МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механічної та біомедичної інженерії

Методичні рекомендації до проведення практичних занять (практикум)

з теоретичної механіки

для студентів спеціальності 133 Галузеве машинобудування

Дніпро

НТУ «ДП»

2022

Методичні рекомендації до проведення практичних занять (практикум) з теоретичної механіки для студентів спеціальності 133 Галузеве машинобудування [Електронний ресурс] / Д.Л. Колосов, О.М. Долгов, С.В., Онищенко, В.Я. Кіба, О.Г. Науменко ; Міністерство освіти і науки України, Нац. тех. ун-т “Дніпровська політехніка”, 2022. – 81 с.

Автори:

Д.Л. Колосов, д-р тех.наук, доц., зав. кафедри,

О.М. Долгов, канд. тех. наук, доц., проф.,

С.В. Онищенко, канд. тех. наук, доц.,

В.Я. Кіба ст. викл.,

О.Г. Науменко ст. викл.

Погоджено рішенням науково-методичної комісії спеціальності 133 Галузеве машинобудування (протокол №3 від 24.10.2022 р.) за поданням кафедри механічної та біомедичної інженерії (протокол № 8 від 09.09.2022 р.).

Затверджено до видання редакційною радою (протокол № 12 від 27.12.2022 р.) за поданням методичної комісії спеціальності 133 Галузеве машинобудування (протокол №3 від 24.10.2022 р.).

У наведених методичних рекомендаціях розглянуті приклади розв’язання задач дисципліни “Теоретична механіка”.

Відповідальний за випуск ст. викладач кафедри механічної та біомедичної інженерії Кіба В.Я.

ЗМІСТ

1. Визначення реакцій опор твердого тіла при плоскій довільній системі сил. 4

2. Визначення реакцій опор плоскої ферми 8

3. Рівновага системи сил з урахуванням зчеплення (сил тертя спокою) 13

4. Визначення реакцій опор твердого тіла при просторовій довільній системі сил 17

5. Поступальний та обертальний рух тіла 25

6. Складний рух точки 29

7. Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки 34

8. Плоскопаралельний рух тіла, використання теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи 41

9. Дослідження вільних коливань механічної системи з одним степенем вільності 64

10. Критерії оцінювання 73

11. ОЧІКУВАНІ ДИСЦИПЛІНАРНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ 77

Список літератури 78

Вступ

Вивчення найбільш спільних властивостей руху і взаємодії будь–яких тіл є предметом спеціальної дисципліни, яку називають теоретична механіка. Отже теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл. Методичне забезпечення сприяє самостійному вивченню теоретичного матеріалу, у тому числі набуття практичних навичок у розв'язанні задач.

Мета цих методичних рекомендації–допомога студенту в опануванні та систематизації знань завдяки засвоєнню методики розв'язання задач, в кожному розділі цих методичних рекомендації приведенні приклади розв'язання задач.

Враховуючи, що загальний курс теоретичної механіки складається з трьох розділів (статика, кінематика, динаміка), відповідно приведені приклади розв'язання задач по цим розділам. Таким чином приведені методичні рекомендації дозволяють оволодіти навичками теоретичного узагальнення одержаних знань: використовувати ту чи іншу загальну теорему динаміки, або той чи інший принцип механіки у відповідності до умови задачі, яка розглядається та використовувати методику визначення сил, що діють в механічних системах тіл; методами визначення умов рівноваги тіла та механічної системи тіл.

ТМ-1

Визначення реакцій опор твердого тіла при плоскій довільній системі сил

Приклад розв’язання задачі

Визначити реакції в’язей рами та балки.

Задача ТМ–1 на рівновагу тіла під дією довільної плоскої системи сил.

Вказівки. При розв’язанні задач з розділу довільної плоскої системи сил необхідно дотримуватися такої послідовності.

1. Вибирають систему розрахунку (дві взаємно перпендикулярні вісі).
2. Використовують принцип звільнення від в’язей, тобто в’язі умовно вибриваються, а дія в’язей замінюється реакціями.
3. Розподілене навантаження приводять до зосередженої силі.
4. Похилені до вісей сили розкладаються на складові, що спрямовані по вісям координат.
5. Складаються рівняння рівноваги тіла та розв’язують їх відносно вихідних реакцій.

ТМ-1 (а)

Жорстка рама (рис. 1.1) під дією довільної плоскої системи сил має в точці

A – нерухому шарнірну опору, а в точці *B* – рухому. Визначити реакції в’язей.

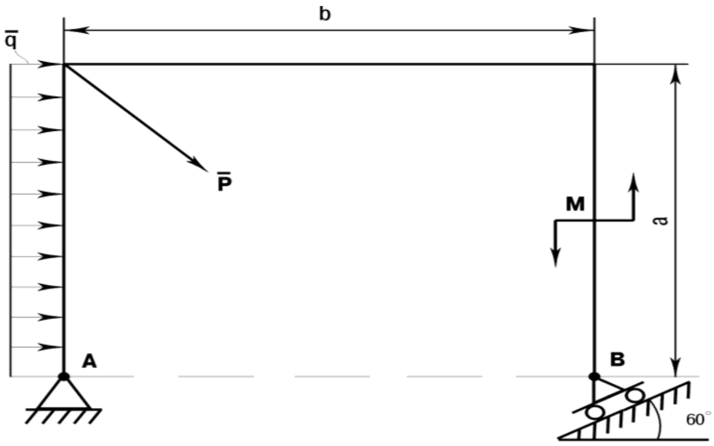


Рис. 1.1

Дано. Зосереджена сила P = 1 Н, розподілене навантаження з інтенсивністю навантаження q = 1 Н/м; пара сил з моментом M = 1 Н·м; розміри рами (a = 2 м та b = 1 м).

Розв’язок

Проведемо вісі X та Y. В’язі в точках A і B умовно приберемо, а їх дію замінимо реакціями R_{AX}, R_{AY}, R_B. Розподілене навантаження замінимо зосередженою силою Q, яка розраховується за формулою :

$$Q = q \cdot a.$$

Похилі сили замінимо їх складовими (проекціями сил на вісі координат, рис. 1.2.).

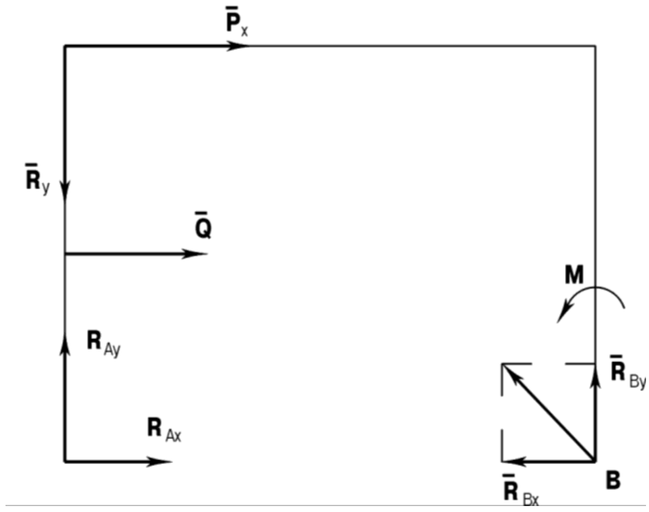


Рис. 1.2

$$P_X = P \cdot \sin 30^o \; ; \qquad P_Y = P\cos 30^o;$$

$$R_{BX} = R_B \cdot \sin 60^o \; ; \; R_{BY} = R_B \cdot \cos 60.^o$$

Складемо рівняння рівноваги тіла. При цьому необхідно пам’ятати, що момент сили відносно центра дорівнює добутку цієї сили на найкоротшу відстань від центра до лінії дії сили (плече).

$\sum F_{KX}=0; P\cdot\sin 30°+R_B\cdot\sin 60°+R_{AX}=0;$

$$\sum F_{KY}=0; -P\cdot\cos 30°+R_{AY}=0;$$

$$\sum M_A(F_K)=0; -q\cdot a\cdot\frac{a}{2}-P\cdot\sin 30°\cdot a+M+R_B\cdot\cos 60°\cdot b=0.$$

Запишемо його відносно невідомих:

$$R_B=\frac{q\cdot\frac{a^2}{2}+P\cdot\sin 30°\cdot a-M}{b\cdot\cos 60°}=\frac{1\cdot\frac{2^2}{2}+1\cdot 0{,}5\cdot 2-1}{1\cdot 0{,}5}=4\text{Н};$$

$R_{AX}=-P\cdot\sin 30°-q\cdot a+R_B\cdot\sin 60°=-1\cdot 0{,}5-1\cdot 2+4\cdot 0{,}87=0{,}98\text{Н}.$

Перевіремо правильність розв'язання задачі. Для цього складемо рівняння моментів відносно точки *B*:

$$1{,}12\cdot 1-1\cdot\frac{2^2}{2}+1\cdot 0{,}87\cdot 1-1\cdot 0{,}5\cdot 2+1=0;$$

$$\sum M_B(F_K)=0; -R_{AY}\cdot b-q\cdot a\cdot\frac{a}{2}+P\cdot\cos 30°\cdot b-P\cdot\sin 30°\cdot a+M=0.$$

ТМ-1 (б)

Балка, що знаходиться під дією плоскої системи сил, жорстко затиснута в т. *A*. Визначити реакції в'язів (рис. 1.3).

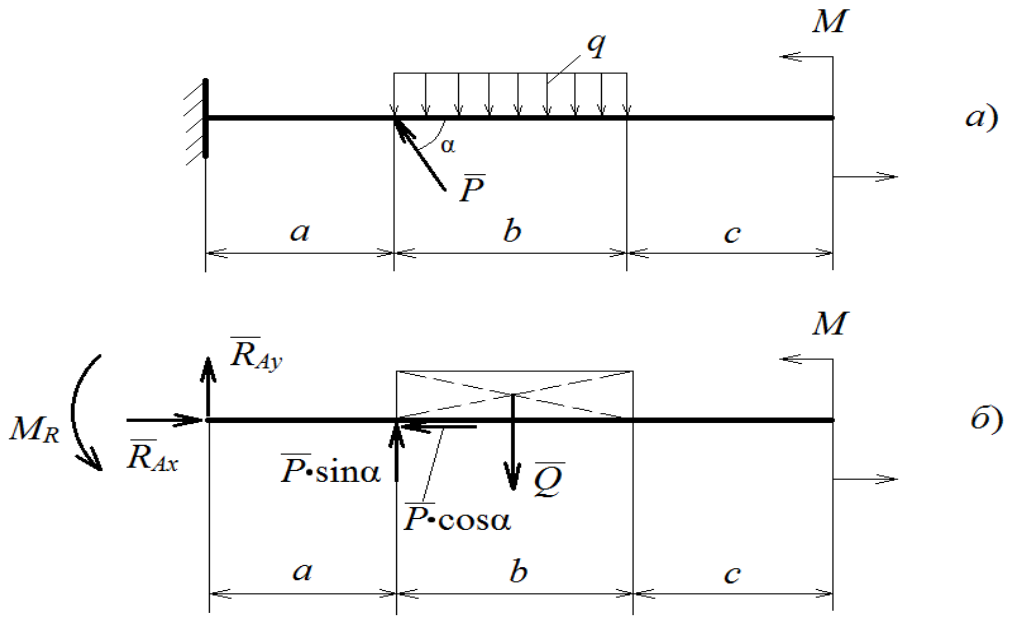


Рис. 1.3

Дано: Зосереджена сила P = 1·Н, розподілене навантаження з інтенсивністю навантаження q = 1 Н/м, пара сил з моментом M = 1 Н·м. Розміри балки (a = 1 м, b = 1 м, c = 1 м).

Розв'язок

Розв`язання задачі ТМ-1 (б) здійснюємо аналогічно розв`язання задачі ТМ-1 (а).

$$Q = q \cdot b;$$

$$P_{X} = P \cdot \cos 30^{o}\ ;\ P_{Y} = P \cdot \sin 30^{o}.$$

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{KX} = 0; R_{AX} - P \cdot \cos 30^{\circ} = 0;$$

$$\sum F_{KY} = 0; R_{AY} - q \cdot b + P \cdot \sin 30^{\circ} = 0;$$

$$\sum M_{A}(F_{K}) = 0; M_{R} + P \cdot \sin 30^{\circ} \cdot a - q \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2} \right) + M = 0.$$

З цих рівнянь знайдемо невідомі реакції в'язей:

$$M_{R} = P \cdot \sin 30^{\circ} \cdot a + q \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2} \right) - M = -1 \cdot 0{,}5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) - 1 = 0;$$

$$R_{AX} = P \cdot \cos 30^{\circ} = 1 \cdot 0{,}87 = 0{,}87 \text{ Н};$$

$$R_{AY} = q \cdot b - P \cdot \sin 30^{\circ} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \text{Н}.$$

Перевіримо правильність розв'язання:

$$\sum M_{B}(F_{K}) = 0; M_{R} - R_{AY} \cdot (a + b + c) - P \cdot \sin 30^{\circ} \cdot (b + c) +$$

$$+ q \cdot b \cdot \left(c + \frac{b}{2} \right) + M = 0 - 0{,}5 \cdot (1 + 1 + 1) - 1 \cdot 0{,}5 \cdot (1 + 1) + 1 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) + 1 = 0.$$

ТМ-2

Визначення реакцій опор плоскої ферми

Приклад розв'язання задачі

Визначити реакції опор плоскої ферми, а також сили в усіх її стрижнях засобом вирізання вузлів за методом Ріттера.

Вказівки. При розв`язанні задачі необхідно врахувати, що всі стрижні ферми з'єднані між собою циліндричними шарнірами, до яких прикладені зовнішні навантаження.

Плоска ферма (рис.2.1), яка знаходиться під дією зовнішніх навантажень, спирається в точках *A* і *B* на рухому та нерухому шарнірні опори відповідно.

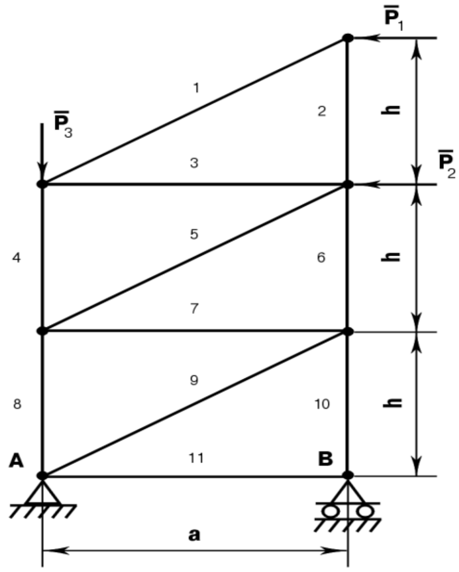


Рис. 2.1

Дано: Зовнішні сили P_1 = 2 кН, P_2 = 4 кН. Розміри ферми (a = 4 м, h = 3 м.)

Розв'язок

Вибираємо систему координат (вісі X и Y). Умовно вибириваємо в'язі (опори A і B), а їх дію замінюємо реакціями R_{AX}, R_{AY}, R_B (рис. 2.2).

Складемо рівняння рівноваги плоскої ферми:

$$\sum M_A(F_K)=0; P_1\cdot 3h + P_2\cdot 2h + R_B\cdot a = 0;$$

$$\sum F_{KX}=0; R_{AX} - P_1 - P_2 = 0;$$

$$\sum F_{KY} = 0; R_{AY} + P_3 = 0.$$

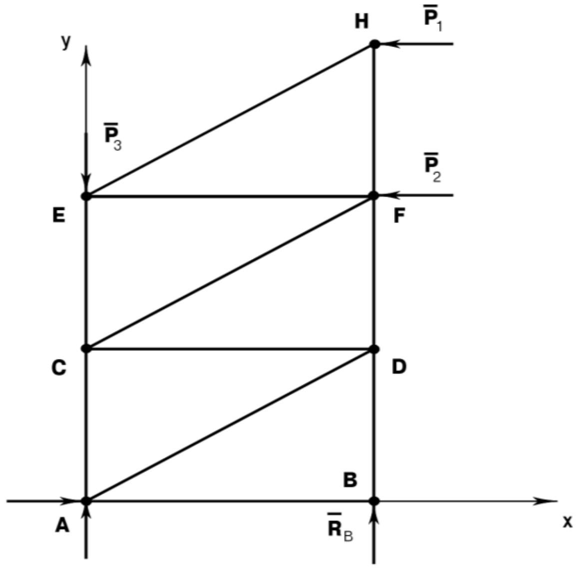


Рис. 2.2

Розв`язуємо ці рівняння і отримаємо:

$$R_B = -10{,}5 \text{ кН};\;\; R_{AY} = 6{,}0 \text{ кН};\;\; R_{AX} = 16{,}5 \text{ кН}.$$

Визначення сил у стрижнях спобом вирізання вузлів.

Стрижні, які знаходяться у вузлі ферми, для вузлового з'єднання є в'язями. Умовно обриваємо в'язі, а їх дію замінемо реакціями. На рис. 2.3 зображен вузли ферми з прикладеними до них активними та неактивними силами.

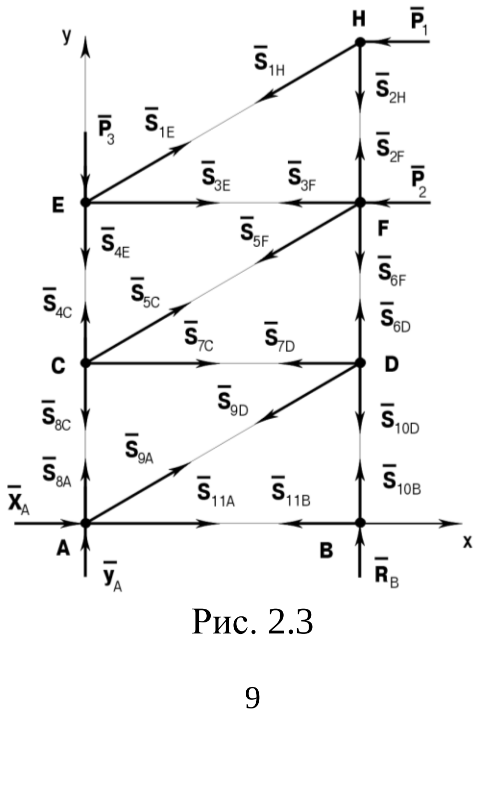


Рис. 2.3

Силу у стрижні за номером 1 позначимо S_I. Реакцію стрижня, що прикладені до вузла M − S_{IM}. Для стрижня, що єднає вузли M і N,

$$\overline{S}_{IM} = -\overline{S}_{IN}, S_{IM} = S_{IN} = S.$$

Реакції усіх стрижнів спрямовані від вузлів усередину стрижнів у припущенні, що стрижні розтягнуті. Якщо в результаті розв`язання реакція стрижня буде від'ємною, то це буде означати, що відповідний стрижень стисненим.

Для кожного вузла складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \qquad \sum Y_i = 0.$$

<u>Для вузола Н:</u>

$$\sum X_i = 0; -P_1 - S_{1H} \cdot \cos\alpha = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; -S_{1H} \cdot \sin\alpha - S_{2H} = 0,$$

тоді

$S_{1\text{Н}} = S_1 = -2{,}5$ кН (стрижень стиснутий) и $S_{2\text{Н}} = S_2 = 1{,}5$ кН.

<u>Для вузла Е</u> :

$$\sum X_i = 0; S_{1E} \cdot \cos\alpha + S_{3E} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; S_{1E} \cdot \sin\alpha - P_3 - S_{4E} = 0.$$

тоді

$S_{3\text{Е}} = S_3 = 2{,}0$ кН, $S_{4\text{Е}} = S_4 = -7{,}5$ кН.

Знак «–» показує що стрижень стиснений і реакція S_{4E} спрямована протилежно. Потім складемо рівняння рівноваги сил, що прикладені до вузлів *F, C, D, B, A.* Значення реакцій стрижнів зводимо у таблицю.

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Знак сили	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+

<u>Визначення сил у стрижнях методом перетинів (метод Ріттера)</u>.

За методом Ріттера кожна сила має бути визначена з окремого рівняння, а не за допомогою сили в інших стрижнях.

Для визначення сил S_4 і S_5 подумки перетинаємо ферму площиною I–I (рис. 2.4).

Розглянемо рівновагу сил, що прикладені до верхньої частини ферми. Дію відкинутої нижньої частини на верхню зобразимо силами S_4, S_5 і S_6.

Як і раніше, умовно припускаємо, зо всі стрижні розтягнені. Знак «–» у відповіді показує, що стрижень стиснений.

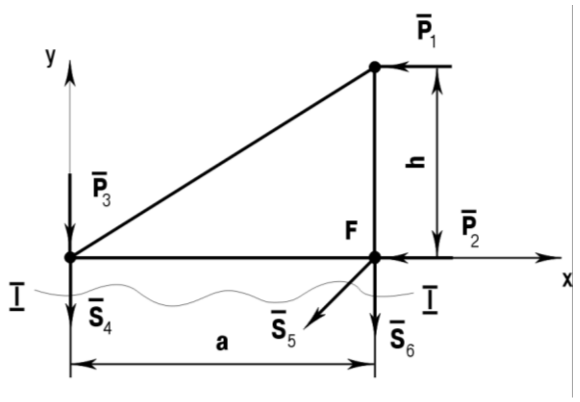


Рис. 2.4

Для визначення зусилля S_4 складемо рівняння моментів відносно точки F, де перетинаються лінії дії сил S_5 і S_6 (для стрижня 4):

$$\sum M_F\left(S_I\right)=0; S_4\cdot a=P_3\cdot a=P_1\cdot h=0.$$

Звідки отримаємо

$$S_4 = -7{,}5 \text{ кН.}$$

Для визначення S_5 спроектуємо усі сили на вісь X:

$$\sum X_i=0;-P_1-P_2\cdot\cos\alpha=0.$$

Звідки отримаємо

$$S_5 = -7{,}5 \text{ кН.}$$

Для визначення сили S_8 перетинаємо ферму перерізом II-II. Розглянемо рівновагу сил, що прикладені до нижньої частини ферми (рис. 2.5). Для цього складемо рівняння моментів відносно точки D, де перетинаються лінії дії сил S_9 і S_{10}, виключених з рівняння

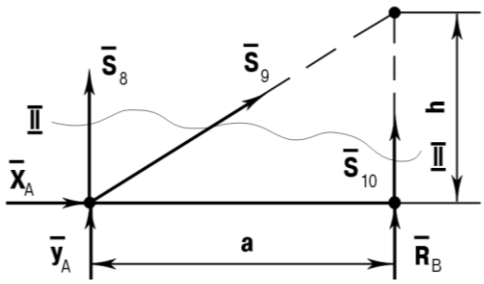


Рис. 2.5

$$\sum M_D\left(S_I\right)=0;-S_8\cdot a-R_{AX}\cdot a+R_{AY}\cdot h=0.$$

З розв`язку рівняння отримаємо

$$S_8 = -12{,}0 \text{ кН.}$$

Зусилля в усіх інших стрижнях визначаємо аналогічно.

ТМ-3

Рівновага системи сил з урахуванням зчеплення (сил тертя спокою)

Приклад розв’язання задачі

Визначити силу *P* і реакції опор системи, що знаходиться у спокої (рис. 3.1).

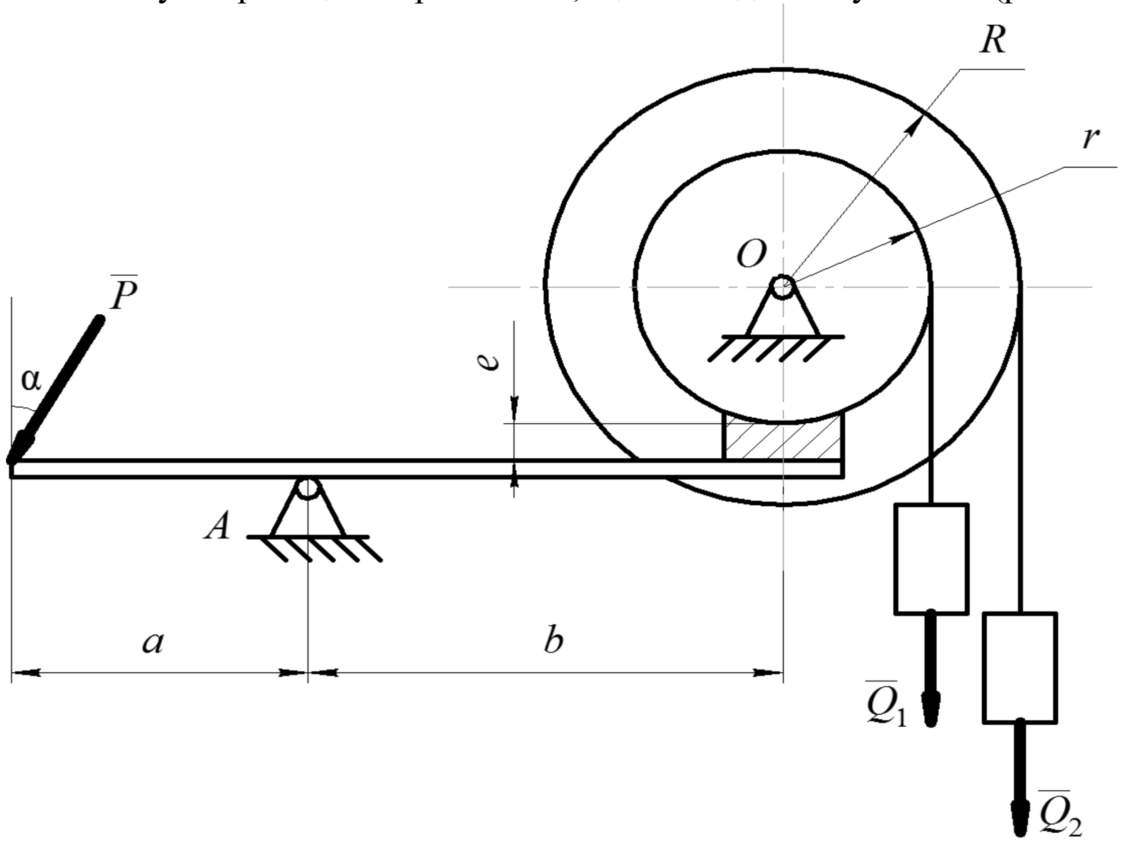


Рис. 3.1

Дано a = 0,4 м; $в$ = 1,2 м; e = 0,01 м; $\alpha = 30^0$; Q_1 = 0,8 кН; Q_2 = 0,4 кН; R = 1 м; r = 0,4 м; f = 0,2.

У цьому завданні розглядається рівновага системи тіл, тобто сукупність твердих тіл, що торкаються одне одного своїми поверхнями (барабан та важільне гальмо).

Розглянемо рівновагу барабана (рис. 3.2) та важільного гальма (рис. 3.3) окремо, відкинувши накладені зв'язки та замінивши їхню дію реакціями.

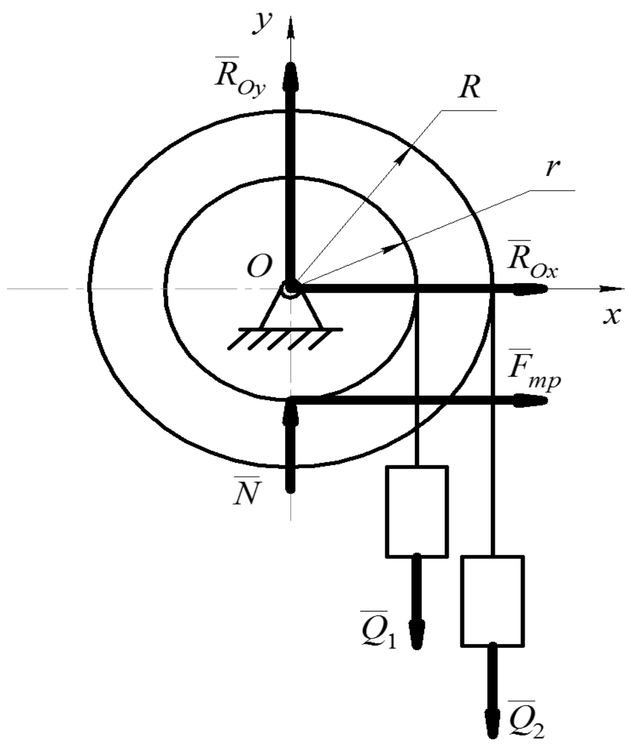


Рис. 3.2

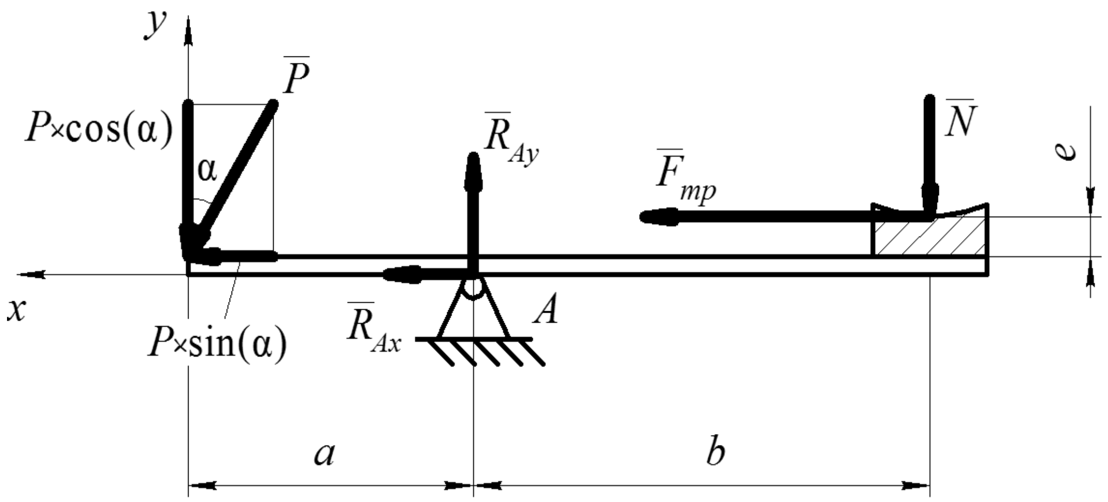


Рис. 3.3

На барабан діють активні сили – сили тяжіння вантажів $\bar{Q}_1$ та $\bar{Q}_2$ і реакції в'язей – дві складові реакції шарнірної опори в т. O – $\bar{R}_{OX}$ та $\bar{R}_{OY}$, і в місці дотику барабана з гальмівною колодкою реакції зв'язку розкладемо на дві складові: $\bar{N}$ – спрямовану по нормалі до дотичних поверхонь та силу тертя $\bar{F}_{TP}$, що спрямована у бік, протилежний можливому руху барабана, враховуючи, що

$$\bar{F}_{TP} = FN \ .$$

Рівновага отриманої плоскої довільної системи сил (рис. 3.2.) за наявності тертя описується такими рівняннями:

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad R_{OX} + F_{TP} = 0; \tag{1}$$

$$\sum F_{KY} = 0; \qquad R_{OY} - Q_1 - Q_2 + N = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_0(F_K) = 0; \qquad F_{TP} \cdot r - Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot R = 0; \tag{3}$$

На важільне гальмо (рис. 3.3) діє активна сила та реакції в'язей: дві складові реакції $\bar{R}_{AY}$ і $\bar{R}_{AX}$ – шарнірної опори A і сили $\bar{N}$ та $\bar{F}_{TP}$, які взаємодіють між барабаном та гальмівною колодкою в точці B. На базі п'ятого закону статики (закон рівності дії та протидії) сили $\bar{N}$ та $\bar{F}_{TP}$, які прикладені до гальма рівні за модулем і протилежні за напрямком силам $\bar{N}$ та $\bar{F}_{TP}$, які прикладені до барабана.

Для плоскої довільної системи сил, що прикладені до гальма, складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad P\sin\alpha + F_{TP} - R_{AX} = 0; \tag{4}$$

$$\sum F_{KY} = 0; \qquad R_{AY} - N - P\cos\alpha = 0; \tag{5}$$

$$\sum M(F_K); \qquad P\cos\alpha\, a - N \cdot b + F_{TP} \cdot e = 0. \tag{6}$$

$$F_{TP} = fN_{TP}.$$

В отриману систему із шести рівнянь входять сім невідомих сил: $\bar{P}$, $\bar{N}$, $\bar{F}_{TP}$, $\bar{R}_{OX}$, $\bar{R}_{OY}$, $\bar{R}_{AX}$, $\bar{R}_{AY}$ які визначаються з таких:

(3) $$F_{TP} = \frac{Q_1 \cdot r + Q_2 \cdot R}{r} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 1}{0{,}4} = 1{,}8 \text{ кН;}$$

(4) $$N = \frac{F_{TP}}{f} = \frac{1{,}8}{0{,}2} = 9 \text{ кН;}$$

(1) $$R_{OX} = -F_{TP} = -1{,}8 \text{ кН;}$$

(2) $$R_{OY} = Q_1 + Q_2 - N = 0{,}8 + 0{,}4 - 9 = -7{,}8 \text{ кН;}$$

(7) $$P = \frac{N \cdot b - F_{TP} \cdot e}{a \cdot \cos\alpha} = \frac{9 \cdot 1{,}2 - 1{,}8 \cdot 0{,}01}{0{,}4 \cdot 0{,}867} = 31{,}09 \text{ кН;}$$

(5) $R_{AX} = P \sin \alpha + F_{TP} = 31{,}09 \cdot 0{,}5 + 1{,}89 = 17{,}34$ кН;

(6) $R_{AY} = N + P \cos \alpha = 9 + 31{,}09 \cdot 0{,}867 = 35{,}95$ кН.

Для перевірки правильності розв`язання складемо рівняння рівноваги для системи тіл (рис. 3.4).

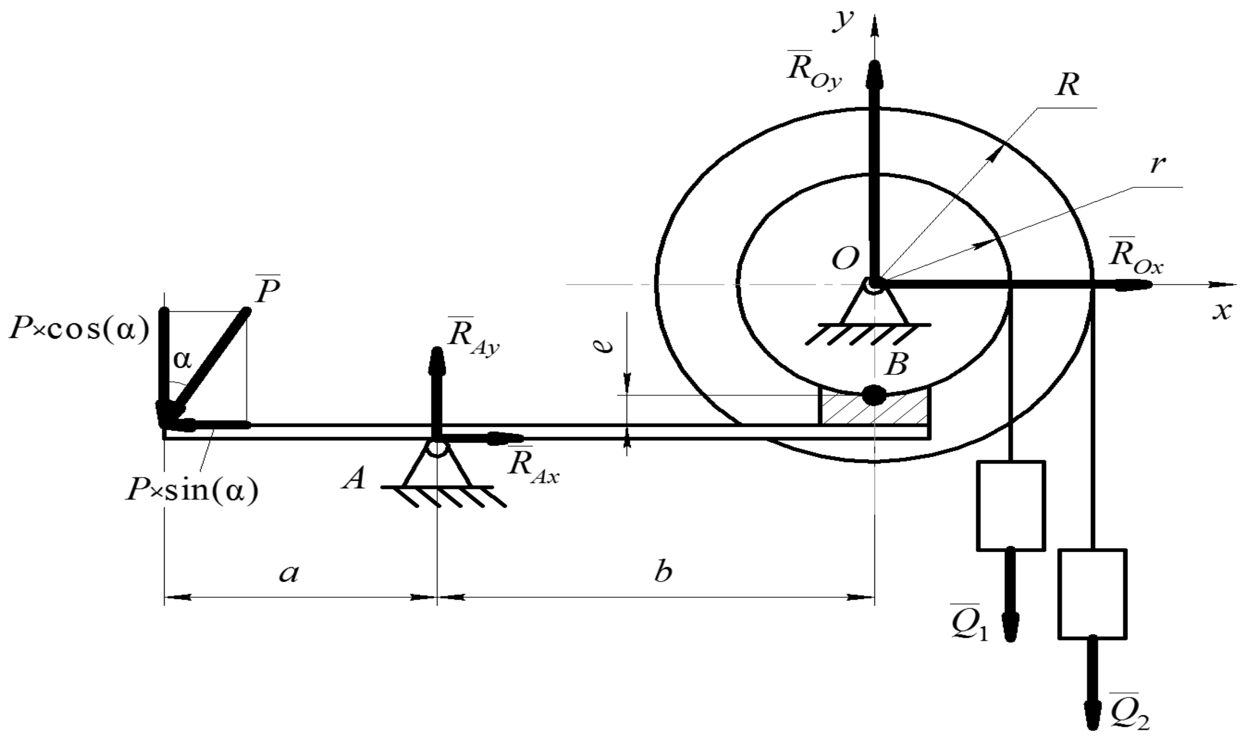


Рис. 3.4

$$\sum M_B = 0;$$

$$\sum M_B (F_K) = 0;$$

$$-Q_1 \cdot r - Q_2 \cdot R - R_{OX} \cdot r + R_{AX} \cdot e - R_{AY} \cdot b +$$

$$+ P \cos \alpha \, (a + b) - P \sin \alpha \, e = 0;$$

$$-0{,}8 \cdot 0{,}4 - 0{,}4 \cdot 1 - (-1{,}8) \cdot 0{,}4 + 17{,}34 \cdot 0{,}01 -$$

$$-35{,}95 \cdot 1{,}2 + 31{,}09 \cdot 0{,}867 \cdot 1{,}6 - 31{,}09 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}01 =$$

$$= -44{,}01 + 44{,}02 = 0{,}01.$$

Похибка складає $\frac{0{,}01 \cdot 100\%}{44{,}02} = 0{,}02\ \% < 5\ \%$.

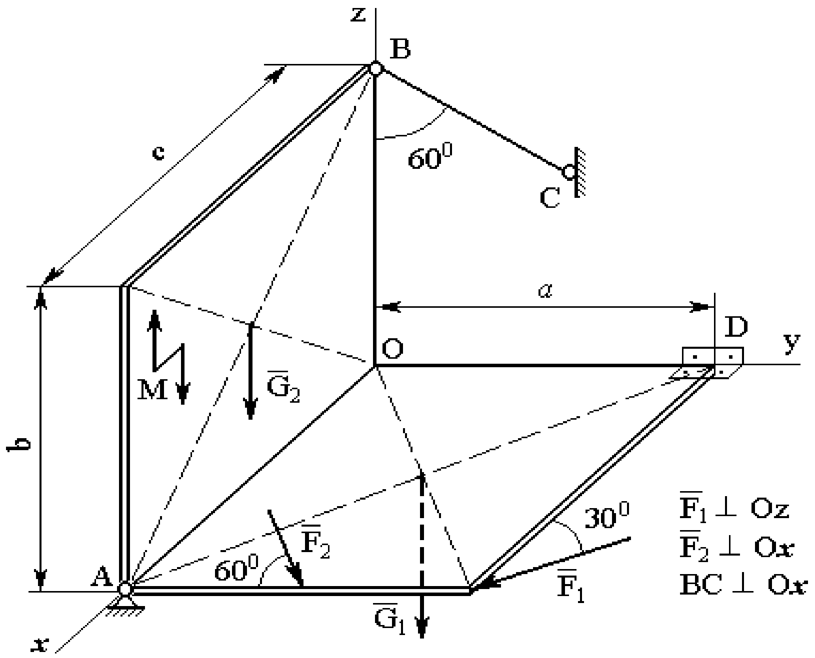
ТМ-4

Визначення реакцій опор твердого тіла

при просторовій довільній системі сил

Приклад розв'язання задачі

Визначення реакцій опор твердого тіла.



Дано:

a = 2,5 м ; G_1 = 5 кН;

$в$ = 2,0 м ; G_2 = 4 кН.

C = 3 м; F_1 = 2 кН;

F_2 = 6 кН;

M = 4 кНм.

Рис. 4.1

Нагадаємо загальну послідовність розв`язання всіх задач статики:

1. Вибрати об'єкт, рівновагу якого потрібно розглянути, щоб відповісти на ці запитання.

2. Побудувати розрахункову схему. Для цього вибраний об'єкт звільнити від в'язей та їхню дію замінити реакціями в'язей.

3. Для отриманої системи сил скласти умови рівноваги.

4. Розв`язати отриману систему рівнянь алгебри.

5. Виконати перевірку та аналіз результатів розрахунку.

Розв`язок

1. Об'єктом, рівновагу якого необхідно розглянути, є плита, що зігнута під прямим кутом.

2. Будуємо розрахункову схему (рис. 4.2), в'язями які є: шаровий шарнір *A*, його реакцію, яка невідома за величиною та напрямком, розкладаємо на три взаємно перпендикулярні складові $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$, циліндричний шарнір *D* не перешкоджає переміщенню плити вздовж вісі *y*, його реакція невідома за величиною, напрямком тому буде переміщенна

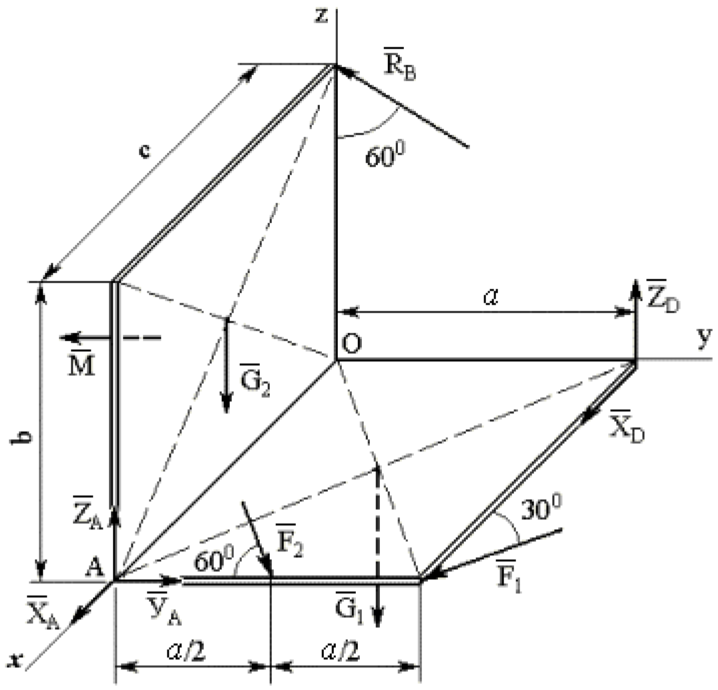


Рис. 4.2

перпендикулярна вісь *y*, її задаємо двома складовими $\bar{X}_D$ і $\bar{Z}_D$, невагомий стрижень *BC* із шарнірами на кінцях впливає на плиту в точці *B* з невідомою за величиною силою R_B, але невідомою за напрямком – вона спрямована вздовж лінії *BC* (навіть, якщо ж невагомий стрижень *BC* був кривим).

Пару сил *M*, що прикладені до вертикальної частини плити, зручно зобразити вектором *M*, спрямованим перпендикулярно до площини у той бік, з якого обертання, що спричинене парою сил, виглядає як обертання проти ходу годинникової стрілки. Нагадаємо, що пара сил *M* – вільний вектор, рівновага тіла при цьому не зміниться, якщо момент M перенести паралельно самому собі у будь-яку точку тіла.

3. Складаємо умови рівноваги. Отримана система сил є довільною просторовою системою, сил, для якої складемо шість аналітичних умов рівноваги якої:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \sum_{i=1}^{n} F_{IX} = 0; \quad 4)\ \sum_{i=1}^{n} M_X(F_I) = 0;\\
&(2)\quad \sum_{i=0}^{n} F_{IY} = 0; \quad 5)\ \sum_{i-1}^{n} M_Y(F_I) = 0; \qquad \text{(a)}\\
&3)\quad \sum_{i=1}^{n} F_{IZ} = 0; \quad 6)\ \sum_{i=1}^{n} M_Z(F_I = 0.
\end{aligned}$$

Перші три рівняння свідчать, що головний вектор дорівнює нулю, наступні три рівняння свідчать про те, що головний момент системи сил, яку розглядаємо , також дорівнює нулю

.

(1) $\sum F_{iX} = X_A + X_Д + F_1 \cos 30^\circ = 0$; $(X_A, X_Д)$

(2) $\sum F_{iY} = Y_A + F_2 \cos 60^\circ - F_1 \sin 30^\circ -$

$- R_B \sin 60^\circ = 0$; (Y_A, R_B)

(3) $\sum F_{iZ} = Z_A - G_1 - G_2 + R_B \cos 60^\circ -$

$- F_2 \sin 60^\circ \cdot + Z_Д = 0$; $(Z_A, R_B, Z_Д)$ (б)

(4) $+ Z_Д \cdot a + R_B \sin 60^\circ \cdot - b = 0$; $(Z_Д, R_B)$

(5) $\sum M_Y(F_i) = - Z_A \cdot C + F_2 \sin 60^o \cdot C$

$+ G_1 \cdot C/2 + G_2 \cdot C/2 - M = 0$; (Z_A)

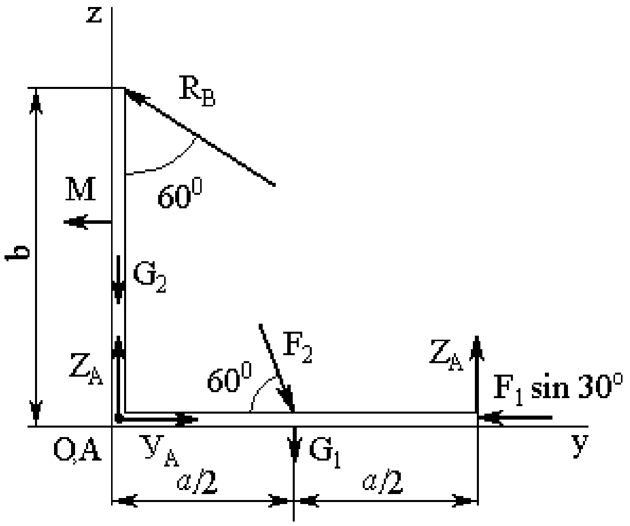
(6) $\sum M_Z(F_i) = Y_A \cdot C + F_2 \cos 60^\circ \cdot C -$

$- F_1 \cos 30^\circ \cdot a - F_1 \sin 30^\circ \cdot C - X_Д \cdot a = 0.$ $(Y_A, X_Д)$

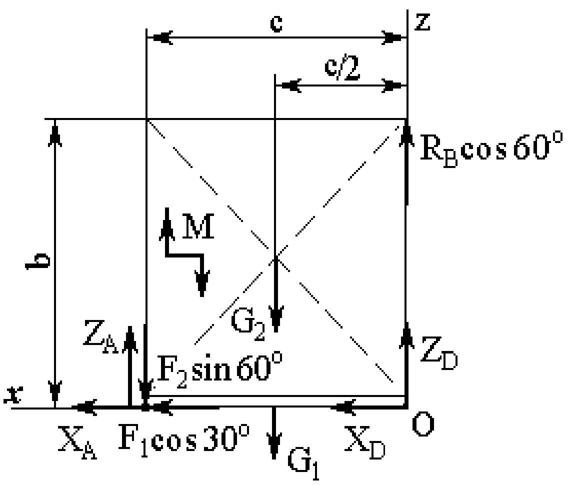
Для складання рівнянь (4) − (6) потрібно використовувати правило обчислення моменту сили щодо вісі: «Для обчислення моменту сили щодо вісі необхідно вказати точку перетину вісі з площиною, а потім на площині обчислити момент проекції сили щодо зазначеної точки».

Для ілюстрації цього правила та полегшення складання рівнянь моментів сил щодо вісей можна рекомендувати будувати додатково плоскі рисунки (рис. 4.3, *а*, *б*, *в*) – вид з вісі *X*, вид з вісі *У* та вид з вісі *Z*, відповідно.

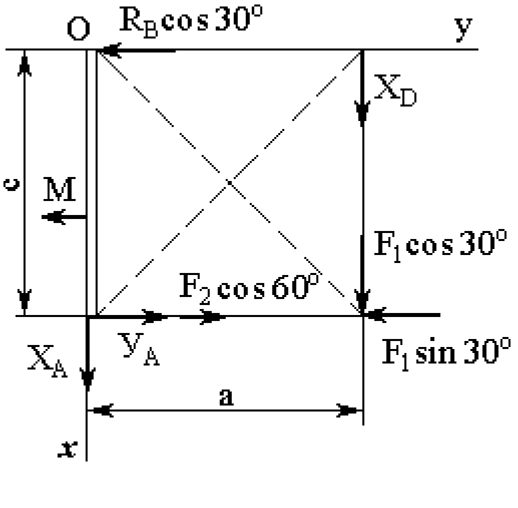
На всіх рис.4.3, точкою перетину вісей з перпендикулярною до неї площиною є т. *O*, відносно якої необхідно скласти вирази моментів проекцій сил на перпендикулярні площини, щоб скласти рівняння (4) – (6) відповідно.



а



б



в

Рис. 4.3

4. Розв'язання отриманої системи рівнянь алгебри.

У разі, коли необхідно розв`язати систему шести рівнянь з шістьома невідомими, то можна застосувати будь-який з відомих чисельних алгоритмі; тоді можна використовувати програмний продукт Mathcad фірми Microsoft.

У даному разі ця система розкладається на прості незалежні рівняння та системи, які містять не більше двох невідомих. Тому її можна розв`язати вручну методом підстановки.

У системі рівнянь (б) у дужках напроти кожного рівняння вказані невідомі. Тому легко помітити, що рівняння (5) містить одну невідому Z_A; рівняння (3) та (4) після підстановки Z_A утворюють систему двох рівнянь з двома невідомими (R_B, $Z_Д$), після підстановки значення R_B в рівняння (2) визначимо $У_A$; потім визначимо із рівняння (6) значення $X_Д$, з рівняння (1) – X_A.

З рівняння (5) визначимо, що

$$Z_А = – M/C + F_2 \sin 60^\circ + G_2/2 = – 3/4 + 6 \cdot 0{,}866 + 5/2 + 4/2 = 8{,}363 \text{ кН}.$$

Розв`яжемо спальне рівняння (3) та(4) :

$$Z_А – G_1 – G_2 + R_В \cos 60^\circ \cdot – F_2 \sin 60^\circ + Z_Д = 0;$$

$$−F_2 \sin 60^\circ \cdot a/2 – G_1 \cdot a/2 + Z_Д \cdot \text{a} + R_В \sin 60^\circ \cdot b = 0.$$

Підставимо у ці рівняння числові значення :

$$8{,}363 – 5 – 4 + R_В \cdot 0{,}5 – 6 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}5/2 – 5 \cdot 2{,}5/2;$$

$$+ Z_Д \cdot 2{,}5 + R_В \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}0 = 0,$$

або

$$0{,}5 R_В + Z_Д = 5{,}833;$$

$$1{,}73 R_В + 2{,}5 Z_Д = 12{,}745.$$

Звідки $R_В = − 3{,}828$ кН, $Z_Д = 7{,}747$ кН.

З рівняння(2) маємо:

$$Y_A = -F_2 \cos 60^0 + F_1 \sin 30^0 + R_B \sin 60^0 =$$

$$= -6\cdot 0,5 + 2.\cdot 0,5 - 3,828\cdot 0,866 = -5,32 \text{ кН.}$$

З рівняння (6)

$$X_Д = \frac{Y_A \cdot C + F_2 \cos 60^0 \cdot C - F_1 \cos 30^0 \cdot a - F_1 \sin 30^0 \cdot C}{a} =$$

$$= \frac{-5,32 \cdot 3 + 6 \cdot 0,5 \cdot 3 - 2 \cdot 0,866 \cdot 2,5 - 2 \cdot 0,5 \cdot 3}{2,5} = -5,716 \text{кН.}$$

З рівняння(1)

$$X_A = -X_Д - F_1 \cos 30^0 = 5,716 - 2\cdot 0,866 = 3,984 \text{ кН.}$$

Для перевірки правильності складання рівнянь рівноваги та їх розвязання вибираємо нову систему координат X_1, Y_1, Z_1 та знову складемо умови рівноваги. Оскільки вісі X_1, Y_1, Z_1 паралельні вісям X, Y, Z та проекції векторів на паралельні вісі однакові то ми знову отримаємо у такому самому вигляді перші три рівняння системи (б). Тому складаємо тільки рівняння моментів сил щодо вісей X_1, Y_1, Z_1, та підставимо в рівняння усі задані та отримані значення сил:

$$\sum M_{X1}(F_i) = -Z_A\cdot a/2 + G_2\cdot a/2 + R_B \sin 60^\circ\cdot b - R_B \cos 60^\circ\cdot a/2 + Z_Д\cdot a/2 =$$

$$= -8,363\cdot 2,5/2 + 4\cdot 2,5/2 - 3,828\cdot 0,866\cdot 2 + 3,828\cdot 0,5\cdot 2,5/2 + 7,767\cdot 2,5/2 =$$

$$= -17,1 + 16,9 = 0,00006 \text{ Нм.}$$

Ми мали отримати $\sum M_{X1}(F_i) = 0$, але внаслідок неточностей обчислень та округлень чисел виникла похибка. Допускається похибка в інженерних розрахунках, що має не перевищувати 3% від мінімального за модулем перевіреного значення реакції в'язей. У даному рівнянні мінімальною за модулем величиною є $|R_B| = 3,844$ кН. У цьому разі ця умова виконується:

$$\sum M_{Y1}(F_i) = R_B \cos 60^\circ\cdot C/2 + Z_Д\cdot C/2 - Z_A\cdot C/2 + F_2 \sin 60^\circ\cdot C/2 - M =$$

$=-\,3{,}828 \cdot 0{,}5 \cdot 3/2 + 7{,}747 \cdot 3/2 - 8{,}363 \cdot 3/2 + 6 \cdot 0{,}866 \cdot 3/2 - 4 =$

$= -\ 19{,}416 + 19{,}415 = -\,0{,}001$ Нм

$\sum M_{Z1}(F_i) = R_B \sin 60^\circ \cdot C/2 - X_Д \cdot a/2 - F_1 \cos 30^\circ \cdot a/2 - F_1 \sin 30^\circ \cdot C/2 +$

$+ F_2 \cos 60^\circ \cdot C/2 + X_A \cdot a/2 + Y_A \cdot C/2 = -\,3{,}828 \cdot 0{,}866 \cdot 3/2 + 5{,}716 \cdot 2{,}5/2 -$

$-\,2 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}5/2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 3/2 + 6 \cdot 0{,}5 \cdot 3/2 + 3{,}984 \cdot 2{,}5/2 - 5{,}32 \cdot 3/2 =$

$= -\,16{,}618 + 16{,}625 = 0{,}007$ Нм.

Висновок: похибка допустима.

Відповідь: $X_A = 3{,}984$ кН;

$X_Д = -\ 5{,}716$ кН;

$Y_A = -\ 5{,}32$ кН;

$-\,R_B = -\,3{,}828$ кН;

$Z_Д = 7{,}747$ кН;

$Z_A = 8{,}363$ кН.

Примітка: отримані зі знаком мінус відповіді свідчать про те, що реальний напрямок реакцій цих в’язей протилежний прийнятому в розрахунковій схемі.

Розв'язання рівнянь із використанням Mathcad.

Розв`язання треба подати у канонічному вигляді

$$AX = B.$$

де A – матриця коефіцієнтів; B – матриця– стовпець вільних членів рівнянь (б).

Оскільки задача ров`язується у числовій формі, то необхідно підставити в рівняння числові значення коефіцієнтів:

1) $X_A + X_Д + 2 \cdot 0{,}866 = 0;$

2) $Y_A + 6 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 0{,}5 - R_B \cdot 0{,}866 = 0;$

3) $Z_A - 5 - 4 + R_B \cdot 0{,}5 - 6 \cdot 0{,}866 + Z_Д = 0;$

4) $-\,6 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}5\backslash 2 - 5 \cdot 2{,}5\backslash 2 + Z_Д \cdot 2{,}5 + R_B \cdot 0{,}866 \cdot 2 = 0;$

5) $-Z_А{\cdot}3 + 6{\cdot} 0,866{\cdot} 3 + 5{\cdot} 3\backslash 2 + 4{\cdot}3\backslash 2 - 4 = 0;$

6) $Y_А{\cdot}3 + 6{\cdot} 0,5{\cdot}3 - 2{\cdot} 0,866{\cdot} 2,5 - 2{\cdot}0,5{\cdot}3 - X_Д \cdot 2,5 = 0.$

Перепишемо систему рівнянь у канонічному вигляді. Для цього введемо такі позначення:

$X_1 = X_А$, $X_2 = Y_А$, $X_3 = Z_А$, $X_4 = X_Д$, $X_5 = Z_Д$, $X_6 = R_В$.

(1) $1{\cdot}X_1 + 0{\cdot}X_2 + 0{\cdot}X_3 + 1{\cdot}X_4 + 0{\cdot}X_5 + 0,866{\cdot}X_6 = 0;$

(2) $0{\cdot}X_1 + 1{\cdot}X_2 + 0{\cdot}X_3 + 0{\cdot}X_4 + 0{\cdot}X_5 - 0,866{\cdot}X_6 =- 2;$

(3) $0{\cdot}X_1 + 0{\cdot}X_2 + 1{\cdot}X_3 + 0{\cdot}X_4 + 1{\cdot}X_5 + 0,5{\cdot}X_6 = 14,196;$

(4) $0{\cdot}X_1 + 0{\cdot}X_2 + 0{\cdot}X_3 + 0{\cdot}X_4 + 2,5{\cdot}X_5 = 1,73{\cdot}X_6 = 12,745;$

(5) $0{\cdot}X_1 + 0{\cdot}X_2 - 3{\cdot}X_3 + 0{\cdot}X_4 + 0{\cdot}X_5 + 0{\cdot}X_6 = - 25,088;$

(6) $0{\cdot}X_1 + 3{\cdot}X_2 + 0{\cdot}X_3 - 2,5{\cdot}X_4 + 0{\cdot}X_5 + 0{\cdot}X_6 = - 17.$

Отримали:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,866 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,866 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 & 1,73 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2,5 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 14,196 \\ 12,745 \\ -25,088 \\ -1,7 \end{vmatrix}.$$

ТМ-5

Поступальний та обертальний рух тіла

Приклад розв’язання задачі

За заданим рівнянням руху тіла 4 визначити швидкість і прискорення точки *M* та закони руху всіх тіл (рис.5.1)

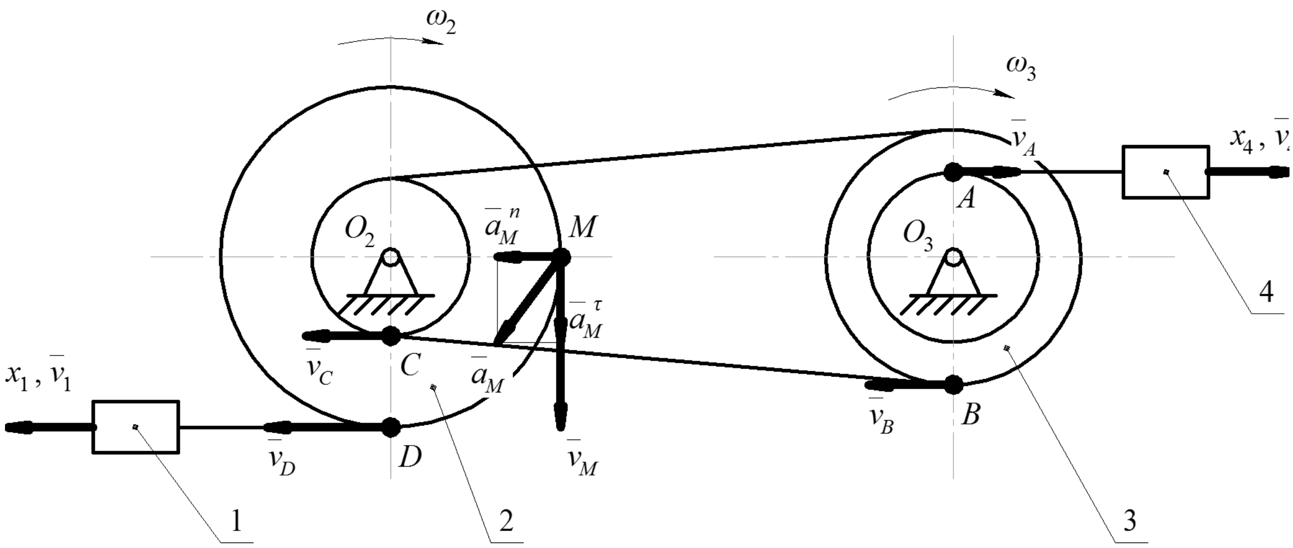


Рис. 5.1

Дано: $X_4 = 5t^2 + t$; $r_2 = r_3 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}4$ м, $R_3 = 0{,}4$ м.

Визначити: V_M; a_M –(при $t = 1$ с); X_1(t) ;$\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$.

Розв’язок

Для визначення кінематичних характеристик необхідно знати закон руху тіла.

1. Виконаємо кинематичний аналіз механізму.

Розглянемо рух кожного тіла системи окремо:

– тіла 1, 4 здійснюють поступальний рух, закони їх руху $X_1 = f_1(t)$,

$X_4 = f_4(t)$;

– тіла 2, 3 здійснюють обертальний рух (закони їх руху $\varphi_2 = f_2(t)$, $\varphi_3 = f_3(t)$).

2. Визначемо швидкостеі точок тіл. Про диференціювавши за часом рівняння руху тіла 4, знайдемо закон зміни його швидкості:

$$\nu_4 = \frac{dx_4}{dt} = 10t + 1 \text{ м / с}$$

Усі точки нерозтянутої гнучкої в’язі на ділянці від тіла 4 до точки А тіла 3 здійснюють поступальний рух (при якому всі її точки рухаються з однаковою швидкістю $V_A = V_4 = 10t + 1$ м/с) . Знаючи швидкість точки *A* та її розташування на тілі, що обертається, можна розрахувати кутову швидкість обертання шківа 3:

$$\omega_3 = \frac{\nu_A}{r_3} = \frac{10t + 1}{0,2} = 50t + 5 \cdot 1 \text{ м / с}.$$

Лінійна швидкість точки, що лежить на тілі, що обертається, визначається як добуток кутової швидкості обертання тіла на відстань від точки до вісі обертання. Це означае, що швидкість т. *B*

$$V_B = \omega_3 R_3 = (50t + 5)\, 0,4 = 20t + 2 \text{ м/с}.$$

Оскільки всі точки нерозтянутої гнучкої в’язі мають однакові швидкості, то

$$V_C = V_B = 20t + 2 \quad \text{м/с}.$$

Однак точка *C* також належить і тілу 2. Кутову швидкість обертання тіла 2 можна визначити, знаючи швидкість т. *C* та відстань від точки *C* до вісі обертання r_2:

$$V_c = \omega_2 \cdot r_2, \text{ звідки } \omega_2 = \frac{V_c}{r_2} = \frac{20t + 2}{0,2} = 100t + 10 \cdot 1 \text{ м / с}.$$

Лінійна швидкість т. *M*, що належить тілу 2 та лежить на більшому радіусі, розраховується як

$$V_M = \omega_2 \, R_2 = (100t + 10)\ 0,4 = 40t + 4 \text{ м/с}.$$

У момент часу t = 1с. $V_M = 40 \cdot 1 + 4 = 44$ м/с.

Оскільки відстань точок *M* і *D* (що належать тілу 2) до вісі обертання однакова R_2 , то $V_D = V_M = 40t + 4$ м/с.

На ділянці від точки *D* до тіла 1 всі точки гнучкої в'язі здійснюють поступальний рух, то $V_1 = V_D = 40t + 4$ м/с.

2. Визначення прискорення точки *M*.

Вектор прискорення точки тіла , що обертається, складається із двох складових :

– нормального – $\bar{a}_n$ і тангенціального – $\bar{a}_\tau$ прискорення .

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau;$$

$$a_M^n = \frac{V_M^2}{R_2}; \qquad a_M^n = \frac{44^2}{0,4} = \frac{1936}{0,4} = 4840 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M^\tau = \frac{dV_M}{dt}; \qquad a_M^\tau = 40t + 4 = 40 \quad \text{м/с}^2.$$

Вектор нормального прискорення точки $\bar{a}^n$ завжди спрямований до вісі обертання.

Вектор тангенційного прискорення точки $\bar{a}^\tau$ спрямований відносно дотичної до траєкторії в заданій точці у бік обертання, якщо $a^\tau > 0$ (рух прискорений), або у бік, протилежний обертанню, якщо $a^\tau < 0$ (рух повільний).

Повне прискорення точки за модулем дорівнює:

$$a_M = \sqrt{a_M^{n^2} + a_M^{\tau^2}} = \sqrt{4840^2 + 40^2} = 4900 \text{ м / с}^2.$$

Кут між вектором повного прискорення точки та радіусом обертання визначається за формулою

$$\text{tg}\mu = \frac{a^\tau}{a^n}, \text{ звідки } \mu = \text{arctg}\left(\frac{a^\tau}{a^n}\right).$$

3. Визначення законів руху тіл.

Згідно з проведеним кінематичним аналізом механізму для визначення законів руху тіл необхідно проінтегрувати за часом відповідно:

–І закон зміни швидкості $V_1(t)$:

$$X_1(t) = \int V_1(t)dt = \int_t (40t+4)dt = \frac{40t^2}{2} + 4t + C_1 = 20t^2 + 4t + C_1 \text{ м};$$

–ІІ закон зміни кутової швидкості $\omega_2(t)$:

$$\phi_2(t) = \int \omega_2(t)dt = \int_t (100t+10)dt = \frac{100t^2}{2} + 10t + C_2 = 50t^2 + 10t + C_2 \text{ рад};$$

–ІІІ закон закон зміни кутової швидкості $\omega_3(t)$:

$$\phi_3(t) = \int \omega_3(t)dt = \int_t (50t+5)dt = \frac{50t^2}{2} + 5t + C_3 = 25t^2 + 5t + C_3 \text{ рад}.$$

При виборі початку відліку переміщення кожного тіла при t=0 постійні інтегрування $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

Результати обчислень зведемо у таблицю

$X_1(t)=20t^2+4t$	$V_1(t)=40t+4$	Тіло 1
$\varphi_2(t)=50t^2+10t$	$\omega_2(t)=100t+10$	Тіло 2
$\varphi_3(t)=25t^2+5t$	$\omega_3(t)=50t+5$	Тіло 3
$X_4(t)=5t^2+t$	$V_4(t)=10t+1$	Тіло 4

ТМ-6
Складний рух точки
Приклад розв'язання задачі

Визначення абсолютної швидкості
та абсолютного прискорення точки

Точка *M* рухається по тілу *D* і разом з ним. За даними рівняннями відносного руху точки *M* та руху тіла *D* визначити для моменту часу $t = t_1$ абсолютну швидкість та абсолютне прискоренняи точки *M*.

Дано: схема механізму (рис.6.1);

$S_r = OM = 0{,}06\ t^2$ м;

$\varphi_e = t^2 \cdot (0{,}8t - 0{,}3)$ рад;

$t_1 = 3$ с, $a = 0{,}3$ м.

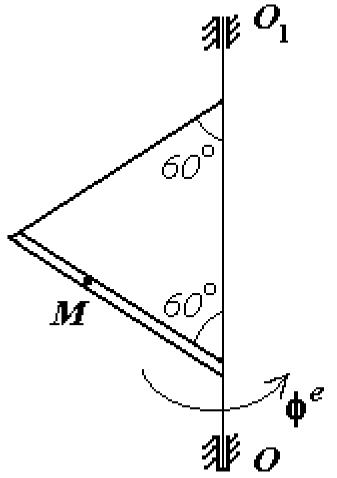


Рис. 6.1

Методичні вказівки

1. Накреслити схему механізму в масштабі.
2. Показати на рисунку положення т. *M* в заданий момент часу.
3. З'ясувати який рух точки вважати відносним, а який переносним.
4. Визначаючи швидкості та прискорення відносного і переносного рухів, використати метод миттєвого припинення рухів.
5. Зобразити на рисунку всі вектори швидкостей та прискорень (окрім вектора абсолютного прискорення).

Розв'язок

Будемо вважати, що в заданий момент часу площина рисунку співпадає з площиною трикутника D. Положення т. M на тілі D визначається відстанню $S_r = OM$. При $t = 3$ с

$$S_r = 0{,}06 \cdot 3^2 = 0{,}54 \text{ м.}$$

Абсолютну швидкість точки M знайдемо як геометричну суму відносної та переносної швидкостей

$$\bar{v}_a + \bar{v}_r + \bar{v}_e. \qquad (1)$$

Визначаючи швидкість відносного руху точки, подумки припиняємо переносний рух (обертання трикутної рамки).

Модуль відносної швидкості

$$v_r = \frac{dS_r}{dt} = 0{,}12t\ .$$

При $t = 3$ с. $v_r = 0{,}12 \cdot 3 = 0{,}36$ м/с.

Величина відносної швидкості більша за нуль, і тому вектор швидкості спрямований уздовж відрізку OM у бік руху т. M (рис. 6.2).

Визначаючи переносну швидкість т. М, маємо на увазі, що т. M не рухається по тілу D. У цьому разі вона обертається разом з тілом. Модуль переносної швидкості

$$v_e = R\omega_e,$$

де R – радіус кола L, що описується точкою тіла, з якою в даний момент співпадає т. M, $R = S_r \sin 60^0 = 0{,}54 \cdot 0{,}86 = 0{,}468$ м; ω_e – модуль кутової швидкості тіла,

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 2{,}4t^2 - 0{,}6t\ .$$

При $t = 3$ с

$$\omega_e = 2{,}4 \cdot 3^2 - 0{,}6 \cdot 3 = 19{,}8 \quad \text{с}^{-1}.$$

Оскільки ω_e більше за нуль, то вектор ω_e спрямований за віссю обертання вгору.

Модуль переносної швидкості:

$$v_e = 0{,}468 \cdot 19{,}8 = 9{,}266 \text{ м/с}.$$

Вектор $\bar{v}_e$ спрямований по дотичній до кола L у бік обертання тіла (рис. 6.2).

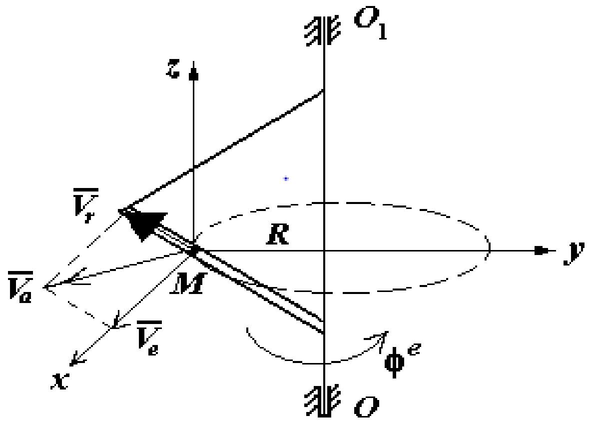


Рис. 6.2

Оскільки $\bar{v}_e$ та $\bar{v}_r$ взаємно перпендикулярні, то модуль абсолютної швидкості т. M визначається як

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{0{,}36^2 + 9{,}266^2} = 9{,}276 \text{ м/с}.$$

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного та коріолісового прискорень:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \qquad (2)$$

Оскільки у відносному русі точка рухається прямолінійно, то

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = 0{,}12 \text{ м/с}.$$

Переносне прискорення точки $\bar{a}_e$ подамо у вигляді геометричної суми нормального, тангенціального прискорення, тобто як два прискорення;

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n}. \qquad (3)$$

Величина переносного нормального прискорення дорівнює

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot R = (2{,}4t^2 - 0{,}6t) \cdot R.$$

При t =3 с.

$$a_e^n = 19{,}8 \cdot 0{,}468 = 183{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_e^n$ спрямований від т. *M* до вісі обертання (рис. 6.3).

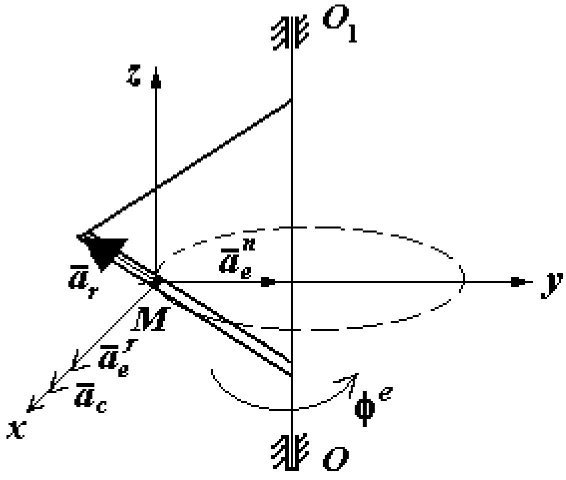


Рис. 6.3

Модуль переносного тангенціального прискорення

$$a_e^\tau = R\,\varepsilon_e,$$

де ε_e –кутове прискорення тіла *D* , яке розраховується так:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 4{,}8t - 0{,}6.$$

При $t = 3$ с

$$\varepsilon_e = 4{,}8 \cdot 3 - 0{,}6 = 13{,}8 \qquad с^{-1}.$$

Знаки ε_e та ω_e співпадають, і тому, обертання трикутника *D* прискорене, напрямок векторів $\bar{\omega}_e$ і $\bar{\varepsilon}_e$ співпадає.

Остаточно запишемо, що

$$a_e^\tau = 0{,}468 \cdot 13{,}8 = 6{,}45 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_e^\tau$ спрямований у той самий бік, що й $\bar{v}_e$ (рис. 6.3).

Коріолісове прискорення:

$$a_c = 2\omega_e x v_r.$$

Модуль коріолісового прискорення

$$a_e = 2\omega_e v_\tau \sin\left(\bar{\omega}_e, \bar{v}_\tau\right),$$

де

$$\sin\left(\bar{\omega}_e, \bar{v}_\tau\right) = \sin 60^0 = 0{,}866.$$

З урахуванням знайдених вище значень ω_e та v_e запишемо:

$$a_c = 2 \cdot 19{,}8 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}866 = 12{,}34 \text{ м/с}^2.$$

А з урахуванням формул (2) і (3) маємо

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c.$$

Модуль абсолютного прискорення можна визначити через його проекції на вісі декартової системи координат, тобто

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

де

$$a_x = a_c - a_e^\tau = 12{,}34 - 6{,}45 = 5{,}89 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = a_e^n - a_r \sin 60^0 = 183{,}5 - 0{,}12 \cdot 0{,}866 = 183{,}39 \text{ м/с}^2;$$

$$a_z = a_r \cos 60^0 = 0{,}12 \cdot 0{,}5 = 0{,}06 \text{ м/с}^2.$$

Остаточно отримаємо

$$a = \sqrt{5{,}89^2 + 183{,}39^2 + 0{,}06^2} = 183{,}49 \quad \text{м/с}^2.$$

ТМ-8
Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки
Приклад розв’язання задачі

Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що знаходиться під впливом постійних сил

Умова задачі

Лижник (рис. 8.1) рухається з т. *A* ділянки трампліна *AB* довжиною *l*, похиленого до горизонту під кутом α, протягом часу *t* ($0 \le t \le \tau$), *c.* Початкова швидкість лижника в т. *A* дорівнює V_A , коефіцієнт тертя ковзання лиж по снігу дорівнює *f*. У т. *B* лижник залишає трамплін зі швидкістю V_B та приземляється зі швидкістю V_C у т. *C* на площині *BD*, яка похилена до горизонту під кутом β, знаходячись у повітрі *T*с .

Примітка: при розв`язанні задачі лижника прийняти за матеріальну точку, опір повітря не враховувати.

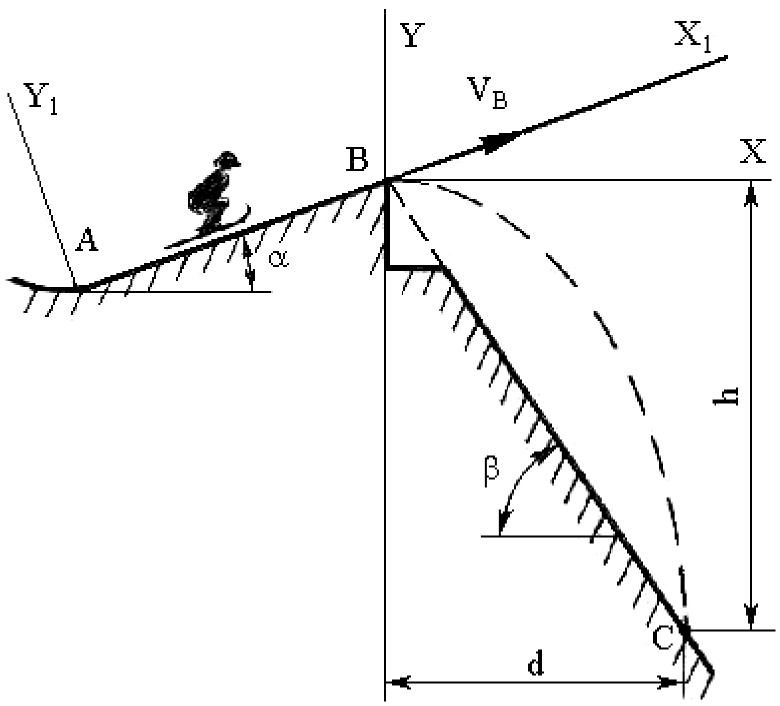


Рис. 8.1

Дано: $\alpha = 30^0$; V_A=20 м/с; $f = 0{,}1$; l = 10 м; $\beta = 60^0$.
Визначити: V_B і T.

Розв`язок

Рух лижника, якого приймаємо за матеріальну точку, відбувається на двох ділянках траєкторії (ділянка *AB* – прямолінійна, ділянка *BC* –– криволінійна), де діють різні системи сил. Тому для розв`язку задачі необхідно скласти та проінтегрувати диференціальне рівняння руху матеріальної точки на першій ділянці *AB*, маючи на увазі, що час руху змінюється у межах $0 \le t \le \tau$, а потім на ділянці *BC* траєкторії, розглядаючи нову систему сил та знову відраховуючи час $0 \le t \le T$. При цьому сили, що діють на лижника на ділянці трампліну до точки *A*, враховуються кінематично, завданням швидкості його руху V_A при t=0. Сили, що діють на ділянці *AB*, та початкові кінематичні умови руху в т. *A* (при $t = 0$) визначають конкретний рух лижника на ділянці *AB* та швидкість його в т. *B*. Це значення V_B буде початковою кінематичною умовою руху лижника на ділянці *BC* траєкторії та разом з діючою під час польоту лижника силою ваги визначать конкретний закон його руху на ділянці *BC*. отримавши рівняння руху лижника на двох ділянках траєкторії *AB* і *BC*, ми можемо скласти необхідні алгебраїчні рівняння для обчислення невідомих величин задачі.

Для цього першим розглянемо рух лижника на ділянці *AB* траєкторії, розташовуючи початок системи координат X_1 Y_1 у т. *A*.

Лижника приймаємо за матеріальну точку і зображуємо її у довільному стані на траєкторії (рис. 8.2), зображаючи усі діючі на неї сили: $\vec{G}$ − сила ваги, $\vec{N}$ та $\vec{F}_{\text{тр}}$ − нормальна та тангенціальна складові реакції шорсткої поверхні.

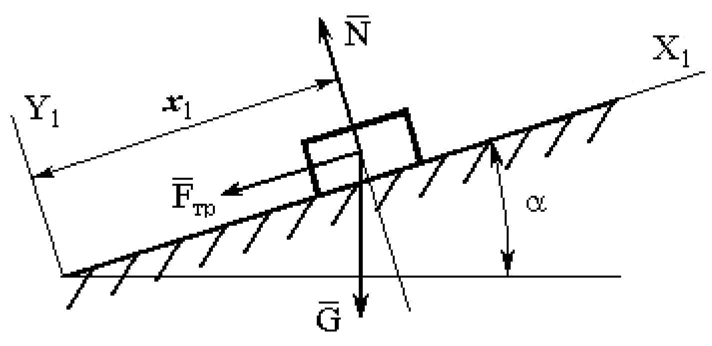


Рис. 8.2

При русі точки вздовж вісі x_1 змінюється тільки координата x_1, координата y_1=0 не змінюється ($\dot{y}_1 = 0,\ \ddot{y}_1 = 0$). Тому складемо одне диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{x}_1 = \sum_{i=1}^{3} F_{ix}, \tag{1}$$

при цьому діючі сили задовольняють рівнянню

$$\sum_{i=1}^{3} F_{iy} = 0. \tag{2}$$

Права частина рівняння (1) буде мати вигляд

$$\sum_{i=1}^{3} F_{ix} = -F_{\text{тр}} - G\sin\alpha\ ,$$

де $F_{тр}$ – сила тертя, що визначається при ковзанні за законом Кулона, $F_{тр}= fN$ і f – коефіцієнт тертя.

Нормальну складову реакції в’язей N знаходимо з рівняння (2)

$$\sum_{i=1}^{3} F_{iy} = N - G\cos\alpha = 0,$$

Звідки $N = G\cos\alpha$,

Тоді $F_{\text{тр}} = f\,G\cos\alpha$.

Підставляючи визначення F_{TP} у праву частину рівняння (1), отримаємо після скорочення на m диференціальне рівняння матеріальної точки на ділянці AB:

$$\ddot{x}_1 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\ , \tag{3}$$

де g – прискорення вільного падіння.

Вираз (3) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Для його інтегрування необхідно сформулювати початкові умови, в яких мають бути задані значення самої змінної x_1 та її першої похідної $\dot{x}_1$ при t= 0. Оскільки лижник при t= 0 знаходився в т. A (на початку координат X_1Y_1) та мав швидкість V_A, то початкові умови сформулюємо у вигляді:

при t=0; 1) x_{10} =0 ; 2) $\dot{x}_{10}=V_A$. (4)

Інтегруючи диференціальне рівняння (3) двічі, отримаємо:

$$\dot{x}_1 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + C_1;$$

$$x_1 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Для визначення постійних інтегрування використовуємо початкові умови (4) та знаходимо, що $C_1 = V_A$: $C_2 = 0$.

Отримаємо рівняння руху лижника на ділянці AB траєкторії :

$$x_1 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + V_A t \tag{5}$$

та закон зміни швидкості його руху

$$\dot{x}_1 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + V_A\,. \tag{6}$$

які задовольняють диференціальному рівнянню (3), початковим умовам (4), а також справедливі при $0 \le t \le \tau$ та при $0 \le x_1 \le l$. При $t = \tau$ $x_1 = l$, $\dot{x}_1 = V_B$.

Переходимо до вивчення руху лижника на ділянці BC траєкторії.

Вибираємо нову систему координат XY з початком в точці B (рис. 8.3). Під час польоту ($0 \le t \le T$) діє тільки сила ваги $\vec{G}$. Оскільки траєкторія BC плоска крива та при русі точки змінюються дві координати x та y, то складемо два диференціальних рівняння її руху:

$$m\ddot{x} = 0\,, \quad \text{або} \quad \ddot{x} = 0, \tag{7}$$

$$m\ddot{y} = -G\,, \quad \text{або} \quad \ddot{y} = -g\,. \tag{8}$$

Отримані формули являють собою незалежні звичайні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Далі сформулюємо початкові умови задачі:

при $t=0$; 1) $x_0=0$ і 2) $\dot{x}_0 = V_B\cos\alpha$ і 3) $y_0 = 0$, 4) $\dot{y}_0 = V_B\sin\alpha$. (9)

Інтегруємо рівняння (7):

$$\dot{x} = C_3\,, \quad x = C_3\,t + C_4\,.$$

Постійні інтегрування визначимо, використовуючи , а саме: 1) та 2). Отримаємо

$$C_4 = 0. \qquad C_3 = V_B\cos\alpha\,.$$

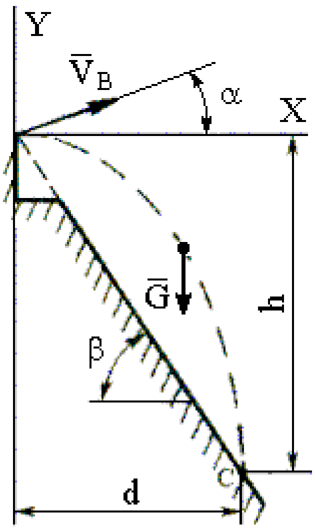


Рис. 8.3

Тоді $$x = V_B \cos\alpha t\,; \tag{10}$$

$$\dot{x} = V_B \cos\alpha\,. \tag{11}$$

Одразу прокоментуємо отриманий результат: горизонтальна складова швидкості матеріальної точки ($\dot{x} = const$) від часу не залежить, оскільки немає горизонтальних сил під час польоту.

Інтегруємо рівняння (8) :

$\dot{y} = -gt + C_5$; $\sum_{i=1}^{3} F_{iy} = N - G\cos\alpha = 0.$ $y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_5 t + C_6\cdot$

Використовуємо початкові умови (q), а саме: 3) та 4) з (9) для визначення C_5 і C_6. Отримаємо, що C_6 =0, $C_5 = V_B \sin\alpha$, тоді

$$y = -g\frac{t^2}{2} + V_B \sin\alpha\cdot t\,; \tag{12}$$

$$\dot{y} = -gt + V_B \sin\alpha\,. \tag{13}$$

Таким чином, рівняннямии руху лижника на ділянці *BC* траєкторії представлені рівняннями (10) та (12). Рівняння (11) та (13) визначають горизонтальну та вертикальну складові його швидкості під час польоту.

У загальному вигляді розв’язання задачі отримано. Тепер, використовуючи рівняння руху на першій ділянці траєкторії (5) на другій ділянці − (10) та (12), відповідні їм вирази для швидкості лижника − (6), (11) та (13), а також вихідні дані, складемо необхідні алгебраїчні рівняння для отримання необхідних значень V_B і T.

Нагадаємо основну теорему алгебри, згідно з якою задача розв`язуєтся алгебраїчно тільки тоді, коли кількість невідомих дорівнює числу рівнянь.

Намагаємось відповісти на питання, чому дорівнює V_B, використовуючи вираз (6).

При $t=\tau$ $\quad \dot{x}_1 = V_B = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\tau + V_A$. $\quad$ (*а*)

Вираз (*а*) містить дві невідомі: V_B і τ . Складемо додаткове рівняння, використовуючи умови, коли l =10 м. Вираз (5) при $t=\tau$ приймає вигляд:

$$x_1 = l = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2} + V_A\tau , \qquad (б)$$

це квадратне рівняння, яке відносно τ містить одну невідому. Підставляючи в це рівняння числові значення вхідних величин, отримаємо:

$$10=-9{,}8(0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}866)\frac{\tau^2}{2} + 20\tau .$$

Переписуємо його у канонічному вигляді

$$2{,}877\tau^2 - 20\tau + 10 = 0;$$

звідки $\quad \tau_{1,2} = \dfrac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4\cdot 2{,}877\cdot 10}}{2\cdot 2{,}877} = \dfrac{20 \pm 16{,}88}{5{,}754};$

$$\tau_1 = 0{,}542 \text{ с} ; \qquad \tau_2 = 6{,}4 \text{ с}.$$

Значення τ_2 є коренем алгебраїчного рівняння, але не задовольняє фізичному сенсу задачі. Час руху лижника по ділянці трампліна *АВ*: $\tau = \tau_1$ =0,542 с.

Підставляємо знайдене значення τ у вираз (*а*) та знаходимо, що

$$V_B = -9{,}8\ (0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}866)\cdot 0{,}542 + 20 = 16{,}89 \text{ м/с}.$$

Для визначення часу руху лижника на другій ділянці траєкторії T у вихідних даних маємо тільки значення кута нахилу схилу β =60^0 , який встановлює залежність між висотою h, і дальністю d польоту:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{h}{d} . \qquad (в)$$

Скористаємося виразами (10) та (12). При $t = T$

$$x = d = V_B \cos\alpha\, T; \qquad (г)$$

$$y = -h = -g\frac{T^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot T . \qquad (д)$$

Підставляючи вирази (*д*) і (*г*) у (*в*), отримаємо:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{g\dfrac{T^2}{2} - V_B\sin\alpha\cdot T}{V_B\cos\alpha\cdot T} = g\frac{T}{2V_B\cos\alpha} - \mathrm{tg}\alpha ,$$

звідки

$$T = \frac{1}{g}(\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\alpha)2V_B \cos\alpha = \frac{1}{9,81}(1,38 - 0,51) \cdot 2 \cdot 20 \cdot 0,86 = 3,05 \text{ с.}$$

Відповідь: V_B =16,89 м/с ; T= 3,05 с.

ТМ-9

Плоскопаралельний рух тіла, використання теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи

Приклад розв'язання задачі

Кінематичний аналіз плоского механізму

1. За заданим законом руху тіла 1 (S_1 = 0,1 t^2 м) встановити залежності між переміщеннями, швидкостями та прискореннями усіх тіл системи.
2. Розрахувати швидкість та прискорення точки *K*.
3. Знаючи закон відносного руху точки *L*, (*OL* = *f*(*t*)) для заданного моменту часу *t* = 1 знайти абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки *L*.

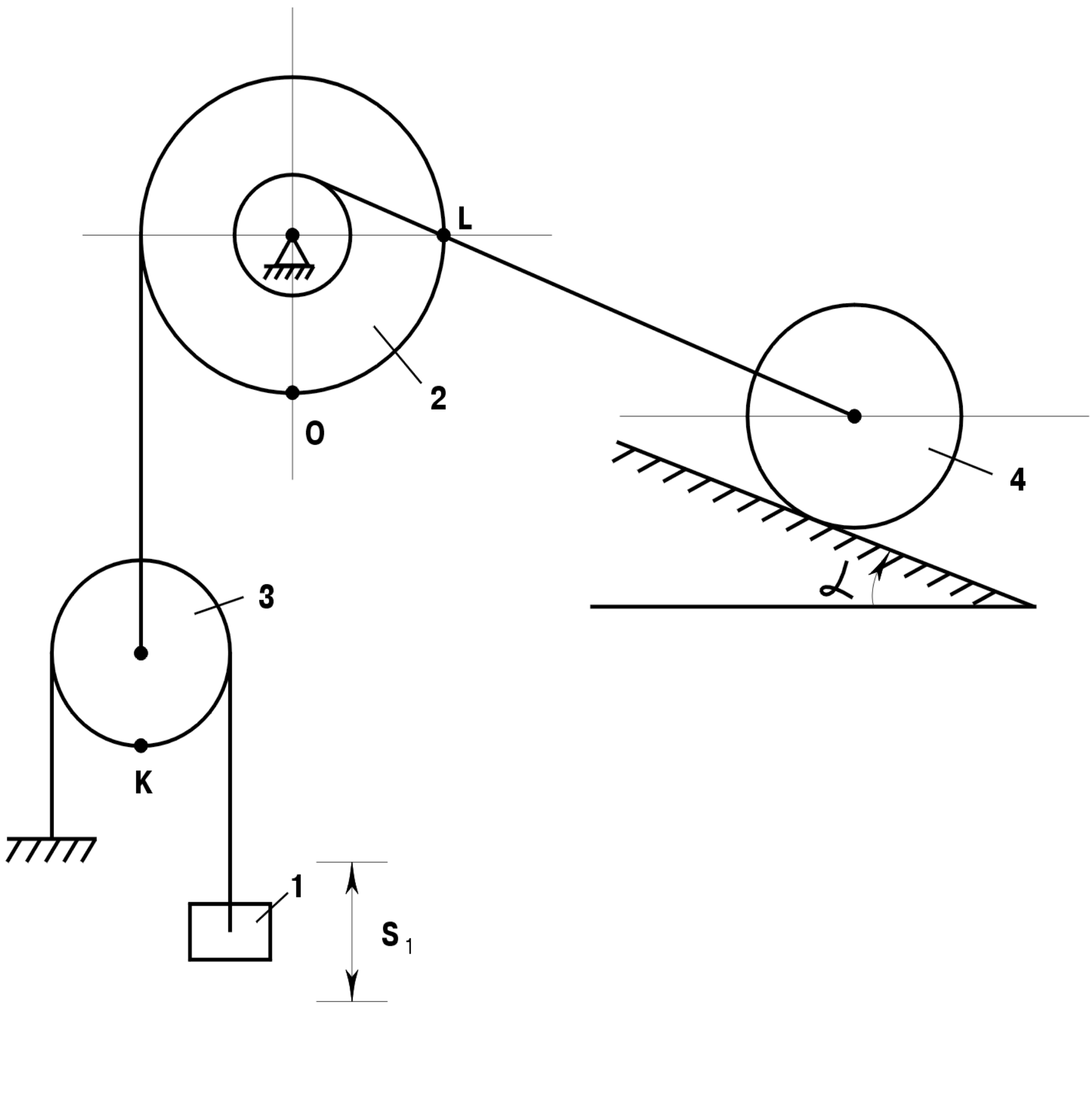


Рис. 9.1.1

Дано: $OL = 0{,}05\ \pi t^2$; $R_2 = 0{,}4$ R_2; $R_2 = 0{,}4$ м.; $R_4 = 0{,}1$ м.

Розв`язок

1. Згідно із заданим законом руху визначимо перемещення тіла 1.

При $t = 1$ с.: $S_1 = 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}1$ м, $S_4 = 0{,}1\ t^2$.

Лінійна швидкість та прискорення тіла 1, що рухається поступово, визначаються залежностями :

$V_1 = \dfrac{dS_1}{dt} = 0{,}2t$: При $t = 1$ с, $V_1 = 0{,}2$ м/с,

$$a_1 = \frac{dV_1}{dt} = 0{,}2\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Маючи на увазі, що гнучкі в'язі між тілами не розтягнені, запишемо

$V_A = V_1 = 0{,}2\ t$. При $t = 1$ с $V_A = V_1 = 0{,}2$ м/с.

Тіло 2. Звідки можна знайти, що $V_B = \dfrac{V_1}{2} = 0{,}1$ м/с. Враховуючи час, $V_B = \omega_2 R_2$ та

$\omega_2 R_2 = \dfrac{V_1}{2}$, отримаємо

$$\omega_2 = \frac{V_1}{2R_2} = \frac{0{,}2t}{2 \cdot 0{,}2}.$$

При $t = 1$ с $\omega_2 = 0{,}5$ $с^{-1}$.

Кутове прискорення ε_2 визначаємо за формулою

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{0{,}2}{2 \cdot 0{,}2} = 0{,}5,\ \text{с}^{-2}.$$

Тоді закон має вигляд

$\varphi_2 = \int \omega_2\, dt = 0{,}25\ t^2 + C_2$, рад;

п.у. $t = 0$ $\varphi_2^{(0)} = 0 \to C_2 = 0$.

Тіло 3 здійснює плоскопаралельний рух. Визначаємо положення миттєвого центра швидкостей P_1 .

Тоді лінійна швидкість точки D

$$V_D = \omega_2 r_2 = \frac{V_1 r_2}{2R_2} = \frac{V_1 \cdot 0{,}4R_2}{2R_2} = \frac{0{,}2t \cdot 0{,}4}{2} = 0{,}04t\ \text{м/с},$$

а лінійна швидкість точки C_4 тіла 4 дорівнює лінійній швидкості точки D, тобто

$$V_{C4} = V_D = 0{,}04\ \text{t}.$$

При $t = 1$ с $\qquad V_{C4} = 0{,}04$ м/с, $\quad a_{C4} = \dfrac{dV_{C4}}{dt} = 0{,}04\,\text{м / с}^2.$

Визначимо кутову швидкість обертання тіла 4.

$$\omega_4 = \frac{V_{C4}}{C_4P_2} = \frac{V_1 r_2}{2R_2R_4} = \frac{0{,}2t\cdot 0{,}4R_2}{2R_2\cdot R_4} = \frac{0{,}2t\cdot 0{,}4}{2\cdot 0{,}1} = 0{,}4\ \text{t}\,.$$

При $t = 1$ с; $\omega_4 = 0{,}4$ с$^{-1}$.

Закон руху тіла 4 встановимо таким чином:

$$\varphi_4 = \int \omega_4 dt = \int 0{,}4\, t\, dt = 0{,}2\, t^2 + C_3 \text{ рад.}$$

де постійна інтегрування $C_3 = 0$. Якщо прийняти початок відліку кута φ_4 у такому положенні тіла 4, то кутове прискорення тіла 4

$$\varepsilon_4 = \frac{d\omega_4}{dt} = 0{,}4\ \text{с}^{-2}.$$

Тоді рівняння руху точок C_3 та C_4 тіл 3 та 4 запишуться так:

$$S_3 = \int V dt = 0{,}05t^2 + C_4 \text{ м;}$$

початкові умови $\qquad$ (п.у.) $\quad t = 0; \qquad S_3^{(0)} = 0 \rightarrow C_4 = 0;$

$$S_4 = \int V_{C4} dt = 0{,}02\, t^2 + C_5 \quad \text{м;}$$

$$\text{п.у.}\quad t = 0; \qquad S_4^{(0)} = 0 \rightarrow C_5 = 0.$$

Результати розрахунків зводимо у табл. 9.1

Таблиця 9.1

№ тіла	S_i (φ_i),м, рад	V_i (ω_i),м\с, с$^{-1}$)	a_i (ε_i), м\с^2, с$^{-2}$
Поступальний рух–тіло 1	$S_1 = 0{,}1\, t^2$	$V_1 = 0{,}2$	$a = 0{,}2$
обертальний рух–тіло 2	$\varphi_2 = 0{,}25\, t^2$	$\omega_2 = 0{,}5$	$\varepsilon_2 = 0{,}5$
ППР–тіло 3	$S_3 = 0{,}05\, t^2$ $\varphi_3 = 0{,}125\, t^2$	$V_{C3} = 0{,}1$ $\omega_3 = 0{,}25$	$a_{C3} = 0{,}1$ $\varepsilon_3 = 0{,}25$
ППР–тіло 4	$S_4 = 0{,}02\, t^2$ $\varphi_4 = 0{,}2\, t^2$	$V_{C4} = 0{,}04$ $\omega_4 = 0{,}4$	$a_{C4} = 0{,}04$ $\varepsilon_4 = 0{,}4$

Розрахуємо кутову швидкість ω_3 тіла 3:

$$V_A = \omega_3 \cdot AP_1 = \omega_3 \cdot 2R_3\,.$$

Прирівняємо

$\omega_3 2R_3$ до V_1, звідки $\qquad \omega_3 = \dfrac{V_1}{2R_3} = \dfrac{0{,}2t}{2\cdot 0{,}4}\,.$

$$\text{При}\quad t = 1\ \text{с},\ \omega_3 = \frac{0,2\cdot 1}{2\cdot 0,4} = 0,25\ \text{с}^{-1}.$$

Тоді кутове прискорення (ε_3)

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{0,2}{2\cdot 0,4} = 0,25\ \text{с}^{-2}.$$

а закон руху тіла 3 має вигляд

$$\varphi_3 = \int \omega_3 dt = \frac{1}{2R_3} = \int V_1 dt = \frac{1}{2R_3}\cdot 0,1t^2 + C_1 = 0,125t^2 + C_1\ \text{рад}.$$

Для визначення постійних інтегрування використовуємо початкові умови, де мають бути задані значення самої змінної:

п.у. t = о, $\varphi_3^{(0)} = 0 \rightarrow C_1 = 0$.

Швидкість центра мас тіла 3 запишемо як:

$$V_{C3} = \omega_3 \cdot C_3P_1 = \frac{V_1}{2R_3}\cdot R_3 = \frac{V_1}{2} = \frac{0,2t}{2} = 0,1\,t;$$

При $t = 1$ с; $V_{C3} = 0,1$, м/с;

$$a_{C3} = \frac{dV_{C3}}{dt} = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}\cdot 0,2 = 0,1\ \text{м/с}$$

.

Лінійна швидкість точки B дорівнює лінійній швидкості точки C_3 тобто $V_{C3} = V_B$.

2. Обчислюємо швидкість та прискорення точки K тіла 3. Лінійна швидкість точки K дорівнює $V_K = \omega_3 \cdot P_1K = 0,25\,t \cdot R_3\,\sqrt{2}$.

При $t = 1$ с $V_K = 0,25\cdot 0,4\cdot 1,41 = 0,141$ м/с.

Прискорення точки K визначається за теоремою про складання прискорень:

$$\bar{a}_K = \bar{a}_{C3} + \bar{a}^{\tau}_{KC3} + \bar{a}^{n}_{KC3}.$$

Т. C_3 прийнята за полюс, оскільки її прискорення невідомо. Повне прискорення точки K являє собою векторну суму прискорення полюса та прискорення даної точки при обертанні тіла навколо вісі, що проходить через цей полюс (нормальна та тангенціальна складові).

$$a^{\tau}_{KC3} = \varepsilon_3\cdot KC_3 = \varepsilon_3\cdot R_3 = 0,25\cdot 0,4 = 0,1\ \ \text{м/с}^2$$
$$a^{n}_{KC3} = \omega_3^2\cdot R_3 = 0,25^2\cdot 0,4 = 0,025\ \ \text{м/с}^2$$

На рис. 9.1.2 зображені всі вектори прискорень точок K і C_3.

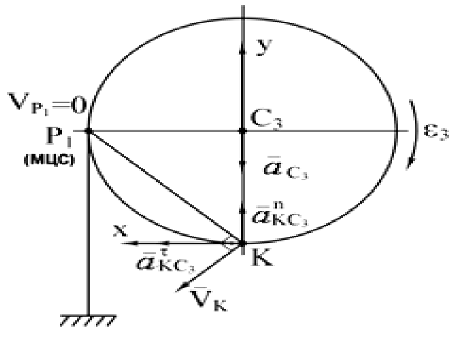


Рис. 9.1.2

Виберемо вісі координат x та y:

$$a_K = a_{C3} + a^\tau_{KC3} + a^n_{KC3};\ a_K = a_{C3} + a^\tau_{KC3} + a^n_{KC3}.$$

Проекція суми дорівнює сумі проекцій складових векторів.

На вісь x

$a_{KX} = a^\tau_{KC3} = 0{,}1$ м/с^2,

на вісь y

$a_{KY} = a^n_{KC3} - a_{C3} = 0{,}025 - 0{,}1 = -0{,}075$ м/с^2.

Тоді $a_K = \sqrt{a_{KX}^2 + a_{KY}^2} = \sqrt{0{,}1^2 + (-0{,}075)^2} = 0{,}125$ м/с^2.

3. Враховуючи закон відносного руху точки L по ободу диска 2, для заданого моменту часу t = 1 с визначимо абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки L.

$S_r = 0{,}05\pi t^2$ – закон відносного руху;

$\varphi_e = 0{,}25t^2$ – закон переносного руху.

Рух точки L по ободу диска – відносний рух S_r.

Рух точки L разом з диском 2 відносно шарнірно–нерухомої опори O_1 – переносний рух(φ_e).

При складному русі абсолютна швидкість дорівнює геометричній сумі швидкостей відносного та переносного рухів:

$$\bar V_a = \bar V_r + \bar V_e.$$

Знаходимо кінцеве положення точки L в момент часу t = 1 с, а оскільки відносний рух – обертальний, то кут β визначають так:

$$\beta = \frac{S_r}{R_2} = \frac{0{,}05\pi t^2}{0{,}2};$$

при t = 1 с: $$\beta = \frac{0{,}05\pi}{0{,}2} = \frac{\pi}{4} = 45^0.$$

Закон відносного руху $OL = 0{,}05\pi t^2$ за умовою задачі – природний, тому лінійна швидкість відносного руху:

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 0{,}1\pi t.$$

При t = 1 с $V_r = 0{,}1 \cdot 3{,}14 \cdot 1 = 0{,}314$ м/с.

Вектор лінійної швидкості V_r спрямований по дотичній до траєкторії у бік руху точки (див. рис. 9.1.3).

Переносний рух – обертальний, оскільки точка L разом з диском 2 обертається навколо опори O_1. Лінійна швидкість при обертальному русі дорівнює

$$V_e = \omega_e R_e = \omega_2 R_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 \text{ м/с}.$$

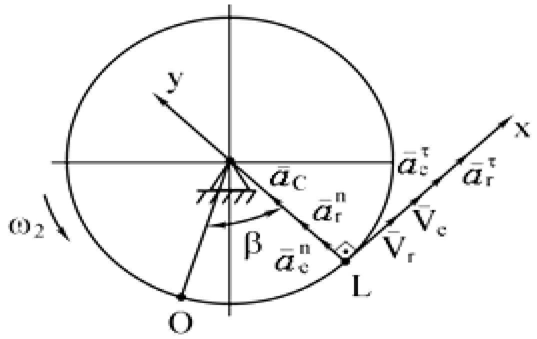


Рис.9.1.3

Абсолютне прискорення точки L дорівнює:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_\tau + \bar{V}_e;$$

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V^2{}_e + 2V_r V_e \cos\alpha} = \sqrt{0{,}314^2 + 0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}314 \cdot 0{,}1} = 0{,}414 \text{ м/с}.$$

де α − кут між векторами лінійної швидкості відносного та переносного рухів, який дорівнює нулю:

$$\alpha = 0.$$

Визначаємо абсолютне прискорення точки L.

За теоремою Коріоліса абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: відносного, яке характеризується зміною відносної швидкості точки у відносному русі; переносного, що характеризується зміною переносної швидкості в переносному русі, та коріолісового, що характеризується зміною відносної швидкості точки в переносному русі та зміною переносної швидкості точки у відносному русі:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c .$$

Оскільки відносний і переносний рухи обертальні, то їх прискорення дорівнюють векторній сумі тангенціального та нормального складових відповідно:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n, \qquad \bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n .$$

Відносний рух за умовою задачі − природний, тому:

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = 0,1\pi = 0,314 \text{ м/с}^2;$$

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{0,314^2}{0,2} = 0,5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot R_e = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot R_e = \omega_2^2 \cdot R_2 = (0,5)^2 \cdot 0,2 = 0,05 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення Коріоліса дорівнює подвійному векторному добутку кутової швидкості переносного руху точки на відносну швидкість точки за модулем на sin α між ними:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e x \cdot \bar{V}_r \quad .$$

Спрямований вектор a_c перпендикулярний площині, яка проходить через вектори ω_e та V_r у той бік, звідки найменше суміщення ω_e та V_r , що воно проходить проти ходу годинникової стрілки. Вектор кутової швидкості лежить на вісі обертання (вісь вектора дивиться на нас).

Кут α між вектором кутової швидкості та вектором лінійної швидкості відносного руху приймаємо 90^0. Тоді

$$a_C = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\omega_e, V_r) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,314 \cdot 1 = 0,314 \text{ м/с}^2.$$

Виберемо координаті вісі та спроектуємо на них вектори всіх прискорень на вісь x:

$$a_{ax} = a_r^{\tau} + a_e^{\tau} = 0,314 + 0,1 = 0,414 \text{ м/с}^2;$$

на вісь y: $$a_{ay} = a_r^n + a_e^n + a_c = 0,5 + 0,05 + 0,314 = 0,864 \text{ м/с}^2.$$

Абсолютне прискорення точки L визначається за формулою

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{(0,414)^2 + (0,864)^2} = 0,958 \text{ м/с}^2.$$

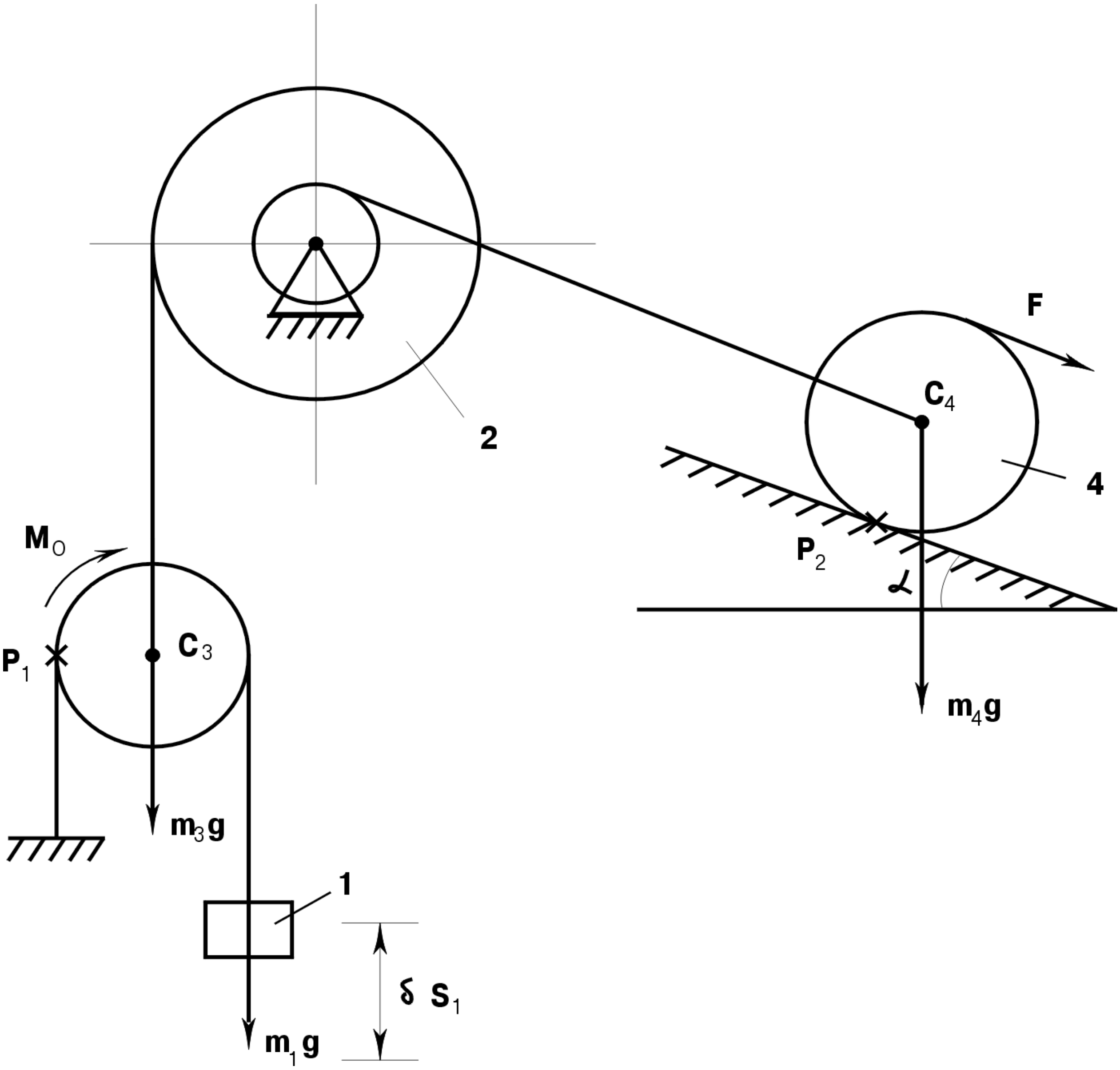


Рис. 9.2.1

Умови задачі

Дано: F = 40 Н; $б_{ТР.К.}$ = 0,01 м; m_1 = 100 кг; m_2 =20 кг; m_3 = 50 кг; m_4 = 20 кг; $\alpha = 30^0$; $M_о$ = 100 Н·м.

1. Застосувавши теорему про зміну кінетичної енергії системи, визначити швидкість тіла 1 у той момент часу, коли шлях S_1, що воно пройшло, буде дорівнювати 1 м. Обчислити прискорення a_1.

Теорема про зміну кінетичної енергії має вигляд

$$T - T_o = \sum A(F_{ki}^{зовнішн}) + \sum A(F_{ki}^{внут}),$$

Де $\sum A\ (F_{ki}^{внутр}) = 0$; $T_о = 0$, оскільки кінетична енергія квадратична функція, яка залежить від швидкості в стані спокою, тобто $V_о = 0$.

Тіло 1 здійснює поступовий рух, його кінетична енергія див. рис. 9.2.2

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2.$$

Тіло 3 здійснює плоскопаралельний рух, його кінетичну енергію можна записати у вигляді двох доданків, див. рис. 9.2.2:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^2 + \frac{1}{2} J_{Z3} \cdot \omega_3^2,$$

де V_{C3} − лінійна швидкість центра тіла−3, ω_3 − кутова швидкість цього тіла; J_{Z3} − момент інерції тіла 3 відносно центральної вісі.

Оскільки механічна система з ідеальними в’язями, то лінійна швидкість центра мас тіла 1 дорівнює лінійній швидкості точки A на обід тіла 3 $V_A = V_1$, у той самий час тіло 3 здійснює міттєвий обертальний рух відносно нерухомої вісі, що проходить через миттєвий центр швидкостей (м.ц.ш.) P_1, тобто

$$V_A = \omega_3 \cdot P_1A = \omega_3 \cdot 2R_3, \text{ і}$$

$$V_1 = \omega_3 \cdot 2R_3.$$

Звідки кутова швидкість

$$\omega_3 = \frac{V_1}{2R_3}.$$

Лінійна швидкість центра мас тіла 3 V_{C3} визначається як добуток кутової швидкості тіла ω_3 на радіус R_3, а саме

$$V_{C3} = \omega_3 \cdot C_3P = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{V_1 R_3}{2R_3} = \frac{V_1}{2}.$$

Тоді осьовий момент інерції суцільного диска

$$J_{Z3} = \frac{m_3 R_3^2}{2}, \text{ а}$$

кінетична енергія

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^2 + \frac{1}{2} j_{Z3} \cdot \omega_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \frac{V_1^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \cdot \frac{V_1^2}{4R_3^2} = \frac{1}{2} V_1^2 \cdot \frac{3m_3}{8}.$$

Тіло 2, що закріплене на шарнірно−нерухомій опорі, здійснює обертальний рух, а його кінетична енергія, див. рис. 9.2.2

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{Z2} \omega_2^2,$$

де J_{Z2} – вісівий момент інерції, який визначається так:

$J_{Z2} = m_2 i_2^2$, оскільки за умовами радіус інерції i_2 дорівнює малому радіусу шківа 2: ($r_2 = i_2$), то, $J_{Z2} = m_2 r_2^2$.

Лінійна швидкість точки B на ободі тіла 2 дорівнює лінійній швидкості центра мас тіла 3 ($V_{C3} = V_B$) , то у той самий час при обертанні тіла 2 $V_B = \omega_2 R_2$, $V_{C3} = \omega_2 R_2$, тому кутова швидкість $\omega_2 = \frac{V_{C3}}{R_2} = \frac{V_1}{2R_2}$, а кінетична енергія тіла 2

$$T = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \cdot \frac{V_1^2}{4R_1^2}.$$

Тіло 4 здійснює плоскопаралельний рух, його кінетична енергія, див. рис. 9.2.2

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \cdot V_{C4}^2 + \frac{1}{2} J_{Z4} \cdot \omega_4^2,$$

де V_{C4} − швидкість центру мас тіла 4; ω_4 −його кутова швидкість; J_{Z4}−момент інерції тіла 4 відносно центральної вісі.

Осьовий момент інерції суцільного диска:

$$J_{Z4} = \frac{m_4 R_4^2}{2}.$$

Оскільки механічна система, що розглядається, має ідеальні в’язі, то лінійна швидкість точки D дорівнює лінійній швидкості центра мас тіла 4, тобто

$$V_D = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{V_1}{2R_2} \cdot r_2 \text{ або}$$

$$V_D = V_{C4} = \frac{V_1 r_2}{2R_2}. .$$

З іншого боку, при коченні тіла 4 без ковзання

$$V_{C4} = \omega_4 \cdot C_4 P_2 = \omega_4 \cdot R_4 \text{, а}$$

як висновок

$$\omega_4 = \frac{V_1 r_2}{2R_2 R_4}.$$

Кінетична енергія тіла 4 визначається як

$$T_4 = \frac{1}{2} m_2 \cdot \frac{V_1^2 r_2^2}{4R_2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_4 R_4^2}{2} \cdot \frac{V_1^2 r_2^2}{4R_2^2 \cdot R_4^2} = \frac{1}{2} V_1^2 \cdot \frac{3m_4 r_2^2}{8R_2^2} \text{, а}$$

кінетична енергія системи визначається як сума енергій усіх тіл:

$$T_{сист} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{1}{2} V_1^2 (m_1 + m_2 \frac{r_2^2}{4R_2^2} + \frac{3m_3}{8} + \frac{m_4 3r_2^2}{8R_2^2}) = \frac{1}{2} V_1^2 \cdot M^{пр}.$$

де вираз, що стоїть у дужках, позначимо через $M^{нав}$ (наведена маса).

Кінетична енергія системи являє собою половину добутку квадрата лінійної швидкості центра мас тіла 1 на приведену масу.

При визначенні суми робіт зовнішніх сил, що прикладені до системи, враховуємо, що робота постійної сили дорівнює добутку сили на переміщення точки її прикладення і на косинус кута між векторами сили і переміщення:

$A\,(m_1 g) = m_1 g\, S_1 \cos 0^0 = m_1 g \cdot S_1 \cdot 1 = m_1 g\, S_1$;

$\mathrm{A\,(m_3g) = m_3g \cdot S_{C3} \cos 0^0 = m_3g \cdot S_{C3} \cdot 1}$.

Оскільки переміщення $S_A = S_1$, то переміщення центра мас тіла 3

$$S_{C3} = \frac{S_1}{2},$$

тобто

$$A(m_3 g) = m_3 g \frac{S_1}{2}.$$

Робота постійного моменту

$A\,(M) = \pm M \cdot \varphi$,

де φ − кут повороту тіла, який визначається як співвідношення довжини шляху дуги до радіуса. Робота береться зі знаком «+» , якщо напрямок моменту і повороту тіла співпадають.

$$A(M_0) = M_o \cdot \varphi_3 = M_o \cdot \frac{S_A}{AP} = M_o \cdot \frac{S_1}{2R_3}.$$

До тіла 4 прикладено: вага котка та нормальна реакція поверхні, яка перпендикулярна до нахиленої площини та зміщена у бік руху на відстань $\delta_{\text{гр.к.}}$ Таким чином, реакція N_4 дорівнює проекції сили тяжіння на вісь y, утворюючи з нею пару, момент якої має назву моменту опору коченню:

$$M_{\text{с.к.}} = N_4 \cdot \delta_{\text{ТР.К.}} = m_4 g \cos\alpha \cdot \delta_{\text{ТР.К.}}.$$

Робота моменту опору коченню визначається за формулою

$$A(M_{C.K}) = -M_{C.K.} \cdot \varphi_4 = -m_4 g \cos\alpha \cdot \delta_{TP.K.} \cdot \frac{S_{C4}}{R_4} =$$

$$= -m_4 g \cos\alpha \cdot \delta_{TP.K.} \cdot \frac{S_1 r_2}{2R_2 R_4};$$

де S_{C4} розраховується таким чином:

$$S_A = S_1: \qquad S_{C3} = \frac{S_1}{2} = S_B: \qquad \frac{S_B}{R_2} = \frac{S_Д}{r_2}:$$

звідки

$$S_Д = \frac{S_B r_2}{R_2} = \frac{S_1 r_2}{2R_2}; \qquad S_Д = S_{C4} = \frac{S_1 r_2}{2R_2};$$

Тоді робота складової сили ваги

$$A(m_4 g \cdot \sin\alpha) = m_4 g \cdot \sin\alpha \cdot S_{C4} \cdot \cos 180^0 = -m_4 g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{S_1 r_2}{2R_2},$$

а робота постійної сили F

$$A(F) = F \cdot S_F \cdot \cos 180^0 = -F \cdot S_F$$

При цьому, враховуючи переміщення S_F , бачимо, що залежність між переміщеннями буде такою самого, як і між відповідними швидкостями:

$$V_F = \omega_4 \cdot FP_2 = \frac{V_1 \cdot r_2 \cdot 2R_4}{2R_2 R_4} = \frac{V_1 r_2}{R_2};$$

Тоді

$$S_F = \frac{S_1 r_2}{R_2},$$

а

$$A(F) = -F \cdot \frac{S_1 r_2}{R_2}.$$

Відомо, що сума робіт зовнішніх сил визначається складанням робіт усіх сил:

$$\sum A(F_{ki}^{внеш}) = S_1(m_1 g + \frac{m_3 g}{2} + \frac{M_o}{2R_3} - m_4 g \cdot \cos\alpha \cdot \delta_{ТР.К.} \cdot \frac{r_2}{2R_2 R_4} -$$

$$- m_4 g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{r_2}{2R_2} - F\frac{r_2}{R_2}) = S_1 \cdot Z,$$

де Z – вираз, що стоїть у дужках.

Таким чином, теорема про зміну кінетичної енергії прийняла такий вигляд:

$$\frac{1}{2}V_1^2 \cdot M^{ПР} = S_1 \cdot Z.$$

Звідки шукана лінійна швидкість центра мас тіла 1

$$V_1 = \sqrt{\frac{2S_1 \cdot Z}{M^{ПР}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot \left(100 \cdot 9{,}8 + \frac{50 \cdot 9{,}8}{2} + \frac{100}{2 \cdot 0{,}4} - 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{0{,}4R_2}{2R_2 \cdot 0{,}1} - 40 \cdot \frac{0{,}4R_2}{R_2}\right)}{100 + 20 \cdot \frac{0{,}4^2 R_2^2}{4R_2^2} + \frac{3 \cdot 50}{8} + 20 \cdot \frac{3 \cdot 0{,}4^2 \cdot R_2^2}{8R_2^2}}} = 4{,}7 \text{ м/с}.$$

Диференціюємо вираз

$$\frac{1}{2}V_1^2 \cdot m^{нав} = S_1 \cdot Z;$$

за часом і маємо:

$$\frac{1}{2} \cdot 2V_1 \cdot M^{нав}\frac{dV_1}{dt} = Z \cdot \frac{dS_1}{dt};$$

$$M^{нав} \cdot a_1 = Z;$$

або

$$a_1 = \frac{Z}{M^{нав}}.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо: a_1 = 11,01 м/с^2.

2.2. Використовуючи принцип Даламбера, знайти натяг нитки в перерізі I–I.

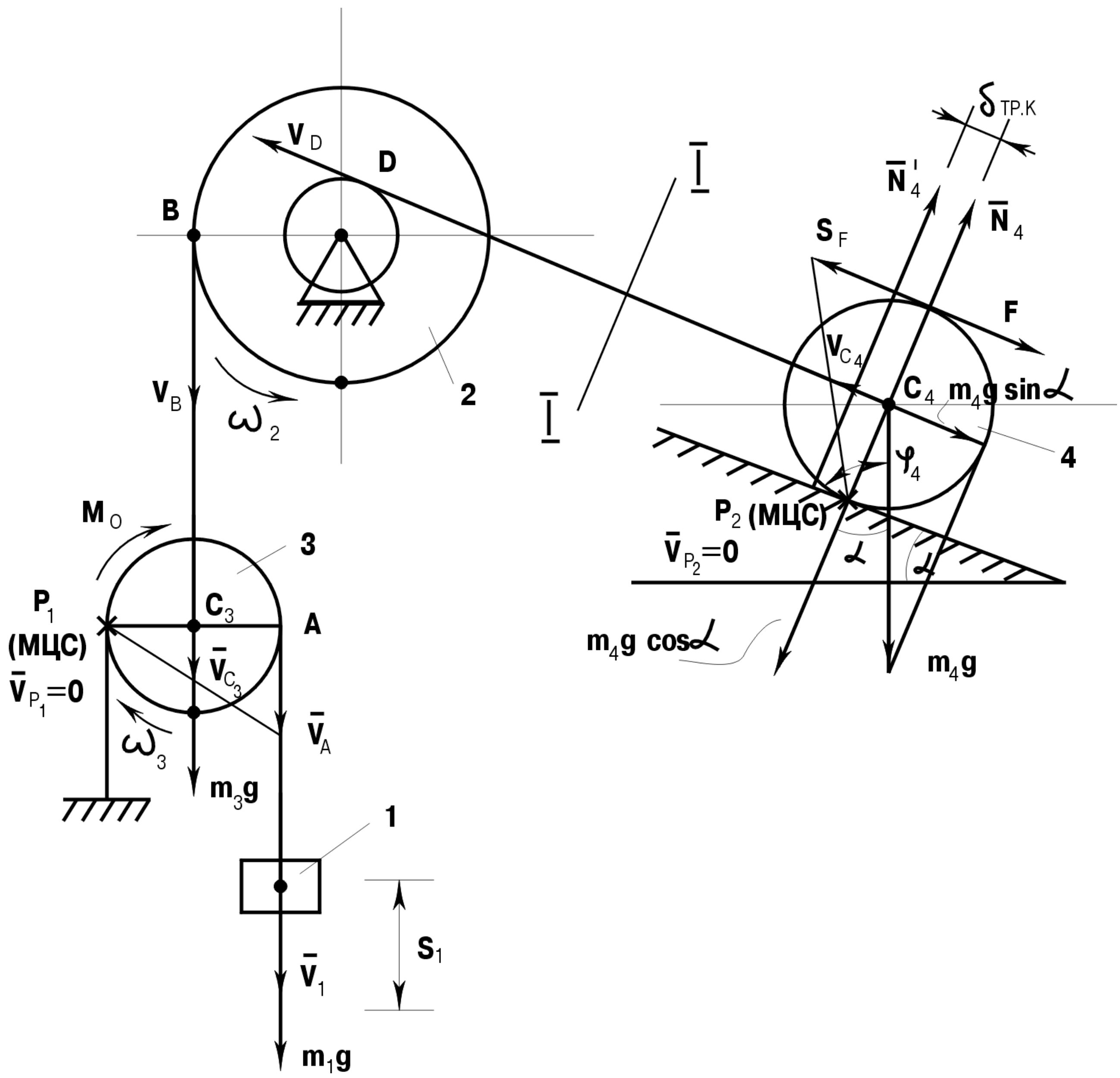


Рис. 9.2.2

Згідно з принципом Даламбера, прикладемо до тіла 4, окрім активних силових факторів m_4g, F, $M_{с.к.}$, також силу інерції F_4^4 і момент інерції M_4^4, величини яких:

$$F_4^{\gamma} = m_4 \cdot a_{C4} = m_4 \cdot \frac{a_1 r_2}{2R_2};$$

$$M_4^{\gamma} = J_{Z4} \cdot \varepsilon_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2} \cdot \frac{a_{C4}}{R_4} = \frac{m_4 a_1 R_4 r_2}{2R_2}.$$

Прикладені зовнішні сили та сили інерції утворюють зрівноважувальну систему сил. Складемо для цієї плоскої системи тіл рівняння рівноваги (вісі координат спрямовані довільно):

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad T_{1-1} - F - m_4 g \cdot \sin\alpha - F_4^{\gamma} = 0;$$

$$\sum F_{Ky} = 0; \qquad N_4 - m_4 g \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$T_{1-1} = F + m_4 g \cdot \sin\alpha + m_4 \frac{a_1 r_2}{2R_2} = 40 + 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot \frac{10{,}86 \cdot 0{,}4R_2}{2R_2} = 181{,}44.$$

2.3. Застосовуючи принцип можливих переміщень, розрахувати гальмівний момент M_T, що прикладений до шківа 2, здатного зупинити систему.

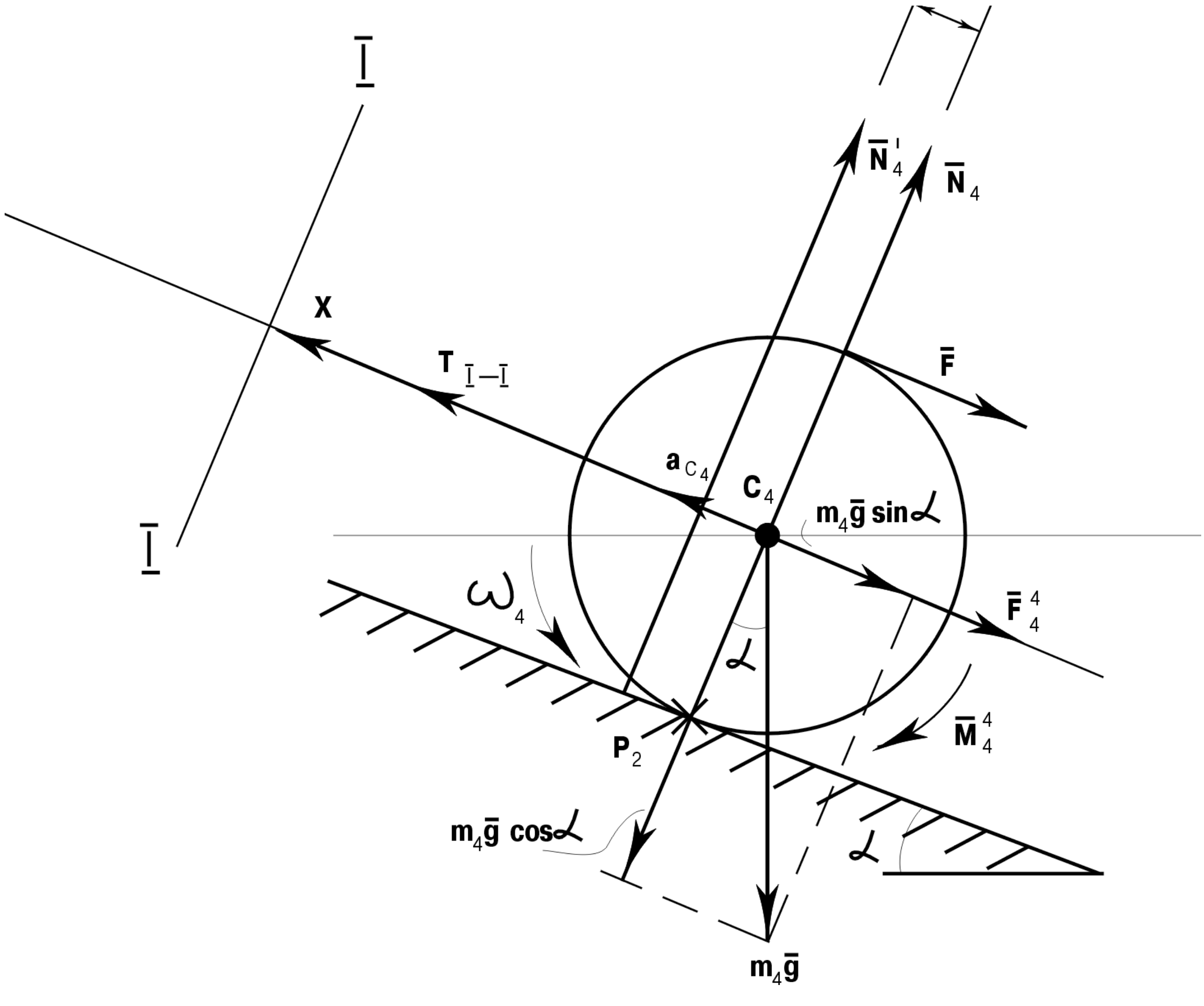


Рис. 9.2.3

Плоска механічна система має один степінь вільності, оскільки має одне незалежне можливе переміщення. Для розв`язання поставленої задачі необхідно надати механізму можливе переміщення, як суму елементарних робіт усіх діючих активних сил та пар на цьому переміщенні і прирівняти її до нуля. Після цього необхідно виразити усі елементарні переміщення, які увійшли у складене рівняння, через яке-небудь одне та розрахувати шуканий момент.

Для розрахунку гальмівного моменту використовуємо вираз, що дозволяє визначати принцип можливих переміщень:

$$\sum_{K=1}^{n} \delta A_K^a = 0,$$

де $\delta A^а$ – елементарна робота K–ї активної сили на відповідному переміщенні точки прикладення цієї сили.

Надамо системі можливе переміщення та позначимо при цьому $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$, $\delta\varphi_4$ – елементарні повороти шківів 2, 3, 4 відповідно, а δS_1, δS_{C3}, δS_4,– елементарні переміщення тіла 1, 3, 4.

Система має один степінь вільності, тому задамо одне незалежнне можливе переміщень δS_1. Установимо залежності переміщень $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$, $\delta\varphi_4$, δS_{C3}, δS_{C4}, δS_1від $\delta S_,$ та запишемо їх у вигляді таблиці 9.2

Таблиця 9.2

о	δS_A	δS_{C3}	$\delta S_В$	$\delta S_Д$	δS_{C4}	δS_F	$\delta\varphi_2$	$\delta\varphi_4$	$\delta\varphi_3$
	δS_1	$\frac{\delta S_A}{2} = \frac{\delta S_1}{2}$	$\frac{\delta S_1}{2}$	$\frac{\delta S_B}{R_2} = \frac{\delta S_Д}{r_2}$ $\delta S_Д = \frac{\delta S_1 r_2}{R_2}$	$\frac{\delta S_1 r_2}{2R_2}$	$2\delta S_{C4} = \frac{\delta S_1}{R_2}$	$\frac{\delta S_B}{R_2} = \frac{\delta S_1}{2R_2}$	$\frac{\delta S_{C4}}{R_4} = \frac{\delta S_1 r_2}{2R_2R_4}$	$\frac{\delta S_A}{2R_3} = \frac{\delta S_1}{2R_3}$

Складемо рівняння

$$\begin{aligned} & m_1 g \cdot \delta S_1 + m_3 g \cdot \delta S_{C3} + M_0 \delta\varphi_3 - M_T \delta\varphi_2 - M_{CK} \cdot \delta \cdot \varphi_4 - F \cdot \delta \cdot S_F - \\ & - m_4 g \cdot \sin\alpha \cdot \delta S_4 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Враховуючи залежності між можливими переміщеннями, що записані в табл. 9.2, вираз (1) набуває вигляду:

$$m_1 g\cdot\delta S_1 + m_3 g\,\frac{\delta S_1}{2} + M_O\,\frac{\delta S_1}{2R_3} - M_T\,\frac{\delta S_1}{2R_2} - m_4 g\cdot\cos\alpha\cdot\delta_{\text{ТР.К}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\delta S_1 r_2}{2R_2 R_4} - F\,\frac{\delta S_1}{R_2} - m_4 g\cdot\sin\alpha\cdot\frac{\delta S_1 r_2}{2R_2} = 0.$$

Враховуючи загальний множник δS_1, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} m_1 g + \dfrac{m_3 g}{2} + \dfrac{M_O}{2R_3} - \dfrac{M_T}{2R_2} - m_4 g\cdot\cos\alpha\cdot \\ \cdot\delta_{TP.K.}\,\dfrac{r_2}{2R_2R_4} - \dfrac{F}{R_2} - m_4 g\cdot\sin\alpha\,\dfrac{r_2}{2R_2} \end{pmatrix}\delta S_1 = 0.$$

Прирівнюючи до нуля вираз який стоїть у дужках, розрахуємо гальмівний момент за формулою:

$$M_T = 2R_2\left(-m_1 g - \frac{m_3 g}{2} - \frac{M_O}{2R_3} + m_4 g\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\delta_{\text{ТР.К}} r_2}{2R_2R_4} + \right.$$

$$\left. + \frac{F}{R_2} + m_4 g\cdot\sin\alpha\,\frac{r_2}{2R_2}\quad\right) = 2\cdot 0,2\cdot\left(-100\cdot 9,8 - \frac{50\cdot 9,8}{2} - \right.$$

$$-\frac{100}{2\cdot 0,4} + 20\cdot 9,8\cdot 0,866\cdot\frac{0,01\cdot 0,4R_2}{2\cdot 0,1\cdot R_2} + \frac{40}{0,2} + 20\cdot 9,8\cdot 0,5\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{0,4R_2}{2R_2}\quad\right) = -408,8\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

$M_{\text{Т}}$ = − 408,8 Н·м, де знак “–“ вказує на те, що дана механічна система з ідеальними в’язями буде зупинена за допомогою гальмівного моменту.

$M_{\text{Т}}$ = 408,8 Н·м., що прикладена проти ходу годинникової стрілки (апріорі напрямок $M_{\text{Т}}$ вибраний невірно).

Скласти загальне рівняння динаміки для системи, що розглядається, визначити прискорення тіла *1* та порівняти з результатом, який отриманий в п.1.

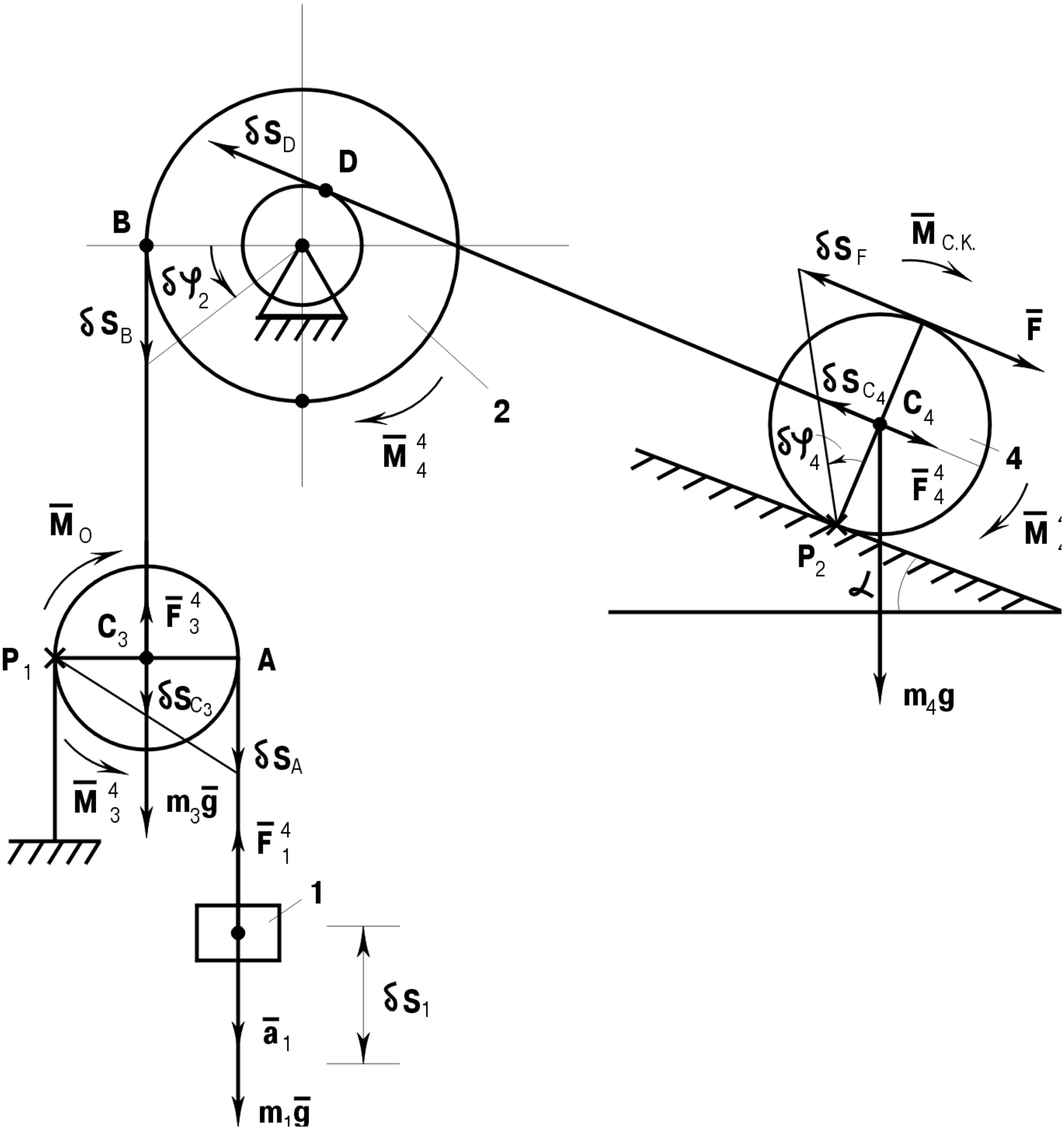


Рис. 9.2.4

Розглянемо рух даної механічної системи, яка має один степінь вільності. В’язі, що діють на цю систему, ідеальні. Для визначення прискорення тіла 1 (a_1) застосуємо загальне рівняння динаміки, див. рис. 9.2.4:

$$\sum_{K=1}^{n} \delta A_K^a + \sum_{K=1}^{n} \delta A_K^n = 0, \qquad (2)$$

де $\sum \delta A_К^а$ – сума елементарних робіт активних сил; $\delta A_К^п$ – сума елементарних робіт сил інерції.

Задавши напрямок прискорення центра мас тіла 1 (a_1), на рис. 9.2.4 розглянемо окрім активних силових факторів також сили інерції F_1^n, F_3^n, F_4^n та моменти інерції $M_2^п$, $M_3^п$, $M_4^п$, які розраховуються так:

$$F_1^n = m_1 a_1 ;$$

$$F_3^n = m_3 \cdot a_{C3} = m_3 \frac{a_1}{2} ;$$

$$F_4^n = m_4 \cdot a_{C4} = m_4 \frac{a_1 r_2}{2R_2} ;$$

$$M_3^n = J_{Z3} \cdot \varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} \cdot \frac{a_1}{2R_2} = \frac{m_3 a_1 R_3}{4} ;$$

$$M_2^n = J_{Z2} \cdot \varepsilon_2 = m_2 r_2^2 \cdot \frac{a_B}{R_2} = m_2 r_2^2 \cdot \frac{a_1}{2R_2} ;$$

$$M_4^n = J_{Z4} \cdot \varepsilon_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2} \cdot \frac{a_{C4}}{R_4} = \frac{m_4 R_4 \cdot a_1 r_2}{2 \cdot 2R_2} = \frac{m_4 a_1 R_4 r_2}{4R_2} .$$

де J_{Z4}, J_{Z3} і J_{Z2} – осьові моменти інерції відповідних тіл;

ε_2, ε_3, ε_4 – кутові прискорення тіл 2, 3, 4 відповідно;

a_1, a_{C3}, a_{C4} – лінійні прискорення тіла 1 та центрів мас тіл 3 і 4;

$m_1 g$; $m_3 g$; $m_4 g$ – вага відповідного тіла.

Надаємо системі можливе переміщення та, використовуючи рівняння (1), отримаємо:

$$\begin{aligned} & m_1 g \cdot \delta S_1 + m_3 g \cdot \delta S_{C3} + M_O \delta\phi_3 - m_4 g \cdot \sin\alpha \cdot \delta S_{C4} - F \cdot \delta S_F - \\ & - M_{CK.} \delta\phi_4 - F_1^n \delta S_1 - F_3^n \delta S_{C3} - M_3^n \delta\phi_2 - F_4^n \delta S_{C4} - M_4^n \delta S_{C4} = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Виразимо усі можливі переміщення через δS_1 та запишемо отримані залежності у табл. 9.3

Таблиця 9.3

δS_1	δS_A	δS_{C3}	δS_B	$\delta S_Д$	δS_{C4}	δS_F	$\delta \varphi_3$
–	δS_1	$\frac{\delta S_A}{2} = \frac{\delta S_1}{2}$	$\delta S_{C3} = \frac{\delta S_1}{2}$	$\frac{\delta S_Д}{r_2} = \frac{\delta S_B}{R_2}$; $\delta S_Д = \frac{\delta S_1 r_2}{2R_2}$	$\delta S_Д = \frac{\delta S_1 r_2}{2R_2}$	$2\delta S_{C4} = \frac{\delta S_1 r_2}{R_2}$	$\frac{\delta S_A}{2R_3} = \frac{\delta S_1}{2R_3}$
$\delta \varphi_2$	$\delta \varphi_4$	a_1	a_{C3}	a_B	$a_Д$	a_{C4}	–
$\frac{\delta S_B}{R_2} = \frac{\delta S_1}{2R_2}$	$\frac{\delta S_{C4}}{R_4} = \frac{\delta S_1 r_2}{2R_2 R_4}$		$\frac{a_1}{2}$	$\frac{a_1}{2}$	$\frac{a_1 r_2}{2R_2}$	$\frac{a_1 r_2}{2R_2}$	–

Можливі переміщення з таблиці 9.3 підставимо в (2) та запишемо :

$$m_1 g\delta S_1 + m_3 g\frac{\delta S_1}{2} + M_O\frac{\delta S_1}{2R_3} - m_4 g\cdot\sin\alpha\frac{\delta S_1 r_2}{2R_2} - F\frac{\delta S_1 r_2}{2R_2} -$$

$$-m_4 g\cdot\cos\alpha\cdot\delta_{TP.K.}\frac{\delta S_1 r_2}{2R_2 R_4} = m_1 a_1\delta S_1 + m_3\frac{a_1}{2}\cdot\frac{\delta S_1}{2} + m_3\frac{a_1 R_3}{4}\cdot$$

$$\cdot\frac{\delta S_1}{2R_3} + m_2 r_2^2\frac{a_1}{2R_2}\cdot\frac{\delta S_1}{2R_2} + M_4\frac{a_1 r_2}{2R_2}\cdot\frac{\delta S_1 r_2}{2R_2} + \frac{m_4 R_4 r_2 a_1}{4R_2}\cdot\frac{\delta S_1 r_2}{2R_2 R_4};$$

$$\delta S_1\left(m_1 g + \frac{m\ g}{2} + \frac{M_O}{2R_3} - m_4 g\sin\alpha\frac{r_2}{2R_2} - F\frac{r_2}{R_2} - m_4 g\cos\alpha\delta_{TP.K.}\frac{r_2}{2R_2 R_4}\right) =$$

$$= a_1\delta S_1\left(m_1 + \frac{m_3}{4} + \frac{m_3}{8} + m_2\frac{r_2^2}{4R_2^2} + m_4\frac{r_2^2}{4R_2^2} + m_4\frac{r_2^2}{8R_2^2}\right).$$

Оскільки $\delta S_1 \neq 0$, то:

$$a_1 = \frac{m_1 g + \frac{m_3 g}{2} + \frac{M_O}{2R_3} - m_4 g \sin\alpha \frac{r_2}{2R_2} - F\frac{r_2}{R_2} - m_4 g \cos\alpha \delta_{TP.K.} \frac{r_2}{2R_2 R_4}}{m_1 + \frac{3m_3}{8} + m_2 \frac{r_2^2}{4R_2^2} + m_4 \frac{3r_2^2}{8R_2^2}} =$$

$$= \frac{100 \cdot 9{,}8 + \frac{50 \cdot 9{,}8}{2} + \frac{100}{2 \cdot 0{,}4} - 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \frac{0{,}4R_2}{2R_2} - 40\frac{0{,}4R_2}{R_2} - 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}01 \frac{0{,}4R_2}{2R_2 \cdot 0{,}1}}{100 + \frac{3 \cdot 50}{8} + 20\frac{0{,}4^2 \cdot R_2^2}{4R_2^2} + 20\frac{3 \cdot 0{,}4^2 \cdot R_2^2}{8R_2^2}} =$$

$$= 10{,}86.\ \text{м/ с}$$

За допомогою рівняння Лагранжа другого роду визначаємо прискорення тіла 1, та складаємо рівняння його руху

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \overset{\circ}{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

де T – кінетична енергія механічної системи;

g – узагальнена координата (рекомендуємо прийняти як узагальнену координату переміщення центра мас тіла 1 $S_1 = g$);

g – узагальнена швидкість (швидкість тіла 1 $V_1 = g$);

Q – узагальнена сила, що відповідає до прийнятій узагальненій координаті.

Визначимо кінетичну енергію системи та виразимо її через узагальнену швидкість $\overset{\circ}{q}$:

$$T_1 = \frac{m_1 \overset{\circ}{g}{}^2}{2}; \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \frac{\overset{\circ}{q}{}^2}{4R_2^2};$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\overset{\circ}{q}{}^2 \cdot \frac{3m_3}{8}; \qquad T_4 = \frac{1}{2}\overset{\circ}{q}{}^2 \frac{3m_4 r_2^2}{R_2^2};$$

$$T_{СИСТ.} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{q}{}^2\left(m_1 + \frac{r_2^2 m_2}{4R_2^2} + \frac{3m_3}{8} + \frac{3m_4 r_2^2}{R_2^2}\right) = \frac{1}{2}\overset{\circ}{q}{}^2 M^{нав}.$$

Розрахуємо похідні, що входять у рівняння Лагранжа. Вона має вигляд:

$\frac{\partial T}{\partial q} = 0$. оскільки. $T = f(\overset{\circ}{q})$ та не залежить від q, то

$$\frac{\partial T}{\partial \overset{\circ}{q}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overset{\circ}{q} \cdot M^{нав} = \overset{\circ}{q} M^{нав}:$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overset{\circ}{q} M^{нав}\right) = M^{нав} \cdot \overset{\circ\circ}{q}.$$

Узагальнену силу Q можна обчислити як коефіцієнт при варіації узагальненої координати у виразі можливої роботи, призводячи її до вигляду:

$$\delta A = Q \cdot B_q.$$

Механічній системі, що знаходиться у проміжному стані, який визначається поточним станом узагальненої координати q, надаємо можливе переміщення δq.

Можливі переміщення можуть мати також назву нескінченно малих переміщень, що допускаються в’язями у даний момент часу. Нескінченно малі вектори можливих переміщень окремих точок системи мають напрямок векторів швидкостей цих точок. Сума можливих робіт усіх діючих на механічну систему сил може бути подана у вигляді скалярних добутків векторів сил на вектори можливих переміщень точок їх прикладення:

$$\delta A = m_1 \bar{g} \cdot \delta q + m_3 \bar{g} \cdot \delta S_{C3} + \bar{M}_O \, \delta\phi_3 - m_4 \bar{g} \sin\alpha \cdot \delta S_{C4} - \bar{F} \, \delta S_F - \bar{M}_{CK} \cdot \delta\phi_4.$$

Виразимо можливі переміщення δS_{C3}, $\delta\varphi_3$, δS_{C4}, δS_F, $\delta\varphi_4$ через варіацію узагальненої координати δq.

Нагадаємо, що скалярний добуток двох векторів є – скалярна величина, що дорівнює добутку модулів співмножників на косинус кута між ними. Тому цей вираз можна записати так:

$$\delta A = \left(m_1 g + \frac{m_3 g}{2} + \frac{M_o}{2R_3} - m_4 g \sin\alpha \frac{r_2}{2R_2} - F \frac{r_2}{R_2} - m_4 g \cos\alpha \delta_{TPK} \cdot \frac{r_2}{2R_2 R_4} \right) \delta q .$$

Звідки

$$Q = m_1 g + \frac{m_3 g}{2} + \frac{M_o}{2R_3} - m_4 g \sin\alpha \cdot \frac{r_2}{2R_2} -$$

$$-F\frac{r_2}{R_2} - m_4 g \cos\alpha \delta_{TP.K.} \frac{r_2}{2R_2 R_4} = 100 \cdot 9{,}8 +$$

$$+\frac{50 \cdot 9{,}8}{2} + \frac{100}{2 \cdot 0{,}4} - 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{0{,}4R_2}{R_2} -$$

$$-40\frac{0{,}4R_2}{R_2} - 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}01\frac{0{,}4}{2 \cdot 0{,}1} = 1311\,\text{Н}.$$

Рівняння Лагранжа прийняло вигляд

$$\overset{\circ\circ}{q} \cdot M^{ПР} = Q.$$

Тоді отримаємо прискорення центра мас тіла 1:

$$\overset{\circ\circ}{q} = a_1 = \frac{Q}{M^{ПР}} = \frac{1311}{12{,}75} = 10{,}86 \text{ м/с}^2.$$

Лінійна швидкість центра мас цього тіла

$$\overset{\circ}{q} = V_1 = \int \frac{Q}{M^{ПР}} dt = \frac{Q}{M^{ПР}} t + C_1,$$

де C_1 – постійна інтегрування, яка знаходиться таких початкових умов:

$t = 0$, $x^{(0)} = 0$, $V^{(0)} = 0 \rightarrow C_1 = 0$.

Рівняння руху першого тіла буде мати вигляд

$$q = S_1 = \int \left(\frac{Q}{M^{ПР}} t + C_1 \right) dt = \frac{Qt^2}{2M^{ПР}} + C_1 t + C_2,$$

де $t = 0$, $x^{(o)} = 0$, $-C_2 = 0$, $S_1 = \dfrac{Qt^2}{2M^{ПР}}$.

ТМ-10

Дослідження вільних коливань механічної системи з одним степенем вільності

Приклад розв'язання задачі

Для заданої механічної системи з одним степенем вільності визначити частоту та період вільних коливань, нехтуючи силами опору та масами ниток.

За узагальнену координату взяти переміщення вантажу 1 початком відліку проложеного спокою (при статичній деформації пружини). Прийняті такі позначення: 1 – вантаж з масою m; 2 – блок або однорідний стрижень з масою m_2; 3 – блок з масою m_3; останні блоки на схемах вважати невагомими. Суцільні диски або катки радіусом R вважати однорідними. Для двоступінчастих блоків або катків вказані радіуси інерції S та співвідношення $r = 0{,}3R$, жорсткість пружини Стрижні 2 на схемах у стані рівноваги системи займають вертикальне або горизонтальне положення.

Визначити статичну деформацію пружини $\lambda_{ст}$. Розрахувати також критичне значення жорсткості пружини $C = C_{кр}$, при якому положення рівноваги системи буде нестійким. Розрахунки виконати на основі аналізу виразу коефіцієнта потенційної енергії системи та теореми Лагранжа–Дирихле.

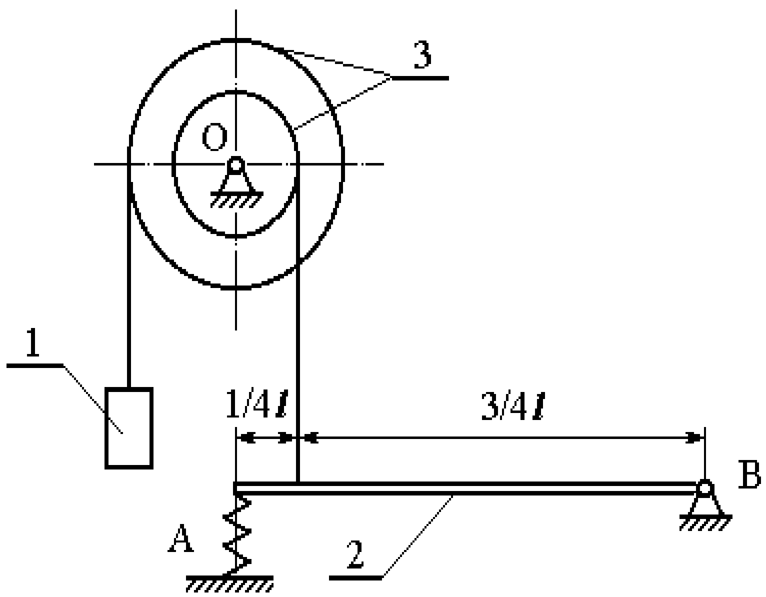


Рис. 10.1

Дано: l = 1,2 м ; m = 28 кг ; R_3=4r_3=0,2 ; m_2 = 20 кг; ρ = 0,3 м; m_3 = 12 кг; C = 1400 Н/м. Знайти k, T, $C_{кр}$. Отримати рівняння руху механічної системи при таких початкових умов: t=0 1 і q_{10} =0,2 і q_{10} =2 м/с та побудувати його графік.

Розв`язок

У заданому на рис. 10.1 положенні механічна система знаходиться у стані рівноваги. При цьому пружива вже продеформована (стиснени або розтягнена) на величину $\lambda_{ст}$, яку ми знайдемо пізніше з виразу узагальненої сили, але для перевірки можна знайти його з розділу «Статика» відомим засобом.

Розріжемо подумки нитку, що єднає тіла 2 та 3, зусилля в неї позначимо S_{23} і S_{32} відповідно. (рис. 10.2)

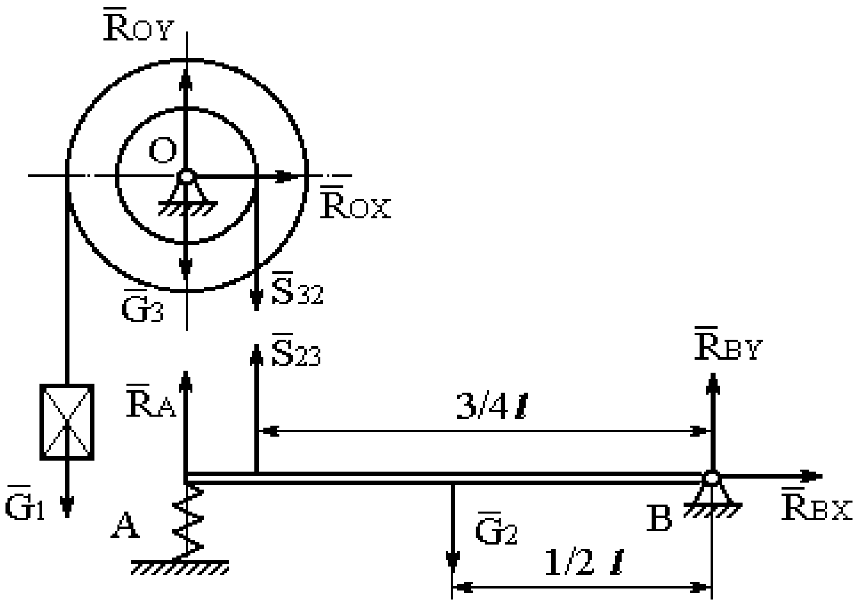


Рис. 10.2

Розглядаючи рівновагу тіл 1 і 3, можемо скласти три умови рівноваги:

$$1)\ \sum F_{IX} = 0;$$

$$2)\ \sum F_{IY} = 0; \qquad (1)$$

$$3)\ \sum M_{()}\ (F_I) = 0.$$

Але, оскільки нас не цікавлять складові реакції опори O – R_{OX}, R_{OY}, а тільки S_{32} складемо одне рівняння рівноваги $\sum M_{(0)}(F_I) = 0$, яке містить одну невідому S_{32}.

$$\sum M_{(0)}(F_I) = G_1 \cdot R_3 - S_{32} \cdot r_3 = 0.$$

Звідки

$$S_{32} = \frac{G_1 \cdot R_3}{r_3} = 4m_1g = 4 \cdot 28 \cdot 9{,}81 = \text{Н}.$$

За законом Ньютона зусилля $S_{23} = -S_{32}$, тобто дорівнює за величиною і напрямком протилежну S_{32} та прикладено до тіла 2 (див. рис.10.2).

Для сил, що прикладені до тіла 2 $\left(\bar{R}_A, \bar{S}_{23}, \bar{G}_2, \bar{R}_{BY}, \bar{R}_{BX}\right)$, можемо скласти три умови рівноваги статики (1), але нас цікавить тільки сила $R_{A,}$ тому для її визначення складемо одне рівняння моментів відносно т.В:

$$\sum M_{(B)}(F_I) = -R_A \cdot l - S_{23} \cdot 3/4l + G_2 \cdot l/2 = 03$$

Звідки

$$R_A = G_2 \cdot 1/2 - S_{23} \cdot 3/4 = m_2 g \cdot 1/2 - S_{23} \cdot 3/4 = 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 -$$

$$= -1 \text{ Н}.$$

Від`ємне значення R_A свідчить про те, що дійсний напрямок сили пружності пружини R_A протилежний тому, який зображені на рис. 10.2, як слід, пружина в стані рівноваги механічної системи розтягнута (вона прагне повернутися у недеформований стан) на величину:

$$\lambda_{CT} = \frac{|R_A|}{C} = 1400. \tag{2}$$

Для складання диференціального рівняння коливань механічної системи скористаємось рівнянням Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{\partial g_1}\right) = Q_1. \tag{3}$$

де T – кінетична енергія механічної системи;

q_1 – узагальнена координата (рекомендовано в умовах задачі прийняти в якості узагальненої координати переміщення вантажу 1, уточнимо: координата спрямована вниз від стану рівноваги (див. Рис.10. 3);

q_1 – узагальнена швидкість (швидкість вантажу 1);

Q_1 – узагальнена сила, що відповідає прийнятій узагальненій координаті.

Зобразимо механічну систему в проміжному положенні при русі, та позначимо усі сили, які на неї діють (рис.10.3.). При коливаннях вантаж 1 буде переміщуватися то вниз то на верх. Для отримання рівняння руху вантаж 1 переміщуємо у позитивному напрямку, враховуючи, що туди ж спрямована його швидкість q_1 та прискорення q_1.

Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що належать до неї, тобто

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \,. \tag{4}$$

Кінетична енергія тіла 1 при поступальному русі визначається за формулой

$$T_1 = \frac{m_1 q_1^2}{2} \,. \tag{5}$$

Кінетична енергія тіла 3 при обертальному русі

$$T_3 = \frac{J_3 \omega_3^2}{2} . \tag{6}$$

де J_3 – момент інерції блока 3 відносно вісі обертання:

$$J_3 = m_3 \rho_3{}^2 . \tag{7}$$

ω_3 − кутова швидкість тіла 3, яка розраховується через q_1 за умови, що швидкості точок ободу великого радіуса тіла 3 пов'язані з тілом 1 нерозтягненою ниткою.

$$Q_1 = \omega_3 R_3 \text{ звидки } \omega_3 = \frac{q_1}{R_3} \,. \tag{8}$$

Підставляючи вирази (7) та (8) в рівняння (6), маємо

$$T_3 = \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \rho_3^2}{2} \cdot \frac{q_1^2}{R_3^2} \,. \tag{9}$$

Кінетична енергія тіла 2 при обертальному русі навколо нерухомого шарніра B дорівнює:

$$T_2 = \frac{J_{ZB} \cdot \omega_2^2}{2} \,; \tag{10}$$

де J_{ZB}– момент інерциїї однорідного стрижня з масою m_2 та довжиною l відносно шарніру B_6

$$J_{2B} = \frac{m_2 l^2}{3}; \qquad (11)$$

ω_2 – кутова швидкість стрижня 2.

Значення ω_2 знайдемо з умови, що тіла 2 і 3 зв'язані нерозтягненою ниткою, а швидкості точок *Д* і *Е* (рис.10.3.) пов'язані співвідношенням $V_E = V_D \cos\phi_2$.

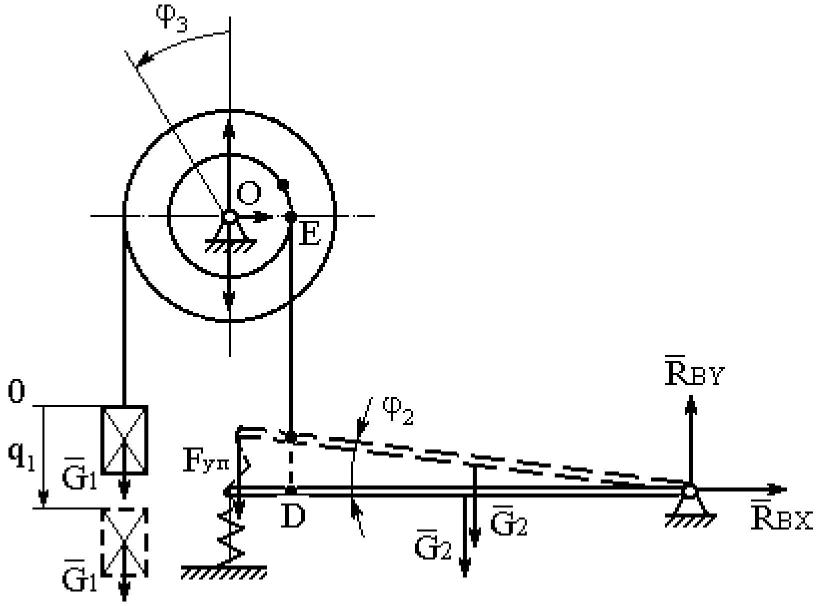


Рис. 10.3

$$V_E = \omega_3 \cdot r_3, \qquad V_Д = \omega_3 \cdot 3/4\, l. \qquad (12)$$

Отримаємо

$$\omega_2 = \frac{\omega_3 r_3}{3/4l} = \frac{\dot{q}_1 r_3}{R_3 \cdot 3/4l} = \frac{\dot{q}_1 r_3}{4r_3 \cdot 3/4l} = \frac{\dot{q}_1}{3l}.$$

Вираз (10) з урахуванням рівнянь (11) і (12) приймає такий вигляд:

$$T_2 = \frac{m_2 l_2 \cdot q_1^2}{3 \cdot 2 \cdot 9l^2} = \frac{m_2}{54} q_1. \qquad (13)$$

Підставляємо вирази для T_1, T_2, T_3 у формулу (4) та отримаємо величину кінетичної енергії механічної системи визначену через узагальнену швидкість, тобто:

$$T=\sum_{I=1}^{3} T_I=\left(m_1+\frac{m_3\rho_3^2}{R_3^2}+\frac{m_2}{27}\right)\frac{q_1^2}{2}=\frac{m_{ПР}q_1^2}{2}. \qquad (14)$$

Вираз, що стоїть у круглих дужках, має назву наведеної маси $m_{пр}$ механічної системи та розмірність виміряється в кг.

При виборі іншої узагальненої координати ми можемо б отримати інший вираз наведеної маси або наведений момент інерції (якщо узагальнена координата є кутовою). Так, якщо прийняти за узагальнену координату кут повороту тіла 3 ($q_1=\varphi_3$), то отримаємо зведений до вісі тіла 3 момент інерції механічної системи.

Обчислимо похідні, що входять у рівняння Лагранжа (3):

$\frac{\partial T}{\partial q_1}=0$, оскільки $T=f(q_1)$ та не залежить від q_1 (див. вираз (14));

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=m_{КР}\cdot q_1;$$

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)=m_{ПР}\cdot q_1. \qquad (15)$$

Узагальнену силу Q_1 в даній задачі можна обчислити двома способами:

а) як коефіцієнт при варіації узагальненої координати у виразі можливої роботи, надаючи їй вигляд :

$$бA=Q_1\cdot Бq_1; \qquad (16)$$

б) як взяту зі знаком «–» власну похідну від потенційної енергії системи за узагальненою координатою:

$$Q_1=-\frac{\partial П}{\partial q_1}. \qquad (17)$$

Перший спосіб визначення узагальненої сили є основним, другий – застосовується, коли на систему діють тільки потенційні сили (сили, робота яких залежать від стану системи, тобто сили тяжіння (ваги), магнітних полів, сили пружності), як в даному випадку.

Якщо на механічну систему, окрім потенційних, діють ще не потенційні (активні), сили тертя, моменти сил тертя, активні моменти, то вираз (17) перетворюють у рівняння Лагранжу другого роду, а для не потенційних сил отримують формулу для узагальненої сили, використовуючи (16). Тоді рівняння Лагранжа другого роду записуємо в іншому вигляді, тобто

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = Q_1. \qquad (18)$$

Коли не потенційних сил, нема тобто Q_1=0, вираз (3) або (18) запишемо в іншому вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}. \qquad (19)$$

Розглянемо спосіб визначення узагальненої сили як коефіцієнта при варіації узагальненої координати у виразі можливої роботи (16).

Механічній системі, що знаходиться в проміжному положенні, яке визначається поточним значенням узагальненої координати q_1, надаємо можливе переміщення δq_1 (рис. 10.4).

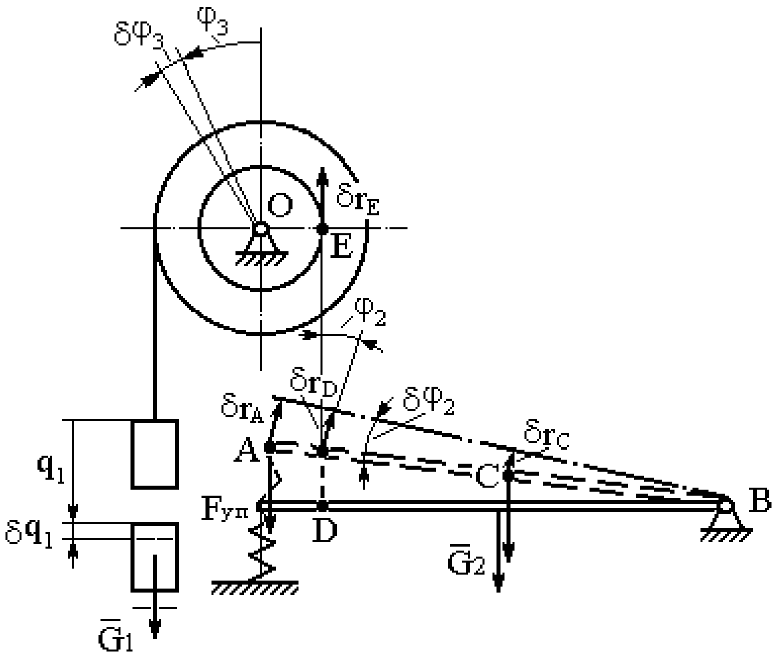


Рис. 10.4

Нагадаємо, що можливими звидься нескінченно малі переміщення, що допускаються в’язями в даний момент часу. Нескінченно малі вектори можливих переміщень окремих точок системи мають напрямок векторів швидкостей цих точок.

Сума можливих робіт усіх діючих на механісну систему сил може мати представлена у вигляді скалярних доданків векторів сил на вектори можливих переміщень точок їх прикладання:

$$\bar{\delta} A = \bar{G}_1 \bar{\delta} q_1 + \bar{F}_{yn} \bar{\delta} r_A + \bar{G}_2 \bar{\delta} r_C \, . \qquad (20)$$

Останні зовнішні сили ($\bar{G}_3, \bar{R}_{OY}, \bar{R}_{OX}, \bar{R}_{BY}, \bar{R}_{BX}$) прикладені до нерухомих точок, роботи не здійснюють. Нагадаємо, визначення ідеальних в'язей, що введені в механіку німецьким фізиком Герцем у 1884 р. – «Ідеальні в'язі – це в'язі, сума робіт яких на можливих переміщеннях механічної системи дорівнює нулю". В нашому прикладі шарніри без тертя *O* и *B* – ідеальні в'язі.

У виразі (20)

$$F_{УП} = C \cdot (\lambda_{СТ} + \lambda). \qquad (21)$$

Розтягнута пружина спрямована вниз на нескінченно малу величину переміщення точки її прикладання $бr_A$ $F_{УП}$ яка вважається постійною.

Нагадаємо, що скалярний доданок двох векторів – скалярна величина, що дорівнює доданку модулів співмножників на косинус кута між ними. Тому вираз (20) можемо записати так:

$$бA = G_1 \cdot бq_1 - F_{УП} \cdot бr_A \cdot \cos \varphi_2 - G_2 \, бr_C \cos \varphi_2. \qquad (22)$$

Враховуємо, що при малих коливаннях механічної системи відносно стану рівноваги кут φ_2 – величина мала. Вважаємо, що $\cos \varphi_2 = 1$.

Тепер необхідно можливі переміщення $бr_A$ і $бr_C$ виразити через варіацію узагальненої координати $бq_1$. При переміщенні тіла 1 на $бq_1$ блок 3 повернеться на кут:

$$б\varphi_3 = бq_1 \backslash R_3; \qquad (23)$$

при цьому точка *E*, до якої закріплена $б\varphi_3$– невагома нитка, буде мати можливе переміщення $бr_E$, яке спрямоване по дотичній до малого кола блока 3. Стрижень 2, що відхилений від горизонтального положення на малий кут φ_2, отримає можливе переміщення $б\varphi_2$. Можливі переміщення точок цього стрижня, що нас цікавлять (т. *A*, т. *D*, т. *C*), спрямовані перпендикулярно до стрижня $бr_A$, $бr_D$ і $бr_C$ та пропорційні видаленню від нерухомого шарніру *B*, тобто задовольняють пропорції:

$$\frac{бr_A}{l} = \frac{бr_D}{3/4l} = \frac{бr_C}{l/2} \, . \qquad (24)$$

Тіла 2 і 3 з'єднані невагомою нерозтягненою ниткою, яка в загальному випадку здійснює плоскопаралельний рух, при якому для швидкостей точок *E* та *Д* підходить теорема про рівність проекцій швидкостей двох точок тіла на пряму, що їх єднає:

$$V_E = V_D \cdot \text{Cos}\ \varphi_2. \tag{25}$$

Тому справедливе аналогічне співвідношення для можливих точок *E* і *Д*:

$$бr_E = бr_Д \cdot \text{Cos}\ \varphi_2. \tag{26}$$

Для малих коливань механічної системи відносно стану рівноваги всі переміщення тіл – величини малі, тому можемо додати у вираз (26) $\cos\varphi_2 = 1$.

З урахуванням рівняння (23)

$$бr_E = б\varphi_3 \cdot r_3 = бq_1 \frac{r_3}{R_3} = \frac{бq_1}{4}, \tag{27}$$

а з урахуванням рівняння (26):

$$бr_D = бr_E = \frac{бq_1}{4}. \tag{28}$$

З пропорції (24) та з урахуванням формули (28):

$$бr_A = \frac{4}{3} бr_Д = \frac{бq_1}{3}; \tag{29}$$

$$бr_C = \frac{2}{3} бr_Д = \frac{бq_1}{6}. \tag{30}$$

Вираз (22) з урахуванням рівнянь (29) та (30) приймає вигляд

$$бA = (G_1 - F_{УП} \cdot \frac{1}{3} - G_2 \cdot \frac{1}{6}) бq_1. \tag{31}$$

Звідки:

$$Q_1 = (G_1 - F_{УП} \frac{1}{3} - G_2 \frac{1}{6}) = \left[m_1 g - C(\lambda_{CT} + \lambda)\frac{1}{3} - m_2 g \frac{1}{6}\right]. \tag{32}$$

У цьому виразі деформація пружини λ при повороті тіла 2 на кут φ_2 має бути виражена через прийняту узагальнену координату. Можна скласти співвідношення для переміщення точок *A* і *D* стрижня 2, які подібні виразу (24) та отримати аналогічно рівнянню (29), що

$$\lambda = \frac{q_1}{3}. \tag{33}$$

Остаточно отримаємо вираз для узагальненої сили

$$Q_1 = \left[m_1 g - C_1(\lambda_{CT} + \frac{q_1}{3}) \cdot \frac{1}{3} - m_2 g \frac{1}{6}\right]. \tag{34}$$

Критерії оцінювання.

Оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП» здійснюється за рейтинговою (100-бальною) та конвертаційною шкалами. Остання необхідна (за офіційною відсутністю національної шкали) для конвертації (переведення) оцінок здобувачів вищої освіти різних закладів.

Шкали оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП»

Рейтингова	Конвертаційна
90…100	відмінно / Excellent
74…89	добре / Good
60…73	задовільно / Satisfactory
0…59	незадовільно / Fail

Кредити навчальної дисципліни зараховується, якщо студент отримав підсумкову оцінку не менше 60-ти балів. Нижча оцінка вважається академічною заборгованістю, що підлягає ліквідації відповідно до Положення про організацію освітнього процесу НТУ «ДП».

Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК (бакалавр)

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Знання	
⬩ концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100
	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
	Рівень знань незадовільний	<60
	Уміння/навички	
⬩ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички,	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми;	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв'язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	- обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв'язання завдання	
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з негрубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком	65-69
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями	60-64
	рівень умінь/навичок незадовільний	<60
	Комунікація	
♦ донесення до фахівців і нефахівців інформації, ідей, проблем, рішень, власного досвіду та аргументації; ♦ збір, інтерпретація та застосування даних; ♦ спілкування з професійних питань, у тому числі іноземною мовою, усно та письмово	Вільне володіння проблематикою галузі. Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова: - правильна; - чиста; - ясна; - точна; - логічна; - виразна; - лаконічна. Комунікаційна стратегія: - послідовний і несуперечливий розвиток думки; - наявність логічних власних суджень; - доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням; - правильна структура відповіді (доповіді); - правильність відповідей на запитання; - доречна техніка відповідей на запитання; - здатність робити висновки та формулювати пропозиції	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами. Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами. Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами	90-94
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п'ять вимог)	74-79
	Задовільне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)	70-73
	Часткове володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев'ять вимог)	65-69
	Фрагментарне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано 10 вимог)	60-64
	Рівень комунікації незадовільний	<60
Відповідальність і автономія		
♦ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами; ♦ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах; ♦ формування суджень, що	Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на: 1) управління комплексними проектами, що передбачає: - дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію; - здатність до роботи в команді; - контроль власних дій; 2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає: - обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів; - самостійність під час виконання поставлених завдань;	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
враховують соціальні, наукові та етичні аспекти; ♦ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп; ♦ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії	- ініціативу в обговоренні проблем; - відповідальність за взаємовідносини; 3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає: - використання професійно-орієнтовних навичок; - використання доказів із самостійною і правильною аргументацією; - володіння всіма видами навчальної діяльності; 4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає: - ступінь володіння фундаментальними знаннями; - самостійність оцінних суджень; - високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок; - самостійний пошук та аналіз джерел інформації	
	Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)	90-94
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60

ОЧІКУВАНІ ДИСЦИПЛІНАРНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

1. Знати і розуміти засади теоретичної механіки, що лежать в основі прикладної механіки і матеріалознавства.
2. Знати і розуміти перспективи розвитку теоретичної, прикладної механіки і матеріалознавства.
3. Застосовувати методи теоретичної механіки для інженерних розрахунків технічних об'єктів в галузі прикладної механіки і матеріалознавства.
4. Аналізувати інженерні об'єкти, використовуючи методи теоретичної механіки.
5. Розробляти розрахункові схеми технічних об'єктів в галузі прикладної механіки і матеріалознавства, використовуючи моделі теоретичної механіки.

Список літератури

1. Федуліна. А.І. Теоретична механіка : Навч. посібник/ Федуліна. А.І. – К.: Вища шк., 2005 – 319 с.

2. Бондаренко А.А. Теоретична механіка: підручник У2ч – Ч1: Кінематика/ Бондаренко А.А. Дубінін О.О., Переславцев О.М. – К.: Знання, 2004. – 599с.

3. Бондаренко А.А. Теоретична механіка: Підручник; У2ч. – Ч2: Динаміка/ Бондаренко А.А. Дубінін О.О., Переславцев О.М. – К.: Знання, 2004. – 590с.

4. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник./ Павловський М.А. – К.: Техніка, 2002. – 512с.

ПОДЯКА

Колектив авторів висловлює подяку колишнім співробітникам кафедри будівельної, теоретичної та прикладної механіки Ропаю Валерію Андрійовичу, Плахотнік Валентині Василівні, Матисіній Наталії Валентинівні, Кірносу Володимиру Дмитровичу, Якубович Людмилі Анатоліївні, Артюховій Валентині Юхимівні, Пахомову Георгію Дмитровичу, Шуляку Ігорю Андрійовичу за консультації та методичні поради протягом розробки даних методичних вказівок.

Колосов Дмитро Леонідович
Долгов Олександр Михайлович
Онищенко Сергій Валерійович
Кіба В'ячеслав Якович
Науменко Олена Геннадіївна

Методичні рекомендації до проведення практичних занять (практикум) з теоретичної механіки для студентів спеціальності 133 Галузеве машинобудування

Видається в авторській редакції

Підписано до видання 27.12.2022
Електронний ресурс Авт. арк. 3,6

Розроблено і видано в
Національному технічному університеті