В. О. Мельник

аспірант, фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАНУ,

Україна, e-mail: melnyk.vitalii@ipm.lviv.ua

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ТІЛА ІЗ ЗАЛІКОВАНОЮ ДИСКОПОДІБНОЮ ТРІЩИНОЮ

У статті досліджено граничний стан кругової тріщини в трансверсально-ізотропному мате- ріалі після ін'єкційного зміцнення. Розглянуто модель вінклерівської основи для опису напру- женого стану. Отримано аналітичний вираз для граничного навантаження, що дозволяє оцінити ефективність заліковування тріщин та відновлення міцності конструкцій.

Ключові слова: трансверсально-ізотропне тіло, заліковування тріщин, міцність.

В інженерній практиці для відновлення несучої здатності пошкоджених тріщинами еле- ментів конструкцій застосовують технологію ін'єкційного зміцнення [1]. Суть її полягає у введенні під тиском в пошкоджені зони тіла рідинних матеріалів, здатних після полімe- ризації чи кристалізації формувати з основним матеріалом міцні адгезійні зв'язки. Для оптимізації технології та оцінювання залишкового ресурсу роботоздатності відновлених елементів конструкцій виникає необхідність в розв'язуванні крайових задач про граничну рівновагу тіл із залікованими тріщинами. У доповіді наведено дослідження про грани- чний стан кругової тріщини в трансверсально-ізотропному матеріалі після застосування ін'єкційної технології зміцнення.

Розглянемо трансверсально-ізотропне тіло, що містить в площині ізотропії круглу в плані тріщину радіусом a. У віддалених від тріщини точках тіла прикладені зусилля роз- тягу, що викликають в площині тріщини за її відсутності однорідні напруження інтен- сивністю p. Як відомо [2], міцність такого тіла, розрахована на основі δc-моделі [3] тіл з тріщинами, буде такою:

$$
\begin{aligned}
&p_* = \sigma_0 \left(2(1 - a_*/2a)a_*/a\right)^{1/2}, \quad \text{при } a \geq a_* \\
&p_* = \sigma_0, \quad \text{при } a < a_*
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Тут $a_* = \frac{\pi\delta_c B}{4\sigma_0}$, $B = \frac{A_{44}(1+m_1)(1+m_2)(\sqrt{\nu_2}-\sqrt{\nu_1})}{m_2-m_1}$, $m_i = \frac{A_{11}\nu_i - A_{44}}{A_{13}+A_{44}}$, ν_i - корені рівняння: $A_{11}A_{44}\nu^2 + (A_{13}(A_{13} + 2A_{44}) - A_{11}A_{33})\nu + A_{33}A_{44} = 0$, $i = 1, 2$, A_{11}, A_{13}, A_{33}, A_{44} - модулі пружності трансверсально-ізотропного тіла. Нехай в результаті застосування технології ін'єктування [1] поверхні тріщини з'єднані тонким прошарком ін'єкційного матеріалу. Встановимо ефективність такого роду заліковування дефекту у тілі. Реакцію прошарку на зусилля розтягу подано відповідно до моделі вінклерівської основи

$$\sigma_{zz}^*(r) = U_z^*(r)E/h(r), \quad 0 \leq r \leq a \tag{2}$$

де E - модуль Юнга ін'єкційного матеріалу; 2 *h(r)* - товщина прошарку; u_z^* *(r)* - переміщення точок поверхні тріщини. Скориставшись принципом суперпозиції, напружений стан в тілі подамо як суму двох станів: тіла без тріщини під дією зовнішніх зусиль і тіла з тріщиною до поверхонь якої прикладені зусилля

$$\sigma_{zz}^{\pm}(r,0) = -p + \sigma_{zz}^*(r), \sigma_{zz}^{\pm} = 0, \quad 0 \leq r \leq a \tag{3}$$

Під дією цих зусиль в околі тріщини формується кільцева зона $a < r \leq R$ послаблених зв'язків, в якій напруження вважаємо постійними і рівними σ0. Значення σ0 змінюється в інтервалі від границі плинності σ_t до границі міцності σ_c.

Перший напружений стан не пов'язаний з тріщиною і тому не може впливати на її ріст. Поширення тріщини визначатиметься з розв'язку крайової задачі (3). Ця задача на основі загального розв'язку рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропного тірла вираженого через гармонічні в різних системах координат функції з використаням інтегральниї перетворень Ганкеля зведена до такого сингулярного інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{2}{\pi}\int_0^R L(r,t)U_z'(t)dt = \frac{1}{B}\begin{cases} -p + \frac{U_z+U_0}{h}E, & 0 \leq r \leq a \\ -p + \sigma_0, & a \leq r \leq R \end{cases}$$
$$L(r,t) = \begin{cases} \frac{1}{r}K(t/r) + \frac{r^2}{t^2-r^2}E(t/r), & t < r \\ \frac{t}{t^2-r^2}E(r/t), & t > r \end{cases} \tag{4}$$

Тут K(t/r), E(t/r) - повні еліптичні інтеграли першого та другого роду відповідно; $U_z^* = U_z + U_z^0$; $U_z^0 = \frac{(A_{11}+A_{12})h(r)}{A_{33}(A_{11}+A_{12})-2A_{13}^2}$. Інтегральне рівняння (4) в загальному випадку може бути розв'язане чисельним методом з використанням функціональних поліномів. Якщо припустити, що напруження у прошарку не залежать від зони передруйнування в околі тріщини, то можна отримати аналітичний розв'язок інтегрального рівняння (4) за умови, що $h = \sqrt{a^2 - r^2}/\beta$, де β = a/c; c - мала піввісь сфероїда $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; Розкриття тріщини в точці r = a, як це випливає з отриманого розв'язку, буде таким

$$2U_z(a) = \frac{2a}{\pi B}\cdot\left(1 - \frac{a}{R}\right)(\sigma_0 + A), \quad A = \varepsilon E + \frac{2\beta(1-\varepsilon E)E}{2\beta E + \pi B}$$
$$\varepsilon = \frac{A_{11}+A_{12}}{A_{33}(A_{11}+A_{12}) - 2A_{13}^2}$$

Параметр R, що характеризує зону передруйнування, встановлюється із умови плавного змикання берегів тріщини в точці r = R і приймає таке значення

$$R = a\left(1 - \left(\frac{P - PA}{\sigma_0 - PA}\right)^2\right)^{-1/2}$$

З умови δc- моделі, що 2UZ(a) = δc, отримуємо рівняння для розрахунку граничнго навантаження p* для тіла із залікованою тріщиною

$$\frac{2a}{\pi B}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p_* - p_* A}{\sigma_0 - p_* A}\right)^2}\right)(\sigma_0 - p_* A) = \delta_c$$

Отримане рівняння має дійсний розв'язок

$$p_* = \frac{\sigma_0\left(1 - \left(\frac{2a_*}{a} - 1\right)^2\right)}{A + \sqrt{A^2 - \left(\left(\frac{2a_*}{a} - 1\right)^2 - 1\right)(1 - 2A)}}$$

при умові, що

$$a > \frac{2a_*}{1 + \sqrt{1 + \frac{A^2}{1-2A}}}$$

Випадок A = 0 відповідає незалікованій тріщині і із співвідношень (8), (9) отримуємо рівняння (1). Із співвідношення (6) видно, що якщо зовнішні навантаження досягаю напружень інтенсивності $p = \sigma_0$, параметр прямує в нескінченність. Тоді із формули (5) в цьому разі для тріщин розміром $a < a_0$ отримаємо

$$2u_z(a) = \frac{2a}{\pi B}\sigma_0(1 - A) < \frac{2a_0}{\pi B}\sigma_0(1 - A) = \delta_c \qquad (10)$$

Тут введено позначення a0 = $2a_*$ / $\left(1 + \sqrt{1 + \frac{A^2}{1-2A}}\right)$.Співвідношення (10) показує, що для тріщин розміром $a < a_0$ граничний стан тіла згідно δ_c-концепції не настає навіть у випадках, коли $p = \sigma_0$.

Тіло з такими дефектами має таку ж міцність, як і бездефектне, тобто $p_* = \sigma_0$. Варто підкреслити, що згідно зі співвідношеннями (10), заліковані тріщини, які більше не знижують міцність, можуть бути значно більшими за незаліковані дефекти. Це вказує на те, що правильний вибір параметрів ін'єкційного матеріалу дає змогу повністю відновити міцність тіла навіть за наявності тріщини критичних розмірів.

Цю роботу виконано в рамках проєкту № 2023.04/0132 Національного фонду досліджень України.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Panasyuk V. V., & Marukha V. I., & Sylovanyuk V. P. (2014) Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. Springer

2. Зайцев Г. П. (1977). К вопросу о предельном равновесии пластин и тел из хрупких ортотропных материалов с трещинами. Проблемы прочности, (13), 78-83. 3. Панасюк В. В. (1968). Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Наукова думка.