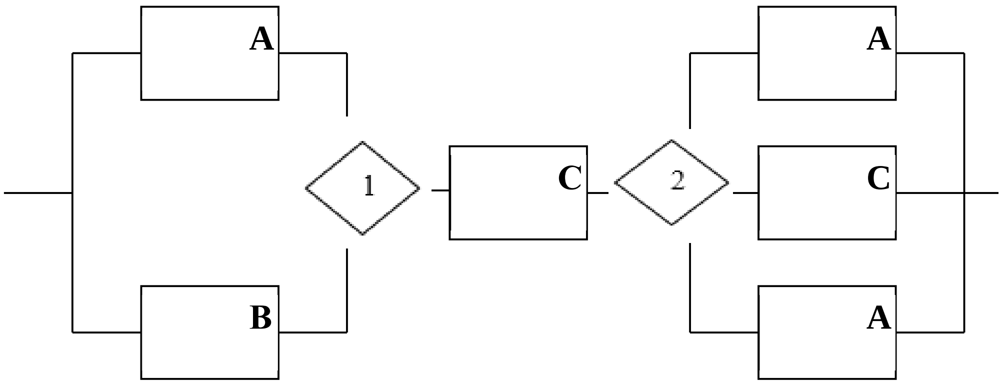
Кількість співробітників теж змінилася, але їх характеристики мають тільки три відмінності і позначені на схемах буквами А, В, С.

Окрім того, у схемах показані ромби з цифрами. Це умовні оператори, які означають, що у випадку, коли $N_{співр} > Mx + 6x$, то подальші розрахунки ведуться з величини $Mx + 6x$. Якщо у вашому варіанті випаде 1, то умовний оператор з цифрою 2 ігнорується, і навпаки.

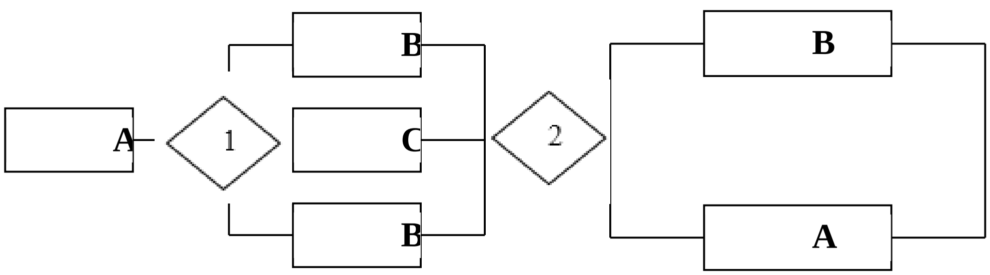
Розглянути ситуацію, коли до планового відділу протягом місяця надійде 100 пропозицій. Визначити статистичні характеристики результативності роботи відділу.

Варіанти завдань

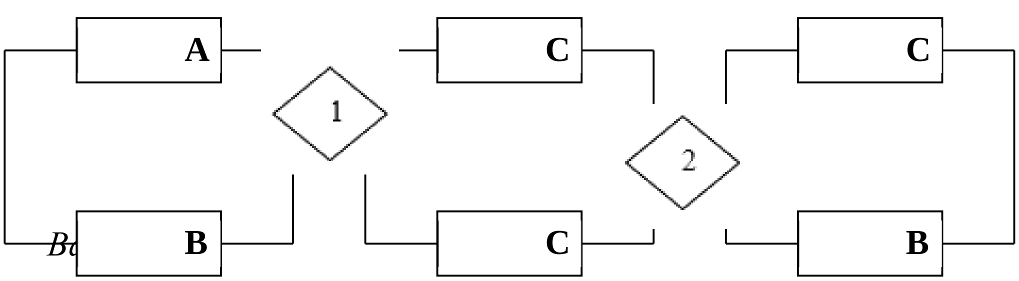
Варіант 0

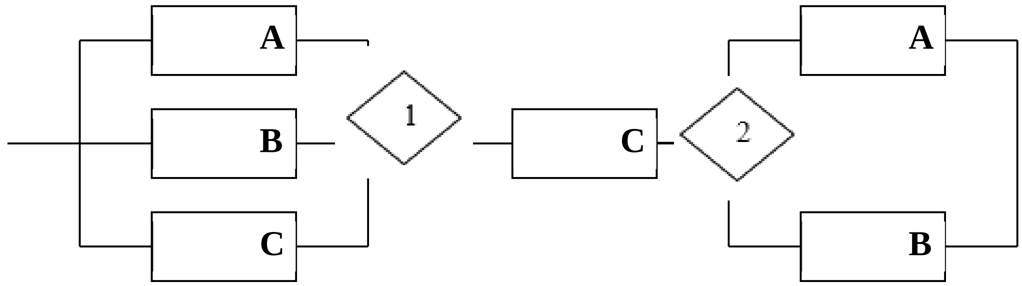


Варіант 1.

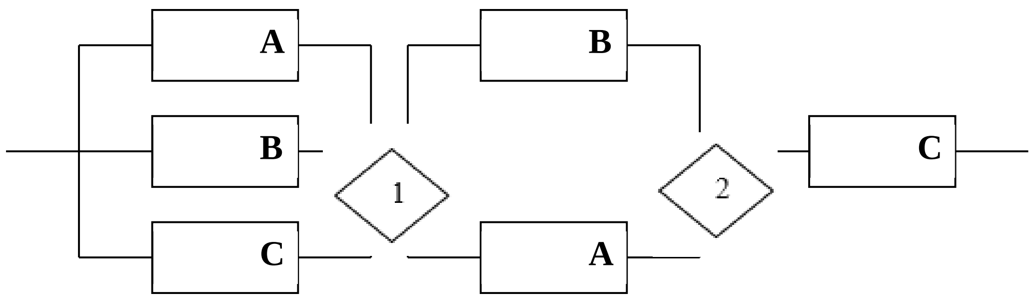


Варіант 2.

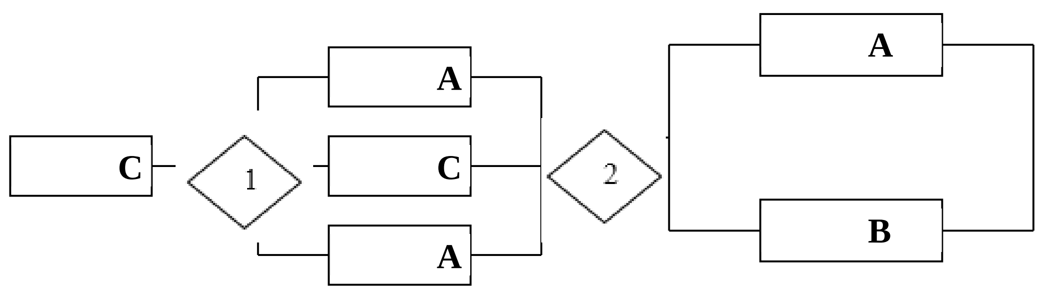




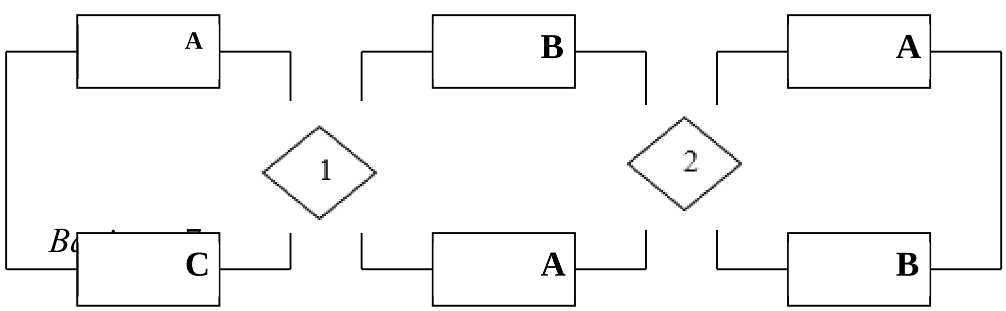
Варіант 4.

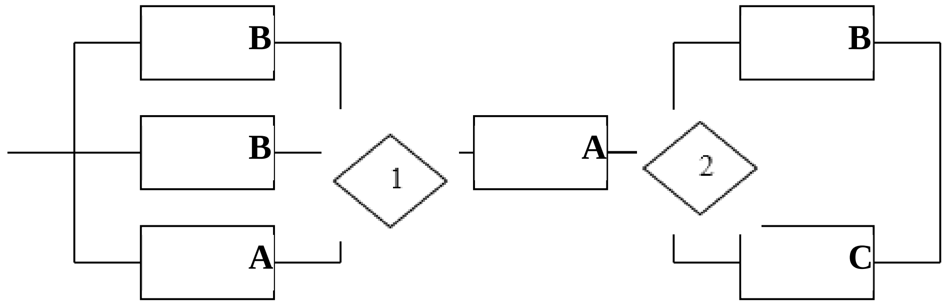


Варіант 5.

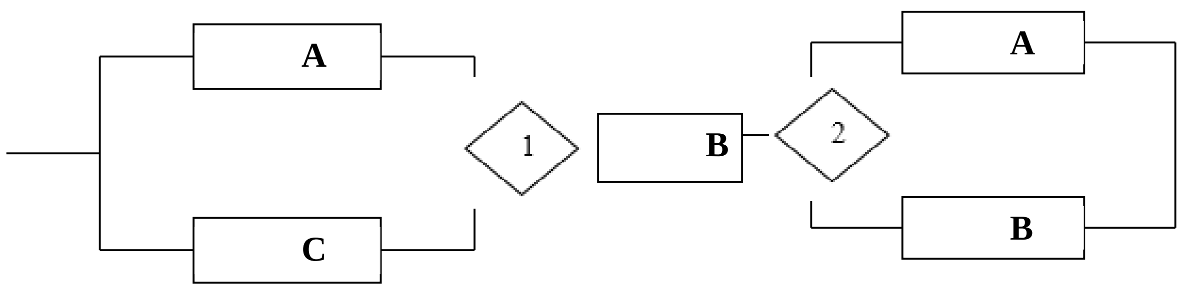


Варіант 6.

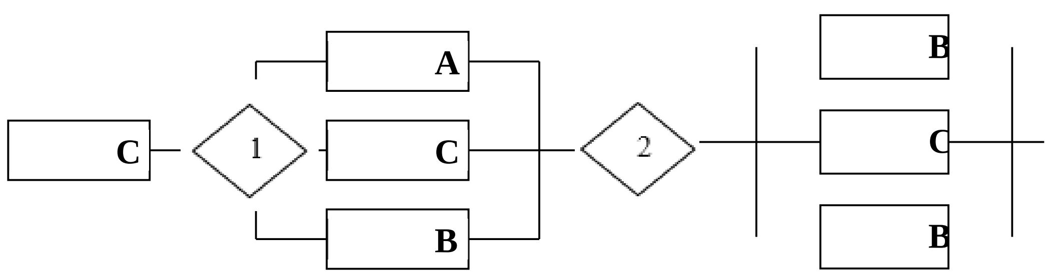




Варіант 8



Варіант 9



Таблиця 1.5

Числові значення параметрів імітаційної моделі

№ п/п	M_{pC}	σ_{pC}	M_{pA}	σ_{pA}	M_{pB}	σ_{pB}	Mx	σx	Номер логічного блоку
1	0,026	0,067	0,88	0,083	0,77	0,06	58,2	4	2
2	0,58	0,068	0,75	0,083	0,94	0,088	47,4	6,37	1
3	0,61	0,079	0,74	0,099	0,86	0,074	68,8	5,72	1
4	0,96	0,061	0,74	0,073	0,63	0,08	50,8	5,7	1
5	0,65	0,072	0,77	0,086	0,99	0,088	68	6,85	1
6	0,62	0,073	0,63	0,062	0,99	0,093	69,3	5,01	2
7	0,58	0,075	0,91	0,088	0,98	0,073	47,2	5,43	2
8	0,59	0,092	0,78	0,058	0,6	0,087	46,9	6,66	2
9	0,67	0,093	0,61	0,091	0,7	0,076	49,9	5,27	2
10	0,78	0,099	0,81	0,083	0,72	0,089	69	5,52	1
11	0,6	0,078	0,7	0,07	0,62	0,058	59,6	6,87	2
12	0,61	0,086	0,67	0,079	0,99	0,078	56,3	6,8	1
13	0,79	0,096	0,8	0,095	0,61	0,087	49,1	5,43	2
14	0,68	0,079	0,83	0,07	0,76	0,092	65,3	6,9	2
15	0,87	0,082	0,98	0,094	0,74	0,096	55,4	4,95	1
16	0,86	0,083	0,9	0,076	0,94	0,092	56,2	6,88	2
17	0,67	0,061	0,86	0,069	0,82	0,067	46,7	4,85	2
18	0,59	0,08	0,84	0,089	0,89	0,081	55,5	6,8	2
19	0,87	0,096	0,6	0,065	0,6	0,065	69,8	6,91	1
20	0,86	0,085	0,61	0,076	0,99	0,078	59	6,49	1
21	0,69	0,085	0,93	0,092	0,75	0,092	65,2	6,61	1
22	0,78	0,099	0,93	0,095	0,99	0,088	62,8	6,08	2
23	0,69	0,079	0,76	0,074	0,87	0,085	50,8	6,31	2
24	0,83	0,086	0,74	0,063	0,59	0,083	48,9	4,61	1

№ п/п	M_{pC}	$б_{pC}$	M_{pA}	$б_{pA}$	M_{pB}	$б_{pB}$	Mx	$бx$	Номер логічного блоку
25	0,99	0,072	0,77	0,064	0,69	0,061	62,6	4,99	1
26	0,6	0,06	0,89	0,068	0,87	0,059	51,8	5,57	2
27	0,99	0,088	0,83	0,099	0,73	0,088	65,9	4,64	2
28	0,94	0,079	0,61	0,08	0,69	0,091	61,4	5,87	2
29	0,78	0,072	0,94	0,072	0,75	0,09	52,2	5,8	1
30	0,87	0,092	0,6	0,091	0,86	0,061	65,9	5,65	2

1.17. Нейронні сітки

При моделюванні економічних процесів однією з найбільш складних задач є вибір виду функції апроксимації. Це пояснюється тим, що часто характер залежності одного економічного параметра від іншого є невідомим. Фактично, нам необхідно, знаючи певний набір значень вхідних параметрів, віднести значення вихідного параметра до певного класу чи значення.

Для вирішення поставленої задачі найбільш прийнятним є використання такого математичного методу як нейронні сітки.

Нейронні сітки – це сітки, що складаються зі зв'язаних між собою простих елементів – формальних нейронів. Ядром використовуваних представлень є ідея про те, що нейрони можна моделювати досить простими формулами, а вся складність процесу моделювання визначається зв'язками між нейронами. Кожен зв'язок представляється як зовсім

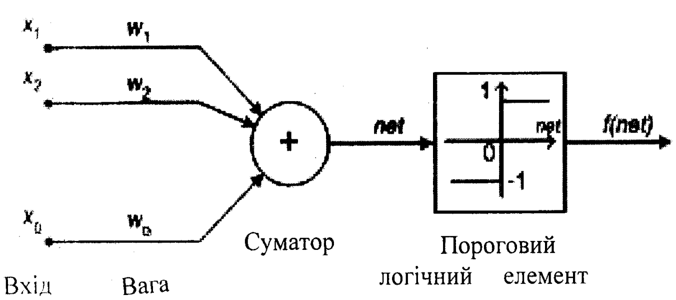


Рис. 1.18. Модель граничного нейрона МакКаллоха-Піттса

простий елемент, що служить для передачі сигналу. Для опису кожного нейрону використовується проста і одна й та сама функція. Показана на рис. 4.4 модель нейрона, як найпростішого процесорного елемента, що виконує обчислення перехідної функції від скалярного добутку вектору вхідних сигналів *xi* і вектору вагових коефіцієнтів ***wi*** описується наступною системою рівнянь

$$\left.\begin{aligned} net &= \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \\ f(net) &= \mathbf{sgn}(net) = \begin{cases} +1, \ \mathbf{net} > 0 \\ -1, \ \mathbf{net} < 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

Інколи в (4.19) додається ще параметр θ – порогової чутливості, яка віднімається від суми зважених сигналів.

Функція ***f(net)*** , яку ще позначають як ***OUT(net),*** називається активізуючою. Тому в штучних нейронних мережах використовують інші функції активації, найбільш популярною з яких є так звана логістична уніполярна сигмоїдальна функція (сигмоїд)

$$f(net) = \frac{1}{1+e^{-\lambda \cdot net}}, \tag{1.50}$$

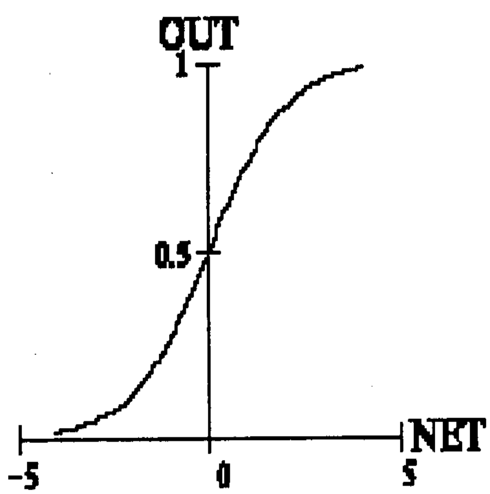


Рис. 1.19. Вид логістичної функції

$f(net) \in [0;+1]$, $\lambda > 0$ – коефіцієнт крутості безупинної функції ***f(net)*** біля ***net*** = 0,5 . Функція симетрична відносно *NET* = 0, *OUT* = 1/2.

Визначення коефіцієнтів λ та w_i називається навчанням, тому, існує задачник – набір прикладів із заданими відповідями. Ці приклади пред'являються системі. Нейрони одержують по вхідних зв'язках сигнали – «умови прикладу», перетворять їх, кілька разів обмінюються перетвореними сигналами і, нарешті, видають відповідь – також набір сигналів. Відхилення від правильної відповіді штрафується. Навчання складається в мінімізації штрафу як (неявної) функції зв'язків. Неявне навчання приводить до того, що структура зв'язків стає «незрозумілою» – не існує іншого способу її прочитати, крім як запустити функціонування сітки. Стає складно побудувати зрозумілу людині логічну конструкцію, що відтворює дії сітки.

Режими навчання з учителем нейронних сіток можуть бути різними, але найбільш ефективним є так зване “дельта-правило”:

1. Початкові ваги можуть бути будь-якими. Корекція провадиться пропорційно величині похідної по даній координаті. Похідна береться від функції активації. Підстроювання *j* ваги для *i* нейрона здійснюється за формулою

$$\Delta w_{ij} = \eta \cdot [d_i - f(net_i)] \cdot f'(net_i) \cdot x_j \,, \qquad (1.51)$$

де $j=1,2,\ldots,n$ $\eta > 0$ - коефіцієнт навчання, підбирається евристично

2. Помилка при навчанні на *k* кроці: $E_k = \frac{1}{2}[d_i - f(net_i)]^2$, (1.52)

де d_i - очікуваний вихід

3. Загальна помилка при навчанні:

$$E = \frac{1}{2 \cdot p} \sum_{k=1}^{p} [d_i - f(net_i)]^2 \,, \qquad (1.53)$$

де p - число прикладів у навчальній вибірці

4. Похідна від сигмоїди $f'(net) = \lambda \cdot f(net) \cdot [1 - f(net)]$, (1.54)

де p - число прикладів *у* навчальній вибірці.

Після проведення корекції коефіцієнтів моделів, їх пред’являється настиупні дані із «задачника».

Приклад. Побудуємо нейронну сітку для двох варіантів економічних процесів. Перший стосується розпізнавання безперервних економічних процесів, а другий – дискретних.

Почнемо зі створення апроксимуючої залежності для даних про кількість замовлень підприємства зв’язку по годинах робочого дня.

В якості моделі було обрано одношаровий перцептрон з логістичною функцією активації та з одним нейроном на три входи. На кожен вхід подавалося значення трьох послідовних значень кількості викликів від початку доби. Кожне значення вхідного параметру x бралося з вагою w та з певним значенням порогової чутливості θ. Таким чином, математична модель такого перцептрона мала наступний загальний вигляд

$$OUT = \frac{1}{1+\ell^{-(w_1 x_i + w_2 x_{i+1} + w_3 x_{i+2})}} . \qquad (1.55)$$

На кожному наступному кроці, підставлялося нове значення x, як i+2–й елемент перцептрона, а i–е значення x відкидалося. Значення OUT порівнювалося зі значенням у з розрахунком погрішності прогнозування вигляду $x` = \frac{(x-m_x)}{\sigma_x}$. На кожному кроці розрахунку провадилося корегування ваги та порогової чутливості за правилом

$$\left.\begin{aligned} \Delta w_{ij} &= \varepsilon\left(d_j^s - y_j^s\right)x_{ij} \\ \Delta\theta_j &= -\varepsilon\left(d_j^s - y_j^s\right) \end{aligned}\right\} . \qquad (1.56)$$

де d = y, y= OUT, ε – число, яке характеризує швидкість навчання. Було встановлено наступне правило зменшення ε на кожному кроці розрахунку ε'=ε/1.5668, де ε' – нове значення швидкості навчання.

Перед початком навчання перцептрона всі дані були нормовані за правилом (3.8). В результаті навчання перцептрона було отримано показане на малюнку співпадіння розрахованих і реальних значень y. При цьому, сама апроксимуюча формула для нормованих значень параметрів, має вигляд

$$OUT = \frac{1}{1+\ell^{-(1{,}58x_i + 0{,}37x_{i+1} + 1{,}15x_{i+2} + 1{,}62)}} . \qquad (1.57)$$

На рис. 4.5 показано графіки навчальної вибірки та кривої, яка реалізується за (5.26), в якій бралися три попередніх значення кількості викликів. Можна бачити, що точність апроксимації поступово збільшується, оскільки експериментальна і розрахована криві поступово зближуються.

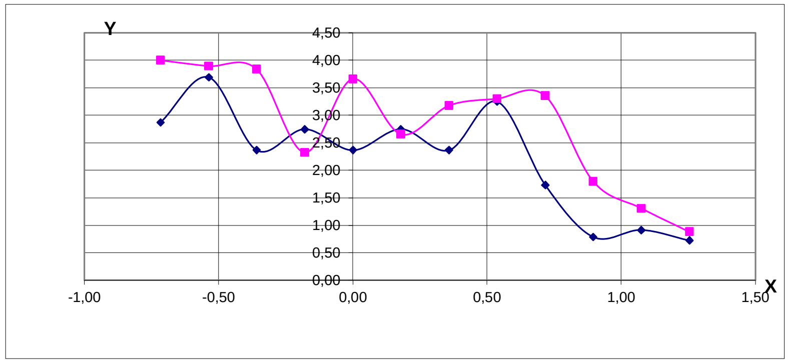


Рис. 1.20. Графік кількості викликів Y по годинам робочого дня X.
(♦ – експериментальна, ■ – розрахована крива)

Побудуємо тепер прогнозуючу модель зміни курсу австрійського шилінга відносно австралійського долара (дані взяти по відомостям НБУ за період 01.02.2000 по 31.10.2000). В цьому випадку нас цікавить передбачення самого факту збільшення чи зменшення крос-курсу.

Для вирішення цієї задачі було розроблено двошаровий перцептрон (тобто, модель системи, що складається з елементарний нейронів) (рис. 4.6), на вхід якого подавалося значення трьох попередніх значеннях крос-курсу австрійського шилінга і робився прогноз вихідного параметра, який являє собою функцію знаку числа

$$OUT = Sigfn(NET) = \begin{cases} 1, NET.0 \\ 0, NET = 0 \\ -1, NET < 0 \end{cases} \quad (1.58)$$

В якості активуючих функцій першого шару були взяті логістичні (1.50). Навчання перцептрона виконувалося так. На кожному наступному кроці, підставлялися нові значення x_i як для дієздатних так для недієздатних вузлів. Причому, вихідними значення d_i бралися числа: -1 – для випадку перебільшення курсу австрійського шилінга відносно австралійського долара, +1 – для протилежного випадку дієздатність якого експертами оцінюється як критична, +1 – для випадку спів падіння курсів. Значення OUT порівнювалося зі значенням di з розрахунком погрішності прогнозування (7). На кожному кроці розрахунку провадилося корегування ваги та порогової чутливості за правилом (4.25). Було встановлено наступне правило зменшення ε на кожному кроці розрахунку t $\varepsilon'=\varepsilon/1.5668$, де ε' – нове значення швидкості навчання.

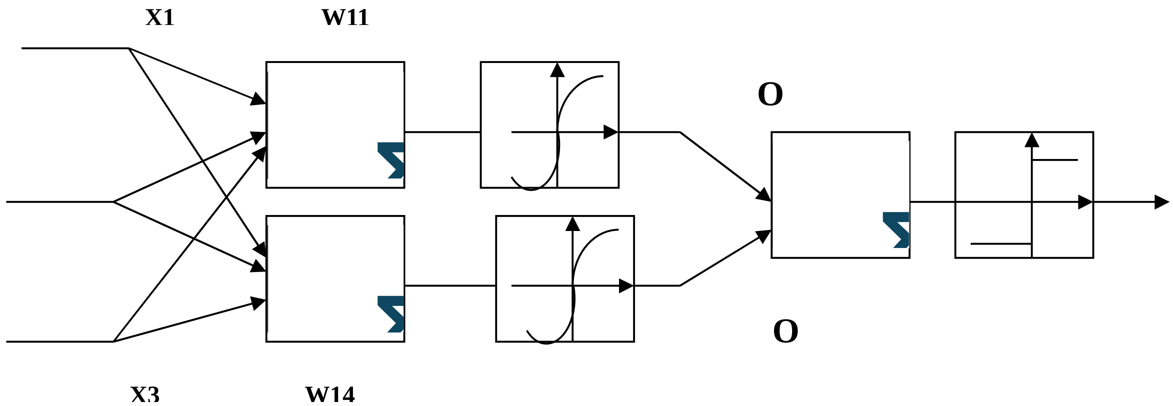
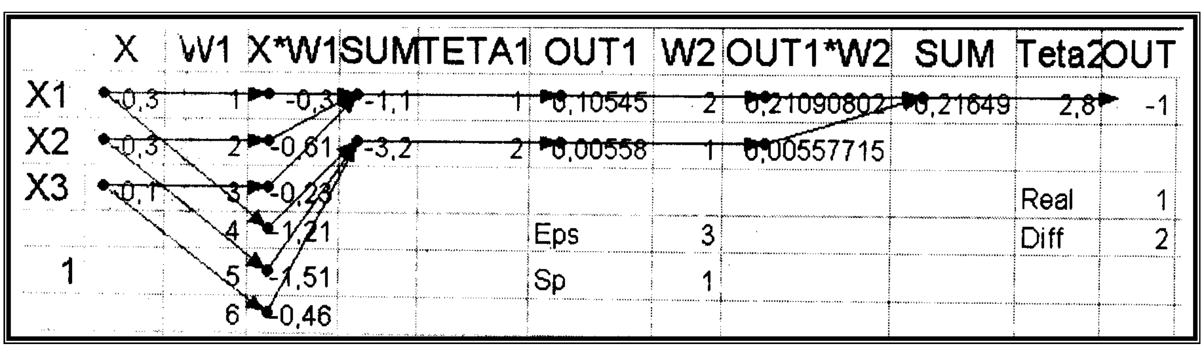


Рис. 1.21. Схема двошарового перцептрона
з трьома входами на кожному нейроні.

Перед початком навчання перцептрона вхідні дані були нормовані за правилом (3.8). На рис. 4.7 представлено схему застосування для розрахунків такого перцептрона.



	X	W1	X*W1	SUM	TETA1	OUT1	W2	OUT1*W2	SUM	Teta2	OUT
X1	-0,3	1	-0,3	-1,1	1	0,10545	2	0,21090802	0,21649	2,8	-1
X2	-0,3	2	-0,61	-3,2	2	0,00558	1	0,00557715			
X3	-0,1	3	-0,23							Real	1
		4	-1,21			Eps	3			Diff	2
1		5	-1,51			Sp	1				
		6	-0,46								

Рис. 1.22. Фрагмент таблиці Excel, яка реалізує перцептрон з рис. 1.21.

Стрілки на рис. 4.7 показують порядок передачі даних. Потім вхідні дані поновлювалися на один крок, тобто, використовувалися чергові значення вхідних параметрів для іншого вузла Знаходилася розбіжність поміж значеннями, які видає перцептрон та справжньою оцінкою стану вузла. в порівнянні зі своїм попереднім значенням з корегуванням ваг та порогових функцій. Цей алгоритм показано на рис. 4.8.

В процесі навчання вже на 9-му кроці перцептрон давав більшість правильних відповідей на наступних значеннях курсу. Тому, процес навчання було припинено, а результуюча функція набула вигляду

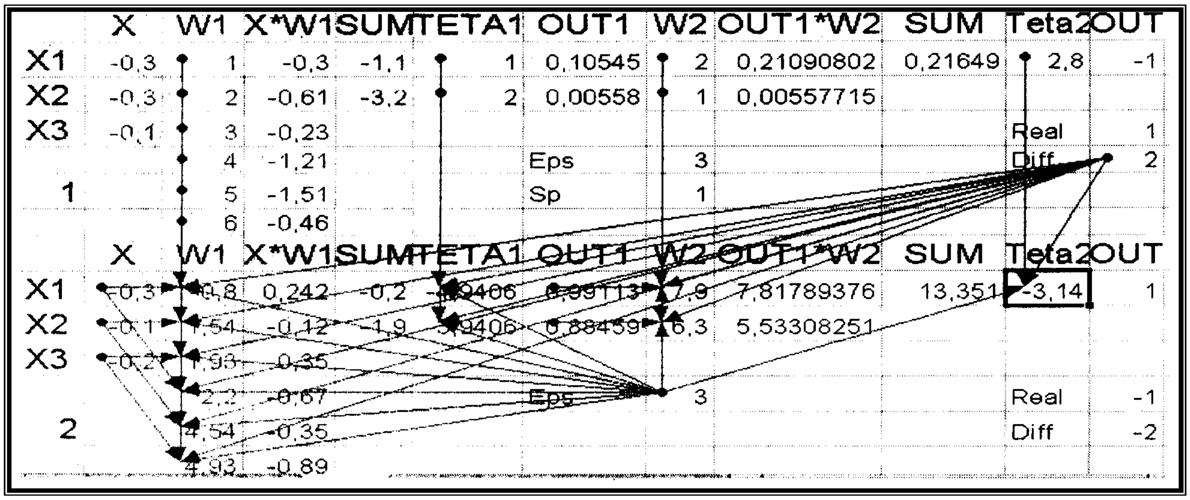
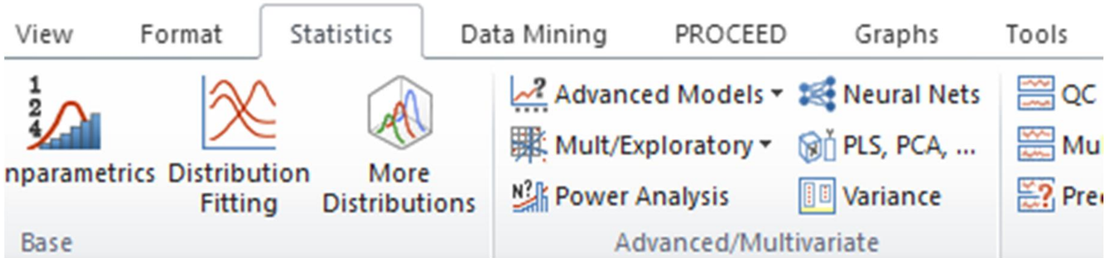


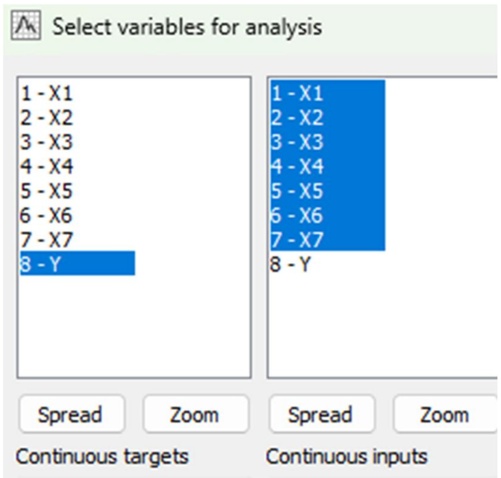
Рис. 1.22. Схема корегування ваг та порогів на наступному кроці, враховуючи результати з попереднього

$$OUT = Sign\left[\begin{array}{l}\dfrac{10{,}37669298}{\left[1+\ell^{-(-1{,}4435252 48X_1+1{,}561436345X_2+1{,}582503396X_3+4{,}683681367)}\right]}+\\ +\dfrac{7{,}940045065}{\left[1+\ell^{-(1{,}556474752X_1+4{,}561436345X_2+4{,}582503396X_4+-3{,}683681367)}\right]}+\\ 2{,}883681367\end{array}\right]. \quad (1.59)$$

Використання програми Statistica робить задачу створення моделей простою справою.

Після завантаження вашого файлу з даними, у головному меню програми потрібно обрати пункт Statistics-Neural net-Regression. Далі, через кнопку Variables, вказати, які змінні є залежними, а які – ні.



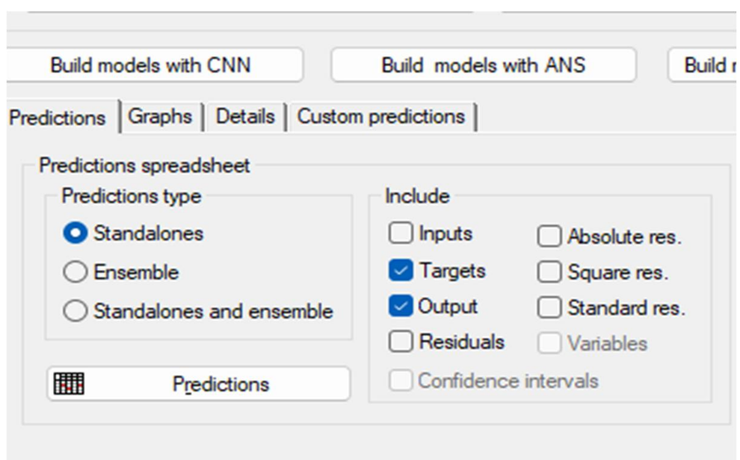


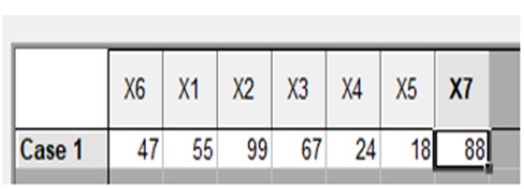
Після вибору чергового пункту меню треба натискати ОК.

Далі обираємо найбільшу і найменшу кількість нейронів у середньому (прихованому) шарі, оскільки число нейронів у вхідному шарі завжди дорівнює кількості незалежних змінних, а у вихідному – кількості залежних змінних. Останнє означає, що на відміну від інших методів, нейронні сітки можуть створювати одразу декілька моделей для залежних змінних.

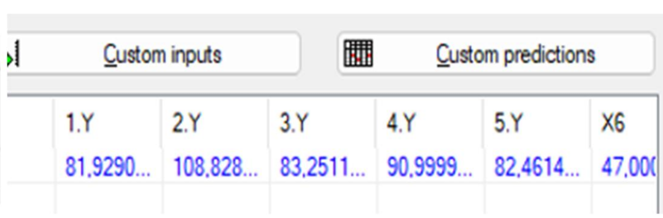
Після закінчення генерації моделей, варто вибрати ті, що мають найкращу якість за показниками Training, Test та Validation.

Обравши пункт Prediction, можна користуватися отриманими моделями, задаючи значення X і отримувати значення Y для різних значень за всіма моделями, що були залишені.





	X6	X1	X2	X3	X4	X5	X7
Case 1	47	55	99	67	24	18	88



1.Y	2.Y	3.Y	4.Y	5.Y	X6
81,9290...	108,828...	83,2511...	90,9999...	82,4614...	47,00(

1.18. Індивідуальне завдання №7. Побудова нейронних моделей

Завдання: Вивчити метод побудови нейронних моделей

Порядок виконання: для визначення свого варіанту студент використовує згенеровану в індивідуальному завдання №1 матрицю абсолютних значень і нормовану матрицю.

Методичні вказівки: 1) Відкрити програму Statistica і ввести в неї дані абсолютних значень.

2) побудувати нейронні сітки, залишивши найкращі у кількості не менше трьох.

3) перевірити, як працюють ці моделі, задають два різних набора значень X.

4) записати показники Training, Test та Validation.

5) повторити всю процедуру для нормованих значень.

6) порівняти показники Training, Test та Validation для обох вибірок.

7) звіт подати у форматі Word з окремими елементами екрану та поясненнями. Зробити висновки, яка з моделей краще описує набір даних.

1.19. Нечіткі множини

Існують описові моделі на звичайній мові, які дозволяють зрозуміти якісні характеристики соціально-економічної системи. Але таки моделі не дозволяють отримати потрібні для їх вивчення, прогнозування і керування числові характеристики. В такому випадку варто застосувати синтез нечітких моделей, який базується на уявленні групи експертів про функціональну діяльність системи.

Нечіткі моделі базуються на поняттях нечітких множин, які представляють собою множину можливих значень нечіткої величини у формі функції приналежності виду $A = \{x/\square A(x)>0\}$.

Хай E – універсальна множина, x - елемент E, а R – певна властивість. Звичайна (чітка) підмножина A універсальної множини E, елементи якої задовольняють властивість R, визначається як множина впорядкованої пари $A = \{{}_{\mu}A\ (x)\ /x\}$, де ${}_{\mu}A(x)$ – характеристична функція, що приймає значення 1, коли x задовольняє властивості R, і 0 – в іншому випадку.

Нечітка підмножина відрізняється від звичайної тим, що для елементів x з E немає однозначної відповіді "ні" щодо властивості R. У зв'язку з цим, нечітка підмножина A універсальної множини E визначається як множина впорядкованою парі $A = \{{}_{\mu}A(x)\ \ /x\}$, де ${}_{\mu}A(x)$ - характеристична функція приналежності (або просто функція приналежності), що приймає значення в деякій впорядкованій множині M (наприклад, $M = [0,1]$).

Розглянемо множину X всіх чисел від 0 до 10. Визначимо підмножину A множини X всіх дійсних чисел від 5 до 8. $A = [5,8]$

Покажемо функцію приналежності множині A, ця функція ставить у відповідність число 1 або 0 кожному елементу в X, залежно від того, належить даний елемент підмножині A чи ні. Результат представлений на рис. 1.23.

Тепер опишемо множину молодих людей. Формально можна записати так

B = { множина молодих людей}.

Оскільки, взагалі, вік починається з 0, то нижня межа цієї множини повинна бути нулем. Верхню межу визначити складніше. Спочатку встановимо верхню межу, скажімо, рівну 20 рокам. Таким чином, маємо B як чітко обмежений інтервал, буквально: $B = [0,20]$. Виникає питання: чому хтось в свій двадцятирічний ювілей – молодий, а відразу наступного дня вже не молодий? Очевидно, це структурна проблема, і якщо пересунути верхню межу в іншу точку, то можна поставити таке ж питання.

Природніший шлях створення множини B полягає в ослабленні строгого ділення на молодих і не молодих. Зробимо це, виносячи не тільки чіткі думки "Так, він належить множині молодих людей" чи ні, вона не належить множині молодих людей", але і гнучкі формулювання "Так, він належить до досить молодих людей" чи ні, він не дуже молодий".

Розглянемо як за допомогою нечіткої множини визначити вираз "він ще молодий".

У першому прикладі ми кодували всі елементи множини за допомогою 0 чи 1. Простим способом узагальнити дану концепцію є введення значень між 0 і 1. Реально можна навіть допустити нескінченне число значень між 0 і 1, в одиничному інтервалі $I = [0, 1]$.

Для наочності приведемо характеристичну функцію множини молодих людей, як і в першому прикладі.

Хай $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0,1]$; A – нечітка множина, для якої

$_{\mu}A(x_1)=0,3$; $_{\mu}A(x_2)=0$; $_{\mu}A(x_3)=1$; $_{\mu}A(x_4)=0,5$; $_{\mu}A(x_5)=0,9$

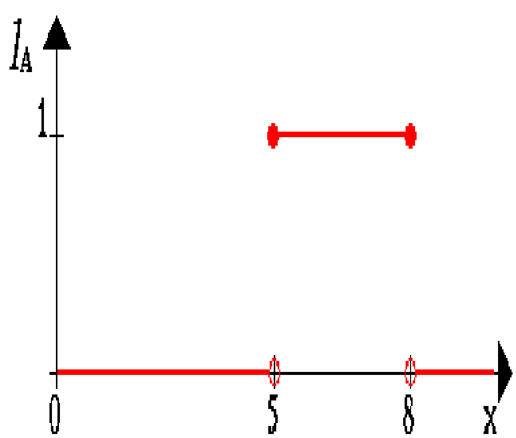
Тоді A можна представити у вигляді:

$$A = \{0,3/x_1;\ 0/x_2;\ 1/x_3;\ 0,5/x_4;\ 0,9/x_5\} \text{ або}$$

$$A = 0,3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0,5/x_4 + 0,9/x_5$$

(знак "+" є операцією не складання, а об'єднання) або

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A =	0,3	0	1	0,5	0,9



1.23. Зображення приналежності звичайної (чіткої) множини

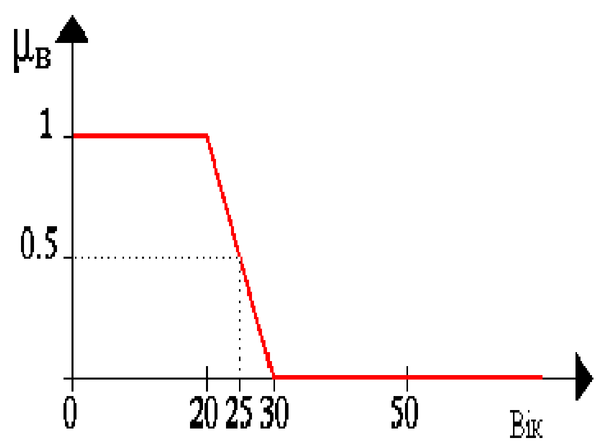


Рис. 1.24. Характеристична функція множини молодих людей

Сукупність функцій приналежності для кожного терму з базової терм-множини *T* зазвичай зображуються разом на одному графіку. На рис. 1.25 приведений приклад описаної вище лінгвістичної змінної «Ціна акції».

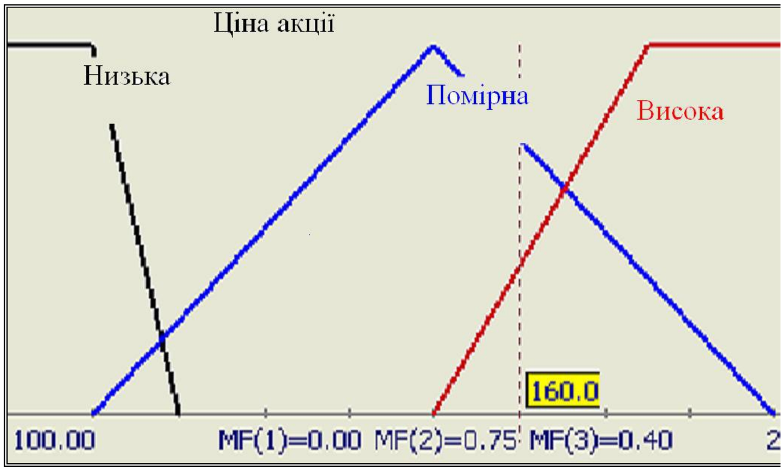


Рис. 1.25. Опис лінгвістичних змінних для категорії «Ціна акції»: «низька», «помірна» та «висока».

Непрямі методи визначення значень функції приналежності використовуються у випадках, коли немає елементарних вимірних властивостей для визначення нечіткої множини. Як правило, це методи попарних порівнянь. Якби значення функцій приналежності були відомі, наприклад, $_{\mu}A(x_i) = w_i$, i=1,2,...,n,, тоді попарні порівняння можна представити матрицею відносин А = $\{a_{ij}\}$, де $a_{ij}=w_i/w_j$ (операція ділення).

Простіше всього створення таких функцій приналежності проводити з групою експертів, які для кожної функції приналежності виражають власну думку щодо приналежності, наприклад, ціни акції до категорії «низька». Нехай їх було 10. Коли запитали при ціну в 100 одиниць – всі 10 сказали, що ціна низька. Тут $_{\mu}A(100)$=10/10 = 1,0. Коли запитали про ціну 110 одиниць – тільки дев'ятеро сказали, що ціна ще низька, отже $_{\mu}A(110)$=9/10 = 0,9. Коли їх було запропоновано ціну в 115 грошових одиниць – п'ятеро сказали, що ціна ще низька, тобто $_{\mu}A(115)$=5/10 = 0,5. А для ціни в 120 – ніхто з експертів не погодився, що ціна є низькою, отже $_{\mu}A(120)$=0/10 = 0,0.

Такий алгоритм дозволяє побудувати функцію приналежності до певної характеристики соціально-економічної системи. Особливо актуальним є не чітке визначення критеріальних значень коефіцієнтів, що характеризують роботу підприємства, оскільки рекомендовані їх значення завжди подаються в певному діапазоні.

Існує понад десяток типових форм кривих для завдання функцій приналежності. Найбільшого поширення набули: трикутна, трапецеїдальна функції та функція приналежності Гауса.

Трикутна функція приналежності визначається трійкою чисел (a,b,c), і її значення в точці x обчислюється згідно виразу:

$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1-\dfrac{x-c}{c-b}, & b\le x\le c\\ 0, & \text{в інших випадках}\end{cases}, \tag{1.60}$$

При (b-a)=(c-b) маємо випадок симетричної трикутної функції приналежності, яка може бути однозначно задана двома параметрами з трійки (a,b,c).

Аналогічно для завдання трапецеїдальній функції приналежності необхідна четвірка чисел

(a,b,c,d)

$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & b\le x\le c\\ 1-\dfrac{x-c}{d-c}, & c\le x\le d\\ 0, & \text{в інших випадках}\end{cases}, \tag{1.61}$$

При (b-a)=(d-c) трапецеїдальна функція приналежності приймає симетричний вигляд.

Функція приналежності гауссова типу описується формулою

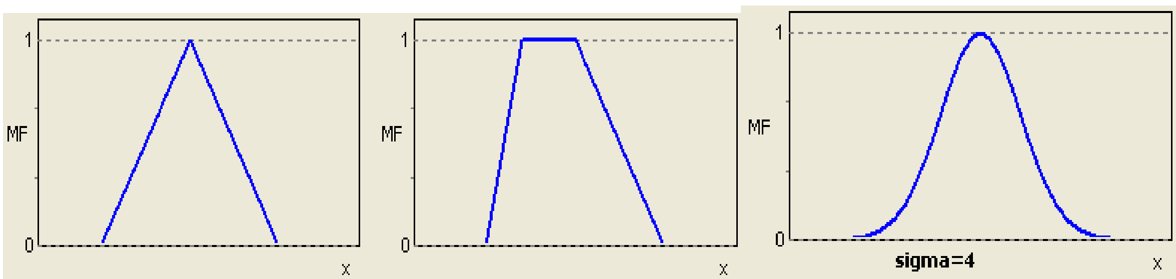
$$MF(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right], \tag{1.62}$$

і оперує двома параметрами. Параметр c позначає центр нечіткої множини, а параметр σ відповідає за крутизну функції.

Інколи застосовують кругову функцію виду

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \frac{(x-a)^2}{b}} / x \quad \text{або} \quad \mu(x) = a\sqrt{\frac{x}{x_{max}}\left(1 - \frac{x}{x_{max}}\right)}, \tag{1.63}$$

Де *a, b* – діапазон значень x, в межах якого зображується півколо, $x_{мах}$ – найбільше значення аргументу, до якого сягає чверть кола. На рис. 4.12 представлені деякі з описаних функцій.



a *b* *c*

Рис. 1.26.. Типові кусочно-лінійні функції приналежності;
трикутна (*a*) та трапецеїдальна (*b*), Гауса (*c*).

Визначимо деякі поняття нечітких множин. Хай *M* = [0,1] і *A* – нечітка множина з елементами з універсальної множина *E* і з множиною визначення *M*

- Величина $\mu A(x) \ \sup_{x\in E}$ називається висотою нечіткої множини *A*. Нечітка множина *A* є нормальною, якщо її висота дорівнює 1, тобто верхня межа її функції приналежності дорівнює 1 ($\sup_{x\in E} \mu A(x)=1$). При $\mu A(x)$ <1 нечітка множина називається субнормальною.

- Нечітка множина є порожньою, якщо $\forall x \in E \ \mu A(x)=0$. Не порожню субнормальну множину можна нормалізувати за формулою $\mu A(x) := \dfrac{\mu_a(x)}{\sup\limits_{x\in E} \mu_a(x)}$

- Нечітка множина є унімодальною, якщо $\mu A(x)=1$ лише для одного *x* з *E*.

- Носієм нечіткої множини A є звичайна підмножина з властивістю $\mu A(x) > 0$, тобто носій $A = \{x / \mu A(x) > 0\} \ \forall x \in E$

- Елементи $x \in E$, для яких $\mu A(x)=0,5$ називаються точками переходу множини A.

Основні операції з функціями приналежності зводяться до операцій з їх інтервалами достовірності. А операції з інтервалами, у свою чергу, виражаються через операції з дійсними числами - межами інтервалів:

- операція "складання":

$$[a_1, a_2]\ (+)\ [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad (1.64)$$

- операція "віднімання":

$$[a_1, a_2]\ (-)\ [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \quad (1.65)$$

- операція "множення":

$$[a_1, a_2]\ (\times)\ [b_1, b_2] = [a_1 \times b_1, a_2 \times b_2], \quad (1.66)$$

- операція "ділення":

$$[a_1, a_2]\ (/)\ [b_1, b_2] = [a_1 / b_2, a_2 / b_1], \quad (1.67)$$

- операція "піднесення до ступеня":

$$[a_1, a_2]\ (\wedge)\ i = [a_1^i, a_2^i]. \quad (1.68)$$

Аналізуючи властивості нелінійних операцій з нечіткими числами (наприклад, ділення), дослідники приходять до висновку, що форма функцій приналежності результуючих нечітких чисел часто близька до трикутної. Тобто, якщо ми вводимо опис трикутного числа набором абсцис вершин (a, b, c), то можна записати $$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) \equiv (a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2) \quad (1.69)$$

На такому ж принципі базується і синтез моделі управління соціально-економічними системами.

Основою для синтезу нечіткого логічного управління є база правил, що містить нечіткі вислови у формі «Якщо-то» і функції приналежності для відповідних лінгвістичних термів (тобто, нечітких множин, які визначають лінгвістичну змінну). При цьому повинні дотримуватися наступні умови:

1. Існує хоч би одне правило для кожного лінгвістичного терму вихідний змінної.

2. Для будь-якого терму вхідної змінної є хоча б одне правило, в якому цей терм використовується як передумова (ліва частина правила).

Інакше має місце неповна база нечітких правил.

Приклад. Групі експертів з 8 осіб було запропоновано визначити дії керівництва щодо прийнятного рівень коефіцієнтів швидкої ліквідності та платоспроможності, нижче якого робота підприємства вважається незадовільною. Такими діями було визнано збільшення статутного капіталу пропорційно величині зменшення означених показників. Тобто, потрібно синтезувати модель управління статутним капіталом підприємства.

Вирішення задачі почнемо з визначення діапазону значень аргументів x для трьох нечітких множин: A_1 – множина значень коефіцієнта швидкої ліквідності , A_2 – множина значень коефіцієнта платоспроможності, B – множина значень збільшення статутного капіталу на 10% відносно рівня зменшення суми двох означених коефіцієнтів. В спеціальній літературі було означено прийнятний рівень першого коефіцієнта 0.6 - 0.8, а для другого – більше 0.5. Тому діапазон можливих значень для обох коефіцієнтів було обрано 0,2 - 0,8. Діапазон можливих значень x для множини B – 0,4 – 1,6.

Потім було проведено опитування експертів щодо незадовільних значень обох коефіцієнтів. Результати опитування наведені в наведеній нижче таблиці.

Коефіцієнт	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	Кількість експертів, які вважають такий рівень коефіцієнту незадовільним						
швидкої ліквідності	8	8	8	7	4	1	0
платоспроможності	8	8	7	6	2	0	0

За цією таблицею можна побудувати нечіткі множини, розрахувавши степінь приналежності як результат ділення числа згодних експертів на їх загальну кількість:

$$A_1 = \{1,0/0,2;\ 1,0/0,3;\ 1,0/0,4;\ 0,875/0,5;\ 0,5/0,6;\ 0,125/0,7;\ 0/0,8\}.$$

$$A_2 = \{1{,}0/0{,}2;\ 1{,}0/0{,}3;\ 0{,}875/0{,}4;\ 0{,}75/0{,}5;\ 0{,}25/0{,}6;\ 0/0{,}7;\ 0/0{,}8\}.$$

Визначимо тепер прийнятний рівень збільшення рівня статутного капіталу в залежності від суми коефіцієнтів. Результати опитування наведені в наступній таблиці.

Сума коефіцієнтів	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
	Кількість експертів, які вважають, що при такому значенні суми двох коефіцієнтів, статутний капітал потрібно збільшити на 10%.						
швидкої ліквідності	8	7	5	1	0	0	0

За цією таблицею можна побудувати нечітку множину рішень збільшення статутного капіталу, розрахувавши степінь приналежності як результат ділення числа згодних експертів на їх загальну кількість:

$$B = \{1{,}0/0{,}4;\ 0{,}875/0{,}6;\ 0{,}625/0{,}8;\ 0{,}125/1{,}0;\ 0/1{,}2;\ 0/1{,}4;\ 0/1{,}6\}.$$

Визначення числових характеристик трьох нечітких множин дозволяє синтезувати структуру управління соціально-економічної системи, яка складається з двох коефіцієнтів у вигляді:

ЯКЩО x_1 це A_1 . І . x_2 це A_2, ТО y це B.

Таких вирішальних правил завжди є декілька і вони складають цілу певну структуру. Взаємодія всіх правил і дозволяє отримати чіткий висновок, задаючи чіткі значення вхідних параметрів.

Для отримання чіткого висновки з нечіткої моделі соціально-економічної системи і системи управління нею, потрібно мати їх нечіткий опис у вигляді функцій приналежності, описаних вище. Тоді процедура отримання чіткого результату з нечітких моделей на підставі чіткого значення вхідних факторів полягає у наступному.

Хай в базі правил є m правил вигляду:

R_1: ЯКЩО x_1 це A_{11} . І . x_n це A_{1n}, ТО y це B_1.

R_i: ЯКЩО x_1 це A_{i1} . І . x_n це A_{in}, ТО y це B_i.

. . . .

R_m: ЯКЩО x_1 це A_{m1} . І . x_n це A_{mn}, ТО y це B_m.

де x_k, (k = 1..n) – вхідні змінні; y – вихідна змінна; A_{ik} – задані нечіткі множини з функціями приналежності для x_k, B_i – задані нечіткі множини з функціями приналежності для y.

Результатом нечіткого висновку є чітке значення змінної y^* на підставі заданих чітких значень x_k, k=1..n

У загальному випадку механізм логічного висновку включає чотири етапи: введення нечіткості (фазифікація), нечіткий висновок, композиція і приведення до чіткості, або дефазифікація (див. рис. 1.27).

Алгоритми нечіткого висновку розрізняються головним чином видом використовуваних правил, логічних операцій і різновидом методу дефазифікації. Розроблені моделі нечіткого виведення Мамдані, Сугено, Ларсена, Цукамото.

Розглянемо докладніше нечіткий вивід на прикладі механізму Мамдані (Mamdani). Це найбільш поширений спосіб логічного висновку в нечітких системах. У нім використовується мінімаксна композиція нечітких множин. Даний механізм включає наступну послідовність дій.

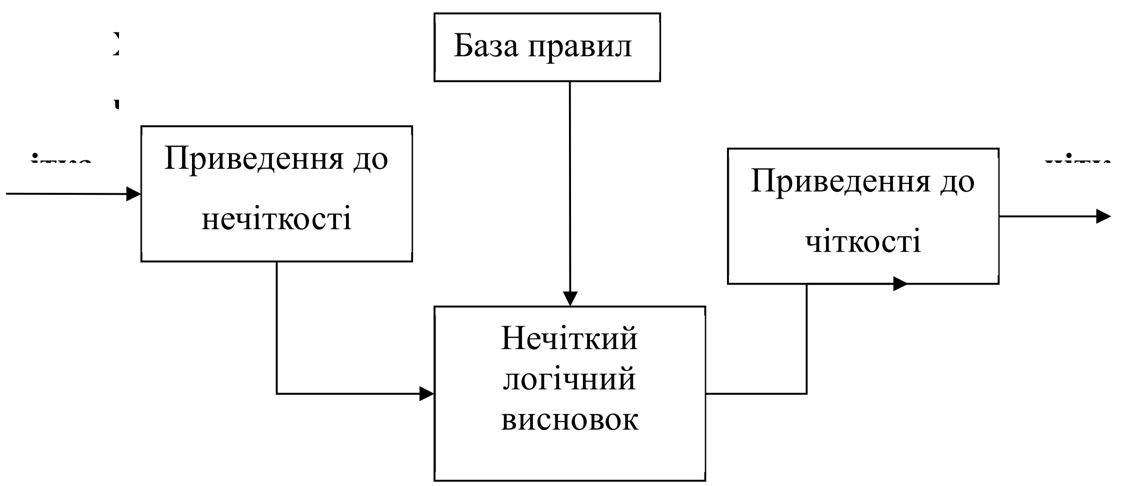


Рис. 1.27. Система нечіткого логічного висновку

1. Процедура фазифікації така: визначаються ступені істинності, тобто значення функцій приналежності для лівих частин кожного правила (передумов). Для бази правил з m правилами позначимо ступені істинності як $A_{ik}(x_k)$, i=1..m, k=1..n.

2. Нечіткий висновок. Спочатку визначаються рівні «відсікання» для лівої частини кожного з правил:

$$\alpha_i = \min_i(A_{ik}(x_k)) . \quad (1.69)$$

Далі знаходяться «усічені» функції приналежності:

$$B_i^*(y) = \min_i(\alpha_i, B_i(y)) . \quad (1.70)$$

3. Композиція, або об'єднання отриманих усічених функцій, для чого використовується максимальна композиція нечітких множин:

$$MF(y) = \max_i(B_i^*(y)), \quad (1.71)$$

де $MF(y)$ – функція приналежності підсумкової нечіткої множини.

4. Дефазифікація, або приведення до чіткості. Існує декілька методів дефазифікації. Наприклад, метод середнього центру, або центроїдний метод:

$$y = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} MF(y)dy = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \max(B_i^*(y))dy , \quad (1.72)$$

Де y_{max}, y_{min} – діапазон значень B^*_i після композиції (5.55). Геометричний сенс такого значення – центр тяжіння для кривої $MF(y)$.

Приклад. Для соціально-економічної системи з двома вхідним факторами і одним вихідним було розроблено чотири функції приналежності: A_{11} та A_{21} для x_1, A_{12} та A_{22} для x_2, які описують відношення вхідних факторів до вирішальних правил R_1 та R_2. Розроблено також нечіткі функції приналежності для системи управління B_1 та B_2 для вихідного фактору y. Було задано чіткі значення для вхідних факторів x'_1 та x'_2. Знайти чітке значення y^*.

На рис. 1.28. показано процес нечіткого висновку за методикою Мамдані для двох вхідних змінних і двох нечітких правил R_1 і R_2. Графіки функцій приналежності для x та y розташовуються у такому порядку: для кожного вирішального правила – в один ряд, для кожного вхідного фактору x – в одну колонку. На осі абсцис відмічаються значення x'_i і піднімається перпендикуляр до перетину з графіками функції приналежності. Для кожного вирішального правила R_1 та R_2 величини MF(x'_i) порівнюються і вибирається їх менше значення. Ця величина відсікає на графіку B_1 та B_2 площу між абсцисою та лінією $min(x'_i)$. Потім ці площі об'єднуються за правилом відкидання меншого значення і утворюється фігура, показана на лівому прямокутнику внизу. Центр тяжіння цієї фігури можна знайти, розділивши її на елементарні прямокутники і трикутники, і є чітким висновком з y^* з нечіткої моделі.

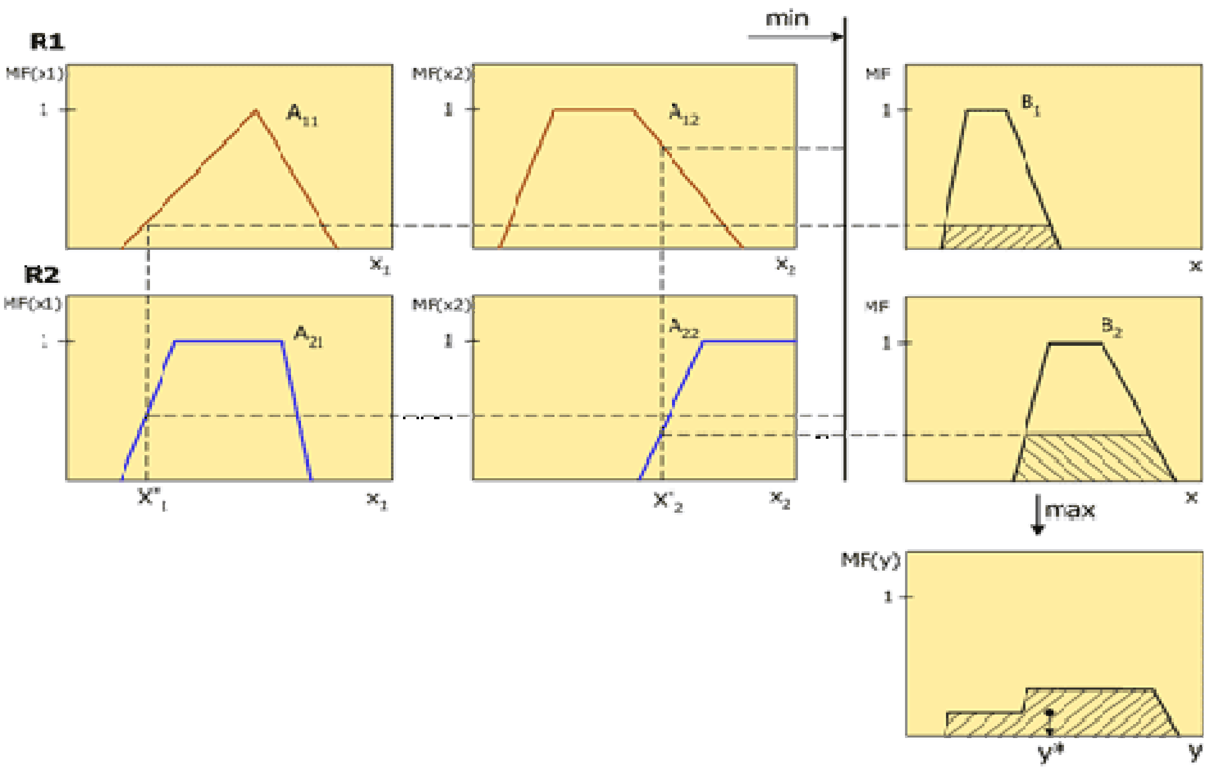


Рис. 1.28. Схема нечіткого висновку за Мамдані

1.20. Індивідуальне завдання №8. Побудова нечітких моделей

Завдання: Вивчити метод побудови нечітких моделей

Порядок виконання: використовується програма Matlab.

Методичні вказівки: 1) Відкрити програму Matlab.

2) Нечіткі множини задані наступними функціями приналежності, числові значення яких розраховуються за даним з табл. 1.6.

3) Реалізувати в програмі наступну базу з трьох лінгвістичних правил:

R_1: ЯКЩО x_1 це A_{11} . І . x_2 це A_{12}, І . x_3 це A_{13}, ТО y це B_1.
R_2: ЯКЩО x_2 це A_{21} . І . x_2 це A_{22}, І . x_3 це A_{23}, ТО y це B_2.
R_3: ЯКЩО x_1 це A_{31} . І . x_2 це A_{32}, І . x_3 це A_{33}, ТО y це B_3.

4) На вхід системи подати три чітких сигнали зі значеннями $x_1 = 0{,}7N + i$, $x_2 = 1{,}2N + 3i$, $x_3 = 1{,}7N_г + 0.2i$, де і = 1…2…3. Знайти чіткий вихід системи y^* методом Мамдані. Тут $N_г$ – номер студента за списком групи.

5) Подати звіт у форматі Word з фрагментами активних вікон і зробити висновки.

Таблиця 1.6

Варіанти завдань нечітких множин

Нечітка функція	Тип функції	Показники країв функцій		
		Нижній	Середина	Верхній
A_{11}	лінійна	0,81	0,75+0,15N	0
A_{12}	нормальна	0,82	0,3+0,08N	0,6
A_{13}	Трапеція	0,94	3	0,5
A_{21}	Трикутна	0,89	4	0
A_{22}	Лінійна	0,15	0,7+0,05N	0,3+0,22N
A_{23}	Нормальна	0,8	0,3	0,8
A_{31}	Трапеція	0,73	0,7+0,05N	0
A_{32}	Трикутна	0,59	2	0,7+0,1N
A_{32}	Лінійна	0,17	1,0	0,3
B_1	нормальна	0,73	0,5+0,3N	0,5
B_2	Трапеція	0,76	0,7	0,7-0,2N
B_3	Трикутна	0,62	0,7+0,05N	0,8

1.21. Метод планування експерименту

Моделі, створені за допомогою методів імітаційного моделювання, нейронних сіток та нечітких множин є не зручними для їх використання в оптимізаційних розрахунках, оскільки підпрограма Solver (та і всі інші методи знайдення екстремуму) електронних таблиць Excel можу працювати тільки з аналітичними залежностями (тобто з формулами), а не з набором числових значень Х та У, що їх генерують ці методи.

Справді, ми можемо для всіх, вказаних вище методів задавати певні значення вхідних факторів і отримувати значення вихідних факторів. Потім, за отриманою таблицею побудувати аналітичну модель, лінійну, або нелінійну. Але тут виникає питання в кількості можливих значень для Х, у якому діапазоні вони мають змінюватися і головне, в якому сполученні їх треба задавати?

Очевидно, що бажаним є якомога менший розмір таблиці значень.

Вирішенням цієї задачі є метод планування експериментів.

В ньому розглядається набір вхідних факторів, для кожного з яких визначається найбільше і найменше значення, яке вони можуть приймати – X min$i$ та Xmax$i$, де $1 < i < N$, N – кількість вхідних факторів. Ці параметри називаються як «мінус альфа» та «плюс альфа» (-a; +a). Прийнято вважати, що ці значення відстоять на √2 або на 1,414 від середини діапазону.

За цими значеннями знаходиться середина діапазону для кожного Х, яка називається нульовою точкою і позначається як «0».

$$\boldsymbol{X_{0i} = \frac{X_{maxi-}\,X_{mini}}{2}}.$$

Залишилося знайти значення Х, що відстоять на 1 від середини діапазону, ці значення позначаються як «-1» та «+1»

$$\boldsymbol{X_{-1i} = X_{0i} - \frac{X_{maxi-}\,X_{mini}}{2{,}818},\ X_{+1i} = X_{0i} + \frac{X_{maxi-}\,X_{mini}}{2{,}818}}.$$

Наприклад, якщо X_{min1} = 1, X_{max1} = 10, то X_{01} = 5,5; X_{-11} = 2,30624556, X_{+11} = 8,69375444. Якщо X_{min2} = 5, X_{max2} = 15, то X_{02} = 10; X_{-12} = 6,451384, X_{+12} = 13,54862.

Маючи ці значення можна скористатися готовим планом експерименту, який забезпечує опис набору даних поліномом другого порядку. Такий експеримент називається рототабельним.

План повного рототабельного експерименту для 2-х факторів

№ п/п	X_1	X_2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1
5	0	$-\sqrt{2}$
6	0	$+\sqrt{2}$
7	$-\sqrt{2}$	0
8	$+\sqrt{2}$	0
9	0	0

Для функції відгуку

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x^2{}_1 + a_{22}x^2{}_2$$

Як видно, для двох змінних досить всього дев'ять рядків таблиці. Заповнимо таку таблицю з нашого прикладу, замінивши умовні позначення абсолютними

№ п/п	X_1	X_2
1	2,30624556	6,451384
2	8,69375444	6,451384
3	2,30624556	13,54862
4	8,69375444	13,54862
5	5,5	5
6	5,5	15
7	1	10
8	10	10
9	5,5	10

Тепер, задаючи вказані у таблиці сполучення значень для X, ми можемо отримати значення Y, що стане основою для визначення коефіцієнтів лінійної чи нелінійної моделі методом найменших квадратів.

Для трьох факторів план експ6ерименту має наступний вигляд. У ньому число рядків тільки 20.

План повного рототабельного експерименту для 3-х факторів

x_1	x_2	x_3
—	—	—
+	—	+
—	—	+
—	+	—
+	+	—
+	—	—
—	+	+
+	+	+
—	—	—
+	—	—
—	+	—
—	—	+
+	+	+
—	+	+
+	—	+
+	+	—
—1,4142	0	0
+1,4142	0	0
0	—1,4142	0
0	+1,4142	0
0	0	—1,4142
0	0	+1,4142
0	0	0
0	0	0
0	0	0

Для функції відгуку

$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3 + +a_{11}x^2{}_1 + a_{22}x^2{}_2 + a_{33}x^2{}_3$

Очевидно, що за аналогією, можна побудувати плани і для 4-х і більше факторів. Загальна кількість рядків такого плану може бути розрахована як

$$N = 2^{n+1} + 3n,$$

де n – кількість вхідних факторів.

1.22. Індивідуальне завдання №9.

Побудова нелінійних моделей за нейронними, імітаційними та нечіткими моделями

Завдання: Вивчити метод побудови аналітичних моделей за імітаційними, нейронними та нечіткими моделями.

Порядок виконання: використовуються програми Matlab, Statastica та Excel.

Методичні вказівки: 1) Відкрити програми Matlab, Statastica та Excel.

2) Для таблиць, отриманих в індивідуальному завданні №1, узяти абсолютні значення. Визначити в них найбільше і найменше значення для X1 та X2.

3) Розрахувати числові значення змінних, які відповідають умовним позначенням «0», «-1» та «+1». Узяти таблицю плану рототабельного експерименту і заповнити її абсолютними значеннями.

4) Для готових моделей, розроблених в індивідуальних завданнях №№6-8, задавити значення з таблиці і записувати значення Y.

5) Отримані три таблиці даних використати для розрахунку коефіцієнтів нелінійних моделей.

6) Подати звіт у форматі Word з фрагментами активних вікон і зробити висновки.

Контрольні запитання

1. Які типи даних потрібно очищати перед аналізом і чому?
2. Які методи ви можете використовувати для обробки відсутніх значень у даних?
3. Що таке статистичні характеристики даних і як вони застосовуються у моделюванні?
4. Які статистичні методи можна використовувати для оцінки центральної та варіаційної тенденцій даних?
5. Як працює метод найменших квадратів для побудови моделей?
6. Які переваги і обмеження методу найменших квадратів?
7. Побудова лінійних, нелінійних та авторегресійних моделей

8. В чому основна відмінність між лінійними і нелінійними моделями?
9. Які основні приклади застосування авторегресійних моделей?
10. Що таке трансцендентні моделі і як вони використовуються в економічному аналізі?
11. Які складнощі можуть виникнути при розв'язанні трансцендентних моделей?
12. Що таке кластерний аналіз і які цілі він допомагає досягнути?
13. Які методи можна використовувати для оцінки кількості кластерів у даних?
14. Які принципи лежать в основі імітаційного моделювання?
15. Які типи задач можна розв'язати за допомогою імітаційних моделей?
16. Що таке нейронні сітки і як вони застосовуються в моделюванні?
17. Які переваги мають нейронні мережі порівняно з іншими моделями?
18. Що таке нечіткі множини і як вони використовуються в моделюванні невизначених ситуацій?
19. Які основні оператори та правила використовуються в нечітких моделях?
20. Що таке метод планування експерименту і як він допомагає покращити якість моделей?
21. Які типи планів експерименту існують і в яких випадках кожен з них застосовується?
22. Які методи можна використовувати для побудови нелінійних моделей?
23. Які переваги має побудова нелінійних моделей за допомогою нейронних мереж, імітаційних та нечітких моделей порівняно з класичними методами?

Опанувавши матеріали цього розділу студенти зможуть будувати лінійні, нелінійні, трансцендентні моделі. Зможуть використовувати моделі, побудовані на базі нейронних сіток та нечітких висловів.

Розділ 2. ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛЕЙ

Після вивчення матеріалів цього розділу студенти узнають методи лінійного програмування, теорію ігор та оптимізацію транспортної задачі.

Економіко-математичні моделі, що використовуються при оптимізації управлінських рішень, важко класифікувати, оскільки може бути декілька підходів до класифікації, наприклад по місцю їх застосування, складності, їх математичним основам, обліку або нехтуванню в них чинника часу, характеру отримуваного результату і по інших ознаках.

Найбільш повно розробленими і вживаними на практиці моделями, що дозволяють оптимізувати управлінські рішення, є статистичні моделі. Вони дають можливість робити вибір сукупності чисел x_i (змінних в рівняннях), що забезпечують екстремум деякої функції *Z* (цільова функція або показник якості ухваленого рішення) при обмеженнях, визначуваних умовами роботи системи. Математично модель записується так: обчислити вектор $\overline{X} = x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_n$, що обертає в максимум або мінімум цільову функцію.

В якості цільової функції використовуються моделі, побудові яких було присвячено розділ 1.

Існує декілька основних прийомів знайдення екстремуму, але ви зосередимося на тому, як їх знайти за допомогою спеціалізованих програм.

2.1. Оптимальні розрахунки

Більшість оптимізаційних задач вирішуються методами математичного програмування.

Загальна постановка задачі математичного програмування має вигляд, показаний в (2.1)-(2.2).

– Цільова функція $$\sum C_i X_i \to Extr\,; \tag{2.1}$$

– обмеження

$$\left.\begin{array}{l}\sum a_{ij} X_i \{=<;=;>=\} b_j\,, (j=\overline{(1,m)} \\ d_i <= X_i <= D_i\,, (i=(\overline{1,n}) \quad .\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Тут X_i – змінні вхідні фактори, оптимальне значення яких потрібно знайти; C_i – коефіцієнти моделі; a_{ij} – коефіцієнти обмежень; b_j – числова величина, яку обмеження не може перебільшувати(або навпаки менше якої не може бути); d_i, D_i – межі, в яких можуть змінюватися вхідні фактори, m – кількість обмежень; n – кількість вхідних факторів.

Вирази типу (2.2) називаються обмеженнями, які задають область рішень цільової функції (2.1). Саме цільова функція, почасти, і є моделлю соціально-економічної системи. Варто відмітити, що вид функцій f та q_i може бути як лінійний так і нелінійний. Для знайдення оптимуму моделей цього типу застосовуються числові методи.

Приклад. Знайти оптимальний план випуску товарної продукції. Інші умови подані в процесі вирішення задачі. Цільова функція – це максимізація доходу від випуску товарної продукції $\sum Pi \cdot Ci \to \max$, де P_i – ціна одиниці продукції, C_i – об'єм випуску кожного виду продукції.

Накладемо на цільову функцію набір обмежень. Основним буде недолік виробничих площ. Всього в наявності є 230 місць, кожне з яких займає 7,4 квадратних метрів, враховуючи проходи до них. Необхідно також розвернути мінімум 10 робочих місць для інженерів, кожне з яких займає 8,5 квадратних метрів. Загальна площа виробничих приміщень становить 2000 квадратних метрів. Одержуємо обмеження $7{,}4L + 8{,}5L_i \leq 2000$, $L_i \geq 10$, $L \leq 230$, де L – кількість робочих місць, L_i – кількість місць для інженерів.

Другою групою обмежень є обмеження по складських приміщеннях. Їх не можна пристосувати під виробничі, і крім того вони абсолютно необхідні для тимчасового зберігання випущеної продукції, а також займаються під склади деталей і матеріалів. Вважатимемо, що площа, необхідна для розміщення готової продукції кожного виду становить:

$0{,}3A$, де A – кількість телевізорів, що випускаються за місяць;

$0{,}35B$, де B – кількість відеомагнітофонів, що випускаються за місяць;

$0{,}4C$, де C – кількість музичних центрів, що випускаються за місяць.

Тоді для всього випуску потрібно складська площа у розмірі $0{,}35B+0{,}3A+0{,}4C$. Загальна площа обладнаних складських приміщень становить 600 квадратних метрів. Обмеження по об’єму складських приміщень

$$0{,}35B+0{,}3A+0{,}4C \leq 600.$$

Тепер розглянемо ціну товарної продукції: телевізор – 180 у.о., відеомагнітофон – 260 у.о., музичний центр - 420 у.о.

Собівартість складається з витрат на оренду площі – 4000 у.о., витрат на комплектуючі – 100, 170, 315 відповідно на випуск одного телевізора, відеомагнітофона та музичного центру; інших витрат – 4500 у. о. Необхідна зарплата інженерів складає 400, директора - 600, робітників на конвеєрі - 350. Для підприємства нашого масштабу необхідно 3 директори незалежно від випуску і 1 на кожні 150 одиниць продукції. Необхідно 1-2 інженери на кожні 150 одиниць випуску продукції

Одержуємо обмеження, що собівартість не може перевищувати доходів від продажу продукції

$$4000+100A+170B+315C+4500+400L_i+350L+600 \leq AP_1+BP_2+CP_3,$$

$$P_1 \leq 180,\ P_2 \leq 260,\ P_3 \leq 420,$$

де P_1, P_2, P_3 – відповідно ціни одного телевізора, відеомагнітофона та музичного центру.

Фонд заробітної платні, обмежений через податкові проблеми у 260,5 млн. у.о. Обмеження на фонд зарплати

$$3\cdot 600 + 600(A+B+C)/150 + 2\cdot 400(A+B+C)/150 + 350L \le 260500000.$$

Позначивши як вхідні фактори величини A, B, C, P_1, P_2, P_3, L, L_i, виконаємо розрахунки за допомогою функції Solwer. Одержуємо, що оптимальним випуском є виробництво 3800 телевізорів, 2000 відеомагнітофонів і 1500 музичних центрів в місяць за умови збереження наявної тактики поведінки на ринку.

Порядок використання Solver показано у розділі 1.

Лише в окремих випадках мета, яку особа, що ухвалює рішення (ОУР) прагне досягти в планованій їм операції, вдається описати за допомогою одного кількісного показника. Різноманіття цілей ОУР адекватніше може бути описане за допомогою деякої сукупності часткових критеріїв (ч-критеріїв), що характеризують ступінь досягнення окремих цілей. Суперечливий характер цілей обумовлює, як правило, і суперечність ч-критеріїв. З формальної точки зору це призводить до того, що свої екстремальні значення ч-критерії одержують в різних точках області допустимих рішень (ОДР) – Dx. Отже, ОУР приймаючи рішення, завжди повинен йти на компроміс, в розумних межах допускаючи погіршення значень одних ч-критеріїв в ім'я поліпшення значень інших. Рішення, що приймається ОУР із залученням сукупності ч-критеріїв, називатимемо компромісним, раціональним або просто рішенням ОУР.

Основна ідея обґрунтування і ухвалення рішення ОУР в умовах багатокрітеріальності полягає в послідовному звуженні ОДР Dx до мінімальних розмірів, що полегшує ухвалення остаточного рішення ОУР. Першим, найістотнішим кроком в цьому напрямі буде звуження ОДР Dx до деякої підмножини $Dx^{\pi} \subset Dx$.

Формальна схема багатокритеріальної задачі математичного програмування від звичної відрізняється наявністю декількох цільових функцій

$$L^r(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^r \cdot x_j + c_0^r \to \max_x, \quad r = \overline{1;R}, \tag{2.3}$$

$$D_x \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge -b_i, \Rightarrow \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, i = \overline{1;m}, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;n}, \end{cases} \tag{2.4}$$

де ε_i – ненегативні змінні, i = 1; m).

Знак max означає той факт, що бажаним є збільшення кожного з критеріїв оптимізації *Lr(x),* що відображає деяку *r*-у мету задачі.

Вимога тільки максимізації не звужує загальності задачі. Так, наприклад, вимога мінімізації витрат деяких ресурсів еквівалентна вимозі максимізації залишку від спочатку виділених ресурсів. Наявність багатьох ч-критеріїв дозволяє зробити модель (2.3)-(2.4) адекватній економіко-математичній системі, що вивчається, проте виводить її з класу задач математичного програмування і вимагає розробки нових способів її аналізу. Рішення x' домінує рішення x ($x' > x$), якщо при x' хоча б один ч-критерій має більше значення при рівності інших. Тому рішення x може бути виключене з подальшого розгляду, як явно гірше, ніж x'. Якщо рішення x, не домінує із жодним з рішень $x \in Dx$, то його називають Паретто-оптимальним (π - оптимальним) або ефективним рішенням (π - рішенням). Таким чином, π-рішення – це не краще (таке, що не домінує) рішення, і ясно, що рішення задачі повинно володіти цією властивістю – інші рішення немає сенсу розглядати.

Формальне визначення π-оптимальності рішення x' записується як вимога про відсутність такого рішення $x \in Dx$, при якому б були виконані умови

$$L^r(x) \ge L^r(x'), \forall r, \tag{2.5}$$

і хоча б одне з них – строго (зі знаком >).

Іншими словами, умови (5.25) виражають вимогу неможливості поліпшення рішення x' в межах ОДР Dx ні по одному ч-критерію без погіршення хоча б по одному з інших.

Щоб можна було перевірити умову (2.5) для деякої довільно узятої точки x', не вдаючись до попарного порівняння з іншими, умову, сформулюємо її у вигляді наступної задачі математичного програмування

$$\delta^{r} = L^{r}(x) - L^{r}(x') = \sum_{j=1}^{n} c_j^{r} x_j - \sum c_j x_j', \forall \delta^{r}, \tag{2.6}$$

$$\Delta = \Delta(x) = \sum_{r=1}^{R} \delta^{r} \to \max_{x}, \tag{2.7}$$

$$x \in D_x, \forall x_j \geq 0. \tag{2.8}$$

Значення задачі математичного програмування неважко зрозуміти, якщо врахувати, що δ^r – це приріст ч-критерію Lr, одержаний при зсуві рішення x' в точку x. Тоді, якщо після рішення задачі виявиться $\Delta_{max} = 0$, то це означатиме, що жоден з ч-критеріїв не можна збільшити, якщо не допускати зменшення будь-якого з інших ($\forall\ \delta^r \geq 0$). Але це і є умова π-оптимальності x'. Якщо ж при рішенні виявиться, що $\Delta \geq 0$, то значить якийсь ч-критерій збільшив своє значення без погіршення значень інших ($\forall\ \delta^r \geq 0$), і значить $x' \notin D^{\pi}_{x}$.

Приклад. Дані три цільові функції:

$$L_1 = -x_1 + 2x_2 + 2,\ \ L_2 = x_1 + x_2 + 4,\ \ L_3 = x_1 - 4x_2 + 20,$$

і система обмежень:

$$x_1 + x_2 \leq 15,\ \ 5x_1 + x_2 \geq 1,\ \ -x_1 + x_2 \leq 5,\ \ x_2 \leq 20,\ \ \forall x_j \geq 0.$$

Перетворимо цільові функції в одну, згідно з (2.6) - (2.8):

$$\delta^1 = x_1 - 2x_2 + 1,\ \delta^2 = x_1 + x_2 - 8,\ \ \delta^3 = -x_1 + 4x_2 - 7,$$

$$\Delta = x_1 + 3x_2 - 14 \to \max.$$

Тепер ми маємо одну цільову функцію, яку і можемо вирішити за допомогою функції Solwer: $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $\Delta = 21$.

При будь-якому довільному рішенні $x \in Dx$ кожний з ч-критеріїв прийме певне значення і серед них знайдеться, принаймні, один, значення якого буде як найменшим

$$\varphi = \varphi(x) = \min_{1 \le r \le R} L^r(x) \to \max_x . \quad (2.9)$$

Метод гарантованого результату дозволяє знайти таке гарантоване рішення, при якому значення «як найменшого» критерію стане максимальним. Таким чином, цільова функція (ЦФ) є деякою згорткою ч-критеріїв (5.29), а рішення зводиться до задачі частково-опуклого програмування при ОДР Dx, заданої лінійними обмеженнями.

Приклад. Для попереднього прикладу застосувати метод гарантованого результату. Для цього вирішимо три задачі лінійного програмування з трьома різними критеріями оптимізації та з однаковими обмеженнями.

Застосувавши функцію Solwer, отримуємо, що при пошуку максимуму для L_1 та L_2, значення змінних параметрів буде однаковим $x_1 = 5$, $x_2 = 10$. При цьому $L_1 = 17$, $L_2 = 19$. А при пошуку максимальних значень відносно L_3, отримуємо $x_1 = 53687096$, $x_2 = -2{,}1\ 10^8$, $L_3 = 9{,}1\ 10^8$. Отже, згідно з принципу (2.9) останнє рішення треба відкинути і взяти перше.

Лінійна згортка ч-критеріїв виходить як x сума з деякими ваговими коефіцієнтами μ_r

$$L(x) = \sum_{r=1}^{R} \mu_{\hat{e}} L^r(x), \quad (2.10)$$

Коефіцієнти ваги звичайно знаходять шляхом опиту експертів з відповідної наочної області. Оскільки вектор $\mu = (\mu_r)$ – суть вектор-градієнт $L^\mu(x)$, то припускається, що він указує напрям до екстремуму невідомої функції корисності. Найкращою лінійна згортка ч-критеріїв може виявитися у тому випадку, коли ч-критерії однорідні і мають єдиний еквівалент, що погоджує їх найбільш природним чином. Позитивна сторона такого підходу – нескладність, не завжди компенсує його серйозний недолік – втрату фізичного значення лінійної згортки різнорідних ч-критеріїв. Це утрудняє інтерпретацію результатів, тому одержане таким шляхом рішення, слід розглядати тільки як можливий (альтернативний) варіант рішення задач лінійного програмування. Для його порівняльного аналізу слід привертати будь-які інші варіанти і, звичайно, значення ч-критеріїв, одержувані при цьому.

Іноді при отриманні згортки ч-критеріїв заздалегідь нормуються наступним способом:

1. Знаходиться часткове рішення за кожним з критеріїв окремо.

2. Оптимальне значення кожного критерію $L^r_{ОПТ}(x)$ використовується для подальшого нормування критеріїв
$$\frac{L^r(x)-L^r_{ОПТ}(x)}{L^r_{ОПТ}(x)}. \qquad (2.11)$$

Таке нормування зводить різнорідні критерії в один масштаб.

3. Нормовані значення критеріїв зводяться в один функціонал, для якого і знаходиться його мінімальне значення.

Цей принцип можна застосовувати до будь-якого виду цільових функцій та обмежень: як лінійних так і нелінійних.

Принципи зведення не нормованих критеріїв в один функціонал залежать від того, куди прагне кожен ч-критерій:

1. Якщо всі критерії прагнуть максимуму, достатньо утворити їх суму з ваговими коефіцієнтами.

2. Якщо є критерії, що прагнуть мінімуму, потрібно їх перетворити на такі, що прагнуть максимуму $L^r_{MAX}(x)=\dfrac{1}{L^r_{MIN}(x)+1}$. Далі

$$L(x)=\frac{\sum_{r=1}^{R}\mu_{ђ}L^r_{MAX}(x)}{\sum_{r=1}^{R}\mu_{ђ}L^r_{MIN}(x)+1}, \qquad (2.12)$$

утворюється сума ч-критеріїв з ваговими коефіцієнтами, яка буде цільовою функцією, що прагне максимуму. Одиниця у знаменнику додана для випадку, коли $L^r_{MIN}(x)$ у своєму русі до оптимуму буде проходити через нуль, що викличе зупинку процесу пошуку екстремуму.

3. Як варіант, можливе утворення функціоналу виду (5.32), де в чисельнику стоять ч-критерії, що прагнуть максимуму, а у знаменнику, такі, що прагнуть мінімуму. Тоді ми уникнемо виникнення ситуації «ділення на нуль», яка припинить розрахунок екстремуму.

Приклад.

Знайти оптимальний план співвідношень продукції (соків та вина), яку накопичує на складі торгова фірма, з урахуванням статистичних досліджень попиту. Умовні позначення: Xi - вид товарної групи (асортиментна позиція); m - кількість місяців; Q_1, Q_2 - нижня й верхня межі обсягів товарообігу для складу; P_{1i} - ціна покупки одиниці товару; P_{2i} - ціна реалізації одиниці товару; k_1 - собівартість плюс додаткові витрати на зберігання 1 шт продукту, який не був проданий у встановлений час, оскільки попит на нього виявився меншим від того, що прогнозується; k_2 - утрата прибутку на 1 шт продукту, зумовлена відсутністю товару, попит на який перевищив замовлену кількість; Параметри ящика: l - довжина; h –висота ; w – ширина; $S_{\text{од}}$ –площа, що займає одиниця продукції (ящик); $X_{\text{заг.ск.}}$ – загальна кількість ящиків, що можуть розміщатись на складі одночасно;X_{onm} – оптимальний (розрахункова) кількість товару і-того виду на складі;$C_{\text{збі}}$ – вартість зберігання товару i –того виду; $C_{\text{прі}}$ – прибуток від реалізації одиниці товару і –того виду.

Статистичний метод розрахунку оптимального запасу продукції базується на спостереженнях за попитом товару протягом певного часу.

На підставі цього спостереження будується емпірична функція розподілу вигляду

$$F(X) = P(x < X), \tag{2.13}$$

де P – імовірність того, що попит – x – буде менше наперед заданого значення X.

Тоді оптимальний попит (X_{onm}) буде знайдено за оптимальним значенням цієї функції, який розраховується за

$$F(X_{onm}) = C_{npi} / (C_{збi} + C_{npi}). \tag{2.14}$$

Потрібне вирішення відносно (X_{onm}). Оскільки, частіше всього емпірична функція розподілу описується логарифмічно функцією виду

$$F(X_{опт}) = a + b\ln(X_{опт}),\qquad(2.15)$$

де a, b – константи,

рішення має вигляд $$X_{опð} = \exp\left(\frac{1}{b}\left(\frac{\tilde{N}_{ïð³}}{\tilde{N}_{çá} + \tilde{N}_{ïð³}} - a\right)\right).\qquad(2.16)$$

Торгове підприємство має обмежену площу складу (S) і номенклатуру продукції з n найменувань, які представлені на складі у кількості xi. Для кожного найменування відомо площу, яку займає одиниця продукції s_i ($1<i<n$).

В цих умовах задача стає багатокритеріальною. З одного боку потрібно,

щоб прибуток $$Пр = \sum_{i=1}^{n} k_{1i} x_i\ ,\qquad(2.17)$$

був максимальним. З іншого боку бажано, щоб різниця між оптимальним значенням запасу продукції і реальним

$$Оз = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \exp\left(\frac{1}{b_i}\left(\frac{C_{прі}}{C_{зб} + C_{прі}} - a\right)\right)\right|,\qquad(2.18)$$

була б мінімальною. Знак „по модулю” означає, що відхилення xi від оптимального запасу може бути в обидва боки. Обмеженням тут виступає

загальна площа складу $$S = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i\ .\qquad(2.19)$$

Для вирішення цієї задачі пропонується функціонал виду

$$\frac{Пр}{Оз+1} \to \max \quad \text{або} \quad \frac{\sum_{i=1}^{19} k_{1i} x_i}{\sum_{i=1}^{19}\left[\frac{k_{1i}}{k_{1i}+k_{2i}} - \left(a + b\ln x_i\right)\right] + 1} \to \max\qquad(2.20)$$

з обмеженнями на площу (загальна площа складських приміщень в цьому обмеженні множиться на 5, так як, піддони з ящиками можна ставити один на

один у висоту, але не більше 5 штук) $$\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le 5S\ ,\qquad(2.21)$$

та на не негативні значення кількості кожного виду продукту.

$$x_i \geq 0$$
$$(1 \leq i \leq n) \cdot \qquad (2.22)$$

Введемо додаткові обмеження на верхні та нижні межі товарообігу на складі

$$Q_{1i} \leq x_i \leq Q_{2i} \qquad (2.23)$$

Вирішення подібної задачі для торгового підприємства, яке має номенклатуру з 19 продуктів і обмежений склад було виконано за допомогою функції Solver . Емпіричні функції розподілу було розраховано за спостереженнями попиту продукту протягом 1 року. Результати рішення показали можливість отримання додаткового прибутку 125343 грн. за рік.

2.2. Індивідуальне завдання №10. Оптимізаційні розрахунки

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета роботи: Набути навичок складання математичної моделі задачі планування виробництва та її реалізації із використанням табличного процесору Excel.

1. Побудувати математичну модель представленого у варіанті завдання.

2. Ввести дані і формули на аркуш Microsoft Excel.

3. За допомогою інструменту Solver знайти рішення задачі.

4. Провести аналіз отриманих результатів. Спробувати вручну знайти найкраще рішення.

5. Зробити висновки у на сторінці Excel.

Практична робота складається з двох задач. В обох групах студент обирає з наведених нижче варіантів за останньою цифрою номеру списку групи.

Варіанти І завдання

1.0. Цех консервного заводу для виготовлення 3-х партій консервів використовує послідовно різне технологічне обладнання. Витрати обладнання на партію консервів кожного виду вказані в таблиці.

Групи обладнання	Технічні коефіцієнти			Ціна (грн.)
	продукція І	продукція ІІ	продукція ІІІ	
A	2	4	5	120
B	1	8	6	280
C	7	4	5	140
D	4	7	6	360
Прибуток (грн.)	10	14	12	

Технічні коефіцієнти вказують, яка кількість кожного виду обладнання необхідно для виготовлення продукції кожного виду. Знайти розв'язок, взявши за мету максимальний прибуток.

1.1. У буфеті студентської їдальні реалізуються бутерброди 3 видів A, B, C. Їх підготовка і реалізація вимагають використання 3 видів ресурсів, норми витрат яких наведені у таблиці:

Види ресурсів	Витрат ресурсів на 1 партію бутербродів			Запас ресурсів
	A	B	C	
I	2	1	2	38
II	1	3	2	44
III	3	2	1	40
Прибуток (грн.)	7	6	4	

Визначити план продажу бутербродів, який забезпечить максимум прибутку від їх реалізації.

1.2. Цех м'ясокомбінату для виготовлення 3 видів консервів використовує послідовно різне технологічне обладнання. Витрати обладнання на партію виробів кожного виду та його ціна наведені у таблиці.

Технічні коефіцієнти вказують, яка кількість кожного виду обладнання необхідна для виготовлення партії консервів кожного виду. Знайти розв’язок, взявши за мету максимальнийприбуток.

Групи обладнання	Технічні коефіцієнти			Ціна (грн.)
	"Сніданок туриста"	"Паштет печінковий"	"Паштет міський"	
A	18	15	12	360
B	6	4	8	192
C	5	3	3	180
Прибуток (грн.)	9	10	16	

1.3. На консервному заводі виготовляють 3 види молочних сумішей для чого використовують звиди сировини. Норми витрат сировини на виробництво кожного виду сумішей, запаси сировини, атакож прибуток від реалізації кожного виду сумішей наведені у таблиці:

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1(т) сумішей			Запаси сировини (т)
	"Малюк"	'Ведмедик"	"Сонечко"	
Молоко сухе	0,8	0,5	0,6	900
Мука рисова	0,4	0,4	0,3	700
Цукор	0	0,1	0,1	1000
Прибуток (грн.)	108	112	126	

Визначити план виробництва сумішей, який забезпечить найбільший прибуток.

1.4. Консервний завод для виробництва 3 видів овочевих консервів "Салат овочевий", "Перець фаршированний", "Перчинка" використовує три види основної сировини: перець, томатний соус, моркву. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1партії консервів наведені у таблиці. В ній же наведена загальна кількість сировини кожного виду, яка може використовуватись консервним заводом, а також й прибуток від реалізації кожного виду консервів.

Вид сировини	Норми витрати сировини			Запас сировини (т)
	"Салат овочевий"	"Перець фаршировани й"	"Перчинка"	
Перець	0,25	0,4	0,5	160
Томатний соус	0,3	0,25	0,5	180
Морква	0,7	0,5	0	140
Прибуток (грн.)	216	224	222	

Визначити план виробництва продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

1.5. Цех консервного заводу налагоджує виробництво 3 видів продукції, для чого потрібне обладнання і певні витрати праці. У таблиці наведені норми витрат усіх видів ресурсів та їх наявні запаси.

Види ресурсів	Витрати ресурсів на одиницю продукції			Запас ресурсів
	продукція I	продукція II	продукція III	
Обладнання	2	4	5	510
Витрати на виробництво	4	6	2	640
Витрати на обслуговування	0,5	0,3	0,3	50
Прибуток від виробництва одиниці продукції	0,8	0,8	0,7	

Визначити план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

1.6. Цех напівфабрикатів виробляє два види продукції і при цьому використовує чотири види сировини у кількості, вказаній нижче.

Вид сировини	Витрати сировини на 1 кг продукції		Запас сировини (кг)
	продукція I	продукція II	
A	0,3	0,2	220
B	0,9	1,1	195
C	0,4	0,1	240
D	0	0,3	205
Прибуток від виробництва одиниці продукції	2,5	3,5	

Визначити план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

1.7. Цех напівфабрикатів виробляє два види продукції і при цьому використовує чотири види сировини у кількості, вказаній нижче в таблиці.

Вид сировини	Витрати сировини на 1 кг продукції		Запас сировини (кг.)
	продукція I	продукція II	
A	3	2	2200
B	9	11	1950
C	4	1	2400
D	0	3	2050
Прибуток від виробництва одиниці продукції	25	35	

1.8. У таблиці наведені ресурси торгового підприємства на квартал і нормативи їх витрат в тис. гривень товарообігу на овочеві і плодово-ягідні консерви.

Показники	Нормативи витрат		Фонди показників
	овочеві	плодово-ягідні	
Витрати праці торгівельних працівників (люд.-год.)	7	9	1700
Площа торгівельних залів (кв.м.)	0,4	0,3	75
Витрати обігу (грн.)	5	4	960
Прибуток (грн.)	80	90	

Скласти квартальний план товарообігу, який забезпечить найбільший прибуток.

1.9. У міні-кафе реалізуються бутерброди 3 видів I, II, III. Їх підготовка і реалізація вимагаютьвикористання 4 видів сировини - A,B,C,D, норми витрат якої наведені у таблиці:

Види сировини	Норми витрат ресурсів на 1 партію бутербродів			Запас сировини
	I	II	III	
A	3	2	3	48
B	2	4	3	54
C	4	3	2	50
D	3	2	1	40
Прибуток (грн)	8	7	5	

Визначити план продажу бутербродів, який забезпечить максимум прибутку від їх реалізації.

Друге завдання

Підприємство випускає три виду продукції А, Б і С (табл. 2.1) Для виробництва цієї продукції потрібні такі ресурси, як матеріали, праця робочих та ІТР. Для прийняття рішення оптимального випуску продукції, треба:

визначити параметри оптимізації задачі та скласти якісну та математичну моделі задачі на основі операційної методології. Виконати формалізацію задачі, описати методи її рішення і методику дослідження отриманої моделі.

Таблиця 2.1

Вхідні данні

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими можливостями
		А	Б	С	
1	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	295
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	60	300	
2	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,35	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	7	280
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	65	300	
3	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	6	275
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими можливостями
		А	Б	С	
4	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,4	70
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	5	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	
5	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	0,45	0,4	80
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	6	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	270	
6	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	2	0,5	85
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	60	265	
7	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими можливостями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	110	265	
8	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	7	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	125	265	
9	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	6	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	125	75	
10	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	1	1	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	120	170	
11	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	120

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими можливостями
		А	Б	С	
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	185	125	170	
12	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	3	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	180	135	175	
13	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	130
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	4	5	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	140	180	
14	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	5	4	140
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	155
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	3	205
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	150	210	

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими можливостями
		А	Б	С	
15	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	3	145
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	6	7	160
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	6	210
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	205	155	215	
16	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	4	150
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	165
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	7	6	215
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	225	160	220	
17	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	4	7	155
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	5	6	230
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	215	165	210	
18	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	1	90
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	115
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	300

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими можливостями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	270	120	260	
19	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	125
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	4	2	250
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	260	180	270	
20	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	1	2	265
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	195	260	
21	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	145
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	245
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	275	255	
22	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	3	2	115

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими можливостями
		А	Б	С	
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	180
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	285	270	
23	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	265	275	
24	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	1	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	3	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	275	285	
25	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	135
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	140
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	200
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	265	280	285	

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими можливостями
		А	Б	С	
26	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	155
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	5	6	165
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	210
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	290	280	
27	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	165
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	205
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	260	245	
28	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	160
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	4	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	3	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	250	260	
29	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	6	170
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	5	180
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	190

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими можливостями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	240	250	255	
30	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	4	7	4	160
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	185
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	210	195	

2.3. Теорія ігор

Звичайно теорію гри визначають як розділ математики для вивчення конфліктних ситуацій. Це означає, що можна виробити оптимальні правила поведінки кожної сторони, що бере участь у рішенні конфліктної ситуації.

Гра – спрощена формалізована модель реальної конфліктної ситуації. Математично формалізація означає, що вироблені певні правила дії сторін в процесі гри: варіанти дії сторін; вихід гри при даному варіанті дії; обсяг інформації кожної сторони про поведінку всіх інших сторін. Виграш або програш сторін оцінюється чисельно. Гравець – це одна зі сторін в ігровій ситуації. Стратегія гравця – це його правила дії в кожній з можливих ситуацій гри.

Платіжна матриця (матриця ефективності, матриця гри) включає всі значення виграшів (в кінцевій грі). Нехай гравець 1 має m стратегій A_i гравець 2 - n стратегій B_j $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Гра може бути названа грою m/n. Подамо матрицю ефективності гри двох осіб.

Гравець 2	B_1	B_2	…….	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…….	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…….	a_{2n}	α_2
……..	……..	….	…….	……..	……..
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…….	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…….	β_n	

У даній матриці елементи a_{ij} - значення виграшів гравця 1 - можуть означати й математичне сподівання виграшу (середнє значення), якщо виграш є випадковою величиною. Величини α_i, $i = \overline{1,m}$, *и* β_j, $j = \overline{1,n}$, - відповідно мінімальні значення елементів a_i по рядках і максимальні - по стовпцях.

Розглянемо антагоністичну гру, представлену матрицею виграшів $m \times n$, де число рядків $i = \overline{1,m}$, а число стовпців $j = \overline{1,n}$. Застосуємо принцип отримання максимального гарантованого результату при найгірших умовах. Гравець 1 прагне прийняти таку стратегію, яка повинна забезпечити максимальний програш гравця 2. Відповідно гравець 2 прагне прийняти стратегію, що забезпечує мінімальний виграш гравця 1. В цих умовах, якщо

$$\max_{i} \min_{j} \alpha_{ij} = \min_{j} \max_{i} \alpha_i = v. \qquad (2.24)$$

гра називається грою з «сідловою» точкою і гравці мають додержуватися стратегій, які її забезпечують, і називаються «чистими», а v. – називавється ціною гри.

Якщо в матричній грі відсутня сідлова точка, то знаходять «змішану» стратегію гравців, тобто набір застосування його чистих стратегій при багаторазовому повторенні гри в одних і тих же умовах із заданими ймовірностями. Для гравця 1 змішана стратегія полягає в застосуванні чистих стратегій $A_1, A_2, ..., A_m$ з відповідними ймовірностями (частотою) $p_1, p_2 .... p_m$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2, & \dots, & A_m \\ p_1 & p_2, & \dots, & p_m \end{pmatrix}, \qquad \textbf{де} \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0 \qquad (2.25)$$

Для гравця 2

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2, & \dots, & B_n \\ q_1 & q_2, & \dots, & q_n \end{pmatrix}, \qquad \text{де } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \ge 0; \qquad (2.26)$$

q_j - імовірність застосування чистої стратегії B_j.

Чисті стратегії гравця є єдино можливими неспільними подіями. У матричній грі, знаючи матрицю A (вона відноситься й до гравця 1, і до гравця 2), можна визначити при заданих векторах $\overline{p}$ і $\overline{q}$, середній виграш (математичне сподівання ефекту) гравця 1

$$M(A, \overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j, \qquad (2.27)$$

де $\overline{p}$ і $\overline{q}$, - вектори; p_i і q_j - компоненти векторів.

Потрібно зазначити, що при виборі оптимальних стратегій гравцеві 1 завжди буде гарантований середній виграш, не менший, ніж ціна гри, при будь-якій фіксованій стратегії гравця 2 (і, навпаки, для гравця 2). Активними стратегіями гравців 1 і 2 називають стратегії, що входять до складу оптимальних змішаних стратегій відповідних гравців зі ймовірностями, відмінними від нуля. Значить, до складу оптимальних змішаних стратегій гравців можуть входити не всі апріорі задані їх стратегії.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	1	3	1
A_2	4	5	6	4
β_j	4	5	6	

Приклади. Приклад 1. Визначити верхню та нижню ціни при заданій матриці гри і указати максимінну і мінімаксну стратегії. Представимо матрицю гри з позначеннями стратегій, A_j, B_i;

Визначимо нижню ціну гри: α_1 =1; α_2 =4; α =4 (див. стовпець α_i,).

Визначимо верхню ціну гри: β_1 = 4 ; β_2 = 5; β_3 = 6; β = 4 (див. рядок β_j).

Таким чином, $\alpha = \beta = 4$, тобто $\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_i = 4$.

Значить, $\alpha = \beta = v = 4$ - чиста ціна гри при стратегіях A_2 і B_1. Отже, маємо гру з сідловою точкою.

Приклад 2. Дана матриця гри $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти її змішані стратегії.

Побудуємо цільову функцію згідно (5.44)

$$M(A, \overline{p}, \overline{q}) = 25p_1q_1 + p_1q_2 + 3p_2q_1 + 5p_2q_2 + p_3q_1 + 9p_3q_2 \to \max,$$

та враховуючи обмеження (2.25) - (2.26), знайдемо оптимальні значення ймовірностей застосування різних стратегій, застосувавши функцію Solwer. Рішенням цієї гри є те, що всі ймовірності дорівнюють нулю, окрім $p_1 = 1$ $q_1 = 1$. Отже ця гра повинна виконуватися у чистих стратегіях.

Оптимальні стратегії у випадку, коли учасники гри є співробітниками, знаходяться методами біматричної гри. По аналогії з матричними іграми двох осіб в біматричній грі кожен з гравців вибирає свою стратегію, робить один хід, після чого відбувається розподіл виграшів. Відмінність полягає в тому, що биматричная гра визначається не одній, а двома матрицями виграшів. Кожен з гравців має свою матрицю, і виграш один з них зовсім не означає програш іншого.

Хай матриці виграшів першого і другого гравців мають відповідно вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обидві матриці можуть бути представлені однією матрицею пар елементів A і B, так званою біматрицею

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1j}, b_{1j}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ . & . & . & . & . & . \\ (a_{i1}, b_{i1}) & (a_{i2}, b_{i2}) & \cdots & (a_{ij}, b_{ij}) & \cdots & (a_{in}, b_{in}) \\ . & . & . & . & . & . \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & (a_{mj}, b_{mj}) & \cdots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}.$$

При виборі першим гравцем i-го рядка, а другим гравцем j-го стовпця виграш кожного з них складе пару (a_{ij}, b_{ij}).

Природно, інтерес представляють ігри, в яких матриці A і B не співпадають і елементами однієї матриці не є монотонні перетворення іншої. Якщо ця умова не дотримана, то деякому максимальному елементу a_{kl} матриці A відповідає максимальний елемент b_{kl} матриці B. Це означає, що існує пара чистих стратегій (k,l)при використанні яких обох гравців мають максимальний виграш і конфлікт відсутній. У решті випадків досягти максимуму свого виграшу відразу обидва гравці не можуть. Необхідно ввести деяку ознаку компромісної оптимальності, якою є ситуація рівноваги. Під ситуацією маються на увазі конкретні використані змішані стратегії x, y.

Ситуація рівноваги для біматричної гри представляється парою таких змішаних стратегій x, y при яких дотримуються нерівності:

$$M_1^i \le M_1, \ i=\overline{1,m}; \qquad M_2^j \le M_2, \ j=\overline{1,n}, \tag{2.28}$$

де M_1^i – математичне сподівання виграшу першого гравця при застосуванні ним тільки i-ї стратегії; M_2^j – математичне сподівання виграшу другого гравця при застосуванні j-ї чистій стратегії.

Змістовний сенс нерівностей (5.45) полягає в тому, що застосування чистих стратегій будь-яким з гравців дає не більший ефект, чим застосування змішаних стратегій (x, y) обома гравцями.

Оскільки (x, y) є розподілами вірогідності використання чистих стратегій гравцями, то очевидно, що

$$\begin{gathered} M_1^i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \ i=\overline{1,m}; \quad M_2^j=\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i, \ j=\overline{1,n}; \\ M_1=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j; \quad M_2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j. \end{gathered} \tag{2.29}$$

Підставивши в нерівності (2.29) значення математичних сподівань, отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \ i=\overline{1,m}; \tag{2.30}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \,,\; j=\overline{1,n}. \qquad (2.31)$$

Відмітимо, що (x, y) є по фізичній суті вірогідністю вибору чистих стратегій, а можливі результати вибору стратегій кожним з гравців складають повну групу несумісних подій. Тому значення елементів (x, y) повинні задовольняти умовам

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i = 1;\; x_i \ge 0,\; i=\overline{1,m}; \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1;\; y_j \ge 0,\; j=\overline{1,n}. \end{cases} \qquad (2.32)$$

Визначення ситуацій рівноваги здійснюється шляхом сумісного вирішення системи нерівностей і рівнянь (2.31) – (2.32).

Приклад. Нехай існують матриці виграшів кооперативної гри

A =

12	45	65
45	4	48
12	47	14

B =

122	752	124
456	485	459
478	258	254

Знайти оптимальні стратегії для обох гравців.

На рис. 1.1 представлено повний хід рішення цієї задачі, в якій було застосовано метод згортки часткових критеріїв (5.30)-(5.32), в якому два критерія оптимізації були поєднані їх сумою.. Жовтим виділено оптимальні частоти застосування стратегій для кожного гравця. При цьому виграш першого гравця складе 27, а другого – 459. Оптимальним стратегіями є X = {0; 0,88; 0,12}, Y = {0,6; 0,4; 0}.

Нерідко економічна ситуація є унікальною, і рішення в умовах невизначеності повинно прийматися одноразово. Це породжує необхідність розвитку методів моделювання прийняття рішень в умовах невизначеності і ризику. Традиційно наступним етапом такого розвитку є гра з природою. Формальне вивчення гри з природою, так само як і стратегічних, повинно починатися з побудови платіжної матриці.

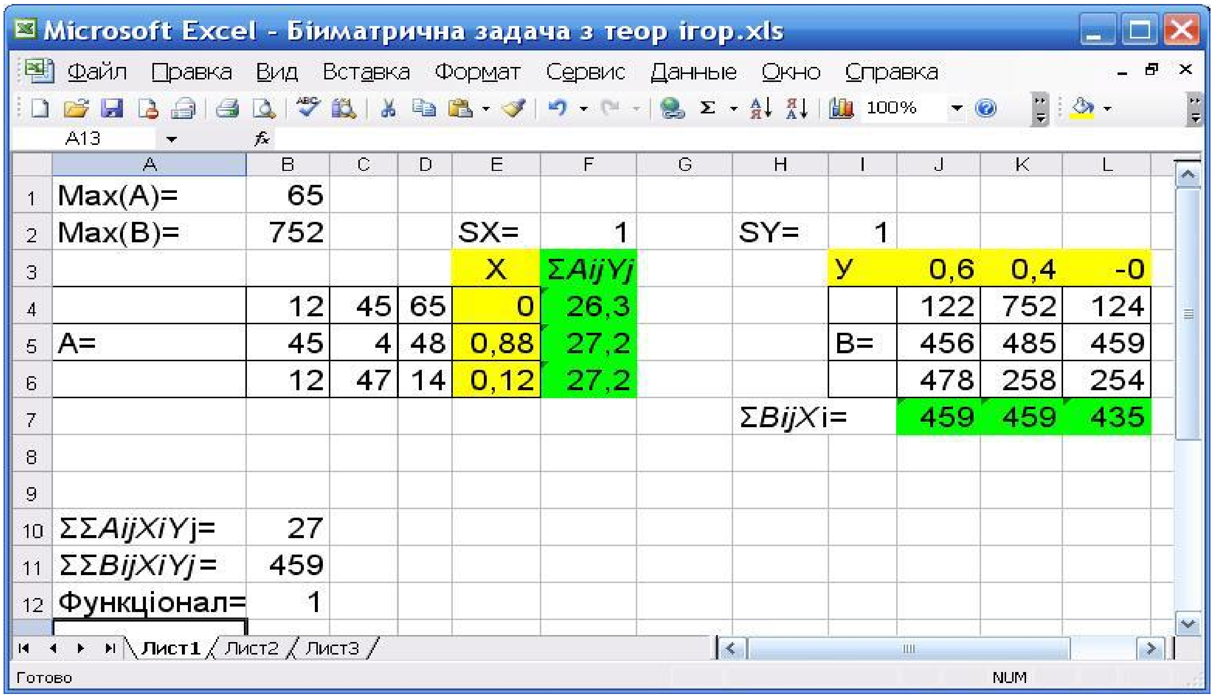


Рис. 1.1. Рішення біматричної задачі із застосуванням функції Solver

Помітна особливість гри з природою полягає в тому, що в ній свідомо діє тільки один з учасників, у більшості випадків званий гравцем 1. Гравець 2 (природа) свідомо проти гравця 1 не діє, а виступає як така, що не має конкретної мети і партнер по грі, що випадковим чином вибирає чергові «ходи». Тому термін «природа» характеризує деяку об'єктивну дійсність, яку не треба розуміти буквально, хоч цілком можуть зустрітися ситуації, в яких «гравцем» 2 дійсно може бути природа (наприклад, обставини, пов'язані з погодними умовами або з природними стихійними силами або купівельна спроможність населення).

На перший погляд відсутність обдуманої протидії спрощує гравцеві задачу вибору рішення. Однак, хоч особі, що ухвалює рішення ніхто не заважає, їй важче обґрунтувати свій вибір, оскільки в цьому випадку гарантований результат не відомий.

Нехай гравець 1 має m можливих стратегій: $A_1, A_2, ..., A_m$, а у природи є n можливих станів (стратегій): $П_1, П_2, ..., П_n$, Тоді умови гри з природою задаються матрицею A виграшів гравця 1.

$$A = \begin{pmatrix} & П_1 & П_2 & \dots & П_n \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Платить, звичайно, не природа, а деяка третя сторона (або сукупність сторін, що впливають на прийняття рішень гравцем 1 і об'єднаних у поняття «природа»).

Можливий ще й інший спосіб завдання матриці гри з природою: не у вигляді матриці виграшів, а у вигляді так званої матриці ризиків $R = ||r_{ij}||_{m,n}$ або матриці упущених можливостей. Величина ризику – це розмір плати за відсутність інформації про стан середовища. Матриця R може бути побудована безпосередньо з умов задачі або на основі матриці виграшів A. Ризиком r_{ij} гравця при використанні ним стратегії A_i і при стані середовища $П_j$ будемо називати різницю між виграшом, який гравець отримав би, якби він знав, що станом середовища буде $Пj$, і виграшам, який гравець отримає, не маючи цієї інформації. Тобто,

$$R_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} . \qquad (2.33)$$

Знаючи стан природи (стратегію) $П_j$, гравець вибирає ту стратегію, при якій його виграш максимальний, тобто $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, *де* $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij}$ при заданому j.

Прийняття рішень, якщо відомі ймовірності стану природи. p_j, вибір оптимальної стратегії активного гравця визначається як

$$\alpha = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j , \qquad (2.34)$$

Тобто, знаходиться середнє по рядку платіжної матриці гри і обирається та стратегія, яка дає найбільше середнє значення.

В деяких випадках імовірності настання певних станів природи подаються обумовлені, що точність визначення цих імовірностей менше 100%. Частіше, для кожного стану природи $П_j$ вказується своя точність розрахунку ймовірності його стану t_j, яка як і ймовірність змінюється в діапазоні від 0 до 1 (від о% до 100%).

У цьому випадку , вибір оптимальної стратегії активного гравця визначається із залученням матриці ризиків r_{ii}

$$\alpha = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j t_j - \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j (1 - t_j) \right), \qquad (2.35)$$

Тобто, при визначенні середнього, його складові коректуються на величину точності визначення його ймовірності. В той же час визначається середній ризик, скоректований на можливий рівень не точності визначення станів природи. Відповідні значення середнього виграшу і середнього ризику віднімаються по рядках, а потім обирається та стратегія, яка дає найбільший результат.

Прийняття рішень в умовах повної невизначеності, пов'язане з відсутністю інформації щодо ймовірності станів середовища (природи), називають «безнадійною» або «поганою». У таких випадках для визначення найкращих рішень використовуються наступні критерії.

Критерії максимакса. З його допомогою визначається стратегія, яка максимізує максимальні виграші для кожного стану природи. Це критерій крайнього оптимізму. Найкращим признається рішення, при якому досягається максимальний виграш, рівний $M = \max\limits_{1 \le i \le m} \max\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$. Потрібно зазначити, що ситуації, що вимагають застосування такого критерію, в економіці загалом нерідкі, і користуються ними не тільки оптимісти, але й гравці, поставлені в безвихідне становище, коли вони вимушені керуватися принципом «або пан, або пропав».

Максимінний критерій Вальда. З позицій даного критерію природа розглядається як агресивно настроєний і свідомо діючий противник типу тих, які протидіють у стратегічній грі. Вибирається рішення, для якого досягається значення $W = \max\limits_{1 \le i \le m} \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$. Це перестраховочна позиція крайнього песимізму, розрахована на гірший випадок. Така стратегія прийнятна, наприклад, коли гравець не так зацікавлений у великому успіху, але хоче себе застрахувати від несподіваних програшів. Вибір такої стратегії визначається відношенням гравця до ризику.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Вибір стратегії аналогічний вибору стратегії за принципом Вальда з тією відмінністю, що гравець керується не матрицею виграшів A, а матрицею ризиків R): $S = \min\limits_{1 \le i \le m} \max\limits_{1 \le j \le n} r_{ij}$.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца. Цей критерій при виборі рішення рекомендує керуватися деяким середнім результатом, що характеризує стан між крайнім песимізмом і нестримним оптимізмом. Згідно з цим критерієм стратегія в матриці A вибирається у відповідності зі значенням $H_A = \max\limits_{1 \le i \le m} \{p \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-p) \max\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}\}$, де p - коефіцієнт песимізму $(0 \le p \le 1)$. При $p=0$ критерій Гурвіца співпадає з максимаксним критерієм, а при $p = 1$ - з критерієм Вальда.

Коли за прийнятим критерієм рекомендується до використання декілька стратегій, вибір між ними робиться за додатковим критерієм, наприклад в розрахунок можуть прийматися середні квадратичні відхилення від середніх виграшів при кожній стратегії. Вибір може залежати від схильності до ризику ОУР.

Приклади.

Приклад 1. В умовах повної невизначеності знайти найкращу стратегію за наведеною нижче матрицею. Наступна матриця – ризиків, розрахована за (5.50)

$$\begin{pmatrix} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ A_1 & 20 & 30 & 15 & 15 \\ A_2 & 75 & 20 & 35 & 20 \\ A_3 & 25 & 80 & 25 & 25 \\ A_4 & 85 & 5 & 45 & 5 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 65 & 50 & 30 & 10 \\ 10 & 60 & 10 & 5 \\ 60 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Для гравця 1 кращими є стратегії:

- за критерієм Вальда A_3;
- за критерієм Севіджа A_2 і A_3;
- за критерієм Гурвіца (при $p = 0{,}6$) - A_3;
- за критерієм максимакса A_4

Оскільки стратегія A_3 фігурує як оптимальна за трьома критеріями вибору з чотирьох перевірених, міру її надійності можна визнати досить високою для того, щоб рекомендувати цю стратегію до практичного застосування.

Приклад 2. Директор фірми повинен вирішити, скільки ящиків товару потрібно виробляти протягом місяця. Імовірності того, що попит на товар протягом місяця буде 6, 7, 8 або 9 ящиків, становить відповідно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1.

Витрати на виробництво одного ящика є 45 грн. Фірма продає кожний ящик по ціні 95 грн. Якщо ящик з товаром не продається протягом місяця, то він псується й фірма не отримує прибутку. Скільки ящиків потрібно виробляти протягом місяця?

Користуючись початковими даними, будуємо матрицю гри. Стратегіями гравця 1 (тобто, фірми) є різні показники числа ящиків, які йому, можливо, потрібно виробляти. Станами природи виступають величини попиту на аналогічне число ящиків. Обчислимо, наприклад, показник прибутку, який отримає виробник, якщо він зробить 8 ящиків, а попит буде тільки на 7. У результаті отримаємо наступну платіжну матрицю в грі з природою (див. таблицю). Як бачимо, найбільший середній очікуваний прибуток є 352,5 грн. Він відповідає виробництву 8 ящиків.

На практиці частіше за все в подібних випадках рішення приймаються виходячи з критерію максимізації середнього очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат. Обираючи такий підхід, можна зупинитися на рекомендації проводити 8 ящиків, і для більшості ОУР рекомендація була б обґрунтованою. Саме так поступаємо ми, коли розглядаємо різні прикладні задачі прийняття рішень у грі з природою.

Попит на ящики / Виробництво ящиків	6 (0,1)*	7 (0,3)	8 (0,5)	9 (0,1)	Середній очікуваний прибуток
6	300	300	300	300	300
7	255	350	350	350	340,5
8	210	305	400	400	352,5
9	165	260	355	450	317

* У дужках приведена ймовірність попиту на ящики.

2.4. Індивідуальне завдання №11. Розрахунок стратегій антагоністичної та кооперативної гри, а також гри в умовах повної невизначеності

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета завдання. Навчитися приймати оптимальні рішення в умовах, коли існують декілька альтернативних стратегій дій економіста.

Вказівки до виконання: Студенти обирають варіант згідно номера за списком групи і вирішують задачу на листі Excel. Там же подаються і висновки.

Завдання 1

Підприємство випускає продукцію (продукція може бути швидко псуватися), яку можна: зразу відправити споживачу (стратегія A_1); відправити на склад для зберігання (стратегія A_2); підвергнути додатковій обробці для тривалого зберігання (стратегія A_3). Варіанти завдань обирати за табл.. 1.2

Споживач може купувати продукцію: негайно (стратегія B_1); у термін невеликого часу (стратегія B_2); після тривалого періоду часу (стратегія B_3).

У випадку стратегій A_2 та A_3, підприємство несе додаткові витрати на зберігання та обробку продукції, які не потрібні для A_1. Але, при вибору стратегії A_2, слід взяти до уваги можливі збитки із-за псування продукції.

Визначити оптимальні пропорції продукції для застосовування стратегій A_1, A_2 та A_3. Рекомендовано використовувати мінімаксний критерій (гарантований середній рівень збитку) при матриці витрат.

Таблиця 1.2

Вхідні данні

Варіант № 1				Варіант № 2				Варіант № 3			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	8	7	11	A_1	6	8	9	A_1	8	10	11

A_2	11	10	8	A_2	7	11	12	A_2	12	9	14
A_3	5	4	3	A_3	12	9	10	A_3	7	8	9
Варіант № 4				Варіант № 5				Варіант № 6			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	9	11	A_1	11	9	10	A_1	10	9	11
A_2	13	12	8	A_2	14	13	8	A_2	13	14	15
A_3	9	7	6	A_3	10	8	7	A_3	9	8	10
Варіант № 7				Варіант № 8				Варіант № 9			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	8	11	A_1	11	10	7	A_1	11	7	12
A_2	12	14	15	A_2	14	12	13	A_2	13	14	15
A_3	8	7	9	A_3	10	9	6	A_3	10	6	11
Варіант № 10				Варіант № 11				Варіант № 12			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	11	8	A_1	11	9	12	A_1	10	9	11
A_2	13	12	14	A_2	12	13	14	A_2	11	13	15
A_3	11	9	7	A_3	9	8	10	A_3	9	7	10
Варіант № 13				Варіант № 14				Варіант № 15			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	9	12	A_1	10	9	8	A_1	11	9	8
A_2	12	13	15	A_2	14	12	13	A_2	16	13	15
A_3	9	8	10	A_3	9	8	7	A_3	10	8	7
Варіант № 16				Варіант № 17				Варіант № 18			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	7	12	A_1	12	8	14	A_1	12	11	10
A_2	14	15	16	A_2	15	16	17	A_2	16	14	15
A_3	9	6	11	A_3	10	7	12	A_3	11	10	9
Варіант № 19				Варіант № 20				Варіант № 21			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3

A_1	12	11	13	A_1	13	12	14	A_1	12	10	14
A_2	14	15	16	A_2	14	15	16	A_2	13	14	15
A_3	11	10	11	A_3	11	10	13	A_3	10	9	12
Варіант № 22				Варіант № 23				Варіант № 24			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	13	11	14	A_1	14	13	12	A_1	13	11	14
A_2	14	16	17	A_2	18	14	17	A_2	15	17	18
A_3	11	10	12	A_3	12	11	10	A_3	12	10	13
Варіант № 25				Варіант № 26				Варіант № 27			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	14	12	15	A_1	14	13	15	A_1	16	15	14
A_2	15	17	18	A_2	15	18	19	A_2	18	16	19
A_3	11	10	13	A_3	11	10	12	A_3	15	13	12
Варіант № 28				Варіант № 29				Варіант № 30			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	15	13	16	A_1	15	14	16	A_1	17	16	14
A_2	17	19	20	A_2	16	19	20	A_2	20	17	19
A_3	14	12	15	A_3	13	12	14	A_3	15	14	12

Завдання 2

Підприємство може випускати три виду продукції (A_1, A_2 та A_3), при цьому отримує прибуток, який залежить від попиту. Попит може бути в одному з чотирьох станів (B_1, B_2, B_3 або B_4). Дана матриця (табл.. 5.4), її елементи a_{ij} характеризують прибуток, який отримає підприємство при випуску ***i***-ої продукції з ***j***-м змістом попиту.

Розробити математичну модель для визначення оптимальних пропорцій випуску продукції, які гарантують середню величину прибутку при різноманітному стані попиту. Зробіть висновки щодо прийняття оптимального рішення.

Таблиця 1.3

Вхідні данні

Варіант № 1					Варіант № 2				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	7	9	A_1	4	6	7	10
A_2	10	11	5	3	A_2	11	13	6	4
A_3	8	9	5	4	A_3	10	11	7	6
Варіант № 3					Варіант № 4				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	8	7	9	A_1	4	6	7	8
A_2	9	12	6	2	A_2	9	10	6	3
A_3	8	9	5	4	A_3	7	9	5	4
Варіант № 5					Варіант № 6				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	5	7	9	A_1	7	8	7	10
A_2	11	10	8	3	A_2	11	10	9	3
A_3	10	9	6	5	A_3	10	9	5	5
Варіант № 7					Варіант № 8				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	7	9	8	A_1	8	7	10	9
A_2	11	10	6	4	A_2	11	10	4	5
A_3	10	9	5	6	A_3	12	11	5	6
Варіант № 9					Варіант № 10				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	8	9	10	A_1	7	8	9	10
A_2	8	4	5	8	A_2	6	5	7	8

A_3	9	5	6	9	A_3	9	6	6	9
Варіант № 11					Варіант № 12				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	7	8	10	A_1	9	7	10	11
A_2	7	5	7	8	A_2	5	6	8	9
A_3	8	4	6	9	A_3	8	10	9	10
Варіант № 13					Варіант № 14				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	5	8	11	A_1	7	6	9	11
A_2	6	8	7	9	A_2	6	9	7	9
A_3	8	10	9	10	A_3	9	8	8	10
Варіант № 15					Варіант № 16				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	6	11	12	A_1	10	6	11	12
A_2	8	10	9	11	A_2	8	9	10	13
A_3	7	9	8	10	A_3	11	11	9	11
Варіант № 17					Варіант № 18				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	10	11	12	A_1	11	7	10	11
A_2	10	9	12	13	A_2	10	8	12	13
A_3	11	8	9	11	A_3	7	10	9	10
Варіант № 19					Варіант № 20				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	11	9	11	12	A_1	11	9	12	14
A_2	10	8	9	13	A_2	10	12	9	13
A_3	7	11	10	11	A_3	8	11	13	15
Варіант № 21					Варіант № 22				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	14	13	12	14	A_1	14	11	13	14

A_2	9	12	14	17	A_2	11	12	15	17
A_3	8	14	11	15	A_3	15	14	11	15
Варіант № 23					Варіант № 24				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	11	13	14	A_1	10	11	12	14
A_2	11	9	7	10	A_2	11	9	8	10
A_3	15	14	12	15	A_3	12	7	12	15
Варіант № 25					Варіант № 26				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	11	12	10	A_1	12	11	12	10
A_2	11	9	8	7	A_2	11	10	8	9
A_3	9	7	12	11	A_3	10	8	13	11
Варіант № 27					Варіант № 28				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	11	10	8	A_1	12	11	10	9
A_2	11	7	8	9	A_2	11	8	7	6
A_3	10	8	11	11	A_3	10	9	11	10
Варіант № 29					Варіант № 30				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	10	11	8	A_1	12	10	11	9
A_2	11	9	7	6	A_2	13	11	8	6
A_3	10	7	8	11	A_3	11	9	10	11

Завдання 3

3.1. Узявши дані сусіднього завдання вирішити його як гру з природою в умовах повної невизначеності та у випадку, коли відомі імовірності настання стану природи – 0,1; 0,25; 0,35; 0,2. Також знайти оптимальну стратегію, коли відомі точності визначення ймовірностей – 0,82; 0,77; 0,94; 0,65.

3.2. Узявши дані сусіднього завдання, вирішити обидві платіжні матриці як кооперативну гру.

2.5. Транспортна задача

В економіці значну частину накладних витрат складають транспортні витрати, отже зекономити на них, є однією із важливих задач по збільшенню прибутку. Зекономити на транспортних витратах можна зменшивши пробіг транспорту, що доставляє товари. Таке зменшення досягається або перерозподілом напрямків постачання зі складів споживачам, або знайденням найкращого маршруту, якщо транспортний засіб розвозить один усім споживачам.

У першому випадку це рішення класичної транспортної задачі, а у другому – це називається задачею комівояжера.

Транспортні задачі відомі у двох постановках: матричній і мережній.

Матрична постановка транспортної задачі:

Хай є ряд пунктів споживання і підприємств-постачальників деякої продукції, де:

A_i – ресурс $\boldsymbol{i}$-го постачальника (запас продукції або план відвантаження з поточного виробництва).

B_j – потреби в тій же продукції в пунктах $\boldsymbol{j}$.

C_{ij} – відстань або вартість перевезення з $\boldsymbol{i}$ в $\boldsymbol{j}$.

Вимагається знайти такі розміри поставок від кожного постачальника кожному споживачу X_{ij} (змінні задачі), при яких загальна сума витрат або загальний пробіг (який пропорційний витратам) будуть мінімальними.

Розрізняють наступні різновиди транспортних задач (рис. 1.2)

Система обмежень закритої задачі: передбачає поставку кожному споживачу кількість продукції, рівного потребі в ній (2.35) і вивіз продукції від кожного постачальника в кількості, рівній її ресурсу (2.36)

$\Sigma X_{ij} = B_i$, (j=1,2, … n – кількість постачальників), (2.35)

$\Sigma X_{ij} = A_i$, (i= 1,2, … m – кількість споживачів); (2.36)

У відкритій задачі з перевищенням ресурсів можливий вивіз менше наявності $\Sigma X_{ij} < A_i$, (2.37)

У відкритій задачі з перевищенням потреб можливе постачання менше наявності $\Sigma X_{ij} < \Sigma B_j$, (2.38)

Критерієм оптимальності рішення є мінімум загальних витрат по перевезенню або з пробігу в тонно-кілометрах (вагоно-кілометрах) по всіх планованих відправленнях. Якщо вартість перевезення (відстань) від i до j - позначити як C_{ij} те цільова функція визначиться таким чином

$$\Sigma \Sigma C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min, \quad (2.39)$$

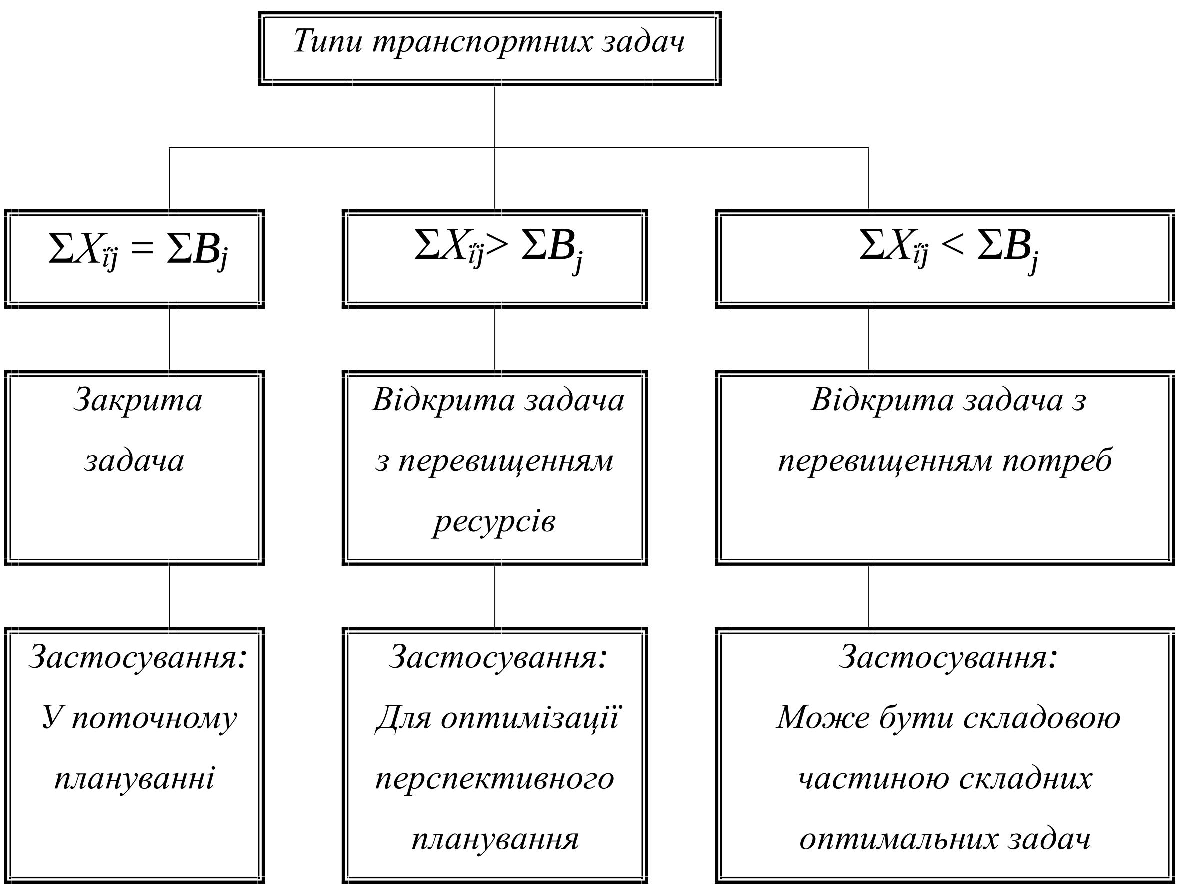


Рис. 2.2. Різновиди транспортних задач

Мережна транспортна задача:

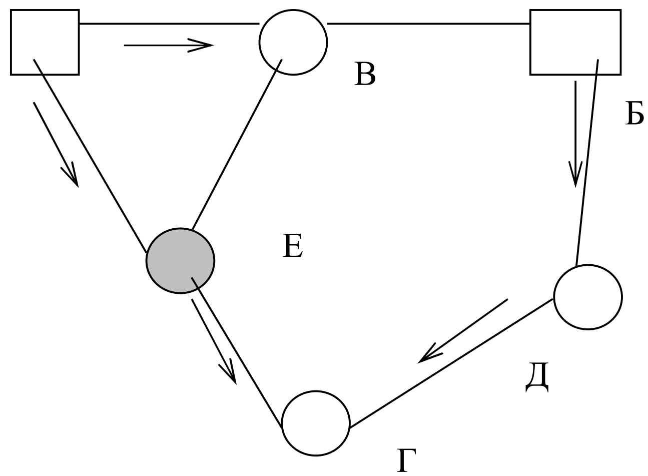


Рис. 2.3 Схема транспортної мережі:

+10 □ Б - Пункти і розміри відправлення

-8 ○ Д - Пункти і розміри прибуття

— - лінії з'єднання – «дуги» або «ланки»

← - стрілка – потік вантажу

$X_{AB} = 8$ - розмір вантажу

Оптимальне планування перевезень може бути проведене безпосередньо на схемі мережі шляхів сполучення (рис. 2.3). Схема складається з дуг і вузлів (або вершин). Вершинами є пункти або (центри агрегації) вантаження і вивантаження, а також всі реальні вузлові пункти мережі. Вершини без вантаження і вивантаження даного вантажу є транзитними. Кожну ділянку мережі між двома сусідніми вершинами звичайно розглядають як дві дуги протилежного напряму з рухом в одну сторону по кожній дузі.

Кожна дуга характеризується показником відстані (або вартості) перевезення одиниці вантажу або довжині дуги. При рішенні задач за критерієм вартості довжина прямої і зворотної дуг звичайно різна (оскільки витрати перевезення по ділянці “туди і назад” не співпадають).

Змінними мережної транспортної задачі є потоки вантажу по кожній дузі. Потік може включати багато відправок, наприклад, потік по дузі Б-Д включає поставки з Б в Д – 8 одиниць вантажу, а з Б в Г – 7 одиниць вантажу.

До вирішення задачі, як правило, невідомо, в яку сторону перевозитиметься вантаж по ділянці в оптимальному варіанті. Тому в число змінних включаються потоки в обох напрямах, а загальне число змінних приймається рівним подвоєному числу ділянок мережі. (При значному числі постачальників і одержувачів число змінних при мережній постановці значне менше ніж при матричній, що полегшує рішення задачі, Наприклад, за наявності на мережі 600 ділянок, 50 пунктів відправлення і 200 пунктів призначення, число змінних при мережній постановці складе 1200 (600*2), а при матричній постановці воно буде набагато більше (200*50=10000 змінних).

Зведемо всі задачі в систему обмежень і нерівностей:

– *Закрита задача*

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,\Sigma\, C_{ij}\, X_{ij} \rightarrow \min, \\ \Sigma\, X_{ij} = B_i\ ,\ (j\text{=1,2, … } n \text{ – кількість постачальників}), \\ \Sigma\, X_{ij} = A_i\ ,\ (i\text{= 1,2, … } m \text{ – кількість споживачів}); \\ X_{ij} \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (2.40)$$

– *Відкрита задача з перевищенням ресурсів*

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,\Sigma\, C_{ij}\, X_{ij} \rightarrow \min, \\ \Sigma\, X_{ij} = B_i\ ,\ (j\text{=1,2, … } n \text{ – кількість постачальників}), \\ \Sigma\, X_{ij} \leq A_i\ ,\ (i\text{= 1,2, … } m \text{ – кількість споживачів}); \\ X_{ij} \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (2.41)$$

– *Відкрита задача з перевищенням потреб*

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,\Sigma\, C_{ij}\, X_{ij} \rightarrow \min, \\ \Sigma\, X_{ij} \leq B_i\ ,\ (j\text{=1,2, … } n \text{ – кількість постачальників}), \\ \Sigma\, X_{ij} = A_i\ ,\ (i\text{= 1,2, … } m \text{ – кількість споживачів}); \\ X_{ij} \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (2.42)$$

Обов'язковою умовою мережної задачі є вимога балансування прибуття і відправлення вантажу в кожній вершині мережі: прийом вантажу зі всіх напрямів плюс власне вантаження рівні здачі на всі напрями власне вивантаження

Мережна і матрична моделі в більшості випадків взаємозамінні.

В деяких випадках обирається інший, ніж мінімум витрат на перевезення, критерій оптимальності Вибір критерію залежить від: характеру проблеми, наявної інформації і необхідної точності знаходження оптимуму.

Прикладами локального критерію оптимальності транспортної задачі можуть служити:

а) критерій мінімуму сумарного пробігу (придатний тільки для вирішення закритих транспортних задач в межах одного виду транспорту).

б) при оптимізації перевезень в межах року звичним вартісним критерієм є сума залежних приведених витрат $E_{зав} + E_{пер} + E_{п} + (K_{пс} + C_{гр})$,

де $E_{зав}$ – залежні від руху експлуатаційні витрати; $K_{пс}$ – капітальні вкладення на пересувний склад; $C_{гр}$ – вартість вантажів, що знаходяться в процесі перевезення; $E_{пер}$ – витрати по перевалюваннях; $E_{п}$ – вартість поставки вантажів.

в) При складанні оптимальних схем перевезень на перспективу можливе посилення пропускної спроможності ліній залежно від розміщення на них оптимальних вантажопотоків. Тому в критерії оптимальності враховується $K_{пост}$ – витрати на необхідний розвиток пропускної спроможності по постійних пристроях; $E_{нез}$ – незалежні експлуатаційні витрати.

$$E_{зав} + E_{пер} + E_{нез} + E_{п} + (K_{пс} + K_{пост} + C_{гр}),$$

г) в деяких випадках при рішення відкритих транспортних задач допускається використовування як критерій – сума витрат виробництва і тарифної платні за перевезення.

д) у окремих задачах по оптимізації термінових перевезень як критерій виступає час: тонно-часи (вагони-годинник) перебування вантажу в процесі перевезення або загальний час завершення певної перевізної операції.

Приклад. У трьох постачальників, кожен з яких має наступні ресурси – 25, 75, 13, є п’ять споживачів, які потребують таку кількість ресурсів – 15, 35, 22, 18, 23. розробити схему оптимальних перевезень, якщо вартості перевезень C_{ij}, разом з обсягами запасів та споживання подані в наступній таблиці. Оскільки сума поставок та споживання однакова і дорівнює 113, ми маємо закриту транспортну задачу.

Сформуємо ці дані в таблиці Excel. Відведемо окрему матрицю під значення обсягів перевезень X_{ij} з *i*-го постачальника до *j*-го споживача. Знайдемо суму всіх X_{ij}, оскільки це потрібно для формування обмежень виду (2.40). Знайдемо добуток всіх X_{ij} на C_{ij} та їх суму, щоб сформувати цільову функцію виду (2.39). Така операція робиться із застосуванням функції SUMPRODUCT.

			Споживачі, номер та обсяг споживання				
			1	2	3	4	5
			15	35	22	18	23
Постачальники, номер та обсяг поставок	1	25	2	6	3	4	6
	2	75	4	3	2	5	4
	3	13	6	4	3	4	3

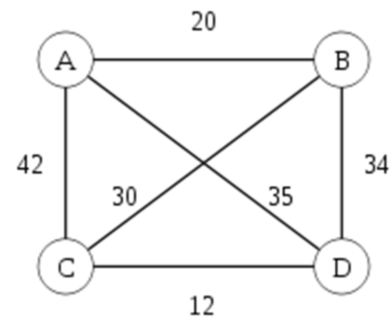
Застосовуємо функцію Solwer і отримуємо рішення, яке показано в таблиці, що розташована нижче

		Споживачі					
		1	2	3	4	5	$\Sigma\ X_{ij}$
Постачальники	1	15	0	0	10	0	25
	2	0	35	22	5,1991	12,8009	75
	3	0	0	0	2,8009	10,1991	13
$\Sigma\ X_{ij}$		15	35	22	18	23	

Тут ми бачимо обсяги оптимальних перевезень з кожного постачальника на кожного споживача. Наприклад, з першого постачальника треба відправити на першого споживача 15 одиниць продукції, а на четвертого – 10. Мінімальна вартість усіх перевезень – 338 умовних одиниць.

Задача комівояжера (комівояжер – бродячий торговець; англ. *Travelling Salesman Problem*, TSP; нім. *Problem des Handlungsreisenden*) полягає у знаходженні найвигіднішого маршруту, що проходить через вказані міста хоча б по одному разу. В умовах завдання вказуються критерій вигідності маршруту (найкоротший, найдешевший, сукупний критерій тощо) і відповідні матриці відстаней, вартості тощо. Ця задача є найскладнішим варіантом транспортної задачі і має нескінченну кількість рішень.

Оскільки комівояжер в кожному з міст постає перед вибором наступного міста з тих, що він ще не відвідав, існує $(n-1)!$ маршрутів для асиметричної та $(n-1)!/2$ маршрутів для симетричної задачі комівояжера. Таким чином, розмір простору пошуку зростає над-експоненційно від кількості міст.



Симетрична TSP для чотирьох міст.

Для можливості застосування математичного апарату для розв'язання проблеми, її слід представити у вигляді математичної моделі. Проблему комівояжера можна представити у вигляді моделі на графі, тобто, використовуючи вершини та ребра між ними. Таким чином, вершини графу (на мал.: від A до D) відповідають містам, а ребра (i,j) між вершинами i та j сполучення між цими містами. У відповідність кожному ребру (i,j) можна зіставити вагу $c_{ij} \geq 0$, яку можна розуміти як, наприклад, відстань між містами, час або вартість подорожі. *Маршрутом* називається маршрут на цьому графі до якого входить по одному разу кожна вершина графа. Задача полягає у відшуканні найкоротшого маршруту.

Матрична постановка транспортної задачі виду (2.40) може бути сформульована У спрощеному вигляді як задача складення оптимального розкладу або задачу комівояжера. Проблема полягає у тому, щоб рух поміж точками маршруту було здійснено за мінімальний час або з мінімальними витратами, відвідуючи їх тільки один раз.

Введемо наступні умовні позначення: N - число секторів, з яких починається рух об'єкта; M – число секторів в яких закінчується рух об'єкта; C_{ij} – матриця витрат на перехід з i-го сектора в j-й- , $j - 1..M$., $i = 1..N$; D_i – матриця кількості об'єктів, які мають вийти з i-го сектора; P_j – матриця кількості об'єктів, які мають прийти в ***j***-й сектор; X_{ij} - матриця розкладу X_{ij} = 1, якщо здійснюється перехід з ***i***-го сектора в ***j***-й, Інакше X_{ij} = 0.

Критерій оптимальності – мінімум втрат на перехід з об’єкту на об’єкт

$$F(X) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{ij} \cdot X_{ij} \cdot D_i \cdot P_j \rightarrow \min \qquad (2.43)$$

Обмеження
$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij} = P_j,\ i = 1..N \qquad (2.44)$$

$$\sum_{j=1}^{M} X_{ij} = D_i,\ j = 1..M \qquad (2.45)$$

$$X_{ij} = 0 \text{ або } 1 \qquad (2.46)$$

Умова (2.44) означає, що установники з кожного сектора об’єкти виходять тільки один раз, умова (2.45) – в кожен сектор об’єкти заходять тільки один раз, умова (2.46) – матриця переходів має значення 0 або 1.

2.6. Індивідуальне завдання №12. Розрахунок маршрутів перевезення в умовах дефіциту та надлишків продукції, рішення задачі комівояжера

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета завдання. Навчитися використовувати транспортну задачу для визначення економічн6их маршрутів та найкращого розподілу працівників.

Порядок виконання:

1. Побудувати математичну модель представленого у варіанті завдання.
2. Ввести дані і формули на аркуш Microsoft Excel.
3. За допомогою інструменту «Пошук рішення» знайти рішення задачі – оптимальний план перевезень. Провести аналіз отриманих результатів.

Практична робота складається з трьох завдань. Першу задачу студент обирає за номером з списку академічної групи.

Завдання I

Для матриці вартостей знайти рішення транспортної задачі змінюючи наявність на складах та потреби споживачів відповідно з варіантами.

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 9 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Таблиця 2.4.

Варіанти для I завдання

Варіанти	A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4	B5
1	3	2	5	3	1	4	2	4	2
2	6	10	12	8	7	9	1	4	5
3	20	35	20	20	10	10	20	35	20
4	48	30	27	20	18	27	42	12	26
5	12	30	25	8	10	10	28	15	12
6	6	10	20	4	7	5	8	11	9
7	9	5	11	15	7	5	8	11	9
8	7	9	12	8	6	10	11	4	5
9	10	20	30	10	8	9	23	25	5
10	5	25	25	15	7	10	23	24	6
11	3	27	25	15	6	11	20	27	6
12	4	26	24	16	7	10	21	26	6
13	5	21	29	15	6	11	20	27	6
14	10	20	30	10	7	10	23	24	6
15	5	21	29	15	6	11	20	27	6
16	10	20	30	10	7	10	21	26	6
17	5	25	25	15	8	9	23	25	5
18	5	21	29	15	8	9	23	25	5
19	3	27	25	15	6	11	20	27	6
20	20	30	15	30	10	10	20	35	20
21	20	30	12	33	10	12	18	30	25
22	15	35	17	30	11	13	19	29	25
23	22	28	12	33	10	12	18	30	25
24	3	2	5	3	2	3	3	4	1
25	3	5	5	3	2	6	3	4	1

II завдання

Зі складів, що позначені на рис. 3 як A_i , потрібно перевезти продукцію до постачальників, які позначені як B_j.

У табл.3 подані відстані поміж окремими об’єктами в кілометрах, запаси товарів у тонах та потреби споживачів наведено у табл.3, а вартість одного тонно-кілометра становить 0,2N. Де N – номер за списком навчальної групи. Студенти, що навчаються за скороченою програмою, до свого номеру додають число 15.

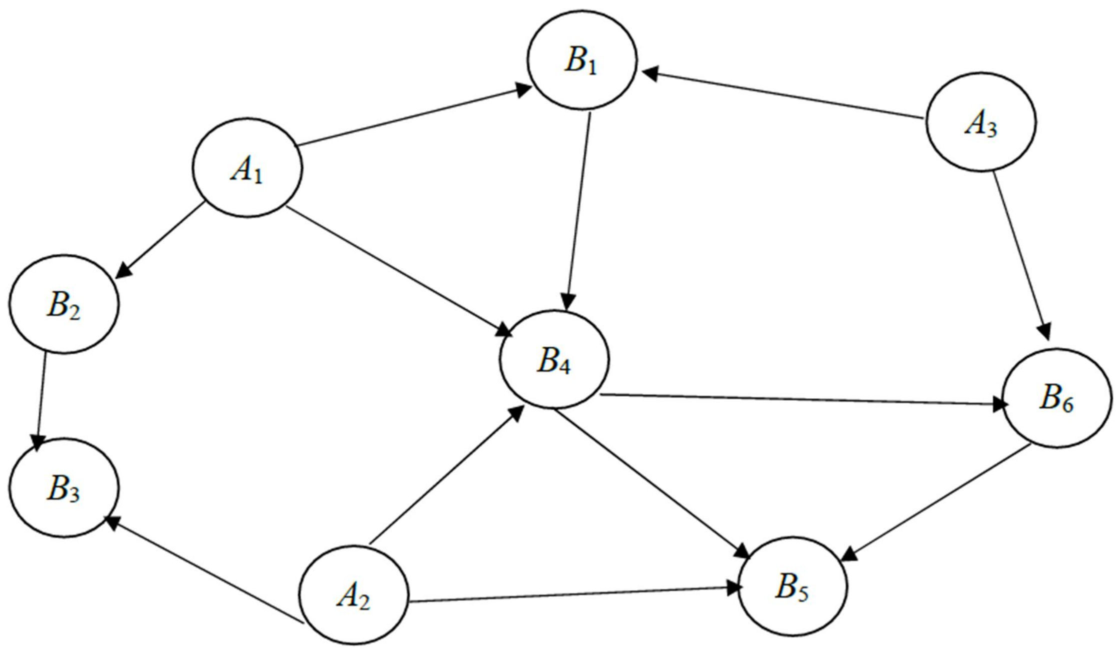


Рис. 2.4. Векторна схема транспортної задачі

Таблиця 2.5

Відстані поміж об’єктами перевезень

Пара об’єктів	Відстань	Пара об’єктів	Відстань	Пара об’єктів	Відстань
A1 – B1	50N	A1 – B2	46	A1 – B4	22N
B2 – B3	96N	A2 – B3	754/N	A2 – B4	33
A2 – B5	1024/N	A3 – B1	15	A3 – B6	4N
B4 – B6	32	B4 – B5	13N	B5 – B6	88

Таблиця 2.6

Запаси товарів та потреби споживачів

Постачальники	Запаси товарів	Споживачі	Потреби споживачів
A1	1000	B1	300
A2	8500/N	B2	750/N
A3	220	B3	500
		B4	3N
		B5	22N
		B6	50N

Визначити тип задачі: відкрита чи закрита. Знайти оптимальний план перевезень, який би забезпечив мінімальну вартість загальних перевезень.

III завдання

Для прийняття оптимального рішення по розподілу робітників комерційної галузі за операціями треба надати постановку задачі, визначити цільову функцію та розробити математичну модель згідно табл. 2.7. Вирішення провести із застосуванням можливостей .

Таблиця 2.7

Хронометраж по витратам часу

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 6$	$t_{13} = 5$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 3$	$t_{23} = 2$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 2$	$t_{33} = 5$
2	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 3$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
3	Іванов	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 2$	$t_{13} = 3$
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 4$

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
	Петров	$t_{31} = 4$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
4	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 7$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 3$	$t_{33} = 5$
5	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 4$	$t_{33} = 5$
6	Іванов	$t_{11} = 9$	$t_{12} = 10$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 8$	$t_{32} = 9$	$t_{33} = 7$
7	Іванов	$t_{11} = 15$	$t_{12} = 14$	$t_{13} = 9$
	Сидоров	$t_{21} = 17$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 10$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 8$
8	Іванов	$t_{11} = 13$	$t_{12} = 15$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 20$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 18$
9	Іванов	$t_{11} = 23$	$t_{12} = 16$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 25$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 25$
	Петров	$t_{31} = 26$	$t_{32} = 15$	$t_{33} = 28$
10	Іванов	$t_{11} = 18$	$t_{12} = 12$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 21$
	Петров	$t_{31} = 19$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 17$
11	Іванов	$t_{11} = 17$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 14$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 27$
	Петров	$t_{31} = 18$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 28$
12	Іванов	$t_{11} = 33$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 22$

Варіант	Комерсанти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 20$
13	Іванов	$t_{11} = 32$	$t_{12} = 27$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 33$	$t_{22} = 28$	$t_{23} = 26$
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 25$	$t_{33} = 28$
14	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 39$	$t_{22} = 24$	$t_{23} = 16$
	Петров	$t_{31} = 38$	$t_{32} = 22$	$t_{33} = 18$
15	Іванов	$t_{11} = 53$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 27$
	Петров	$t_{31} = 50$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
16	Іванов	$t_{11} = 55$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 57$	$t_{22} = 47$	$t_{23} = 36$
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 44$	$t_{33} = 38$
17	Іванов	$t_{11} = 51$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 27$
	Сидоров	$t_{21} = 53$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
18	Іванов	$t_{11} = 57$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 54$	$t_{22} = 46$	$t_{23} = 39$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 48$	$t_{33} = 38$
19	Іванов	$t_{11} = 54$	$t_{12} = 31$	$t_{13} = 26$
	Сидоров	$t_{21} = 55$	$t_{22} = 36$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 56$	$t_{32} = 35$	$t_{33} = 28$
20	Іванов	$t_{11} = 64$	$t_{12} = 51$	$t_{13} = 46$
	Сидоров	$t_{21} = 65$	$t_{22} = 56$	$t_{23} = 49$
	Петров	$t_{31} = 66$	$t_{32} = 55$	$t_{33} = 48$
21	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 39$
	Сидоров	$t_{21} = 75$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 32$

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
	Петров	$t_{31} = 74$	$t_{32} = 54$	$t_{33} = 30$
22	Іванов	$t_{11} = 72$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 59$
	Сидоров	$t_{21} = 83$	$t_{22} = 48$	$t_{23} = 56$
	Петров	$t_{31} = 84$	$t_{32} = 45$	$t_{33} = 58$
23	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 69$
	Сидоров	$t_{21} = 99$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 67$
	Петров	$t_{31} = 90$	$t_{32} = 58$	$t_{33} = 68$
24	Іванов	$t_{11} = 34$	$t_{12} = 71$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 76$	$t_{23} = 89$
	Петров	$t_{31} = 36$	$t_{32} = 75$	$t_{33} = 88$
25	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 85$	$t_{13} = 96$
	Сидоров	$t_{21} = 72$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 93$
	Петров	$t_{31} = 76$	$t_{32} = 81$	$t_{33} = 95$
26	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 75$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 90$	$t_{22} = 74$	$t_{23} = 84$
	Петров	$t_{31} = 92$	$t_{32} = 77$	$t_{33} = 85$
27	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 67$	$t_{13} = 77$
	Сидоров	$t_{21} = 40$	$t_{22} = 68$	$t_{23} = 79$
	Петров	$t_{31} = 42$	$t_{32} = 65$	$t_{33} = 75$
28	Іванов	$t_{11} = 95$	$t_{12} = 83$	$t_{13} = 76$
	Сидоров	$t_{21} = 92$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 71$
	Петров	$t_{31} = 94$	$t_{32} = 85$	$t_{33} = 75$
29	Іванов	$t_{11} = 63$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 55$
	Сидоров	$t_{21} = 67$	$t_{22} = 44$	$t_{23} = 57$
	Петров	$t_{31} = 60$	$t_{32} = 46$	$t_{33} = 51$
30	Іванов	$t_{11} = 52$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 78$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 45$	$t_{23} = 80$

Варіант	Комерсанти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 42$	$t_{33} = 79$

2.7. Оптимізація портфеля цінних паперів

Світові фондові ринки мають істотний рівень невизначеності, що спричиняє непереборний ризик, який супроводжує прийняття інвестиційних рішень.

На фінансовому ринку обертається, як правило, кілька типів цінних паперів: державні цінні папери, муніципальні облігації, корпоративні акції, тощо. Цінні папери з низькими ризиками є малоефективними, а високоефективні, як правило, більш ризиковані.

Набір цінних паперів, що перебуває в учасника ринку, називається його портфелем. Вартість портфеля – це сумарна вартість усіх складових його паперів. Прибутковість портфелю – це прибутковість на одиницю його вартості.

Кожен власних портфеля цінних паперів хоче отримати найбільшу ефективність і найменший ризик, але це неможливо. Тому потрібно зробити певний вибір між ефективністю й ризиком. Цей вибір визначається відношенням особи, яка приймає рішення, до ефективності і ризику.

Модель оптимального портфеля Марковіца, яка забезпечує мінімальний ризик і задану прибутковість, має вигляд:

$$\begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j X_i X_j \operatorname{cov}_{ij} \to \min, \\ \sum\limits_i X_i M_i = m_p, \\ \sum\limits_i X_i = 1, \\ X_i \ge 0. \end{cases} \qquad (2.47)$$

Перше рівняння визначає міру ризику портфеля так, як її визначив Марковіц. Тут міра ризику є критерієм оптимізації, який має прагнути до мінімуму. X_i - частка капіталу, витрачена на закупівлю цінних паперів i-го виду, розраховуючи на одну грошову одиницю. Друге рівняння - середню прибутковість портфеля (m_p – наперед заданий рівень прибутковості портфеля). Третє і четверте рівняння випливають із самого змісту параметрів X_i.

Оптимальний портфель Марковіца максимальної прибутковості і заданого, (прийнятного) ризику r_p можна представити як:

$$\begin{cases} \sum\limits_i X_i M_i \to \max, \\ \sum\limits_i \sum\limits_j X_i X_j \operatorname{cov}_{ij} = \mathrm{r_p}\ , \\ \sum\limits_i X_i = 1, \\ X_i \geq 0. \end{cases} \tag{2.48}$$

Тобін представив оптимальну задачу формування портфеля цінних паперів з урахуванням моделі Марковіца. Але до неї було додано поняття без ризикових цінних паперів, тобто таких, прибутковість який з часом не змінюється. Для них було введено такі позначення: d_0 – прибутковість без ризикового цінного паперу, X_0– частка у портфелі без ризикового цінного паперу. Портфель Тобіна мінімального ризику має вигляд:

$$\begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j X_i X_j \operatorname{cov}_{ij} \to \min, \\ X_0 d_0 + \sum\limits_i X_i M_i = m_p, \\ \sum\limits_i X_i = 1, \\ X_i \geq 0. \end{cases} \tag{2.49}$$

Як бачимо з формули (2.49), ризикованість портфеля від додавання без ризикових паперів не змінилася. Змінилась тільки доходність.

Портфель Тобіна максимальної ефективності має вигляд:

$$\begin{cases} X_0 d_0 + \sum_i X_i M_i \to \max, \\ \sum_i \sum_j X_i X_j \operatorname{cov}_{ij} = \mathrm{r_p}\ , \\ \sum_i X_i = 1, \\ X_i \ge 0. \end{cases} \tag{2.50}$$

Як показали подальші дослідження цих моделей, замість коваріації у цих моделях можна застосовувати кореляцію. Результати від цього не зміняться.

Приклад. Знайти оптимальний портфель цінних паперів, якщо відомі дослідження зміни їх прибутковості протягом 6 днів. Кількість типів акцій – 6. Зміна прибутковості наведена в табл. 2.8.

Задані значення d_0 = 9, r_p =0,05, m_p = 12,2. Розрахувати для цих даних оптимальні портфелі за моделями Марковіца і Тобіна.

Таблиця 2.8

Кількість спостережень прибутковості	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
1	10,161	10,431	10,695	13,393	11,153	11,751
2	11,492	13,087	11,889	12,564	13,613	11,699
3	12,428	14,259	12,561	13,101	13,888	14,348
4	12,416	14,059	12,522	13,706	14,389	13,536
5	10,813	10,818	12,951	12,192	11,765	14,452
6	13,388	14,591	14,628	14,764	14,307	16,962
Середня прибутковість	11,783	12,874	12,541	13,2865	13,185	13,791

За допомогою функції COVAR(масив1;масив2) електронних таблиць Excelбула розрахована трикутна матриця коваріацій (табл. 2.9). Де масив 1,2 – координати клітинок, які містять зміни прибутковості для 1 та 2 типу акцій.

Таблиця 2.9

	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
Акції типу 1	1,174867					
Акції типу 2	1,715416	2,75131				
Акції типу 3	1,022792	1,18574	1,392875			
Акції типу 4	0,602635	0,76840	0,482928	0,687508		

	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
Акції типу 5	1,260856	2,05010	0,870436	0,510046	1,58855	
Акції типу 6	1,427621	1,51565	2,005646	0,841206	0,99276	3,2338

Використовуючи функцію SOLVE електронних таблиць Excel, було отримано рішення для чотирьох моделей. Результати зведені в табл. 2.10.

Як видно з результатів, акції типу 2 та 3 не рекомендується включати до портфелю цінних паперів взагалі. Акції 4-го типу включені в усі види портфелів.

Таблиця 2.10

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_0
М. Марковіца з min ризиком	0,855	0	0	0,1443	0	0	
М. Марковіца з max прибутком	0	0	0	0,8299	0,1273	0,0427	
М.Тобіна з min ризиком	0,0002	0	0	0,5725	0,1780	0	0,2492
М. Тобіна з max прибутком	0	0	0	0,2236	0,0695	0	0,7068

2.8. Індивідуальне завдання №13. Моделі Марковіца і Тобіна

Мета роботи: Опанувати методи формування оптимального портфеля цінних паперів за моделями Марковіца й Тобіна.

Завдання: Знайти оптимальний портфель цінних паперів за чотирма моделями (Марковіца і Тобіна). Прибутковості цінних паперів за шістьма типами акцій задані у табл. 2.11 Ефективність портфеля цінних паперів m_p, ризик портфеля r_p, а також ефективність без ризикових паперів m_0 задані варіантом у табл. 2.12. Розрахувати, з використанням програми Excel, розподіл капіталу, тобто визначити частки капіталу, витрачені на закупівлю кожного типу акцій: $x_1, x_2, \dots x_6$. Проаналізувати одержані результати та зробити висновки.

Таблиця 2.11

Прибутковість цінних паперів

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
1	11,954	13,907	14,263	14,611	13,491	12,424
	11,913	12,074	11,960	15,207	13,367	14,318
	11,572	12,654	14,203	11,762	13,568	14,922
	12,591	12,880	13,333	13,217	14,256	15,677
	11,638	12,269	12,537	13,624	13,694	13,718
	12,536	13,659	13,864	12,909	12,687	14,753
	13,054	11,811	10,332	11,891	10,604	11,069
	13,64	14,892	14,471	12,323	13,143	10,781
	15,513	13,702	12,71	12,08	12,9	13,549
2	11,820	13,783	12,361	14,612	12,084	13,537
	11,806	11,931	12,132	13,444	13,332	15,209
	13,376	13,424	14,519	14,817	13,918	16,153
	12,175	12,381	14,647	13,911	13,596	14,714
	10,139	12,112	11,820	10,399	11,604	13,345
	11,786	13,505	13,440	14,856	12,688	13,533
	14,779	11,73	15,448	11,562	12,569	12,905
	12,839	14,953	13,604	15,473	11,785	11,537
	13,663	13,1	11,271	12,939	13,11	10,835
3	11,574	12,955	14,174	14,016	13,100	13,394
	12,602	13,421	14,663	15,042	13,572	15,713
	12,012	12,654	12,996	13,896	13,463	12,148
	12,245	13,043	14,517	15,338	14,976	14,063
	12,502	13,879	13,744	14,726	13,145	12,669
	12,976	13,482	14,434	15,594	15,467	14,364
	10,172	10,793	11,877	10,475	14,631	15,186
	13,436	11,564	14,261	14,37	14,619	11,565
	12,786	13,171	14,517	10,181	12,071	11,76
4	14,162	15,191	16,511	15,118	14,409	17,416
	12,522	12,995	15,415	15,263	14,700	13,072
	13,123	15,042	13,177	16,430	14,913	14,860
	12,043	12,570	14,005	14,864	12,917	12,820
	11,472	12,600	11,845	12,878	14,097	14,554
	12,441	13,296	13,139	15,486	12,849	14,172
	11,033	14,763	14,957	10,482	13,371	15,314
	15,651	10,311	11,749	10,069	12,505	10,373
	10,868	11,655	15,389	13,488	11,089	11,269

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
5	11,265	12,891	11,612	12,845	11,401	13,668
	12,131	12,365	12,890	12,283	13,833	15,160
	14,480	15,143	17,277	15,657	14,960	15,963
	12,572	13,837	12,596	13,157	15,296	16,424
	10,865	12,623	11,558	14,056	10,873	14,489
	11,962	12,287	13,799	12,841	13,769	15,677
	11,818	11,079	13,744	12,723	12,167	11,445
	12,131	11,762	13,064	12,428	14,369	10,408
	14,065	14,698	11,58	11,955	10,015	14,067
6	10,908	11,940	12,719	11,464	12,486	11,458
	9,766	9,842	10,987	10,843	12,003	13,471
	11,702	12,463	13,454	12,725	13,619	13,226
	11,472	12,097	12,784	12,302	14,188	12,603
	13,503	13,740	13,848	14,758	15,457	13,570
	15,456	16,452	16,450	17,013	17,052	17,229
	12,38	10,757	10,85	15,517	10,13	10,23
	15,035	13,717	13,835	12,324	12,612	14,82
	13,915	13,308	13,907	14,76	10,969	13,615
7	10,161	12,144	10,537	13,397	10,223	12,266
	11,492	12,945	11,892	12,298	12,097	11,582
	12,428	12,895	15,227	13,407	14,462	14,330
	12,416	13,050	14,567	15,240	13,731	13,284
	10,813	12,380	12,008	14,134	10,968	11,675
	13,388	14,643	15,659	16,734	15,631	16,916
	14,045	13,298	11,753	10,634	10,774	13,346
	11,854	11,076	15,008	15,52	13,707	14,934
	12,293	12,613	13,244	13,098	11,317	12,795
8	9,889	11,603	11,612	12,721	11,453	12,102
	12,517	13,256	12,947	12,596	12,853	13,036
	12,786	12,822	15,447	14,452	15,143	16,247
	11,863	12,114	13,359	13,437	11,913	15,300
	11,444	13,292	13,703	11,504	13,406	15,255
	14,696	15,946	16,829	17,698	16,051	17,140
	12,41	11,976	13,625	14,556	13,008	15,107
	13,18	12,788	10,561	13,739	11,082	11,067
	10,207	11,496	13,408	11,855	12,819	11,183
	11,999	13,995	13,415	12,868	12,339	13,682
	12,241	12,793	14,227	13,426	12,656	15,808
	12,120	13,933	14,592	13,354	12,278	14,786

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
9	11,506	13,401	12,193	13,845	12,406	13,317
	12,376	13,710	15,068	13,133	12,707	14,716
	12,148	13,970	15,119	12,886	14,518	13,300
	11,49	10,366	12,194	11,04	15,453	10,251
	12,547	11,26	14,502	12,471	11,346	13,189
	14,954	15,214	14,691	14,643	10,66	13,722
10	11,293	11,493	13,753	12,936	12,881	13,820
	12,112	12,919	12,415	14,048	14,770	14,310
	11,429	13,098	14,277	14,551	11,639	13,524
	10,526	11,988	11,705	12,466	11,825	10,864
	11,467	13,364	12,171	11,631	11,923	13,764
	11,467	13,334	12,338	14,208	12,271	13,324
	12,457	12,82	14,672	11,122	12,201	11,865
	11,303	11,106	14,522	12,982	10,733	13,26
	13,577	10,597	12,214	13,755	10,945	14,422
11	11,954	13,381	14,468	12,274	13,094	13,014
	11,913	12,754	14,452	13,449	14,079	14,121
	11,572	12,623	11,901	12,132	13,555	14,708
	12,591	14,289	12,943	15,645	15,376	15,788
	11,638	12,955	12,637	11,702	12,786	13,542
	12,536	14,495	14,612	14,490	12,852	12,658
	10,3	11,802	10,558	12,556	13,707	11,064
	10,077	15,049	13,202	12,789	11,011	13,633
	10,609	12,755	12,388	10,54	10,299	10,794
12	11,820	12,832	13,906	12,432	13,609	12,919
	11,806	12,724	14,135	14,936	14,227	14,873
	13,376	14,119	14,326	15,519	15,372	15,364
	12,175	12,236	14,132	13,943	12,417	13,732
	10,139	12,117	10,606	10,683	10,995	12,416
	11,786	12,572	14,074	15,135	14,459	12,269
	11,947	12,442	12,102	11,653	14,821	10,956
	12,549	13,822	12,061	13,647	10,139	14,699
	13,769	14,628	11,745	12,76	15,414	11,804
13	11,574	11,725	11,798	12,740	13,207	13,470
	12,602	14,100	13,887	14,496	13,683	15,434
	12,012	13,772	14,191	13,929	13,937	13,956
	12,245	12,743	14,992	15,045	14,583	12,772
	12,502	13,123	15,173	13,344	12,592	14,666
	12,976	13,812	15,706	15,414	15,655	14,494

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
	14,962	14,212	14,37	10,706	10,342	15,047
	12,605	13,714	11,913	10,173	10,266	14,133
	13,39	10,077	13,509	12,414	11,003	14,122
14	14,162	15,519	16,403	17,273	15,211	18,008
	12,522	12,853	15,488	15,031	14,035	14,447
	13,123	13,967	13,330	14,221	13,849	16,304
	12,043	13,658	13,493	13,774	14,343	13,151
	11,472	12,136	14,103	12,386	12,564	13,363
	12,441	13,616	12,717	14,347	15,090	15,575
	15,321	14,514	13,761	13,437	10,435	11,349
	13,688	12,501	14,047	13,697	11,012	13,568
	13,015	10,806	10,246	14,705	14,031	13,639
15	11,265	12,052	14,016	14,047	12,064	11,667
	12,131	12,983	12,296	15,291	14,095	13,940
	14,480	16,275	16,717	16,194	15,413	15,427
	12,572	13,244	14,897	14,571	15,340	15,674
	10,865	11,659	10,923	11,533	13,089	11,709
	11,962	13,388	12,492	14,907	13,977	14,358
	12,273	10,582	10,729	12,873	15,334	10,504
	11,192	11,71	12,772	14,989	12,052	12,829
	13,259	12,302	11,952	11,653	10,325	12,07
16	10,908	11,114	13,790	11,873	13,029	11,012
	9,766	11,117	12,354	11,287	12,546	10,249
	11,702	12,455	13,484	12,153	13,075	12,310
	11,472	12,053	11,617	14,065	11,503	13,322
	13,503	14,469	14,195	16,018	14,812	15,556
	15,456	17,355	16,685	15,598	16,603	19,311
	10,743	13,107	13,977	10,612	13,257	10,103
	14,806	12,73	11,274	14,489	13,487	11,714
	13,917	11,842	10,508	14,059	10,903	14,528
17	10,161	10,431	10,695	13,393	11,153	11,751
	11,492	13,087	11,889	12,564	13,613	11,699
	12,428	14,259	12,561	13,100	13,888	14,348
	12,416	14,059	12,522	13,706	14,389	13,536
	10,813	10,818	12,951	12,192	11,765	14,450
	13,388	14,590	14,628	14,764	14,307	16,962
	10,314	11,939	13,192	11,174	10,418	13,217
	12,381	12,678	13,225	15,304	14,424	13,462
	12,574	11,391	11,633	10,652	15,083	12,711

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
18	9,889	11,198	10,095	12,783	11,183	10,835
	12,517	13,735	14,247	13,208	15,072	15,429
	12,786	13,231	15,070	13,013	14,133	16,174
	11,863	12,183	13,377	13,203	11,916	12,421
	11,444	11,999	13,243	14,233	13,024	12,491
	14,696	14,906	14,730	17,126	17,331	15,297
	12,894	11,848	14,255	11,461	11,5	13,227
	10,66	11,036	15,099	15,435	13,372	10,76
	14,266	13,146	14,38	13,084	14,038	14,563
19	11,999	12,509	12,361	14,850	14,026	15,078
	12,241	13,124	15,153	14,655	15,038	15,460
	12,120	12,240	12,945	12,701	13,006	13,616
	11,506	12,815	13,497	13,746	13,218	14,658
	12,376	12,808	14,477	15,690	14,127	12,427
	12,148	13,932	13,771	14,039	14,440	12,250
	14,86	10,825	14,548	13,411	15,351	14,955
	13,161	11,053	10,764	13,005	10,347	14,138
	11,6	10,567	11,483	13,277	14,139	10,91
20	11,293	11,563	14,165	14,763	12,874	14,426
	12,112	13,348	13,988	12,222	14,409	13,381
	11,429	11,680	14,364	11,472	13,201	11,925
	10,526	11,960	11,740	12,709	12,061	12,319
	11,467	11,774	11,862	12,466	12,013	12,865
	11,467	11,747	12,326	13,699	13,968	12,173
	10,912	14,664	14,595	11,794	14,64	14,949
	13,139	11,744	12,389	10,087	13,563	10,031
	10,395	12,986	12,932	10,593	11,047	15,645
21	11,954	13,543	13,158	14,299	14,420	12,797
	11,913	12,292	13,565	13,888	13,886	12,930
	11,572	11,745	12,146	12,162	13,720	15,055
	12,591	14,354	12,829	14,346	13,412	16,083
	11,638	13,317	13,026	11,899	14,227	13,862
	12,536	14,156	14,004	15,164	14,165	12,651
	10,289	11,306	12,77	10,373	13,129	12,232
	10,333	10,998	14,838	12,924	10,419	11,086
	11,385	15,572	14,63	14,153	13,033	13,687
	11,820	12,499	11,834	15,220	12,420	12,394
	11,806	12,803	14,115	14,830	12,295	14,506
	13,376	13,724	15,571	14,055	15,511	14,009

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
22	12,175	13,275	14,218	14,957	13,936	12,930
	10,139	10,635	10,975	12,273	10,431	13,031
	11,786	13,607	14,470	14,452	13,871	12,949
	10,708	13,341	15,209	10,68	13,665	13,012
	12,658	11,912	14,035	15,569	12,802	13,533
	10,122	13,555	13,4	12,345	13,82	10,11
23	11,574	12,615	12,977	14,600	11,962	12,629
	12,602	14,600	13,219	12,806	14,657	13,855
	12,012	12,482	12,072	13,876	13,781	12,645
	12,245	14,012	13,432	14,994	14,489	14,450
	12,502	12,511	12,574	12,581	13,727	13,138
	12,976	14,279	15,732	15,464	15,332	15,686
	15,097	15,405	10,558	12,12	14,096	13,8
	11,339	15,114	12,532	11,816	13,476	14,787
	11,318	10,244	12,206	12,152	10,498	10,213
24	14,162	15,097	16,664	15,119	15,614	16,602
	12,522	13,107	13,259	15,520	14,122	15,000
	13,123	13,462	14,243	15,733	14,196	13,900
	12,043	12,656	14,471	13,502	13,883	15,184
	11,472	12,402	14,301	11,937	12,424	13,662
	12,441	12,922	12,501	14,496	14,711	16,107
	10,659	15,636	12,23	14,287	11,014	10,961
	13,512	14,707	13,778	10,52	13,035	14,277
	12,626	10,707	12,554	10,724	14,032	10,669
25	11,265	12,585	11,693	11,892	12,272	11,771
	12,131	13,804	14,553	12,888	12,203	13,570
	14,480	15,883	16,938	17,964	15,827	16,217
	12,572	13,682	14,710	13,215	14,412	12,883
	10,865	11,008	12,093	10,942	11,787	14,353
	11,962	12,771	12,948	12,553	14,741	14,898
	11,626	13,958	12,72	12,939	15,622	15,341
	13,829	10,004	15,032	11,317	12,007	11,042
	14,909	13,873	13,223	11,357	10,535	14,608
26	10,908	12,573	13,457	13,093	13,315	12,251
	9,766	11,044	11,508	11,785	10,927	10,205
	11,702	13,345	13,567	14,966	14,416	13,449
	11,472	11,740	12,569	12,698	13,065	11,547
	13,503	14,632	16,452	14,309	15,559	16,024
	15,456	16,674	17,416	16,571	17,512	19,215

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
	13,164	14,644	10,172	15,418	14,524	14,701
	11,215	10,509	12,113	13,411	14,012	14,238
	14,851	11,954	15,317	13,596	14,586	15,585
27	10,161	12,013	12,309	13,480	10,737	10,362
	11,492	12,874	12,130	11,774	12,208	13,078
	12,428	14,133	13,361	15,555	13,970	12,772
	12,416	13,743	12,485	15,630	14,477	14,736
	10,813	10,866	12,196	10,991	12,082	11,145
	13,388	15,128	13,703	16,777	13,895	17,200
	14,442	10,475	13,837	13,066	14,913	13,121
	15,174	10,341	11,349	13,326	15,443	15,154
	14,249	11,751	12,072	10,263	11,822	15,6
28	9,889	11,361	10,420	10,167	10,772	11,689
	12,517	12,568	13,011	12,590	13,770	14,967
	12,786	14,656	12,976	13,292	14,371	13,211
	11,863	13,064	14,263	15,093	13,658	12,023
	11,444	12,354	13,277	12,915	13,978	15,040
	14,696	16,068	17,289	15,475	15,921	16,822
	14,535	10,492	11,191	11,446	10,918	15,363
	11,63	13,986	13,082	13,932	15,357	12,927
	11,047	14,227	13,488	14,959	12,389	13,697
29	11,999	13,785	12,086	13,075	12,001	14,557
	12,241	13,972	12,655	15,409	14,427	15,364
	12,120	12,223	13,483	14,749	13,943	15,458
	11,506	12,741	13,154	14,019	13,421	14,352
	12,376	12,607	15,165	15,504	12,505	16,273
	12,148	13,647	13,685	13,575	13,531	13,580
	13,24	14,403	15,172	10,629	11,94	15,244
	13,674	11,491	12,799	13,506	15,211	10,11
	10,233	12,527	13,669	15,065	12,619	13,842
30	11,293	11,455	11,496	13,262	12,301	13,370
	12,112	13,212	14,231	14,946	12,130	13,687
	11,429	12,990	11,766	14,277	12,649	12,901
	10,526	10,985	11,664	10,955	12,575	11,408
	11,467	13,087	13,639	12,660	11,969	14,170
	11,467	12,661	13,769	11,926	13,023	14,202
	10,14	14,299	14,09	11,063	13,002	14,751
	11,972	15,428	10,125	10,795	11,87	12,271
	13,205	13,88	10,163	12,077	14,07	15,495

Таблиця 1.12

Ризик і ефективності цінних паперів

№ варіанта	m_0	r_p	m_p	№ варіанта	m_0	r_p	m_p
1	10	0,3	13,5	16	9	0,05	12,2
2	10	0,3	13,3	17	9	0,05	12,2
3	10	0,3	12,6	18	9	0,05	12,2
4	10	0,3	12,6	19	9	0,05	12,2
5	10	0,3	12,5	20	9	0,05	12,2
6	10	0,5	12,7	21	9	0,05	12,4
7	10	0,04	12,7	22	9	0,08	12,8
8	10	0,04	12,7	23	9	0,09	12,8
9	10	0,04	12,7	24	9	0,12	12,8
10	10	0,04	12,7	25	9	0,11	12,1
11	8	0,05	12,7	26	9	0,05	12,2
12	8	0,05	12,7	27	9	0,05	12,3
13	8	0,09	12,5	28	9	0,12	12,2
14	8	0,05	12,5	29	8	0,1	12,4
15	9	0,05	12,2	30	8	0,1	12,5

2.9. Теорія масового обслуговування

У багатьох практично важливих або ж цікавих в пізнавальному відношенні ситуаціях доводиться з'ясовувати закономірності появи певного типу подій, який називається потоком подій: прибуття судів в морський порт, відмови в роботі складного пристрою, заміни електричних лампочок, що перегоріли, обривів ниток на ватерній машин і т. д. Розрахунок роботи багатьох підприємств побутового обслуговування - перукарень, кас магазинів, кількості громадського транспорту, необхідної кількості ліжок в лікарнях, пропускної спроможності шлюзів, переїздів, мостів і т. д. тісно пов'язаний з вивченням такого роду потоків. Цим займається теорія масового обслуговування.

Визначимо через t проміжок часу, який нас цікавить, і покладемо, що $P_k(t)$ є ймовірність появи k подій потоку за цей проміжок часу. Тоді за формулою закону розподілу Пуассона, при k=0, 1, 2,. .. з великою точністю виконується рівність

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \tag{2.51}$$

де λ – позитивна постійна, що характеризує «інтенсивність» надходження подій потоку. Зокрема, імовірність того, що за проміжок часу t не поступить жодної події потоку, є

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2.52}$$

Для задоволення деяких потреб населення організоване відповідне підприємство: перукарня, телефонна станція, лікарня зуболікарська амбулаторія і т. д. Вимоги на обслуговування поступають у випадкові моменти часу і тривалість їх обслуговування також випадкова. Питається, як будуть задоволені потреби клієнтів, якщо обладнані n місць обслуговування?

Уведемо припущення:

1) Потік вимог на обслуговування є найпростішим, тобто, Пуасонівським;

2) Тривалість обслуговування випадкова і ймовірність того, що на обслуговування доведеться затратити час, не менший ніж t, дорівнює $e^{-\upsilon t}$, де υ >0 константа;

3) Кожна вимога обслуговується одним приладом; кожний прилад обслуговує тільки одну вимогу в момент, коли він зайнятий;

4) Якщо є черга на обслуговування, то прилад, що звільнився, без втрат часу переходить до обслуговування чергової вимоги черги; 5) Кількість точок обслуговування є n .

Визначимо $P_k(t)$ імовірність того, що в момент t в черзі знаходиться k вимог. У сформульованих нами умовах ці ймовірності можуть бути знайдені при будь-якому k=0, 1, 2,. ..

При $1 \le k \le n$ $$\rho_k = \frac{\rho^k}{k!}\rho_0; \qquad (2.53)$$

при $k \ge n$ $$\rho_k = \frac{\rho^k}{n!n^{n-k}}\rho_0 \qquad (2.54)$$

де $$\rho_0 = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1} \text{ для } \rho < n \qquad (2.55)$$

$$\rho_0 = 0 \qquad \text{для} \qquad \rho \ge n .$$

У цих формулах $\rho = \lambda / \upsilon$. Звернемо увагу на те, що при $\rho \ge n$ імовірність $\rho_0 = 0$. На підставі формул (2.54) і (2.55) виявляється, що і при будь-якому $k \ge 1$, $P_k = 0$. Іншими словами, при $\rho \ge n$ в сталому процесі обслуговування застати в системі будь-яке кінцеве число вимог ми можемо лише з імовірністю нуль. Інакше кажучи, з імовірністю одиниця в такій системі буде нескінченно багато вимог, і утвориться нескінченна черга. Це означає наступне: у всіх випадках, коли $\rho \ge n$, черга на обслуговування необмежено зростає з часом.

Розрахунки в середовищі Excel показані нижче.

=C1/C2

B	C
λ=	8
ν=	3
ρ=	2,666667

F2 =B3^F1/ФАКТР(F1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	λ=	8	n=	10	kI	0	1
2	ν=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667
3	ρ=	2,666667					

D3 =1/(СУММ(F2:K2)+B3^(D1+1)/(ФАКТР(D1)*(D1-B3)))

	A	B	C	D	E	F	G	
1	λ=	8	n=	10	kI	0	1	
2	ν=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667	3
3	ρ=	2,666667	ρ0 =	0,073447				
4								

F3 | =B3^D2*D3/(ФАКТР(D1)*D1^(D1-D2))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	λ=	8	n=	10	Kl	0	1	2
2	v=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667	3,555556
3	ρ=	2,666667	$p0$ =	0,073447	pk =	2,72932E-11		

2.10. Індивідуальне завдання №14. Розрахунок довжини черги

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета завдання. Вивчити теорію масового обслуговування для можливості зазначення найбільш імовірного розміру черги.

Порядок виконання: Визначити найбільш імовірний розмір черги для даних, наведених у наступній таблиці.

Таблиця 2.13

Початкові дані

№ за списком групи	Інтенсивність надходження запитів	Інтенсивність обслуговування	Кількість точок обслуговування
1	9,7	5,846153846	12
2	4,7	6,846153846	6
3	5,1	5,538461538	8
4	5,6	5,384615385	8
5	5,6	5,230769231	6
6	9,1	7,307692308	10
7	9,8	4,615384615	8
8	6,8	5,307692308	9

№ за списком групи	Інтенсивність надходження запитів	Інтенсивність обслуговування	Кількість точок обслуговування
9	4,7	6,384615385	10
10	6,8	6,538461538	9
11	6,9	4,769230769	8
12	6,2	7,230769231	12
13	7,9	6	9
14	9,7	5,769230769	9
15	6,7	6,076923077	6
16	9	4,307692308	6
17	8,3	6,230769231	7
18	5,2	6,153846154	10
19	5,3	5,692307692	9
20	9,3	4,076923077	11
21	6,5	5,230769231	10
22	5	4,153846154	9
23	8	4,692307692	11
24	8,7	6,384615385	8
25	7,6	3,923076923	9
26	9,2	5,076923077	10
27	9,1	4,461538462	10
28	6	4,153846154	11
29	7	3,769230769	6
30	4,7	4,307692308	12

Контрольні запитання

1. В чому суть оптимальних розрахунків і як вони використовуються в економічних моделях?
2. Як вирішуються багатокритеріальні задачі?
3. Які методи згортки критеріїв ви знаєте?
4. Які методи можна використовувати для здійснення оптимальних розрахунків?
5. Що таке теорія ігор і як вона застосовується в економічному моделюванні?
6. Чим відрізняються антагоністичні ігри від кооперативних?
7. Що таке ігри з природою?
8. Які основні поняття і принципи теорії ігор важливі для розуміння в економічному аналізі?
9. Що таке транспортна задача і як вона вирішується за допомогою моделювання?
10. Що таке задача комівояжера?
11. Чим відрізняються задачі з дефіцитом і з надлишком продукції?
12. Які фактори слід враховувати при оптимізації портфеля цінних паперів?
13. Які методи аналізу ризику використовуються в оптимізації портфеля?
14. Що таке кореляція між цінними паперами і як вона впливає на оптимізацію портфеля?
15. Які підходи до розрахунку оптимального портфеля існують (наприклад, Марковіцева теорія)?
16. Як враховуються ризики і доходи в оптимізації портфеля з використанням математичних моделей?
17. Які основні метрики використовуються для оцінки ефективності оптимального портфеля?

18. Які стратегії диверсифікації портфеля можна застосовувати для мінімізації ризиків при оптимізації?
19. Що таке теорія масового обслуговування і чому вона важлива для організацій?
20. Які основні складові моделі масового обслуговування?
21. Які основні характеристики (показники) ефективності системи масового обслуговування?
22. Які типи черг (черги) існують в теорії масового обслуговування?
23. Які фактори впливають на ефективність системи масового обслуговування?
24. Які методи аналізу використовуються для побудови та оцінки систем масового обслуговування?
25. Як впливає інтенсивність навантаження на систему масового обслуговування?
26. Як вирішуються проблеми очікування в системах масового обслуговування?

Опанувавши матеріали цього розділу, студенти вивчили методі знайдення оптимальних рішень для випадків лінійних та нелінійних моделей, а також, моделей, заданих матрицями гри та матрицями транспортних витрат.

Розділ 3
ЗАВДАННЯ НА КУРСОВУ РОБОТУ

Виконання курсової роботи завершує підготовку студента по курсу «Економіко-математичне моделювання»

3.1. Мета і завдання курсової роботи

Курсова робота є одним з найбільш важливих елементів навчального процесу здобувачів вищої освіти. Курсова робота є самостійним науково-практичним дослідженням студента. Її метою є закріплення та систематизація отриманих теоретичних знань, а також набуття практичних навичок з дисципліни.

Метою даної курсової роботи є:

- дослідження галузей народного господарства з метою визначення типів економіко-математичних задач, які можуть бути застосовані у цих галузях;
- отримання практичних навичок дослідження соціально-економічних процесів, що протікають в економічній системі;
- оволодінні навичками використання сучасних інформаційних технологій;
- формуванні здатності розв’язання складних задач у межах дисципліни;
- формуванні навичок публічного захисту результатів виконаного дослідження.

При виконанні курсової роботи необхідно використовувати матеріали лекційних та практичних занять, а також усіх доступних джерел інформації, включаючи самостійний їх пошук.

Завданнями курсової роботи є:

- дослідження та критичний аналіз теоретичних положень щодо теми курсової роботи;

- пошук вихідних даних для побудови задачі за темою дослідження у відкритих джерелах статистичної інформації;

- обробка даних, їх аналіз, оцінка впливу та взаємозв'язку та придатності до використанні в економіко-математичному дослідженні;

- аналіз заданого процесу, отриманих результатів розрахунків та їх інтерпретація;

- вирішення оптимізаційної задачі одним із вказаних методів.

Курсова робота складається з трьох розділів: теоретичного, аналітичного і практичного. Робота повинна містити самостійно виконані розрахунки за реальними даними, власні судження автора щодо проблем обраної теми, логічність матеріалу викладення та ілюстрації текстового матеріалу.

Для виконання курсової роботи студенту потрібно самостійно знайти необхідну інформацію в доступних джерелах, а також провести дослідження за обраною темою.

Результати виконання та захисту курсової роботи мають свідчити про ґрунтовні знання автором теми дослідження та дисципліни в цілому. Матеріал повинен відображати ставлення студента до тих точок зору, з якими він зустрівся при вивченні літератури (виклавши різні думки зі спірного питання, студент повинен указати, яку з названих точок зору він підтримує і чому, або висловити і мотивувати свою точку зору на розглянуту тему).

Об'єктом дослідження курсової роботи є соціально-економічний процес відповідно до обраної тематики.

3.2. Тематика курсових робіт

Тематика курсових робіт охоплює коло проблем, що становить зміст дисципліни та відповідає програмі її вивчення. Для написання курсової роботи студент обирає одну із галузей народного господарства з табл. 1 і економіко-математичний метод із табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Остання цифра залікової книжки	Г алузь народного господарства
0	Металургія
1	Видобувна промисловість
2	Харчова переробна промисловість
3	Хімічна промисловість
4	Сільське господарство
5	Транспорт
6	Машинобудування
7	Туризм
8	Готельне господарство
9	Індустрія розваг

Таблиця 3.2

Остання цифра залікової книжки + 1	Економіко-математичні методи
0	Задача планування виробництва
1	Задача складання раціону
2	Задача розкроювання металу за мінімумом загальних відходів
3	Аналіз експертних висновків
4	Кластеризація об’єктів
5	Транспортна задача
6	Задача комівояжера

Остання цифра залікової книжки + 1	Економіко-математичні методи
7	Задачі масового обслуговування
8	Елементарна теорія портфеля
9	Динамічне програмування

3.3. Порядок видачі завдання на курсову роботу

Тему курсової роботи обирає студент. Одна тема дослідження може бути обрана лише одним студентом групи.

Керівник курсової роботи за необхідності рекомендує студенту літературу, нормативні і довідкові матеріали, типові проекти та інші джерела за темою; проводить консультації з питань виконання розділів курсової роботи; перевіряє виконання курсової роботи; готує студента до захисту курсової роботи.

3.4. Зміст курсової роботи

Курсова робота складається з наступних елементів:

титульна сторінка (додаток);

зміст курсової роботи, який розташовують безпосередньо після титульної сторінки, починаючи з нової сторінки;

вступ, який відображає актуальність проблеми, її наукову і практичну цінність, об'єкт і предмет дослідження, основну мету і задачі дослідження. Вступ починають з нової сторінки після змісту. Обсяг - 1-2 сторінки.

основна частина роботи, яка складається з трьох розділів. Кожен розділ починають з нової сторінки. Розділи можуть поділятися на підрозділи. Кожен підрозділ повинен містити закінчену інформацію.

У першому розділі «Теоретичний опис обраної економіко-математичної задачі» подається теоретичне та економічне обґрунтування економіко-математичної задачі, що пропонується як інструмент економіко-математичного дослідження. У розділі дається стислий опис об'єкта дослідження, звертається особлива увага на його властивості, та принципи розрахунку даних процесів. Також у даному розділі необхідно представити формальну постановку задачі з описом усіх змінних та зв'язків між ними, а також обґрунтувати вибір типу економіко-математичної задачі. Приблизний обсяг розділу - 7-10 сторінок.

Другий розділ «Аналіз галузі народного господарства з точки зору обраної задачі» представляє результати побудови та аналізу однієї або декількох задач, кількість яких залежить від завдання курсової роботи. Мінімальною вимогою до економіко-математичної задачі є вимога наявності у задачі двох екзогенних змінних. Даний розділ поєднує наступні два етапи типового економіко-математичного дослідження, а саме:

Приблизний обсяг розділу - 8-10 сторінок.

Третій розділ «Приклади застосування економіко-математичної задачі в обраній галузі народного господарства» наводяться результати поєднання знань, набутих у перших двох розділах курсової роботи. Основну частину цього розділу складає обґрунтування результатів рішення задачі, приклади їх практичного використання, тощо.

В процесі побудови прогнозів студент самостійно визначає значення пояснюючих змінних задачі. Бажаним також є попереднє оцінювання прогнозних якостей побудованої задачі.

Економіко-математичний аналіз зводиться до економічної інтерпретації параметрів оціненої задачі, у визначені граничного та відносного впливу пояснюючих змінних на залежну, а також при можливості - до оцінки силу впливу кожної пояснюючої змінної на залежну.

Приблизний обсяг розділу - 5-7 сторінок.

висновок, який розташовують безпосередньо після викладу основної частини роботи та містять стисле резюме отриманих результатів. Обсяг - 1-2 сторінки.

список використаних джерел, які були використанні при написанні курсової роботи, повинен бути приведений після висновку з наступної сторінки;

додатки, які містять матеріал, що є необхідним для повноти курсової роботи, але включення його в основну частину може змінити упорядковане і логічне уявлення про роботу; через великий обсяг не може бути послідовно розміщений в основній частині роботи.

При виконанні курсової роботи необхідно дотримуватись нормативно встановлених правил оформлення тексту, таблиць, формул, розрахунків, схем, рисунків, діаграм тощо.

Закінчену курсову роботу необхідно відправити у хмарне сховище за адресою, вказаною викладачем і повідомити викладача не пізніше, аніж за два дні до початку екзаменаційної сесії.

3.5. Вимоги до оформлення курсової роботи

3.5.1. Загальні вимоги

Курсову роботу друкують з одного боку аркушів білого паперу формату А4 через 1,5 міжрядкові інтервали до сорока рядків на сторінці.

Текст роботи необхідно оформляти, залишаючи поля, мм: ліворуч - не менш як 30, праворуч - не менш як 10, угорі - не менш як 20, внизу - не менш як 20.

Шрифт друку має бути чіткий, чорного кольору середньої жирності, щільність тексту роботи - однакова.

Вписувати в текст роботи окремі іншомовні слова, формули, умовні знаки можна чорнилом, тушшю, пастою тільки чорного кольору, при цьому щільність вписаного тексту повинна бути наближеною до щільності основного.

Заголовки структурних частин курсової роботи: «ЗМІСТ», «ВСТУП», «РОЗДІЛ», «ВИСНОВКИ», «СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ», «ДОДАТКИ» друкують великими літерами симетрично до тексту. Заголовки підрозділів друкують маленькими літерами (крім першої великої) з абзацного відступу. Крапку в кінці заголовка не ставлять. Якщо заголовок складається з двох або більше речень, їх розділяють крапкою. Заголовки пунктів друкують маленькими літерами (крім першої великої) з абзацного відступу в розрядці в підбір до тексту. В кінці заголовка, надрукованого в підбір до тексту, ставиться крапка. Відстань між заголовком (за винятком заголовка пункту) та текстом має дорівнювати 3-4 інтервалам. Кожну структурну частину курсової роботи треба починати з нової сторінки.

3.5.2 . Нумерація

Нумерацію сторінок, розділів, підрозділів, пунктів, підпунктів, рисунків, таблиць, формул подають арабськими літерами без знака «№».

Першою сторінкою курсової роботи є титульна сторінка, яку враховують у загальній нумерації. На титульній сторінки номер сторінки не ставлять, сторінка змісту і вступу також не нумерується, на наступних - номер проставляють у правому верхньому куті сторінки без сторінки без крапки в кінці.

Номер розділу ставлять після слова «РОЗДІЛ», після номеру крапку не ставлять, потім з нового рядка друкують заголовок розділу.

Підрозділи нумерують у межах кожного розділу. Номер підрозділу складається з номеру розділу і порядкового номера підрозділу, між якими ставлять крапку. В кінці номера підрозділу має стояти крапка, наприклад, 2.3. (третій підрозділ другого розділу). Потім у тому самому рядку друкують заголовок пункту. Пункт може не мати заголовка. Підпункти нумеруються у межах кожного пункту за тими самими правилами, що й пункти.

Ілюстрації (фотографії, креслення, схеми, графіки, карти) і таблиці необхідно подавати в роботи безпосередньо після тексту, де вони згадані вперше, або на наступній сторінці.

Ілюстрації позначають словом «Рис.» і нумерують послідовно в межах розділу, за винятком ілюстрацій, поданих у додатках. Номер ілюстрації має складатися з номера розділу і порядкового номера ілюстрації, між якими ставиться крапка. Наприклад, 1.2. (другий рисунок першого розділу). Номер ілюстрації, її назву і пояснювальні підписи розміщують послідовно під ілюстрацією. Якщо в роботі наведено одну ілюстрацію, то її нумерують за загальними правилами.

Таблиці нумерують послідовно (за винятком таблиць, поданих у додатках) в межах розділу. В правову верхньому куті над відповідним заголовком таблиці розміщують напис «Таблиця» із зазначенням її номера. Номер таблиці має складатися з номера розділу і порядкового номера таблиці, між якими ставиться крапка, наприклад «Таблиця 1.2» (друга таблиця першого розділу).

При переносі частини таблиці на іншу сторінку слово «Таблиці» і номер її вказують один раз праворуч над першою частиною таблиці, над перенесеними частинами пишуть слова «Продовження табл.» і вказують номер, наприклад, «Продовження табл. 1.2».

Формули в курсовій роботі (якщо їх більше однієї) нумерують у межах розділу. Номер формули складається з номера розділу і порядкового номера формули в розділі, між якими ставлять крапку. Номер формули пишуть праворуч на рівні самої формули в круглих дужках, наприклад, (3.1) (перша формула третього розділу).

Примітки до тексту і таблиць, в яких вказують довідкові та пояснювальні дані, нумерують послідовно в межах однієї сторінки. Якщо приміток на одному аркуші кілько, то після сова "Примітки" ставлять двокрапку, наприклад:

Примітки:

1...

2.1.

3.

Якщо примітка одна її не нумерують і після слова «Примітка» ставлять крапку.

3.5.3. Таблиці

Цифровий матеріал, як правило, має оформлюватися у вигляді таблиць. Кожна таблиця повинна мати назву, яку розміщують над таблицею і друкують симетрично до тексту. Слово «Таблиця» та її назву починають з великої літери. Назву не підкреслюють.

Заголовки граф треба починати з великих літер, підзаголовки - з маленьких, якщо вони складають одне речення із заголовком, і з великих, якщо вони є самостійними. Висота рядків має бути не менш як 8 мм.

Таблицю розміщують після першого згадування про неї в тексті так, щоб її можна було читати без повороту переплетеного блоку роботи або з поворотом за годинниковою стрілкою. Таблицю з великою кількістю граф можна ділити на частини і розміщувати одну частину під другою в межах однієї сторінки.

Приклад побудови таблиці:

Таблиця (номер)

Назва таблиці

3.5.4. Формули

Пояснення значень символів і числових коефіцієнтів треба подавати безпосередньо під формулою в тій послідовності, в якій вони наведені у формулі. Значення кожного символу і числового коефіцієнта треба подавати з нового рядка. Перший порядок пояснення починають зі слова «де».

Рівняння і формули треба виділяти в тексті вільними рядками. Вище і нижче кожної формули потрібно залишати не менше одного вільного рядка. Якщо рівняння не вміщується в один рядок, його слід перенеси після знака рівності (=) або після математичних знаків (+, -, х).

3.5.5. Посилання

У процесі написання курсової роботи необхідно давати посилання на джерела, матеріали або окремі результати, з яких наводяться в роботі, або на ідеях і висновках яких розробляються проблеми, завдання, питання, дослідження. Такі посилання дають змогу відшукати документи і перевірити достовірність відомостей про цитування документа, дають необхідну інформацію щодо нього, допомагають з’ясувати зміст, мову тексту, обсяг.

Посилатися в тексті курсової роботи на джерела слід зазначити порядковим номером за переліком посилань, виділеним двома квадратними дужками, наприклад, «... у працях [1-7]...».

3.5.5. Список використаних джерел

Джерела можна розміщувати в списку одним із таких способів:

у порядку появи посилань у тексті;

в алфавітному порядку прізвищ перших авторів або заголовків;

у хронологічному порядку.

Відомості про джерела, занесені до списку, необхідно давати згідно з вимогами державного стандарту з обов'язковим наведенням назв праць.

3.5.7. Додатки

Додатки оформляють як продовження курсової роботи на наступних його сторінках або у вигляді окремої частини (книги), розміщуючи їх у порядку появи посилань у тексті роботи.

Додатки слід позначити послідовно великими літерами української абетки, за винятком літер Г, Є, І, Ї, Й, О, Ч.

Текст кожного додатка в разі потреби може бути поділений на розділи і підрозділи, які нумеруються у межах кожного додатка, наприклад, А.2.

3.6. Порядок захисту курсової роботи

Студенти захищають курсову роботу публічно.

До захисту курсових робіт допускаються студенти, які виконали всі вимоги. Процедура захисту передбачає стисле викладення студентом результатів дослідження і відповідей на запитання. В ході захисту оцінюються не тільки виконання роботи, але й якість самого захисту.

Якщо захист курсової роботи оцінено незадовільно, то студент може повторно захищати ту саму роботу з доопрацюваннями, визначеними комісією або ж зобов'язаний розробити нову тему, яку визначає керівник.

Добре виконання курсової роботи означає, що студент зробив перший великий крок у напрямку бізнес-аналітики.

ВИСНОВКИ

Після вивчення посібника, що містить такий розгорнутий перелік матеріалів і інформації, можна зробити наступні висновки:

Розширення знань з моделювання: Посібник надає глибоке розуміння різних типів моделей, включаючи лінійні, нелінійні, авторегресійні, трансцендентні, класичні імітаційні моделі, нейронні мережі та нечіткі моделі. Це сприяє розширенню компетенцій в області аналізу даних та прогнозування.

Практичні навички з програмного забезпечення: Інструкції щодо роботи з Excel, MATLAB і STATISTICA дозволяють засвоїти різноманітні інструменти для обробки даних, розрахунків і моделювання. Це важливо для практичного застосування у сфері аналізу даних та наукових досліджень.

Здатність до оптимізації і розв'язання складних завдань: Розділ про оптимальні розрахунки, теорію ігор та розв'язання транспортної задачі надає знання для ефективного вирішення задач оптимізації та управління ресурсами в умовах невизначеності.

Підготовка до наукових досліджень: Розділ про завдання на курсову роботу створює базу для подальших наукових досліджень у галузі економічного моделювання. Вимоги до оформлення та захисту роботи допомагають студентам систематизувати свої знання та навички для академічних цілей.

Отже, цей посібник не лише розширює теоретичні знання, але й надає практичні навички, необхідні для ефективного застосування моделювання в реальних економічних задачах. Вивчення цього матеріалу покликане підготувати фахівців з глибоким розумінням методів та інструментів аналізу даних і прийняття рішень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Пістунов І.М. Економічна кібернетика [Електронний ресурс]: навч. посіб. / І.М. Пістунов ; Нац. гірн. ун-т. – Електрон. текст. дані. – Видання друге, виправлене й доповнене. – Д. : НГУ, 2014. – 215 с.
2. Пістунов І.М. Нейромережеві технології економіці та фінансах з розрахунками на комп'ютері [Електронний ресурс]: навч. посібн. / І.М. Пістунов, О.П. Антонюк ; Нац. гірн. ун-т. – Електрон. текст. дані. – Д. : НГУ, 2014. – 125 с.
3. Пістунов І.М. Числосві методи: Навч. посібник. [Електронне видання] / І.М. Пістунов ; Нац. гірн. ун–т. – Електрон. текст. дані. – Д. : НГУ, 2014. – 38 с.
4. Пістунов І.М.Збірник індивідуальних завдань для дисциплін «Обґрунтування господарських рішень і оцінка ризику» [Електронний ресурс]: Навч. посібник/ І.М. Пістунов. – Дніпро: Державний НТУ «ДП», 2019. – 25 с. Режим доступу: http://pistunovi.inf.ua/ OBG_GOSP_RiIII_TASK.pdf
5. Пістунов І.М. Збірник індивідуальних завдань для дисциплін «Методи та моделі підтримки прийняття рішень» [Електронний ресурс]: Навч. посібник/ І.М. Пістунов. – Дніпро: Державний НТУ «ДП», 2020. – 28 с. Режим доступу: http://pistunovi.inf.ua/ MMSD_TASK.pdf (дата звернення: 12.11.2020). – Назва з екрана.
6. Пістунов І.М. Економіко-математичні методи та задачі: метод. рекомендації до виконання лабораторних робіт для студентів спеціальності 051 «Економіка» [Електронний ресурс]: Навч.

посібник/ І.М. Пістунов. – Дніпро: Державний НТУ «ДП», 2020. – 49 с. Режим доступу: http://pistunovi.inf.ua/ EMMM_lab.pdf (дата звернення: 31.12.2020). – Назва з екрана.

7. Пістунов І.М. Моделювання бізнес процесів [Електронне видання]: навчальний посібник / І.М. Пістунов Електрон. текст. дані. – Д.: НТУ «ДП», 2021. – 147 с. – Режим доступу: http://pistunovi.inf.ua/MOD_BIZ_IIPOU.pdf (дата звернення: 01.02.2021). – Назва з екрана.
8. Пістунов І.М. Моделювання економіки: навч. наоч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2024. 40 с.
9. Пістунов І.М. Економіко-математичне моделювання: навч. наоч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2024. 34 с.
10. Тлумачний словник зі спеціальності 051 Економіка/ упоряд.: І.М. Пістунов, Д.В. Кабаченко, О.Ю. Приходченко, М.А. Демиденко, О.Ю. Чуріканова, І.Ю. Турчанінова, О.П. Денисенко/під ред. І.М. Пістунова. Дніпро: НТУ «ДП», 2024. 202 с.
11. Пістунов І.М. Основи прийняття фінансових рішень. навч. наоч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2024. 24 с.
12. Пістунов І., М. Пістунов М.І. Побудова оптимального балансу на підставі фінансових коефіцієнтів/ Економіка: проблеми теорії та практики. -Вип.. 185, том. III.- Д.: ДНУ: 2003.- С.593-599.
13. Пістунов І.М., Ситников В.В. Дослідження межі існування оптимальних рішень для портфеля Марковіца/ Економічний вісник НГУ. - №4. - 2003. С.114-119.
14. Пістунов І.М., Мазуренко Д. С. Оптимальний перерозподіл виробничих обов'язків співробітників обслуговуючого підприємства / Науковий вісник НГУ. - №5, 2007. - С. 90-93.
15. Пістунов І.М., Луговська О.Ю. Економіко-математична прогнозуюча модель розрахунку оптимальних посівів зернових культур//

Економіка: проблеми теорії та практика №249–Т.ІІ– Дніпропетровськ, ДНУ,2008–с. 288-294
16. Пістунов І. М. Один із методів диверсифікації тимчяасово вільного капіталу підприємств /І. М. Пістунов, А,І.Ткачова// Науковий вісник НГУ – Дн.: Державний ВНЗ «НГУ», 2012. – № 1. – С. 127-131
17. Чуріканова О.Ю. Оптимальне інвестування вуглевидобувних підприємств: Монографія/ О.Ю. Чуріканова, І.М. Пістунов – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет 2013. – 116 с.
18. Антонюк О.П. Прогнозування обсягів економічного відшкодування наслідків техногенного забруднення криворізького регіону: Монографія/ О.П.Антонюк, І.М. Пістунов. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2013. – 118 с
19. Ihor Pistunov. Useful examples optimal solution real financial and economic problems/Монографія / І.М. Пістунов ; М-во. освіти і науки України, Нац. гірн. у-нт. – Saarbrucken, Deutschland : LAP LAMBERT Academic Publishing , 2017. – 242 с.
20. Пістунов І.М., Колотило М.Б. Управління виробництвом підприємства на базі виробничої функції Кобба-Дугласа / І.М.Пістунов, М.Б.Колотило// Сїхідна Європа: економіка, бізнес та управління. - 2019. - №3(20). Режим доступу до ресурсу: http://easterneurope-ebm.in.ua/index.php/2019
21. Пістунов І.М., Железнякова К.О. Оптимізація роздрібних цін// Інфраструктура ринку. №41. 2020. С.123-127. URL: http://www.market-infr.od.ua/uk/41-2020
22. Пістунов І.М., Лущан А.М. Підвищення ефективності управління вантажними роботами на базі алгоритмів нечіткої логіки. Економіка та суспільство. 2020. № 22. URL: https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/54 DOI: 10.32782/2524-0072/2020-22-8

Навчальне видання

Пістунов Ігор Миколайович

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник

Електронне видання

У редакції автора

Підготовлено у НТУ «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до державного реєстру ДК №1842.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.