МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра системного аналізу та управління

В.М. Горєв, Л.С. Коряшкіна

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації до практичних занять
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності
F4 Системний аналіз та наука про дані

Дніпро
НТУ «ДП»
2026

Алгебра та геометрія [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані / уклад.: В.М. Горєв, Л.С. Коряшкіна ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2026. – 203 с.

Укладачі:
В.М. Горєв, канд. фіз.-мат. наук, доц.;
Л.С. Коряшкіна, д-р техн. наук, доц.

Затверджено науково-методичною комісією зі спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані (протокол № 1 від 05.01.2026) за поданням кафедри системного аналізу та управління (протокол № 1 від 05.01.2026).

Наведено матеріал практичних занять відповідно до освітньо-професійних програм підготовки бакалаврів зі спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані.

Орієнтовано на активізацію навчальної діяльності та закріплення практичних навичок у засвоєнні дисципліни «Алгебра та геометрія» здобувачів ступеня бакалавра спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу та управління Т.А. Желдак, канд. техн. наук, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП

Математика…виявляє порядок, симетрію та визначеність, а це – найважливіші види прекрасного.
(*Аристотель*)

Сучасна наука та техніка все більше використовує математичні методи дослідження, моделювання та проєктування. Завдяки швидкому розвитку обчислювальної техніки значно розширюються можливості успішного застосування математики в розв'язанні конкретних задач. Дисципліна «Алгебра та геометрія» є поряд з математичним аналізом, дискретною математикою фундаментом освіти аналітика систем та великих даних.

Мета вивчення дисципліни – ознайомити здобувачів вищої освіти спеціальності «Системний аналіз та наука про дані» з класичними поняттями та методами алгебри та геометрії і дати навички застосування алгебраїчних методів аналізу при дослідженні багатовимірних моделей реальних процесів.

В ході опанування дисципліною «Алгебра та геометрія» у здобувачів формуються загальні та фахові компетентності:

– здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

– здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;

– знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності;

– здатність використовувати системний аналіз як сучасну міждисциплінарну методологію, що базується на прикладних математичних методах та сучасних інформаційних технологіях і орієнтована на вирішення задач аналізу і синтезу технічних, економічних, соціальних, екологічних та інших складних систем;

– здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів;

– здатність організовувати роботу з аналізу та проєктування складних систем, створення відповідних інформаційних технологій та програмного забезпечення.

Програмні результати навчання після засвоєння дисципліни спрямовані на набуття ряду знань, умінь і навичок вирішення складних спеціалізованих задач та практичних проблем фахівцями-аналітиками:

– знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу;

– вміти розпізнавати стандартні схеми для розв'язання комбінаторних та логічних задач, що сформульовані природною мовою; застосовувати класичні алгоритми для перевірки властивостей та класифікації об'єктів, множин, відношень, графів, груп, кілець, решіток, булевих функцій тощо;

– вміти визначати ймовірнісні розподіли стохастичних показників та факторів, що впливають на характеристики досліджуваних процесів, досліджувати властивості та знаходити характеристики багатовимірних випадкових векторів та використовувати їх для розв'язання прикладних задач, формалізувати стохастичні показники та фактори у вигляді випадкових величин, векторів, процесів.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1. Матриці, дії над ними

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок дій над матрицями – додавання, множення на число, транспонування матриці, знаходження переставних матриць.

Очікувані результати навчання: знати основи алгебри матриць, вміти виконувати лінійні операції над матрицями, множити матриці, знаходити транспоновану матрицю, переставні матриці

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

Матриця – таблиця чисел, що розташовані в m рядках та n стовпцях:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

У елементів a_{ij} перший номер означає номер рядка, а другий номер – номер стовпця.
Певна аналогія з програмуванням – матрицю можна уявити як двовимірний масив.

Додавання матриць: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.\ C=A+B \Leftrightarrow c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

$A+B=B+A$.

Додавати можна матриці лише однієї розмірності. Розмірність суми матриць = розмірність кожної з матриць.

Приклад 1: $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Множення матриці на число: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$. α – число, $B=\alpha A \Rightarrow b_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Приклад 2: $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha=2$, $\alpha A=\begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Наслідок: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$.

$$\alpha A+\beta B=\begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\beta b_{11} & \alpha a_{12}+\beta b_{12} & \cdots & \alpha a_{1n}+\beta b_{1n} \\ \alpha a_{21}+\beta b_{21} & \alpha a_{22}+\beta b_{22} & \cdots & \alpha a_{2n}+\beta b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1}+\beta b_{m1} & \alpha a_{m2}+\beta b_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn}+\beta b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$C=\alpha A+\beta B \Leftrightarrow c_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta b_{ij}$.

Частинний випадок: $A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$.

Приклад 3: $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$,

$2A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 9 & -9 \\ 9 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

ДЗ: №331 (б–г).

Транспонування матриці – операція, коли стовпчики та рядки змінюються місцями. Позначається верхнім індексом T.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ A^T=B \Leftrightarrow b_{ij}=a_{ji},\ \left(A^T\right)^T=A.$$

Якщо матриця A розмірності $m\times n$, то матриця A^T є розмірності $n\times m$.

Приклад 4.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

ДЗ: №332 в, №333.

Нульова матриця: $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$

Властивості додавання матриць і множення матриць на число (A, B – матриці; α, β – числа).

1. $A+B=B+A$**;** **2.** $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$**;** **3.** $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$**;**

4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$**;** **5.** $\alpha\beta A=(\alpha\beta)A=\beta\cdot(\alpha A)$**;** **6.** $0\cdot A=O$**;** **7.** $A+O=A$**.**

Ці очевидні властивості є наслідками відповідних властивостей для чисел.

Множення матриць. $A\cdot B$ існує, коли кількість стовпців в матриці A співпадає з кількістю рядків в матриці B. Іншими словами, такий добуток існує, тільки якщо A розмірності $m\times n$, матриця B розмірності $n\times k$, тоді $A\cdot B$ розмірності $m\times k$.

Покомпоненте визначення:

$$C=A\cdot B \Leftrightarrow c_{ij}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}.$$

«Жаргонно кажучи», i-й рядок матриці A множиться на j-й стовпець матриці B.

Властивості множення матриць:

1. В загальному випадку $A\cdot B\neq B\cdot A$ (в деяких частинних випадках може виконатись $A\cdot B=B\cdot A$, але не в загальному випадку). Більше того, може бути таке, що $A\cdot B$ існує, а $B\cdot A$ – ні, і навпаки. Множення матриць, на відміну від множення чисел, не є комутативною операцією – ***результат залежить від порядку слідування матриць***.

2. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$ (звернімо увагу: саме в такому порядку!) Порядок слідування матриць змінити не можна.

3.1. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ («розкривати дужки» можна, але при цьому не можна змінювати порядок слідування матриць).

3.2. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ («розкривати дужки» можна, але при цьому не можна змінювати порядок слідування матриць).

4. λ – число. $\lambda AB=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)$ (число і матрицю переставлять місцями можна).

5. $ABC=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ (звернімо увагу: саме в такому порядку!) Порядок слідування матриць змінити не можна.

6. Якщо A – квадратна матриця $n\times n$, то $A\cdot E=E\cdot A=A$, де E – **одинична матриця** (квадратна матриця $n\times n$, на головній діагоналі якої стоять 1, а всі інші елементи – нулі)

$$E=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

Приклад 6.

$$\overbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}}^{2x2}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}}^{2x2}}^{2x2}=\begin{pmatrix}3\cdot2+(-2)\cdot1&3\cdot3+(-2)\cdot5\\5\cdot2+(-4)\cdot1&5\cdot3+(-4)\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\6&-5\end{pmatrix}.$$

Приклад 7.

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}}^{2x2}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}-7&1\\5&-4\end{pmatrix}}^{2x2}}_{2x2}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}6&3\\-3&9\end{pmatrix}}^{2x2}}_{2x2}=\begin{pmatrix}2\cdot(-7)+1\cdot5&2\cdot1+1\cdot(-4)\\3\cdot(-7)+4\cdot5&3\cdot1+4\cdot(-4)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&3\\-3&9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & -2\\ -1 & -13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-9)\cdot 6+(-2)\cdot(-3) & (-9)\cdot 3+(-2)\cdot 9\\ (-1)\cdot 6+(-13)\cdot(-3) & (-1)\cdot 3+(-13)\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-48 & -45\\ 33 & -120\end{pmatrix}.$$

Приклад 8.

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}}^{3x3}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 5 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}}^{3x3}}_{3x3}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+(-3)\cdot 5+2\cdot 3 & 1\cdot 5+(-3)\cdot 2+2\cdot 2 & 1\cdot 6+(-3)\cdot 1+2\cdot 1\\ 2\cdot 2+5\cdot 5+1\cdot 3 & 2\cdot 5+5\cdot 2+1\cdot 2 & 2\cdot 6+5\cdot 1+1\cdot 1\\ 3\cdot 2+1\cdot 5+(-4)\cdot 3 & 3\cdot 5+1\cdot 2+(-4)\cdot 2 & 3\cdot 6+1\cdot 1+(-4)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 3 & 5\\ 32 & 22 & 18\\ -1 & 9 & 15\end{pmatrix}.$$

Приклад 9.

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 2\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}}^{4\times 3}\overbrace{\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}}^{3\times 2}}^{4\times 2}\overbrace{\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}}^{2\times 1}}^{4\times 1}=\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+0\cdot 1+1\cdot 2 & 0\cdot 2+0\cdot(-2)+1\cdot 2\\ 1\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 2+1\cdot(-2)+2\cdot 2\\ 3\cdot(-1)+3\cdot 1+2\cdot 2 & 3\cdot 2+3\cdot(-2)+2\cdot 2\\ 4\cdot(-1)+4\cdot 1+3\cdot 2 & 4\cdot 2+4\cdot(-2)+3\cdot 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\\ 4 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+2\cdot 4\\ 4\cdot 1+4\cdot 4\\ 4\cdot 1+4\cdot 4\\ 6\cdot 1+6\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 20\\ 30\end{pmatrix}.$$

ДЗ: №334 г,д,е,ж.

Приклад 10. Знайти квадрат матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot(-3) & 2\cdot 1+1\cdot 4\\ (-3)\cdot 2+4\cdot(-3) & (-3)\cdot 1+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -18 & 13\end{pmatrix}.$$

Приклад 11. Знайти куб матриці з прикладу 10.

$$A^3=A\cdot A\cdot A=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -18 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+6\cdot(-3) & 1\cdot 1+6\cdot 4 \\ -18\cdot 2+13\cdot(-3) & -18\cdot 1+13\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & 25 \\ -75 & 34 \end{pmatrix}.$$

Дз: №336 б–г; №337

Приклад 12.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$AB^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 5+(-1)\cdot 4+0\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 6+0\cdot 2 \\ 1\cdot 5+(-2)\cdot 4+3\cdot 3 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 6+3\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\underbrace{\underset{3\times 2}{B^T}\cdot\underset{2\times 3}{A}}_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\ldots$$

Дз: в рамках цього прикладу обчислити $B^T\cdot A$
Дз: №338 б,в; №339, №340

Приклад 13. Знайти всі матриці, переставні з даною: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Переставні матриці – матриці, які в добутку можна змінити місцями без зміни результату. Знайти всі матриці A, такі що $A\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot A$.

Шукаємо $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (тому що матриця А має бути лише розмірності 2на2, щоб існували обидва добутки одночасно).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+4b & 3a+5b \\ 2c+4d & 3c+5d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 4a+5c & 4b+5d \end{pmatrix}$$

Матриці є рівними тоді і тільки тоді, коли вони співпадають **покомпонентно**.

$$\begin{cases}2a+4b=2a+3c\\3a+5b=2b+3d\\2c+4d=4a+5c\\3c+5d=4b+5d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4b=3c\\a+b=d\\4d=4a+3c\\3c=4b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4b=3c\\a+b=d\\4d=4a+4b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4b=3c\\a+b=d\end{cases}$$

Позаяк два рівняння виявились «зайвими», то з чотирьох змінних лише дві є незалежними, інші дві виражаються через них, і система має нескінченно багато розв’язків. Нехай незалежними будуть зміні a,b, тоді змінні c,d через них виражаються так: $\begin{cases}c=\frac{4}{3}b\\d=a+b\end{cases}$. Отже, переставною з матрицею $\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$ є будь-яка матриця вигляду $A=\begin{pmatrix}a&b\\\frac{4}{3}b&a+b\end{pmatrix}$.

Відповідь: $A=\begin{pmatrix}a&b\\\frac{4}{3}b&a+b\end{pmatrix}$, a,b – довільні числа.

Дз: №335 б,в

Контрольні питання

1. Які операції можна здійснювати з матрицями?
2. Як визначається розмірність добутку матриць?
3. У чому полягає дистрибутивна властивість операцій додавання і множення матриць?
4. Яка матриця називається одиничною?
5. Яку матрицю називають переставною із заданою?
6. Чи комутативна операція множення матриць? Чому?
7. Що означає транспонування матриці?
8. Що означає рівність двох матриць?
9. Наведіть приклади двох матриць, результати множення яких у будь-якому порядку такі самі.
10. Яким буде результат чотирикратного транспонування матриці А?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2. Визначники. Обернена матриця. Розв’язання матричних рівнянь

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок обчислення визначників матриць, побудови оберненої матриці, розв’язування матричних рівнянь та їх систем.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися знаходити визначники 2-го, 3-го і вищих порядків, обернену матрицю, якщо існує; розв’язувати системи матричних рівнянь

Короткі теоретичні відомості і розв’язання типових прикладів

Визначник (детермінант)

Визначник – число, за певним правилом визначене для квадратної матриці.

Визначення визначника рекурентне (визначник матриці n на n визначається через визначники матриць (n-1) на (n-1)).

Визначник матриці А позначається $|A|$, або $\det A$.

Нехай задана квадратна матриця А розмірності $n \times n$.

Тоді **мінор** M_{ij} – визначник матриці, яку отримано викреслюванням і-ї строки та j-го стовпця

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{a_{n1} \quad \cdots \quad a_{n,j-1}}_{} & & & \underbrace{a_{n,j+1} \quad \cdots \quad a_{nn}}_{\text{n-1 x n-1}} \end{vmatrix}$$

Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} матриці А називається мінор, помножений на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = M_{ij} \cdot (-1)^{i+j}.$$

Рекурентне визначення визначника можна надати:

– за рядком:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}A_{i\alpha}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in},$$

(таке визначення не залежить від того, який саме за номером рядок обрано); або

– за стовпцем:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha j}A_{\alpha j}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...+a_{nj}A_{nj}.$$

Таке визначення не залежить від того, який саме стовпчик за номером обрано.

Визначник матриці 1×1 (яка є числом) – це те ж саме число: $|a_{11}|=a_{11}$ (тут $|a_{11}|$ – визначник відповідної матриці, а не модуль числа a_{11}).

Визначник матриці 2×2 обчислюється за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}=$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\underbrace{\begin{vmatrix} & \\ & a_{22} \end{vmatrix}}_{=a_{22}}+a_{12}(-1)^{1+2}\underbrace{\begin{vmatrix} & \\ a_{21} & \end{vmatrix}}_{a_{21}}\Rightarrow\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Визначник матриці 3×3 розкладається у такий спосіб:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$$

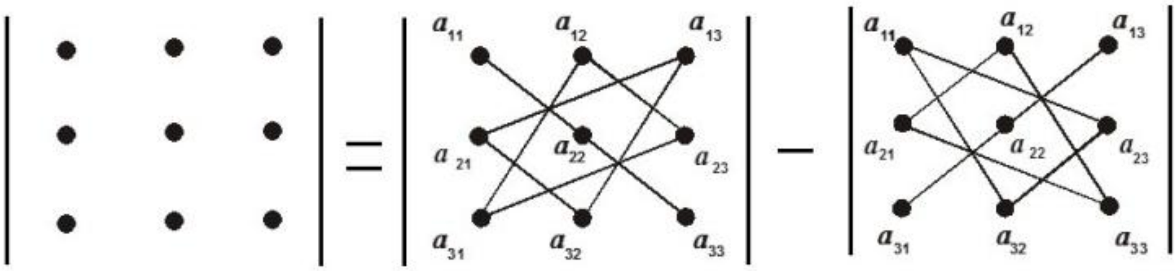
$$= a_{11}\left(-1\right)^{1+1} M_{11} + a_{21}\left(-1\right)^{2+1} M_{21} + a_{31}\left(-1\right)^{3+1} M_{31} =$$

$$= a_{11}\left(-1\right)^{1+1} \underbrace{\begin{vmatrix} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}} + a_{21}\left(-1\right)^{2+1} \underbrace{\begin{vmatrix} & a_{12} & a_{13} \\ & & \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{=a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}} + a_{31}\left(-1\right)^{3+1} \underbrace{\begin{vmatrix} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & \end{vmatrix}}_{=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}} =$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}\right) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Для визначника матриці 3×3 існує штучний «трюк» для його запам'ятовування, який називається **правилом трикутників**:



Деякі властивості визначників

1. Якщо змінити місцями 2 сусідні строки (2 сусідніх стовпця) – зміниться знак на протилежний

$$2.\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Аналогічна властивість є і для стовпця.

3. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & ka_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & ka_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & ka_{n-1,i} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_n & \dots & ka_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_n & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Аналогічна властивість є і для рядка.

4. Якщо є хоча б два пропорційних один одному стовпця (два пропорційні один одному рядки), то визначник дорівнює 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & k \cdot a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & k \cdot a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & k \cdot a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

5. Якщо у визначнику є повністю нульовий рядок (повністю нульовий стовпець), то визначник дорівнює 0.

Приклад 1. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-5) \cdot 4 = 32$

Приклад 2. $\begin{vmatrix} 35436 & 46343 & 22429 \\ 17718 & 23171 & 11214 \\ 5906 & 7723 & 3737 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 5906 \cdot 6 & 46343 & 22429 \\ 5906 \cdot 3 & 23171 & 11214 \\ 5906 \cdot 1 & 7723 & 3737 \end{vmatrix} = 5906 \begin{vmatrix} 6 & 7723 \cdot 6 + 5 & 22429 \\ 3 & 7723 \cdot 3 + 2 & 11214 \\ 1 & 7723 \cdot 1 + 0 & 3737 \end{vmatrix} =$$

$$= 5906 \underbrace{\begin{vmatrix} 6 & 7723 \cdot 6 & 22429 \\ 3 & 7723 \cdot 3 & 11214 \\ 1 & 7723 \cdot 1 & 3737 \end{vmatrix}}_{=0} + 5906 \begin{vmatrix} 6 & 5 & 22429 \\ 3 & 2 & 11214 \\ 1 & 0 & 3737 \end{vmatrix} = 5906 \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3737 \cdot 6 + 7 \\ 3 & 2 & 3737 \cdot 3 + 3 \\ 1 & 0 & 3737 \cdot 1 + 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5906 \underbrace{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 3737 \cdot 6 \\ 3 & 2 & 3737 \cdot 3 \\ 1 & 0 & 3737 \cdot 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 5906 \begin{vmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5906 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5906 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2) = \boxed{5906}$$

Приклад 3. $\begin{vmatrix} \sqrt{10} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{30} & \sqrt{21} & 2\sqrt{15} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{50} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{5} & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{10} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{10} & \sqrt{3}\sqrt{7} & 2\sqrt{3}\sqrt{5} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{10} & 2\sqrt{5}\sqrt{3} & \sqrt{5}\sqrt{5} & \sqrt{2}\sqrt{3} \\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{10} & 2\sqrt{2}\sqrt{3} & \sqrt{2}\sqrt{5} & \sqrt{5}\sqrt{3} \end{vmatrix} = \{\text{Властивість3}\} =$$

$$= \sqrt{10}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & 2\sqrt{3} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 3\sqrt{50} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & 2\sqrt{3} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}}_{=J}$$

$$J = \{\text{ПершаСтрока}\} = 1\cdot(-1)^{1+1} \underbrace{\begin{vmatrix} \sqrt{7} & 2\sqrt{3} & -2 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}}_{=J_1} + 1\cdot(-1)^{1+2} \underbrace{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -2 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}}_{=J_2} +$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3} \underbrace{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{7} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}}_{=J_3} + 1\cdot(-1)^{1+4} \underbrace{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{7} & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix}}_{=J_4}$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \sqrt{7} & 2\sqrt{3} & -2 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 5\sqrt{7} - \cancel{4\sqrt{10}} + 8\sqrt{3} + \cancel{4\sqrt{10}} - 2\sqrt{7} - 20\sqrt{3} = 3\sqrt{7} - 12\sqrt{3}$$

$$J_2=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -2\\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{3}+\sqrt{3} & -2\\ \sqrt{5} & \sqrt{5}+0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+0 & \sqrt{5}\end{vmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{vmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{3} & -2\\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5}\end{vmatrix}}_{=0}+\begin{vmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{3} & -2\\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{5}\end{vmatrix}=-\sqrt{3}\begin{vmatrix}\sqrt{5} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{5}\end{vmatrix}=-3\sqrt{3}$$

$$J_3=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{7} & -2\\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{5}\end{vmatrix}=$$

$$=\sqrt{3}2\sqrt{5}\sqrt{5}+\sqrt{7}\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}2\sqrt{5}(-2)-\sqrt{2}2\sqrt{5}(-2)-\sqrt{3}2\sqrt{2}\sqrt{2}-\sqrt{5}\sqrt{7}\sqrt{5}=$$

$$=10\sqrt{3}+2\sqrt{7}-4\sqrt{10}+4\sqrt{10}-4\sqrt{3}-5\sqrt{7}=6\sqrt{3}-3\sqrt{7}$$

$$J_4=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{7} & 2\sqrt{3}\\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5}\\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{5}\sqrt{2}\begin{vmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{7} & 2\sqrt{3}\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$J=J_1-J_2+J_3-J_4=3\sqrt{7}-12\sqrt{3}-\left(-3\sqrt{3}\right)+6\sqrt{3}-3\sqrt{7}-0=-3\sqrt{3}$$

Відповідь $=-3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{50}=-9\cdot\sqrt{3}\sqrt{50}=-9\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{2}=\boxed{-45\sqrt{6}}$.

Приклад 4. Розв`язати рівняння: $\begin{vmatrix}3 & x & -4\\ 2 & -1 & 3\\ x+10 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix}3 & x & -4\\ 2 & -1 & 3\\ x+10 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3+3x(x+10)-8-4(x+10)-9-2x=$$

$$=-3+3x^2+30x-8-4x-40-9-2x=3x^2+24x-60;$$

$$3x^2+24x-60=0\Rightarrow x^2+8x-20=0\Rightarrow\boxed{x_1=2;x_2=-10}.$$

Розв`язати рівняння: $\begin{vmatrix} x^3 & -2 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3-x^2} & x^2+3x+2 \\ 3x^2-x & \\ -\underline{3x^2-3x} & \\ 2x-2 & \\ -\underline{2x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} x^3 & -2 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow x^3+2x^2 = x+2 \Rightarrow x^3+2x^2-x-2=0$$

$$\left(x^2+3x+2\right)(x-1) = (x+2)(x+1)(x-1) = 0.$$

Три корені: –2, –1, 1.

Приклад 5. Розв’язати нерівність $\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -7 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} \Rightarrow x^2+7-6x > -1 \Leftrightarrow x^2-6x+8>0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2)>0;$$

$x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

Розв’язати нерівність $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0.$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow -3+3x(x+10)-2x-x(x+10)-9-2x<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+16x-12<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x-6<0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{-8+\sqrt{88}}{2}\right)\left(x-\frac{-8-\sqrt{88}}{2}\right)<0; x \in \left(-\sqrt{22}-4; \sqrt{22}-4\right)$$

ДЗ: 349б,в; 350в–е; 351б,г–є; 352; 353б–е; 354 б,в; 357а–д; 355; 356.
В 355 в умові: не «цілі значення елементів визначника», а цілі значення x!
356 – написати програму, реалізувати повний перебір.

Обернена матриця і її використання

Визначення. Квадратна матриця $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$, на головній діагоналі 1, всі інші елементи 0, називається **одиничною матрицею**.

Властивість одиничної матриці: $E\cdot A=A\cdot E=A$.

Нехай є квадратна матриця $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

Якщо $\det A=0$, то її називають **виродженою**, інакше – невиродженою. Для будь-якої **<u>невиродженої</u>** матриці існує обернена.

Визначення. Матриця A^{-1} називається оберненою для матриці *A*, якщо: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, E – одинична матриця.

Властивість оберненої матриці: $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$, $\left(A\cdot B\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Можна показати, що $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^T$, A_{ij} – алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij}.

Приклад 1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $A^{-1}-?$.

$\det A=5-4=1$, $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} & \\ & 5\end{vmatrix}=5$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} & \\ 2 & \end{vmatrix}=-2$,

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} & 2\\ & \end{vmatrix}=-2$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & \\ & \end{vmatrix}=1$, $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}^T=\boxed{\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}}$.

Приклад 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, $A^{-1}-?$

Оскільки $\det A=1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot3-7\cdot5\cdot3-6\cdot8\cdot1-2\cdot4\cdot9=0$, оберненої матриці не існує.

Приклад 3. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&8&9\end{pmatrix}$, $A^{-1}-?$

$\det A=15$, тож обернена існує.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}=45-48=-3,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&6\\2&9\end{vmatrix}=-(36-12)=-24,$$

аналогічно $A_{13}=22$, $A_{21}=6$, $A_{22}=3$, $A_{23}=-4$, $A_{31}=-3$, $A_{32}=6$, $A_{33}=-3$.

$$A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3&-24&22\\6&3&-4\\-3&6&-3\end{pmatrix}^T=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3&6&-3\\-24&3&6\\22&-4&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{15}&\frac{6}{15}&-\frac{3}{15}\\-\frac{24}{15}&\frac{3}{15}&\frac{6}{15}\\\frac{22}{15}&-\frac{4}{15}&-\frac{3}{15}\end{pmatrix}}.$$

Приклад 4. $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&3&-5\\2&-2&1\end{pmatrix}$, $(AB)^{-1}-?$

За властивістю обернених матриць

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&3&-5\\2&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot2+1\cdot0+(-1)\cdot0&0\cdot0+1\cdot3+(-1)\cdot0&0\cdot0+1\cdot0+(-1)\cdot(-4)\\2\cdot2+3\cdot0+(-5)\cdot0&2\cdot0+3\cdot3+(-5)\cdot0&2\cdot0+3\cdot0+(-5)\cdot(-4)\\2\cdot2+(-2)\cdot0+1\cdot0&2\cdot0+(-2)\cdot3+1\cdot0&2\cdot0+(-2)\cdot0+1\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&4\\4&9&20\\4&-6&-4\end{pmatrix}$$

Приклад 5. Розв'язати матричне рівняння: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}$, $X-?$.

Не існує операції ділення матриці на матрицю, ***але існує операція множення матриці на обернену до неї***. *Але при цьому не можна забувати, що не можна змінювати порядок матриць в добутку*!

Якщо множити на якусь матрицю обидві частини матричної рівності, то обидві одночасно множаться або справа, або зліва. Але так не можна, щоб ліву частину помножити справа, а праву – зліва (або навпаки)!

Помножимо на обернену матрицю обидві частини матричного рівняння, але так, щоб і справа, і зліва матриця $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ стояла ліворуч:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{=E} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix},$$

$$E \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \det A = -2; A_{11} = 4; A_{12} = -3; A_{21} = -2; A_{22} = 1;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -0,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0,5 \cdot 4 & -0,5 \cdot (-2) \\ -0,5 \cdot (-3) & -0,5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 5 & (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 9 \\ 1,5 \cdot 3 + (-0,5) \cdot 5 & 1,5 \cdot 5 + (-0,5) \cdot 9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Примітка: якби $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ не існувала, то тоді прийшлось би робити так:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 3x_{11} + 4x_{21} & 3x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 3 \\ x_{12} + 2x_{22} = 5 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 5 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 9 \end{cases}$$ – розв’язувати систему 4×4.

Так можна робити і коли $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ існує, але такий підхід дещо більш громіздкий.

Приклад 6. Розв’язати матричне рівняння: $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, $X - ?$.

$$X\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\9&5\end{pmatrix}\Rightarrow X\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5&3\\9&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}5&3\\9&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}-5,5&3,5\\-10,5&6,5\end{pmatrix}}$$

Приклад 7. Розв'язати матричне рівняння: $\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}6&8\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\-2&0\end{pmatrix}$, $X-?$.

$$\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}6&8\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\-2&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}6&8\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&8\\2&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5&4\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&8\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}5&4\\-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&8\\2&2\end{pmatrix}^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}-3,5&16\\4,5&-20\end{pmatrix}}$$

ДЗ: 358б–д,є; 360; 361б, 362; 364в, г–ї

Приклад 8. Розв'язати систему матричних рівнянь

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}2&8\\0&5\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}4&9\\-1&-4\end{pmatrix}.\end{cases}$$

З другого рівняння виражаємо X через Y і підставляємо в перше:

$$\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}4&9\\-1&-4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&9\\-1&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}Y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}}_{=E}X=\underbrace{\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&9\\-1&-4\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}1,5&2,5\\0,5&-1,5\end{pmatrix}}-\underbrace{\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0,5&0\\-0,5&-1\end{pmatrix}}Y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1,5&2,5\\0,5&-1,5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,5&0\\-0,5&-1\end{pmatrix}\cdot Y$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}2&8\\0&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1{,}5&2{,}5\\0{,}5&-1{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}5&0\\-0{,}5&-1\end{pmatrix}Y\right)+\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}2&8\\0&5\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1{,}5&2{,}5\\0{,}5&-1{,}5\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}3{,}5&3{,}5\\2&1\end{pmatrix}}-\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}5&0\\-0{,}5&-1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0{,}5&-1\\0&-1\end{pmatrix}}Y+\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}2&8\\0&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3{,}5&3{,}5\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}5&-1\\0&-1\end{pmatrix}Y+\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}2&8\\0&5\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}5&-1\\0&-1\end{pmatrix}\right)}_{=\begin{pmatrix}2{,}5&2\\2&2\end{pmatrix}}Y=\underbrace{\begin{pmatrix}2&8\\0&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3{,}5&3{,}5\\2&1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}-1{,}5&4{,}5\\-2&4\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}2{,}5&2\\2&2\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}-1{,}5&4{,}5\\-2&4\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}2{,}5&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1{,}5&4{,}5\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1{,}5&2{,}5\\0{,}5&-1{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}5&0\\-0{,}5&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$$

Відповідь: $Y=\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}.$

ДЗ: 365 б

Контрольні питання

1. Чи для будь-якої матриці можна побудувати обернену?
2. Що таке визначник матриці? Для якої матриці він визначається?
3. Що таке мінор матриці?
4. Наведіть рекурентне означення визначника матриці?
5. Чому дорівнює визначник матриці 1×1?
6. Як обчислюється визначник матриці 2×2?
7. Наведіть алгоритм побудови оберненої матриці?
8. Які є способи розв’язання матричних рівнянь?
9. Наведіть приклад розв’язання матричного рівняння.
10. Як виражається матриця, обернена до добутку двох матриць AB, через обернені матриці кожної з них, тобто A^{-1} та B^{-1}?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3. Мінор k-го порядку. Ранг матриці

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок обчислення рангу матриці.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися застосовувати різні способи обчислення рангу матриці

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

Мінор k-го порядку – визначник, що утворений елементами, які стоять на перетині якихось фіксованих k строк та k стовпців матриці.

Нехай є матриця $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ -4 & -2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Приклади мінорів 2го порядку:

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ -4 & -2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ -4 & -2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

Приклади мінорів 3го порядку:

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ -4 & -2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ -4 & -2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

Мінори 4го порядку (їх всього 5 штук):

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ -3 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 6 & 7 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 6 & 8 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 7 & 8 \\ -4 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 2 \\ -3 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 7 & 8 \\ -4 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 4 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Базисний мінор – мінор k-го порядку, який сам ненульовий, а всі мінори (k+1)-го порядку і вище є нульовими.

Ранг матриці (ранг матриці A позначають через $\mathrm{rg}A$) – порядок базисного мінору. Іншими словами, рангом матриці називається найвищий порядок її мінора, що не дорівнює нулю.

Приклад 1. $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ – знайти ранг матриці.

Мінори найбільшого порядку в цій матриці – мінори 3 на 3. Всього таких мінорів 4:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо б хоч один з них був ненульовим, ранг був би = 3. Але ранг менше трьох.

$\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, знайшовся мінор 2×2, який ненульовий, а всі мінори 3×3 нульові.

$\boxed{\text{Відповідь: ранг = 2}}$.

Метод обвідних мінорів полягає в тому, що обчислюють поступово мінори, переходячи від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків. Якщо при цьому знайдено відмінний від нуля мінор порядку k, то потребують обчислення тільки мінори порядку $(k+1)$ – обвідні. У випадку, коли всі обвідні мінори $(k+1)$ порядку дорівнюють нулю, ранг матриці дорівнює k.

Це – громіздка робота для матриць, порядок яких досить великий.

Якщо важко робити повний перебір… можна той же ранг тієї самої матриці знайти **методом еквівалентних перетворень** (перетворення, які не змінюють ранг). Серед них, зокрема:

1. До строки можна додавати числа, пропорційні елементам іншої строки
2. Строки можна змінювати місцями
3. Строку зі всіма нульовими елементами можна викреслити з матриці.

Таке саме вірно і для стовпців.
Еквівалентними перетвореннями треба матриці звести до ступінчатого вигляду:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & k \end{pmatrix}.$$

Ранг = кількість ненульових строк в ступінчатому вигляді.

Приклад 2. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ методом еквівалентних перетворень.

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3+\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot 8 & 2+\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot 7 & 1+\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot 4 & 4+\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot 5 \\ 2+\left(-\frac{2}{8}\right)\cdot 8 & 3+\left(-\frac{2}{8}\right)\cdot 7 & 2+\left(-\frac{2}{8}\right)\cdot 4 & -3+\left(-\frac{2}{8}\right)\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{17}{8} \\ 0 & \frac{5}{4} & 1 & -\frac{17}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{17}{8} \\ 0+2\cdot 0 & \frac{5}{4}+2\cdot\left(-\frac{5}{8}\right) & 1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & -\frac{17}{4}+2\cdot\frac{17}{8} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{17}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{17}{8} \end{pmatrix}.$$

Ранг = кількість ненульових строк в ступінчатому вигляді. Їх дві, тож ранг=2.

Приклад 3. Нехай $A=\begin{pmatrix}1&3&1&-2\\2&6&-3&-4\\a&b&6&-2\end{pmatrix}$, в залежності від a,b визначити ранг матриці.

$\begin{vmatrix}1&3\\2&6\end{vmatrix}=0;\begin{vmatrix}1&1\\2&-3\end{vmatrix}=-5$. Висновок – ранг хоча б 2.

Всі мінори 3го порядку:

$$\begin{vmatrix}3&1&-2\\6&-3&-4\\b&6&-2\end{vmatrix}=30-10b;\begin{vmatrix}1&1&-2\\2&-3&-4\\a&6&-2\end{vmatrix}=10-10a;$$

$$\begin{vmatrix}1&3&-2\\2&6&-4\\a&b&-2\end{vmatrix}=0;\begin{vmatrix}1&3&1\\2&6&-3\\a&b&6\end{vmatrix}=5b-15a;$$

Якщо $\begin{cases}30-10b=0\\10-10a=0\\0=0\\5b-15a=0\end{cases}$, то ранг=2. Інакше ранг = 3.

$$\begin{cases}b=3\\a=1\\0=0\\\textit{Тотожність}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=3\\a=1\end{cases}.$$

Відповідь: при $\begin{cases}b=3\\a=1\end{cases}$ ранг = 2, інакше ранг = 3.

Приклад 4. $A=\begin{pmatrix}2&2&a&b&-1\\-1&0&3&-5&1\\2&1&-1&0&-2\\1&1&-3&4&-2\end{pmatrix}$, в залежності від a,b визначити ранг матриці.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$ – ранг хоча б 3.

Перебрали всі мінори 4го порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & a & b & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -4a - 2b - 2; \begin{vmatrix} 2 & a & b & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 10a + 5b + 5;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & b & -1 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = b + 19; \begin{vmatrix} 2 & 2 & a & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = a - 9;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & a & b \\ -1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -9a - 5b - 14;$$

Якщо $\begin{cases} -4a - 2b - 2 = 0 \\ 10a + 5b + 5 = 0 \\ b + 19 = 0 \\ a - 9 = 0 \\ -9a - 5b - 14 = 0 \end{cases}$, то ранг=3 інакше 4.

$$\begin{cases} \textit{Тотожність} \\ \textit{Тотожність} \\ b = -19 \\ a = 9 \\ \textit{Тотожність} \end{cases}.$$

Відповідь: при $\begin{cases} b = -19 \\ a = 9 \end{cases}$ ранг = 3, інакше 4.

Приклад 5. $A=\begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{pmatrix}$, в залежності від a,b визначити ранг матриці.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$ – ранг хоча б 2.

$$\begin{vmatrix} b & 2 & 1 \\ 2b-1 & 3 & 1 \\ b & b+3 & 2b-1 \end{vmatrix} = -b^2+6b-5 = -(b-1)(b-5);$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 3 & 1 \\ a & b+3 & 2b-1 \end{vmatrix} = -2a+2ab = 2a(b-1);$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & 2b-1 & 1 \\ a & b & 2b-1 \end{vmatrix} = 2ab^2-4ab+2a = 2a\left(b^2-2b+1\right) = 2a(b-1)^2;$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{vmatrix} = ab^2-a = a\left(b^2-1\right) = a(b-1)(b+1);$$

Якщо $\begin{cases} -(b-1)(b-5)=0 \\ 2a(b-1)=0 \\ 2a(b-1)^2=0 \\ a(b-1)(b+1)=0 \end{cases}$, то ранг=2, інакше ранг=3.

1) b=1 – тоді всі 4 рівняння тотожності; 2) $b \neq 1$ $\begin{cases} -(b-5)=0 \\ 2a=0 \\ 2a=0 \\ a(b+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ a=0 \\ \textit{Тотожність} \\ \textit{Тотожність} \end{cases}$.

Відповідь: при b=1 або при $\begin{cases} b=5 \\ a=0 \end{cases}$ ранг=2, інакше ранг=3.

Приклад 6. $A=\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}$, знайти ранг матриці.

Єдиний мінор 4го порядку $\begin{vmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{vmatrix}=0$.

$$\begin{vmatrix}25 & 31 & 17\\ 75 & 94 & 53\\ 75 & 94 & 54\end{vmatrix}=25\neq 0,\ \boxed{\text{ранг}=3.}$$

Інший спосіб:

$$\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75+25\cdot(-3) & 94+31\cdot(-3) & 53+17\cdot(-3) & 132+43\cdot(-3)\\ 75+25\cdot(-3) & 94+31\cdot(-3) & 54+17\cdot(-3) & 134+43\cdot(-3)\\ 25+25\cdot(-1) & 32+31\cdot(-1) & 20+17\cdot(-1) & 48+43\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1-1 & 3-2 & 5-3\\ 0 & 1-1 & 3-2 & 5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1-1 & 2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$, тож ранг = 3.

Відповідь: ранг = 3.

ДЗ: 366 б-д; 368; 370 б,в

Контрольні питання

1. Сформулюйте означення мінора k-го порядку матриці.
2. Як пов’язаний мінор і алгебраїчне доповнення до елемента матриці?
3. Що таке ранг матриці A?
4. Які є способи обчислення мінора матриці?

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ № 4. Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок розв’язання СЛАР – однорідних і неоднорідних.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають ознайомитися з загальними поняттями, пов’язані з системами лінійних алгебраїчних рівнянь; методами розв’язання систем лінійних рівнянь з однаковою кількістю рівнянь та невідомих. Вміти розв’язувати системи загального виду.

Короткі теоретичні відомості і розв’язання типових прикладів

1. Системи рівнянь, що мають один розв’язок, та однакову кількість рівнянь та змінних.

1.1) Матричний метод розв`язання систем лінійних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$ матричним методом (або за допомогою оберненої матриці).

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = 1$. *Примітка: важливо, щоб обернена матриця існувала, тож у системи n на n, записаної в матричному вигляді* $A \cdot X = B$ *існує єдиний розв’язок, коли* $\det A \neq 0$.

ДЗ: 366 б-д; 368; 370 б,в; 372 а,в,г

1.2) Формули Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$\Delta = \det A$.

Формули Крамера: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Приклад 2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{13} = -1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{26}{13} = 2, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{39}{13} = 3,$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

ДЗ: 371в,г.

3) Метод Гауса

Приклад 3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

Спочатку треба «видалити» змінну x_1 з всіх рівнянь крім першого. Перше рівняння множимо на відвідні коефіцієнти і додаємо до інших так, щоб змінна x_1 скоротилась в усіх рівняннях крім першого:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1{,}5(2x_1 + x_2 - 2x_3) = 4 - 1{,}5 \cdot 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - (2x_1 + x_2 - 2x_3) = 1 - 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3=5\\ \left.\begin{aligned}&-3{,}5x_2+6x_3=-3{,}5\\ &-4x_2+7x_3=-4\end{aligned}\right)\text{ система } 2\times 2\end{cases}$$

Відповідно, те що залишилось – це система 2×2, а не 3×3. Далі друге рівняння множимо на певний коефіцієнт і додаємо до третього, щоб скоротилась змінна x_2:

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3=5\\ -3{,}5x_2+6x_3=-3{,}5\\ -4x_2+7x_3-\dfrac{4}{3{,}5}\left(-3{,}5x_2+6x_3\right)=-4-\dfrac{4}{3{,}5}\cdot\left(-3{,}5\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3=5\\ -3{,}5x_2+6x_3=-3{,}5\\ \left.\dfrac{1}{7}x_3=0\right)\text{ система } 1\times 1\end{cases}$$

А далі система «розкручується» знизу вгору: $x_3=0$ – знайшли з останнього рівняння, підставили в передостаннє: $-3{,}5x_2+6\cdot 0=-3{,}5\Rightarrow x_2=1$; знайдені x_3, x_2 підставляємо в перше рівняння і знаходимо x_1: $2x_1+1-2\cdot 0=5\Rightarrow x_1=2$.

Відповідь: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$.

В загальному випадку системи n × n:

1) перше рівняння множимо на відвідні коефіцієнти і додаємо до інших так, щоб змінна x_1 скоротилась в усіх рівняннях крім першого; рівняння №2 - №n – система n–1 на n–1 а не n на n.

2) друге рівняння множимо на відвідні коефіцієнти і додаємо до рівнянь №3 - №n

так, щоб змінна x_2 скоротилась в усіх цих рівняннях; рівняння №3 - №n – система n–2 на n–2 а не n–1 на n–1.

І так далі допоки не залишиться 1 рівняння на 1 змінну x_n, а далі система «розкручується знизу вгору».

ДЗ: 373б,г.

2. Системи рівнянь в загальному випадку

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Кількість рівнянь і кількість змінних може бути різна.

Коефіцієнти системи утворюють матрицю A, яку називають ***основною*** матрицею системи. Якщо до матриці A дописати стовпець вільних членів, здобудемо ***розширену*** матрицю $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема (Кронекера-Капеллі або необхідна і достатня умова сумісності системи). Для того, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, аби ранг основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці. Тобто $RgA = Rg\tilde{A}$.

Система, для якої виконується теорема Кронекера-Капеллі, залежно від величини рангу матриці може бути визначеною або невизначеною.

Коли $RgA = n$, де n – число невідомих системи, тоді система **визначена**, коли ж $RgA < n$, – система **невизначена.**

Якщо $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} \Rightarrow$ **розв’язки є.**

Якщо $\operatorname{rg} A < \operatorname{rg} \tilde{A} \Rightarrow$ **розв’язків немає.**

Приклад 4. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = -2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}.$

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 2 < \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 3$, розв’язків немає.

Приклад 5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}.$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} = 2 = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ – розв’язки є.}$$

Ранг = 2 – це кількість залежних змінних, всі інші – незалежні (незалежних 3 змінні).

У відповідь увійдуть три змінних, які є довільними числами та дві, які через ці три виражаються.

Щоб отримати розв’язок, треба розташувати рівняння та змінні так, щоб лівий верхній кутовий мінор був базисним (ненульовим).

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ – значить треба переставити місцями або рівняння, або змінні.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - x_2 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 + 5x_3 - 2x_2 + x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_2 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}. \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$ – лівий верхній кутовий мінор тепер базисний.

Змінні, коефіцієнти при яких утворюють цей мінор – **залежні**, інші – незалежні. А отже, мінні x_1, x_3 – залежні, x_2, x_4, x_5 – довільні константи (незалежні змінні).

$x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, $x_5 = C_3$; а x_1 та x_3 від них залежать.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - C_1 - 2C_2 + 4C_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_3 - 2C_1 + C_2 + 7C_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - C_1 + 8C_2 + 2C_3 = -1 \end{cases},$$ ранг = 2, тобто лінійно-незалежних рівнянь 2, значить третє є лінійно-залежним, тобто третє рівняння – лінійна комбінація перших двох, тобто не несе «нової» інформації в систему.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - C_1 - 2C_2 + 4C_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_3 - 2C_1 + C_2 + 7C_3 = 1 \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1 + C_1 + 2C_2 - 4C_3 \\ 4x_1 + 5x_3 = 1 + 2C_1 - C_2 - 7C_3 \end{cases}$$ – а те, що залишилось, це система 2×2, розв’язок якої існує і єдиний, бо $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. Це і пояснює той факт, чому треба «зібрати» лівий верхній кутовий мінор базисним.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 + C_1 + 2C_2 - 4C_3 \\ 1 + 2C_1 - C_2 - 7C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C_1}{2} - \frac{13C_2}{2} - \frac{C_3}{2} - 1 \\ 5C_2 - C_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язок системи:

$x_1 = \frac{C_1}{2} - \frac{13C_2}{2} - \frac{C_3}{2} - 1,$
$x_2 = C_1 \in \mathbb{R},$
$x_3 = 5C_2 - C_3 + 1,$
$x_4 = C_2 \in \mathbb{R},$
$x_5 = C_3 \in \mathbb{R}.$

ДЗ: 374 б–д, є

Приклад 6.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = \lambda \end{cases}$$. В залежності від λ знайти розв'язки системи.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 5 & -3 \end{pmatrix} = 2,\ \mathrm{rg}\tilde{A} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 5 & -3 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Перше питання, на яке треба відповісти – знайти $\mathrm{rg}\tilde{A}$ в залежності від λ. Повний перебір всіх мінорів 4на4 показує, що всі вони тотожні нулі, а далі не вдається знайти числового мінору 3на3, який не 0, тож в цьому конкретному випадку найпростіше зробити еквівалентні перетворення:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 5 & -3 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -3 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -3 & \lambda \\ 1-1 & -1+5 & 1-5 & -1+3 & 0-\lambda \\ 1-1 & 3+5 & -3-5 & 1+3 & 2-\lambda \\ 3-3\cdot 1 & 1+3\cdot 5 & -1-3\cdot 5 & -1+3\cdot 3 & 2-3\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -3 & \lambda \\ 0 & 4 & -4 & 2 & -\lambda \\ 0 & 8 & -8 & 4 & 2-\lambda \\ 0 & 16 & -16 & 8 & 2-3\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -3 & \lambda \\ 0 & 4 & -4 & 2 & -\lambda \\ 0-2\cdot 0 & 8-2\cdot 4 & -8-2\cdot(-4) & 4-2\cdot 2 & 2-\lambda-2\cdot(-\lambda) \\ 0-2\cdot 4 & 16-4\cdot 4 & -16-4\cdot(-4) & 8-4\cdot 2 & 2-3\lambda-4\cdot(-\lambda) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -3 & \lambda \\ 0 & 4 & -4 & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\lambda \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -3 & \lambda \\ 0 & 4 & -4 & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\lambda \\ 0-0 & 0-0 & 0-0 & 0-0 & 2+\lambda-(2+\lambda) \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -3 & \lambda \\ 0 & 4 & -4 & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\lambda \end{pmatrix}.$$

При $\lambda=-2$ $\mathrm{rg}\tilde{A}=2$, при $\lambda\neq-2$ $\mathrm{rg}\tilde{A}=3$.

При $\lambda\neq-2$ розв'язків немає.

При $\lambda=-2$

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+3x_2-3x_3+x_4=2 \\ x_1-5x_2+5x_3-3x_4=-2 \end{cases}$$ – це суто числова система, що не містить параметра λ.

Ранг=2, 2 залежні змінні, 2 незалежні.

Лівий верхній кутовий мінор: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$. Значить x_1, x_2 – залежні змінні; x_3, x_4 – незалежні (довільні константи). $x_3=C_1$, $x_4=C_2$.

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-C_1-C_2=2 \\ x_1-x_2+C_1-C_2=0 \\ \text{ЛінійноЗалежнаСтрока} \\ \text{ЛінійноЗалежнаСтрока} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3x_1+x_2=2+C_1+C_2 \\ x_1-x_2=C_2-C_1 \\ \text{ЛінійноЗалежнаСтрока} \\ \text{ЛінійноЗалежнаСтрока} \end{cases}$$

При $\lambda=-2$ $x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{C_2}{2}$, $x_2=\dfrac{1}{2}+C_1-\dfrac{C_2}{2}$, $x_3=C_1$, $x_4=C_2$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2+C_1+C_2 \\ C_2-C_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}+\dfrac{C_2}{2} \\ \dfrac{1}{2}+C_1-\dfrac{C_2}{2} \end{pmatrix}$$

Відповідь: при $\lambda \neq -2$ розв'язків немає,
при $\lambda = -2$ $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{C_2}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} + C_1 - \frac{C_2}{2}$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$.

Приклад 7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$. В залежності від λ знайти розв'язки системи.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 7 & 8 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0$. $\mathrm{rg} A < 4$.

Розширена матриця $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$. Повним переробом всіх п'яти мінорів 4на4 впевнюємось, що всі вони 0 і $\mathrm{rg}\tilde{A} < 4$.

Лівий нижній кутовий мінор обох матриць: $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & -3 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 \end{vmatrix} = \lambda - 8$.

При $\lambda \neq 8$ ранг обох матриць 3, розв'язки, існують, 3 залежних змінних, 1 незалежна.

<u>Випадок 1. $\lambda \neq 8$.</u>

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}.$$

Лівий верхній кутовий мінор $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$, значить треба змінити або порядок змінних, або порядок строк. В даному випадку краще порядок строк:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases},$$ бо тоді лівим верхнім кутовим мінором буде

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & -3 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 \end{vmatrix} = \lambda - 8 \neq 0$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \\ \text{Лінійно залежне рівняння} \end{cases}$$, x_4 – незалежна змінна: $x_4 = C$,

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 - 6C \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 9 - 8C \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 11 - 10C \\ \text{Лінійно залежне рівняння} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & -3 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7-6C \\ 9-8C \\ 11-10C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-2C \\ 3-2C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & -3 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7-6C \\ 9-8C \\ 11-10C \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{2\cdot(8\cdot C - 9)}{\lambda - 8} - \frac{6\cdot C - 7}{\lambda - 8} - \frac{10\cdot C - 11}{\lambda - 8} \\ \frac{(5\cdot\lambda - 36)\cdot(8\cdot C - 9)}{\lambda - 8} - \frac{2\cdot(10\cdot C - 11)}{\lambda - 8} - \frac{(7\cdot\lambda - 54)\cdot(6\cdot C - 7)}{\lambda - 8} \\ 3 - 2\cdot C \end{bmatrix}$$

Це перетворюється на $\begin{pmatrix} 0 \\ 4-2C \\ 3-2C \end{pmatrix}$.

Тож при $\lambda \neq 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2C$, $x_3 = 3 - 2C$, $x_4 = C \in \mathbb{R}$.

<u>Випадок 2.</u> $\lambda = 8$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$ – суто числова система.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 7 & 8 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} = 2$$

Лівий верхній кутовий мінор $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$, змінимо змінні місцями:

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_1 = 5 \\ -2x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 4x_1 = 7 \\ -3x_2 + 7x_3 + 8x_4 - 6x_1 = 9 \\ -4x_2 + 9x_3 + 10x_4 - 8x_1 = 11 \end{cases}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.\ x_1 = C_1,\ x_4 = C_2,$$

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 + 4C_2 + 2C_1 = 5 \\ -2x_2 + 5x_3 + 6C_2 + 4C_1 = 7 \\ \text{Лінійно залежне рівняння} \\ \text{Лінійно залежне рівняння} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 5 - 4C_2 - 2C_1 \\ -2x_2 + 5x_3 = 7 - 6C_2 - 4C_1 \\ \text{Лінійно залежне рівняння} \\ \text{Лінійно залежне рівняння} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 - 4C_2 - 2C_1 \\ 7 - 6C_2 - 4C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 - 2C_2 + 4 \\ 3 - 2C_2 \end{pmatrix}$$

При $\lambda = 8$ $x_1 = C_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 = 2C_1 - 2C_2 + 4$, $x_3 = 3 - 2C_2$, $x_4 = C_2 \in \mathbb{R}$.

Відповідь: при $\lambda \neq 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2C$, $x_3 = 3 - 2C$, $x_4 = C \in \mathbb{R}$.
При $\lambda = 8$ $x_1 = C_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 = 2C_1 - 2C_2 + 4$, $x_3 = 3 - 2C_2$, $x_4 = C_2 \in \mathbb{R}$.

ДЗ: 375б,в.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5. Однорідна система лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок побудови фундаментальної системи розв'язків для однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися розв'язувати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

Система лінійних рівнянь називається **однорідною,** якщо вільні члени у кожному рівнянні дорівнюють нулю. У противному разі йдеться мова про **неоднорідну** систему.

У загальному випадку однорідна система m лінійних рівнянь з n невідомими виглядає

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Матриця системи $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Така система завжди має розв'язки (хоча б тривіальний $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$). Нетривіальний розв'язок існує тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{rg}A < n$.

Якщо є однорідна система n на n, то вона має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли детермінант її матриці = 0.

Приклад 1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$ – розв’язок лише тривіальний.

Тому що $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Існує}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$. $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} = 3$ – розв’язок лише тривіальний.

Тому що $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ & & \\ 2 & 9 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$ – базисний мінор,

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ \text{ЛінійноЗалежне} \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Існує}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$.

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 2$. Існують і нетривіальні розв’язки.

Ранг = 2, тож залежних змінних 2, незалежних 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$,

x_1, x_2 – залежні змінні, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, $x_5 = C_3$ – незалежні змінні (довільні числа).

$$\begin{cases} x_1+2x_2+C_1+C_2+C_3=0 \\ x_1-x_2-3C_1-5C_2-C_3=0 \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=-C_1-C_2-C_3 \\ x_1-x_2=3C_1+5C_2+C_3 \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -C_1-C_2-C_3 \\ 3C_1+5C_2+C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}C_1+3C_2+\frac{1}{3}C_3 \\ -\frac{4}{3}C_1-2C_2-\frac{2}{3}C_3 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $x_1=\frac{5}{3}C_1+3C_2+\frac{1}{3}C_3$, $x_2=-\frac{4}{3}C_1-2C_2-\frac{2}{3}C_3$, $x_3=C_1$, $x_4=C_2$, $x_5=C_3$.

Фундаментальна система розв'язків (ФСР) – сукупність лінійно-незалежних розв'язків даної однорідної системи рівнянь (це поняття має сенс лише тоді, коли існують нетривіальні розв'язки). Кількість розв'язків у ФСР дорівнює кількість незалежних змінних (тобто = $n-\mathrm{rg}A$).

Стовпці A_1, A_2, …, A_n називаються лінійно-незалежними, якщо їх лінійна комбінація $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\ldots+\lambda_nA_n$ дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли одночасно $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Якщо ж знайдеться набір чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, серед яких є ненульові та $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\ldots+\lambda_nA_n=0$, то тоді стовпці A_1, A_2, …, A_n називаються лінійно-залежними.

ФСР для попереднього прикладу:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}C_1+3C_2+\frac{1}{3}C_3 \\ -\frac{4}{3}C_1-2C_2-\frac{2}{3}C_3 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ – розвинення довільного розв'язку за ФСР; сама ФСР: $\begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Покажемо, чому ці стовпці лінійно-незалежні:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}5/3\\-4/3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\0\\0\\1\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{3}\lambda_1+3\lambda_2+\frac{1}{3}\lambda_3=0\\-\frac{4}{3}\lambda_1-2\lambda_2-\frac{2}{3}\lambda_3=0\\\lambda_1=0\\\lambda_2=0\\\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

щ.т.д.

Приклад 4. $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\\4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\\3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0\end{cases}$. Розв’язати систему. Знайти ФСР.

$\begin{vmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\\3&8&24&-19\end{vmatrix}=0$ – існують і нетривіальні розв’язки.

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\\3&8&24&-19\end{pmatrix}=2$. Дві змінні залежні, дві – ні. $\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}\neq 0$.

Залежні змінні x_1, x_2; незалежні змінні $x_3=C_1$, $x_4=C_2$.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4C_1-3C_2=0\\3x_1+5x_2+6C_1-4C_2=0\\\text{ЛінійноЗалежнеРівняння}\\\text{ЛінійноЗалежнеРівняння}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=-4C_1+3C_2\\3x_1+5x_2=-6C_1+4C_2\\\text{ЛінійноЗалежнеРівняння}\\\text{ЛінійноЗалежнеРівняння}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-4C_1+3C_2\\-6C_1+4C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8C_1-7C_2\\-6C_1+5C_2\end{pmatrix}$$

Відповідь: $x_1=8C_1-7C_2$, $x_2=-6C_1+5C_2$, $x_3=C_1$, $x_4=C_2$.

Поставимо також питання знайти ФСР:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8C_1 - 7C_2 \\ -6C_1 + 5C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ – розвинення довільного розв'язку за ФСР, сама ФСР: $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; покажемо її лінійну незалежність:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 8\lambda_1 - 7\lambda_2 = 0 \\ -6\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$ щ.т.д.

Приклад 5. $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$. При яких λ існують нетривіальні розв'язки?

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$$

$-\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$ – треба розв'язати таке кубічне рівняння.

Справедлива **теорема**: якщо є многочлен з цілими коефіцієнтами, то якщо існує його раціональний корінь $\lambda = \dfrac{p}{q}$, то p – дільник вільного члена (в даному випадку, числа –2), а q – дільник коефіцієнта при старшому ступені (в даному випадку числа –1).

Дільник може бути як додатний, так і від'ємний.

На роль p «претендують» числа –1, +1, –2, +2.

На роль q «претендують» числа –1, +1.

Треба вгадати один з коренів: $\lambda = \dfrac{+1}{+1} = 1$ – корінь, тому що $-1^3 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$.

Ділимо в стовпчик $-\lambda^3 + 3\lambda - 2$ на $\lambda -$ корінь (тобто на $\lambda - 1$); має поділитись без остачі.

$$
\begin{array}{r|l}
-\lambda^3+3\lambda-2 & \lambda-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{\left(-\lambda^3+\lambda^2\right)} & -\lambda^2-\lambda+2 \\
-\lambda^2+3\lambda-2 & \\
-\underline{\left(-\lambda^2+\lambda\right)} & \\
2\lambda-2 & \\
-\underline{\left(2\lambda-2\right)} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$-\lambda^3+3\lambda-2=(\lambda-1)\underbrace{\left(-\lambda^2-\lambda+2\right)}_{\text{Корені:}-2;1}=0$$

Тож корені рівняння: $\lambda=1,\ \lambda=-2$.

$\boxed{\textbf{Відповідь}:\ \lambda=1,\ \lambda=-2.}$

ДЗ: 376а,в,є; 377б

Контрольні питання

1. Яка система називається однорідною?
2. Що називається фундаментальною системою розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь?
3. Як впливає ранг матриці системи на кількість розв'язків в ФСР?
4. Чи завжди розв'язною є однорідна система рівнянь?
5. Як пов'язаний розв'язок невизначеною неоднорідної системи лінійних рівнянь з ФСР відповідної однорідної СЛР?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6. Розв'язання задач векторної алгебри

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок виконувати дії з векторами, обчислення скалярного і векторного добутку двох векторів, мішаного та подвійного векторного добутку трьох векторів.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися виконання лінійних операцій над векторами. Знаходження проекції вектора на вісь. Знаходження напрямних косинусів вектора. Скалярне множення векторів. Визначення кута між векторами. Знаходження векторного добутку двох векторів, його обчислення в координатній формі. Знаходження мішаного добутку трьох векторів

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

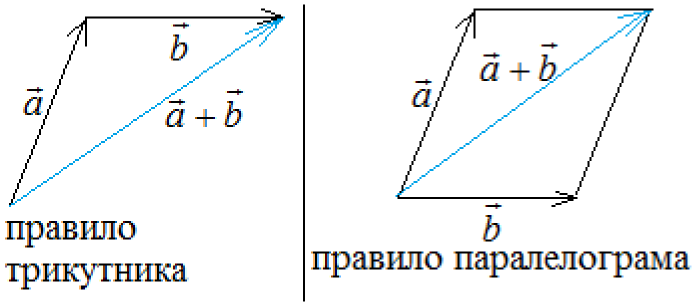
Нехай $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орти осей декартової системи координат (одиничні безрозмірні вектори, спрямовані однаково з осями).

Кожен вектор може бути представлений в термінах координат вектора та ортів осей: $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = (a_x, a_y, a_z)$, a_x, a_y, a_z – координати вектора.

Модуль (довжина) вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Додавання векторів: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ є аналогічним до додавання матриць: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.

Геометрична інтерпретація:



Множення вектора на число: $\alpha\vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$.

Вектор $-\vec{a}$ має однаковий модуль з вектором $\vec{a}$, та спрямований протилежно до вектора $\vec{a}$.

Наслідок: Лінійна комбінація двох векторів визначається формулою:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha a_x + \beta b_x, \alpha a_y + \beta b_y, \alpha a_z + \beta b_z) \text{ або}$$

$$\alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = (\alpha a_x - \beta b_x, \alpha a_y - \beta b_y, \alpha a_z - \beta b_z).$$

Координати вектора = координати кінця – координати початку. Якщо $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z), \quad \overrightarrow{BA} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z).$$

Скалярний добуток двох векторів – це ***число***, яке дорівнює

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha ,$$

де α – кут між векторами (між «стрілочками» векторів).

Коли вектори задані координатами скалярний добуток обчислюється за такою формулою

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Якщо α гострий, то $(\vec{a}, \vec{b}) > 0$, якщо α тупий, то $(\vec{a}, \vec{b}) < 0$, якщо $\alpha = \pi/2$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Властивості скалярного добутку:

1) $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$;

2) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;

3) якщо $(\vec{a},\vec{b})=0$ і жоден з векторів ненульовий, то вони перпендикулярні.

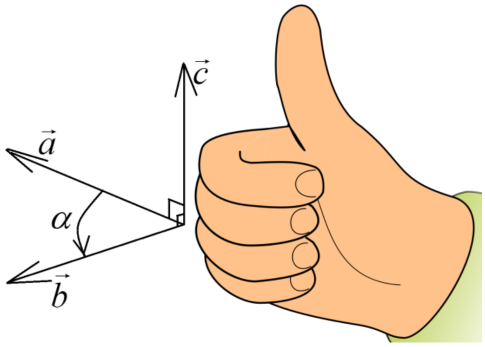
4) $(\alpha\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$;

5) $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$.

Векторний добуток двох векторів – це ***вектор***, який задовольняє такі умови:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$;
2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$ ($\vec{c}$ перпендикулярний до площини в якій знаходяться $\vec{a},\vec{b}$);
3) $\vec{c}$ спрямований за правилом правого гвинта (див. рисунок, ***права*** рука, чотири пальці в напрямку найкоротшого обертання від $\vec{a}$ до $\vec{b}$, великий палець показує напрям вектору $\vec{c}$).

!! Векторний добуток визначений лише в тривимірному просторі. $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$.



Якщо вектори задані координатами, то

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Властивості векторного добутку

1) Модуль векторного добутку $|[\vec{a},\vec{b}]|$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$.
2) Векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю $|[\vec{a},\vec{b}]|=0$ тоді і тільки тоді, коли вони **колінеарні** (розташовані на паралельних прямих, іншими словами, коли кут між ними або 0 або π).
3) Операція некомутативна, тобто

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right], \text{ бо}$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\{\text{ВластивістьВизначника}\}=-\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=-\left[\vec{b},\vec{a}\right].$$

4) $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;

5) $\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$.

Приклад 1. Виписати «в лоб» компоненти векторного добутку.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x a_y b_z+\vec{e}_y a_z b_x+\vec{e}_z a_x b_y-\vec{e}_z a_y b_x-a_z b_y\vec{e}_x-\vec{e}_y a_x b_z=$$

$$=\vec{e}_x\left(a_y b_z-a_z b_y\right)+\vec{e}_y\left(a_z b_x-a_x b_z\right)+\vec{e}_z\left(a_x b_y-a_y b_x\right)=$$

$$=\left(a_y b_z-a_z b_y, a_z b_x-a_x b_z, a_x b_y-a_y b_x\right).$$

ДЗ: дано вектори $\vec{a}=(3,-1,-2)$, $\vec{b}=(1,2,-1)$. Знайти їх векторний добуток.

Змішаний добуток трьох векторів – це ***число,*** яке дорівнює:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right).$$

В координатній формі мішаний добуток визначається за формулою:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку

1) Модуль змішаного добутку = об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.
2) Якщо $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$, то вектори утворюють праву трійку, якщо $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)<0$, то вектори утворюють ліву трійку.
3) Якщо $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$ і жоден з векторів ненульовий, то вони **компланарні** (знаходяться в одній площині або на паралельних площинах).
4) Переставляти місцями вектори у мішаному добутку можна, але потрібно слідкувати за тим, яку трійку – праву чи ліву – утворюють вектори:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)$$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)$$

!! Лише некомпланарні три вектори можуть утворити **базис** простору.

Розв'язування задач векторної алгебри на прикладі варіанту №25

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=2$, $\beta=1$, $\vec{a}=\{1;\,1;\,3\}$, $\vec{b}=\{0;\,1;\,-1\}$.

$\alpha\vec{a}=(2,2,6)$, $\beta\vec{b}=(0,1,-1)$, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(2,3,5)$, $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+3^2+5^2}=\boxed{\sqrt{38}}$,

$\left(\alpha\vec{a},\beta\vec{b}\right)=2\cdot0+2\cdot1+6\cdot(-1)=\boxed{-4}$,

$$\left[\alpha\vec{a},\beta\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 2 & 2 & 6\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-8\vec{e}_x+2\vec{e}_y+2\vec{e}_z=\boxed{(-8,2,2)}.$$

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{1;\,2;\,0\}$, $\vec{b}=\{-5;\beta;\,-5\}$, $\vec{c}=\{4;\,-4;\,-1\}$?

а) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1\cdot(-5)+2\beta+0\cdot(-5)=0\Rightarrow 2\beta-5=0\Rightarrow\boxed{\beta=5/2}$

б) $$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -5 & \beta & -5\\ 4 & -4 & -1\end{vmatrix}=-\beta-70=0\Rightarrow\boxed{\beta=-70}$$

3. Задано вектори $\vec{a}=\{1;\,4;\,-2\}$ і $\vec{b}=\{2;\,-1;\,-1\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\,Oy\right)$ — гострий, $\left|\vec{x}\right|^2=126$. Знайти абсцису вектора $\vec{x}$.

$\vec{x}=(x,y,z)$, $(\vec{x},\vec{a})=0=x+4y-2z$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=0=2x-y-z$, $x^2+y^2+z^2=126$

$$\begin{cases}x+4y-2z=0\\ 2x-y-z=0\\ x^2+y^2+z^2=126\end{cases}$$

– система має два розв'язки: $x=-6$, $y=-3$, $z=-9$ та $x=6$, $y=3$, $z=9$. $\cos\angle(\vec{x},Oy)=\dfrac{\left(\vec{x},\vec{e}_y\right)}{|\vec{x}||\vec{e}_y|}=\dfrac{x\cdot0+y\cdot1+z\cdot0}{|\vec{x}||\vec{e}_y|}>0\Rightarrow y>0$, тож

$\vec{x}=(6,3,9)$, $x=\boxed{6}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (3; 3; –3), B (–2; –3; –3), C (–3; 2; –2). Обчислити:

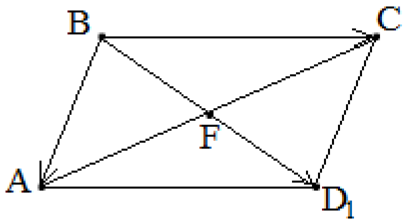
а) довжину вектора $\overline{D_1 D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ACBD_2$;

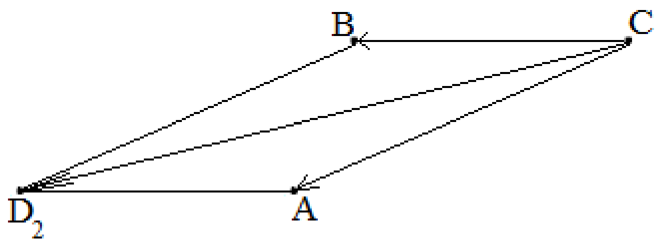
б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лама- $ABCD_2$.





$$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BD_1} = \left(x_{D_1} - (-2), y_{D_1} - (-3), z_{D_1} - (-3)\right) = \left(x_{D_1} + 2, y_{D_1} + 3, z_{D_1} + 3\right)$$

$$\overrightarrow{BA} = \left(3 - (-2), 3 - (-3), -3 - (-3)\right) = (5, 6, 0)$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(-3 - (-2), 2 - (-3), -2 - (-3)\right) = (-1, 5, 1)$$

$$\left(x_{D_1} + 2, y_{D_1} + 3, z_{D_1} + 3\right) = (5, 6, 0) + (-1, 5, 1) = (4, 11, 1) \Rightarrow D_1(2, 8, -2)$$

$$\overrightarrow{CD_2} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CD_2} = \left(x_{D_2} - (-3), y_{D_2} - 2, z_{D_2} - (-2)\right) = \left(x_{D_2} + 3, y_{D_2} - 2, z_{D_2} + 2\right)$$

$$\overrightarrow{CA} = \left(3 - (-3), 3 - 2, -3 - (-2)\right) = (6, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{CB} = \left(-2 - (-3), -3 - 2, -3 - (-2)\right) = (1, -5, -1)$$

$$\left(x_{D_2} + 3, y_{D_2} - 2, z_{D_2} + 2\right) = (6, 1, -1) + (1, -5, -1) = (7, -4, -2) \Rightarrow D_2(4, -2, -4)$$

а) $\left|\overrightarrow{D_1D_2}\right| = \sqrt{(4-2)^2 + (-2-8)^2 + (-4-(-2))^2} = \boxed{6\sqrt{3}}$

б) діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл,

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD_1} = \frac{1}{2}\cdot(4, 11, 1) = \left(2, \frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(x_F - (-2), y_F - (-3), z_F - (-3)\right)$$

$$\left(2, \frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(x_F + 2, y_F + 3, z_F + 3\right) \Rightarrow \boxed{F\left(0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)}$$

в) BF – медіана трикутника ABC, медіани точкою перетину діляться у відношенні 2:1, тож $BO=\dfrac{2}{3}BF$, O – точка перетину медіан; $\overrightarrow{BO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BF}$.

$$\left(\overrightarrow{BO}\right)=\left(x_O-(-2),y_O-(-3),z_O-(-3)\right)=\left(x_O+2,y_O+3,z_O+3\right)$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\cdot\left(2,\frac{11}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(x_O+2,y_O+3,z_O+3\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3},\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\boxed{O\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{8}{3}\right)}$$

г) $\overrightarrow{BA}=\boxed{(5,6,0)}$ – не важливо, з якої він точки відкладений.

д) $\left(\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{CD_2}\right)=-27$

Примітка: $\overrightarrow{AD_1}$ – постійна (тож потенціальна) сила, робота її по замкненому контуру нульова, тож $\left(\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{CD_2}\right)+\left(\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{D_2A}\right)=0$, у чому можна безпосередньо впевнитись.

5. Відомі точки: A (2; –1; 2), B (–1; –3; –2), C (–2; 3; –1), D (1; –2; –1). Обчислити:

а) $\left|-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}\right|$;

б) (−2*AB*, −3*CD*);

в) $\left[-2\overrightarrow{AB},-3\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника *ABC*;

е) об’єм тетраедра *ABCD*;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини *A*;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини *D* перпендикулярно грані *ABC*;

з) напрямні косинуси вектора *AD*;

и) проекцію вектора *AB* на *CD*;

і) при якому значенні аплікати точки *D* всі чотири точки лежать в одній площині.

Розв’язання:

$\overrightarrow{AB}=\left(-1-2,-3-(-1),-2-2\right)=\left(-3,-2,-4\right)$,

$\overrightarrow{CD}=\left(1-(-2),-2-3,-1-(-1)\right)=\left(3,-5,0\right)$.

$-2\overrightarrow{AB}=\left(6,4,8\right)$, $-3\overrightarrow{CD}=\left(-9,15,0\right)$

$\overrightarrow{AD} = (1-2, -2-(-1), -1-2) = (-1, -1, -3)$,

$\overrightarrow{AC} = (-2-2, 3-(-1), -1-2) = (-4, 4, -3)$.

а) $-2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD} = (-3, 19, 8)$, $\left|-2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 19^2 + 8^2} = \boxed{\sqrt{434}}$,

б) $\left(-2\overrightarrow{AB}, -3\overrightarrow{CD}\right) = 6 \cdot (-9) + 4 \cdot 15 + 8 \cdot 0 = \boxed{6}$,

в) $\left[-2\overrightarrow{AB}, -3\overrightarrow{CD}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 6 & 4 & 8 \\ -9 & 15 & 0 \end{vmatrix} = -120\vec{e}_x - 72\vec{e}_y + 126\vec{e}_z = \boxed{(-120, -72, 126)}$

г) $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -3 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (22, 7, -20)$,

$\left[\overrightarrow{AD}, \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & -1 & -3 \\ 22 & 7 & -20 \end{vmatrix} = \boxed{(41, -86, 15)}$

д) Модуль векторного добутку $\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, площа трикутника – половина площі паралелограма:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{22^2 + 7^2 + (-20)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{933}}{2}}$$

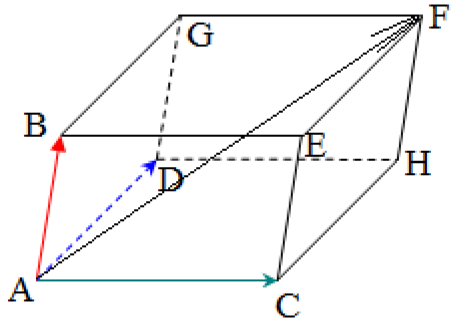
е) Об’єм тетраедра – шоста частина модуля змішаного добутку:

$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| =$

$\frac{1}{6} \cdot \left|\det\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\right| = \boxed{\frac{31}{6}}$ (бо об’єм тетраедра – шоста частина об’єму паралелепіпеда, а об’єм паралелепіпеда є модулем змішаного добутку).

є) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (-8, 1, -10)$, $AF^2 = (-8)^2 + 1^2 + (-10)^2 = \boxed{165}$.

$\overrightarrow{AF} = (x_F - 2, y_F + 1, z_F - 2) = (-8, 1, -10) \Rightarrow \boxed{F(-6, 0, -8)}$



$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,

ДЗ: в рамках цього прикладу знайти координати точок G, E, H

ж) Абсциса – це x-координата. Векторний добуток $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(22,7,-20)$ перпендикулярний грані ABC. Вектор з x-координатою, рівною 1, паралельний до $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$, очевидно, є вектором $\frac{1}{22}\cdot(22,7,-20)=\boxed{\left(1,\frac{7}{22},-\frac{20}{22}\right)}$

з) $\cos\alpha=\frac{AD_x}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{11}}}$,

$\cos\beta=\frac{AD_y}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{11}}}$,

$\cos\gamma=\frac{AD_z}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{-3}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\boxed{\frac{-3}{\sqrt{11}}}$.

и) $\text{Пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AB},\frac{\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}\right)=\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{(-3)\cdot3+(-2)\cdot(-5)+(-4)\cdot0}{\sqrt{3^2+(-5)^2+0^2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{34}}}$

і) Апліката – це z-координата. $D(1,-2,z)$.

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=0=\begin{vmatrix}-3 & -2 & -4\\ -4 & 4 & -3\\ -1 & -1 & z-2\end{vmatrix}=11-20z\Rightarrow\boxed{z=\frac{11}{20}}.$$

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-1;-2;4\}$, $\vec{b}=\{2;3;-2\}$, $\vec{c}=\{-3;5;4\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-1;-20;-4\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Базис можуть утворити не компланарні вектори, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & 5 & 4\end{vmatrix}=58\neq 0$.

$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\Rightarrow(-1,-20,-4)=(-x+2y-3z,-2x+3y+5z,4x-2y+4z)$

$$\begin{cases}-1=-x+2y-3z\\ -20=-2x+3y+5z\\ -4=4x-2y+4z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-4\\ z=-2\end{cases},\ \boxed{\vec{d}=-\vec{a}-4\vec{b}-2\vec{c}}.$$

7. Задані вектори $\vec{a}=\{5;-3;2\}$, $\vec{b}=\{3;3;0\}$, $\vec{c}=\{2;-4;-5\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=3$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=15$, $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=-13$.

$$\vec{x}=(x,y,z).\ \begin{cases}5x-3y+2z=3\\ 3x+3y+0z=15\\ 2x-4y-5z=-13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=1\end{cases},\ \boxed{\vec{x}=(2,3,1)}.$$

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(-3\vec{u}-4\vec{v}\right)\left(\vec{u}+4\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=4\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-3\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0{,}3$.

$$\left(-3\vec{u}-4\vec{v},\vec{u}+4\vec{v}\right)=\left(-3\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)-4\left(\vec{a}-3\vec{b}\right),\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)+4\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right)=$$

$$=\left(-12\vec{a}-3\vec{b}-4\vec{a}+12\vec{b},4\vec{a}+\vec{b}+4\vec{a}-12\vec{b}\right)=\left(-16\vec{a}+9\vec{b},8\vec{a}-11\vec{b}\right)=$$

$$=-128\left(\vec{a},\vec{a}\right)+248\left(\vec{a},\vec{b}\right)-99\left(\vec{b},\vec{b}\right)=-128\left|\vec{a}\right|^2+248\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha-99\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$=-128\cdot5^2+248\cdot5\cdot5\cdot0{,}3-99\cdot5^2=\boxed{-3815}$$

9. Задані вершини чотирикутника *A* (–4; –3), *B* (–5; 1), *C* (–2; –2), *D* (–1; *p*). При якому значенні параметра *p* діагоналі *AC* і *BD* перпендикулярні?

$\overrightarrow{AC}(2,1)$, $\overrightarrow{BD}(4,p-1)$, $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)=8+1\cdot(p-1)=0\Rightarrow\boxed{p=-7}$.

10. При якому значенні α точки *A* (1; 0; –1), *B* (–2; –2; 1), *C* (–1; 2; –1), *D* (5; α; 0) лежать в одній площині?

$\overrightarrow{AB}(-3,-2,2)$, $\overrightarrow{AC}(-2,2,0)$, $\overrightarrow{AD}(4,\alpha,1)$, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=-4\alpha-26=0\Rightarrow\boxed{\alpha=-6{,}5}$

.

Точно такий же результат отримали би, якщо б розглянули три вектори, що починаються в т. В або т. С або т.D.

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q};\ |\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=1,\ \left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{p}+\vec{q},\vec{p}-3\vec{q}\right]=\left[\vec{p},\vec{p}-3\vec{q}\right]+\left[\vec{q},\vec{p}-3\vec{q}\right]=\underbrace{\left[\vec{p},\vec{p}\right]}_{=0}-3\left[\vec{p},\vec{q}\right]+\left[\vec{q},\vec{p}\right]-3\underbrace{\left[\vec{q},\vec{q}\right]}_{=0}=$$

$$=-3\left[\vec{p},\vec{q}\right]+\left[\vec{q},\vec{p}\right]=3\left[\vec{q},\vec{p}\right]+\left[\vec{q},\vec{p}\right]=4\left[\vec{q},\vec{p}\right]$$

$$\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=4\left\|\left[\vec{q},\vec{p}\right]\right\|=4|\vec{q}||\vec{p}|\sin\alpha=4\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boxed{4\sqrt{2}}$$

Тут і надалі $\vec{i}=\vec{e}_x$**,** $\vec{j}=\vec{e}_y$**,** $\vec{k}=\vec{e}_z$**.**

12. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ та $\vec{q}=2\vec{b}+\vec{a}$, якщо $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$ і $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$.

$\vec{a}=(-1,3,-7)$, $\vec{b}=(2,-1,5)$, $\vec{p}=(-4,7,-19)$, $\vec{q}=(3,1,3)$, $(\vec{p},\vec{q})=\boxed{-62}$.

13. Представити вектор $x=(a,b)i+(b,c)j+(c,a)k$ у вигляді лінійної комбінації векторів a, b, c, якщо $a=\{1,1,1\}$, $b=\{0,1,1\}$, $c=\{1,0,1\}$.

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1\cdot0+1\cdot1+1\cdot1=2,\ \left(\vec{b},\vec{c}\right)=0\cdot1+1\cdot0+1\cdot1=1,\ \left(\vec{c},\vec{a}\right)=1\cdot1+0\cdot1+1\cdot1=2$$

.

$$\vec{x}=(2,1,2)=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\Rightarrow(2,1,2)=\alpha\cdot(1,1,1)+\beta\cdot(0,1,1)+\gamma\cdot(1,0,1)$$

$$(2,1,2)=(\alpha,\alpha,\alpha)+(0,\beta,\beta)+(\gamma,0,\gamma)=(\alpha+\gamma,\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\begin{cases}2=\alpha+\gamma\\1=\alpha+\beta\\2=\alpha+\beta+\gamma\end{cases}\Rightarrow\alpha=1,\beta=0,\gamma=1\Rightarrow\boxed{\vec{x}=\vec{a}+\vec{c}}$$

14. При якому значенні t вектори $\vec{a}=(6;0;12)$ і $\vec{b}=(-8;13;t)$ будуть взаємно перпендикулярними?

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=12t-48=0\Rightarrow\boxed{t=4}$$

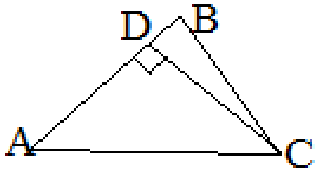
15. Відомо дві сторони трикутника $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$. Обчислити довжину його висоти CD при умові, що $\vec{p}$, $\vec{q}$ — взаємно перпендикулярні орти.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]\right\|.$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]=[3\vec{p}-4\vec{q},\vec{p}+5\vec{q}]=3[\vec{p},\vec{p}+5\vec{q}]-4[\vec{q},\vec{p}+5\vec{q}]=$$

$$=3\underbrace{[\vec{p},\vec{p}]}_{=0}+15[\vec{p},\vec{q}]-4[\vec{q},\vec{p}]-20\underbrace{[\vec{q},\vec{q}]}_{=0}=+15[\vec{p},\vec{q}]+4[\vec{p},\vec{q}]=19[\vec{p},\vec{q}]$$

$$\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]\right\|=19\|[\vec{p},\vec{q}]\|=19|\vec{p}||\vec{q}|\sin\frac{\pi}{2}=19\cdot1\cdot1\cdot1=19$$



$$S_{ABC}=\frac{19}{2}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$$

$$(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot1=|\vec{a}|^2\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$$

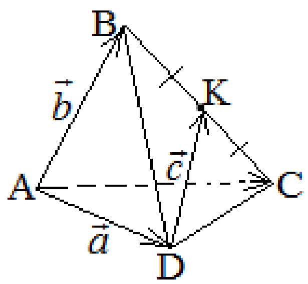
$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right)}=\sqrt{(3\vec{p}-4\vec{q},3\vec{p}-4\vec{q})}=$$

$$=\sqrt{3(\vec{p},3\vec{p}-4\vec{q})-4(\vec{q},3\vec{p}-4\vec{q})}=\sqrt{9\underbrace{(\vec{p},\vec{p})}_{=p^2=1}-12\underbrace{(\vec{p},\vec{q})}_{=0}-12\underbrace{(\vec{q},\vec{p})}_{=0}+16\underbrace{(\vec{q},\vec{q})}_{=q^2=1}}=$$

$$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$\frac{19}{2}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot CD\Rightarrow19=5\cdot CD\Rightarrow\boxed{CD=\frac{19}{5}}$$

16. Дано тетраедр $ABCD$, $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, K — внутрішня точка ребра CB. Розкласти вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.



$$\vec{a}+\overrightarrow{DB}=\vec{b},\ \underbrace{\overrightarrow{DB}}_{=\vec{b}-\vec{a}}+\underbrace{\overrightarrow{BK}}_{=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}=\overrightarrow{DK},\ \vec{b}+\overrightarrow{BC}=\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$$

$$\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\overrightarrow{DK}\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{DK}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

17. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярний вектору $\vec{a}=\left(0;-1;2\right)$ та вектору $\vec{b}=\left(1;3;3\right)$, задовольняє умові $\left(\vec{c},\ \vec{p}\right)=8$, $\vec{p}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Знайти координати вектора $\vec{c}$.

$$\vec{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right).\ \begin{cases}\left(\vec{c},\vec{p}\right)=8\\ \left(\vec{c},\vec{a}\right)=0\\ \left(\vec{c},\vec{b}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3c_x-c_y+2c_z=8\\ -c_y+2c_z=0\\ c_x+3c_y+3c_z=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{\vec{c}=\left(\frac{8}{3},-\frac{16}{27},-\frac{8}{27}\right)}$$

Питання та завдання для самоконтролю до практичного заняття 5

1. Надайте визначення і властивості скалярного добутку
2. Наведіть приклади векторів, скалярний добуток яких дорівнює нулю.
3. Що таке векторний добуток двох векторів?
4. Які властивості у векторного добутку двох векторів?
5. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
6. Коли мішаний добуток векторів дорівнює нулю?
7. Яка трійка векторів називається правосторонньою, лівосторонньою?
8. Які вектори називаються компланарними?
9. Який геометричний зміст векторного добутку?
10. Як обчислюється подвійний векторний добуток? Доведіть, що

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)-\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right) \text{ або } \left[a,\left[b,c\right]\right]=bac-cab.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7. Лінійні простори

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок перевірки лінійності простору, оперування з лінійними операторами, побудови оберненого оператора

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися виявляти зв’язок між матрицями лінійних операторів у різних базисах. Ознайомитися з властивостями лінійних операторів і діями над ними. Знаходити власні числа та власні вектори лінійного оператора. Визначати базису, у якому матриця лінійного оператора має діагональний вигляд

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

У векторній алгебрі було введено операції додавання векторів і множення вектора на дійсне число. Досліджено властивості цих операцій. Разом з тим, існують множини елементів іншої природи, в яких також визначено операції додавання елементів та множення елемента на дійсне число і для цих операцій справедливі ті ж властивості, що й для операцій над векторами. Тому виникає природна необхідність у загальному дослідженні множин елементів довільної природи, для яких певним чином введено операції додавання та множення на число. При цьому зовсім не важливо, яким саме способом введено ці операції. Важливо лише, щоб вони мали ті ж властивості, що і відповідні операції над геометричними векторами.

Поняття лінійного простору

Означення 1. Множина L елементів (об'єктів) $x, y, z\ldots$ довільної природи називається лінійним (або афінним, або векторним) простором, якщо виконуються такі вимоги:

I. Існує правило, згідно з яким двом довільним елементам x і y множини L ставиться у відповідність елемент z цієї множини, який називається сумою елементів x і y і позначається $z = x + y$.

II. Існує правило, згідно з яким довільному елементу $x \in L$ і довільному дійсному числу λ ставиться у відповідність елемент $u \in L$, який називається добутком елемента x на число λ і позначається $u = \lambda \cdot x$ або $u = x \cdot \lambda$.

III. Для довільних елементів $x, y, z \in L$ і довільних дійсних чисел λ, μ наведені правила задовольняють таким восьми аксіомам:

1. $x + y = y + x$ (комутативна властивість суми).

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоціативна властивість суми).

3. Існує такий елемент $\theta \in L$, що $x + \theta = x$ для довільного елемента x. Елемент θ називається ***нульовим*** елементом.

4. Для кожного елемента x існує такий елемент $x' \in L$, що $x + x' = \theta$. Елемент x' називається ***протилежним*** до елемента x.

5. $1 \cdot x = x$ для довільного елемента x (особлива роль числового множника 1).

6. $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ (асоціативна властивість множення).

7. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (дистрибутивна властивість відносно суми числових множників).

8. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (дистрибутивна властивість відносно суми елементів).

Підкреслимо, що при введені поняття лінійного простору ми абстрагуємось не лише від природи об'єктів, що вивчаються, а й від конкретного вигляду правил утворення суми елементів і добутку елемента на число; важливо лише, щоб ці правила задовольняли наведеним вище восьми аксіомам.
Якщо природа досліджуваних об'єктів і вигляд правил утворення суми елементів і добутку елемента на число вказані, то ми будемо називати лінійний простір конкретним.

Наведемо приклади конкретних лінійних просторів.

Приклад 1. Нехай множина $L=R$, тобто є множиною всіх дійсних чисел. Нехай $x\in R$, $y\in R$, а $x+y$ і $\lambda\cdot x$ – звичайне додавання двох чисел і звичайне множення одного дійсного числа на інше. Тоді всі вісім аксіом виконуються. Отже, множина всіх дійсних чисел R є лінійним простором.

Приклад 2. Нехай $L=Z_0$ – множина всіх невід'ємних чисел. Сумою двох елементів є звичайне додавання двох чисел. Добуток $\lambda\cdot x$ визначимо як звичайне множення числа x на число $|\lambda|$. Аксіоми 1, 2, 3 виконуються, а аксіома 4 – ні. Отже, множина всіх невід'ємних чисел не є лінійним простором.

Приклад 3. Нехай множина L є множиною всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами степеня t, не вищого за n. Нехай операцією додавання двох елементів є звичайне алгебраїчне додавання, а операцією множення елемента на число – звичайне алгебраїчне множення. Тоді виконуються всі вісім аксіом і вказана множина L є лінійним простором. Покажемо,

Чому множина P_n многочленів, ступінь яких не перевищує n, є лінійним простором?:

1. $A=\sum\limits_{s=0}^{n}a_sx^s\in P_n$, $B=\sum\limits_{s=0}^{n}b_sx^s\in P_n$, $A+B=\sum\limits_{s=0}^{n}\left(a_s+b_s\right)x^s\in P_n$ – виконується $\forall A,B$

2. $A=\sum\limits_{s=0}^{n}a_sx^s\in P_n$, λ – число, $\lambda A=\sum\limits_{s=0}^{n}\left(\lambda a_s\right)x^s\in P_n$ виконується $\forall A$

3.1. $A+B=B+A\Leftrightarrow\sum\limits_{s=0}^{n}\left(a_s+b_s\right)x^s=\sum\limits_{s=0}^{n}\left(b_s+a_s\right)x^s$ – очевидно

3.2. $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)\Leftrightarrow\sum\limits_{s=0}^{n}\left(\left(a_s+b_s\right)+c_s\right)x^s=\sum\limits_{s=0}^{n}\left(a_s+\left(b_s+c_s\right)\right)x^s$ – очевидно

3.3. $\left(\lambda\mu\right)A=\lambda\left(\mu A\right)\Leftrightarrow\sum\limits_{s=0}^{n}\left(\left(\lambda\mu\right)a_s\right)x^s=\sum\limits_{s=0}^{n}\left(\lambda\left(\mu a_s\right)\right)x^s$ – очевидно

3.4. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B \Leftrightarrow \sum_{s=0}^{n}\left(\lambda\left(a_s+b_s\right)\right)x^s=\sum_{s=0}^{n}\left(\lambda a_s+\lambda b_s\right)x^s$ – очевидно

3.5. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A \Leftrightarrow \sum_{s=0}^{n}\left((\lambda+\mu)a_s\right)x^s=\sum_{s=0}^{n}\left(\lambda a_s+\mu a_s\right)x^s$ – очевидно

3.6. Існує $0=\sum_{s=0}^{n}0\cdot x^s \in P_n$, $A+0=A$.

3.7. Існує протилежний елемент $-A=\sum_{s=0}^{n}\left(-a_s x^s\right)\in P_n$, $A+(-A)=0$.

3.8. $1\cdot A=\sum_{s=0}^{n}\left(1\cdot a_s x^s\right)=A$ – очевидно.

Тож виконалися всі вище перелічені властивості, і множина P_n многочленів, ступінь яких не перевищує n, є лінійним простором. Будемо позначати цей лінійний простір $P_n(t)$.

Приклад 4. Нехай L – множина всіх вільних векторів тривимірного простору. Операції додавання векторів і множення вектора на число визначимо так, як це було зроблено у векторній алгебрі. Очевидно, що всі вісім аксіом виконуються. Отже, множина всіх вільних векторів тривимірного простору з визначеними операціями додавання векторів і множення вектора на дійсне число є лінійним простором, який позначимо V_3.

Аналогічні множини векторів на площині та прямій також є лінійними просторами, які будемо позначати відповідно V_2 та V_1.

Приклад 5. Нехай L – множина всіх можливих упорядкованих наборів з n чисел (множина рядків довжиною n): $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, де $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – дійсні числа. Сумою двох елементів $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ і $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ назвемо елемент $z=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$, а добутком елемента x на число λ – елемент $u=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$. За нульовий елемент приймемо елемент $(0,\ 0,\ldots,0)$.

Легко перевірити, що всі вісім аксіом виконуються. Отже, множина всіх можливих упорядкованих наборів з n чисел з вказаними операціями додавання та множення на число є лінійним простором, який будемо позначати V_n.

Приклад 6. Чому множина P_n многочленів, ступінь яких строго дорівнює n, не є лінійним простором (в ролі операції «+» йде звичайне алгебраїчне додавання)?

Перша ж властивість не виконається. Наприклад, $n=3$.
Розглянемо два многочлена: $A=x^3+2$, $B=-x^3+2x^2$, $A+B=2x^2+2$ – многочлен степені 2, а не 3. Тож він не належить множині P_3, не для будь-яких $A,B\in P_3$ їх сума теж належить P_3. Значить ця множина – не лінійний простір.

Елементи довільного лінійного простору прийнято називати **векторами,** зберігаючи для останніх позначення геометричних векторів. Та обставина, що термін вектор раніше використовувався у більш вузькому розумінні, не викликає ніяких непорозумінь, а навпаки, геометричне уявлення дозволяє осмислити і передбачити ряд результатів, які справедливі для лінійних просторів довільної природи.

Нижче елементи лінійного простору L будемо позначати $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Для нульового елемента θ введемо позначення $\vec{0}$.

Деякі властивості довільних лінійних просторів

З аксіом 1 – 8 можна отримати ряд наслідків.

1. У довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент.

2. Для кожного елемента $\vec{x} \in L$ існує єдиний протилежний елемент.

3. У будь-якому лінійному просторі L нульовий елемент $\vec{0}$ дорівнює добутку довільного елемента $\vec{x}$ цього простору на дійсне число 0.

4. Для довільного дійсного числа α і елемента $\vec{0} \in L$ добуток $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

5. Якщо добуток $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0}$, то або $\alpha = 0$, або $\vec{x} = \vec{0}$.

6. Для кожного $\vec{x} \in L$ елемент $(-1) \cdot \vec{x}$ є протилежним.

Суму векторів $\vec{y}$ і $(-\vec{x})$ будемо позначати $\vec{y} - \vec{x}$ і називати **різницею векторів** $\vec{y}$ і $\vec{x}$.

Добуток дійсного числа λ і вектора $\vec{x}$ будемо позначати далі $\lambda\vec{x}$, опускаючи знак “$\cdot$”.

Розмірність і базис лінійного простору

Важливу роль у подальшому відіграватимуть поняття лінійної залежності і незалежності векторів.

Означення 1. Система векторів

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \tag{1}$$

лінійного простору L називається **лінійно залежною**, якщо існують такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, що

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{x}_m = \vec{0}. \tag{2}$$

Вектори, які не є лінійно залежними, називаються лінійно незалежними. Іншими словами, вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ лінійного простору L називаються ***лінійно незалежними***, якщо рівність (2) можлива лише при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Означення 2. Вектор $\vec{y}$ називається **лінійною комбінацією** системи векторів (1), якщо виконується рівність $\vec{y} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{x}_m$, де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – дійсні числа. Кажуть, що вектор $\vec{y}$ лінійно виражається через вектори (1).

Теорема 1. Для того щоб система векторів (1) була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб один з векторів цієї системи був лінійною комбінацією інших

Теорема 2. Якщо система векторів (1) містить нульовий вектор, то вона лінійно залежна.

Теорема 3. Якщо частина векторів системи (1) лінійно залежна, то і всі вектори цієї системи лінійно залежні.

Теорема 4. Кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів є лінійно незалежною.

Означення 3. Лінійний простір L називається n**-вимірним**, якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів, а будь-яка система з $n+1$ векторів є лінійно залежною.

Очевидно, що за теоремою 3 лінійно залежною буде і будь-яка система, що містить більше ніж $n+1$ векторів.

Число n називається розмірністю лінійного простору.

Отже, **розмірність лінійного простору** L – це максимальна кількість лінійно незалежних векторів цього простору.

Розмірність простору L позначається через $\dim L$ або $\mathrm{d}(L)$.

Простори, що мають скінченну розмірність, називаються **скінченновимірними**. Простори, в яких можна знайти як завгодно багато лінійно незалежних векторів, називаються нескінченновимірними. Прикладом нескінченновимірного простору є множина всіх можливих многочленів від t з дійсними коефіцієнтами або множина всіх функцій від t, неперервних на даному відрізку $[a;\ b]$ чи на всій числовій осі.

Означення 4. Сукупність n лінійно незалежних векторів n- вимірного лінійного простору L називається його базисом.

Теорема 5. Кожен вектор $\vec{x}$ лінійного n- вимірного простору L можна подати єдиним способом у вигляді лінійної комбінації векторів базису.

Означення 5. Рівність $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ називається **розкладом вектора** $\vec{x}$ у базисі $\{\vec{e}_1;\ \vec{e}_2;\ldots;\vec{e}_n\}$. Числа $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ називаються **координатами вектора** $\vec{x}$ **у базисі** $\{\vec{e}_1;\ \vec{e}_2;\ldots;\vec{e}_n\}$.

Будемо позначати це так: $\vec{x}(x_1;\ x_2;\ldots;x_n)_{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n}$. У випадку використання одного і того ж базису будемо писати просто $\vec{x}(x_1;x_2;\ldots;x_n)$.

Теорема 6. Нехай у базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ задано вектори $\vec{x}(x_1;\ x_2;\ldots;x_n)$ і $\vec{y}(y_1;\ y_2;\ldots;y_n)$. Тоді вектор $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$, де $\lambda,\ \mu$ – дійсні числа, має у цьому базисі координати $\lambda x_1 + \mu y_1;\ \lambda x_2 + \mu y_2;\ \ldots;\lambda x_n + \mu y_n$.

Теорема 7. Якщо $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ – лінійно незалежні вектори простору L і кожен вектор $\vec{x}\in L$ розкладається за цими векторами, то вектори $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ утворюють базис в L.

Теорема 8. У лінійному скінченновимірному просторі кожну множину лінійно незалежних векторів можна включити до деякого базису.

Наведемо приклади базисів і розмірностей конкретних лінійних просторів.

Приклад 7. V_1 – лінійний простір вільних векторів, паралельних деякій прямій. Довільний ненульовий вектор $\vec{a}$ цієї прямої утворює базис, оскільки всі інші вектори $\vec{b}\in V_1$ розкладаються за цим вектором, а саме, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Отже, розмірність простору V_1 дорівнює 1, тобто $\dim V_1=1$.

Приклад 8. V_2 – лінійний простір вільних компланарних векторів. Довільна пара неколінеарних векторів цього простору утворює базис; $\dim V_2=2$.

Приклад 9. V_3 – лінійний простір вільних векторів тривимірного простору. Довільна трійка некомпланарних векторів утворює базис; $\dim V_3=3$.

Приклад 10. V_n – лінійний простір усіх можливих упорядкованих рядків $\left(x_1,\ x_2,\ldots,x_n\right)$ (див. приклад 5 §1). Доведемо, що цей простір n-вимірний. Дійсно, вектори $\vec{e}_1=\left(1,\ 0,\ldots,0\right),\ \vec{e}_2=\left(0,\ 1,\ldots,0\right),\ldots,\vec{e}_n=\left(0,\ 0,\ldots,1\right)$ лінійно незалежні, оскільки з рівності $\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n=\vec{0}$ випливає, що

$$\left(0,\ 0,\ldots,0\right)=\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)\Leftrightarrow\lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ldots,\lambda_n=0.$$

З іншого боку, кожен рядок $\vec{x}=\left(x_1,\ x_2,\ldots,x_n\right)$ розкладається за векторами $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$: $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$. Отже, вектори $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ утворюють базис і $\dim V_n=n$.

Приклад 11. (див. приклад 3). Простір $P_n(t)$ многочленів з дійсними коефіцієнтами степеня t, не вищого за n, має розмірність $n+1$.

Дійсно, многочлени $1,\ t,\ t^2,\ldots,t^n$ між собою лінійно незалежні, оскільки рівність $\lambda_1+\lambda_2 t+\ldots+\lambda_{n+1}t^n=0$ для всіх t виконується лише за умови $\lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ \ldots,\lambda_{n+1}=0$.

З іншого боку, довільний многочлен $P_n(t)=\alpha_1+\alpha_2 t+\alpha_3 t^2+\ldots+\alpha_{n+1}t^n$ лінійною комбінацією многочленів $1,\ t,\ t^2,\ldots,t^n$. Тому вони утворюють базис і $\dim P_n\left(t\right)=n+1$.

Приклад 12: Чи будуть лінійно-залежними вектори

$$\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Знайти вектор $5\overline{x}_1 + 2\overline{x}_2 + \overline{x}_3$. Знайти вектор $\overline{a}$ з умови $\overline{x}_1 + 2\overline{x}_2 + 3\overline{x}_3 + 10\overline{a} = 0$.

Система векторів $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, …, $\overline{x}_n$ називається **лінійно-незалежною**, якщо їх довільна лінійна комбінація $\lambda_1\overline{x}_1 + \lambda_2\overline{x}_2 + ... + \lambda_n\overline{x}_n = 0$ (λ_i – числа), лише якщо одночасно $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Якщо ж існує така лінійна комбінація $\lambda_1\overline{x}_1 + \lambda_2\overline{x}_2 + ... + \lambda_n\overline{x}_n = 0$, що не всі λ_i дорівнюють нулю одночасно, то така система називається ***лінійно-залежною***.

$$5\overline{x}_1 + 2\overline{x}_2 + \overline{x}_3 = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}}.$$

$$\overline{x}_1 + 2\overline{x}_2 + 3\overline{x}_3 + 10\overline{a} = 0$$

$$\overline{x}_1 + 2\overline{x}_2 + 3\overline{x}_3 + 10\overline{a} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 + 10a_1 \\ 2 + 10a_2 \\ 6 + 10a_3 \\ 10 + 10a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overline{a} = \begin{pmatrix} -1,4 \\ -0,2 \\ -0,6 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\lambda_1\overline{x}_1 + \lambda_2\overline{x}_2 + \lambda_3\overline{x}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 3\lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_3 \\ -\lambda_3 \\ \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$, і якщо ця система рівнянь має лише тривіальні розв'язки, то система векторів лінійно-незалежна, інакше лінійно-залежна.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$ тож лише 2 незалежних

ненульовий мінор

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

рівняння.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \end{cases} \Rightarrow \{\lambda_3 = C\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3C \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ -2C \end{pmatrix}.$$

Розв'язком відповідної системи рівнянь є $\lambda_1 = C$, $\lambda_2 = -2C$, $\lambda_3 = C$, C – довільне число.

Відповідно, наприклад, набір чисел $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ є нетривіальним розв'язком системи.

Відповідь: система векторів лінійно–залежна.

Приклад 13. Знайти ранг системи векторів та будь-який з її базисів.

$$\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{x}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overline{x}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ранг системи векторів – це ранг матриці, що створена цими векторами як стовпцями:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -6 & -5 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 3.$$

Щоб вказати базис з векторів треба запропонувати базисний мінор. **Ті вектори, компоненти яких утворюватимуть базисний мінор, є базисом системи.**

Базис – набір з максимальної кількості лінійно-незалежних векторів.

Ранг = кількість базисних векторів. Базис буде складатись з трьох векторів.

Це будуть ті три вектори, компоненти яких складатимуть базисний мінор.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\right| = -7$$

Базисний мінор

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \\ -6 & -5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2 & -4 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 7 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Відповідний базис системи: $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Примітка 1. Базис може бути не єдиний (в даному прикладі будь-які три вектори, компоненти яких утворюють базисний мінор, можуть утворити базис системи).

Примітка 2. Базис зобов'язаний бути лінійно-незалежним. Покажемо, що обчислений базис лінійно-незалежний. Іншими словами, покажемо, що система векторів $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ є лінійно-незалежною.

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \lambda_3\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_1 \\ 2\lambda_1 \\ -2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \\ -4\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_3 \\ 2\lambda_3 \\ 4\lambda_3 \\ 1\lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\right| = -7 \neq 0$$

Тож перші 3 рівняння системи лінійно-незалежні,

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \text{ЛінійноЗалежнаСтрока} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Існує}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– система має лише тривіальні розв'язки, вектори

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix},\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\\-4\end{pmatrix},\ \bar{x}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\4\\1\end{pmatrix}$$ лінійно-незалежні та можуть утворювати базис.

!! В n-вимірному просторі базис обов'язково складається з n векторів.

Приклад 14. Чи утворюють вектори

$$\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ \bar{e}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\7\\2\end{pmatrix},\ \bar{e}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\\-6\end{pmatrix},\ \bar{e}_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\9\end{pmatrix}$$

базис в чотиривимірному просторі? Якщо так, то знайти координати вектору $\bar{x}=\begin{pmatrix}0\\5\\7\\-1\end{pmatrix}$ в цьому базисі.

Якщо вони лінійно незалежні, то утворюють, інакше – ні.

$$\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2\bar{e}_2+\lambda_3\bar{e}_3+\lambda_4\bar{e}_4=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_1\\2\lambda_1\\\lambda_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\lambda_2\\4\lambda_2\\7\lambda_2\\2\lambda_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\lambda_3\\\lambda_3\\-2\lambda_3\\-6\lambda_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_4\\-3\lambda_4\\\lambda_4\\9\lambda_4\end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2-2\lambda_3+\lambda_4=0\\\lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3-3\lambda_4=0\\2\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3+\lambda_4=0\\\lambda_1+2\lambda_2-6\lambda_3+9\lambda_4=0\end{cases}$$

Питання, чи має ця система нетривіальні розв'язки, чи ні (якщо так – система лінійно-залежна; якщо ні – лінійно-незалежна).

$$\begin{vmatrix}1&3&-2&1\\1&4&1&-3\\2&7&-2&1\\1&2&-6&9\end{vmatrix}=-1.$$

Ранг = 4, всі рівняння лінійно-незалежні,

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\1&4&1&-3\\2&7&-2&1\\1&2&-6&9\end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Існує}}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$ – лише тривіальні розв'язки, тож система лінійно-незалежна, і $\boxed{\text{ці вектори утворюють базис}}$.

Знайдемо координати вектора $\overline{x}$ у цьому базисі: $\overline{x}=\alpha_1\overline{e}_1+\alpha_2\overline{e}_2+\alpha_3\overline{e}_3+\alpha_4\overline{e}_4$,

$$\begin{pmatrix}0\\5\\7\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1\\2\alpha_1\\\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\alpha_2\\4\alpha_2\\7\alpha_2\\2\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\alpha_3\\\alpha_3\\-2\alpha_3\\-6\alpha_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_4\\-3\alpha_4\\\alpha_4\\9\alpha_4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=0\\\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_4=5\\2\alpha_1+7\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=7\\\alpha_1+2\alpha_2-6\alpha_3+9\alpha_4=-1\end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\1&4&1&-3\\2&7&-2&1\\1&2&-6&9\end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Існує}}\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\7\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\\2\end{pmatrix}.\ \boxed{\overline{x}=3\overline{e}_1+1\overline{e}_2+4\overline{e}_3+2\overline{e}_4}.$$

Приклад 15. Знайти координати «вектору» $\begin{pmatrix}3&4\\-4&1\end{pmatrix}$ в базисі

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}3&4\\-4&1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3=\alpha_1\\4=\alpha_2\\-4=-\alpha_2\\1=\alpha_1+\alpha_3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}3=\alpha_1\\4=\alpha_2\\\alpha_3=-2\end{cases},\boxed{\alpha_1=3;\alpha_2=4;\alpha_3=-2}$$

Приклад 16. Дано вектор $\vec{x}=(4,-4,5)$ в базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Дано вектори нового базиса $\vec{e}_1^{\,*}$, $\vec{e}_2^{\,*}$, $\vec{e}_3^{\,*}$, виражені в координатах старого базиса таким чином: $\vec{e}_1^{\,*}(1,1,0)$, $\vec{e}_2^{\,*}(1,-1,1)$, $\vec{e}_3^{\,*}(-3,5,-6)$. Виразити $\vec{x}$ в координатах нового базиса.

$\vec{e}_1^{\,*}(1,1,0)\Rightarrow 1\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3=\vec{e}_1^{\,*}$, $1\cdot\vec{e}_1-1\cdot\vec{e}_2+1\cdot\vec{e}_3=\vec{e}_2^{\,*}$, $-3\cdot\vec{e}_1+5\cdot\vec{e}_2-6\cdot\vec{e}_3=\vec{e}_3^{\,*}$

$$\begin{cases} 1\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_1^{\,*} \\ 1\cdot\vec{e}_1 - 1\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_2^{\,*} \\ -3\cdot\vec{e}_1 + 5\cdot\vec{e}_2 - 6\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_3^{\,*} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,*} \\ \vec{e}_2^{\,*} \\ \vec{e}_3^{\,*} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1^{\,*}}{4} + \frac{3\vec{e}_2^{\,*}}{2} + \frac{\vec{e}_3^{\,*}}{4},\ \vec{e}_2 = \frac{3\vec{e}_1^{\,*}}{4} - \frac{3\vec{e}_2^{\,*}}{2} - \frac{\vec{e}_3^{\,*}}{4},\ \vec{e}_3 = \frac{\vec{e}_1^{\,*}}{2} - 2\vec{e}_2^{\,*} - \frac{\vec{e}_3^{\,*}}{2}.$$

$$\vec{x} = 4\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 = 4\left(\frac{\vec{e}_1^{\,*}}{4} + \frac{3\vec{e}_2^{\,*}}{2} + \frac{\vec{e}_3^{\,*}}{4}\right) - 4\left(\frac{3\vec{e}_1^{\,*}}{4} - \frac{3\vec{e}_2^{\,*}}{2} - \frac{\vec{e}_3^{\,*}}{4}\right) + 5\left(\frac{\vec{e}_1^{\,*}}{2} - 2\vec{e}_2^{\,*} - \frac{\vec{e}_3^{\,*}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{e}_1^{\,*} + 2\vec{e}_2^{\,*} - \frac{1}{2}\vec{e}_3^{\,*}.$$

$\boxed{\text{В новому базисі}}$ $\vec{x} = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$.

ДЗ: №1–6 згідно свого варіанту завдання (варіант співпадає з порядковим номером студента в списку групи)

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8. Лінійні оператори. Власні значення і власні вектори матриці

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок оперування лінійними операторами, визначення власних значень і власних векторів лінійних операторів.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися виявляти зв’язок між матрицями лінійних операторів у різних базисах, здійснювати дії над лінійними операторами, визначати обернений оператор; знаходити власні числа та власні вектори лінійного оператора, базису, у якому матриця лінійного оператора має діагональний вигляд

Короткі теоретичні відомості і розв’язання типових прикладів

Нехай дано квадратну матрицю A. Тоді числа λ_i та вектори X_i називаються **власними числами** та **власними векторами** матриці A, якщо

$$AX_i = \lambda_i X_i.$$

Якщо A – матриця розмірністю $n \times n$, то власних чисел у неї не більше, ніж n. Математики кажуть, що власних чисел рівно n, але деякі з них можуть співпадати одне з одним, тобто бути кратними.

Якщо оператор $\hat{A}$ задано не на просторі векторів, а на просторі функцій, то числа λ_i та функції f_i називаються власними числами та власними функціями оператора $\hat{A}$, якщо $\hat{A}f_i = \lambda_i f_i$. Це поняття є надважливим, наприклад, для квантової механіки.

Приклад 1. Знайти власні значення та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нехай $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – власний вектор, а λ – відповідне йому власне число. Тоді

$$AX = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 12x_2 - 4x_3 = \lambda x_1 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = \lambda x_2 \\ -x_1 - 12x_2 + 6x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 - (3+\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 12x_2 + (6-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$ – однорідна система 3×3.

Тривіальний розв’язок в неї є завжди. Але власні вектори ненульові, тож тривіальний розв’язок нам не цікавий, цікаві саме нетривіальні розв’язки. А вони існують при $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 12 & -4 \\ -1 & -(3+\lambda) & 1 \\ -1 & -12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Тож власні числа матриці – корені рівняння $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 12 & -4 \\ -1 & -(3+\lambda) & 1 \\ -1 & -12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Ці корені: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Розглянемо власне число $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{cases} (3-1)x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 - (3+1)x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 12x_2 + (6-1)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$. Ранг відповідної матриці = 2.

//якщо $\lambda_1 = 1$ – простий корінь, то відповідний ранг на 1 менше ніж розмірність//

$$\begin{cases} 2x_1+12x_2-4x_3=0 \\ -x_1-4x_2+x_3=0 \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \end{cases}$$, розв'язок системи: $x_1=-C$, $x_2=C/2$, $x_3=C$.

Тож будь-який вектор $X_1=\begin{pmatrix} -C \\ C/2 \\ C \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1=1$. Але у відповідь достатньо виписати якийсь один вектор такої структури, наприклад $C=2$ та $X_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Частина відповіді: $\lambda_1=1$, $X_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Аналогічно можна показати, що $\lambda_2=2$, $X_2=\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\lambda_2=3$, $X_3=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1=1$, $X_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2=2$, $X_2=\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\lambda_2=3$, $X_3=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Примітка 1: власні числа матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ є коренями рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Примітка 2: якщо маємо матрицю з дійсних чисел, то власні вектори, що відповідають ***різним*** власним числам, є лінійно-незалежними.

Нехай R^n і R^m – два лінійних простори відповідно вимірності n та m. Якщо визначено закон (правило), за яким кожному вектору $\overline{x}$ лінійного простору R^n ставиться у відповідність вектор $\overline{y}$ із простору R^m, то кажуть, що задано **оператор (перетворення, відображення),** який діє із простору R^n у простір R^m і записують $\overline{y}=\hat{A}(\overline{x})$ або $\overline{y}=\hat{A}\overline{x}$.

Оператор $\hat{A}$ називається **лінійним**, якщо для будь-яких векторів $\overline{x_1}$ та $\overline{x_2}$ простору і будь-якого числа λ із числової множини (поля) Λ виконано:

1) $\hat{A}(\overline{x_1}+\overline{x_2})=\hat{A}(\overline{x_1})+\hat{A}(\overline{x_2})$ – властивість адитивності;

2) $\hat{A}(\lambda\overline{x})=\lambda\hat{A}(\overline{x})$ – властивість однорідності

(у такому разі кажуть, що лінійний оператор $\hat{A}$ діє у просторі R^n над числовим полем Λ).

Вектор $\overline{y}=\hat{A}(\overline{x})$ називають **образом вектора** $\overline{x}$, а сам вектор $\overline{x}$ – **прообразом вектора** $\overline{y}$.

Якщо простори R^n і R^m збігаються, то оператор $\hat{A}$ відображає простір R^n сам у себе. Наприклад, якщо оператор перетворює будь-який вектор $\overline{x}$ арифметичного простору R^n у вектор $k\overline{x}$, де $k-const$, то це лінійний оператор простору R^n. Він називається **оператором подібності**, а його дію записують $\hat{A}(\overline{x})=k\overline{x}$.

Приклад 2. Диференціювання функцій є лінійним оператором у просторі $C^{\infty}_{[a,b]}$ нескінченно дифференційовних на відрізку $[a;b]$ функцій (можна записати $\hat{D}(\overline{x})=x'(t)$).

Серед лінійних операторів особливу роль відіграють одиничний та нульовий оператори. **Одиничний оператор** $\hat{E}$ ставить у відповідність кожному вектору $\overline{x}$ той самий вектор, тобто

$$\hat{E}(\overline{x})=\overline{x},$$

а **нульовий оператора** $\hat{O}$ будь-який вектор $\overline{x}$ завжди переводить у нульовий вектор:

$$\hat{O}(\overline{x})=\overline{0}.$$

Зображення лінійного оператора матрицею. Нехай у лінійному просторі R^n діє лінійний оператор $\hat{A}$, $\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}$ – деякий базис простору. Запишемо розкладання довільного вектора $\overline{x}$ за даним базисом:

$$\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+\ldots+x_n\overline{e_n}.$$

В силу лінійності оператора дістаємо

$$\hat{A}\overline{x}=x_1\hat{A}(\overline{e_1})+x_2\hat{A}(\overline{e_2})+\ldots+x_n\hat{A}(\overline{e_n}).$$

Оскільки вектор $\hat{A}(\overline{e_i})$ ($i=1,2,...,n$) є вектором простору R^n, то його можна розкласти за базисом $\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}$:

$$\hat{A}(\overline{e_i}) = a_{1i}\overline{e_1} + a_{2i}\overline{e_2} + \ldots + a_{ni}\overline{e_n}\,, \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Отже,

$$\hat{A}\overline{x} = x_1(a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \ldots + a_{n1}\overline{e_n}) + x_2(a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \ldots + a_{n2}\overline{e_n}) + \ldots +$$
$$+x_n(a_{1n}\overline{e_1} + a_{2n}\overline{e_2} + \ldots + a_{nn}\overline{e_n}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\overline{e_1} +$$
$$+(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\overline{e_2} + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)\overline{e_n}.$$

З іншого боку, вектор $\overline{y} = \hat{A}(\overline{x})$ у базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ можна записати як

$$\hat{A}\overline{x} = y_1\overline{e_1} + y_2\overline{e_2} + \ldots + y_n\overline{e_n}\,.$$

Беручи до уваги єдиність розкладання вектора за даним базисом, порівняємо праві частини отриманих вище рівностей:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається **матрицею оператора** $\hat{A}$ у базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$, а ранг матриці A – **рангом оператора** $\hat{A}$.

Отже, кожному лінійному оператору у даному базисі відповідає матриця. Справедливо й обернене твердження: будь-якій матриці n-го порядку відповідає лінійний оператор n-вимірного простору.

Зауваження 1. Коли у даному базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ лінійний оператор має матрицю A, то базисні вектори перетворюються під дією оператора за допомогою стовпців матриці A, а координати довільного вектора $\overline{x}$ – за допомогою рядків цієї матриці.

Зауваження 2. Матриця одиничного оператора є одиничною, а нульового оператора – нульовою.

Зв'язок між вектором $\overline{x}$ та його образом $\overline{y} = \hat{A}(\overline{x})$ скорочено у матричній формі має наступний вигляд:

$$Y = AX\,,$$

де A – матриця лінійного оператора, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$.

Приклад 3. У просторі R^3 лінійний оператор $\hat{A}$ у базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ задається матрицею

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}.$$

Знайти образ $\overline{y}=\hat{A}(\overline{x})$ вектора $\overline{x}=4\overline{e_1}-3\overline{e_2}+\overline{e_3}$.

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ -13\\ -18\end{pmatrix}\Rightarrow\ \overline{y}=10\overline{e_1}-13\overline{e_2}-18\overline{e_3}.$$

Приклад 4. Знайти у базисі $\overline{e_1},\overline{e_2}$ матрицю оператора $\hat{A}$, що переводить вектори $\overline{x_1}=\overline{e_1}+2\overline{e_2}$, $\overline{x_2}=3\overline{e_1}-\overline{e_2}$ відповідно у вектори $\overline{a_1}=6\overline{e_1}+9\overline{e_2}$ і $\overline{a_2}=11\overline{e_1}-8\overline{e_2}$.

Очевидно, матриця A оператора $\hat{A}$ є квадратною матрицею другого порядку $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Тоді $\overline{a_1}=A\overline{x_1}$, $\overline{a_2}=A\overline{x_2}$ $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 9\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ -8\end{pmatrix}.$$

Отже, перемноживши матриці, приходимо до такої системи рівнянь

$$\begin{cases}a+2b=6,\\ 3a-b=11,\\ c+2d=9,\\ 3c-d=-8,\end{cases}\quad \text{звідки}\quad \begin{cases}a=4,\\ b=1,\\ c=-1,\\ d=5.\end{cases}\Rightarrow\quad A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Зв’язок між матрицями лінійного оператора у різних базисах. Матриці A і A^* лінійного оператора $\hat{A}$ у базисах $\overline{e_1},\overline{e_2},\dots,\overline{e_n}$ і $\overline{e_1^*},\overline{e_2^*},\dots,\overline{e_n^*}$ зв’язані співвідношенням

$$A^*=C^{-1}AC$$

де $C-$ матриця переходу від старого базису $\overline{e_1},\overline{e_2},\dots,\overline{e_n}$ до нового $\overline{e_1^*},\overline{e_2^*},\dots,\overline{e_n^*}$.

Матриці A і $A^*=C^{-1}AC$, де $C-$ невироджена матриця, називаються **подібними**, тобто подібні матриці – це матриці одного й того ж самого лінійного оператора у різних базисах.

Приклад 5. Лінійний оператор $\hat{A}$ у базисі $\overline{e_1},\overline{e_2}$ має матрицю

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Знайти його матрицю у базисі $\overline{e_1^*}=2\overline{e_1}-\overline{e_2}$, $\overline{e_2^*}=\overline{e_1}+2\overline{e_2}$.

Матриця переходу від старого базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ до нового базису $\overline{e_1^*}, \overline{e_2^*}$ має вид $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, а обернена матриця $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Матриця оператора у новому базисі

$$A^* = C^{-1}AC = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 & -11/5 \\ 9/5 & 22/5 \end{pmatrix}.$$

Функція – правило або закон, що ставить числу у відповідність число.

Функціонал – правило або закон, що ставить функції у відповідність число. Найпростіший приклад функціоналу – визначений інтеграл. Функції $f(x)$ ставиться у відповідність число $I = \int_a^b f(x)dx$.

Оператор – правило або закон, що ставить функції у відповідність функцію. Простий приклад оператору – похідна. Функції $f(x)$ ставиться у відповідність функція $g(x) = f'(x)$.

Вище наведено визначення оператору, що переводить функцію у функцію. В матеріалі, що розглядається, оператор переводить вектор в вектор. **Оператор** – правило або закон, що ставить вектору у відповідність вектор. Найпростіший приклад – лінійний оператор, який задається певною матрицею. Тоді він вектору $\vec{x}$ у відповідність ставить вектор $\vec{y} = \hat{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}$ за правилом множення матриці *n*х*n* на стовпчик *n*х1.

Дії над лінійними операторами. Обернений оператор

Нехай $\hat{A}$ і $\hat{B}$ – два лінійних оператори, що діють у лінійному просторі R^n.

Оператори $\hat{A}$ і $\hat{B}$ вважають ***рівними***, якщо $\hat{A}(\overline{x}) = \hat{B}(\overline{x})$ для будь-якого вектора $\overline{x} \in R^n$. Очевидно, якщо оператори рівні, то у будь-якому базисі вони мають рівні матриці.

Сумою двох лінійних операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ називають такий оператор $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, який кожному вектору $\overline{x}$ ставить у відповідність вектор $\hat{C}(\overline{x}) = \hat{A}(\overline{x}) + \hat{B}(\overline{x})$.

Добутком лінійного оператора $\hat{A}$ **на число** λ називають такий оператор $\hat{C} = \lambda \hat{A}$, що для кожного вектора $\overline{x}$ виконується рівність $\hat{C}(\overline{x}) = \lambda \hat{A}(\overline{x})$.

Добутком двох лінійних операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ називають таке перетворення $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, яке послідовно діє, причому спочатку на вектор діє оператор $\hat{B}$, а потім оператор $\hat{A}$, тобто для кожного вектора $\overline{x}$ справедливо $\hat{C}(\overline{x}) = (\hat{A}\hat{B})(\overline{x}) = \hat{A}(\hat{B}(\overline{x}))$

Властивості введених дій над операторами.

1^0. Оператори $(\hat{A}+\hat{B})$, $\lambda\hat{A}$, $\hat{A}\hat{B}$ є лінійними.

2^0. Матриця суми операторів $(\hat{A}+\hat{B})$ у будь-якому базисі, дорівнює сумі матриць операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$.

3^0. Матриця оператора $\lambda\hat{A}$ у будь-якому базисі, дорівнює матриці оператора $\hat{A}$ у цьому базисі, помноженій на число λ.

4^0. Матриця добутку операторів $\hat{A}\hat{B}$ у будь-якому базисі, дорівнює добутку матриці оператора $\hat{A}$ на матрицю оператора $\hat{B}$ у тому ж базисі;

5^0. Множина U всіх лінійних операторів, діючих у лінійному просторі, з уведеними операціями додавання та множення на число, утворює лінійний простір, причому $\dim U = n^2$.

Лінійний оператор $\hat{B}$ називається ***оберненим*** до оператора $\hat{A}$, якщо $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}=\hat{E}$, де $\hat{E}$ – одиничний оператор. Оператор, обернений до оператора $\hat{A}$, позначається символом $\hat{A}^{-1}$.

Якщо оператор $\hat{A}$ у деякому базисі визначається матрицею A, то обернений оператор у цьому ж самому базисі буде визначатися оберненою матрицею A^{-1}. Тому **необхідною і достатньою умовою існування оберненого оператора** $\hat{A}^{-1}$ до оператора $\hat{A}$ є невиродженість матриці A, тобто у якому-небудь базисі визначник матриці оператора $\hat{A}$ має бути відмінним від нуля.

Приклад 6. Лінійний оператор $\hat{A}$ у базисі $\overline{e_1}=(1;2)$, $\overline{e_2}=(2;3)$ має матрицю $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, а лінійний оператор $\hat{B}$ у базисі $\overline{e_1^*}=(3;1)$, $\overline{e_2^*}=(4;2)$ – матрицю $B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$. Знайти матриці S і D відповідно операторів $\hat{S}=\hat{A}+\hat{B}$ і $\hat{D}=\hat{A}\hat{B}$ у базисі $\overline{e_1^*},\overline{e_2^*}$.

Оскільки матриці операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ задані у різних базисах, то спочатку знайдемо матрицю A^* оператора $\hat{A}$ у базисі $\overline{e_1^*},\overline{e_2^*}$. Для цього визначимо координати векторів $\overline{e_1^*},\overline{e_2^*}$ у базисі $\overline{e_1},\overline{e_2}$ та запишемо матрицю C переходу від старого базису $\overline{e_1},\overline{e_2}$ до нового $\overline{e_1^*},\overline{e_2^*}$.

$$\begin{cases}\overline{e_1^*} = a_{11}\overline{e_1} + a_{12}\overline{e_2},\\ \overline{e_2^*} = a_{21}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2}.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = a_{21}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a_{11} + 2a_{12} = 3,\\ 2a_{11} + 3a_{12} = 1,\\ a_{21} + 2a_{22} = 4,\\ 2a_{21} + 3a_{22} = 2.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_{11} = -7,\\ a_{12} = 5,\\ a_{21} = -8,\\ a_{22} = 6.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{e_1^*} = -7\overline{e_1} + 5\overline{e_2},\\ \overline{e_2^*} = -8\overline{e_1} + 6\overline{e_2}.\end{cases}$$

Звідси $C = \begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix}$. Обернена матриця $C^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & 8\\ -5 & -7\end{pmatrix}$.

Тепер визначаємо матрицю A^* оператора $\hat{A}$ у базисі $\overline{e_1^*}, \overline{e_2^*}$:

$$A^* = C^{-1}AC = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & 8\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40 & 38\\ -71/2 & -34\end{pmatrix}.$$

Матриці S і D суми та добутку операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ у базисі $\overline{e_1^*}, \overline{e_2^*}$, дорівнюють відповідно сумі та добутку матриць цих операторів:

$$S = A^* + B = \begin{pmatrix}40 & 38\\ -71/2 & -34\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}44 & 44\\ -59/2 & -25\end{pmatrix};$$

$$D = A^*B = \begin{pmatrix}40 & 38\\ -71/2 & -34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}388 & 582\\ -346 & -519\end{pmatrix}.$$

Приклад 7.

8. Лінійний оператор $\hat{A}$ задано матрицею $A = \begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$ в базисі $\vec{e}_{1,2,3}$. Дано вектор $\vec{x} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Знайти вектор $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ в даному базисі.

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\ -13\\ -18\end{pmatrix}. \boxed{\vec{y} = 10\vec{e}_1 - 13\vec{e}_2 - 18\vec{e}_3}.$$

Приклад 8.

9. Знайти в базисі $\vec{e}_{1,2}$ матрицу оператора $\hat{A}$, що переводить вектори $\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{x}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, у вектори $\vec{a}_1 = 6\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2$, $\vec{a}_2 = 11\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$, відповідно.

$\vec{a}_1 = \hat{A}\vec{x}_1$, $\quad\vec{a}_2 = \hat{A}\vec{x}_2$. $\quad\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = a + 2b \\ 9 = c + 2d \\ 11 = 3a - b \\ -8 = 3c - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 6 = a + 2b \\ 11 = 3a - b \end{cases} \\ \begin{cases} 9 = c + 2d \\ -8 = 3c - d \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 5 \end{cases}.$$

$$\boxed{\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}.$$

Приклад 9.

10. Лінійний оператор $\hat{A}$ в базисі $\vec{e}_{1,2}$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Новий базис: $\vec{e}_1^{\,*} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2^{\,*} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Знайти матрицю оператора $\hat{A}$ в новому базисі.

Матриця переходу: C. $\vec{e}_1^{\,*} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ – тобто перший ***СТОВПЧИК*** матриці переходу буде дорівнювати $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\vec{e}_2^{\,*} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ – тобто другий ***СТОВПЧИК*** матриці переходу дорівнює $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^* = C^{-1}AC = \boxed{\begin{pmatrix} 8/5 & -11/5 \\ 9/5 & 22/5 \end{pmatrix}}$.

Вектор $\bar{x}$ називається **власним вектором** лінійного оператора $\hat{A}$ (матриці A), якщо знайдеться таке число λ, що

$$\hat{A}(\bar{x}) = \lambda\bar{x}. \tag{1}$$

Число λ називається **власним числом** (**значенням**) оператора $\hat{A}$ (матриці A), що відповідає власному вектору $\bar{x}$.

З означення випливає, що власний вектор під дією лінійного оператора переходить у вектор, колінеарний самому собі, тобто множиться на деяке число.

Запишемо рівність (1) у матричній формі $AX = \lambda X$, де A – матриця оператора $\hat{A}$ у деякому базисі, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – матриця-стовпець координат власного вектора. Перейшовши до координатної форми запису, маємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Перепишемо систему так, щоб у правій частині рівнянь були нулі

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Для існування ненульових розв'язків цієї однорідної системи необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Визначник $|A-\lambda E|$ є многочленом n-го степеня відносно λ. Цей многочлен називають **характеристичним многочленом оператора** $\hat{A}$ (матриці A), а рівняння (2) – **характеристичним рівнянням оператора** (матриці A). Його корені λ є власними числами оператора $\hat{A}$. Множина всіх власних чисел оператора називається його **спектром**. Якщо λ_i – якесь власне число зі спектра оператора, то нетривіальні розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь $(A-\lambda_i E)X = 0$ утворюють власні вектори оператора, що відповідають даному власному числу.

Властивості власних векторів.

1^0. Кожному власному векторові відповідає єдине власне число.

2^0. Якщо $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2}$ – власні вектори лінійного оператора, що відповідають одному власному числу λ, то їх сума також є власним вектором оператора з власним числом λ.

3^0. Якщо $\overline{x}$ – власний вектор лінійного оператора, що відповідає власному числу λ, то будь-який вектор $\alpha\overline{x}$ ($\alpha - const$), колінеарний вектору $\overline{x}$, також є власним вектором оператора з тим самим власним числом λ.

Приклад 10. Знайти власні числа та власні вектори оператора $\hat{A}$, що діє у двовимірному просторі і має матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1.$$

Отже, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ – власні числа оператора (його спектр).

При $\lambda_1 = 5$ система набуває вигляду $\begin{cases} (3-5)x_1 - 2x_2 = 0, \\ -4x_1 + (1-5)x_2 = 0. \end{cases}$

Звідки $\overline{x_1} = (-1;1)\mu_1$ – власний вектор оператора, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 5$ ($\mu_1 \neq 0$ – дійсне число).

Аналогічно при $\lambda_2 = -1$ маємо $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$ І тоді власному числу $\lambda_2 = -1$ відповідає вектор $\overline{x_2} = (1;2)\mu_2$, ($\mu_2 \neq 0$ –дійсне число).

Приклад 11. Нехай лінійний оператор $\hat{A}$ діє у лінійному просторі R^3 над полем K раціональних чисел і має у деякому базисі матрицю $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти всі власні вектори оператора $\hat{A}$.

Запишемо характеристичне рівняння даного лінійного оператора:

$$A = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідси, обчисливши визначник, отримаємо $\lambda^2 - \lambda^3 = 0$, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Значення коренів раціональні, тому це власні числа оператора. Система рівнянь для визначення власного вектора при $\lambda = 0$ запишеться так:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

тут кількість невідомих дорівнює $n = 3$, а ранг матриці системи дорівнює $r = 1$. Це означає, що вимірність лінійного простору розв'язків є $n - r = 3 - 1 = 2$. А відтак фундаментальна система розв'язків складається з: $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ і всю множину власних векторів, які відповідають власному числу $\lambda = 0$ можна записати так:

$$\overline{x} = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2, \quad \mu_1, \mu_2 \in K, \quad \mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0.$$

При $\lambda_3 = 1$ система для визначення власного вектора набуває вигляду

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Тут ранг матриці системи $r = 2$ і фундаментальна система розв'язків складається з одного вектора $X = (1;1;1)^T$, а вся множина власних векторів, що відповідають власному числу $\lambda_3 = 1$, має вигляд $\overline{x} = \mu_3 X$, $\mu_3 \in K$, $\mu_3 \neq 0$.

Теорема 1. *Якщо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$ оператора $\hat{A}$ має n <u>різних</u> коренів $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, то відповідні їм власні вектори $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$ утворюють базис n-вимірного простору, у якому діє оператор, а матриця A оператора у цьому базисі має діагональний вигляд.*

Оскільки під дією оператора базисні вектори перетворюються за допомогою стовпців матриці A, то **матриця оператора набуває діагонального вигляду**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

<u>Зауваження</u>. Характеристичний многочлен оператора у такому випадку має вигляд

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n) = 0\,.$$

Приклад 12. З’ясувати, чи можна звести до діагонального вигляду оператор, заданий матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$, шляхом переходу до нового базису, знайти цей базис та відповідну йому матрицю. Записати матрицю C, що зводить матрицю оператора до діагонального вигляду.

Власні числа оператора знайдемо з характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 12 & -4 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ -1 & -12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0\,.$$

Розв’язавши це рівняння, отримаємо власні числа оператора $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Вони всі різні, а відтак відповідні їм власні вектори $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ утворюють базис тривимірного простору, у якому і діє оператор. Матриця A цього оператора у цьому базисі має діагональний вигляд. Тепер шукаємо власні вектори оператора:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0, \\ -x_1 + (-3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - 12x_2 + (6-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 1$ $\quad \begin{cases} 2x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \overline{x_1} = (-2;1;2)\mu_1, \\ \mu_1 \neq 0 - const. \end{matrix}$

При $\lambda_2 = 2$ $\quad \begin{cases} x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \overline{x_2} = (-8;3;7)\mu_2, \\ \mu_2 \neq 0 - const. \end{matrix}$

При $\lambda_2 = 3$ $\quad \begin{cases} 12x_2 - 4x_3 = 0, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - 12x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \overline{x_3} = (-3;1;3)\mu_3, \\ \mu_3 \neq 0 - const. \end{matrix}$

Зокрема, власним числам $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ відповідають власні вектори $\overline{x_1} = (-2;1;2)$, $\overline{x_2} = (-8;3;7)$, $\overline{x_3} = (-3;1;3)$. Прийнявши їх за базисні вектори, записуємо діагональну матрицю оператора у цьому базисі $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. З координат власних векторів оператора як із стовпців будуємо матрицю, що зводить оператор до діагонального вигляду

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

тобто $C^{-1}AC = A^*$ (матриці A та A^* – подібні).

Теорема 2. Для того щоб існував базис із власних векторів оператора $\hat{A}$, необхідно і достатньо, щоб кількість лінійно незалежних власних векторів, які відповідають кожному власному числу оператора збігалась з кількістю кратності власного числа, як кореня характеристичного многочлена оператора. Тільки у цьому випадку у базисі із власних векторів матриця оператора має діагональний вигляд, де власні числа стоять на головній діагоналі матриці з урахуванням їх кратності.

Приклад 13. Чи можна матрицю A лінійного оператора $\hat{A}$ над полем дійсних чисел, звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису, якщо

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}?$$

а) Характеристичний многочлен оператора $(3-\lambda)^2 = 0$ має подвійний корінь $\lambda = 3$. Система для визначення власних векторів оператора:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0, \\ x_1 + 0 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$$

Її єдиний нетривіальний розв'язок (із точністю до числового множника) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, а множина власних векторів $\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mu$, $\mu \neq 0$ при різних дійсних значеннях μ визначає лінійно залежні вектори. Таким чином, власному числу з кратністю 2 відповідає лише один лінійно незалежний власний вектор і за теоремою 2 базис із власних векторів оператора $\hat{A}$ побудувати неможливо. Матриця оператора до діагонального вигляду не зводиться.

б) Аналогічно, визначаємо власні числа і власні вектори оператора: при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: $\overline{x} = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2$, $X_1 = (2;1;0)^T$, $X_2 = (-1;0;1)^T$, де $\mu_1, \mu_2 \in K$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$; при $\lambda = -1$ $\overline{x} = \mu_3 X_3$, $X_3 = (3;5;6)^T$, де $\mu_3 \in K$, $\mu_3 \neq 0$. Двократному кореню $\lambda = 0$ відповідають два лінійно незалежних вектори. Тому за теоремою 2 у базисі $\overline{e_1} = (2;1;0)^T$, $\overline{e_2} = (-1;0;1)^T$, $\overline{e_3} = (3;5;6)^T$ матриця оператора стає діагональною:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приклади ортогоналізації базису

Якщо $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right) = 0$, то **вектори ортогональні**, інакше не ортогональні, операція скалярного добутку аналогічна до відповідної операції у «звичайному 3D просторі»:

$\vec{f}_1 = \left(x_1, y_1, z_1, t_1\right); \vec{f}_2 = \left(x_2, y_2, z_2, t_2\right); \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + t_1t_2$

Ортогональний базис – базис, в якому всі вектори ортогональні один одному.

7.1. Дано вектори $\vec{f}_1\left(1,-2,2,-3\right)$ и $\vec{f}_2\left(2,-3,2,4\right)$.

Перевірити їх ортогональність та доповнити систему з них до ортогонального базису.

$\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right) = 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-3) + 2\cdot 2 + (-3)\cdot 4 = 2 + 6 + 4 - 12 = 0$ – ортогональні.

Є два вектори: $\vec{f}_1\left(1,-2,2,-3\right)$ и $\vec{f}_2\left(2,-3,2,4\right)$. Знайдемо третій, який їм двом ортогональний (в базисі маємо «назбирати» 4 вектори).

$\vec{f}_1\left(1,-2,2,-3\right)$, $\vec{f}_2\left(2,-3,2,4\right)$. Шукаємо третій у вигляді $\vec{f}_3\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$.

$\begin{cases} \left(\vec{f}_3, \vec{f}_1\right) = 0 \\ \left(\vec{f}_2, \vec{f}_1\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ – це однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь, її розв'язок: $x_3 = C_1; x_4 = C_2; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ФСР такої системи: $\vec{f}_3(2,2,1,0)$ та $\vec{f}_3^*(-17,-10,0,1)$. $\vec{f}_3, \vec{f}_3^*$ обидва ортогональні і до $\vec{f}_1$ і до $\vec{f}_2$. Але $\left(\vec{f}_3, \vec{f}_3^*\right) = -54$ – $\vec{f}_3$ та $\vec{f}_3^*$ не ортогональні один одному, значить $\vec{f}_{1,2,3,3^*}$ – це базис, але ще не ортогональний базис. Тоді «доберемо» вектор $\vec{f}_4$, щоб $\vec{f}_{1,2,3,4}$ був ортогональним базисом.

Шукаємо його у вигляді $\vec{f}_4 = \vec{f}_3^* + \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 + \gamma \vec{f}_3$,

$$\begin{cases} \left(\vec{f}_4, \vec{f}_1\right) = 0 \\ \left(\vec{f}_4, \vec{f}_2\right) = 0 \\ \left(\vec{f}_4, \vec{f}_3\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\vec{f}_3^* + \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 + \gamma \vec{f}_3, \vec{f}_1\right) = 0 \\ \left(\vec{f}_3^* + \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 + \gamma \vec{f}_3, \vec{f}_2\right) = 0 \\ \left(\vec{f}_3^* + \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 + \gamma \vec{f}_3, \vec{f}_3\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\vec{f}_3^*, \vec{f}_1\right) + \alpha\left(\vec{f}_1, \vec{f}_1\right) + \beta\left(\vec{f}_2, \vec{f}_1\right) + \gamma\left(\vec{f}_3, \vec{f}_1\right) = 0 \\ \left(\vec{f}_3^*, \vec{f}_2\right) + \alpha\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right) + \beta\left(\vec{f}_2, \vec{f}_2\right) + \gamma\left(\vec{f}_3, \vec{f}_2\right) = 0 \\ \left(\vec{f}_3^*, \vec{f}_3\right) + \alpha\left(\vec{f}_1, \vec{f}_3\right) + \beta\left(\vec{f}_2, \vec{f}_3\right) + \gamma\left(\vec{f}_3, \vec{f}_3\right) = 0 \end{cases}$$ – це система 3на3, з якої знаходимо α, β, γ.

$$\begin{cases} \underbrace{\left(\vec{f}_3^*, \vec{f}_1\right)}_{=0} + \alpha\underbrace{\left(\vec{f}_1, \vec{f}_1\right)}_{=18} + \beta\underbrace{\left(\vec{f}_2, \vec{f}_1\right)}_{=0} + \gamma\underbrace{\left(\vec{f}_3, \vec{f}_1\right)}_{=0} = 0 \\ \underbrace{\left(\vec{f}_3^*, \vec{f}_2\right)}_{=0} + \alpha\underbrace{\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right)}_{=0} + \beta\underbrace{\left(\vec{f}_2, \vec{f}_2\right)}_{=33} + \gamma\underbrace{\left(\vec{f}_3, \vec{f}_2\right)}_{=0} = 0 \\ \underbrace{\left(\vec{f}_3^*, \vec{f}_3\right)}_{=-54} + \alpha\underbrace{\left(\vec{f}_1, \vec{f}_3\right)}_{=0} + \beta\underbrace{\left(\vec{f}_2, \vec{f}_3\right)}_{=0} + \gamma\underbrace{\left(\vec{f}_3, \vec{f}_3\right)}_{=9} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18\alpha = 0 \\ 33\beta = 0 \\ -54 + 9\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 6 \end{cases}.$$

Тож $\vec{f}_4 = \vec{f}_3^* + 0\vec{f}_1 + 0\vec{f}_2 + 6\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Ортогональний базис:}}$ $\vec{f}_1(1,-2,2,-3)$, $\vec{f}_2(2,-3,2,4)$, $\vec{f}_3 = (2,2,1,0)$, $\vec{f}_4 = (-5,2,6,1)$.

Приклад 14.

7.2. Дано вектори $\vec{f}_1(1,-2,2,-3)$, $\vec{f}_2(2,-3,2,5)$, $\vec{f}_3(1,1,1,1)$. Побудувати ортонормований базис на основі цих векторів. Спершу треба просто побудувати ортогональний базис, а потім вже його нормувати.

Доберемо четвертий вектор ортогональний до всіх трьох $\vec{f}_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

$$\begin{cases}\left(\vec{f}_1,\vec{f}_4\right)=x_1-2x_2+2x_3-3x_4=0\\ \left(\vec{f}_2,\vec{f}_4\right)=2x_1-3x_2+2x_3+5x_4=0\\ \left(\vec{f}_3,\vec{f}_4\right)=x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases},\quad \begin{vmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\1&1&1\end{vmatrix}=5\neq 0,\quad x_{1,2,3}\quad \text{залежні,}\quad x_4=C,$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}-37/5\\3/5\\29/5\\1\end{pmatrix}.$$ Оберемо $C=5$ (для того, щоб отримати цілі числа, щоб легше було рахувати) отримаємо $\vec{f}_4(-37,3,29,5)$.

Вектори $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ один одному не ортогональні. Однак можна «в лоб» перевірити, що $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$, $\vec{f}_4$ лінійно-незалежні, тобто утворюють базис (хоча цей базис не ортогональний). Важливо: якби вектори $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$, $\vec{f}_4$ були б лінійно-залежними і не утворювали б базис, то на основі системи з них ортонормований базис теж неможливо було б побудувати.

Ортогоналізуємо базис $\vec{f}_1(1,-2,2,-3)$, $\vec{f}_2(2,-3,2,5)$, $\vec{f}_3(1,1,1,1)$, $\vec{f}_4(-37,3,29,5)$ (тобто на його основі побудуємо ортогональний базис).

$\vec{e}_1=\vec{f}_1(1,-2,2,-3)$ – перший вектор базису є першим вектором ортогонального базису, що будується. $\vec{e}_2$ обирається так, щоб він був ортогональним до $\vec{e}_1$:

$$\vec{e}_2=\vec{f}_2+\alpha\vec{e}_1=\vec{f}_2+\alpha_1\vec{f}_1,$$

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\left(\vec{f}_1,\vec{e}_2\right)=\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2+\alpha\vec{f}_1\right)=0\Rightarrow\underbrace{\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2\right)}_{=-3}+\alpha\underbrace{\left(\vec{f}_1,\vec{f}_1\right)}_{=18}=0\Rightarrow\alpha=\frac{1}{6},$$

$$\vec{e}_2=\vec{f}_2+\alpha\vec{f}_1=\vec{f}_2+\frac{1}{6}\vec{f}_1\Rightarrow\vec{e}_2\left(\frac{13}{6},-\frac{10}{3},\frac{7}{3},\frac{9}{2}\right).$$

$\vec{e}_3$ обирається так, щоб він був ортогональним до $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$:

$$\vec{e}_3=\vec{f}_3+\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2,$$

$$\begin{cases}(\vec{e}_3,\vec{e}_2)=0\\(\vec{e}_3,\vec{e}_1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\underbrace{\left(\vec{f}_3,\vec{e}_2\right)}_{=\frac{17}{3}}+\alpha\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}_{=0}+\beta\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}_{=\frac{83}{2}}=0\\ \underbrace{\left(\vec{f}_3,\vec{e}_1\right)}_{=-2}+\alpha\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}_{=18}+\beta\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_1)}_{=0}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{17}{3}+\frac{83}{2}\beta=0\\-2+18\alpha=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = -\dfrac{34}{249} \\ \alpha = \dfrac{1}{9} \end{cases}, \ \vec{e}_3 = \vec{f}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_3\left(\frac{203}{249}, \frac{307}{249}, \frac{75}{83}, \frac{13}{249}\right).$$

$\vec{e}_4$ обирається так, щоб він був ортогональним до $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ та $\vec{e}_3$:

$$\vec{e}_4 = \vec{f}_4 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3,$$

$$\begin{cases} (\vec{e}_4,\vec{e}_3) = 0 \\ (\vec{e}_4,\vec{e}_2) = 0 \\ (\vec{e}_4,\vec{e}_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{(\vec{f}_4,\vec{e}_3)}_{=0} + \alpha\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_3)}_{=0} + \beta\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_3)}_{=0} + \gamma\underbrace{(\vec{e}_3,\vec{e}_3)}_{=\frac{748}{249}} = 0 \\ \underbrace{(\vec{f}_4,\vec{e}_2)}_{=0} + \alpha\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}_{=0} + \beta\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}_{=\frac{83}{2}} + \gamma\underbrace{(\vec{e}_3,\vec{e}_2)}_{=0} = 0 \\ \underbrace{(\vec{f}_4,\vec{e}_1)}_{=0} + \alpha\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}_{=18} + \beta\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_1)}_{=0} + \gamma\underbrace{(\vec{e}_3,\vec{e}_1)}_{=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0, \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\vec{e}_4 = \vec{f}_4 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{e}_4(-37,3,29,5).$$

Тож $\vec{e}_1(1,-2,2,-3)$, $\vec{e}_2\left(\frac{13}{6},-\frac{10}{3},\frac{7}{3},\frac{9}{2}\right)$, $\vec{e}_3\left(\frac{203}{249},\frac{307}{249},\frac{75}{83},\frac{13}{249}\right)$, $\vec{e}_4(-37,3,29,5)$ – ортогональний базис. А далі його треба нормувати, тобто запропонувати на його основі такий базис, щоб «довжина» кожного вектора дорівнювала 1, під «довжиною» вектора розуміється корінь квадратний зі скалярного добутку вектору сам на себе, аналогічно до такої властивості у «звичайному» 3D просторі.

$$\vec{e}_1^* = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}} = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{18}} \Rightarrow \vec{e}_1^*\left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{2}{\sqrt{18}}, \frac{2}{\sqrt{18}}, -\frac{3}{\sqrt{18}}\right),$$

$$\vec{e}_2^* = \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}} = \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{83/2}} \Rightarrow \vec{e}_2^*\left(\sqrt{\frac{2}{83}}\frac{13}{6}, -\sqrt{\frac{2}{83}}\frac{10}{3}, \sqrt{\frac{2}{83}}\frac{7}{3}, \sqrt{\frac{2}{83}}\frac{9}{2}\right),$$

$$\vec{e}_3^* = \frac{\vec{e}_3}{\sqrt{(\vec{e}_3,\vec{e}_3)}} = \frac{\vec{e}_3}{\sqrt{748/249}} \Rightarrow \vec{e}_3^*\left(\sqrt{\frac{249}{748}}\frac{203}{249}, \sqrt{\frac{249}{748}}\frac{307}{249}, \sqrt{\frac{249}{748}}\frac{75}{83}, \sqrt{\frac{249}{748}}\frac{13}{249}\right),$$

$$\vec{e}_4^* = \frac{\vec{e}_4}{\sqrt{(\vec{e}_4,\vec{e}_4)}} = \frac{\vec{e}_4}{\sqrt{2244}} \Rightarrow \vec{e}_4^*\left(\frac{-37}{\sqrt{2244}}, \frac{3}{\sqrt{2244}}, \frac{29}{\sqrt{2244}}, \frac{5}{\sqrt{2244}}\right),$$

Система векторів $\vec{e}^*_{1,2,3,4}$ є ортонормованим базисом, тобто всі 4 вектори $\vec{e}^*_{1,2,3,4}$ ортогональні один одному та $(\vec{e}_1^*,\vec{e}_1^*) = (\vec{e}_2^*,\vec{e}_2^*) = (\vec{e}_3^*,\vec{e}_3^*) = (\vec{e}_4^*,\vec{e}_4^*) = 1$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9. Квадратичні форми

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок перетворення квадратичної форми в канонічний вигляд різними способами

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися подавати квадратичну форму симетричною матрицею; зводити квадратичні форми до канонічного вигляду

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

Квадратична форма – це функція вигляду

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^T A X, a_{ij} = a_{ji},$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця квадратичної форми.

Матриця квадратичної форми завжди симетрична.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + ...$$

$$... + a_{nn}x_n^2 + \left(a_{12} + \underbrace{a_{21}}_{=a_{12}} \right) x_1 x_2 + \left(a_{13} + \underbrace{a_{21}}_{=a_{13}} \right) x_1 x_3 + ... +$$

$$+ \left(a_{n-1,1} + \underbrace{a_{n,n-1}}_{=a_{n-1,n}} \right) x_{n-1} x_n = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + ...$$

$$... + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

Приклад 1. За квадратичною формою

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_2x_3$$

відновити її матрицю.

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\underbrace{1}_{=a_{11}}\cdot x_1^2+\underbrace{3}_{=a_{22}}x_2^2+\underbrace{\left(-4\right)}_{=a_{33}}x_3^2+2\cdot\underbrace{6}_{=a_{12}}x_1x_2+2\cdot\underbrace{\left(-5\right)}_{=a_{13}}x_1x_3+2\cdot\underbrace{1}_{=a_{23}}\cdot x_2x_3,$$

$$A=\begin{pmatrix}1&6&-5\\6&3&1\\-5&1&-4\end{pmatrix}.$$

Приклад 2. За матрицею $A=\begin{pmatrix}-4&0&-7\\0&1&3\\-7&3&-1\end{pmatrix}$ відновити квадратичну форму.

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=-4x_1^2+x_2^2-x_3^2+2\cdot 0\cdot x_1x_2+2\cdot\left(-7\right)\cdot x_1x_3+2\cdot 3\cdot x_2x_3=$$
$$=-4x_1^2+x_2^2-x_3^2-14x_1x_3+6x_2x_3.$$

Перетворення квадратичної форми в канонічний вигляд на основі пошуку власних векторів та власних значень матриці квадратичної форми

Властивості матриці квадратичної форми:

1. Власні числа дійсні
2. Власні вектори, що відповідають **різним власним числам**, ортогональні.

Матриця переходу до канонічного вигляду складається зі стовпців, які являють собою ортогональні один одному нормовані на 1 власні вектори матриці квадратичної форми.

Коефіцієнти при квадратах змінних у знайденому канонічному вигляді є власними значеннями матриці квадратичної форми.

Приклад 3. Власні числа – це не кратні корені рівняння $\det\left(A-\lambda I\right)=0$.

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3,\quad A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$. Шукаємо власні значення та власні вектори цієї матриці.

$\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow-\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8=0$. Легко вгадується корінь $\lambda=1$.

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8 & \lambda-1 \\ \cline{2-2} -\lambda^3+\lambda^2 \quad\quad\quad\;\; & -\lambda^2+2\lambda+8 \\ \hline 2\lambda^2+6\lambda \quad\;\; & \\ 2\lambda^2-2\lambda \quad\;\; & \\ \hline 8\lambda-8 & \\ 8\lambda-8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(\lambda-1)(-\lambda^2+2\lambda+8)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=4.$$

1. $\lambda_1=1$.

$$AV_1=\lambda_1 V_1 \Rightarrow \left\{ V_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_3=-2x_2 \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \end{cases}$$

$x_2=C$, $V_1=\begin{pmatrix} 2C \\ C \\ -2C \end{pmatrix}$, нормуємо на 1: $\sqrt{(2C)^2+C^2+(-2C)^2}=1 \Rightarrow 9C^2=1$, обираємо одне конкретне значення C, наприклад, $C=1/3$; $\lambda_1=1, V_1=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

2. $\lambda_2=-2$.

$$AV_2=\lambda_2 V_2 \Rightarrow \left\{ V_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=2x_1 \\ x_3=2x_1 \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \end{cases}$$

$x_1=C$, $V_2=\begin{pmatrix} C \\ 2C \\ 2C \end{pmatrix}$, нормуємо на 1: $\sqrt{(C)^2+(2C)^2+(2C)^2}=1 \Rightarrow 9C^2=1$, обираємо одне конкретне значення C, наприклад, $C=1/3$; $\lambda_2=-2, V_2=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

3. $\lambda_3 = 4$.

$$AV_3 = \lambda_3 V_3 \Rightarrow \left\{ V_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \end{cases}$$

$x_3 = C$, $V_3 = \begin{pmatrix} 2C \\ -2C \\ C \end{pmatrix}$, нормуємо на 1: $\sqrt{(2C)^2 + (-2C)^2 + (C)^2} = 1 \Rightarrow 9C^2 = 1$,

обираємо одне конкретне значення С, наприклад, $C = 1/3$; $\lambda_3 = 4$, $V_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Нагадування. Нехай Q – матриця переходу, тоді перетворення $X = QY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ переводить форму $f(x_1, x_2, x_3)$ у форму $g(y_1, y_2, y_3)$, яка має канонічний вигляд, при цьому матриця нового вигляду форми через матрицю старого вигляду форми виражається як $A_{\text{нова}} = Q^T \cdot A_{\text{стара}} \cdot Q$.

Тож в цьому прикладі: $Q = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$,

$$Q := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad Q^T \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

В новій матриці форми на головній діагоналі якраз і стоять числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$, які є власними числами «старої» матриці квадратичної форми.

$$X = QY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \end{cases}.$$

Перетворення $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \end{cases}$ переводить квадратичну форму $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ в канонічний вигляд $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$.

Перевіримо цю відповідь:

```
(Debug) In[3]:= x1[y1_, y2_, y3_] = 2/3*y1 + 1/3*y2 + 2/3*y3;
               x2[y1_, y2_, y3_] = 1/3*y1 + 2/3*y2 - 2/3*y3;
               x3[y1_, y2_, y3_] = -2/3*y1 + 2/3*y2 + 1/3*y3;

(Debug) In[6]:= Expand[2 (x1[y1, y2, y3])^2 + (x2[y1, y2, y3])^2 - 4*x1[y1, y2, y3]*x2[y1, y2, y3] - 4*x2[y1, y2, y3]*x3[y1, y2, y3]]

(Debug) Out[6]=
               y1^2 - 2 y2^2 + 4 y3^2
```

Приклад 4. Коли кратні корені є.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Корені цього рівняння: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

1. $\lambda_1 = -3$ – не кратний корінь, йому відповідає тільки один лінійно-незалежний власний вектор, нормуємо його на 1, отримаємо $V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, як це робити – див. викладки вище.

2. $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. $AV = 3V$, $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3x_1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \\ \text{ЛінійноЗалежнеРівняння} \end{cases}$$

Нехай $x_1 = C_1$, $x_3 = C_2$, $x_2 = \dfrac{C_1 + C_2}{2}$, будь-який вектор структури $V = \begin{pmatrix} C_1 \\ \dfrac{C_1 + C_2}{2} \\ C_2 \end{pmatrix}$ буде власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda = 3$. Згідно властивості власних векторів матриці квадратичної форми, всі ці вектори автоматично ортогональні до V_1. Кратність кореня $\lambda = 3$ дорівнює двом, тож треба підібрати два (рівно стільки, скільки кратність) власних вектора структури $V = \begin{pmatrix} C_1 \\ \dfrac{C_1 + C_2}{2} \\ C_2 \end{pmatrix}$, щоб вони були ортогональні **один одному!** Тоді набереться три власних вектора матриці квадратичної форми, які один одному ортогональні! Не забуваємо, що треба ще нормувати на 1.

Підберемо «руками». Наприклад, обираємо $C_1 = 2$, $C_2 = 0$, $\tilde{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Підберемо $\tilde{V}_3 = \begin{pmatrix} C_1 \\ \dfrac{C_1 + C_2}{2} \\ C_2 \end{pmatrix}$ так, щоб він був ортогональним до $\tilde{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (нульовий скалярний добуток):

$2C_1 + 1 \cdot \dfrac{C_1 + C_2}{2} + 0 \cdot C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -5C_1$, $\tilde{V}_3 = \begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1 \\ -5C_1 \end{pmatrix}$, обираємо, наприклад, $C_1 = 1$, матимемо $\tilde{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. А тепер нормуємо:

$$V_2 = \frac{\tilde{V}_2}{\sqrt{\left(\tilde{V}_2, \tilde{V}_2\right)}} = \frac{\tilde{V}_2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\tilde{V}_2}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \frac{\tilde{V}_3}{\sqrt{\left(\tilde{V}_3, \tilde{V}_3\right)}} = \frac{\tilde{V}_2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-5)^2}} = \frac{\tilde{V}_2}{\sqrt{30}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Тобто власному числу $\lambda_1 = -3$ відповідає власний вектор $V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, власному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ відповідають власні вектори $V_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ та $V_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$, всі ці власні вектори один одному ортогональні і нормовані на 1.

$$Q = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$ – матриця перетворення.

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ – матриця квадратичної форми в канонічному вигляді.

Перетворення $X = QY \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{30}} y_3 \\ x_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{6}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_2 - \dfrac{2}{\sqrt{30}} y_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_1 - \dfrac{5}{\sqrt{30}} y_3 \end{cases}$ переводить квадратичну форму до канонічного вигляду $g(y_1, y_2, y_3) = -3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$.

In[8]:= $\text{x1[y1\_, y2\_, y3\_]} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,\text{y1} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\text{y2} + \dfrac{1}{\sqrt{30}}\,\text{y3};$

$\text{x2[y1\_, y2\_, y3\_]} = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,\text{y1} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\text{y2} - \dfrac{2}{\sqrt{30}}\,\text{y3};$

$\text{x3[y1\_, y2\_, y3\_]} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,\text{y1} - \dfrac{5}{\sqrt{30}}\,\text{y3};$

```
Expand[2 * (x1[y1, y2, y3])^2 - (x2[y1, y2, y3])^2 + 2 (x3[y1, y2, y3])^2 +
раскрыть скобки
   4 * x1[y1, y2, y3] * x2[y1, y2, y3] - 2 * x1[y1, y2, y3] * x3[y1, y2, y3] +
   4 * x2[y1, y2, y3] * x3[y1, y2, y3]]
```

Out[11]= $-3\,\text{y1}^2 + 3\,\text{y2}^2 + 3\,\text{y3}^2$

Задача діагоналізації матриці. Треба знайти перетворення, що переводить матрицю в діагональний вигляд, тобто у вигляд, де ненульові елементи знаходяться лише по головній діагоналі.

Нехай є матриця A, яку треба діагоналізувати. Виписується матриця перетворення:

nй власний вектор

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

другий власний вектор

перший власний вектор

Перетворення переводить матрицю в діагональний вигляд: $A' = C^{-1}AC$,

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{ – власні числа.}$$

Для можливості діагоналізації матриці C^{-1} має існувати, а значить всі її стовпці мають бути лінійно-незалежними! Тож треба знайти ***лінійно-незалежний*** набір власних векторів матриці A.

Якщо всі власні числа різні (тобто корені рівняння $\det(A-\lambda I)=0$ всі є різними, серед них немає співпадаючих коренів; I – одинична матриця) , то цей набір автоматично виходить лінійно-незалежним, наприклад (див. приклад попереднього заняття):

$$A=\begin{pmatrix}3 & 12 & -4\\ -1 & -3 & 1\\ -1 & -12 & 6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & -8 & -3\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 3\end{pmatrix},\ A'=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Далі розглянемо приклад що робити, якщо деякі власні числа співпадають (тобто існує корінь рівняння $\det(A-\lambda I)=0$, кратність якого не менше двох).

Приклад 5: $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

$$\left|\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}5-\lambda & -1 & -1\\ 0 & 4-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0,$$ корені цього рівняння:

$\lambda_1=3$ є простим коренем (серед трьох коренів рівняння зустрічається 1 раз), а $\lambda_2=\lambda_3=5$ – корінь кратності 2.

Корінь $\lambda_1=3$:

$$AV_1=\lambda_1V_1\Rightarrow\left\{V_1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\ x_2-x_3=0\\ \text{ЛінійноЗалежнаСтрока}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{x_3=C\}\Rightarrow\begin{cases}x_1=C\\ x_2=C\Rightarrow V_1=C\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\\ x_3=C\end{cases}$$, обираємо один конкретно взятий вектор цієї структури, тож власному числу $\lambda_1=3$ відповідає власний вектор $V_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

Корінь кратності 2 $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$:

$$AV_2 = \lambda_2 V_2 \Rightarrow \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ \text{ТочноТакеРівняння}, \\ \text{ТочноТакеРівняння} \end{cases}$$

тож будь-який вектор структури $V_2 = \begin{pmatrix} B \\ C \\ -C \end{pmatrix}$ є власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$. Але у нас стоїть задача діагоналізувати матрицю. Корінь $\lambda = 5$ – корінь кратності 2, тож йому треба співставити два лінійно незалежних вектора (вони автоматично будуть лінійно-незалежними до V_1, бо відповідають різним з V_1 власним числам; але їх ще треба «підігнати» лінійно-незалежними між собою!)

«Руками підберемо»: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – ці двоє лінійно-незалежні.

Тож остаточно набір власних чисел і відповідних їх лінійно-незалежних власних векторів: $\lambda_1 = 3$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Тоді: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Існують випадки, коли діагоналізувати матрицю неможливо.

Приклад 6: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \text{ – корінь кратності 2.}$$

$$AV = 3V \Rightarrow \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 3x_1 \\ x_1 + 3x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Будь-який власний вектор структури $V=\begin{pmatrix}0\\C\end{pmatrix}$ є власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda=3$. Але неможливо підібрати два власних вектори структури $\begin{pmatrix}0\\C\end{pmatrix}$, щоб були лінійно-незалежні один одному!

$\lambda_1\begin{pmatrix}0\\C_1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\C_2\end{pmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=-\lambda_2\dfrac{C_2}{C_1}$ – два ненульових числа, пов'язаних таким зв'язком, задовольняють це рівняння, тобто ці вектори лінійно-залежні.

$\lambda=3$ – корінь кратності 2, а йому відповідає лише один можливий лінійно-незалежний вектор, наприклад $V=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Тож діагоналізувати таку матрицю неможливо.

Про всяк випадок: приклади алгебраїчних операцій з комплексними числами $a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$.

1. Додавання. $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, тоді

$$z=z_1+z_2=a_1+b_1i+a_2+b_2i\Rightarrow\boxed{z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}.$$

Відповідно, додаються і дійсні, і уявні частини.

Приклад: $z_1=1+i$, $z_2=4-3i$, $z_1+z_2=1+i+4-3i=5-2i$.

2. Віднімання. $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, тоді

$$z=z_1-z_2=a_1+b_1i-(a_2+b_2i)=a_1-a_2+b_1i-b_2i\Rightarrow\boxed{z=z_1+z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i}$$

Приклад: $z_1=1+i$, $z_2=4-3i$, $z_1-z_2=1+i-(4-3i)=1+i-4+3i=-3+4i$.

3. Множення. $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, тоді

$$z=z_1z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1(a_2+b_2i)+b_1i(a_2+b_2i)=$$

$$=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_2b_1i^2\Rightarrow\left\{i=\sqrt{-1}\Rightarrow i^2=-1\right\}\Rightarrow\boxed{z=(a_1a_2-b_2b_1)+(a_1b_2+a_2b_1)i}$$

Приклад: $z_1=1+i$, $z_2=4-3i$,

$$z_1z_2=(1+i)(4-3i)=4-3i+4i-3\underbrace{i^2}_{=-1}=4-3i+4i+3=7+i$$

4. Ділення. $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, тоді головна ідея – помножити і поділити на комплексно–спряжене до знаменника, тобто на число $z_2^*=a_2-b_2i$. Це робиться для того, щоб у знаменнику отримати дійсне число.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+a_2b_1i-b_2b_1\overbrace{i^2}^{=-1}}{a_2^2-\cancel{a_2b_2i}+\cancel{a_2b_2i}-b_2^2\underbrace{i^2}_{=-1}}=$$

$$=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+a_2b_1i+b_2b_1}{a_2^2+b_2^2}\Rightarrow\boxed{z=\frac{a_1a_2+b_2b_1}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i}$$

Приклад: $z_1=1+i$, $z_2=4-3i$,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{4-3i}=\frac{(1+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{4+3i+4i+3i^2}{4^2-(3i)^2}=\frac{4+3i+4i-3}{16-9i^2}=$$

$$=\frac{1+7i}{16+9}=\frac{1+7i}{25}=\frac{1}{25}+\frac{7}{25}i.$$

Як працювати з випадком комплексних коренів?

Приклад 7. $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}\sqrt{3}-\lambda & -1\\ 1 & \sqrt{3}-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\left(\sqrt{3}-\lambda\right)^2+1=0\Rightarrow\left(\sqrt{3}-\lambda\right)^2=-1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}-\lambda=+i\\ \sqrt{3}-\lambda=-i\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}-i=\lambda\\ \sqrt{3}+i=\lambda\end{array}\right..$$

$$\lambda_1=\sqrt{3}+i,\ AV_1=\lambda_1V_1\Rightarrow\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\left(\sqrt{3}+i\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x_2=+ix_1\\ x_1=ix_2\end{cases}.$$

Ці рівняння однакові, бо $x_1=ix_2\Rightarrow ix_1=i^2x_2=-x_2$ – що збігається з першим рівнянням. $V_1=\begin{pmatrix}iC\\ C\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$, так як нам треба один конкретно взятий вектор такої структури, то візьмемо $V_1=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$.

$$\lambda_2=\sqrt{3}-i,\ AV_2=\lambda_2V_2\Rightarrow\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\left(\sqrt{3}-i\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_2=ix_1\\ x_1=-ix_2\end{cases}.$$

Ці рівняння однакові, бо $x_1 = -ix_2 \Rightarrow ix_1 = -i^2 x_2 = x_2$ – що збігається з першим рівнянням. $V_2 = \begin{pmatrix} C \\ iC \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, так як нам треба один конкретно взятий вектор такої структури, то візьмемо $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Набір власних значень і власних векторів матриці:

$\lambda_1 = \sqrt{3} + i$, $V_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \sqrt{3} - i$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Матриця перетворення: $C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$; $A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + i & 0 \\ 0 & \sqrt{3} - i \end{pmatrix}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10. Квадратичні форми. Діагоналізація матриці квадратичної форми. Метод Лагранжа, Якобі

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок діагоналізації матриці квадратичної форми

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися зводити квадратичні форми до канонічного вигляду методом Лагранжа, Якобі, та методом ортогональних перетворень. Ілюструвати закон інерції квадратичних форм. Перевіряти квадратичні форми на знаковизначеність

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

Квадратична форма $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^T A X$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нехай стовпці Y та X пов'язані співвідношенням $X = CY$, (C – квадратна матриця); A –матриця квадратичної форми $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. Тоді в нових змінних матриця квадратичної форми $f\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ буде дорівнювати $C^T A C$.

Приклад 1. Квадратична форма $f\left(x_1, x_2\right)$ задана матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Виписати форму «в лоб», а також знайти $f\left(y_1, y_2\right)$, задану перетворенням $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1^2 + \left(-3\right)x_2^2 + 2 \cdot 2x_1 x_2 \Rightarrow \boxed{f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1 x_2}.$$

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C^T AC = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g(y_1, y_2) = 13y_1^2 + 3y_2^2 + 2\cdot(-17)y_1y_2 \Rightarrow \boxed{g(y_1, y_2) = 13y_1^2 + 3y_2^2 - 34y_1y_2}$$

Можна було б робити і по-іншому: $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$,

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 \Rightarrow g(y_1, y_2) =$$

$$= 2(2y_1 - 3y_2)^2 - 3(y_1 + y_2)^2 + 4(2y_1 - 3y_2)(y_1 + y_2) = \boxed{13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3y_2^2}$$

Зведення квадратичних форм до канонічного вигляду (Діагоналізація квадратичних форм)

Квадратична форма в канонічному вигляді не має «перехресних» добутків. Матриця квадратичної форми в канонічному вигляді, окрім членів на головній діагоналі, містить лише нулі.

Як знайти перетворення, що переводить квадратичну форму в діагональний вигляд?

Метод Лагранжа зведення форми $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до канонічного вигляду

1. Подивитись чи є з діагональних елементів матриці форми ненульові.

Якщо ні, то зробити перетворення $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_j = y_j;\ j \geq 3 \end{cases}$, і записати форму в нових змінних $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$**.** Тоді в новій формі вони з'являться.

Якщо так, то нехай $a_{11} \neq 0$ (цього завжди можна добитися перенумерувавши змінні). Беремо частину, що містить x_1, і виділяємо повний квадрат:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + g(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}^2x_1^2 + 2a_{12}a_{11}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}a_{11}x_1x_n\right) + g(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2 + \tilde{g}(x_2, \ldots, x_n),$$

далі робимо перетворення $\begin{cases} z_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ z_j = x_j;\ j \geq 2 \end{cases}$**,** це дозволяє дістатися того, що форма в нових змінних $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ буде містити всі компоненти $a_{1j} = a_{j1} = 0$ (ту частину форми, що містила x_1, діагоналізовано).

Далі працюємо з формою $\tilde{g}(z_2,...,z_n)$, аналогічно приводимо її до канонічного вигляду. На кожному кроці розмірність тієї частини матриці форми, що ще не діагоналізована, зменшується на 1.

Для довідки: $(a_1+a_2+...+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+...+2a_{n-1}a_n$.

Приклад 2. Діагоналізувати форму $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1+y_2 \\ x_2 = y_1-y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=C}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}},$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^TAC=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=f_1(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2+6y_1y_3-2y_2y_3=$$
$$=\underbrace{y_1^2+6y_1y_3+9y_3^2}_{=(y_1+3y_3)^2}-9y_3^2-y_2^2-2y_2y_3 \quad .$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1+3y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}, \boxed{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}},$$

$$f_1(y_1,y_2,y_3)=f_2(z_1,z_2,z_3)=z_1^2-z_2^2-2z_2z_3-9z_3^2.$$

$$f_2(z_1,z_2,z_3)=z_1^2-z_2^2-2z_2z_3-9z_3^2=z_1^2-\left(z_2^2+2z_2z_3+9z_3^2\right)=$$
$$=z_1^2-\left(z_2^2+2z_2z_3+z_3^2+8z_3^2\right)=z_1^2-(z_2+z_3)^2-8z_3^2$$

$$\begin{cases} t_1 = z_1 \\ t_2 = z_2 + z_3 \\ t_3 = z_3 \end{cases}, \quad \boxed{\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}}, \quad f_2(z_1, z_2, z_3) = \boxed{f_3(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 - t_2^2 - 8t_3^2} \; -$$

канонічний вигляд. Залишилось «зібрати» перетворення:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 3x_3 \\ t_2 = 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + x_3 \\ t_3 = x_3 \end{cases}.$$

Або $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 - 4t_3 \\ x_2 = t_1 - t_2 - 2t_3 \\ x_3 = t_3 \end{cases}.$

Тож остаточно:

$f_3(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 - t_2^2 - 8t_3^2$ – канонічний вигляд.

Перетворення, яке до нього приводить: $\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 - 4t_3 \\ x_2 = t_1 - t_2 - 2t_3 \\ x_3 = t_3 \end{cases}$

Як перевірити цей результат:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 =$

$= (t_1 + t_2 - 4t_3)(t_1 - t_2 - 2t_3) + 2(t_1 + t_2 - 4t_3)t_3 + 4(t_1 - t_2 - 2t_3)t_3 = t_1^2 - t_2^2 - 8t_3^2$

Приклад 3: Діагоналізувати квадратичну форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 .$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3=$$

$$=\frac{1}{6}\left(36x_1^2+30x_2^2+42x_3^2-24x_1x_2+24x_1x_3\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\begin{array}{l}\left(6x_1\right)^2-2\cdot 6x_1\cdot 2x_2+2\cdot 6x_1\cdot 2x_3\underbrace{-2\cdot 2x_2\cdot 2x_3+\left(2x_2\right)^2+\left(2x_3\right)^2}_{\text{ДоПовногоКвадрату}}+\\ +\underbrace{2\cdot 2x_2\cdot 2x_3-4x_2^2-4x_3^2}_{\text{ВіднялиРанішеДодане}}+30x_2^2+42x_3^2\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\left(6x_1-2x_2+2x_3\right)^2+8x_2x_3-4x_2^2-4x_3^2+30x_2^2+42x_3^2\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(6x_1-2x_2+2x_3\right)^2+\frac{4}{3}x_2x_3-\frac{2}{3}x_2^2-\frac{2}{3}x_3^2+$$

$$+5x_2^2+7x_3^2=\frac{1}{6}\left(6x_1-2x_2+2x_3\right)^2+\frac{4}{3}x_2x_3+\frac{13}{3}x_2^2+\frac{19}{3}x_3^2$$

$$\begin{cases}y_1=6x_1-2x_2+2x_3\\ y_2=x_2\\ y_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2&2\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$, тоді «нова» форма

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=f_1\left(y_1,y_2,y_3\right)=\frac{1}{6}y_1^2+\frac{4}{3}y_2y_3+\frac{13}{3}y_2^2+\frac{19}{3}y_3^2.$$

$$\frac{13}{3}y_2^2+\frac{4}{3}y_2y_3+\frac{19}{3}y_3^2=$$

$$=\frac{1}{13/3}\left(\left(\frac{13}{3}\right)^2y_2^2+2\cdot\frac{13}{3}y_2\cdot\frac{2}{3}y_3+\left(\frac{2}{3}y_3\right)^2-\left(\frac{2}{3}y_3\right)^2+\frac{13}{3}\frac{19}{3}y_3^2\right)=$$

$$=\frac{1}{13/3}\left(\left(\frac{13}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3\right)^2+27y_3^2\right)=\frac{3}{13}\left(\frac{13}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3\right)^2+\frac{81}{13}y_3^2$$

Заміна змінних $\begin{cases}z_1=y_1\\ z_2=\frac{13}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3;\\ z_3=y_3\end{cases}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&13/3&2/3\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}.$

$f_1\left(y_1,y_2,y_3\right)=f_2\left(z_1,z_2,z_3\right)=\frac{1}{6}z_1^2+\frac{3}{13}z_2^2+\frac{81}{13}z_3^2$ – канонічний вигляд.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 13/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 13/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/13 & -5/13 \\ 0 & 3/13 & -2/13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Канонічний вигляд квадратичної форми $f_2(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{6} z_1^2 + \frac{3}{13} z_2^2 + \frac{81}{13} z_3^2$.

До нього призводить перетворення: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6} z_1 + \frac{1}{13} z_2 - \frac{5}{13} z_3 \\ x_2 = \frac{3}{13} z_2 - \frac{2}{13} z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$

Перетворення, що переводить квадратичну форму в канонічний вигляд, може бути не єдино можливим! Відповідно, сам канонічний вигляд квадратичної форми теж може бути не єдино можливим!

Метод Якобі

Якщо всі «ліві верхні» кутові мінори матриці квадратичної форми ненульові:

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,\ \ldots,$$

то існує перетворення, що переводить форму до канонічного вигляду $f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, где $\lambda_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$, $\Delta_0 \equiv 1$.

Приклад 4.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3,\ A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = 6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 26,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 162,$$

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{1}{6}, \qquad \lambda_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}, \qquad \lambda_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{26}{162} = \frac{13}{81},$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{6}y_1^2 + \frac{3}{13}y_2^2 + \frac{13}{81}y_3^2.$$

Існує багато перетворень, що переводять одну й ту ж квадратичну форму до канонічного вигляду. Але всі канонічні вигляди

$$f(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

мають:

1) однакову кількість додатних λ_i (її називають додатний індекс інерції)

2) однакову кількість від’ємних λ_i (її називають від’ємний індекс інерції)

3) однакову кількість нульових λ_i.

Це твердження називають **законом інерції квадратичних форм**.

$$\textbf{Сигнатура} = \textbf{ДодатнийІндексІнерції} - \textbf{Від'ємнийІндексІнерції}$$

Ранг форми – кількість ненульових λ_i.

В вище розглянутій квадратичній формі:

ДодатнийІндексІнерції = 3
Від’ємнийІндексІнерції = 0
Сигнатура = 3 – 0 = 3
Ранг форми = 3

Ермітова матриця – матриця (в загальному вигляді з комплексних чисел) для якої $a_{ij} = a_{ji}^*$, зірочка означає комплексне спряження.

Якщо матриця з дійсних чисел, то вона ермітова якщо симетрична (тому що для неї $a_{ji} = a_{ji} + 0i \Rightarrow a_{ji}^* = a_{ji} - 0i \Rightarrow a_{ji}^* = a_{ji}$).

Властивості ермітових матриць:

1. Власні числа дійсні
2. Власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні.

Матриця квадратичної форми симетрична та з дійсних чисел, тобто ермітова.

Квадратична форма називається **додатно визначеною**, якщо при будь-яких своїх одночасно не дорівнюючих нулю аргументах вона приймає строго додатні значення.

Квадратична форма називається **від'ємно визначеною**, якщо при будь-яких своїх одночасно не дорівнюючих нулю аргументах вона приймає строго від'ємні значення.

Критерій Сильвестра:

1. Для того, щоб форма була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі «ліві верхні» кутові мінори були додатними ($\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots$, $\Delta_n > 0$).

2. Для того, щоб форма була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі «ліві верхні» кутові мінори чергувались знаками, причому

$$\Delta_1 = a_{11} < 0 \; (\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \ldots).$$

3. В інших випадках форма не є додатно або від'ємно визначеною.

Приклад 5. Знайти всі значення параметру β, при яких форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4-\beta)x_1^2 + (4-\beta)x_2^2 - (2+\beta)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$$

а) додатно визначена;

б) від'ємно визначена.

$$A = \begin{pmatrix} 4-\beta & 2 & -4 \\ 2 & 4-\beta & 4 \\ -4 & 4 & -2-\beta \end{pmatrix}.$$

$\Delta_1 = 4 - \beta$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4-\beta & 2 \\ 2 & 4-\beta \end{vmatrix} = \beta^2 - 8\beta + 12 = (\beta-6)(\beta-2),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4-\beta & 2 & -4 \\ 2 & 4-\beta & 4 \\ -4 & 4 & -2-\beta \end{vmatrix} = -\beta^3 + 6\beta^2 + 36\beta - 216 = -(\beta-6)^2(\beta+6)$$

а) $\begin{cases} 4-\beta > 0 \\ (\beta-6)(\beta-2) > 0 \\ -(\beta-6)^2(\beta+6) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta < 4 \\ \beta \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty) \\ \beta < -6 \end{cases} \Rightarrow \beta < -6$ – відповідь на пункт а);

б) $\begin{cases} 4-\beta < 0 \\ (\beta-6)(\beta-2) > 0 \\ -(\beta-6)^2(\beta+6) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta > 4 \\ \beta \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty) \\ \beta \in (-6; 6) \cup (6; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \beta > 6$ – відповідь на пункт б).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11. Аналітична геометрія на площині. Рівняння прямої

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок побудови рівнянь прямої на площині за різних вихідних параметрів. Визначати взаємне розташування двох прямої, прямої та точки

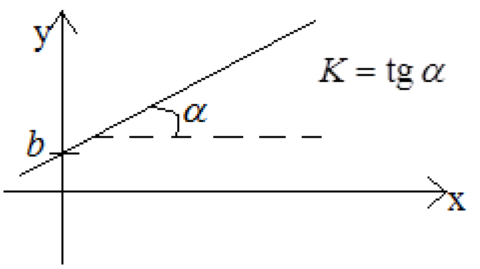
Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися записувати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через дві задані точки, канонічне, нормальне; визначати взаємне розташування двох прямих

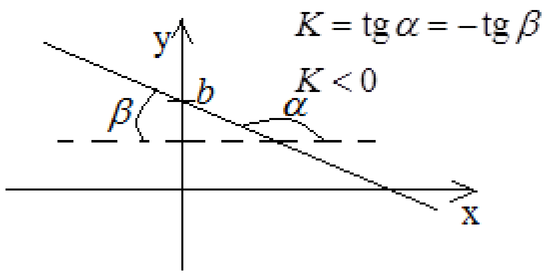
Короткі теоретичні відомості і розв’язання типових прикладів

Прямі на площині

Рівняння прямої (загальне): $ax+by+c=0$.

При $b\neq 0$ $ax+by+c=0 \Rightarrow y=\underbrace{-\frac{a}{b}}_{=K}x+\underbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}_{=B} \Rightarrow y=Kx+B$ – вигляд рівняння прямої, добре відомий зі школи. При $b=0$ рівняння прямої матиме вигляд $x=\text{const}$.





Якщо прямі паралельні, то в них однаковий кутовий коефіцієнт K, зворотне твердження теж вірне.

Якщо прямі $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ перпендикулярні, то $k_1k_2=-1$; зворотне твердження теж вірне.

1. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точок A (–2; 3; –1) і B (2; –5; –3).

$C(0,0,z)$,

$$AC=BC \Rightarrow \sqrt{(-2-0)^2+(3-0)^2+(-1-z)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(-5-0)^2+(-3-z)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+9+(1+z)^2} = \sqrt{4+25+(3+z)^2} \Rightarrow 13+(1+z)^2 = 29+(3+z)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13+1+2z+z^2 = 29+9+6z+z^2 \Rightarrow 14 = 38+4z \Rightarrow z=-6, \boxed{O(0,0,-6)}$$

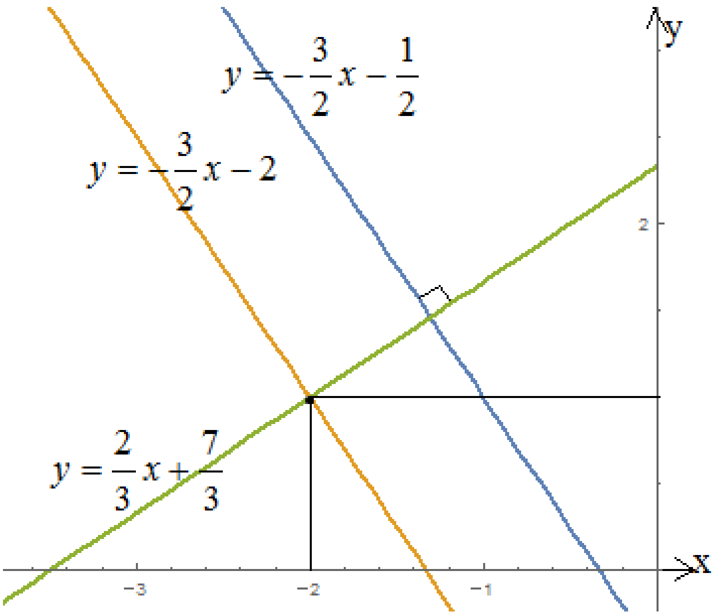
2. Через точку $M\ (-2;\ 1)$ провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $3x+2y+1=0$.

$3x+2y+1=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

Паралельна: $y=-\frac{3}{2}x+b$, $1=-\frac{3}{2}\cdot(-2)+b \Rightarrow b=-2$, $\boxed{y=-\frac{3}{2}x-2}$.

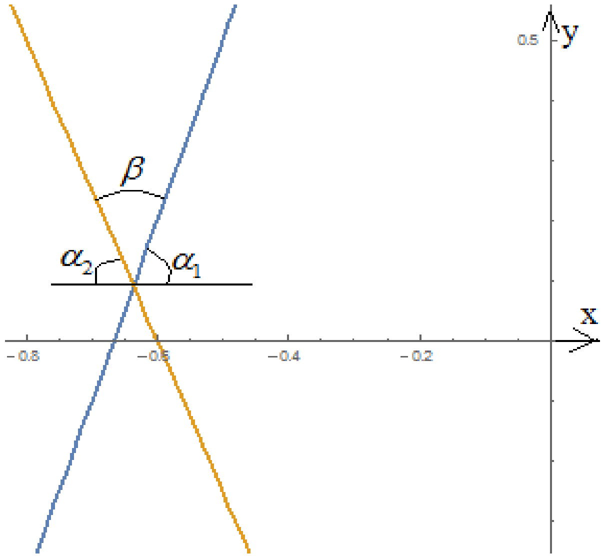
Перпендикулярна: $y=\frac{2}{3}x+b$, $1=\frac{2}{3}\cdot(-2)+b \Rightarrow b=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$, $\boxed{y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}}$.

Як себе перевірити?: побудувати на комп'ютері, задавши йому опцію чітко витримати однаковими «довжини» одиничок по обом осям.



3. Обчислити тангенс кута між прямими $5x+2y+3=0$ і $y=3x+2$.

$5x+2y+3=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$.



$$\text{tg}\,\alpha_2 = \frac{5}{2},\ \text{tg}\,\alpha_1 = 3,$$

$$\beta = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 \Rightarrow \text{tg}\beta = \text{tg}\left(\pi - \alpha_1 - \alpha_2\right) = \text{tg}\left(-\alpha_1 - \alpha_2\right) = -\text{tg}\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) =$$

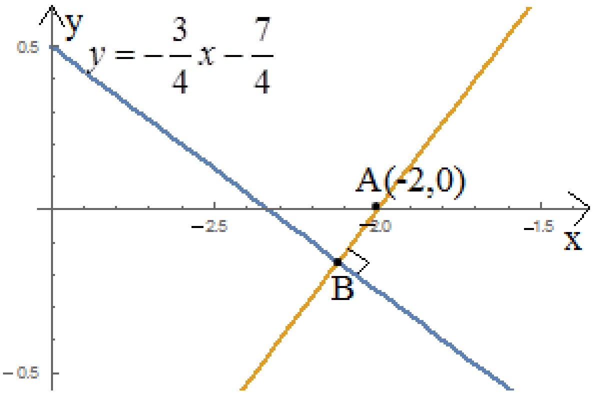
$$= -\frac{\text{tg}\alpha_1 + \text{tg}\alpha_2}{1 - \text{tg}\alpha_1\text{tg}\alpha_2} = -\frac{3 + 2{,}5}{1 - 3\cdot 2{,}5} = \frac{5{,}5}{6{,}5} = \boxed{\frac{11}{13}}$$

Загальна формула: якщо є дві прямі $y = k_1x + b_1$ **та** $y = k_2x + b_2$**, то тангенс кута між ними =** $\left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$ (її можна вивести на основі міркувань, аналогічних до тих, як ми отримали відповідь 11/13 в цьому прикладі).

Перевіримо: $y = -\dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{2}$, $y = 3x + 2$, $\left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\dfrac{3 - (-2{,}5)}{1 + (-2{,}5)\cdot 3}\right| = \dfrac{5{,}5}{6{,}5} = \dfrac{11}{13}$.

4. Знайти відстань від точки M (–2; 0) до прямої $3x + 4y + 7 = 0$.

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$$



Відстань від точки А до «синьої» прямої – ?.

Проведемо через точку А пряму, перпендикулярну «синій» прямій:

$$y=\frac{4}{3}x+b \Rightarrow 0=\frac{4}{3}\cdot(-2)+b \Rightarrow b=\frac{8}{3}.$$

Точка B – основа перпендикуляру, AB – шукана відстань. Точка B – перетин прямих $y=\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$ та $y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$:

$$\begin{cases} y_B=-\frac{3}{4}x_B-\frac{7}{4} \\ y_B=\frac{4}{3}x_B+\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_B+\frac{3}{4}x_B=-\frac{7}{4} \\ y_B-\frac{4}{3}x_B=\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_B \\ x_B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 1 & -4/3 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -7/4 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$A:=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{-4}{3} \end{pmatrix} \quad B:=\begin{pmatrix} \frac{-7}{4} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad A^{-1}\cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{4}{25} \\ -\frac{53}{25} \end{pmatrix}$$

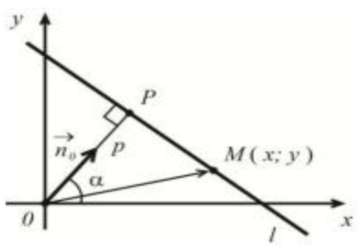
$$B\left(-\frac{53}{25},-\frac{4}{25}\right),\ AB=\sqrt{\left(-2-\left(-\frac{53}{25}\right)\right)^2+\left(0-\left(-\frac{4}{25}\right)\right)^2}=\boxed{\frac{1}{5}}.$$

Загальна формула: якщо є пряма $ax+by+c=0$ та точка (X,Y), то відстань від точки до прямої = $\frac{|aX+bY+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$**.** Цю формулу в загальному вигляді можна вивести аналогічно до міркувань, наведених в цьому прикладі.

У нас пряма $3x+4y+7=0$ та точка (–2,0), відстань = $\frac{|3\cdot(-2)+4\cdot 0+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\frac{x}{-4}-\frac{y}{3}=1$.

10. <u>Нормальне рівняння прямої.</u>



Нехай задано пряму l, позначимо відстань від прямої l до початку координат $p=d(O;l)$, $\overrightarrow{n^\circ}$ - орт вектора нормалі,

$$\overrightarrow{n^\circ}=(\cos\alpha\,;\sin\alpha).$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$$

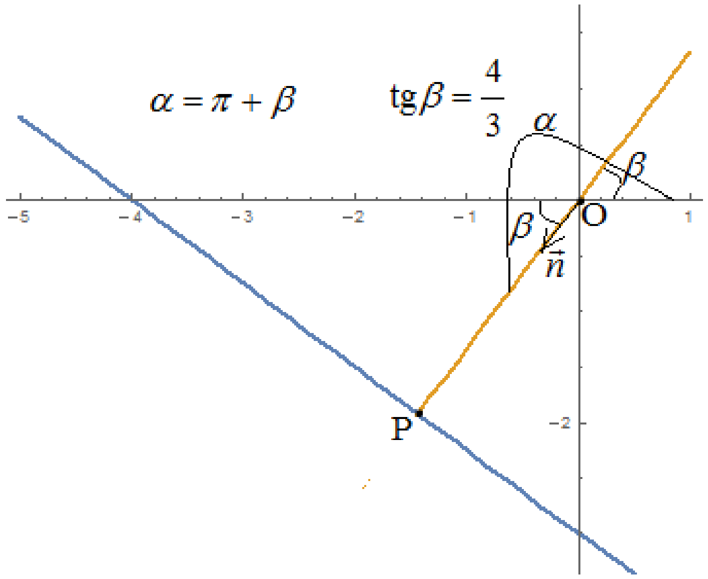
Це - *нормальне рівняння прямої l.*

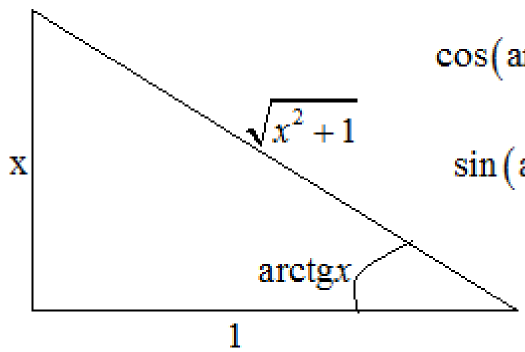
Зауваження. *Щоб загальне рівняння прямої $l: Ax+By+C=0$ звести до нормального рівняння, потрібно домножити його на нормуючий множник*

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

Знак μ вибирається протилежним до знаку вільного члена C.

$$-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y-1=0 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x-3$$ («синя пряма»)





$$\cos(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos\alpha=\cos(\pi+\beta)=-\cos(\beta)=-\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=-\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{3}{5}.$$

$$\sin\alpha=\sin(\pi+\beta)=-\sin(\beta)=-\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=-\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=-\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{4}{5}.$$

$\underbrace{-\frac{1}{4}}_{=a}x+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)}_{=b}y+\underbrace{-1}_{=c}=0$, точка (0,0), відстань від точки до прямої:

$$p=OP=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{5/12}=\frac{12}{5}.$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0\Leftrightarrow\boxed{-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{12}{5}=0}.$$

Дійсно, якщо помножити рівняння на $\mu=+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{1}{5/12}=\dfrac{12}{5}$, отримаємо

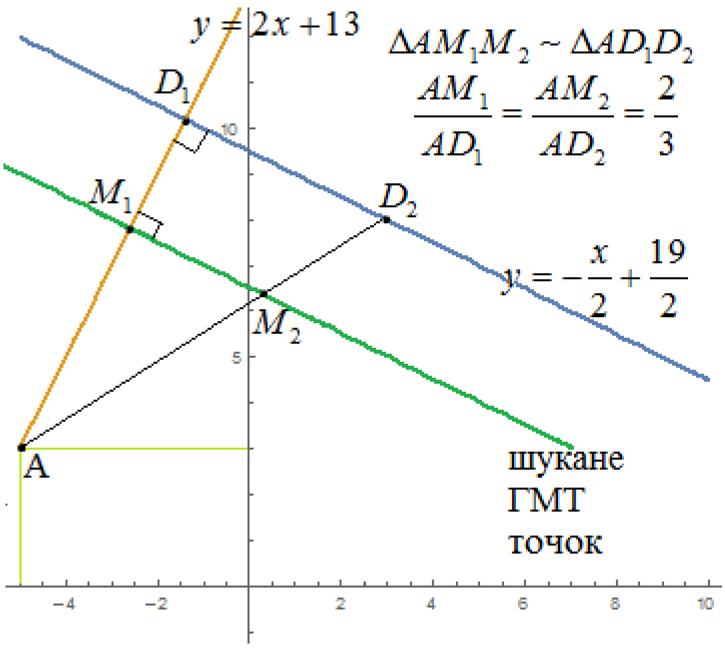
$$-\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{4}x-\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{3}y-\frac{12}{5}=0\Leftrightarrow-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{12}{5}=0.$$

6. З точки *A* (–5; 3) проведені промені до перетину з прямою $x+2y-19=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що $AM:MD=2:1$.

$y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{19}{2}$

Рівняння прямої, перпендикулярної до заданої, що проходить через т. A:

$y=2x+b\Rightarrow 3=2\cdot(-5)+b\Rightarrow b=13;y=2x+13$



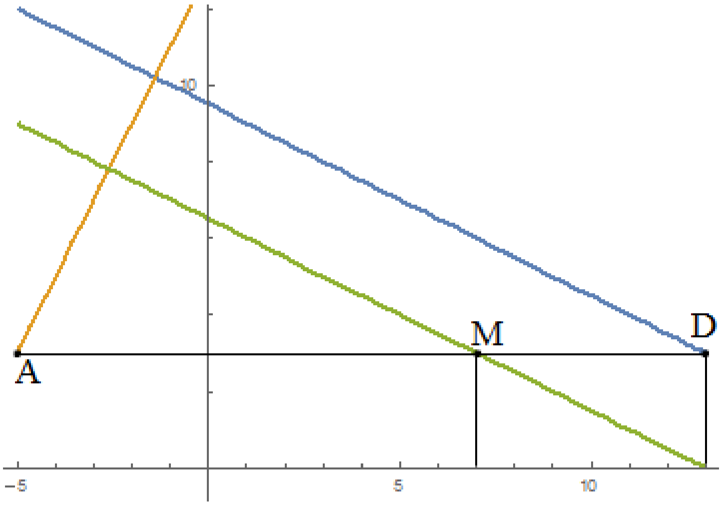
$AD_1=\dfrac{|1\cdot(-5)+2\cdot3-19|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{5}}$ – відстань від точки A до «синьої» прямої.

$$AM_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{18}{\sqrt5}=\frac{12}{\sqrt5}.\ \begin{cases}AM_1=\dfrac{12}{\sqrt5}\\ M_1\in y=2x+13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{(x_{M1}+5)^2+(y_{M1}-3)^2}=\dfrac{12}{\sqrt5}.\\ y_{M1}=2x_{M1}+13\end{cases}$$

З геометричного змісту підходить лише точка $M_1(-2{,}6;7{,}8)$.

Шукане ГМТ – пряма, що паралельна до $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{19}{2}$ та проходить через точку $M_1(-2{,}6;7{,}8)$: $y=-\dfrac{x}{2}+b\Rightarrow 7{,}8=-\dfrac{-2{,}6}{2}+b\Rightarrow b=6{,}5;\boxed{y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{13}{2}}$.

Як можна себе швидко перевірити: для прямої $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{19}{2}$ при $y=3$ $x=13$, для прямої $y=-\frac{x}{2}+\frac{13}{2}$ при $y=3$ $x=7$,



$AM=12$, $MD=6$, дійсно $AM/MD=2/1$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12. Аналітична геометрія у просторі. Рівняння площини, прямої, взаємне розташування

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок приведення загальних рівнянь другого порядку до канонічного вигляду паралельним переносом системи координат та поворотом осей та побудова ліній; побудови рівнянь площини.; знаходження кута між площинами, відстані від точки до площини; побудови рівнянь прямої в просторі.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися будувати рівняння площини і прямої у просторі; визначати кут між прямими, відстані від точки до прямої. Класифікувати лінії другого порядку на площині. Знаходити точки перетину прямої і площини, відстані від точки о прямої, між паралельними прямими. Будувати поверхні другого порядку у просторі

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

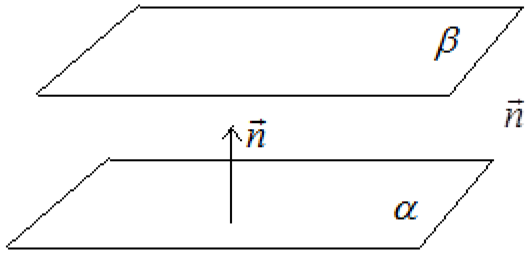
***Рівняння площини* з вектором нормалі** $\vec{n}(a;\, b;\, c)$, яка **проходить через точку** $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$, має вигляд $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Загальне рівняння площини має вигляд $ax + by + cz + d = 0$, де a, b і c не дорівнюють нулю одночасно, причому вектор $\vec{n}(a;\, b;\, c)$ є її вектором нормалі.

Приклад 1.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку $M(2;\, -1;\, 3)$ паралельно до площини $-2x+2y+7z-3=0$;



$$\vec{n} \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} \perp \beta$$

Вектор нормалі до першої площини: $\vec{n}(-2,2,7)$, він же – і до другої площини.

Шукане рівняння площини: $\underset{=-2}{a}\left(x-\underset{=2}{x_0}\right)+\underset{=2}{b}\left(y-\underset{-1}{y_0}\right)+\underset{=7}{c}\left(z-\underset{3}{z_0}\right)=0$

$-2(x-2)+2(y+1)+7(z-3)=0 \Rightarrow \boxed{-2x+2y+7z-15=0}$.

Рівняння прямої, що проходить через дві різні точки в просторі

Якщо пряма, що проходить через дві точки A(x_1, y_1, z_1) і B(x_2, y_2, z_2), такі що $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ і $z_1 \neq z_2$, то **рівняння прямої** можна знайти, якщо використати наступну формулу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Канонічне рівняння прямої в просторі

Якщо відомі координати точки A(x_0, y_0, z_0), що лежить на прямій і напрямного вектора $n = \{l; m; n\}$, то рівняння прямої можна записати у канонічному вигляді, якщо використати наступну формулу

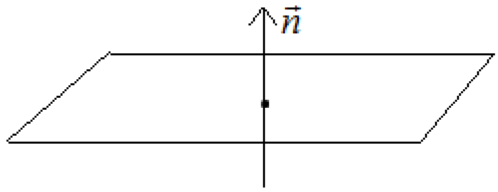
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Приклад 2.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

2) через точку $M(5;2;3)$ перпендикулярно до прямої $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$

$\vec{n}$ – вектор нормалі до площини, він же – напрямний вектор цієї прямої.



$\vec{n}(3,-2,1)$, задача звелась до: побудувати рівняння площини, що проходить через задану точку, і яка має заданий вектор нормалі.

$\underset{=3}{a}\left(x-\underset{=5}{x_0}\right)+\underset{=-2}{b}\left(y-\underset{=2}{y_0}\right)+\underset{=1}{c}\left(z-\underset{=3}{z_0}\right)=0$

$3(x-5)-2(y-2)+(z-3)=0 \Rightarrow \boxed{3x-2y+z-14=0}$

Рівняння площини через три точки (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 3.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

3) через три точки A (–4; 4; –1), B (3; –1; –4), C (–1; 1; 1);

$$\begin{vmatrix} x-(-4) & y-4 & z-(-1) \\ 3-(-4) & -1-4 & -4-(-1) \\ -1-(-4) & 1-4 & 1-(-1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{-19x-23y-6z+10=0}$$

Приклад 4.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

4) через пряму $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-3}{0}$ і точку M (–3; 3; 1);

Давайте на цій прямій візьмемо дві точки.

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{0} \Leftrightarrow \frac{x-(-2)}{-2}=\frac{y-0}{4}=\frac{z-3}{0} \Leftrightarrow \frac{x-(-2)}{-4-(-2)}=\frac{y-0}{4-0}=\frac{z-3}{3-3}.$$

Пряма проходить через дві точки: (–2,0,3) та (–4,4,3). Задача звелась до побудови рівняння площини, що проходить через три точки: (–2,0,3), (–4,4,3), (–3,3,1).

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & y-0 & z-3 \\ -4-(-2) & 4-0 & 3-3 \\ -3-(-2) & 3-0 & 1-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{-8x-4y-2z-10=0}$$

Приклад 5.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

5) проходить через паралельні прямі $\dfrac{x-4}{-19}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{4}$ і $\dfrac{x-15}{-19}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+1}{4}$;

Треба взяти дві точки на першій прямій і одну на другій (або навпаки).

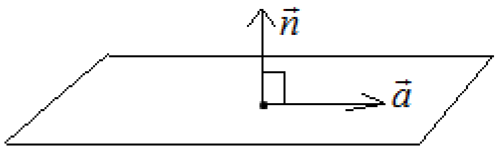
На першій прямій: $\dfrac{x-4}{-19}=\dfrac{y-(-2)}{1}=\dfrac{z-1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{x-4}{-15-4}=\dfrac{y-(-2)}{-1-(-2)}=\dfrac{z-1}{5-1}$ дві точки: $M_1(4,-2,1)$ та $M_2(-15,-1,5)$, на другій прямій точка $M_3(15,-3,-1)$.

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-(-2) & z-1 \\ -15-4 & -1-(-2) & 5-1 \\ 15-4 & -3-(-2) & -1-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x+6y+8z-4=0}$$

Приклад 6.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

6) через точки M (0; 1; 1), N (2; 6; 1) паралельно до вектора $\vec{a}(3;-3;1)$.



$\vec{n}(a,b,c)\perp\vec{a}(3,-3,1)\Rightarrow(\vec{n},\vec{a})=0\Rightarrow 3a-3b+c=0$

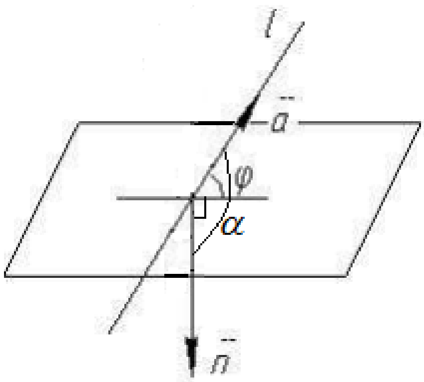
Шукане рівняння: $ax+by+cz+d=0$.

$$\begin{cases}3a-3b+c=0\\ a\cdot 0+b\cdot 1+c\cdot 1+d=0\\ a\cdot 2+b\cdot 6+c\cdot 1+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a-3b+c=0\\ b+c=-d\\ 2a+6b+c=-d\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\ 0&1&1\\ 2&6&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -d\\ -d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5d}{23}\\ -\frac{2d}{23}\\ -\frac{21d}{23}\end{pmatrix}$$

$$\frac{5d}{23}\cdot x-\frac{2d}{23}\cdot y-\frac{21d}{23}\cdot z+d=0\Leftrightarrow\boxed{5x-2y-21z+23=0}$$

Приклад 7.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}$ і площини $5x+4y+4z+63=0$.



Вектор нормалі до площини $\vec{n}(5,4,4)$, напрямний вектор прямої $\vec{a}(-3,1,-2)$.

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\vec{a}||\vec{n}|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{5\cdot(-3)+4\cdot 1+4\cdot(-2)}{\sqrt{5^2+4^2+4^2}\sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{-19}{\sqrt{14}\sqrt{57}}$$

кут α тупий, $\alpha\approx 132{,}3^0$; $\varphi=\alpha-90^0\approx\boxed{42{,}3^0}$.

Формула для обчислення кута між прямою та площиною

Якщо в просторі задані напрямний вектор прямої L

$$\bar{s} = \{l;\ m;\ n\}$$

і рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то кут між цією прямою і площиною можна знайти використав формулу

$$\sin\varphi = \frac{|A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Тож можна по-іншому: $\sin\varphi = \frac{19}{\sqrt{14}\sqrt{57}} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{19}{\sqrt{14}\sqrt{57}}\right) \approx \boxed{42{,}3^0}$

Просто арксинус, бо кут між прямою і площиною завжди береться гострим.

Точка перетину (x,y,z):

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{1} \\ \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2} \\ 5x+4y+4z+63=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=-2 \\ -2y-z=-1 \\ 5x+4y+4z=-63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=3 \\ z=-5 \end{cases}$$

, шукана точка $\boxed{(-11,3,-5)}$.

Приклад 8.

10. Знайти відстань від точки $M(-1;\ 3;\ -1)$ до площини $6x - 2y - 3z + 2 = 0$.

Формула для обчислення відстані від точки до площини

Якщо задано рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$, то відстань від точки $M(M_x, M_y, M_z)$ до площини можна знайти використовуючи наступну формулу:

$$d = \frac{|A\cdot M_x + B\cdot M_y + C\cdot M_z + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d = \frac{|6\cdot(-1)+(-2)\cdot 3+(-3)\cdot(-1)+2|}{\sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2}} = \boxed{1}$$

Приклад 9.

11. Знайти кут між площинами $x - 4y + 8z + 7 = 0$ і $3(x-4) + 4(z-4) = 0$.

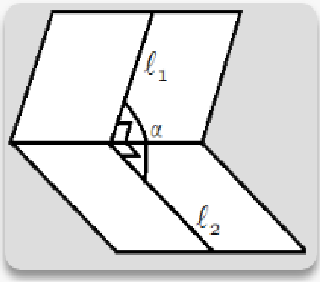
Тобто між $x-4y+8z+7=0$ та $3x+0y+4z-28=0$. Кут між площинами – гострий кут ***<u>між прямими</u>***, що містять вектори нормалі.

Кут між векторами нормалі $\arccos\frac{1\cdot 3+(-4)\cdot 0+8\cdot 4}{\sqrt{1^2+(-4)^2+8^2}\sqrt{3^2+0^2+4^2}} \approx \boxed{39^0}$, він же – кут між площинами.

Двогранний кут між площинами дорівнює куту утвореному нормальними векторами цих площин.

Якщо задані рівняння площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то кут між площинами можна знайти, використавши наступну формулу

$$\cos\alpha = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



Формула для обчислення відстані від точки до прямої в просторі

Якщо $\vec{s} = \{m;\ n;\ p\}$ - напрямний вектор прямої l, $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ - точка що належить прямій, тоді відстань від точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до прямої l можна знайти, використовуючи формулу

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|}$$

Приклад 10.

12. Знайти відстань від точки $M(5;4;-4)$ до прямої $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z}{-3}$.

$\vec{s}(-1,0,-3)$; $M_1(4,-2,0)$; $M_0(5,4,-4)$; $\overrightarrow{M_0M_1} = (4-5,-2-4,0-(-4)) = (-1,-6,4)$

.

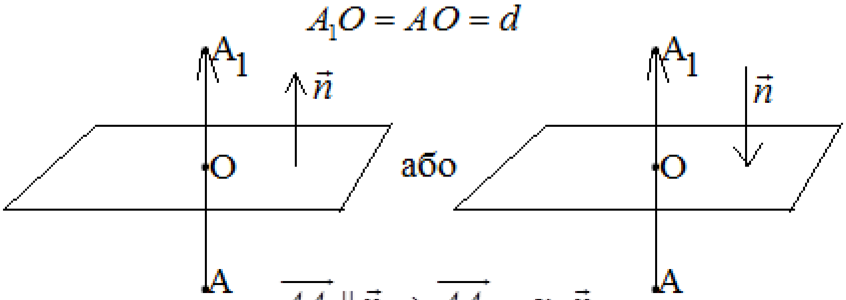
$$\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (18,-7,-6),$$

$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{18^2 + (-7)^2 + (-6)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{409}{10}}}.$$

Приклад 11.

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A $(4;\ -3;\ 6)$ відносно площини $6x + 3y + 5z + 25 = 0$.

$$A_1O = AO = d$$



$$\overrightarrow{AA_1} \parallel \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \alpha \cdot \vec{n}$$

$A_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Вектор $\overrightarrow{AA_1}$ колінеарний до вектору нормалі до площини:

$$\overrightarrow{AA_1} = \alpha \cdot (6,3,5) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4 = 6\alpha \\ y_1 + 3 = 3\alpha \\ z_1 - 6 = 5\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6\alpha + 4 \\ y_1 = 3\alpha - 3 \\ z_1 = 5\alpha + 6 \end{cases}.$$

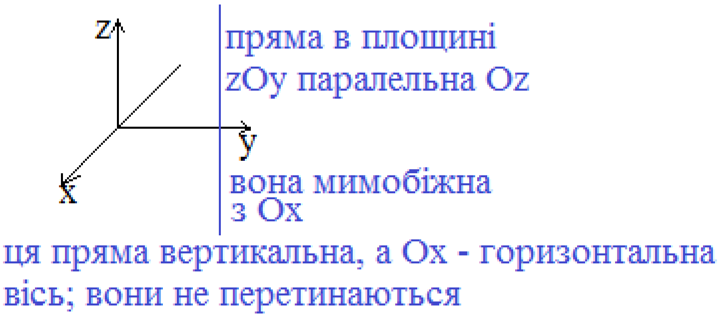
Відстань від точки A до площини $d=\frac{\left|6\cdot 4+3\cdot(-3)+5\cdot 6+25\right|}{\sqrt{6^2+3^2+5^2}}=\sqrt{70}$.

Відстань від точки A_1 до площини точно така ж:

$d=\frac{\left|6\cdot(6\alpha+4)+3\cdot(3\alpha-3)+5\cdot(5\alpha+6)+25\right|}{\sqrt{6^2+3^2+5^2}}=\sqrt{70}$. Два розв'язки: $\alpha=-2$ та $\alpha=0$.

$\alpha=0$ описує точку A, тож $\alpha=-2$ та $\boxed{A_1=(-8,-9,-4)}$.

Паралельні прямі – прямі в одній площині, які не перетинаються.
Мимобіжні прямі – прямі, які не перетинаються, тому що вони в різних площинах



У паралельних прямих співпадаючі або колінеарні напрямні вектори, а у мимобіжних – ні.

Приклад 12.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+4}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-4}{2}$, $\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;

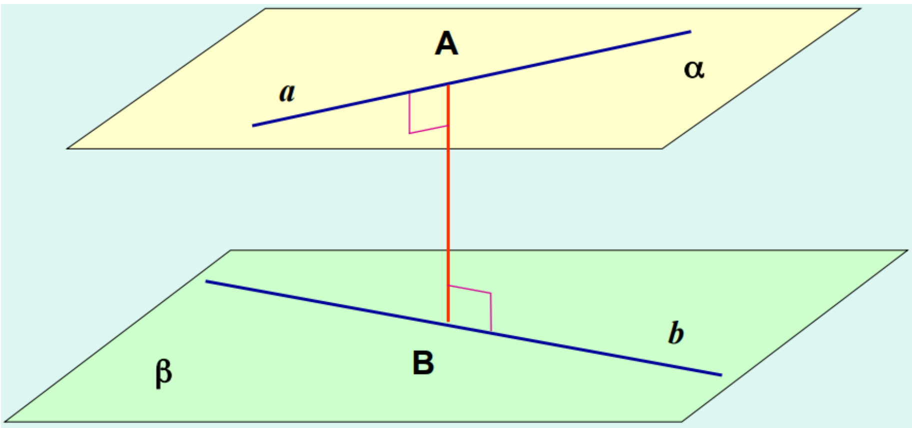
Шукана площина $ax+by+cx+d=0$. Паралельно до другої прямої – тож її вектор нормалі перпендикулярний до напрямного вектору другої прямої: $2a-2b+c=0$.

Перша пряма: $\frac{x+4}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-4}{2}\Leftrightarrow\frac{x-(-4)}{(-2)-(-4)}=\frac{y-(-4)}{(-1)-(-4)}=\frac{z-4}{6-4}$, на ній лежать точки $(-4,-4,4)$ та $(-2,-1,6)$.

$$\begin{cases} 2a-2b+c=0 \\ -4a-4b+4c+d=0 \\ -2a-b+6c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c=0 \\ -4a-4b+4c=-d \\ -2a-b+6c=-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7d}{76} \\ b=\dfrac{2d}{76} \\ c=-\dfrac{10d}{76} \end{cases},$$

$$\frac{7d}{76}x+\frac{2d}{76}y-\frac{10d}{76}z+d=0 \Rightarrow \boxed{7x+2y-10z+76=0}$$

Відстань між мимобіжними прямими – це відстань між відповідними паралельними площинами: перша площина проведена через першу пряму паралельно другій, друга площина проведена через другу пряму паралельно першій).



Приклад 13.

14. Задані мимобіжні прямі: $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-4}{2}$, $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$.

2) знайти відстань між прямими;

$7x+2y-10z+76=0$ – площина, що проходить через першу пряму паралельно до другої, див. пункт 14.1.

Побудуємо площину, що проходить через другу пряму паралельно до першої площини: $2a+3b+2c=0$,

$\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+3}{1} \Leftrightarrow \dfrac{x-(-4)}{(-2)-(-4)}=\dfrac{y-3}{1-3}=\dfrac{z-(-3)}{-2-(-3)}$ – на ній лежать точки $(-4,3,-3)$ та $(-2,1,-2)$.

$$\begin{cases} 2a+3b+2c=0 \\ -4a+3b-3c+d=0 \\ -2a+b-2c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{7d}{8} \\ b=-\dfrac{2d}{8} \\ c=\dfrac{10d}{8} \end{cases} \Rightarrow -\frac{7d}{8}x-\frac{2d}{8}y+\frac{10d}{8}z+d=0 \Rightarrow$$

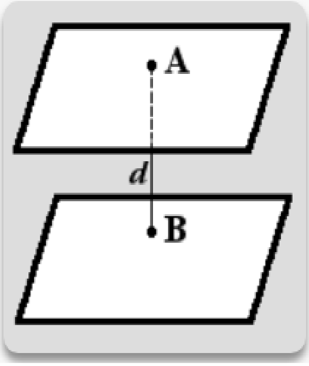
$$\Rightarrow -7x-2y+10z+8=0 \Rightarrow 7x+2y-10z-8=0$$

Відповідно, треба знайти відстань між площинами $7x+2y-10z-8=0$ та $7x+2y-10z+76=0$.

Відстань між двома паралельними площинами — дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з точки однієї площини на іншу площину.

Якщо задані рівняння паралельних площин $Ax+By+Cz+D_1=0$ і $Ax+By+Cz+D_2=0$, то відстань між площинами можна знайти, використавши наступну формулу

$$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



$$d=\frac{76-(-8)}{\sqrt{7^2+2^2+(-10)^2}}=\boxed{\frac{28}{\sqrt{17}}}$$

Приклад 14.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+4}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-4}{2}$, $\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

Перпендикуляр A_1A_2. Точка A_1 – на першій прямій, точка A_2 – на другій. Система з п'яти рівнянь (чотири з них описують те, що точка належить відповідним прямим, ще одне – задає відстань між ними).

$$\frac{x_1+4}{2}=\frac{y_1+4}{3},\ \frac{x_1+4}{2}=\frac{z_1-4}{2},\ \frac{x_2+4}{2}=\frac{y_2-3}{-2},\ \frac{x_2+4}{2}=\frac{z_2+3}{1},$$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=\frac{28}{\sqrt{17}}$$

Ця система з п'яти рівнянь на 6 змінних має єдиний розв'язок!

$$y_1=\frac{3x_1}{2}+2, z_1=x_1+8, y_2=-x_2-1, z_2=\frac{x_2}{2}-1,$$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+\left(\frac{3x_1}{2}+2+x_2+1\right)^2+\left(x_1+8-\frac{x_2}{2}+1\right)^2}=\frac{28}{\sqrt{17}}$$

$$\sqrt{\frac{17}{4}x_1^2+\frac{9}{4}x_2^2+27x_1-3x_2+90}=\frac{28}{\sqrt{17}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}x_1\right)^2+2\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}x_1\cdot\frac{27}{\sqrt{17}}+\left(\frac{27}{\sqrt{17}}\right)^2-\left(\frac{27}{\sqrt{17}}\right)^2+\left(\frac{3}{2}x_2\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}x_2\cdot 1+1^2-1^2+90}=$$
$$=\frac{28}{\sqrt{17}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}x_1+\frac{27}{\sqrt{17}}\right)^2+\left(\frac{3}{2}x_2-1\right)^2-\left(\frac{27}{\sqrt{17}}\right)^2-1+90}=\frac{28}{\sqrt{17}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}x_1+\frac{27}{\sqrt{17}}\right)^2+\left(\frac{3}{2}x_2-1\right)^2+\frac{784}{17}}=\frac{28}{\sqrt{17}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}x_1+\frac{27}{\sqrt{17}}\right)^2+\left(\frac{3}{2}x_2-1\right)^2+\frac{28^2}{17}}=\frac{28}{\sqrt{17}}$$

Це можливо лише при $\begin{cases}\frac{\sqrt{17}}{2}x_1+\frac{27}{\sqrt{17}}=0\\ \frac{3}{2}x_2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{54}{17}\\ x_2=\frac{2}{3}\end{cases}.$

$$y_1=\frac{3x_1}{2}+2=-\frac{47}{17}, z_1=x_1+8=\frac{82}{17}, y_2=-x_2-1=-\frac{5}{3}, z_2=-\frac{2}{3}.$$

Перпендикуляр проведено між точками $A_1\left(-\frac{54}{17},-\frac{47}{17},\frac{82}{17}\right)$ та $A_2\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

ДЗ: №8 – 16. Для того, щоб розв'язати №15 та №16, знань з цього матеріалу та знань про векторний та змішаний добутки векторів достатньо.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 13. Криві другого порядку. Класифікація. Приведення рівняння до канонічного виду

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок приведення кривих другого порядку до канонічного вигляду.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися класифікувати й приводити до канонічного вигляду рівняння кривих другого порядку.

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

Криві другого порядку — геометричне місце точок на площині, декартові координати яких задаються рівнянням другого ступеня:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

де хоча б один з коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} відмінний від нуля.

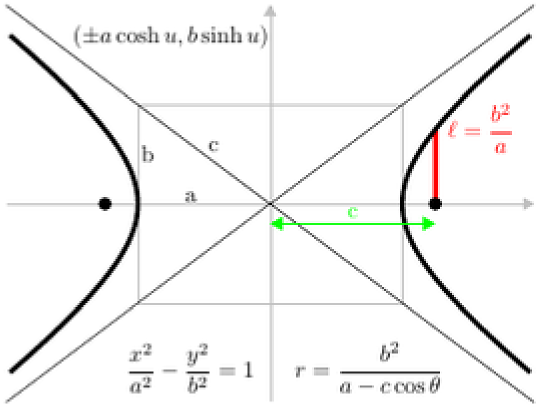
- $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$
- $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$
- $I = tr\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}$

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

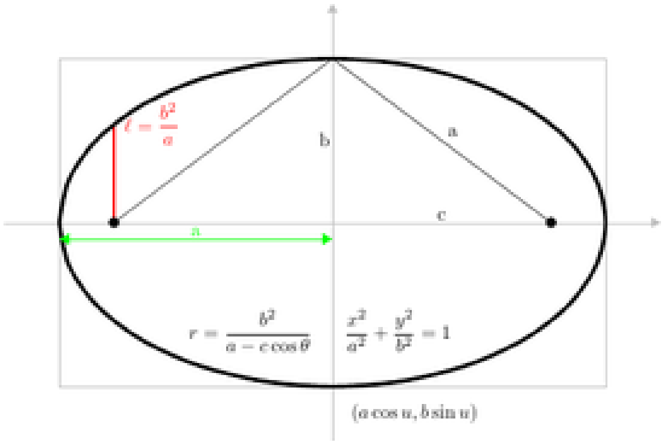
Вид кривої	Канонічне рівняння	
Невироджені криві ($\Delta \neq 0$)		
еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$D > 0$ $I\Delta < 0$
гіпербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\Delta \neq 0$ $D < 0$
парабола	$y^2 = 2px$	$\Delta \neq 0$ $D = 0$
Вироджені криві ($\Delta = 0$)		
точка	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\Delta = 0$ $D > 0$
дві прямі що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\Delta = 0$ $D < 0$
дві паралельні прямі	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	$\Delta = 0$ $D = 0$ $K < 0$
одна пряма	$x^2 = 0$	$\Delta = 0$ $D = 0$ $K = 0$
Порожня множина		
уявний еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$I\Delta > 0$ $D > 0$
дві уявні паралельні прямі	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	$\Delta = 0$ $D = 0$ $K > 0$

Коло – частинний випадок еліпсу при $a = b \quad K > 0$

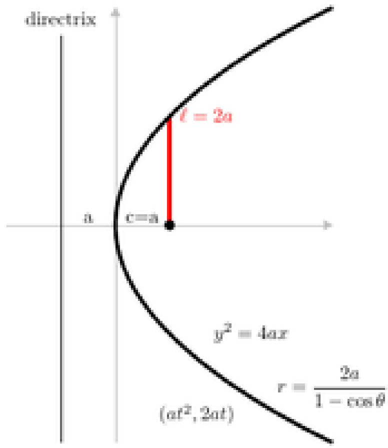
Схематичний вигляд гіперболи (симетрична відносно координатних осей, має прямі асимптоти)



Схематичний вигляд еліпсу



Схематичний вигляд параболи



Всі ці схематичні вигляди наведені в канонічних системах координат.

Визначити тип кривої, побудувати саму криву, переписати рівняння кривої у канонічному вигляді, побудувати «нову» систему координат, в якій рівняння кривої записане в канонічному вигляді, знайти координати ортів «нової» системи координат у старій системі координат, знайти перетворення від «старої» до «нової» системи координат. Знайти рівняння «нових» осей в «старій» системі координат.

Приклад 1. $4xy + 3y^2 - 36 = 0$. Класифікувати криву.

$$\underset{a_{11}}{0} \cdot x^2 + 2 \cdot \underset{a_{12}}{2}\, xy + \underset{a_{22}}{3}\, y^2 + 2 \cdot \underset{a_{13}}{0} \cdot x + 2 \cdot \underset{a_{23}}{0} \cdot y + \underset{a_{33}}{(-36)} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{vmatrix} = 144 \neq 0, \quad D = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$ гіпербола.

$\underbrace{4xy+3y^2}_{f(x,y)}-36=0$, $f(x,y)$ – квадратична форма, її треба ортогональним перетворенням звести до канонічного вигляду. $A=\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}$. Шукаємо власні вектори і власні значення.

$AV=\lambda V\Rightarrow\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}0v_1+2v_2=\lambda v_1\\2v_1+3v_2=\lambda v_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\lambda v_1+2v_2=0\\2v_1+(3-\lambda)v_2=0\end{cases}$ – має мати нетривіальні розв'язки, тож $\begin{vmatrix}-\lambda&2\\2&3-\lambda\end{vmatrix}=0$, корені: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$.

$\lambda_1=4$: $\begin{cases}-4v_1+2v_2=0\\2v_1-v_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\\2C\end{pmatrix}$, нормування на 1: $C^2+(2C)^2=1\Rightarrow C=\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\lambda_1=4$, $V_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

$\lambda_1=-1$: $\begin{cases}v_1+2v_2=0\\2v_1+4v_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2C\\C\end{pmatrix}$, нормування на 1:

$C^2+(-2C)^2=1\Rightarrow C=\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\lambda_2=-1$, $V_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

$Q=\begin{pmatrix}V_1&V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&-2/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$ – матриця перетворення, матриця форми в нових координатах: $Q^TAQ=\begin{pmatrix}4&0\\0&-1\end{pmatrix}$, тобто перетворення $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ переводить $f(x,y)$ в $f(x',y')=4x'^2-y'^2$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'\\y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\end{cases},$$

Рівняння кривої в новій (канонічній) системі координат: $4x'^2-y'^2-36=0$

$4x'^2-y'^2=36\Rightarrow\frac{4x'^2}{36}-\frac{y'^2}{36}=1\Rightarrow\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{36}=1$ – канонічне рівняння цієї кривої.

Примітка: $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ **ермітова, тож власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні.**

Центр нової системи координат має координати $x'=y'=0$, підставляємо це в

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0\\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0\end{cases}\Rightarrow x=y=0$$

– центри «нової» і «старої» систем координат збігаються.

Орти нової системи координат: $\vec{e}_{x'}\left(x'=1, y'=0\right)$:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 1-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0\\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 1+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{5}}, y=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

в старій системі координат $\vec{e}_{x'}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

$$\vec{e}_{y'}\left(x'=0, y'=1\right):\ \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 1\\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 1\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{5}}, y=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

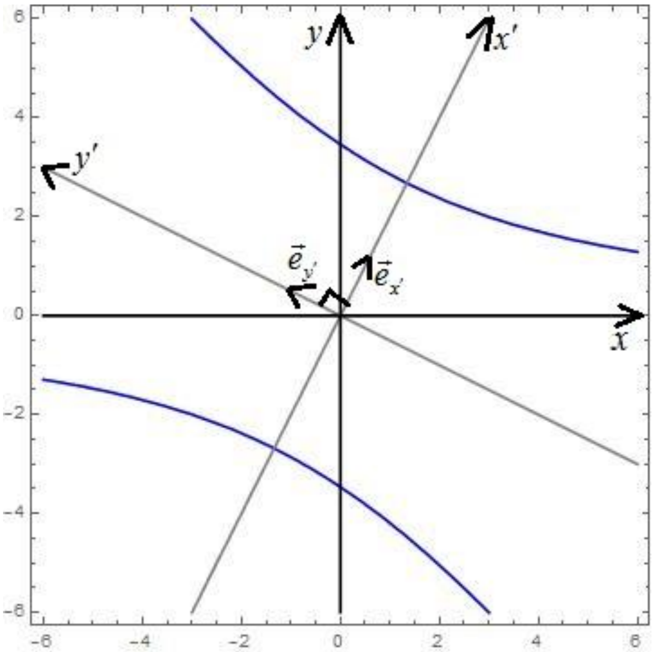
в старій системі координат $\vec{e}_{y'}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Бачимо, що отримані власні вектори є ортами нової системи координат.

Рівняння осей нової системи координат:

Ox’ вздовж вектору $\vec{e}_{x'}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ і проходить через початок координат, іншими словами, проходить через точки $(0,0)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, її рівняння в старих координатах $y=kx+b$, $\begin{cases} 0=k\cdot 0+b\\ \frac{2}{\sqrt{5}}=k\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=0\\ k=2\end{cases}$, тож рівняння $y=2x$.

Oy’ вздовж вектору $\vec{e}_{y'}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ і проходить через початок координат, іншими словами, проходить через точки $(0,0)$ і $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, її рівняння в старих координатах $y=-\frac{x}{2}$.



$\vec{e}_{x'}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad$ $\vec{e}_{y'}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Ще один приклад:

$x^2+6xy+9y^2+x+2y+1=0$

$$\underbrace{1}_{=a_{11}}x^2+\underbrace{9}_{=a_{22}}y^2+2\cdot\underbrace{(3)}_{=a_{12}}xy+2\cdot\underbrace{0{,}5}_{=a_{13}}x+2\cdot\underbrace{1}_{=a_{23}}y+\underbrace{1}_{=a_{33}}=0.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&0{,}5\\3&9&1\\0{,}5&1&1\end{vmatrix}=-0{,}25<0,\ D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\3&9\end{vmatrix}=0$$ – парабола.

$\underbrace{x^2+6xy+9y^2}_{f(x,y)}+x+2y+1=0$, на початку «не чіпаючи» лінійні члени треба до канонічного вигляду ортогональним перетворенням звести квадратичну форму $f(x,y)$.

Отримаємо $\lambda_1=0$, $V_1=\begin{pmatrix}-3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix}$; $\lambda_2=10$, $V_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{10}\\3/\sqrt{10}\end{pmatrix}$;

Перетворенням $\begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' \end{cases}$ $f(x,y)$ зводиться до $f(x',y') = 10y'^2$.

$$\underbrace{10y'^2}_{Кв.Форма} + x + 2y + 1 = 0$$

$$\underbrace{10y'^2}_{Кв.Форма} + \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right) + 1 = 0$$

$$10y'^2 + \frac{7}{\sqrt{10}}y' - \frac{1}{\sqrt{10}}x' + 1 = 0$$

$$10\left(y'^2 + \frac{7}{10\sqrt{10}}y'\right) - \frac{1}{\sqrt{10}}x' + 1 = 0$$

$$10\left(y'^2 + 2\cdot\frac{7}{20\sqrt{10}}y' + \frac{49}{4000} - \frac{49}{4000}\right) - \frac{1}{\sqrt{10}}x' + 1 = 0$$

$$10\left(y' + \frac{7}{20\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{49}{400} - \frac{1}{\sqrt{10}}x' + 1 = 0$$

$$10\left(y' + \frac{7}{20\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{351}{400} = 0$$

$$10\left(y' + \frac{7}{20\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x' - \frac{351\sqrt{10}}{400}\right) = 0$$

$$\left(y' + \frac{7}{20\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{10\sqrt{10}}\left(x' - \frac{351\sqrt{10}}{400}\right)$$

$$y'' = y' + \frac{7}{20\sqrt{10}},\ x'' = x' - \frac{351\sqrt{10}}{400},$$

Канонічне рівняння параболи: $y''^2 = \frac{1}{10\sqrt{10}}x''$.

Важлива примітка: перетворення від (x',y') до (x'',y'') має виглядати так: $y'' = 1\cdot y' + \text{ЯкасьКонстанта}$**,** $x'' = 1\cdot x' + \text{ЯкасьКонстанта}$**.**

Це потрібно для того, щоб орти координатних систем (x',y') і (x'',y'') були однаковими, а ці системи відрізнялись лише паралельним переносом центра.

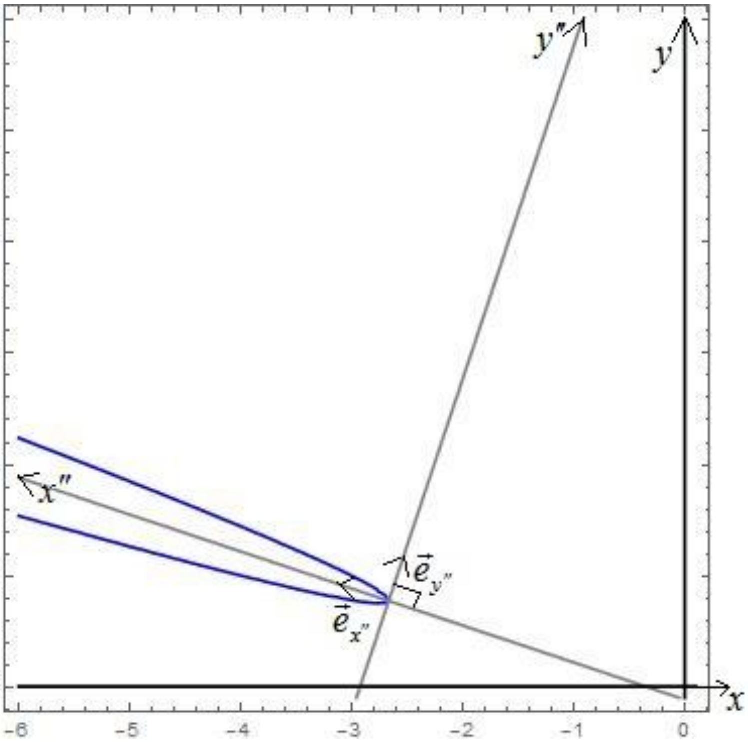
Тож перетворення

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\left(x'' + \dfrac{351\sqrt{10}}{400}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(y'' - \dfrac{7}{20\sqrt{10}}\right) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(x'' + \dfrac{351\sqrt{10}}{400}\right) + \dfrac{3}{\sqrt{10}}\left(y'' - \dfrac{7}{20\sqrt{10}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y'' - \dfrac{1067}{400} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}x'' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y'' + \dfrac{309}{400} \end{cases}$$

переводить кривую $x^2 + 6xy + 9y^2 + x + 2y + 1 = 0$ в канонічний вигляд $y''^2 = \dfrac{1}{10\sqrt{10}}x''$.

Центр нової системи $x'' = y'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1067}{400} \\ y = \dfrac{309}{400} \end{cases}$, в «старих» координатах це точка $\left(-\dfrac{1067}{400}; \dfrac{309}{400}\right)$.

Орти «нової» системи координат – це власні вектори $V_1 = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} = \vec{e}_{x''}$ і $V_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} = \vec{e}_{y''}$.



$\vec{e}_{x''}\left(\dfrac{-3}{\sqrt{10}},\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$, тож Ox'' паралельна прямій $y=-\dfrac{1}{3}x$ та проходить через точку $\left(-\dfrac{1067}{400};\dfrac{309}{400}\right)$. $y=-\dfrac{1}{3}x+b \Rightarrow \dfrac{309}{400}=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1067}{400}\right)+b \Rightarrow b=-\dfrac{7}{60}$, шукане рівняння Ox'' : $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{60}$.

$\vec{e}_{y''}\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$, тож Oy'' паралельна прямій $y=3x$ та проходить через точку $\left(-\dfrac{1067}{400};\dfrac{309}{400}\right)$.

$y=3x+b \Rightarrow \dfrac{309}{400}=3\cdot\left(-\dfrac{1067}{400}\right)+b \Rightarrow b=\dfrac{351}{40}$, шукане рівняння Oy'' : $y=3x+\dfrac{351}{40}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 14. Криві і поверхні другого порядку

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок побудови кривих і поверхонь другого порядку

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися класифікувати лінії другого порядку на площині; приводити загальні рівняння другого порядку до канонічного вигляду за допомогою паралельного переносу системи координат та повороту осей; будувати поверхні другого порядку у просторі.

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

Криві другого порядку — геометричне місце точок на площині, декартові координати яких задаються рівнянням другого ступеня:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

де хоча б один з коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} відмінний від нуля.

- $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$K=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$
- $I=tr\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}+a_{22}$

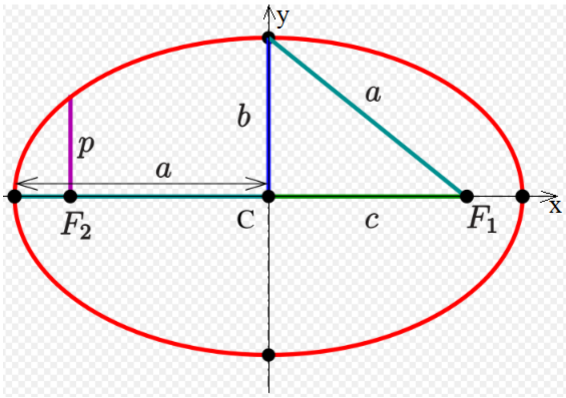
Вид кривої	Канонічне рівняння	
Невироджені криві ($\Delta \neq 0$)		
еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$D>0$ $I\Delta<0$
гіпербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\Delta \neq 0$ $D<0$
парабола	$y^2=2px$	$\Delta \neq 0$ $D=0$
Вироджені криві ($\Delta = 0$)		
точка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$\Delta=0$ $D>0$
дві прямі що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$\Delta=0$ $D<0$
дві паралельні прямі	$\frac{x^2}{a^2}=1$	$\Delta=0$ $D=0$ $K<0$
одна пряма	$x^2=0$	$\Delta=0$ $D=0$ $K=0$
Порожня множина		
уявний еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	$I\Delta>0$ $D>0$
дві уявні паралельні прямі	$\frac{x^2}{a^2}=-1$	$\Delta=0$ $D=0$ $K>0$

Еліпс — геометричне місце точок M таких, що сума відстаней до двох заданих точок (фокусів) залишається сталою: $F_1M+F_2M=\text{const}$. Коло – частинний випадок еліпса, коли фокуси співпали.

Еліпс в канонічному вигляді в декартовій системі координат: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$F_1M+F_2M=2a$$

a – велика піввісь, b – мала піввісь, c – фокальна відстань (це відстань від центру до кожного з фокусів), p – фокальний параметр еліпса. $p = \dfrac{b^2}{a}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.



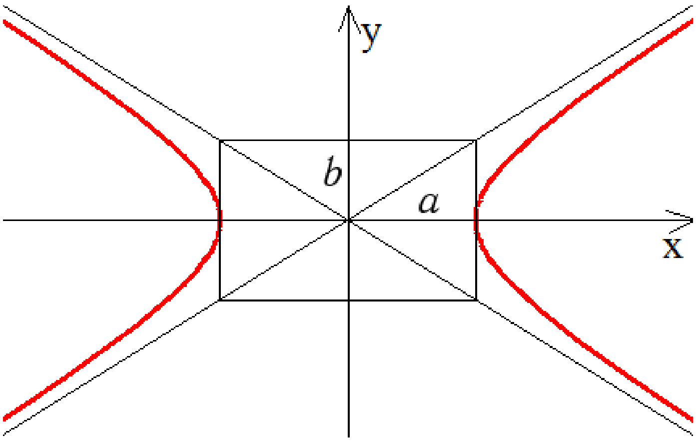
Ексцентриситетом еліпса є величина $e = \dfrac{c}{a}$. У випадку кола $e = 0$, чим ближчий e до нуля, тим ближчою до кола є форма еліпса.

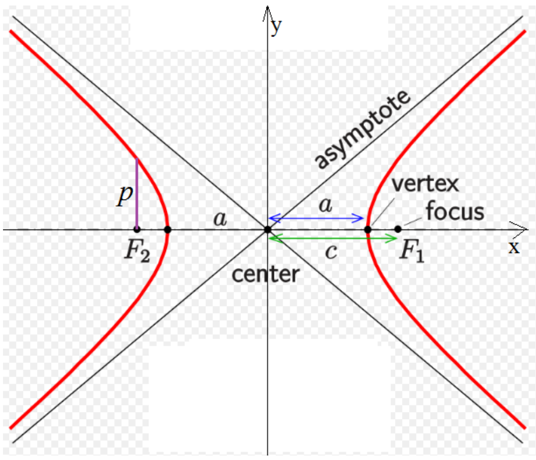
Для еліпса завжди $e < 1$.

Гіпербола – геометричне місце точок M таких, що модуль різниці відстаней до двох заданих точок (фокусів) залишається сталим: $|F_1M - F_2M| = \text{const}$.

Гіпербола в канонічному вигляді в декартовій системі координат: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

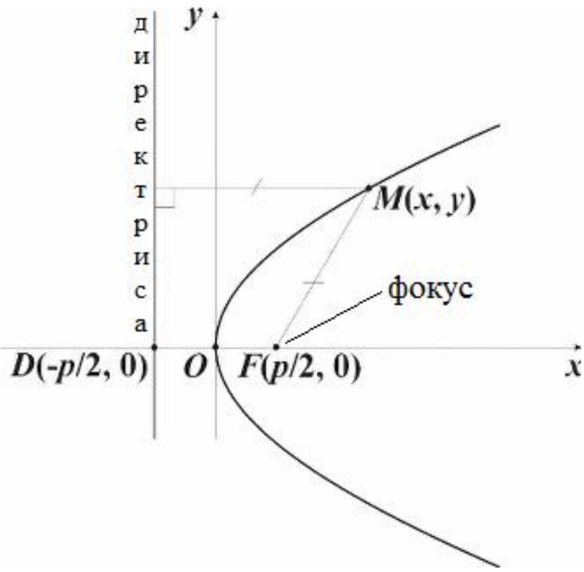


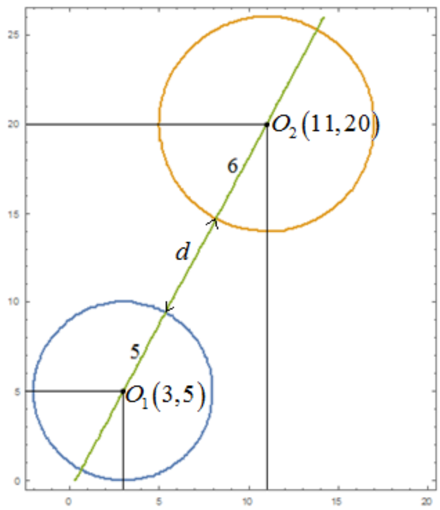


a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь, c – фокальна відстань, p - фокальний параметр. $e=\dfrac{c}{a}$ – ексцентриситет. $p=\dfrac{b^2}{a}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Рівняння асимптот: $y=\dfrac{b}{a}x$ та $y=-\dfrac{b}{a}x$. **У гіперболи ексцентриситет завжди** $e>1$.

Парабола – геометричне місце точок, для яких відстань до заданої точки (фокуса) дорівнює відстані до заданої прямої (директриси).

Парабола в канонічному вигляді в декартовій системі координат: $y^2=2px$.





p - фокальний параметр.

Рівняння кола: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, (x_0,y_0) – координати центру кола, R – радіус кола.

Приклад 1.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-6x-10y=-9$ $x^2+y^2-22x-40y=-485$.

$x^2+y^2-6x-10y=-9 \Rightarrow (x-3)^2+(y-5)^2=5^2$ – коло з центром (3,5) і радіусом 5.

$x^2+y^2-22x-40y=-485 \Rightarrow (x-11)^2+(y-20)^2=6^2$ – коло з центром (11,20) і радіусом 6.

$$d=O_1O_2-5-6=\sqrt{(11-3)^2+(20-5)^2}-5-6=17-11=\boxed{6}$$

Приклад 2.

20. Звести криву другого порядку $-x+2y^2+20y+48=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

$$-x+2y^2+20y+48=0 \Rightarrow y^2+10y+24=\frac{x}{2} \Rightarrow (y+5)^2-1=\frac{x}{2} \Rightarrow (y+5)^2=\frac{x+2}{2}$$

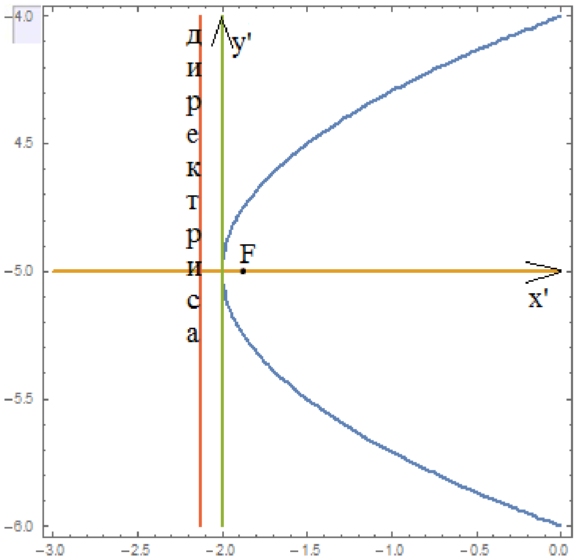
$y'=y+5$, $x'=x+2$, тоді бачимо, що це – парабола: $\boxed{y'^2=\frac{x'}{2}}$.

$y'^2=2px'=\frac{1}{2}x' \Rightarrow \boxed{p=\frac{1}{4}}$ – фокальний параметр параболи.

Треба розібратись, як виглядають осі канонічної системи координат для такої параболи: $y'=y+5=0 \Rightarrow \boxed{y=-5}$, $x'=x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$.

Рівняння директриси: $x'=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{8} \Rightarrow x+2=-\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{17}{8}}$.

Фокус: $F\left(x'=\frac{p}{2}=\frac{1}{8}, y'=0\right) \Rightarrow F\left(x=-\frac{15}{8}, y=-5\right) \Rightarrow \boxed{F\left(-\frac{15}{8},-5\right)}$.



Приклад 3.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x = 6\sin 2t + 4; \\ y = 2\cos 2t - 5. \end{cases}$

Побудувати криву і комп'ютер може, давайте визначимо тип кривої:

$$\begin{cases} x=6\sin(2t)+4 \\ y=2\cos(2t)-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-4=6\sin(2t) \\ y+5=2\cos(2t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{6}=\sin(2t) \\ \frac{y+5}{2}=\cos(2t) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x-4}{6}\right)^2+\left(\frac{y+5}{2}\right)^2=1$$

$x'=x-4$, $y'=y+5$, в канонічній СК: $\frac{x'^2}{6^2}+\frac{y'^2}{2^2}=1$, еліпс, осі канонічної СК:

$x'=x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=4}$, $y'=y+5=0 \Rightarrow \boxed{y=-5}$, центр еліпса – точка перетину осей канонічної СК, тобто точка (4, –5) велика піввісь = 6, маленька піввісь = 2.

Далі коли задано явний вигляд, побудову вже можна зробити на комп'ютері.

Приклад 4.

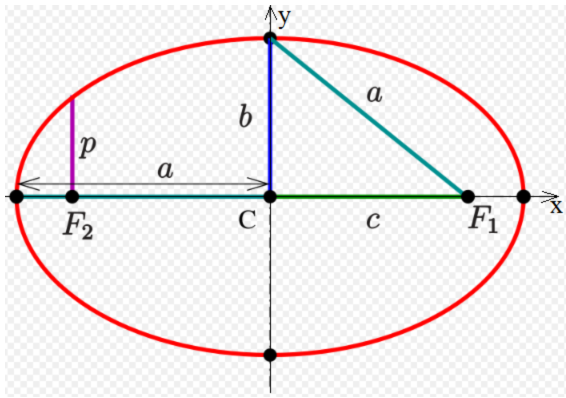
22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери $x^2+y^2+z^2+8x-2y-6z=3$ площиною $x=1$.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+8x-2y-6z=3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow 1^2+y^2+z^2+8\cdot 1-2y-6z=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2-2y+1-1+z^2-6z+9-9=-6 \Rightarrow (y-1)^2+(z-3)^2=2^2 \Rightarrow \boxed{R=2}$$

Приклад 5.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса якщо відомо, що $F\left(\sqrt{91};0\right)$, $a=10$.



$$b=\sqrt{10^2-\left(\sqrt{91}\right)^2}=\sqrt{9}=3,\quad \boxed{\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{3^2}=1}.$$

Поверхнею 2-го порядку звуть множину точок простору, прямокутні координати (x;y;z) яких справджують алгебраїчне рівняння 2-го порядку:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

де $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$, не дорівнюють нулеві одночасно.

Метод перерізів

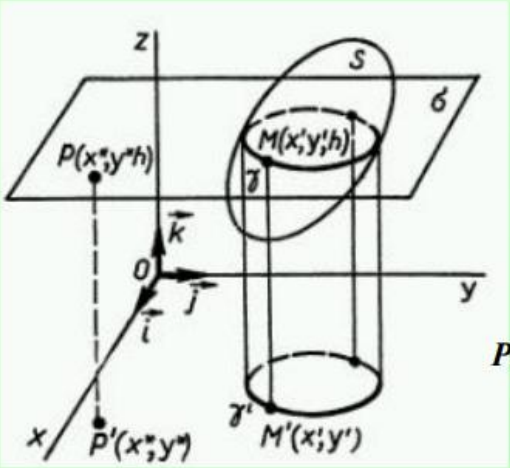


Рис. 3

$$\gamma : \begin{cases} F(x;\, y;\, z) = 0 \\ z = c \end{cases}$$

Для вивчення форми поверхні використовують метод паралельних перерізів. Суть цього методу полягає в наступному:

1) ***поверхня перетинається координатними площинами та площинами, які їм паралельні;***
2) ***визначаються лінії перетину поверхні з даними січними площинами;***
3) ***за виглядом цих ліній роблять висновки про форму даної поверхні.***

Сферична поверхня або ***сфера*** – це множина всіх точок простору, рівновіддалених від деякої точки, що називається *центром.* Відстань від центра до довільної точки сфери називається її *радіусом*.

Нехай у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ точка $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ є центром сферичної поверхні радіуса R (рис. 1).

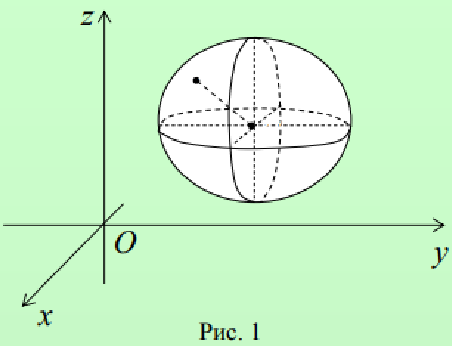


Рис. 1

Для того, щоб точка $M(x; y; z)$ належала сферичній поверхні, необхідно та достатньо, щоб $MC = R$ або

$$\boxed{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R.}$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

або в розгорнутому вигляді:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0.$

Якщо точка C співпадає з початком координат, то рівняння сфери називається ***канонічним*** і має вигляд: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. (рис.2)

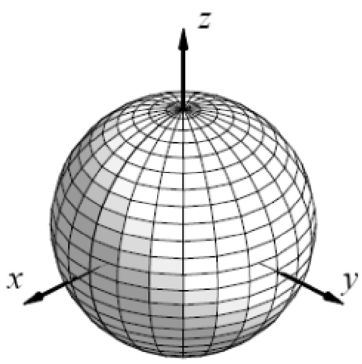


Рис. 2

Циліндричною поверхнею (***циліндром***) називається поверхня, утворена рухом прямої (***твірної***) l, яка перетинає задану лінію (***напрямну***) l_0, залишаючись паралельною заданій прямій a_0, причому задані лінії l_0 і a_0 не лежать в одній площині.

Поверхні, твірні яких є прямими лініями, називаються ***лінійчатими***. Оскільки лінійчаті поверхні конструюються з прямолінійних рейок, то такі поверхні широко використовують в будівництві (опори, башти, перекриття, покрівлі і т.п.).

Зауваження 1. Циліндр є лінійчатою поверхнею. Його можна уявити як "огорожу", виставлену вздовж лінії l_0.

Теорема 1. У просторі $Oxyz$ кожне рівняння з двома змінними $F(x,y)=0$, що не містить координати z, визначає циліндричну поверхню S, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною служить лінія

$$l_0:\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases},$$

що лежить у площині Oxy (рис. 4).

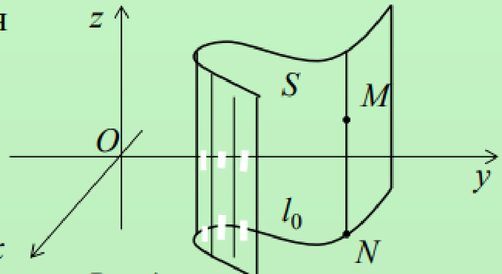


Рис. 4

Еліптичні циліндри

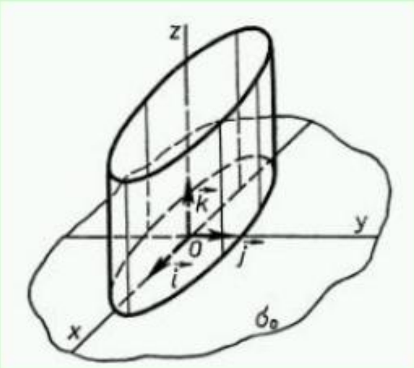


Рис. 5

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

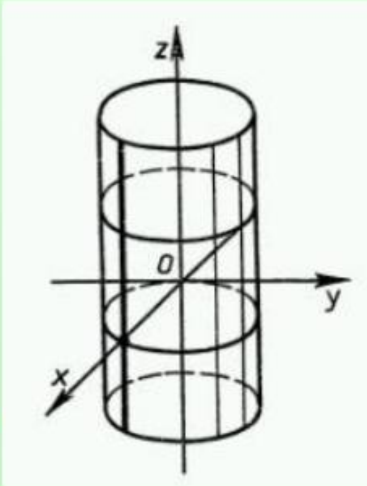


Рис. 6

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Гіперболічний циліндр

Рівняння $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

визначає в просторі гіперболічний циліндр з твірною, що паралельна осі Oz, і напрямною – гіперболою (рис. 7).

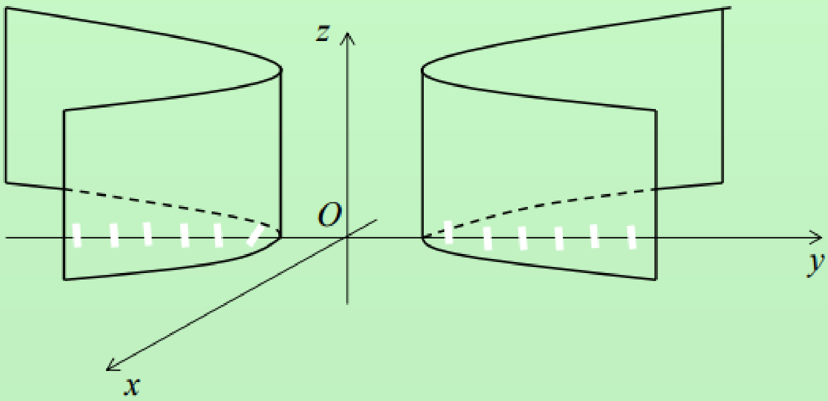
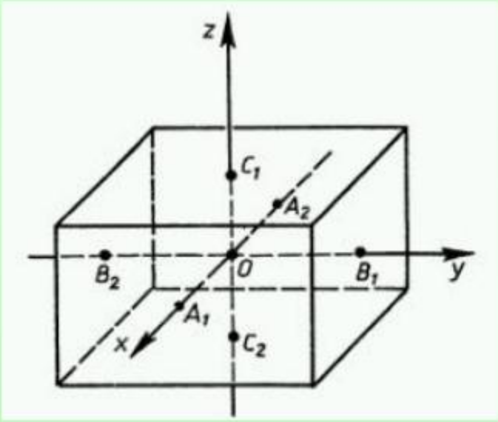
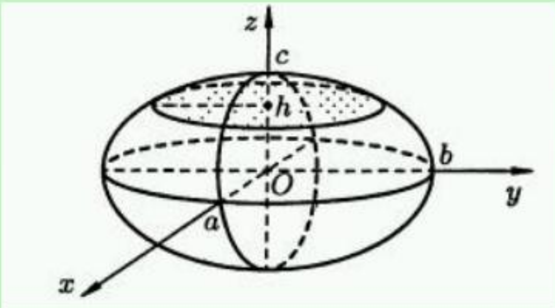
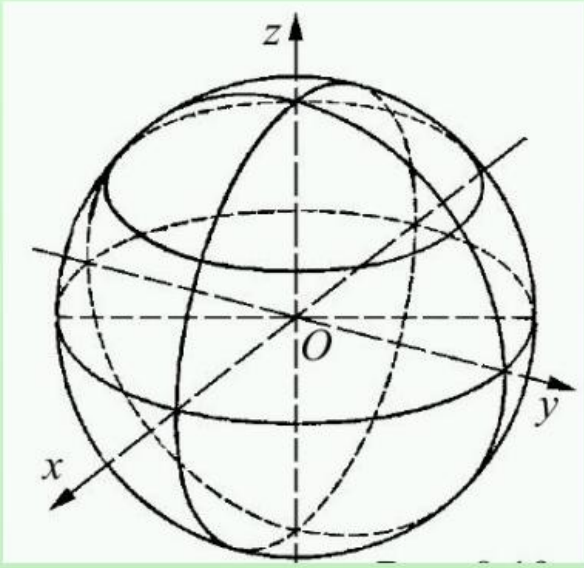


Рис. 7

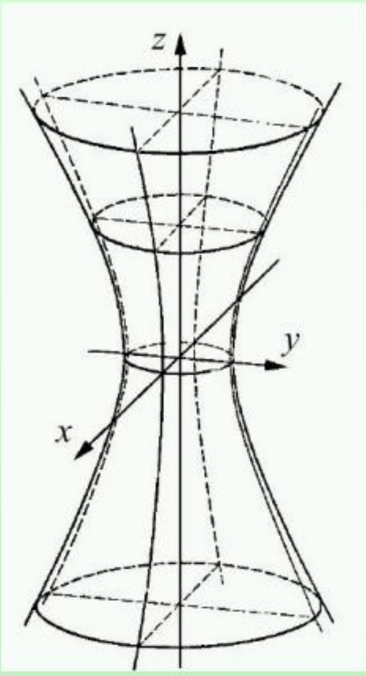
Еліпсоїди

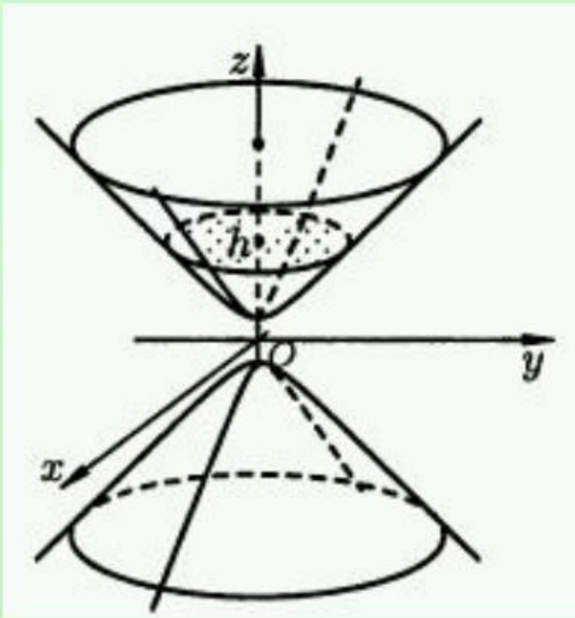




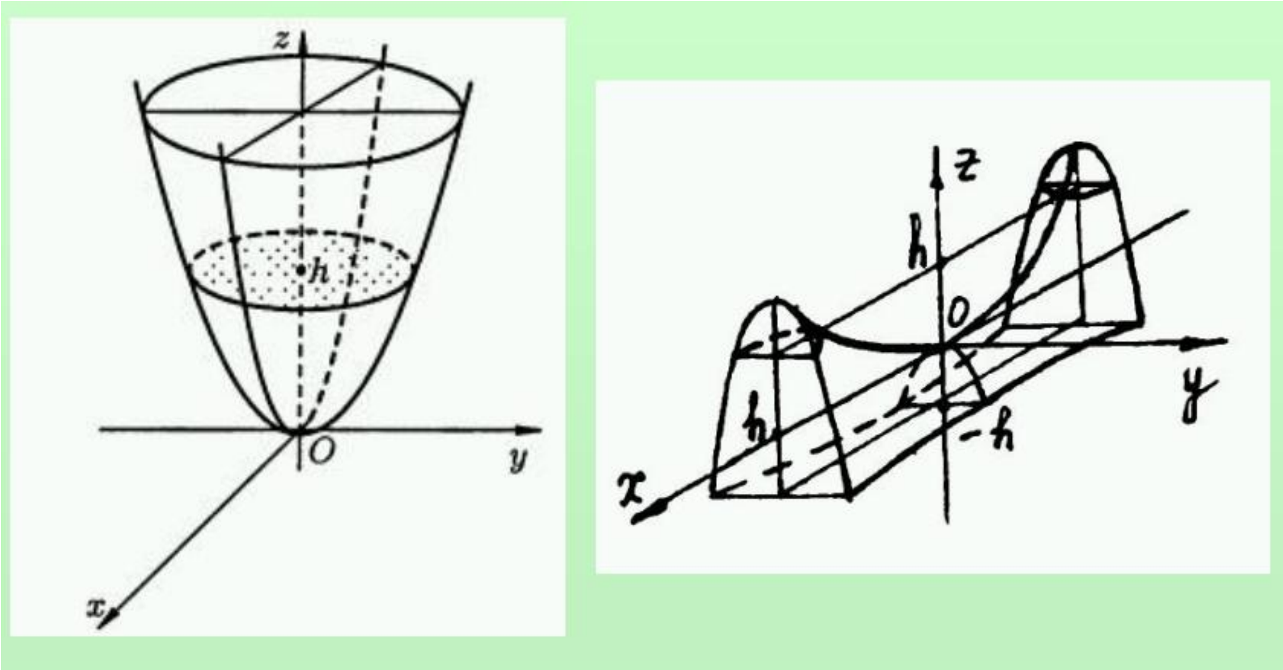


Гіперболоїди





Параболоїди



Приклад 5.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $2x^2+6y^2+3z^2+16x-12y+3z+14=0$.

$$2x^2+6y^2+3z^2+16x-12y+3z+14=0$$

$$2\left(x^2+8x+16-16\right)+6\left(y^2-2y+1-1\right)+3\left(z^2+z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+14=0$$

$$2\left(x+4\right)^2-32+6\left(y-1\right)^2-6+3\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}+14=0$$

$$2\left(x+4\right)^2+6\left(y-1\right)^2+3\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{99}{4}$$

$$\frac{\left(x+4\right)^2}{99/8}+\frac{\left(y-1\right)^2}{99/24}+\frac{\left(z+0{,}5\right)^2}{33/4}=1$$

Заміна: $x'=x+4$, $y'=y-1$, $z'=z+0{,}5$, і в нових змінних

$\dfrac{x'^2}{99/8}+\dfrac{y'^2}{99/24}+\dfrac{z'^2}{33/4}=1$ – еліпсоїд.

№ п/п	Назва поверхні	Канонічне рівняння
1	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
2	Уявний еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
3	Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
4	Двопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
5	Уявний конус, одна дійсна точка $O\ (0;0;0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
6	Конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
7	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$
8	Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$
9	Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
10	Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
11	Уявний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
12	Пара площин, що перетинаються (по вісі OZ)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
13	Пара уявних площин, що перетинаються по дійсній прямій (вісь OZ)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
14	Параболічний циліндр	$y^2=2px$
15	Пара паралельних площин	$x^2=a^2$
16	Пара уявних паралельних площин	$x^2=-a^2$
17	Пара площин, що співпадають	$x^2=0$

Приклад 6.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $4x^2+2y^2=0$:

1) Пара паралельних прямих;
2) Гіпербола;
3) Еліпс;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Парабола;
6) Точка. Точка (0,0)

Приклад 7.

26. Рівняння $4x^2 - 5y^2 = 6$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Еліпсоїд;
3) Однопорожнинний гіперболоїд;
4) Еліптичний параболоїд;
5) Циліндр;
6) Двопорожнинний гіперболоїд.

$\frac{x^2}{6/4} - \frac{y^2}{6/5} = 1$ – циліндр (гіперболічний циліндр).

ДЗ: номери 17 – 31 згідно номеру вашого варіанту.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 15. Многочлени. Розкладання на множники. Теорема Вієта. Система многочленів Штурма

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок використовувати схему Горнера, метод невизначених коефіцієнтів, формули Вієта для многочленів, визначати їх корені, будувати систему многочленів Штурма.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися ділити многочлен на многочлен (ділення кутом, метод невизначених коефіцієнтів, схема Горнера); розкладати многочлен на множники. Визначати кількість дійсних коренів многочлена, додатних та від'ємних коренів

Короткі теоретичні відомості і розв'язання типових прикладів

Многочлени та дії над ними

Зафіксуємо поле P. Многочленом над полем P називається вираз $f(x)$ вигляду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

у якому коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ належать P (вони називаються коефіцієнтами многочлена), $n \geq 0$. Тут x – деякий символ (його називають змінною), котрий в жодному додатному степені не належить P, причому $x^0 = 1$. Сам многочлен називають **многочленом від x**.

Два многочлени називаються рівними, якщо у них рівні коефіцієнти при відповідних степенях x.

Якщо усі коефіцієнти многочлена $f(x)$ рівні 0, то такий многочлен називається **нульовим** і позначається символом 0.

В іншому випадку існує найбільше n таке, що коефіцієнт многочлена $f(x)$ при x^n є ненульовим (цей коефіцієнт називається **старшим коефіцієнтом**). n називається **степенем многочлена** f і позначається $deg f$. Степінь нульового многочлена покладається рівним $-\infty$.

Зауважимо, що кожен многочлен $f(x)$ нульового степеня природно ототожнюється зі своїм єдиним ненульовим коефіцієнтом, тобто має вигляд $f(x) = a$ для деякого $a \in P$, $a \neq 0$. Множина всіх многочленів над полем P від x позначається символом $P[x]$.

На множині $P[x]$ визначимо дії додавання і множення. Розглянемо довільні многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

Сумою многочленів $f(x)$ та $g(x)$ називається многочлен $(f+g)(x)$ такий, що його коефіцієнтом при x^k є сума відповідних коефіцієнтів многочленів f і g, тобто $a_k + b_k$, $0 \le k \le \max(n,m)$ (якщо $n < m$, то $a_{n+1} = \ldots = a_m = 0$ і аналогічно при $n > m$). Таким чином,

$$deg(f(x)+g(x)) \le max(deg\, f(x), deg\, g(x)).$$

Добутком многочленів f та g називається такий многочлен $(fg)(x)$, що його коефіцієнтом при x^k є $a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$, $0 \le k \le n+m$ (як і раніше, якщо $n < m$, то $a_{n+1} = \ldots = a_m = 0$ і аналогічно при $n > m$). Добуток ненульових многочленів є ненульовим многочленом, причому

$$deg(f(x)\cdot g(x)) = deg\, f(x) + deg\, g(x)).$$

Властивості дій над многочленами

1. Додавання і множення є асоціативними і комутативними.

2. Множення є дистрибутивним відносно додавання.

3. Для додавання нейтральним многочленом є нульовий многочлен, а для множення – тотожний 1.

4. Для кожного многочлена існує протилежний, в той час як для множення обернені елементи існують лише для многочленів нульового степеня (це випливає з того, що при множенні ненульових многочленів їх степені додаються, а відтак при множенні на многочлен додатного степеня неможливо отримати многочлен нульового степеня). Це означає, що множина $P[x]$ відносно введених дій додавання і множення полем не є.

Нехай $f(x), g(x) \in P[x]$ i $g(x) \neq 0$. Кажуть, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$ (або $g(x)$ **ділить** $f(x)$), якщо існує такий многочлен $h(x) \in P[x]$, що $f(x) = g(x)h(x)$. При цьому $g(x)$ називається **дільником**.

Позначається $g(x)|f(x)$.

Теорема (про ділення з остачею для многочленів). *Нехай* $f(x), g(x) \in P[x]$ *і* $g(x) \neq 0$. *Тоді існують і єдині такі многочлени* $q(x), r(x) \in P[x]$, *що*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \text{де } deg\, r(x) < deg\, g(x) \text{ або } r(x) = 0.$$

Многочлени $q(x)$ і $r(x)$ називають відповідно **часткою** та **остачею** від ділення $f(x)$ на $g(x)$.

Наслідок 1 (теорема Безу). Нехай $f(x) \in P[x]$ і $x_0 \in P$. Остача при діленні многочлена $f(x)$ на $x - x_0$ дорівнює $f(x_0)$.

Ділення многочлену $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ на $(x - x_0)$ зручно здійснювати за наступною схемою, яка називається **схемою Горнера**:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
x_0		$x_0 b_{n-1}$	$x_0 b_{n-2}$	…	$x_0 b_1$	$x_0 b_0$

	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…	b_0	r

де в першому рядку записуємо коефіцієнти многочлена $f(x)$, а в другому та третьому послідовно обчислюємо коефіцієнти b_i за формулами:

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 b_{n-1}, \ldots, b_0 = a_{n-1} + x_0 b_1, r = a_0 + x_0 b_0.$$

Тоді $r = f(x_0)$ – це остача при діленні $f(x)$ на $x - x_0$, а часткою є многочлен

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Приклад 1. Обчислити значення многочлена

$f(x) = -3x^5 + 11x^3 - 13x^2 + x - 6$ у точці $x = -2$.

	-3	0	11	-13	1	-6
-2		6	12	2	22	-46
	-3	**6**	**-1**	**-11**	**23**	**-52**

$f(-2) = -52$.

!! В таблиці часто другий рядок пропускають.

Згідно означення, нульовий многочлен є дільником лише самого себе і ділиться на будь-який многочлен.

Властивості відношення подільності $f(x)|g(x)$ ($f(x)$ ділить $g(x)$):

1) $f(x)|f(x)$ (рефлексивність);
2) якщо $f(x)|g(x)$ і $g(x)|h(x)$, то $f(x)|h(x)$ (транзитивність);
3) якщо $f(x)|g(x)$, то для довільного многочлена $h(x)$ $f(x)|(g(x)h(x))$;
4) якщо $f(x)|g(x)$ і $f(x)|h(x)$, то $f(x)|(g(x) + h(x))$.

Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називаються **асоційованими**, якщо кожен з них ділиться на інший. Враховуючи властивості відношення подільності, відразу отримуємо, що відношення асоційованості є відношенням еквівалентності на множині $P[x]$, тобто вся ця множина розбивається на класи, в які входять попарно асоційовані між собою многочлени, і многочлени з різних класів не асоційовані. Нульовий многочлен при цьому утворює окремий клас. З транзитивності відношення подільності на множині многочленів та означення асоційованості отримуємо, що з умови $f|g$ випливає умова $f_1|g_1$ для таких многочленів f_1, g_1, що f_1 асоційований з f, а g_1 асоційований з g. Це означає, що **відношення подільності коректно визначається на класах асоційованості**.

Має місце простий критерій асоційованості.

Твердження. Многочлени $f(x)$ *і* $g(x)$ є асоційованими тоді й лише тоді, коли існує ненульовий елемент $\lambda \in P$ такий, що $f(x) = \lambda g(x)$

Многочлен називається **унітарним**, якщо його старший коефіцієнт дорівнює 1.

Кожен ненульовий многочлен є асоційованим тільки з одним унітарним многочленом.

Найбільшим спільним дільником (НСД) многочленів $f, g \in P[x]$ називається такий многочлен $d \in P[x]$, що: 1) $d|f$ і $d|g$; 2) для довільного многочлена $h \in P[x]$ з того, що $h|f$ і $h|g$, випливає $h|d$.

Степінь НСД – це найбільший серед степенів спільних дільників заданих многочленів.

З означення випливає, що коли один з многочленів нульовий, то найбільший спільний дільник існує і дорівнює іншому многочлену. В загальному випадку відповідь на питання про існування найбільшого спільного дільника дає

Теорема. Для довільних многочленів $f, g \in P[x]$ існує їх найбільший спільний дільник, причому його можна подати у вигляді $mf + ng$ для деяких многочленів $m, n \in P[x]$.

Усі найбільші спільні дільники утворюють клас асоційованих многочленів. Серед найбільших спільних дільників двох многочленів, принаймні один з яких є ненульовим, існує єдиний унітарний многочлен. Тому вважаємо, що найбільший спільний дільник таких многочленів є унітарним многочленом.

Для знаходження найбільшого спільного дільника двох ненульових многочленів f і g використовують **алгоритм Евкліда**. Опишемо його.

Вважаємо, що $\deg f \geq \deg g$.

Поділимо многочлен f на многочлен g з остачею: $f = gq_1 + r_1$, причому $\deg r_1 < \deg g$.

Тоді з означення найбільшого спільного дільника і властивостей подільності отримуємо, що найбільший спільний дільник многочленів f і g буде також найбільшим спільним дільником многочленів g і r_1, і навпаки. Отже, пару многочленів f, g можна замінити парою g, r_1, сума степенів яких є меншою за суму степенів початкових многочленів.

Якщо $r_1 = 0$, то шуканим найбільшим спільним дільником є многочлен g. Інакше ділимо g на r_1 з остачею і повторюємо вищенаведені міркування. Оскільки на кожному кроці сума степенів многочленів зменшується, то рано чи пізно остача від ділення буде рівною 0.

Найбільшим спільним дільником тоді буде остання ненульова остача. Записавши результати всіх виконаних ділень з остачею і послідовно повиражавши остачі, звідси можемо отримати подання найбільшого спільного дільника многочленів f і g у вигляді $mf + ng$.

Приклад 2. Знайти найменше спільне кратне многочленів

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6, \quad g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2.$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6 & 3x^4-4x^3-x^2-x-2 \\
\;\;\;\underline{3x^5-4x^4-x^3-x^2-2x} & \overline{x+3} \\
\qquad -\;9x^4-15x^3-5x^2-3x-6 & \\
\qquad\;\;\;\underline{9x^4-12x^3-3x^2-3x-6} & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;3x^4-4x^3-x^2-x-2 & -3x^3-2x^2 \\
\;\;\;\underline{3x^4+2x^3} & \overline{-x+2} \\
\qquad -\;-6x^3-x^2-x-2 & \\
\qquad\;\;\;\underline{-6x^3-4x^2} & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;-3x^3-2x^2 & 3x^2-x-2 \\
\;\;\;\underline{-3x^3+x^2+2x} & \overline{-x-1} \\
\qquad -\;-3x^2-2x & \\
\qquad\;\;\;\underline{-3x^2+x+2} & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;3x^2-x-2 & -3x-2 \\
\;\;\;\underline{3x^2+2x} & \overline{-x+1} \\
\qquad -\;-3x-2 & \\
\qquad\;\;\;\underline{-3x-2} & \\
\qquad\qquad 0 & \\
\end{array}
$$

Найбільший спільний дільник цих многочленів дорівнює $(-3x-2)$. Отже, найменше спільне кратне

$$
g(x)=\frac{\left(3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6\right)\cdot\left(3x^4-4x^3-x^2-x-2\right)}{(-3x-2)},
$$

або

$$
g(x)=-3x^8+x^7+23x^6-28x^5+14x^4-14x^3-13x^2+x-6
$$

Найбільший спільний дільник можна знайти і за допомогою розкладу многочленів на незвідні многочлени.

Розклад многочленів на незвідні множники

Многочлени f і g називаються **взаємно простими**, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює 1. Зручний критерій взаємної простоти встановлює

Теорема (критерій взаємної простоти многочленів**).** Многочлени f і g є взаємно простими тоді й тільки тоді, коли існують такі многочлени m і n, що $mf + ng = 1$.

Наслідок 1. *Якщо многочлени f і g, а також f і h є взаємно простими, то й многочлени f і gh є взаємно простими.*

Наслідок 2. *Якщо многочлени f і g взаємно прості, а многочлен h є таким, що $f|(gh)$, то $f|h$.*

Многочлен $f \in P[x]$ додатного степеня називається **незвідним** над полем P, якщо його не можна подати у вигляді добутку двох многочленів додатного степеня.

Іншими словами, з рівності $f = gh$ випливає, що один з многочленів g, h має нульовий степінь, а інший є асоційованим з f. Всі інші многочлени додатного степеня з $P[x]$ називаються звідними над P.

З означення відразу випливає, що многочлен, асоційований з незвідним многочленом над полем P, сам буде незвідним над P. Це означає, що **незвідність досить перевіряти лише для унітарних многочленів**.

Приклад 3. Кожен многочлен першого степеня є незвідним над полем, якому належать його коефіцієнти.

Справді, якби такий многочлен був звідним, то це означало б, що його степінь, число 1, можна записати, як суму двох натуральних чисел, а це неможливо.

Приклад 4. Кожен многочлен другого степеня над полем дійсних чисел, дискримінант якого від'ємний, є незвідним над полем R.

Справді, нехай $f(x) = x^2+bx+c \in$ R i $D = b^2-4c < 0$. Припустимо, що такий многочлен звідний над R, тобто $f(x) = (x + \alpha)(x + \beta)$ для деяких дійсних чисел α, β.

Тоді $b = \alpha + \beta$, $c = \alpha\beta$ і $D = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, що суперечить початковому припущенню. Отже, многочлен f є незвідним над полем R.

Незвідність многочлена залежить від поля, над яким цей многочлен розглядається. Так, многочлен $f(x) = x^2 + 1$ є незвідним над полем дійсних чисел, але допускає розклад $f(x) = (x - i)(x + i)$ над полем комплексних чисел, тобто є над ним звідним.

!! Над полем комплексних чисел нема інших незвідних многочленів, окрім многочленів першого степеня, а над полем дійсних чисел всі незвідні многочлени вичерпуються многочленами першого степеня і многочленами другого степеня з від'ємним дискримінантом.

Якщо f і g – незвідні многочлени над полем P, то вони або взаємно прості, або асоційовані.

Теорема (розкладання многочлена в добуток незвідних многочленів**).** Кожен многочлен додатного степеня над полем P розкладається в добуток незвідних многочленів над P, причому такий розклад однозначний з точністю до порядку множників та асоційованості.

Коренем многочлена $f \in P[x]$ називається такий елемент $a \in P$, що $f(a) = 0$.

Елемент $a \in P$ є коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ тоді й тільки тоді, коли $f(x)$ ділиться на $x - a$.

Кількість коренів многочлена обмежує

Теорема (про кількість коренів многочлена**).** Кількість коренів многочлена степеня n $(n \geq 0)$ не перевищує n.

Теорема 1. Сума кратностей усіх коренів ненульового многочлена не перевищує його степінь.

Твердження. Якщо корінь многочлена має кратність k і у полі P $k \neq 0$, то він є коренем кратності $k - 1$ похідної цього многочлена.

Корені многочлена кратності 1 називається простим коренем, він не буде коренем його похідної.

Теорема (основна теорема алгебри**).** Кожен многочлен додатного степеня з комплексними коефіцієнтами має комплексний корінь.

Наслідок з основної теореми алгебри. 1) Кожен многочлен, незвідний над полем комплексних чисел, має степінь 1. 2) Кожен многочлен додатного степеня з комплексними коефіцієнтами розкладається в добуток многочленів першого степеня з комплексними коефіцієнтами. 3) Сума кратностей комплексних коренів многочлена з комплексними коефіцієнтами дорівнює його степеневі.

Якщо *комплексне число* c *є коренем многочлена* $f(x)$ *з дійсними коефіцієнтами. Тоді число* $\bar{c}$ *також є коренем цього многочлена.*

Теорема (про розкладання многочлена з дійсними коефіцієнтами**).** Кожен многочлен додатного степеня з дійсними коефіцієнтами розкладається в добуток многочленів з дійсними коефіцієнтами першого степеня та другого степеня з від'ємним дискримінантом.

Приклад 6. Визначити кратність кореня $x = 3$ для многочлена

$$f(x) = -x^6 + 9x^5 - 27x^4 + 28x^3 - 9x^2 + 27x - 27.$$

Послідовно ділимо $f(x)$ на отримані частки при діленні його на $x - 3$ за схемою Горнера доки не отримаємо ненульову остачу:

	-1	9	-27	28	-9	27	-27
3	-1	6	-9	1	-6	9	0
3	-1	3	0	1	-3	0	
3	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**		

3	-1	-3	-9	-26			

Оскільки -26 ≠ 0, то корінь $x = 3$ має кратність 3 для заданого многочлена, причому $f(x) = (x-3)^3(-x^3+1)$.

Приклад 5. Знайти НСД многочленів
$f(x) = 2x^5 - x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 8$ та $g(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 3$
і виразити його як лінійну комбінацію $f(x)$ та $g(x)$.

Застосовуючи алгоритм Евкліда, послідовно ділимо з остачею:

$$f(x) = g(x)(2x+1) + (-5x^3 + 5x^2 - 5x + 5);$$

$$g(x) = (-5x^3 + 5x^2 - 5x + 5)(-\frac{1}{5}x) + (3x^2 + 3);$$

$$-5x^3 + 5x^2 - 5x + 5 = (3x^2 + 3)(-\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}) + 0.$$

Отже, НСД($f(x), g(x)$) = $x^2 + 1$.

Для знаходження лінійної комбінації, застосуємо розширений алгоритм Евкліда, послідовно виражаючи остачі через $f(x)$ та $g(x)$:

$$-5x^3 + 5x^2 - 5x + 5 = f(x) - g(x)(2x+1);$$

$$3x^2 + 3 = g(x) - (-5x^3 + 5x^2 - 5x + 5)(-\frac{1}{5}x) =$$

$$= g(x) - (f(x) - g(x)(2x+1))(-\frac{1}{5}x) =$$

$$= f(x)(\frac{1}{5}x) + g(x)(1 - \frac{1}{5}x(2x+1);$$

$$\Longrightarrow x^2 + 1 = f(x)(\frac{1}{15}x) + g(x)(-\frac{2}{15}x^2 - \frac{1}{15}x + \frac{1}{3}).$$

Приклад 7. Розкласти многочлен $g(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x - 1$ за степенями $x - 2$ і знайти значення його похідних в точці $x = 2$.

Скористаємося схемою Горнера:

	2	-5	-1	4	-1
2	2	-1	-3	-2	-5
2	2	3	3	4	
2	2	7	17		
2	2	11			
2	2				

Отже, $g(x) = 2(x-2)^4 + 11(x-2)^3 + 17(x-2)^2 + 4(x-2) - 5$. Значення похідних обчислюємо за формулами:

$$g^{(i)}(x) = i! \cdot a_i, \qquad i = 0,1,\dots,n,$$

де a_i – коефіцієнти розкладу многочлена за степенями $(x-2)$, $n = 4$ – степінь многочлена.

$g(2) = -5$; $g^{/}(x) = 4$; $g^{//}(x) = 2! \cdot 17 = 34$; $g^{///}(x) = 3! \cdot 11 = 66$; $g^{(4)}(x) = 4! \cdot 2 = 48$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 1

331. Обчислити лінійні комбінації матриць:

а) $3A+2B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$;

б) $0{,}5A-B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & -8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$;

в) $3(A-B)$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -1 & 5\\ -8 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

г) $3\begin{pmatrix}1 & 2\\ -5 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}24 & 2\\ 11 & -6\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 7\end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix}2 & 5 & -6\\ 6 & 5 & 7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & -6 & 6 & -9\\ 24 & 6 & -15 & 3\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}15 & 4\\ 4 & -22\end{pmatrix}$.

332. Транспонувати матриці:

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 1\\ 3 & 1 & -7\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 0 & -3 & -5\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -1 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 1 & -7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -3 & -1\\ 1 & 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}8 & -1 & 3\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

333. Знайти x_1 та x_2 з рівнянь:

а) $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\ 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix}-2\\ 7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-4\\ 7\end{pmatrix}$.

334. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

є) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -48 & -45 \\ 33 & -120 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -8 & 3 & 2 \\ 32 & 22 & 18 \\ -1 & 9 & 15 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 8 & 10 & 10 \\ 16 & 17 & 14 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 22 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 28 & 27 & 8 \\ 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 22 \end{pmatrix}$.

335. Знайти всі матриці переставні з даними:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} 4a & 3b \\ 4b & 4a+3b \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{3}{5}b & a+\frac{1}{5}b \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a-3b & 0 \\ b & c & a-3b \end{pmatrix}$.

336. Обчислити A^2 та A^3 для матриць:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -16 & 25 \\ -75 & 34 \end{pmatrix}$; б) $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$
;

в) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; г) $A^2 = \begin{pmatrix} 21 & 10 & -14 \\ 6 & 9 & -5 \\ 10 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 87 & 44 & -59 \\ 29 & 29 & -22 \\ 44 & 30 & -31 \end{pmatrix}$;

д) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

337. Обчислити $AB - BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

338. Обчислити AB^T для даних матриць:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 11 & -7 & 3 \\ 14 & -16 & 18 \\ 8 & -5 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 12 & -12 & 8 \end{pmatrix}$.

339. Обчислити $A^T B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. **Відповідь.** (1).

340. Обчислити $A^T B^T - (BA)^T + 2EB - 3A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\begin{pmatrix} -15 & -11 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 2

349. Знайти алгебраїчні доповнення A_{11}, A_{21}, A_{12} та мінори M_{11}, M_{21}, M_{12} елементів даних визначників:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Відповідь.

а) $A_{11}=6$, $A_{21}=5$, $A_{12}=-4$, $M_{11}=6$, $M_{21}=-5$, $M_{12}=4$;

б) $A_{11}=7$, $A_{21}=5$, $A_{12}=1$, $M_{11}=7$, $M_{21}=-5$, $M_{12}=-1$;

в) $A_{11}=48$, $A_{21}=24$, $A_{12}=42$, $M_{11}=48$, $M_{21}=-24$, $M_{12}=-42$;

г) $A_{11}=11$, $A_{21}=-4$, $A_{12}=9$, $M_{11}=11$, $M_{21}=4$, $M_{12}=-9$.

350. Обчислити визначники другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & \log_2 5 \\ \log_5 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos^2 2\alpha & \sin^2 2\alpha \\ \sin^2 2\alpha & \cos^2 2\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \sqrt[3]{x}-1 & 1 \\ x & \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \dfrac{2(1-\sqrt{2})^2}{3} & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ \sqrt{2} & \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{2} \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) 0; б) $\cos 4\alpha$; в) $4ab$;
г) 5; д) -1; е) -1.

351. Обчислити визначники третього порядку:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 35436 & 46343 & 22429 \\ 17718 & 23171 & 11214 \\ 5906 & 7723 & 3737 \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) 40; б) -46; в) ; г) -2;
д) ; е) ; є) -208; ж) .

352. При якій умові справджується тотожність?

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Відповідь. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos_2\gamma = 1$.

353. Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

в) $3x^2 - \begin{vmatrix} 3x & 4 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 13 & 5 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} x & \sqrt{x} \\ 2\sqrt{x} & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} x^3 & -2 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) 2; 10; б) 2; в) 2; -4; г) 4; -1;
д) 1; е) 5; -3; ж) 1; -1; -2.

354. Розв’язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} \succ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x^2+3 & x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \succ \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \succ 0$; г) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} \prec 0$.

Відповідь. а) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; б) R;
в) $(-6; -4)$; д) $(4-\sqrt{22};\ 4+\sqrt{22})$.

355. Знайти цілі значення елементів визначника, якщо

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = -1.$$

Відповідь. 0.

356. Знайти найбільше значення визначника 3-го порядку за умови, що його елементи дорівнюють +1 або 0.

Відповідь. 1.

357. Обчислити визначники четвертого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \sqrt{10} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{30} & \sqrt{21} & 2\sqrt{15} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{50} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{5} & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) -19; б) 900; в) 10; г) 150;

д) $abcd$; е) $-45\sqrt{6}$.

358. Обчислити обернені матриці для даних матриць:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; ґ) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}$;

в) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$;

359. Перевірити, чи справджуються тотожності:

а) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; б) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$; в) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

г) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$; д) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

Відповідь. а) так; б) ні; в) так; г) так; д) ні.

360. Обчислити $11 \cdot (A^{-1})^T + A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -6 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

361. При яких значеннях λ дані матриці вироджені:

а) $A=\begin{pmatrix}\lambda & 4 & 1\\ 2 & 5 & -1\\ 0 & \lambda & 1\end{pmatrix}$;   б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3-\lambda & 3\\ 1 & 2 & 5+\lambda\end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $1; -8$; б) $1; -2$.

362. Знайти $(AB)^{-1}$ та $(5A)^{-1}$, якщо

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix};\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Відповідь. $(AB)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & -5\\ -3 & 2\end{pmatrix}$;

$$(5A)^{-1}=\frac{1}{125}\begin{pmatrix}15 & -10\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$ є

363. Знайти $(AB)^{-1}$ та $(-3A)^{-1}$, якщо

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix};\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -5\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Відповідь.

364. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$;   б) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 9 & 5\end{pmatrix}$;

в) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 0 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;   г) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -2 & 0\end{pmatrix}$;

д) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 7 & 2\\ 5 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 3 & 3\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$;

є) $\begin{pmatrix}5 & -6 & 4\\ 3 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$;   ж) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

з) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 8\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & -4\end{pmatrix}$;   и) $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 6 & -4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

і) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$;   ї) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -9\\ -2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -12\end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) в) $\begin{pmatrix} -3 & 13 \\ -1 & 3 \\ -1 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 16 \\ \frac{9}{2} & -20 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$; є) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} -1-2C_1 & 1+2C_2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}$; и) розв’язку не існує; і) ; ї) $\begin{pmatrix} C_1 & \frac{3}{2}C_1+\frac{1}{2} \\ C_2 & \frac{3}{2}C_2-2 \end{pmatrix}$.

365. Розв’язати системи матричних рівнянь:

а) $$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Відповідь. а) $X = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 3

366. Обчислити ранги матриць та вказати їх будь-які базисні мінори:

а) $A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -5 & -1 \\ 6 & 7 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & 13 & -9 & 21 & 3 \end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) 2; б) 2; в) 2; г) ; д) ; е) 3.

Обчислити ранг матриці

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}.$$

6

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

7

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

8

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

9

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -1 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

11

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

12

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

13

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14

$$\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}.$$

15

$$\begin{pmatrix} 23 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

16

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 13 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 4

1. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера, Гауса, матричним методом:

1) $\begin{cases} 3x+4y+3z=2, \\ x-5y-2z=1, \\ x+3y+z=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-3y+5z=4, \\ 2x+2y-4z=6, \\ -2x+5y-6z=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+2y+4z=7, \\ -4x+3y+5z=0, \\ 2x-y+2z=8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-2y-5z=-5, \\ 3x+3y+2z=1, \\ 4x+4y+3z=1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+2y+4z=1, \\ 4x-2y+3z=3, \\ 2x+6y+5z=-1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x+4y-z=2, \\ 2x-2z=3, \\ 2x-4y-2z=3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x+2y+z=1, \\ -x-7y+z=4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ 3x+2y+2z=3, \\ 4x-y+5z=1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x+4y+6z=8, \\ -x+2y-3z=-1, \\ x+2y+3z=4; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x+2y+6z=-1, \\ x+4y+3z=2, \\ x+3z=1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+3y-2z=-2, \\ 2x+4y-4z=3, \\ -2x-y+4z=0; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} -3x+2y=1, \\ 2x-y+5z=2, \\ -6x+5y+15z=10; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-2x_4=7, \\ 2x_1-4x_2+2x_3+3x_4=9, \\ -x_1+2x_2-2x_3+x_4=-4, \\ x_1+3x_2-3x_3+2x_4=-3. \end{cases}$

2. Дослідити сумісність системи рівнянь, знайти розв'язок, якщо він існує:

1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3-4x_4=-3, \\ 3x_1+2x_2+4x_3-2x_4=-3, \\ 2x_1+x_2-2x_3+3x_4=2, \\ -x_1-2x_2+x_3-2x_4=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=-3, \\ 3x_1+2x_2+2x_3-4x_4=-1, \\ -2x_1+4x_2-2x_3-x_4=-5, \\ -3x_1+5x_2-5x_3+5x_4=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1-4x_2-3x_3+5x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-2x_4=2, \\ 6x_1+3x_2+5x_3+2x_4=-3, \\ -2x_1+x_2+2x_3+x_4=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1+5x_2-3x_3+x_4=2, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1, \\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4=5. \end{cases}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 5

Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = -12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 7x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1; \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 8; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 12x_2 - 16x_3 + 8x_4 - 4x_1 = -8, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 4; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 3; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -1; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ -3x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 8, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 13x_4 + 3x_5 = -5, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 11x_4 - 2x_5 = 3; \end{cases}$

16) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ 5x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 8; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 5x_5 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1, \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 = -1; \end{cases}$

18) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 10x_4 + x_5 = 6; . \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

21) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

22) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_2 - 4x_3 - 2x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 6

Завдання (варіанти наведені у таблиці 1).

Скласти вектори $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$; $\vec{b} = \overrightarrow{A_3A_4}$ та $\vec{c} = \overrightarrow{A_3A_2}$. Знайти:

1) модулі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$;
2) орти векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$;
3) кут між векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$;
4) скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
5) векторний добуток $\vec{b} \times \vec{c}$;
6) мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;
7) обчислити вираз $\left[\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(2\vec{b} + 3\vec{c}\right)\right]$;
8) побудувати на площині вектор $\vec{z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$, якщо $\alpha = a_x, \beta = b_z$ (користуючись правилом паралелограма або трикутника); вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ брати довільними;
9) розкласти вектор $\vec{d} = \overrightarrow{A_1A_3}$ у векторному базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (перевірити спочатку, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ лінійно незалежні).

Таблиця 1

Варіант	$A_1(x_1; y_1; z_1)$	$A_2(x_2; y_2; z_2)$	$A_3(x_3; y_3; z_3)$	$A_4(x_4; y_4; z_4)$
1.	(1; 3; 6)	(2; 2; 1)	(–1; 0; 1)	(–4; 6; –7)
2.	(–4; 2; 6)	(2; –3; 0)	(–10; 5; 8)	(–5; 2; –4)
3.	(7; 2; 4)	(7; –1; –2)	(3; 3; 1)	(–4; 2; 8)
4.	(2; 1; 4)	(–1; 5;–2)	(–7; –3; 2)	(–6; –3; 6)
5.	(–1; –5; 2)	(–6; 0; –3)	(3; 6; –3)	(–10; 6; 7)
6.	(0; –1; 1)	(–2; 3; 5)	(1; –5; –9)	(–1; –6; 3)
7.	(5; 2; 0)	(2; 5; 0)	(1; 2; 4)	(–1; 1; 1)
8.	(2; –1; –2)	(1; 2; 1)	(5; 0; –6)	(–10; 9; –7)
9.	(–2; 0; –4)	(–1; 7; 1)	(4; –8; –4)	(1; –4; 6)
10.	(14; 4; 5)	(–5; –3; 2)	(–2; –6; –3)	(–2; 2; –1)
11.	(1; 2; 0)	(3; 0; –3)	(5; 2; 6)	(8; 4; –9)
12.	(2; –1; 2)	(1; 2; –1)	(3; 2; 1)	(–4; 2; 5)
13.	(1; 1; 2)	(–1; 1; 3)	(2; –2; 4)	(–1; 0; –2)
14.	(2; 3; 1)	(4; 1; –2)	(6; 3; 7)	(7; 5; –3)
15.	(1; 1; –1)	(2; 3 ;1)	(3; 2; 1)	(5; 9; –8)
16.	(1; 5; –7)	(–3; 6; 3)	(–2; 7; 3)	(–4; 8; –12)
17.	(–3; 4; –7)	(1; 5; –4)	(–5; –2; 0)	(2; 5; 4)
18.	(–1; 2; –3)	(4; –1; 0)	(2; 1; –2)	(3; 4; 5)
19.	(4; –1; 3)	(–2; 1; 0)	(0; –5; 1)	(3; 2; –6)
20.	(1; –1; 1)	(–2; 0; 3)	(2; 1; –1)	(2; –2; –4)
21.	(1; 2; 0)	(1; –1; 2)	(0; 1; –1)	(–3; 0; 1)
22.	(1; 0; 2)	(1; 2; –1)	(2; –2; 1)	(2; 1; 0)
23.	(1; 2; –3)	(1; 0; 1)	(–2; –1; 6)	(0; –5; –4)
24.	(3; 10; –1)	(–2; 3; –5)	(–6; 0; –3)	(1; –1; 2)
25.	(–1; 2; 4)	(–1; –2; –4)	(3; 0; –1)	(7; –3; 1)
26.	(1; 2; 0)	(1; 2; –1)	(–5; –2; 0)	(–3; 0; 1)
27.	(3; 10; –1)	(1; 5; –4)	(–2; 7; 3)	(2; 5; 4)
28.	(3; 4; 5)	(2; 1; –2)	(4; –1; 0)	(–1; 2; –3)
29.	(2; –2; 1)	(1; 2; –1)	(1; 0; 2)	(2; 1; 0)
30.	(2; 3 ;1)	(1; 1; –1)	(5; 9; –8)	(3; 2; 1)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 7

Задача 1. Перевірити, чи є лінійними просторами такі множини.

1. Множина всіх вільних векторів, які паралельні заданій прямій, якщо додавання векторів та множення їх на число визначені за звичайними правилами векторної алгебри?
2. Множина вільних векторів, які паралельні заданій площині, якщо додавання векторів та множення їх на число визначені за звичайними правилами векторної алгебри?
3. Множина всіх вільних векторів, якщо додавання векторів та множення їх на число визначені за звичайними правилами векторної алгебри?
4. Множина вільних векторів, які не паралельні заданій прямій, якщо додавання векторів та множення їх на число визначені за звичайними правилами векторної алгебри?
5. Множина всіх матриць зі звичайними операціями додавання та множення матриці на число?
6. Множина всіх прямокутних матриць розміру $m\times n$ зі звичайними операціями додавання та множення матриці на число?
7. Множина всіх квадратних матриць розміру 2×2 зі звичайними операціями додавання та множення матриці на число?
8. Множина всіх матриць розміру $n\times 1$ зі звичайними операціями додавання та множення матриці на число?
9. Множина всіх квадратних матриць розміру 2×2 з комплексними елементами, якщо операції додавання та множення матриці на число визначені за правилами матричної алгебри?
10. Множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$, якщо операції додавання та множення матриці на число визначені за правилами матричної алгебри?
11. Множина всіх матриць, які мають вигляд $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$, якщо операції додавання та множення матриці на число визначені за правилами матричної алгебри?
12. Множина всіх матриць, які мають вигляд $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\in R$, якщо операції додавання та множення матриці на число визначені за правилами матричної алгебри?
13. Множина всіх многочленів, степінь яких не перевищує натурального числа n?

14. Множина всіх многочленів, степінь яких дорівнює натуральному числу n?

15. Множина всіх многочленів $f(t)$, для яких $f(0)=1$?

16. Множина всіх многочленів $f(t)$, для яких $f(0)=0$?

17. Множина всіх функцій, диференційовних на відрізку $[a;b]$?

18. Множина всіх функцій, інтегровних на відрізку $[a;b]$?

19. Множина функцій n змінних виду $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b$, де $a_1,...,a_n,b$ – дійсні числа ?

20. Множина n-вимірних арифметичних векторів, всі координати яких рівні між собою, якщо додавання векторів та множення їх на число визначені за звичайними правилами?

21. Множина n-вимірних арифметичних векторів, перша координата яких дорівнює нулю, якщо додавання векторів та множення їх на число визначені за звичайними правилами?

22. Множина n-вимірних арифметичних векторів, сума координат яких дорівнює нулю, якщо додавання векторів та множення їх на число визначені за звичайними правилами?

23. Множина векторів, які лежать в одній площині та паралельні заданій прямій, якщо додавання векторів та множення їх на число визначені за звичайними правилами векторної алгебри?

24. Множина векторів площини, довжина яких не перевищує одиниці, якщо додавання векторів та множення їх на число визначені за звичайними правилами векторної алгебри?

25. Множина вироджених квадратних матриць порядку n зі звичайними операціями додавання та множення матриці на число?

Задача 2. З’ясувати, чи буде задана система арифметичних векторів лінійно залежною. У разі стверджувальної відповіді обчислити лінійну комбінацію векторів $\overline{a}=3\overline{x_1}-2\overline{x_2}+4\overline{x_3}$, а у разі негативної відповіді – визначити невідомий вектор $\overline{a}$ з рівняння $2\overline{x_1}+3\overline{x_2}-\overline{x_3}+2\overline{a}=\overline{0}$.

1. $\overline{x_1}=(2;1;3;1)$; $\overline{x_2}=(4;2;6;2)$; $\overline{x_3}=(6;3;9;3)$; $\overline{x_4}=(1;1;-1;5)$.
2. $\overline{x_1}=(4;-5;2;6)$; $\overline{x_2}=(2;-2;1;3)$; $\overline{x_3}=(6;-3;3;9)$; $\overline{x_4}=(4;-1;5;6)$.
3. $\overline{x_1}=(1;0;0;2;5)$; $\overline{x_2}=(0;1;0;3;4)$; $\overline{x_3}=(0;0;1;4;7)$; $\overline{x_4}=(2;-3;4;11;12)$.
4. $\overline{x_1}=(1;3;4;3)$; $\overline{x_2}=(2;5;5;8)$; $\overline{x_3}=(4;6;-2;24)$; $\overline{x_4}=(-3;-4;3;19)$.
5. $\overline{x_1}=(2;3;4)$; $\overline{x_2}=(-4;-6;-8)$; $\overline{x_3}=(5;4;17)$; $\overline{x_4}=(3;2;11)$.
6. $\overline{x_1}=(3;4;1;2)$; $\overline{x_2}=(5;7;1;9)$; $\overline{x_3}=(2;5;-4;6)$.

7. $\overline{x_1}=(1;2;5;7)$; $\overline{x_2}=(3;-1;1;7)$; $\overline{x_3}=(5;-3;-1;9)$; $\overline{x_4}=(-1;4;7;1)$.

8. $\overline{x_1}=(4;2;0)$; $\overline{x_2}=(3;6;3)$; $\overline{x_3}=(9;9;3)$; $\overline{x_4}=(4;5;2)$.

9. $\overline{x_1}=(7;3;1)$; $\overline{x_2}=(5;2;1)$; $\overline{x_3}=(-3;-3;3)$; $\overline{x_4}=(1;2;-3)$.

10. $\overline{x_1}=(1;1;5)$; $\overline{x_2}=(1;-6;-1)$; $\overline{x_3}=(-7;1;-1)$.

11. $\overline{x_1}=(1;2;4)$; $\overline{x_2}=(-2;3;-1)$; $\overline{x_3}=(3;-2;4)$; $\overline{x_4}=(-4;-1;-9)$.

12. $\overline{x_1}=(3;2;1)$; $\overline{x_2}=(5;4;3)$; $\overline{x_3}=(-1;-1;-1)$; $\overline{x_4}=(2;3;4)$.

13. $\overline{x_1}=(2;3;1;1)$; $\overline{x_2}=(4;6;1;0)$; $\overline{x_3}=(6;9;-4;2)$.

14. $\overline{x_1}=(2;4;8;3)$; $\overline{x_2}=(2;3;5;3)$; $\overline{x_3}=(-1;-1;-3;-2)$; $\overline{x_4}=(1;2;4;2)$.

15. $\overline{x_1}=(1;1;3;0)$; $\overline{x_2}=(2;-2;-3;4)$; $\overline{x_3}=(3;1;0;2)$; $\overline{x_4}=(1;1;-7;5)$.

16. $\overline{x_1}=(7;93;1;35)$; $\overline{x_2}=(51;25;2;104)$; $\overline{x_3}=(27;14;1;55)$; $\overline{x_4}=(31;121;-1;61)$.

17. $\overline{x_1}=(1;1;1;1)$; $\overline{x_2}=(1;2;4;8)$; $\overline{x_3}=(1;3;9;27)$; $\overline{x_4}=(1;4;16;64)$.

18. $\overline{x_1}=(4;0;0;5)$; $\overline{x_2}=(0;4;5;0)$; $\overline{x_3}=(0;5;4;0)$; $\overline{x_4}=(5;0;0;4)$.

19. $\overline{x_1}=(2;7;1;4)$; $\overline{x_2}=(2;10;1;4)$; $\overline{x_3}=(2;12;3;5)$; $\overline{x_4}=(1;13;1;6)$.

20. $\overline{x_1}=(1;2;5;7)$; $\overline{x_2}=(3;-1;1;7)$; $\overline{x_3}=(5;-3;-1;9)$; $\overline{x_4}=(-1;4;7;1)$.

21. $\overline{x_1}=(3;0;1;2)$; $\overline{x_2}=(1;4;7;2)$; $\overline{x_3}=(1;10;17;4)$; $\overline{x_4}=(4;1;3;3)$.

22. $\overline{x_1}=(2;0;-2;4)$; $\overline{x_2}=(3;2;-4;6)$; $\overline{x_3}=(0;-4;2;0)$.

23. $\overline{x_1}=(2;0;3;3)$; $\overline{x_2}=(-1;1;-1;1)$; $\overline{x_3}=(1;2;2;6)$; $\overline{x_4}=(0;-1;3;1)$.

24. $\overline{x_1}=(2;12;3;5)$; $\overline{x_2}=(1;13;1;6)$; $\overline{x_3}=(2;7;1;4)$; $\overline{x_4}=(2;10;1;4)$.

25. $\overline{x_1}=(5;-3;-1;9)$; $\overline{x_2}=(-1;4;7;1)$; $\overline{x_3}=(3;-1;1;7)$; $\overline{x_4}=(1;2;5;7)$.

Задача 3. Знайти ранг системи векторів та вказати який-небудь її базис.

1. $\overline{x_1}=(4;-1;3;-2)$; $\overline{x_2}=(8;-2;6;-4)$; $\overline{x_3}=(3;-1;4;-2)$; $\overline{x_4}=(6;-2;8;-4)$.

2. $\overline{x_1}=(1;2;0;0)$; $\overline{x_2}=(1;2;3;4)$; $\overline{x_3}=(3;6;0;0)$.

3. $\overline{x_1}=(2;1;-3;1)$; $\overline{x_2}=(4;2;-6;2)$; $\overline{x_3}=(6;3;-9;3)$; $\overline{x_4}=(1;1;1;1)$.

4. $\overline{x_1}=(5;2;-3;1)$; $\overline{x_2}=(4;1;-2;3)$; $\overline{x_3}=(1;1;-1;-2)$; $\overline{x_4}=(3;4;-1;2)$.

5. $\overline{x_1}=(1;1;1;1)$; $\overline{x_2}=(1;0;1;0)$; $\overline{x_3}=(1;2;1;2)$.

6. $\overline{x_1}=(1;2;-1;1)$; $\overline{x_2}=(2;1;0;-1)$; $\overline{x_3}=(3;3;2;1)$; $\overline{x_4}=(1;2;-4;0)$.

7. $\overline{x_1}=(2;-1;3;5)$; $\overline{x_2}=(4;-3;1;3)$; $\overline{x_3}=(3;-2;3;4)$;
$\overline{x_4}=(4;-1;15;17)$; $\overline{x_5}=(7;-6;-7;0)$.

8. $\overline{x_1}=(1;2;3;4)$; $\overline{x_2}=(2;3;4;5)$; $\overline{x_3}=(3;4;5;6)$; $\overline{x_4}=(4;5;6;7)$.

9. $\overline{x_1}=(1;2;3)$; $\overline{x_2}=(2;3;4)$; $\overline{x_3}=(3;2;3)$; $\overline{x_4}=(4;3;4)$; $\overline{x_5}=(1;1;1)$.

10. $\overline{x_1}=(1;2;3;-4)$; $\overline{x_2}=(2;3;-4;1)$; $\overline{x_3}=(2;-5;8;-3)$;
$\overline{x_4}=(5;26;-9;-12)$; $\overline{x_5}=(3;-4;1;2)$.

11. $\overline{x_1}=(0;2;-4;-2)$; $\overline{x_2}=(-1;-4;5;1)$; $\overline{x_3}=(3;1;7;8)$;
$\overline{x_4}=(0;5;-10;-5)$; $\overline{x_5}=(2;3;0;3)$.

12. $\overline{x_1}=(2;0;-2;4)$; $\overline{x_2}=(3;2;-4;6)$; $\overline{x_3}=(0;-4;2;0)$.

13. $\overline{x_1}=(1;2;-1;2)$; $\overline{x_2}=(2;3;0;-1)$; $\overline{x_3}=(1;2;1;4)$; $\overline{x_4}=(1;3;-1;0)$.

14. $\overline{x_1}=(3;5;-1;2)$; $\overline{x_2}=(2;4;-1;3)$; $\overline{x_3}=(1;3;-1;4)$.

15. $\overline{x_1}=(1;1;1;1)$; $\overline{x_2}=(1;1;1;3)$; $\overline{x_3}=(3;-5;7;2)$; $\overline{x_4}=(1;-7;5;-2)$.

16. $\overline{x_1}=(1;2;1;3)$; $\overline{x_2}=(1;1;1;3)$; $\overline{x_3}=(1;0;1;3)$.

17. $\overline{x_1}=(1;1;1;1)$; $\overline{x_2}=(1;2;2;3)$; $\overline{x_3}=(1;1;2;2)$; $\overline{x_4}=(1;1;1;2)$.

18. $\overline{x_1}=(1;1;1;1)$; $\overline{x_2}=(2;2;2;2)$; $\overline{x_3}=(3;3;3;3)$; $\overline{x_4}=(1;1;2;2)$.

19. $\overline{x_1}=(1;1;2;1)$; $\overline{x_2}=(3;4;5;5)$; $\overline{x_3}=(3;5;4;7)$; $\overline{x_4}=(2;3;1;6)$;
$\overline{x_5}=(4;7;5;10)$.

20. $\overline{x_1}=(2;3;5)$; $\overline{x_2}=(3;4;6)$; $\overline{x_3}=(5;3;-1)$; $\overline{x_4}=(-3;-1;3)$; $\overline{x_5}=(-2;-3;-5)$.

21. $\overline{x_1}=(2;1;0;4)$; $\overline{x_2}=(-4;-2;1;-7)$; $\overline{x_3}=(3;1;-1;4)$;
$\overline{x_4}=(1;-4;3;-4)$; $\overline{x_5}=(0;2;1;5)$.

22. $\overline{x_1}=(0;-1;3;0;2)$; $\overline{x_2}=(2;-4;1;5;3)$; $\overline{x_3}=(-4;5;7;-10;0)$.

23. $\overline{x_1}=(1;i;-1;-i;1)$; $\overline{x_2}=(1;-i;-1;i;1)$; $\overline{x_3}=(1;-1;1;-1;1)$; $\overline{x_4}=(3;-1;-1;-1;3)$.

24. $\overline{x_1}=t-13t^2$; $\overline{x_2}=2-3t-3t^2$; $\overline{x_3}=1+t+5t^2$.

25. $\overline{x_1}=1+t+t^2+t^3$; $\overline{x_2}=1+t-t^2-t^3-t^4$; $\overline{x_3}=2+2t+t^4$.

Задача 4/ Перевірити, чи утворює система векторів $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$, $\overline{e_4}$ базис простору арифметичних векторів R^4, та визначити координати вектора $\overline{x}$ у цьому базисі.

1. $\overline{e_1}=(2;4;8;3)$; $\overline{e_2}=(2;3;5;3)$; $\overline{e_3}=(-1;-1;-3;-2)$; $\overline{e_4}=(1;2;4;2)$; $\overline{x}=(4;6;12;6)$.
2. $\overline{e_1}=(2;1;2;1)$; $\overline{e_2}=(3;1;1;1)$; $\overline{e_3}=(11;5;3;3)$; $\overline{e_4}=(5;2;2;4)$; $\overline{x}=(2;1;-3;-3)$.
3. $\overline{e_1}=(2;1;2;3)$; $\overline{e_2}=(5;3;10;8)$; $\overline{e_3}=(4;2;9;9)$; $\overline{e_4}=(1;1;7;2)$; $\overline{x}=(20;11;40;37)$.
4. $\overline{e_1}=(3;3;6;3)$; $\overline{e_2}=(4;5;8;5)$; $\overline{e_3}=(1;3;1;3)$; $\overline{e_4}=(2;5;5;7)$; $\overline{x}=(-3;-6;-8;-8)$.

5. $\overline{e_1}=(6;9;3;3)$; $\overline{e_2}=(5;-1;4;-9)$; $\overline{e_3}=(-2;4;2;0)$; $\overline{e_4}=(4;-1;-2;2)$;
$\overline{x}=(-4;13;1;11)$.
6. $\overline{e_1}=(2;7;1;1)$; $\overline{e_2}=(-1;-4;-2;-1)$; $\overline{e_3}=(-6;2;-4;2)$; $\overline{e_4}=(3;-15;9;-6)$;
$\overline{x}=(-1;-32;5;-8)$.
7. $\overline{e_1}=(3;2;1;1)$; $\overline{e_2}=(-2;-3;2;-1)$; $\overline{e_3}=(-5;1;0;-4)$; $\overline{e_4}=(1;5;-4;9)$;
$\overline{x}=(3;-3;-3;22)$.
8. $\overline{e_1}=(4;1;3;2)$; $\overline{e_2}=(-3;-2;-1;3)$; $\overline{e_3}=(1;-2;2;2)$; $\overline{e_4}=(5;-3;0;-8)$;
$\overline{x}=(7;3;-1;-7)$.
9. $\overline{e_1}=(2;2;3;1)$; $\overline{e_2}=(-2;3;4;3)$; $\overline{e_3}=(0;1;-1;1)$; $\overline{e_4}=(1;-3;2;-1)$; $\overline{x}=(-3;-6;0;2)$.
10. $\overline{e_1}=(1;3;2;3)$; $\overline{e_2}=(1;-1;3;2)$; $\overline{e_3}=(-6;-6;9;3)$; $\overline{e_4}=(-4;-4;2;8)$; $\overline{x}=(6;2;6;-7)$.
11. $\overline{e_1}=(2;3;1;5)$; $\overline{e_2}=(1;4;3;-3)$; $\overline{e_3}=(1;-1;-1;6)$; $\overline{e_4}=(1;-1;1;3)$; $\overline{x}=(3;2;4;5)$.
12. $\overline{e_1}=(3;4;7;2)$; $\overline{e_2}=(1;1;2;1)$; $\overline{e_3}=(-2;1;-2;-6)$; $\overline{e_4}=(1;-3;1;9)$; $\overline{x}=(0;5;7;-1)$.
13. $\overline{e_1}=(2;7;3;1)$; $\overline{e_2}=(1;3;2;1)$; $\overline{e_3}=(3;6;4;3)$; $\overline{e_4}=(4;8;5;4)$; $\overline{x}=(7;1;9;6)$.
14. $\overline{e_1}=(1;2;-1;2)$; $\overline{e_2}=(2;3;0;-1)$; $\overline{e_3}=(1;2;1;4)$; $\overline{e_4}=(1;3;-1;0)$; $\overline{x}=(7;14;-1;2)$.
15. $\overline{e_1}=(1;2;1;1)$; $\overline{e_2}=(2;3;1;0)$; $\overline{e_3}=(3;1;1;-2)$; $\overline{e_4}=(4;2;-1;-6)$; $\overline{x}=(0;0;2;7)$.
16. $\overline{e_1}=(3;1;2;4)$; $\overline{e_2}=(4;7;1;-3)$; $\overline{e_3}=(2;1;3;4)$; $\overline{e_4}=(1;1;5;6)$; $\overline{x}=(16;23;10;1)$.
17. $\overline{e_1}=(2;3;4;1)$; $\overline{e_2}=(3;3;4;1)$; $\overline{e_3}=(4;4;4;1)$; $\overline{e_4}=(5;5;5;1)$; $\overline{x}=(30;34;41;10)$.
18. $\overline{e_1}=(2;4;3;2)$; $\overline{e_2}=(3;3;2;2)$; $\overline{e_3}=(4;8;1;-3)$; $\overline{e_4}=(1;6;5;1)$; $\overline{x}=(6;1;5;-2)$.
19. $\overline{e_1}=(-1;1;0;2)$; $\overline{e_2}=(2;-1;1;0)$; $\overline{e_3}=(0;2;-1;1)$; $\overline{e_4}=(1;0;2;-1)$; $\overline{x}=(3;0;0;-1)$.
20. $\overline{e_1}=(1;-1;3;4)$; $\overline{e_2}=(-1;4;0;-1)$; $\overline{e_3}=(3;0;0;-3)$; $\overline{e_4}=(4;-1;-3;1)$; $\overline{x}=(1;1;0;0)$.
21. $\overline{e_1}=(-1;-2;4;-2)$; $\overline{e_2}=(2;-2;-9;7)$; $\overline{e_3}=(-4;-9;0;5)$; $\overline{e_4}=(-2;-7;-5;8)$;
$\overline{x}=(6;1;10;-7)$.
22. $\overline{e_1}=(3;0;5;2)$; $\overline{e_2}=(3;6;4;3)$; $\overline{e_3}=(-4;1;2;3)$; $\overline{e_4}=(-3;1;1;2)$; $\overline{x}=(9;19;18;13)$.
23. $\overline{e_1}=(3;0;5;2)$; $\overline{e_2}=(3;6;4;3)$; $\overline{e_3}=(-4;1;2;3)$; $\overline{e_4}=(-3;1;1;2)$; $\overline{x}=(8;3;-11;-9)$.
24. $\overline{e_1}=(0;-1;-1;-1)$; $\overline{e_2}=(1;0;-1;-1)$; $\overline{e_3}=(1;1;0;-1)$; $\overline{e_4}=(1;1;1;0)$; $\overline{x}=(4;5;3;0)$.
25. $\overline{e_1}=(1;2;1;3)$; $\overline{e_2}=(1;1;2;2)$; $\overline{e_3}=(1;1;1;3)$; $\overline{e_4}=(3;-5;7;2)$; $\overline{x}=(-1;8;-6;5)$.

Задача 5

1. Лінійний простір утворено квадратними матрицями другого порядку зі звичайними операціями додавання матриць і множення їх на число. Визначити

координати вектора цього простору $A=\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ у базисі $A_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Лінійний простір утворено многочленами, степінь яких не перевищує числа 4. Визначити координати вектора $f(x)=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4$ у базисі $f_1(x)=1-x$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2-x$, $f_4(x)=x^3$, $f_5(x)=x^4-x$.

3. Лінійний простір утворено квадратними матрицями другого порядку зі звичайними операціями додавання матриць і множення їх на число. Визначити координати вектора $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ цього простору у базисі $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Лінійний простір утворено квадратними матрицями другого порядку зі звичайними операціями додавання матриць і множення їх на число. Визначити координати вектора $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ цього простору у базисі $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Лінійний простір утворено множиною всіх комплексних чисел. Визначити координати вектора $\overline{x}=2+2i$ у базисі $\overline{e_1}=1-i$, $\overline{e_2}=1+i$.

6. Лінійний простір утворено множиною всіх комплексних чисел. Визначити координати вектора $\overline{x}=2-2i$ у базисі $\overline{e_1}=1-i$, $\overline{e_2}=1+i$.

7. Лінійний простір утворено множиною всіх комплексних чисел. Визначити координати вектора $\overline{x}=2+2i$ у базисі $\overline{e_1}=2$, $\overline{e_2}=2i$.

8. Лінійний простір утворено множиною всіх комплексних чисел. Визначити координати вектора $\overline{x}=2-2i$ у базисі $\overline{e_1}=2$, $\overline{e_2}=2i$.

9. У базисі $f_1=1$, $f_1=\cos 2x$ дійсного лінійного простору утвореного векторами виду $f(x)=\alpha+\beta\sin^2 x+\gamma\cos 2x$, де α,β,γ – дійсні числа, знайти координати вектора $h(x)=\frac{5}{2}+3\sin^2 x+\frac{3}{2}\cos 2x$.

10. У базисі $f_1=1$, $f_1=\cos 2x$ дійсного лінійного простору утвореного векторами виду $f(x)=\alpha+\beta\sin^2 x+\gamma\cos 2x$, де α,β,γ – дійсні числа, знайти координати вектора $h(x)=2+\sin^2 x-5\cos 2x$.

11. Лінійний простір утворено множиною всіх комплексних чисел. Визначити координати вектора $\overline{x} = -5 + 4i$ у базисі $\overline{e_1} = -1 + 2i$, $\overline{e_2} = 2 - i$.

12. Лінійний простір утворено многочленами, степінь яких не перевищує числа 4. Доповнити до базису систему векторів $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 - x^4$.

13. Лінійний простір утворено квадратними матрицями другого порядку зі звичайними операціями додавання матриць і множення їх на число. Доповнити до базису систему векторів $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Лінійний простір утворено множиною чотиривимірних арифметичних векторів. Доповнити до базису систему векторів

$\overline{e_1} = (1;2;0;0)$, $\overline{e_2} = (1;2;3;0)$.

15. Довести, що всі n-вимірні вектори вигляду $(\alpha,,\beta,\alpha,\beta,\ldots)$, де α, β – будь-які числа утворюють лінійний простір і знайти його базис та вимірність.

16. Знайти будь-який базис і вимірність лінійного підпростору L простору R^n, якщо L дано рівнянням $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

17. Дійсний лінійний простір утворено множиною всіх многочленів, степінь яких не перевищує числа 2. Довести, що система векторів $\overline{f_1(x)} = x^2 + 5$, $\overline{f_2(x)} = x^2 - 4x + 3$, $\overline{f_3(x)} = x^2 + 16x + 13$ лінійно залежна, та знайти їх нетривіальну лінійну комбінацію, рівну $\overline{0}$.

18. Лінійний простір утворено множиною прямокутних матриць розміру 2×3. Довести, що система векторів $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -8 & 5 & -11 \end{pmatrix}$ лінійно залежна, та знайти їх нетривіальну лінійну комбінацію, рівну $\overline{0}$.

19. Лінійний простір утворено множиною неперервних функцій на всій числовій осі. Довести, що система векторів $\overline{f_1(t)} = \sin^2 t$, $\overline{f_2(t)} = \cos^2 t$, $\overline{f_3(t)} = t$, $\overline{f_4(t)} = 3$, $\overline{f_5(t)} = e^t$ лінійно залежна, та знайти їх нетривіальну лінійну комбінацію, рівну $\overline{0}$.

20. Дійсний лінійний простір утворено множиною всіх многочленів, степінь яких не перевищує числа 2. Довести, що система векторів $\overline{f_1(t)} = t^2 - 4t + 3,\ 5t - 4$, $\overline{f_2(t)} = t^2 + t + 1$ лінійно незалежна.

21. Комплексний лінійний простір утворено множиною комплексних чисел. Довести, що система векторів $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 6 + 29i$ лінійно залежна, та знайти їх нетривіальну лінійну комбінацію, рівну $\overline{0}$.

22. Лінійний простір утворено множиною неперервних функцій на всій числовій осі. Чи є вектори (функції) $\sin x$, $\sin(x+2)$, $\cos(x-5)$ лінійно залежними? У разі стверджувальної відповіді знайти їх нетривіальну лінійну комбінацію, рівну $\overline{0}$.

23. Лінійний простір утворено множиною неперервних функцій на всій числовій осі. Чи є вектори (функції) $arctgx$, $arcctgx$, 1 лінійно залежними? У разі стверджувальної відповіді знайти їх нетривіальну лінійну комбінацію, рівну $\overline{0}$.

24. Дійсний лінійний простір утворено множиною всіх многочленів, степінь яких не перевищує числа 2. Чи є вектори $\overline{f_1(t)} = t^2 - t + 3,\ 2t^2 + t,\ \overline{f_2(t)} = 2t - 4$ лінійно залежними? У разі стверджувальної відповіді знайти їх нетривіальну лінійну комбінацію, рівну $\overline{0}$.

25. Лінійний простір утворено множиною неперервних функцій на всій числовій осі. Чи є вектори (функції) $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, 1 лінійно залежними? У разі стверджувальної відповіді знайти їх нетривіальну лінійну комбінацію, рівну $\overline{0}$.

Задача 6. У лінійному просторі арифметичних тривимірних векторів задано два базиси $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ та $\overline{e_1^*}, \overline{e_2^*}, \overline{e_3^*}$, причому відомо розклад векторів $\overline{e_1^*}, \overline{e_2^*}, \overline{e_3^*}$ за векторами першого базису. Виразити у базисі $\overline{e_1^*}, \overline{e_2^*}, \overline{e_3^*}$ вектор $\overline{x}$, записаний у базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

1. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\quad \overline{e_2^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\quad \overline{e_3^*} = \overline{e_1} + 4\overline{e_2} + 9\overline{e_3}$;
   $\overline{x} = 4\overline{e_1} + 4\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$.
2. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\quad \overline{e_2^*} = 4\overline{e_1} + 3\overline{e_2} - 2\overline{e_3}$; $\quad \overline{e_3^*} = -5\overline{e_1} - 4\overline{e_2} - \overline{e_3}$;
   $\overline{x} = 8\overline{e_1} + 9\overline{e_2} + 6\overline{e_3}$.
3. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 5\overline{e_2} + 4\overline{e_3}$; $\quad \overline{e_2^*} = 2\overline{e_1} + 12\overline{e_2} + 9\overline{e_3}$; $\quad \overline{e_3^*} = -\overline{e_1} - 2\overline{e_2} - 2\overline{e_3}$;
   $\overline{x} = 3\overline{e_1} - \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$.
4. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 4\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$; $\quad \overline{e_2^*} = 2\overline{e_1} + 7\overline{e_2} + 5\overline{e_3}$; $\quad \overline{e_3^*} = -2\overline{e_1} - 3\overline{e_2} - 2\overline{e_3}$;
   $\overline{x} = -\overline{e_1} + 13\overline{e_2} + 10\overline{e_3}$.
5. $\overline{e_1^*} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2} + 4\overline{e_3}$; $\quad \overline{e_2^*} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2} - \overline{e_3}$; $\quad \overline{e_3^*} = \overline{e_1} - \overline{e_2} + 5\overline{e_3}$;
   $\overline{x} = 5\overline{e_1} + 3\overline{e_3}$.
6. $\overline{e_1^*} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2} + 7\overline{e_3}$; $\quad \overline{e_2^*} = \overline{e_1} - 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\quad \overline{e_3^*} = -\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - \overline{e_3}$;
   $\overline{x} = 5\overline{e_1} - 5\overline{e_2} + 10\overline{e_3}$.
7. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\quad \overline{e_2^*} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\quad \overline{e_3^*} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$;
   $\overline{x} = 6\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 5\overline{e_3}$.

8. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$;
$\overline{x} = 5\overline{e_1} + 6\overline{e_2} + 4\overline{e_3}$.

9. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 3\overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = -2\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 4\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = \overline{e_1} - \overline{e_2} - \overline{e_3}$;
$\overline{x} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2} + 5\overline{e_3}$.

10. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = \overline{e_1} - \overline{e_2} - \overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$;
$\overline{x} = 6\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 5\overline{e_3}$.

11. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$;
$\overline{x} = 3\overline{e_1} + 11\overline{e_2} + 8\overline{e_3}$.

12. $\overline{e_1^*} = 5\overline{e_1} + 2\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = 4\overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$;
$\overline{x} = 2700\overline{e_1} + 900\overline{e_2} + 1600\overline{e_3}$.

13. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} - 2\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = 2\overline{e_1} + 3\overline{e_2} - 4\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = \overline{e_1} - 3\overline{e_2} + 5\overline{e_3}$;
$\overline{x} = 8\overline{e_1} - 5\overline{e_2} + 10\overline{e_3}$.

14. $\overline{e_1^*} = 2\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = -3\overline{e_1} + 4\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = -\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + \overline{e_3}$;
$\overline{x} = -6\overline{e_1} - 5\overline{e_2} - 2\overline{e_3}$.

15. $\overline{e_1^*} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2} + 3\overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = \overline{e_1} - 2\overline{e_2} + 4\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = 6\overline{e_1} - \overline{e_2} - 2\overline{e_3}$; $\overline{x} = 5\overline{e_2} + 13\overline{e_3}$.

16. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = 2\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = 3\overline{e_1} - \overline{e_2} - 4\overline{e_3}$; $\overline{x} = 6\overline{e_1} + 4\overline{e_2}$.

17. $\overline{e_1^*} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2}$; $\overline{e_2^*} = 3\overline{e_1} - 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = -\overline{e_1} + 4\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{x} = 9\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$.

18. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 3\overline{e_2} - \overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2} + 5\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = -\overline{e_1} + 4\overline{e_2} - \overline{e_3}$; $\overline{x} = 12\overline{e_1} - 13\overline{e_2} + 27\overline{e_3}$.

19. $\overline{e_1^*} = 3\overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2} + 5\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$; $\overline{x} = 5\overline{e_1} + 6\overline{e_2} - 3\overline{e_3}$.

20. $\overline{e_1^*} = 7\overline{e_1} + 5\overline{e_2} + 10\overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = 2\overline{e_1} - 3\overline{e_2} - 11\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = 3\overline{e_1} + 2\overline{e_2} + 5\overline{e_3}$;
$\overline{x} = 15\overline{e_1} + 15\overline{e_2} + 36\overline{e_3}$.

21. $\overline{e_1^*} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2}$; $\overline{e_2^*} = \overline{e_1} + 5\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = 3\overline{e_2} - \overline{e_3}$; $\overline{x} = 5\overline{e_1} + 16\overline{e_2} + 10\overline{e_3}$.

22. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + 5\overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = \overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = -2\overline{e_1} - 7\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{x} = 6\overline{e_1} + 16\overline{e_2} + 16\overline{e_3}$.

23. $\overline{e_1^*} = 5\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = 8\overline{e_1} - 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = \overline{e_1} + 6\overline{e_2} - \overline{e_3}$; $\overline{x} = 2\overline{e_1} - 7\overline{e_2} - 5\overline{e_3}$.

24. $\overline{e_1^*} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = -3\overline{e_1} + 4\overline{e_2} - 4\overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2}$; $\overline{x} = -7\overline{e_1} - \overline{e_2} - 5\overline{e_3}$.

25. $\overline{e_1^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_2^*} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$; $\overline{e_3^*} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$; $\overline{x} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 8

I.32. Показати, що оператор, який кожному вектору $x = (x_1, x_2, x_3)$ простору ставить у відповідність вектор $y = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$ є лінійним і знайти його матрицю в базі $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = = (0,0,1)$.

I.33. Показати, що ортогональне проектування тривимірного простору на вісь Oz є лінійним оператором і знайти його матрицю у базі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

I.34. Показати, що симетрія тривимірного простору відносно площини xOz є лінійним оператором і знайти його матрицю у базі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

I.35. Показати, що симетрія тривимірного простору відносно осі Oy є лінійним оператором і знайти його матрицю у базі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

I.36. Показати, що поворот тривимірного простору відносно осі Oz є лінійним оператором і знайти його матрицю у базі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

I.37. Показати, що оператор диференціювання є лінійним оператором на просторі многочленів, степені яких не вищі, ніж другий, та знайти його матрицю в базі $1, x, x^2$.

I.38. Знайти матриці композицій відображень з прикладів I.33 та I.34 в одному й іншому порядку. Чи комутують ці відображення?

I.39. Оператор A переводить вектори $a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (0,1,2,)$ та $a_3 = (1,0,0)$ відповідно у вектори $b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (1,1,-1)$, $b_3 = (2,1,2)$. Знайти матрицю оператора A у тій базі, в якій задані координати векторів.

I.40. У базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ оператор має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю цього оператора в базі з векторів:

а) $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_3 - \vec{e}_4$;

б) $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

I.41. Знайти власні вектори і власні значення матриці:

а) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} -7 & 12 & -6 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$;

і) $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; ї) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$; й) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 9

Задача 13

Відновити квадратичну форму $f(x_1, x_2, x_3)$ за її відомою матрицею A. Знайти квадратичну форму $f(y_1, y_2, y_3)$, здобуту даним лінійним перетворенням із квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3)$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = 3y_1 - 2y_2 - 4y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 - y_3. \end{cases}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 - 2y_3, \\ x_3 = 3y_1 + y_2 - y_3. \end{cases}$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = 3y_1 - 2y_2 - 2y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 + 6y_3, \\ x_3 = y_1 + 2y_2 + y_3. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 - 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 3y_1 + y_2 - y_3. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = -y_1 + 3y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_1 - y_3. \end{cases}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -11 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = -y_2 + 2y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 - y_3, \\ x_3 = y_1 - y_2. \end{cases}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = -y_1 + 5y_2 - 2y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 + 3y_3. \end{cases}$

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = y_1 + 4y_2 + 2y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 - y_3, \\ x_3 = y_2 + y_3. \end{cases}$

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_2 - 2y_3, \\ x_2 = y_1 + 3y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 + y_3. \end{cases}$

10. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_2 = y_1 - 2y_3, \\ x_3 = 3y_1 + y_2 - y_3. \end{cases}$

11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - 4y_3, \\ x_2 = 2y_1 + y_2, \\ x_3 = -y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$

12. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ x_2 = -y_2 + y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$

13. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = y_1 - 4y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_2 + y_3. \end{cases}$

14. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 + 3y_3. \end{cases}$

15. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 - 3y_2 + y_3, \\ x_3 = -y_1 + y_2. \end{cases}$

16. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = -y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 + 5y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1. \end{cases}$

17. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - y_3, \\ x_3 = y_1 + 3y_2 + y_3. \end{cases}$

18. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = 5y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = -y_1 + 5y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 - y_2 + 5y_3. \end{cases}$

19. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_3, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 - 2y_2. \end{cases}$

20. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{cases} x_1 = 4y_1 + 2y_2 - 2y_3, \\ x_2 = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 - y_3. \end{cases}$

21. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 - 3y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 - 3y_3. \end{cases}$

23. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_1 - y_2 - 3y_3. \end{cases}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{cases} x_1 = -y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 3y_3, \\ x_3 = y_2 - 3y_3. \end{cases}$

25. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{cases} x_1 = -y_1 + 3y_2 + 4y_3, \\ x_2 = y_1 - 2y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 - y_2 - 3y_3. \end{cases}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 10

Задача 14

Задану квадратичну форму 1) записати у матричному вигляді; 2) вказати лінійне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду за методом Лагранжа та записати цей канонічний вигляд; 3) звести форму до канонічного вигляду за методом Якобі (за умови, що це можливо); 4) проілюструвати на підставі виконаних дій закон інерції квадратичних форм; 5) визначити ранг, додатний та від'ємний індекси інерції, сигнатуру форми.

1. $-x_2^2-8x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3$.
2. $2x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+4x_1x_3$.
3. $x_1x_2+x_2x_3$.
4. $x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$.
5. $2x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2$.
6. $x_1^2+x_2x_3+x_3x_4$.
7. $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.
8. $-x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.
9. $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-10x_1x_3+4x_2x_3$.
10. $4x_1^2+5x_2^2+6x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$.
11. $5x_1^2+8x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3+4x_2x_3$.
12. $x_1^2+5x_2^2-x_3^2+6x_1x_2+4x_2x_3$.
13. $x_1x_4+x_2x_3$.
14. $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$.
15. $2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.
16. $3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.
17. $0{,}5x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-x_1x_2+x_2x_3-x_3x_4$.
18. $x_1^2+x_3^2-3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$.
19. $3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.
20. $2x_1x_2+2x_3x_4$.
21. $x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$.
22. $x_1^2+x_1x_2+x_3x_4$.
23. $x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3$.
24. $-2x_2x_3$.
25. $x_1x_2+x_2x_3$.

Задача 15
Знайти ортогональне перетворення, що зводить до канонічного вигляду квадратичну форму та записати цей канонічний вигляд форми.

1. $3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.
2. $7x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.
3. $x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.
4. $6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$.
5. $11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$.
6. $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.
7. $17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.
8. $x_1^2-5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$.
9. $8x_1^2-7x_2^2+8x_3^2+8x_1x_2-2x_1x_3+8x_2x_3$.
10. $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.
11. $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.
12. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.
13. $6x_1^2+x_2^2+6x_3^2+6x_1x_3-6x_2x_3$.
14. $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.
15. $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$.
16. $2x_1^2+2x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$;.
17. $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$.
18. $4x_1^2+4x_2^2-8x_3^2-10x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.
19. $7x_1^2+6x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.
20. $2x_1^2-7x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+20x_1x_3-16x_2x_3$.
21. $x_1^2+7x_2^2+x_3^2-8x_1x_2-16x_1x_3-8x_2x_3$.
22. $3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.
23. $x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$.
24. $11x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-16x_1x_3+20x_2x_3$.
25. $17x_1^2+17x_2^2+11x_3^2-16x_1x_2+8x_1x_3+-8x_2x_3$.

Задача 16
Знайти всі значення параметра β, при яких квадратична форма буде додатно визначеною.

1. $5x_1^2 + x_2^2 + \beta x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
2. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\beta x_1x_2 + 2x_1x_3$.
3. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\beta x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
4. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\beta x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.
5. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\beta x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.
6. $\beta x_1^2 + (\beta + 3)x_2^2 - 4x_1x_2$.
7. $-9x_1^2 - x_2^2 + 6\beta x_1x_2$.
8. $\beta x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
9. $x_1^2 + 4x_2^2 - \beta x_3^2 + 2\beta x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
10. $2x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + (2\beta - 1)x_1x_2 + \beta^2 x_2x_3$.
11. $x_2^2 + x_3^2 + 4\beta x_1x_2 + \beta^2 x_1x_3$;.
12. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\beta x_1x_2 + 2\beta x_1x_3 + 2\beta x_2x_3$.
13. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\beta x_1x_3 + 2\beta x_2x_3$.
14. $x_1^2 + 5x_2^2 + (\beta^2 + 1)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Знайти всі значення параметра β, при яких квадратична форма буде від’ємно визначеною.

15. $-x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - \beta^2 x_2x_3$.
16. $\beta x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
17. $\beta x_1^2 + \beta x_2^2 + (\beta - 3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\beta x_1x_3 + 2x_2x_3$.
18. $-2x_1^2 - 8x_2^2 - 3x_3^2 + 2\beta x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2\beta x_2x_3$.
19. $\beta x_1^2 + (\beta + 3)x_2^2 - 4x_1x_2$.
20. $-9x_1^2 - x_2^2 + 6\beta x_1x_2$.
21. $\beta x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
22. $x_1^2 + 4x_2^2 - \beta x_3^2 + 2\beta x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
23. $-x_1^2 + (8 - \beta)x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.
24. $-x_1^2 - \beta^2 x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
25. $-x_1^2 - \beta^2 x_2^2 - 15x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 6x_2x_3$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 11

Завдання 1 (варіанти завдань у таблиці 1). У трикутнику АВС потрібно знайти:

1) рівняння сторони ВС;
2) величину кута α при вершині А;
3) рівняння і довжину висоти до сторони ВС;
4) рівняння і довжину медіани до сторони ВС;
5) рівняння бісектриси кута при вершині А;
6) площу трикутника АВС.

Завдання 2 (варіанти завдань у таблиці 2).
Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки $M_0(x_0;y_0)$ і від прямої $Ax+C=0$ або $By+C=0$ відносяться як $m:n$. Зобразити лінію на малюнку.

Таблиця 1

Варі-ант	$A(x_1; y_1)$	$B(x_2; y_2)$	$C(x_3; y_3)$
1.	(0; –1)	(1; 1)	(–2; 1)
2.	(0; 1)	(1; –1)	(1; 0)
3.	(1; 0)	(1; –2)	(–1; 1)
4.	(2; 1)	(2; 2)	(3; 1)
5.	(3; 0)	(3; 2)	(4; 1)
6.	(–1; 3)	(–1; –2)	(1; 1)
7.	(0; 1)	(1; 1)	(2; –1)
8.	(2; 2)	(8; 3)	(–1; –1)
9.	(4; 7)	(2; 5)	(0; 0)
10.	(3; 2)	(–3; 0)	(0; 4)
11.	(2; 3)	(1; –1)	(6; 4)
12.	(7; –1)	(–3; 2)	(2; 7)
13.	(3; –4)	(10; 1)	(0; 7)
14.	(–1; –3)	(–5; 4)	(2; 9)
15.	(2; 1)	(1; 1)	(3; –5)
16.	(4; 6)	(–4; 6)	(–1; 0)
17.	(2; 8)	(–2; 4)	(3; 1)
18.	(1; –1)	(0; 1)	(2; 1)
19.	(0; 2)	(–1; 1)	(2; 4)
20.	(9; 3)	(7; 1)	(–2; 5)
21.	(0; 4)	(0; 0)	(–1; 2)

Таблиця 2

Варі-ант	Рівняння прямої	$M_0(x_0; y_0)$	m:n
1.	2x–3=0	(1; 1)	3:2
2.	x+2=0	(–1; 0)	2:3
3.	y–2=0	(1; 2)	1:1
4.	1/2y+4=0	(–2; 4)	1:2
5.	x–1=0	(–1; 1)	2:1
6.	2x+1=0	(0; 2)	5:6
7.	2y–3=0	(2; 0)	3:4
8.	3y+5=0	(3; 1)	1:2
9.	y–1=0	(–1; 2)	2:3
10.	x+1=0	(2; 4)	3:5
11.	x–5=0	(1; –1)	1:1
12.	y+1=0	(6; 5)	2:1
13.	x–2=0	(4; 3)	3:2
14.	3x+4=0	(2; 1)	2:3
15.	x+2=0	(0; –1)	1:1
16.	3x–1=0	(0; 1)	1:1
17.	y+2=0	(1; 1)	6:5
18.	y–1=0	(1; –2)	2:1
19.	y–5=0	(1; 1)	5:3
20.	2x+3=0	(1; 2)	2:3
21.	y–1=0	(–1; –1)	1:2

22.	(5; 3)	(3; 8)	(0; 7)
23.	(6; 9)	(–4; 0)	(7; 1)
24.	(2; 9)	(10; 1)	(0; –5)
25.	(–1; 2)	(3; 7)	(1; 2)
26.	(7; 1)	(9; 3)	(–2; 5)
27.	(3; –5)	(2; 1)	(1; 1)
28.	(0; 7)	(3; –4)	(10; 1)
29.	(–2; 4)	(2; 8)	(3; 1)
30.	(–4; 0)	(7; 1)	(6; 9)

22.	x+1=0	(1; 4)	1:2
23.	2x–3=0	(1; 3)	1:1
24.	x–8=0	(1; 1)	4:3
25.	x–3=0	(–1; 1)	2:1
26.	3x+4=0	(2; 1)	2:3
27.	y+2=0	(1; 1)	6:5
28.	x+1=0	(1; 4)	1:2
29.	y–1=0	(1; –2)	2:1
30.	x–2=0	(4; 3)	3:2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 12

Завдання (варіанти завдань у табл. 1 Домашнього завдання № 6). Задані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Потрібно знайти:

1) рівняння ребер A_1A_2 та A_1A_4 та їх довжини;
2) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4;
3) рівняння грані $A_1A_2A_3$;
4) кут між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$;
5) довжину висоти A_4D, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
6) рівняння висоти A_4D;
7) координати точки перетину висоти A_4D з гранню $A_1A_2A_3$;
8) координати точки, яка симетрична точці A_4 відносно грані $A_1A_2A_3$;
9) рівняння площини, що проходить через A_1A_4 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 13

1. Знайти довжини півосей та координати фокусів наступних еліпсів:

а) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$;

б) $4x^2 + 144y^2 - 576 = 0$.

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:

а) вершини еліпса мають координати $A_1(6,0)$, $A_2(-6,0)$, $B_1(0,3)$, $B_2(0,-3)$;

б) фокальна відстань $2c = 10$, а мала піввісь $b = 5$;

в) ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, велика піввісь $a = 3$;

г) ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$, а мала піввісь $b = 2$;

д) відстань між фокусами дорівнює 8, а ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

3. Довжина великої піввісі еліпса дорівнює 6, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, а відстань від точки M еліпса до фокуса F_1 дорівнює 7. Знайти відстань від точки M до фокуса F_2 та координати точки M. Написати канонічне рівняння еліпса.

4. Скласти рівняння еліпса в канонічній системі координат, якщо:

а) еліпс проходить через точки $M_1\left(2, \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ та $M_2\,(-3,\ 0)$;

б) еліпс проходить через точки $M_1\,(1,3)$, $M_2\,(4,1)$;

в) еліпс проходить через точку $\mathrm{M}\left(-2, \dfrac{11}{\sqrt{15}}\right)$ та має ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

5. Написати рівняння директрис еліпса $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ та знайти відстань між ними.

6. Скласти рівняння еліпса, якщо:

а) відстань між директрисами дорівнює 12, а велика піввісь дорівнює $2\sqrt{3}$;

б) відстань між директрисами дорівнює $\frac{72}{\sqrt{11}}$, а між фокусами $2\sqrt{11}$;

в) відстань між директрисами дорівнює $4\sqrt{15}$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) прямі $x = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$ є директрисами еліпса, а мала піввісь дорівнює 2.

7. Знайти рівняння множини точок, для кожної з яких сума відстаней до двох точок $F_1(4,0)$ та $F_2(-4,0)$ дорівнює 10.

8. Через фокус F_1 проведена хорда еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, паралельна канонічній вісі OY. Визначити довжину цієї хорди.

9. Хорда, що проведена через фокус F_1 паралельно вісі OY, перетинає еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точках M_1 та M_2. Визначити відстань від точок M_1 та M_2 до фокуса F_2.

10. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо його малу вісь видно з фокусів під кутом 60°.

11. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відрізок між його фокусами видно з вершини малої осі під прямим кутом.

12. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відрізок перпендикуляра, опущеного з центра еліпса на директрису, ділиться вершиною еліпса навпіл.

13. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відстань між його директрисами втричі більша за відстань між фокусами.

14. Задавши на площині прямокутну систему координат, зобразити області, що визначаються наступними системами нерівностей:

а) $\begin{cases} 9x^2+25y^2-225<0, \\ 3x+5y-15<0, \\ y+2>0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+4y^2-16>0, \\ y+3>0, \\ x+y-2<0. \end{cases}$

15. Дано еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Знайти фокальні радіуси точок $M_1(3, \sqrt{15})$ та $M_2(-2, \frac{4}{3}\sqrt{10})$, що належать даному еліпсу.

16. Визначити площу чотирикутника дві вершини якого знаходяться в фокусах еліпса $5x^2+9y^2=1$, а дві інші співпадають з кінцями малої осі.

17. Знайти довжини півосей та координати фокусів наступних гіпербол:

а) $9x^2-4y^2-36=0$; б) $x^2-y^2-5=0$.

18. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

а) відстань між вершинами рівна 8, а відстань між фокусами – 10;

б) дійсна піввісь дорівнює 3 і гіпербола проходить через точку $(6, 2\sqrt{3})$;

в) відстань між директрисами рівна $\frac{8}{3}$ а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$.

19. Визначити піввісі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот та рівняння директрис наступних гіпербол:

а) $4x^2-9y^2=36$; б) $16x^2-9y^2=144$.

20. Знайти площу S прямокутника, вершини якого лежать на гіперболі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, а дві сторони проходять через фокуси паралельно до вісі OY. Обчислити S для випадку, коли $a^2=20$ та $b^2=10$.

21. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

а) гіпербола проходить через точки (4, 0) та ($4\sqrt{17}$, 4);

б) гіпербола проходить через точку (–5, 3) та має ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

в) гіпербола має асимптоти $4y \pm x = 0$ та директриси $5x \pm 16=0;$

г) гіпербола є рівнобічною та проходить через точку ($\sqrt{2}$, 1).

22. Написати рівняння гіперболи, якщо її асимптоти мають рівняння : $3y \pm 4x = 0$ а відстань між фокусами рівна 20

23. Переконавшись, що точка $M(-5, \frac{9}{4})$ належить гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, знайти її фокальні радіуси.

24. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює 60^0 і гіпербола проходить через точку $M\ (6{,}3)$.

25. Скласти рівняння гіперболи, що має загальні фокуси із еліпсом $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$ та проходить через точку $M(4\sqrt{2},\ 3)$.

26. Дана гіпербола $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1$. Написати рівняння спряженої з нею гіперболи; знайти ексцентриситети, директриси та асимптоти даної та спряженої гіперболи.

27. Знаючи ексцентриситет, визначити кут між асимптотами гіперболи: а) $\varepsilon = \sqrt{2}$; б) $\varepsilon = 2$.

28. Знайти площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$ і прямої перпендикулярної до дійсної вісі і проведеної через фокус.

29. Написати рівняння траєкторії руху точки $M(x,y)$, якщо в будь-який момент часу вона знаходиться в 1,25 раз далі від точки $A(5{,}0)$, ніж від прямої $5x - 16 = 0$.

30. Задавши на площині прямокутну систему координат, побудувати області, що визначаються наступними системами нерівностей:

а) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 - 4 > 0, \\ 4x + 3y - 12 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 + 144 > 0, \\ 2x - y - 6 < 0, \\ 3x + y + 12 > 0. \end{cases}$

31. Визначити координати фокуса та скласти рівняння директриси для кожної із наступних парабол:

а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = -4y$; в) $y^2 = -2x$;

г) $x^2 = 3y$; д) $2x^2 - 3y = 0$; е) $3y^2 + 16x = 0$.

32. Скласти канонічне рівняння параболи в кожному із наступних випадків:

а) відстань від фокуса, що лежить на осі OX, до вершини дорівнює 4;

б) парабола симетрична відносно осі абсцис та проходить через точку $M(1,2)$;

в) парабола симетрична відносно осі ординат та проходить через точку $M(5,1)$.

33. Скласти канонічне рівняння параболи в кожному з наступних випадків:

а) фокус має координати $(3,0)$;

б) фокус має координати $(0,5)$;

в) директриса має рівняння $x + 15 = 0$;

г) директриса має рівняння $y + 12 = 0$.

34. Обчислити фокальний радіус FM точки M параболи $y^2 = 8x$, якщо її абсциса дорівнює 8.

35. Знайти фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 12x$, якщо ордината точки M рівна 6.

36. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точку, фокальний радіус якої рівний 13.

За допомогою повороту прямокутної системи координат привести до канонічного вигляду наступні рівняння кривих другого порядку. Написати формули перетворення і зобразити дані криві:

49 $5x^2+8yx+5y^2-9=0$.

50. $9x^2-6xy+y^2-\sqrt{10}x-3\sqrt{10}y=0$.

51. $4x^2-4xy+y^2-15=0$.

52. $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x+2y=0$.

53. $2x^2+12xy-7y^2+20=0$.

54. $x^2+2xy+y^2=0$.

За допомогою повороту прямокутної системи координат і переносу початку привести до канонічного вигляду наступні рівняння кривих. Написати формули перетворення координат і побудувати дані криві:

55. $xy+2x+y+\frac{5}{2}=0$.

56. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.

57. $\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}y^2+2xy-2x-2\sqrt{3}y=0$.

58. $9x^2+6y^2+4xy+2x-4y-4=0$.

59. $9x^2+4y^2-12xy+39=0$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 14

Дослідити поверхні методом перерізів, вказати назву поверхні, побудувати її зображення в прямокутній системі координат.

Варіант № 1

1. $\frac{x^2}{4}-y^2-\frac{z^2}{2}=1$. 2. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+z^2=0$.

4. $2x^2+y^2-8z=0$. 5. $y^2+z^2=6x^2-36$.

Варіант № 2

1. $z^2=8x+2$. 2. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=2y$.

4. $x^2+4y^2+z^2+4x-2z-3=0$. 5. $5x^2-9z^2=0$.

Варіант № 3

1. $z^2-y+6=0$. 2. $4x^2+y^2+z^2+4x-2z+2y=10$.

3. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{16}=1$. 4. $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}-8y=0$. 5. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=0$.

Варіант № 4

1. $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$. 2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$. 3. $x^2-4y^2-16z=0$.

4. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$. 5. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$.

Варіант № 5

1. $y^2+4z^2=16x$. 2. $x^2=-8y$. 3. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$.

4. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=0$. 5. $x^2-2x+y^2-4y+z^2+1=0$.

Варіант № 6

1. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{3}=0$. 2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$.

4. $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=2y$. 5. $x^2+4y^2+4z^2-16=0$.

Варіант № 7

1. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$. 2. $y^2+3z^2=6x$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=0$.

4. $4y^2-32x^2-16=0$. 5. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+1=0$.

Варіант № 8

1. $x^2+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{5}=0$. 2. $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{4}=8y$. 3. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$

4. $z^2-4x-8=0$. 5. $4y^2-9z^2=0$.

Варіант № 9

1. $z^2=6x$. 2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$. 3. $6x^2+4y^2-24z=0$.

4. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$. 5. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$.

Варіант № 10

1. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$. 2. $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=2x$. 3. $-x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$.

4. $x^2-4y^2-9z^2=0$. 5. $x^2+y^2+4z^2-16=0$.

Варіант № 11

1. $y^2+4z^2-8x=0$. 2. $x^2+4y^2+16z^2-4x=12$.

3. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$. 4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{9}=1$. 5. $16y^2+64z^2-64=0$.

Варіант № 12

1. $x^2-8y^2+4z^2=0$. 2. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=4z$. 3. $y^2=9x$.

4. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}-z^2=1$. 5. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-27=0$.

Варіант № 13

1. $x^2=16z$. 2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$. 3. $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=4y$.

4. $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. 5. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{32}+\frac{z^2}{64}=0$.

Варіант № 14

1. $x^2-4z^2-16=0$. 2. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$. 3. $\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=8x$.

4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{5}=0$. 5. $4x^2+4y^2-16z=0$.

Варіант № 15

1. $2x^2 - 8y^2 - 16z = 0$. 2. $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0$. 3. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$.

4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 0$. 5. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z - 11 = 0$.

Варіант № 16

1. $2y^2 + 8z^2 - 16x = 0$. 2. $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$. 3. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{36} = 1$.

4. $16x^2 - 12y^2 - 32z^2 = 0$. 5. $4x^2 + 16y^2 + 8z^2 - 64 = 0$.

Варіант № 17

1. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} + z^2 = 0$. 2. $x^2 + z^2 = y$. 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$.

4. $4y^2 - 9z^2 - 36 = 0$. 5. $x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0$.

Варіант № 18

1. $2x^2 + 4y^2 - 16z = 0$. 2. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$. 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{5} = 0$.

4. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$. 5. $y^2 + z^2 = x$.

Варіант № 19

1. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 9 = 0$. 2. $4x^2 + 9y^2 - 16z^2 = 0$.

3. $2x^2 - 8y + 4z^2 = 0$. 4. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 1$. 5. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Варіант № 20

1. $x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=1$. 2. $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=0$. 3. $\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{8}-4x=0$.

4. $y^2=8x$. 5. $x^2+y^2+z^2-6y-2z=0$.

Варіант № 21

1. $4x^2-9z^2=0$. 2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$.

4. $16y^2+64z^2-128x=0$. 5. $4x^2+9y^2+16z^2-144=0$.

Варіант № 22

1. $4x^2+2y^2-16z=0$. 2. $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$. 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=1$.

3. $y^2+z^2=18x^2-36$. 5. $x^2+4y^2+z^2+8x-8y-4=0$.

Варіант № 23

1. $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{9}=1$. 2. $\frac{x^2}{18}+\frac{z^2}{8}-4y=0$. 3. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

4. $x^2+y^2-4z^2=0$. 5. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$

Варіант № 24

1. $4x+y^2-16z^2=0$. 2. $y^2+4z^2=8x$. 3. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$.

4. $\frac{x^2}{4}-y^2-\frac{z^2}{9}=1$. 5. $25x^2+50y^2-100z^2=0$.

Варіант № 25

1. $y^2 = 12z$. 2. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 4z = 0$.

3. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$. 4. $2x^2 + 4z^2 - 8y = 0$. 5. $x^2 - \frac{z^2}{8} = 0$.

Варіант № 26

1. $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 2z$. 2. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 0$. 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$.

4. $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 10z + 4x = 0$. 5. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Варіант № 27

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 4y$. 2. $x^2 + 4y^2 - 9z^2 + 4x - 8y = 0$.

3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$. 4. $\frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 4y$. 5. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{5} = 1$.

Варіант № 28

1. $2x^2 + 4y^2 = 16z$. 2. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 2y$. 3. $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

4. $2x^2 - 4y^2 + z^2 - 8 = 0$. 5. $2x^2 + 6y^2 + 8z^2 - 4x + 6y - 16z + \frac{5}{2} = 0$.

Варіант № 29

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$. 2. $x^2 - y^2 + z^2 = 0$. 3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$.

4. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8 = 0$. 5. $y^2 + 4z^2 = 16x$.

Варіант № 30

1. $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 8$. 2. $x^2 - y^2 + 2x - 4y = 4$. 3. $x^2 - 9z^2 = 0$.

4. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 4z$. 5. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2x - 4y + 8z = 0$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ РОБОТИ № 15

Завдання 1. Знайти найменше спільне кратне двох многочленів $f(x)$ і $g(x)$

1. $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$.
2. $f(x)=x^4+2x^3+x+2$, $g(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$.
3. $f(x)=2x^5+2x^4+x^3+3x^2+1$, $g(x)=2x^4-2x^3-x^2-x-1$.
4. $f(x)=2x^5+x^4+x^3-2x^2-x-1$, $g(x)=x^4-x^3-x+1$.
5. $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$, $g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$.
6. $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$.
7. $f(x)=3x^5-2x^2+x+2$, $g(x)=x^2-x+1$.
8. $f(x)=x^5-x^3-4x^2+4x+1$, $g(x)=x^3-x-1$.
9. $f(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12$, $g(x)=x^3-5x^2-3x+17$.
10. $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$, $g(x)=2x^3+x^2-x-1$.
11. $f(x)=3x^4-5x^3+3x^2-2x+1$, $g(x)=3x^3-2x^2+x-1$.
12. $f(x)=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$, $g(x)=x^4+2x^3-2x^2+x+1$.
13. $f(x)=x^4-4x^3+1$, $g(x)=x^3-3x^2+1$.
14. $f(x)=x^5+2$, $g(x)=x^2-2x+1$.
15. $f(x)=x^5-7x+6$, $g(x)=(1-x)^4$.
16. $f(x)=(1-x)^3$, $g(x)=x^5-1$.
17. $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$, $g(x)=x^4+2x^3+x+2$.
18. $f(x)=x^5+3x^3+2x^2+6$, $g(x)=x^5+x^4-x^3+2x^2+2x-2$.
19. $f(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$, $g(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$.
20. $f(x)=x^4+7x^3+19x^2+23x+10$, $g(x)=x^4+7x^3+18x^2+22x+12$.
21. $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$, $g(x)=x^4+2x^3+x^2-1$.
22. $f(x)=x^5-x^4+3x^3-4x^2-3$, $g(x)=x^4-x^3+2x^2-3x-3$.
23. $f(x)=x^5+2x^3+x^2+x+1$, $g(x)=x^4-x^3-2x^2-x-3$.
24. $f(x)=2x^4-3x^3-4x^2+4x+3$, $g(x)=x^2-x-1$.
25. $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$, $g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$.
26. $f(x)=x^5+x^4+3x^3-5x^2-5x-15$, $g(x)=x^5+x^4-x^3-5x^2-5x+5$.
27. $f(x)=x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+2$, $g(x)=x^4-3x^3+x^2-x-6$.
28. $f(x)=x^5+x^4+4x^2+2x-3$, $g(x)=x^4+2x^3+x^2+5x+6$.
29. $f(x)=2x^5+x^4+4x^3+3x^2+3x+2$, $g(x)=2x^4-x^3+2x^2+x-1$.
30. $f(x)=x^5+2x^4+2x^3-3x-2$, $g(x)=x^4-x^3+x^2-3x+2$.

Завдання 2. Визначити кратність кореня c для многочлена $f(x)$. Знайти значення многочлена $f(x)$ і його похідних у точці $x=x_0$

1. $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8,\ c = -1,\ x_0 = 2$.

2. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54,\ c = 3,\ x_0 = -1$.

3. $f(x) = x^5 + 5x^2 + 5x + 1,\ c = -1,\ x_0 = 2$.

4. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1,\ c = 1,\ x_0 = -2$.

5. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1,\ c = -1,\ x_0 = -3$

6. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10,\ c = 1,\ x_0 = 2$.

7. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 13x + 4,\ c = 1,\ x_0 = 3$.

8. $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2,\ c = -1,\ x_0 = 2$.

9. $f(x) = 2x^5 + 12x^4 + 27x^3 + 34x^2 + 36x + 24,\ c = -2,\ x_0 = -1$.

10. $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + x,\ c = 1,\ x_0 = -2$.

11. $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x,\ c = -1,\ x_0 = -3$.

12. $f(x) = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\ c = -1,\ x_0 = -3$.

13. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ c = 2,\ x_0 = -1$.

14. $f(x) = 2x^5 + 12x^4 + 21x^3 - 2x^2 - 36x - 24,\ c = -2,\ x_0 = 1$.

15. $f(x) = x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8,\ c = -2,\ x_0 = -1$.

16. $f(x) = x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 17x^2 - 12x - 3,\ c = -1,\ x_0 = 1$.

17. $f(x) = 2x^5 + 12x^4 + 27x^3 + 34x^2 + 36x + 24,\ c = -2,\ x_0 = -1$.

18. $f(x) = 2x^5 - 12x^4 + 21x^3 + 2x^2 - 36x - 24,\ c = 2,\ x_0 = 1$.

19. $f(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 17x^2 + 12x - 3,\ c = 1,\ x_0 = -3$.

20. $f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8,\ c = -2,\ x_0 = 1$.

21. $f(x) = 2x^5 - 12x^4 + 27x^3 - 34x^2 + 36x - 24,\ c = 2,\ x_0 = 4$.

22. $f(x) = x^6 + 4x^5 + 9x^4 + 16x^3 + 19x^2 + 12x + 3,\ c = -1,\ x_0 = -3$.

23. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ c = 2,\ x_0 = -1$.

24. $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,\ c = -2,\ x_0 = 1$.

25. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ c = 2,\ x_0 = -1$.

26. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2,\ c = 1,\ x_0 = -1$.

27. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2,\ c = 1,\ x_0 = 3$.

28. $f(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 6x + 2,\ c = -1,\ x_0 = -3$.

29. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x,\ c = 1,\ x_0 = -2$.

30. $f(x) = x^6 - 3x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 2x,\ c = 1,\ x_0 = 2$.

Завдання 3. Розкласти даний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: а) за допомогою схеми Горнера; б) методом невизначених коефіцієнтів

1. a) $\frac{x^4}{(x-2)^6}$, b) $\frac{x^2}{x^4-16}$.

2. a) $\frac{9x^4+11x^2-1}{(x+1)^5}$, b) $\frac{x}{(x^2-1)^2}$.

3. a) $\frac{14x^3-3x+1}{(x-1)^4}$, b) $\frac{1}{x^4-16}$.

4. a) $\frac{6x^4+12x-3}{(x-2)^5}$, b) $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

5. a) $\frac{x^3-10x+4}{(x+2)^5}$, b) $\frac{x^2}{x^4-16}$.

6. a) $\frac{5x^4+3x^3-1}{(x-3)^5}$, b) $\frac{x}{(x^2+1)^2}$.

7. a) $\frac{x^3}{(x+1)^5}$, b) $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

8. a) $\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)^4}$, b) $\frac{2x-3}{(x^2+1)(x-2)}$.

9. a) $\frac{x^3-5x^2+17}{(x-3)^5}$, b) $\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}$.

10. a) $\frac{3x^3-2x^2+x-1}{(x+1)^5}$, b) $\frac{3x+1}{(x^2+1)^2}$.

11. a) $\frac{2x^3+x^2-x-1}{(x-4)^5}$, b) $\frac{x^2}{x^4+5x^2+4}$.

12. a) $\frac{2x^4-3x^2+2}{(x+3)^5}$, b) $\frac{1}{(x^2+1)(x+3)}$.

13. a) $\frac{x^4-4x^3+1}{(x-3)^5}$, b) $\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)}$.

14. a) $\frac{2x^5+2x-7}{(x+3)^7}$, b) $\frac{2x-5}{(x^2+1)(x+3)}$.

15. a) $\frac{-2x^5+2x^2+3}{(x+3)^6}$, b) $\frac{3x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$.

16. a) $\frac{x^2-x-1}{(x-4)^4}$, b) $\frac{1}{x^4+4}$.

17. a) $\frac{3x^3-2x^2+x+2}{(x-2)^5}$, b) $\frac{1}{(x^2-1)^2}$.

18. a) $\frac{2x^3-x^2-5x+4}{(x+1)^5}$, b) $\frac{1}{x^3+1}$.

19. a) $\frac{x^5+x^2-x+1}{(x+2)^6}$, b) $\frac{x^2}{x^3-1}$.

20. a) $\frac{x^3-3x^2+1}{(x-2)^5}$, b) $\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$.

21. a) $\frac{x^4-4x^3+1}{(x+3)^5}$, b) $\frac{x^2}{x^4-1}$.

22. a) $\frac{x^4+22x+12}{(x-3)^5}$, b) $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.

23. a) $\frac{3x^5+3x^2-7}{(x+1)^6}$, b) $\frac{1-x}{(x^2+4)^2}$.

24. a) $\frac{x^4-10x^2+1}{(x+1)^5}$, b) $\frac{x^3+4x^2-2}{x^4+x}$.

25. a) $\frac{x^3+x^2-x-1}{(x+2)^5}$, b) $\frac{3}{(x^3+x)}$.

26. a) $\frac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}$, b) $\frac{x}{x^3-1}$.

27. a) $\frac{x^3-x^2+1}{(x-2)^5}$, b) $\frac{1-x^3}{(x^2+1)^2}$.

28. a) $\frac{x^3-x^2+1}{(x-2)^5}$, b) $\frac{1-x^3}{(x^2+1)^2}$.

29. a) $\frac{-x^3+3x-4}{(x+3)^7}$, b) $\frac{3x^2+5x-5}{(x^2+1)x}$.

30. a) $\frac{-3x^3+11}{(x-2)^5}$, b) $\frac{-4x+5}{(x^3+1)(x+1)}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1 Готуємось до олімпіади. Елементи лінійної алгебри: навч. посібник / В.Ф. Сторчай, О.П. Купенко; Міністерство освіти і науки, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка». – Д.: НТУ «ДП», 2020. –166 с.

2 Алгебра та аналітична геометрія: Курс лекцій [Електронний ресурс]: курс лекц. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,98 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 273 с.

3 Використання методу рекурентних співвідношень для обчислення N-го порядку: навчальний посібник для здобувачів напрямків підготовки «Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки» / І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська. — Харків : «Друкарня Мадрид», 2019. – 174 с.

4 Вища математика Практичний курс для здобувачів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія: навч. посіб. / Геляровська О. А., Галуза О. А, Решетнікова С. М., Сердюк І. В.; за ред. проф. Любчика Л. М. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – 169 с.

5 Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І. І. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с.

6 Практикум з курсу «Алгебра і геометрія». Визначники та матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь : навчальний посібник для Здобувачів напрямів підготовки «Прикладна математика» та «Системний аналіз» / І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська, А. О. Нікульченко, А. Ю. Стрельнікова. – Харків : «НТМТ», 2022. – 112 с.

7 Практикум з курсу «Алгебра і геометрія». Аналітична геометрія : навчальний посібник для Здобувачів напрямів підготовки «Прикладна математика» та «Системний аналіз» / І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська, А. О. Нікульченко, Н. Є. Коломойська, А. Ю. Стрельнікова. – Харків : «НТМТ», 2022. – 160 с

8 Практикум з курсу «Алгебра і геометрія». Векторна алгебра : навчальний посібник для Здобувачів напрямів підготовки «Прикладна математика» та «Системний аналіз» / І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська, А. О. Нікульченко, А. Ю. Стрельнікова. – Харків : «НТМТ», 2022. – 88 с.

9 Збірник задач з теорії многочленів. [Навчальний посібник для студентів фізико-математичного факультету] За редакцією І.О.Рокіцького, Вінниця, 2004 – 139 с.

Додаткова література:

1. Елементи лінійної алгебри: навч. посібник / В.В. Слєсарєв, С.О. Сушко, Л.Я. Фомичова, – Д.: Національний гірничий університет, 2005. – 285 с.
2. Вища математика у прикладах і задачах: у 2 т. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник [та ін.]; за ред. Л. В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – 532 с.
3. Вища математика у прикладах та задачах: навчальний посібник: в 2 т. / Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака, С. С. Габриелян [та ін.]; за ред. Ю. Л. Геворкяна – Харків: Вид-во «Підручник» НТУ «ХПІ», 2011. – 408 с.
4. Вища математика. Збірник задач. У 2 частинах. Частина 1. / за ред. П. Овчинноков. – Київ : Вид-во Техніка, 2003. — 279 с.
5. Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри: навч. посіб. / В. В. Булдигін, В. А. Жук, С. О. Рущицька, В. В. Ясінський. — К.: Вища шк., 1999. — 192 с.
6. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.
7. Алгебра. Основи алгебраїчних структур. Навчальний посібник /Т.В. Авдєєва, В.М. Горбачук.- К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 79 с. – Бібліогр.: с. 79.
8. Лінійна алгебра в задачах та прикладах. Збірник задач для студентів І курсу ФМФ НТУУ «КПІ» / Т.В. Авдєєва, В.М. Шраменко. – Київ, НТУУ «КПИ», 2016. – 206 с.
9. Бондаренко Є.В., Десятерик О.О. Практикум з конкретної математики. Київ, КНУТШ, 2025. – 92 с.

Навчальне видання

Горєв В’ячеслав Миколайович
Коряшкіна Лариса Сергіївна

АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ

методичні рекомендації до практичних занять
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності
F4 Системний аналіз та наука про дані

Видано в авторській редакції

Електронний ресурс.
Підписано до видання 08.01.2026, авт. арк. 14,0.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка».
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницкого, 19.