МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра системного аналізу та управління

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Методичні рекомендації до виконання курсової роботи
для здобувачів ступеня бакалавра
освітньо-професійної програми «Системний аналіз»
зі спеціальності 124 Системний аналіз

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Методи оптимізації та дослідження операцій [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до виконання курсової роботи для здобувачів ступеня бакалавра освітньо-професійної програми «Системний аналіз» спеціальності 124 Системний аналіз / уклад.: М.М. Одновол, Л.С. Коряшкіна, Д.М. Гаранжа ; М-во освіти і науки України; ; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 66 с.

Укладачі:
М.М. Одновол, доц.,
Л.С. Коряшкіна, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Д.М. Гаранжа, ст. викл.

Затверджено до видання науково-методичною комісією зі спеціальності 124 Системний аналіз (протокол № 10 від 30.08.2024 року) за поданням кафедри системного аналізу та управління (протокол № 10 від 30.08.2024 р.).

Наведено постановку завдання з курсової роботи, викладені основні відомості з теорії лінійного програмування і двоїстості, вимоги щодо виконання завдання. Посібник містить варіанти індивідуальних завдань, приклад виконання курсової роботи.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу і управління Т.А. Желдак, канд. техн. наук, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП

Курсова робота є однією із форм організації навчання у вищій школі, яка спрямована на поглиблення, узагальнення та закріплення знань та навичок, набутих студентами у навчальному процесі, застосування їх на практиці.

Курсова робота виконується студентом індивідуально під керівництвом викладача в позааудиторний час. Вона передбачає вибір об'єкта та предмета дослідження, опрацювання наукової літератури, організацію обчислень і проведення експериментальних досліджень, аналіз отриманих результатів, самостійне формулювання висновків, оформлення результатів згідно з існуючими критеріями та вимогами, набуття етики наукової роботи.

Курсова робота має відображати здатність студента працювати з науковою літературою, поєднувати теоретичні знання з практикою, розробляти і формулювати обґрунтовані пропозиції щодо удосконалення і застосування у професійній діяльності методів, які проаналізовано і використано в роботі.

Мета курсової роботи з дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» – поглиблене вивчення та аналіз методів розв'язання задач лінійного програмування, їх застосування в управлінні економіко-виробничими системами.

Вибір математичного і алгоритмічного інструментарію саме лінійного програмування як методу досліджень обумовлений тим, що на ньому базуються оптимізаційні алгоритми для інших, більш складних типів моделей та задач дослідження операцій, зокрема, цілочислового, нелінійного та стохастичного програмування.

Досягнення мети передбачає виконання певних завдань:

1. Опрацювання наукової та методичної літератури, нормативних та інструктивних матеріалів.

2. Вибір об'єкта і предмета досліджень в будь-якій галузі людської діяльності: виробничій, гірничодобувній, переробній, хімічній, соціальній тощо.

3. Формулювання в термінах предметної області оптимізаційної задачі. Збір даних і систематизація інформації, що описує реальний процес чи об'єкт.

4. Складання економіко-математичної моделі.

5. Застосування методів дослідження операцій, системного аналізу, математичного моделювання і прогресивних комп'ютерних технологій для розв'язування сформульованої оптимізаційної задачі.

5. Вибір методу розв'язання побудованої моделі і програмна реалізація його алгоритму.

6. Аналіз оптимальних розв'язків задач, отриманих із застосуванням сучасних комп'ютерних технологій.

7. Проведення аналізу на чутливість побудованої моделі за різними показниками зміни основних параметрів задачі для отримання повної картини властивостей та функціонування заданого процесу або об'єкту.

8. Формулювання висновків теоретичного та прикладного характеру.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

За даними варіанта (дивись додаток А):

1. Виконати змістовну постановку задачі для обраного об'єкта дослідження.
2. Описати процес побудови математичної моделі.
3. Виконати теоретично розрахункове завдання:
   - розв'язати задачу графічним методом, якщо це можливо;
   - розв'язати задачу симплекс-методом або М-методом;
   - дослідити розроблену модель оптимізації на чутливість щодо зміни вихідних параметрів.
4. Розробити і програмно реалізувати алгоритм пошуку оптимального розв'язку задачі. Навести:
   - блок-схему алгоритму розв'язання задачі;
   - лістинг програми;
   - результати тестування програми, перевірку коректності роботи програми;
   - інструкцію для користувача.
5. Сформулювати аргументовані висновки про отримані результати, їх змістовну інтерпретацію.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Математична модель задачі лінійного програмування

Нині одним із найпоширеніших методів дослідження та за можливості розв'язання лінійних математичних моделей є такий, що засновано на математичному програмуванні.

Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, яка досліджує екстремальні задачі (пошуку максимуму або мінімуму) і розробляє методи їх розв'язання.

У випадку застосування принципів математичного програмування для лінійних математичних моделей об'єктів чи процесів використовується поняття **лінійного програмування**. Воно розглядає широкий спектр задач із різних сфер діяльності людини, наприклад, із господарської, економічної чи виробничої.

Задачі лінійного програмування являють собою відповідні лінійні математичні моделі, які містять функцію мети, що у загальному вигляді може бути подана так:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to max\ (min), \qquad (1.1)$$

де $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ – фактори, що впливають на процес.

Для цільової функції, заданої формулою (1.1), мають обов'язково бути задані обмеження, що відповідають запасам ресурсів або реальним умовам перебігу процесу чи функціонування об'єкта на практиці:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \qquad i = \overline{1, m}. \qquad (1.2)$$

Слід зазначити, що параметри a_{ij}, b_i, c_j – сталі, задані відповідно до умови задачі.

Необхідним є також задання умови невід'ємності змінних, що відповідає практичній постановці задачі:

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1, l}, \qquad l \le n. \qquad (1.3)$$

Адже зазвичай фактори, що впливають на процес, описаний у заданій математичній моделі, відповідають виробництву певної продукції, вмісту речовини у суміші тощо. Тому подібні змінні не можуть на практиці набувати від'ємних значень.

Функцію $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з (1.1) називають *цільовою* або *критерієм оптимальності*, співвідношення (1.2) – (1.3) – *системою обмежень задачі*. Значення змінних задачі $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що задовольняють обмеження (1.2) – (1.3), називають *допустимим розв'язком* або *допустимим планом*. Сукупність допустимих розв'язків утворює *область допустимих розв'язків* (ОДР).

Допустимий розв'язок $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, на якому цільова функція (1.1) реалізує своє екстремальне значення, називається *оптимальним планом.*

Наведемо приклад змістовної постановки задачі оптимізації, математична модель якої має наступний вигляд:

$$F = 7x_1 - 2x_2 \to max \qquad (1.4)$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Приклад 1. На молокозаводі «Молочне дитинство» виготовляється два види продукції: 500-мілілітрові упаковки кефіру та такі самі йогурту. Підприємство бере участь у державній пільговій програмі для харчових виробників, за умовами якої воно мусить виготовляти йогурт та транспортувати його до дитячих соціальних закладів. Завдяки виконанню даних вимог завод отримує пільги на податкові збори. При цьому реалізація кефіру відбувається за звичайних умов.

Молокозаводу необхідно оптимізувати план щоденного виробництва кефіру та йогурту, виходячи з того, що прибуток із продажів 1 тисячі упаковок кефіру складає 7 тисяч гривень, а 1 тисячі упаковок йогурту – 2 (враховуючи додаткові витрати на доставку 1 тисячі упаковок йогурту до дитячих соціальних закладів).

Виробничі потужності підприємства вимагають, аби щоденний сумарний обсяг виготовленої продукції варіювався у межах від 2 до 5 тисяч упаковок продукції.

За технологічною картою відомо, що для виготовлення 1 тисячі упаковок кефіру потрібно 3 тонни молока, а для виготовлення 1 тисячі упаковок йогурту – 1 тонна молока. Із урахуванням обсягу молока, яке щодня поступає на завод, і площі складських приміщень головний технолог підприємства висунув вимогу про те, що денні витрати молока мають бути не менше 3 тонн. У протилежному випадку складські приміщення будуть перевантаженими, що призведе до псування молочної продукції.

Технологічними нормами також передбачається, що на виготовлення 1 тисячі упаковок кефіру витрачається 2 кг закваски зі значним вмістом живих бактерій, а на виготовлення 1 тисячі упаковок йогурту її потрібно 3 кг. Причому кількість закваски, яка витрачається щоденно на виготовлення кефіру, має не перевищувати кількість закваски, котра витрачається щоденно на виготовлення йогурту, більш, ніж на 6 кг.

За результатами досліджень вподобань споживачів щоденний попит на йогурти молокозаводу «Молочне дитинство» не перевищує попиту на кефір більше, ніж на 3 тисячі упаковок товару.

Перед менеджером підприємства стоїть задача розрахунку оптимального плану щоденного випуску кефіру та йогурту для отримання максимального прибутку.

Для побудови математичної моделі кількість тисяч виготовлених упаковок кефіру та йогурту позначається змінними x_1, x_2. Тоді цільова функція задачі запишеться наступним чином:

$$F = 7x_1 - 2x_2 \rightarrow max, \tag{1.6}$$

а обмеження набувають такого вигляду:

$$x_1 + x_2 \leq 5, \tag{1.7}$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6, \tag{1.8}$$

$$3x_1 + x_2 \geq 3, \tag{1.9}$$

$$x_1 + x_2 \geq 2, \tag{1.10}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3, \tag{1.11}$$

за умови невід'ємності змінних

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{1.12}$$

Обмеження, що задані формулами (1.7) та (1.10), відповідають виробничій потужності молокозаводу «Молочне дитинство». Умова (1.11) задає співвідношення між попитом на продукцію даного підприємства. Нерівність (1.8) обмежує різницю між кількістю закваски, яка може бути щоденно використана для виготовлення кефіру та йогурту. Умова (1.9) означає, яка мінімальна кількість молока має витрачатися на виробництві щоденно.

1.2. Графічний метод розв'язання задачі ЛП

Графічний метод для розв'язання задач лінійного програмування застосовується у тому випадку, коли кількість змінних задачі (1.1) – (1.3) дорівнює двом.

1.2.1. Постановка задачі

Знайти найбільше та найменше значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow extr, \tag{1.12}$$

якщо змінні x_1 та x_2 задовольняють нерівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i = \overline{1,m} \tag{1.13}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{1.14}$$

1.2.2. Метод розв'язання

Процес розв'язання задачі ЛП графічним методом включає побудову області допустимих розв'язків та визначення на ній найоптимальнішого серед них. Для цього використовують наступний алгоритм.

1) На площині $x_1 0 x_2$ будуються граничні прямі, рівняння яких отримуються шляхом заміни нерівностей (1.13), (1.14) на рівності.

2) Знаходяться півплощини, що визначаються кожним з обмежень (1.13), (1.14).

3) Визначається область допустимих розв'язків (ОДР) задачі на площині $x_1 0 x_2$. Якщо система обмежень (1.13), (1.14) несумісна, то роблять висновок про нерозв'язність задачі ЛП. Тобто вона не має розв'язків з причини порожньої допустимої множини.

4) Будується вектор-градієнт цільової функції $F(x_1 x_2)$, який показує напрямок зростання її значень. Його координатами виступають коефіцієнти цільової функції $\bar{c}(c_1, c_2)$.

5) Будується пряма $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$, перпендикулярна вектору $\bar{c}$, і паралельно пересувається в напрямку, визначеному вектором $\bar{c}$, якщо здійснюється пошук максимального значення цільової функції (та в протилежному напрямку для відшукання її мінімального значення). Крайня точка області допустимих розв'язків у зазначеному напрямку і є точкою, у якій цільова функція $F(x_1 x_2)$ приймає максимальне (мінімальне) значення. Якщо ОДР не обмежена і таку крайню точку знайти неможливо, то кажуть, що задача ЛП не має розв'язків з причини необмеженості цільової функції на допустимій множині.

6) Визначаються координати точки (x_1^*, x_2^*) (у ній перетинаються певні прямі) і максимальне (або мінімальне) значення функції:

$$F^* = F(x_1^*, x_2^*) \ = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*.$$

Приклад 2. Розв'язати графічним методом задачу (1.6) – (1.12).

Розв'язання. На площині $x_1 O x_2$ будуються рівняння таких прямих:

$$x_1 + x_2 = 5 \qquad (1.13)$$

$$2x_1 - 3x_2 = 6 \qquad (1.14)$$

$$3x_1 + x_2 = 3 \qquad (1.15)$$

$$x_1 + x_2 = 2 \qquad (1.16)$$

$$x_1 - x_2 = -3 \qquad (1.17)$$

$$x_1 = 0 \qquad (1.18)$$

$$x_2 = 0 \qquad (1.19)$$

Графічне представлення прямих (1.13) – (1.19) зображено на рисунку 1.1.

Для кожного із обмежень задачі (1.6) – (1.12) визначається допустима півплощина. Їх напрямок розташування таких півплощин позначено стрілками на рис. 1.2.

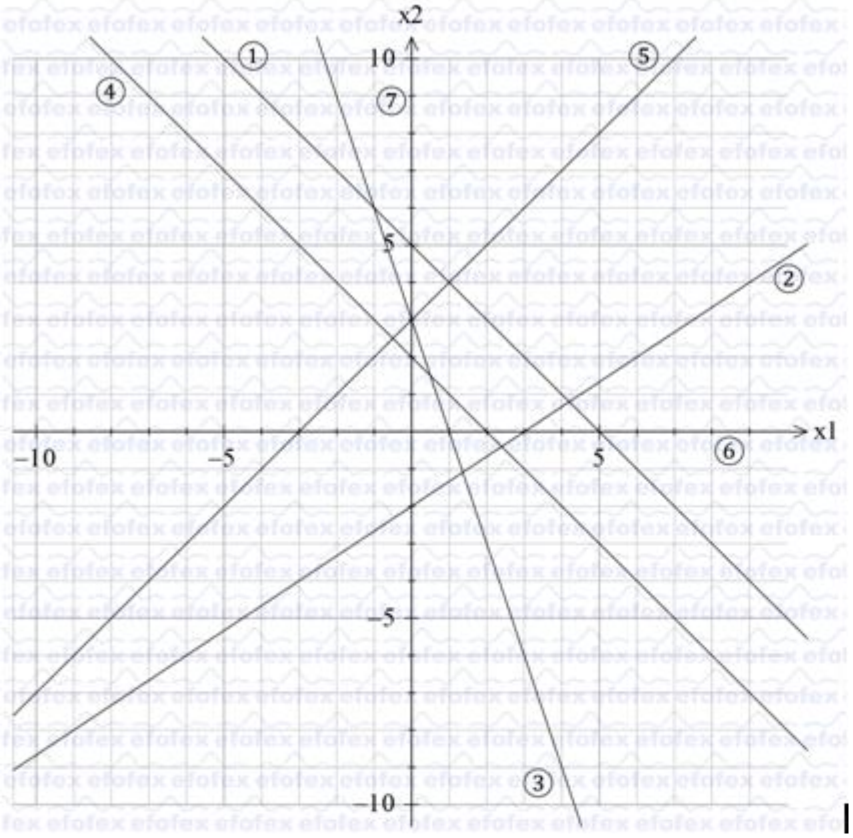


Рисунок 1.1 – Зображення рівнянь прямих для обмежень задачі (1.6) – (1.12)

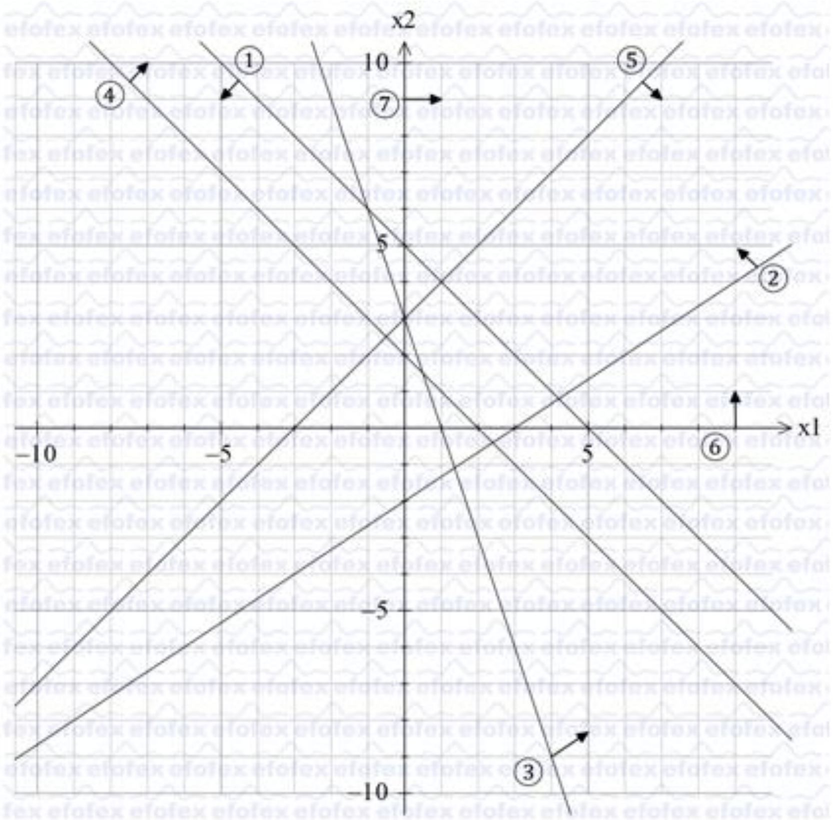


Рисунок 1.2 – Рівняння прямих для обмежень задачі (1.6) – (1.12) із зазначенням допустимих півплощин для кожного з них

Перетином усіх півплощин є багатокутник ABCDEG, що наведено на рис. 1.3. Отже, ABCDEG – множина допустимих розв’язків задачі (1.6) – (1.12).

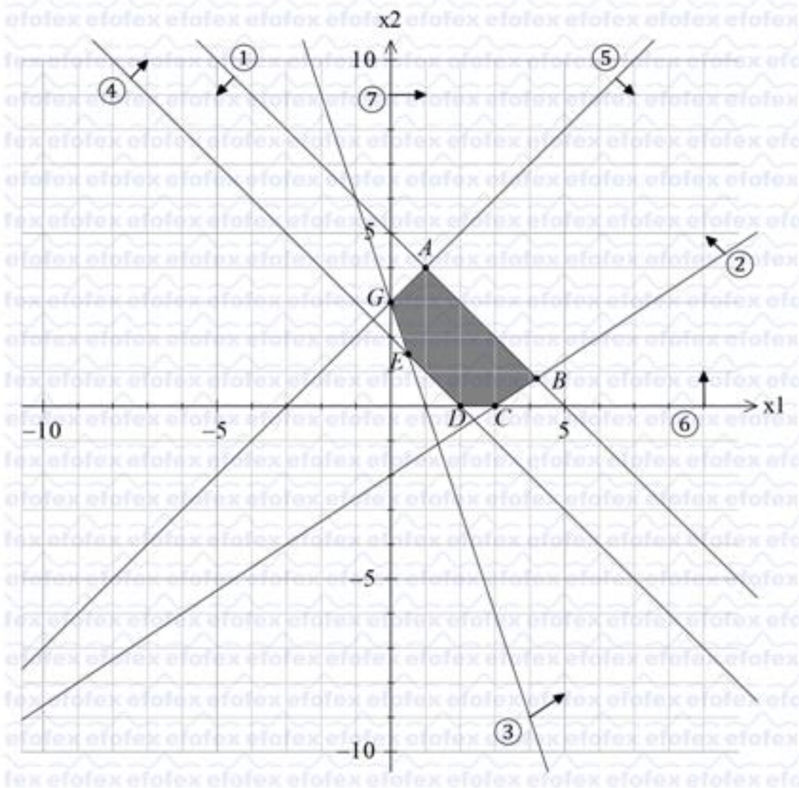


Рисунок 1.3 – Множина допустимих розв’язків задачі (1.6) – (1.12)

Далі будується вектор-градієнт цільової функції $\bar{c} = (7, -2)$ (див. рис. 1.4). Після цього зображується лінія нульового рівня цільової функції – пряма

$$F(x_1, x_2) = 7x_1 - 2x_2 = 0.$$

Пересуваючи цю пряму в напрямку вектора-градієнта $\bar{c}$, визначається крайня точка множини допустимих значень задачі – B. Саме у ній цільова функція, задана формулою (1.6), набуває свого максимального значення на допустимій множині ABCDEG. Результати пошуку оптимальної точки, якою виявилася B, наведено на рисунку 1.5.

Після цього було знайдено конкретні координати точки максимуму B. Вона знаходиться на перетині прямих, що позначено формулами (1.8) та (1.9). Завдяки цьому координати точки B було знайдено в результаті розв’язання системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 = 6. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Розв’язком системи (1.20) є пара значень $x_1 = 4.2$ та $x_2 = 0.8$. Відтак, координати точки B є такими:

$$\begin{cases} x_1^* = 4.2, \\ x_2^* = 0.8. \end{cases} \qquad (1.21)$$

Підставляючи (1.21) в (1.6), обчислюється максимальне значення цільової функції:

$$F_{max} = 7 \cdot 4.2 - 2 \cdot 0.8 = 27.8.$$

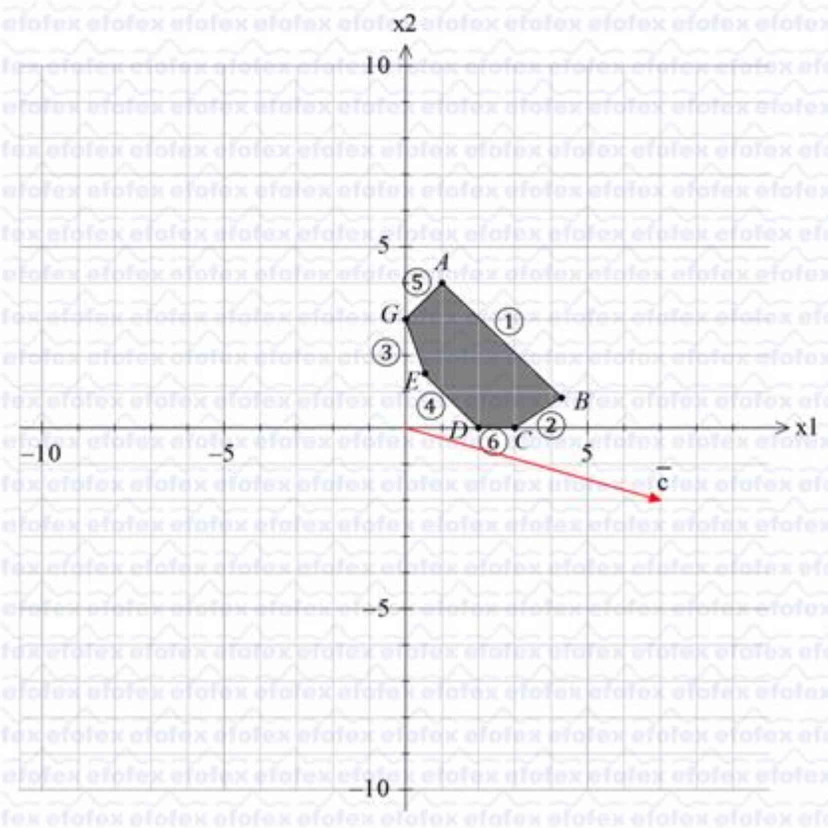


Рисунок 1.4 – Множина допустимих розв’язків
задачі (1.6) – (1.12) та вектор-градієнт цільової функції $\bar{c}$

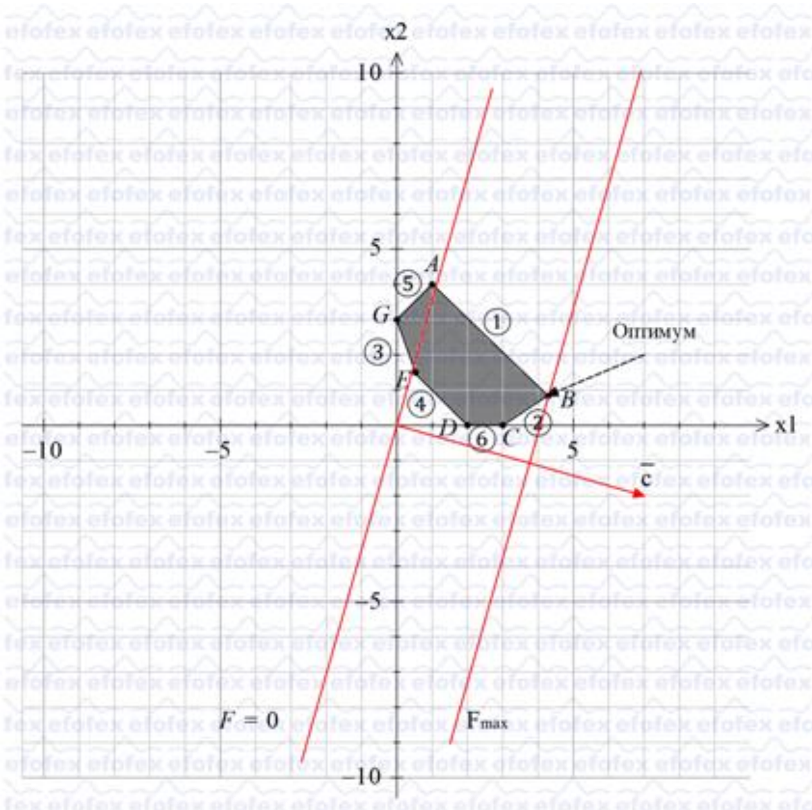


Рисунок 1.5 – Графічне розв’язання задачі (1.6) – (1.12)

Практична інтерпретація отриманих результатів розв'язання задачі лінійного програмування (1.6) – (1.12): для одержання максимального щоденного прибутку у розмірі 27.8 тисяч гривень молокозавод «Молочне дитинство» повинен щодня виготовляти 4.2 тисячі упаковок кефіру та 0.8 тисяч упаковок йогурту.

1.3. Графічний метод постоптимізаційного аналізу задачі ЛП

Постоптимізаційний аналіз задач ЛП дозволяє дослідити стійкість їх оптимальних планів. Для його виконання можуть використовуватися як графічні, так і аналітичні підходи. Існує три задачі на чутливість.

Перша задача на чутливість має на меті визначити, як позначиться на оптимальному розв'язку задачі ЛП зміна правих частин обмежень, якими можуть бути запаси ресурсів, мінімальні або максимальні потужності підприємства, граничні витрати ресурсів за технологічними картами тощо.

Важливо проаналізувати наступні два аспекти:

1. На скільки можна збільшити запас певного ресурсу або потужність підприємства для покращення отриманого оптимального значення цільової функції F?
2. На скільки можна знизити запас деякого ресурсу або певні вимоги щодо витрат сировини, зберігаючи отримане оптимальне значення цільової функції F?

Перш, ніж відповісти на поставлені питання класифікуємо обмеження лінійної моделі як зв'язні (активні) і незв'язні (неактивні) обмеження. *Зв'язними* називають ті обмеження, відповідні прямі яких проходять через оптимальну точку. У протилежному випадку, обмеження називають *незв'язними*.

Якщо деяке обмеження є зв'язним, логічним є віднести відповідний ресурс до розряду дефіцитних ресурсів, позаяк він використовується повністю. Ресурс, з яким асоційоване незв'язне обмеження, слід віднести до розряду недефіцитних (тобто наявних у певному надлишку). Відтак, при аналізі моделі на чутливість щодо змін у правих частинах обмежень визначаються:

1. Гранично допустиме збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що дозволяє покращити знайдений оптимальний розв'язок;
2. Гранично допустиме зниження запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює знайденого раніше оптимального значення цільової функції.

Друга задача на чутливість дозволяє зрозуміти, якому з ресурсів необхідно надати перевагу при розподіленні додаткових коштів. Тобто збільшення обсягу якого з ресурсів є найбільш вигідним?

За допомогою *третьої задачі на чутливість* можна визначити, на скільки можна змінити коефіцієнти цільової функції, аби знайдений план залишався оптимальним. Зміна коефіцієнтів цільової функції впливає на нахил прямої, яка є критерієм оптимальності в прийнятій системі координат. Це означає, що варіація коефіцієнтів цільової функції може спричинити зміни у сукупності зв'язних обмежень, а отже, і статусу того чи іншого ресурсу (тобто недефіцитній ресурс може стати дефіцитним, і навпаки). Відтак, в рамках аналізу моделі на чутливість до змін коефіцієнтів цільової функції можуть досліджуватися такі питання:

1. Визначити діапазон варіації (збільшення або зменшення) того чи іншого коефіцієнта цільової функції, при якому не відбувається зміна оптимального розв’язку.

2. На скільки слід змінити той чи інший коефіцієнт цільової функції, щоб зробити певний недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки?

Крім того, постоптимізаційний аналіз моделі може також включати в себе її аналіз на чутливість щодо додавання нового обмеження, нового виду виробничої діяльності тощо.

1.3.1. Приклад розв’язання першої задачі аналізу на чутливість

Використовуючи дані з прикладу 1, визначити:

1. Гранично допустиме збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що дозволяє покращити знайдений оптимальний розв'язок;

2. Гранично допустиме зниження запасу недефіцитного ресурсу, котре не змінює знайденого раніше оптимального значення цільової функції.

І. Для задачі (1.6) – (1.12) *зв'язними* є перше та друге обмеження:

$$x_1 + x_2 \leq 5, \tag{1.22}$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6. \tag{1.23}$$

Ресурси, що пов’язані із цими обмеженнями, називають дефіцитними.

Розглянуто ресурс, обмеження на який описується формулою (1.22). Із графічного подання задачі (1.6) – (1.12) (рис. 1.3) стає зрозуміло, що збільшення запасу даного ресурсу є необмеженим, разом з ним необмеженим є зростання цільової функції. Практично це означає, що на молокозаводі можна збільшувати щоденні потужності виробництва до нескінченності за незмінної решти умов. Звичайно, у реальному житті така ситуація не є можливою. А, отже, для того, щоб можна було знайти граничну оцінку збільшення потужності, модель потрібно доповнити однією або декількома умовами, які б, наприклад, обмежували кошти, що виділяються для нарощування потужностей заводу.

Далі розглянемо умову (1.23), яка описує технологічні вимоги щодо витрат закваски на кисломолочну продукцію. Припустімо, що допускається збільшення максимальної різниці між кількістю використаної сировини, що йде на виробництво першого і другого виду продукції більше, ніж на 6 кг. Таку зміну будемо умовно називати «збільшення запасу другого ресурсу».

З рис. 1.6. видно, що збільшення правої частини обмеження (1.23) обумовлює переміщення прямої СВ в напрямку зростання цільової функції до точки K, де перетинаються прямі $x_1 + x_2 = 5$ та $x_2 = 0$. В точці K задача (1.6) – (1.12) має нові зв'язні обмеження, а саме:

$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$x_2 \geq 0.$$

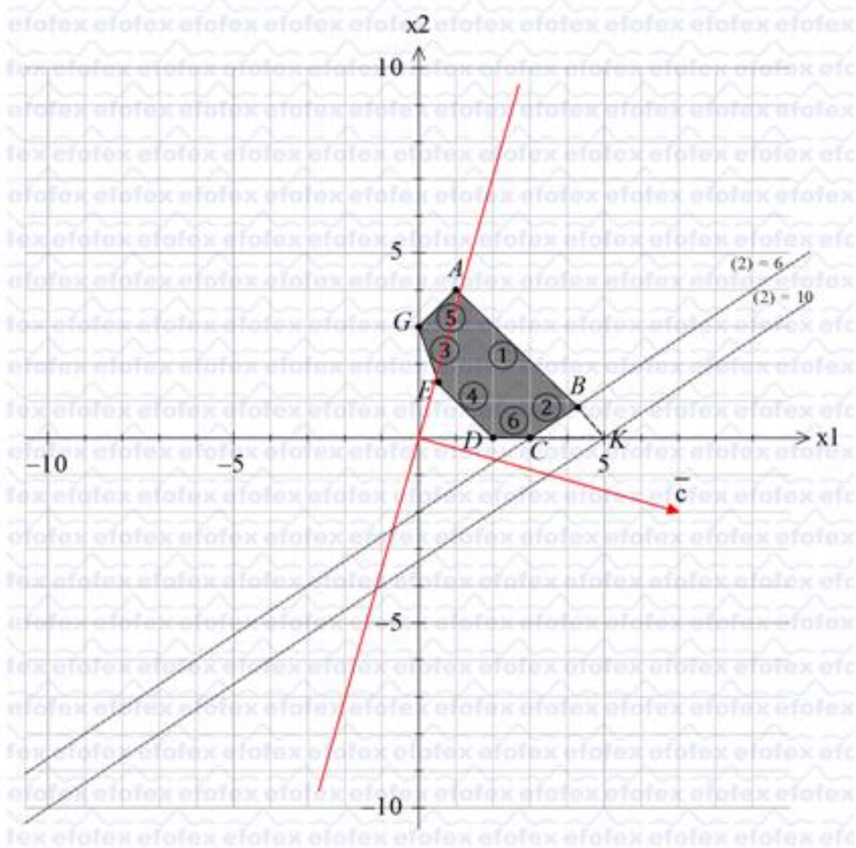


Рисунок 1.6 – Гранично допустиме збільшення запасу другого ресурсу

Новою виявляється множина допустимих значень задачі – багатокутник $AKDFG$. Новий оптимальний розв'язок поставленої задачі – точка K. Подальше збільшення запасу другого ресурсу не змінюватиме оптимальний план задачі з причини фіктивності (надмірності) обмеження (1.23) за незмінної решти її умов.

Для визначення граничного рівня збільшення другого ресурсу обчислюють точні значення координат точки K, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_2 = 0. \end{cases} \qquad (1.24)$$

Розв'язком системи є пара значень $x_1 = 5$ та $x_2 = 0$. Координати т. $K\ (5, 0)$ підставляються у ліву частину обмеження (1.23):

$$2x_1 - 3x_2 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 0 = 10.$$

У такий спосіб визначається максимально допустимий запас ресурсу (максимально можлива різниця між кількістю закваски, використаної на кефір та йогурт, якщо це дозволяє технологічна карта виробництва). Відповідне максимальне значення цільової функції:

$$F_{max} = 7 \cdot 5 - 2 \cdot 0 = 35.$$

Відтак, при збільшенні допустимої різниці між кількістю закваски, яка витрачається щоденно на виготовлення кефіру і йогурту, до 10 кг, щоденний прибуток молокозаводу «Молочне дитинство» складатиме 35 тисяч гривень.

II. З'ясуємо можливість зменшення правої частини незв'язних обмежень, якими для задачі (1.6) – (1.12) є такі:

$$3x_1 + x_2 \geq 3, \quad (1.26)$$

$$x_1 + x_2 \geq 2, \quad (1.27)$$

$$x_1 - x_2 \geq -3. \quad (1.28)$$

З рис. 1.6 видно, що пересування границь FD, GF і AG у сторони, що відповідають зменшенню правих частин умов (1.26) – (1.28), не впливає на точку максимуму цільової функції. Отже, робимо висновок про недоцільність зменшення запасу ресурсів, які відповідають вказаним вище обмеженням.

Загальні результати розв'язання першої задачі на чутливість наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Результати розв'язання першої задачі на чутливість

Ресурс	Тип ресурсу	Максимальна зміна запасу ресурсу	Максимальна зміна цільової функції F
1	Дефіцитний	∞	∞
2	Дефіцитний	$10 - 6 = 4$	$35 - 27.8 = 7.2$

1.3.2. Приклад розв'язання другої задачі аналізу на чутливість

З'ясуємо, збільшення запасу якого з ресурсів є найбільш вигідним в умовах задачі (1.6) – (1.12). Для цього обчислюється цінність кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу за такою формулою:

$$y_i = \frac{(\text{Максимальний приріст оптимального значення функції } F)}{(\text{Максимально допустимий приріст обсягу } i - \text{го ресурсу})}, \quad (1.29)$$

де y_i – цінність додаткової одиниці i-го ресурсу.

На основі даних, отриманих у результаті розв'язання першої задачі на чутливість (див. табл. 1.1), за формулою (1.29) можна обчислити лише цінність додаткової одиниці другого ресурсу, обмеження на яке задається нерівністю (1.23) у задачі (1.6) – (1.12):

$$y_2 = 7.2 \div 4 = 1.8.$$

Визначимо цінність першого ресурсу у такий спосіб:

1) збільшимо його запас на 1 одиницю,
2) знайдемо змінені координати точки K, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 = 6, \end{cases} \Rightarrow K'(4.8; 1.2).$$

3) визначаємо зміну цільової функції, обумовлену збільшенням запасу першого ресурсу:

$$F(K') - F(K) = F(4.8; 1.2) - F(4.2; 0.8) = 31.2 - 27.8 = 3.4.$$

Таблиця 1.2 – Результати розв'язання другої задачі на чутливість

Ресурс	Тип ресурсу	Значення y_i
1	Дефіцитний	3.4
2	Дефіцитний	1.8

Відтак, додаткові вкладення в першу чергу слід направити на збільшення потужностей заводу. Обсяги недефіцитних ресурсів збільшувати не має сенсу.

1.3.3. Приклад розв'язання третьої задачі аналізу на чутливість

Розв'язуючи третю задачу аналізу на чутливість (1.6) – (1.12), визначимо:

1. Діапазон варіації (збільшення або зменшення) того чи іншого коефіцієнта цільової функції

$$F = 7x_1 - 2x_2, \tag{1.30}$$

при якому не відбувається зміна оптимального розв'язку.

2. Який коефіцієнт цільової функції слід змінити і наскільки, аби зробити певний недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки?

1. Нехай c_1 – дохід молокозаводу від продажу 1 тисячі упаковок кефіру, c_2 – дохід від продажу 1 тисячі упаковок йогурту. Тоді цільова функція (1.30) може бути записана в такому узагальненому вигляді:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to max. \tag{1.31}$$

На рисунку 1.7 продемонстровано, що при збільшення або коефіцієнта c_1, або коефіцієнта c_2 в (1.31) пряма, яка відповідає цільовій функції F, обертається навколо точки B проти годинникової стрілки. У випадку зменшення або коефіцієнта c_1, або коефіцієнта c_2 у функції, що зазначена у формулі (1.31), пряма цільової функції F обертається навколо точки B за годинниковою стрілкою.

Для коефіцієнта c_2 справджується той факт, що точка B зберігатиме свою оптимальність, допоки коефіцієнт c_2 буде знаходитися в межах числових значень, які визначаються прямими, котрі відповідають умовам (1.22) та (1.23). Для коефіцієнта c_1 межі числових значень, які обумовлені (1.22) та (1.23), також є визначальними, але результати аналізу на вплив його зміни відрізняються від відповідних результатів для коефіцієнта c_2.

Спочатку розглянемо допустиму зміну першого коефіцієнта в цільовій функції (1.31), за якої точка B зберігатиме свою оптимальність. При цьому початкове значення другого коефіцієнта $c_2 = -2$ залишається незмінним. Крайні значення коефіцієнта c_1 визначаються із рівності кутових коефіцієнтів цільової функції (1.31) та коефіцієнтів прямих, заданих формулами (1.13) та (1.14), що відповідають обмеженням (1.22) та (1.23).

Кутовий коефіцієнт прямої F, що відповідає цільовій функції, зазначеній у формулах (1.30) – (1.31), визначається так:

$$k_F = \frac{c_1}{c_2} = -\frac{c_1}{2}. \tag{1.32}$$

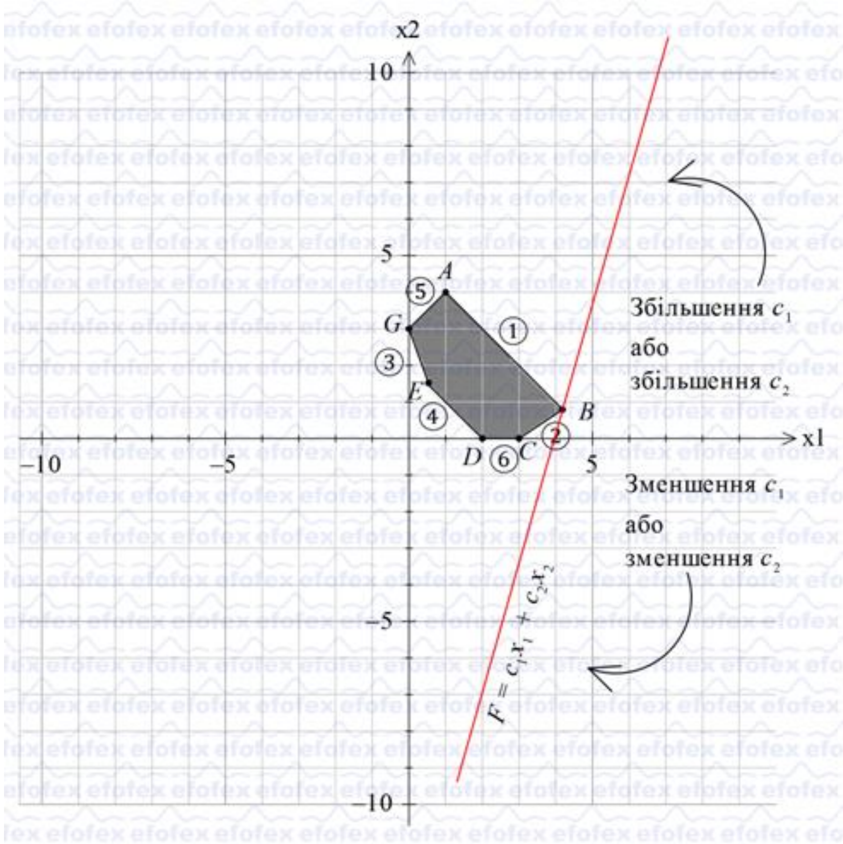


Рисунок 1.7 – Зміни коефіцієнтів цільової функції

Для прямих (1.13) та (1.14) значення кутових коефіцієнтів обчислюються аналогічно:

$$k_1 = \frac{1}{1} = 1, \tag{1.33}$$

$$k_2 = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}\,. \tag{1.34}$$

Із урахуванням (1.32) і (1.33) визначаємо перше граничне значення коефіцієнта c_1:

$$-\frac{c_1}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad c_1 = -2. \tag{1.35}$$

З огляду на (1.32) і (1.34) розраховуємо друге граничне значення коефіцієнта c_1:

$$-\frac{c_1}{2} = -\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{4}{3}. \tag{1.36}$$

Розглянувши одночасно результати розрахунків граничних значень коефіцієнта c_1, отримані у формулах (1.35), (1.36), та графічне подання даної задачі на рисунку 1.7, можна зробити висновки про те, що при всіх значеннях коефіцієнта $c_1 > \frac{4}{3}$ точка B залишатиметься єдиним оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (1.6) – (1.12). Коли $c_1 = \frac{4}{3}$, оптимальними точками для даної задачі будуть і точка B, і точка C, і всі точки відрізка BC. За значення коефіцієнта c_1, що належить інтервалу $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$, точка C буде єдиним оптимальним розв'язком задачі (1.6) – (1.12). При $c_1 = 0$ оптимальними точками для даної задачі будуть і точка C, і точка D, і всі точки відрізка CD. Якщо значення коефіцієнта c_1 належатимуть інтервалу $(-2,\ 0)$, точка D буде єдиним оптимальним розв'язком задачі. Значенню $c_1 = -2$ відповідатимуть оптимальні і точка D, і точка E, і всі точки відрізка DE. У випадку $c_1 < -2$ точка E буде єдиним оптимальним розв'язком задачі.

Аналогічно розглянемо допустиму зміну другого коефіцієнта в цільовій функції (1.31), за якої точка B зберігатиме свою оптимальність. При цьому початкове значення першого коефіцієнта $c_1 = 7$ залишиться незмінним. З рис. 1.7 видно, що c_2 можна збільшувати, допоки пряма F не буде збігатися із прямою, яка відповідає обмеженню (1.22). І значення c_2 можна зменшувати, допоки пряма F не буде збігатися із прямою, яка відповідає обмеженню (1.23).

Крайні значення коефіцієнта c_2 визначаються із рівності кутових коефіцієнтів цільової функції (1.31) та коефіцієнтів прямих, заданих формулами (1.13) та (1.14). Кутовий коефіцієнт прямої F:

$$k_F = \frac{c_1}{c_2} = \frac{7}{c_2}. \tag{1.37}$$

Із урахуванням (1.37) і (1.33), (1.34) визначаємо граничні значення для коефіцієнта c_2:

$$\frac{7}{c_2} = 1 \quad \rightarrow \quad c_2 = 7, \tag{1.38}$$

$$\frac{7}{c_2} = -\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{21}{2}. \tag{1.39}$$

Розглянувши одночасно результати розрахунків граничних значень коефіцієнта c_2, отриманих у формулах (1.38) – (1.39), та графічне подання даної задачі на рисунку 1.7, робимо такі висновки:

1) якщо $c_2 \in \left(-\frac{21}{2},\ 7\right)$, точка B залишатиметься єдиним оптимальним розв'язком задачі (1.6) – (1.12);

2) коли $c_2 = 7$, оптимальними точками для даної задачі будуть і точка A, і точка B, і всі точки відрізка AB;

3) як тільки c_2 стає більшим 7, оптимум задачі переміщується в точку A;

4) при $c_2 = -\frac{21}{2}$ оптимальними точками для даної задачі будуть і точка B, і точка C, і всі точки відрізка BC;

5) за умови $c_2 < -\frac{21}{2}$, оптимум задачі переміщується в точку C.

2. З урахуванням допустимих меж зміни значень коефіцієнта c_2 можна виявити такі зміни коефіцієнтів цільової функції, за яких певний недефіцитний ресурс стає дефіцитним і навпаки. Наприклад, за будь-яких значень коефіцієнта $c_2 > 7$ оптимальним розв'язком задачі (1.6) – (1.12) стає точка A. У такому випадку п'ятий ресурс, що заданий формулою (1.28), стає дефіцитним, а другий ресурс, котрий заданий формулою (1.23), набуває недефіцитного характеру.

1.4. Аналітичний метод розв’язання оптимізаційних задач

Базовим аналітичним методом розв’язання лінійних оптимізаційних задач є симплекс-метод. Він являє собою певну обчислювальну процедуру, яка заснована на тому твердженні, що оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування визначається допустимим базисним розв’язком, і подана в алгебраїчній формі.

Алгоритм симплекс-методу дозволяє розв’язувати задачу ЛП з довільною кількістю змінних. Якщо розв’язок існує, то його буде знайдено за певну кількість кроків, якщо його немає, то в процесі реалізації симплекс-процедури буде встановлено факт відсутності. З симплекс-таблиці безпосередньо або за допомогою простих додаткових обчислень можна отримати інформацію щодо наступних аспектів задачі:

1) оптимального розв’язку;
2) статусу ресурсів;
3) цінності кожного ресурсу;
4) чутливості оптимального розв’язку до зміни запасів ресурсів;
5) варіацій коефіцієнтів цільової функції;
6) інтенсивності споживання ресурсів.

1.4.1. Симплекс-метод і М-метод

Симплекс-метод передбачає запис задачі ЛП в канонічній формі. Нехай вихідну задачу подано в загальному вигляді:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \tag{1.40}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad b_i \ge 0, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{1.41}$$

$$x_j \ge 0, \qquad\qquad j = \overline{1,n}. \tag{1.42}$$

Канонічна форма задачі ЛП передбачає максимізацію функції за умов обмежень у формі рівності і невід’ємності всіх змінних. Тому, в разі необхідності, задача пошуку мінімуму зводиться до задачі на пошук максимуму шляхом зміни знаків коефіцієнтів c_j, $j = \overline{1,n}$; нерівності (1.41) перетворюються на строгі рівності шляхом введення додаткових невід'ємних змінних в їхні ліві частини; умови невід'ємності (1.42) поширюються на всі змінні шляхом введення відповідних підстановок [1].

Вихідна задача (1.40) – (1.42) може бути наведена у векторній формі:

$$F = CX \to max, \tag{1.43}$$

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0, \tag{1.44}$$

$$X \ge 0, \tag{1.45}$$

де $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – заданий вектор коефіцієнтів цільової функції, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор невідомих задачі, $P_1, P_2, \dots, P_n, P_0$ – m-вимірні вектори-стовпці коефіцієнтів обмежень.

Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається **опорним планом** задачі ЛП, якщо він задовольняє обмеження (1.44) – (1.45) і містить не більше за m відмінних від нуля додатних компонент. Якщо кількість ненульових компонент дорівнює m, то опорний план називається **невиродженим**. Решта $(n - m)$ елементів опорного плану дорівнюють нулю. Алгоритм симплекс-методу передбачає перехід від одного опорного плану до іншого зі збільшенням при цьому значення цільової функції.

У деяких випадках вихідний опорний план можна легко визначити. Це відбувається тоді, коли серед векторів P_j, $j = \overline{1,n}$ є m одиничних. У цьому разі відповідні одиничним векторам змінні в опорному плані будуть відмінні від нуля. Такі змінні називаються базисними. Інші змінні дорівнюють нулю. Їх називають вільними.

Симплекс-перетворення тривають, допоки серед чисел $\Delta j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, j = \overline{1,n}$ не залишиться від'ємних.

Симплекс-таблиця в загальному випадку:

Таблиця 1.3

i	Базис	$C_б$	P_0	C_1	C_2	...	C_m	C_{m+1}	...	C_n
				P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_n
1	P_1	C_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1n}
2	P_2	C_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	P_m	C_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mn}
$m+1$			F_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

У стовпці $C_б$ записуються коефіцієнти цільової функції з тими ж індексами, що і вектори базису.

У стовпці P_0 заносяться додатні компоненти вихідного опорного плану, в ньому ж в результаті обчислень отримують додатні компоненти оптимального плану. У стовпцях $P_1, P_2, \dots, P_n$ записані коефіцієнти обмежень при невідомих.

У $(m + 1)$-ому рядку: F_0 – поточне значення цільової функції; у стовпцях $P_j, j = \overline{1,n}$ записані числа $\Delta j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, j = \overline{1,n}$.

Алгоритм симплекс-методу

1. Задачу ЛП приводять до канонічного вигляду і знаходять вихідний опорний план.
2. Складають вихідну симплекс-таблицю.
3. Визначають, чи існує хоча б одне від'ємне число Δj в $(m + 1)$-ому рядку. Якщо ні, то знайдений опорний план є оптимальним.

4. Знаходять найменший від'ємний Δj і відповідний стовпець позначають як базисний. Якщо в базисному стовпці серед чисел a_{ij} немає додатних, то це свідчить про те, що цільова функція не є обмеженою зверху, а, отже, задача ЛП не має розв’язку.

5. Якщо в базисному стовпці серед чисел a_{ij} є додатні, знаходять відношення відповідних b_i до додатних a_{ij} базисного стовпця. Рядок, якому відповідає мінімальне з цих відношень, називають базисним.

6. Елемент, що знаходиться на перетині базисних рядка і стовпця, називають базисним або розв’язувальним елементом.

7. Всі елементи базисного рядка ділять на базисний елемент.

8. Всі елементи базисного стовпця (крім базисного елемента) замінюють нулями.

9. Інші елементи таблиці розраховуються за правилом прямокутника (див. нижче). Фіксується введення в базис нової змінної. При цьому базисний рядок визначає змінну, яка виключається з базису, а базисний стовпець – змінну, яка вводиться в базис.

10. Повертаються до пункту 3.

Правило прямокутника:

	a_1	$\cdots$	a_2		← Базисний рядок
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
	a_3	$\cdots$	a_4		

↑

Базисний стовпець

$$a_4 = a_4 - \frac{a_2 a_3}{a_1}.$$

Метод штучного базису

У загальному випадку після приведення задачі ЛП до канонічного вигляду безпосередньо визначити опорний план не вдається, тому що серед векторів P_j, $j = \overline{1,n}$ може не бути m одиничних. У цьому випадку задачу ЛП розв’язують методом штучного базису.

Не втрачаючи загальності викладення матеріалу, будемо вважати, що в матриці А системи обмежень немає жодного одиничного вектора. Тоді до лівої частини кожного $i-$го обмеження додаємо свою невід’ємну штучну змінну x_{n+i}, $i = \overline{1,m}$, і задачу записуємо у такому вигляді:

Максимізувати функцію

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n - M x_{n+1} - \cdots - M x_{n+m} \tag{1.46}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{1.47}$$

$$\begin{matrix} x_j \geq 0, & j = \overline{1, n+m} \\ b_i \geq 0, & i = \overline{1, m} \end{matrix} \tag{1.48}$$

Задача (1.46) – (1.48) називається розширеною по відношенню до вихідної задачі (1.43) – (1.45). Тут M деякі великі додатні числа, значення яких не задаються.

Розширена задача має такий опорний план:

$$X = \Big(b_1, b_2, \dots, b_m, \underbrace{0{,}0, \dots, 0}_{n - \text{нулів}}\Big).$$

Змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ називаються **штучними**, а система одиничних векторів $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ утворює **штучний базис**.

Якщо в оптимальному плані $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*)$ задачі (1.46) – (1.48) значення штучних змінних дорівнюють нулю, то $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ є оптимальним планом вихідної задачі (1.43) – (1.45).

Тому процес розв'язання задачі (1.43) – (1.45) включає наступні етапи:

1. Для вихідної задачі складають розширену задачу вигляду (1.46) – (1.48).
2. Знаходять опорний план розширеної задачі.
3. За допомогою обчислень симплекс-методу виключають штучні вектори з базису. У результаті знаходять опорний план вихідної задачі. Якщо штучні змінні виключити з базису не вдається, то задача (1.43) – (1.45) не має розв'язку.
4. Використовуючи знайдений опорний план вихідної задачі (1.43) – (1.45), або знаходять симплекс-методом її оптимальний план, або встановлюють її нерозв'язність.

Приклад 3. Розв'язати аналітично задачу (1.6) – (1.12).

Розв'язання. Спочатку обмеження поставленої задачі переписуються таким чином, аби всі їхні праві частини набували лише невід'ємних значень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Далі задача приводиться до канонічного вигляду:

$$F = 7x_1 - 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_6 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_7 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}.$$

Для утворення базису опорного плану треба п'ять одиничних векторів, оскільки m=5. Але серед векторів $P_j, j = \overline{1,7}$,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

є тільки три одиничних – P_3, P_4, P_7. Тому вводяться до розгляду невід'ємні штучні змінні x_8, x_9, які додаємо у цільову функцію з коефіцієнтом *M,* а також в третє й четверте обмеження з одиничним множником відповідно.
Розширена задача має вигляд:

$$F = 7x_1 - 2x_2 - Mx_8 - Mx_9 \to max, \tag{1.49}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_5 + x_8 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_6 + x_9 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_7 = 3, \end{cases} \tag{1.50}$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1,9}.$$

Із третього та четвертого рівнянь системи (1.50) знаходяться вирази для штучних змінних:

$$x_8 = 3 - 3x_1 - x_2 + x_5,$$
$$x_9 = 2 - x_1 - x_2 + x_6,$$

за допомогою яких змінні x_8, x_9 виключаються з цільової функції (1.49):

$$F = 7x_1 - 2x_2 - M(3 - 3x_1 - x_2 + x_5) - M(2 - x_1 - x_2 + x_6)$$
$$= (7 + 4M)x_1 + (-2 + 2M)x_2 - Mx_5 - Mx_6 - 5M \to max \tag{1.51}$$

Початковий опорний план розширеної задачі $X_0 = (0, 0, 5, 6, 0, 0, 3, 3, 2)$ визначається базисом P_3, P_4, P_8, P_9, P_7.

У таблиці 1.4 наведено вихідну-сиплекс таблицю. З неї видно, що поточний план не є оптимальним, бо $\Delta_1, \Delta_2 < 0$. Тому будується нова симплекс-таблиця (табл. 1.5) із введенням до базису P_1 замість P_8.

Таблиця 1.4 – Вихідна симплекс-таблиця

I	Базис	$C_б$	P_0	7	-2	0	0	0	0	0	-M	-M	$\frac{b_i}{a_{ij}}$	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9		
1	P_3	0	5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	5	
2	P_4	0	6	2	-3	0	1	0	0	0	0	0	3	
3	P_8	-M	3	$\boxed{3}$	1	0	0	-1	0	0	1	0	1	б. р.
4	P_9	-M	2	1	1	0	0	0	-1	0	0	1	2	
5	P_7	0	3	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	-	
6			0	-7	2	0	0	0	0	0	0	0		
7			-5	-4	-2	0	0	1	1	0	0	0		

б. ст.

Таблиця 1.5 – Перша розрахункова симплекс-таблиця

I	Базис	$C_б$	P_0	7	-2	0	0	0	0	0	-M	$\frac{b_i}{a_{ij}}$	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_9		
1	P_3	0	4	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	6	
2	P_4	0	4	0	$-\frac{11}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	-	
3	P_1	7	1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	3	
4	P_9	-M	1	0	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	б. р.
5	P_7	0	4	0	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	3	
6			7	0	$\frac{13}{3}$	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	0	0		
7			-1	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	0		

б. ст.

Отриманий опорний план $X_1 = (1, 0, 4, 4, 0, 0, 4, 0, 1)$ знову не є оптимальним, оскільки $\Delta_2, \Delta_5 < 0$. Тому було побудовано нову симплекс-таблицю (табл. 1.6) із введенням до базису P_2 замість P_9.

Таблиця 1.6 – Друга розрахункова симплекс-таблиця

I	Базис	$C_б$	P_0	7	-2	0	0	0	0	0	$\frac{b_i}{a_{ij}}$	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
1	P_3	0	3	0	0	1	0	0	1	0	-	
2	P_4	0	$\frac{19}{2}$	0	0	0	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{2}$	0	$\frac{19}{5}$	
3	P_1	7	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-	
4	P_2	-2	$\frac{3}{2}$	0	1	0	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	0	3	б. р.
5	P_7	0	2	0	0	0	0	-1	2	1	-	
6			$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	0		
7			0	0	0	0	0	0	0	0		
								б. ст.				

Отриманий опорний план $X_2 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, \frac{19}{2}, 0, 0, 2)$ знову не є оптимальним, оскільки $\Delta_5 < 0$. Тому перераховується нова симплекс-таблиця (табл. 1.7) із введенням до базису P_5 замість P_2.

Таблиця 1.7 – Третя розрахункова симплекс-таблиця

I	Базис	$C_б$	P_0	7	-2	0	0	0	0	0	$\frac{b_i}{a_{ij}}$	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
1	P_3	0	3	0	0	1	0	0	1	0	3	
2	P_4	0	2	0	-5	0	1	0	$\boxed{2}$	0	1	б. р.
3	P_1	7	2	1	1	0	0	0	-1	0	-	
4	P_5	0	3	0	2	0	0	1	-3	0	-	
5	P_7	0	5	0	2	0	0	0	-1	1	-	
6			14	0	9	0	0	0	-7	0		
									б. ст.			

Отриманий опорний план $X_3 = (2, 0, 3, 2, 3, 0, 5)$ знову не є оптимальним, оскільки $\Delta_6 < 0$. Тому було побудовано нову симплекс-таблицю (табл. 1.8) із введенням до базису P_6 замість P_4.

Таблиця 1.8 – Четверта розрахункова симплекс-таблиця

I	Базис	$C_б$	P_0	7	-2	0	0	0	0	0	$\frac{b_i}{a_{ij}}$	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
1	P_3	0	2	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{4}{5}$	б. р.
2	P_6	0	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	-	
3	P_1	7	3	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-	
4	P_5	0	6	0	$-\frac{11}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-	
5	P_7	0	6	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-	
6			21	0	$-\frac{17}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	0	0	0		
					б. ст.							

Отриманий опорний план $X_4 = (3, 0, 2, 0, 6, 1, 6)$ знову не є оптимальним, оскільки $\Delta_2 < 0$. Тому було побудовано нову симплекс-таблицю (табл. 1.9) із введенням до базису P_2 замість P_3.

Таблиця 1.9 – П’ята розрахункова симплекс-таблиця

I	Базис	$C_б$	P_0	7	-2	0	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_2	-2	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0
2	P_6	0	3	0	0	1	0	0	1	0
3	P_1	7	$\frac{21}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0
4	P_5	0	$\frac{52}{5}$	0	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	0
5	P_7	0	$\frac{32}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	1
6			$\frac{139}{5}$	0	0	$\frac{17}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	0	0

Оскільки усі значення $\Delta_j \geq 0, j = \overline{1,7}$, то отриманий опорний план $X_5 = (\frac{21}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0, \frac{52}{5}, 3, \frac{32}{5})$ є оптимальним.

$$F_{max}(X_5) = 7x_1 - 2x_2 = 7 \cdot \frac{21}{5} - 2 \cdot \frac{4}{5} = 27.8.$$

1.4.2. Статус ресурсів

Статус ресурсів, який може бути дефіцитним або недефіцитним, визначається за результатами останньою симплекс-таблиці (див. табл. 1.9). Таблиця 1.10 демонструє статус ресурсів для поставленої задачі. Додатне значення залишкової змінної вказує на неповне використання відповідного ресурсу, тобто даний ресурс є недефіцитним. Якщо ж залишкова змінна дорівнює 0, це свідчить про повне споживання відповідного ресурсу.

Таблиця 1.10 – Статус ресурсів

Залишкова змінна	Статус ресурсу
$x_3 = 0$	Дефіцитний
$x_4 = 0$	Дефіцитний
$x_5 = \frac{52}{5}$	Недефіцитний
$x_6 = 3$	Недефіцитний
$x_7 = \frac{32}{5}$	Недефіцитний

1.4.3. Цінність ресурсу

Цінність ресурсу характеризується величиною покращення оптимального значення цільової функції F, яка припадає на одиницю приросту обсягу даного ресурсу. Цінність ресурсу завжди можна встановити за значеннями коефіцієнтів при змінних початкового базису, що фігурують у Δ-рівнянні оптимальної симплекс-таблиці.

Відтак, інформація щодо цінності ресурсів задачі (1.6) – (1.12) міститься також в остаточній симплекс-таблиці (див. табл. 1.9): коефіцієнти, які відповідають значенням цінності ресурсів y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, дорівнюють відповідно $\frac{17}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0$. Це означає, що збільшення максимальних щоденних потужностей виробництва кефіру та йогурту викликає збільшення (зменшення) щоденного прибутку молокозаводу «Молочне дитинство» із коефіцієнтом пропорційності, який дорівнює 3.4.

Аналогічно, при збільшенні (зменшенні) різниці між кількістю закваски зі значним вмістом живих бактерій, яка щоденно використовується для виготовлення кефіру та йогурту, щоденний прибуток даного підприємства теж збільшується із коефіцієнтом пропорційності 1.8.

Цінність третього, четвертого та п’ятого ресурсів є нульовою, оскільки вони не є дефіцитними.

1.4.4. Максимальна зміна запасу ресурсу

Дослідимо вплив зміни запасу ресурсу на оптимальність отриманого розв'язку задачі лінійного програмування.

Спочатку розглянемо випадок, коли запас першого ресурсу зміниться на Δ_1 (змінюються максимальні щоденні потужності виробництва кефіру та йогурту на молокозаводі «Молочне дитинство»). Отже, запас першого ресурсу складає $5 + \Delta_1$. У випадку додатної (від'ємної) величини Δ_1 запас ресурсу збільшується (зменшується).

У таблиці 1.11 подано значення змін запасу першого ресурсу на кожному етапі обчислень за методом штучного базису.

Таблиця 1.11 – Зміни запасу першого ресурсу на кожному етапі обчислень за методом штучного базису

Рівняння	Значення елементів правої частини на відповідних ітераціях				
	(початок)	1	2	3	4	(оптимум)
F	0	7	$\frac{1}{2}$	14	21	$\frac{139}{5}+\frac{17}{5}\Delta_1$
1	$5+\Delta_1$	$4+\Delta_1$	$3+\Delta_1$	$3+\Delta_1$	$2+\Delta_1$	$\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\Delta_1$
2	6	4	$\frac{19}{2}$	2	1	$3+\Delta_1$
3	3	1	$\frac{1}{2}$	2	3	$\frac{21}{5}+\frac{3}{5}\Delta_1$
4	2	1	$\frac{3}{2}$	3	6	$\frac{52}{5}+\frac{11}{5}\Delta_1$
5	3	4	2	5	6	$\frac{32}{5}+\frac{1}{5}\Delta_1$

Зміна запасу ресурсу може вплинути лише на допустимість поточного оптимального розв'язку. Через це Δ_1 не може приймати значень, за яких будь-яка з базисних змінних стане від'ємною. Звідси випливає те, що Δ_1 повинна приймати лише такі значення, за яких виконуватиметься умова додатності правих частин обмежень у симплекс-таблиці, котра відповідає знайденому оптимальному розв'язку. Відтак, отримаємо такі обмеження для величини Δ_1:

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\Delta_1 \geq 0, \tag{1.51}$$

$$3+\Delta_1 \geq 0, \tag{1.52}$$

$$\frac{21}{5}+\frac{3}{5}\Delta_1 \geq 0, \tag{1.53}$$

$$\frac{52}{5}+\frac{11}{5}\Delta_1 \geq 0, \tag{1.54}$$

$$\frac{32}{5}+\frac{1}{5}\Delta_1 \geq 0. \quad (1.55)$$

Аби визначити інтервал зміни значення величини Δ_1, за якого виконується умова додатності правих частин обмежень у симплекс-таблиці, було розглянуто два випадки.

Перший випадок: $\Delta_1 > 0$, відтак, співвідношення (1.51) – (1.55) виконуються завжди.

Другий випадок: $\Delta_1 < 0$. У такому разі умови (1.51) – (1.55) виконуються лише за таких значень величини Δ_1:

$$\Delta_1 \geq -2, \quad (1.56)$$

$$\Delta_1 \geq -3, \quad (1.57)$$

$$\Delta_1 \geq -7, \quad (1.58)$$

$$\Delta_1 \geq -\frac{52}{11}, \quad (1.59)$$

$$\Delta_1 \geq -32. \quad (1.60)$$

Усі п’ять нерівностей (1.51) – (1.55) виконуються, коли $\Delta_1 \geq -2$. Об’єднуючи результатів обчислень для обох випадків, отримуємо значення величини Δ_1, за яких поточний оптимальний розв’язок залишається допустимим, а саме:

$$-2 \leq \Delta_1 \leq +\infty.$$

Значення Δ_1, які знаходяться за межами цього інтервалу, спричиняють нову сукупність базисних змінних.

Розглянемо тепер припущення про зміну запасу другого ресурсу на Δ_2. У табл. 1.12 наведено значення змін запасу другого ресурсу на кожному етапі обчислень за методом штучного базису.

Таблиця 1.12 – Зміни запасу другого ресурсу на кожному етапі обчислень за методом штучного базису

Рівняння	Значення елементів правої частини на відповідних ітераціях					
	(початок)	1	2	3	4	(оптимум)
F	0	7	$\frac{1}{2}$	14	$21+\frac{7}{2}\Delta_2$	$\frac{139}{5}+\frac{9}{5}\Delta_2$
1	5	4	3	3	$2-\frac{1}{2}\Delta_2$	$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\Delta_2$
2	$6+\Delta_2$	$4+\Delta_2$	$\frac{19}{2}+\Delta_2$	$2+\Delta_2$	$1+\frac{1}{2}\Delta_2$	3
3	3	1	$\frac{1}{2}$	2	$3+\frac{1}{2}\Delta_2$	$\frac{21}{5}+\frac{1}{5}\Delta_2$
4	2	1	$\frac{3}{2}$	3	$6+\frac{3}{2}\Delta_2$	$\frac{52}{5}+\frac{2}{5}\Delta_2$
5	3	4	2	5	$6+\frac{1}{2}\Delta_2$	$\frac{32}{5}+\frac{2}{5}\Delta_2$

Величина Δ_2 мусить приймати лише такі значення, за яких виконується умова додатності правих частин обмежень у симплекс-таблиці, котра відповідає знайденому оптимальному розв'язку. Розглянувши два випадки, коли Δ_2 є додатною і від'ємною, отримаємо, що поточний оптимальний розв'язок залишається допустимим за умови:

$$-16 \le \Delta_2 \le 4.$$

1.4.5. Максимальні зміни коефіцієнтів питомого прибутку

Дослідимо вплив зміни коефіцієнтів питомого прибутку на оптимальність отриманого розв'язку задачі лінійного програмування (1.6) – (1.12).

Введемо величину δ_1, що відповідає зміні коефіцієнта питомого прибутку від продажу 1 тисячі упаковок кефіру, та δ_2, котра відповідає зміні коефіцієнта питомого прибутку від продажу 1 тисячі упаковок йогурту, виготовлених на молокозаводі «Молочне дитинство».

У такому випадку цільова функція задачі має вигляд:

$$F(\mathrm{c} + \delta_c) = (c_1 + \delta_1) \cdot x_1^* + (c_2 + \delta_2) \cdot x_2^* \to max. \qquad (1.61)$$

Із останньої симплекс-таблиці (див. табл. 1.9) виразимо основні базисні змінні через небазисні:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{21}{5} - \dfrac{3}{5}x_3^* - \dfrac{1}{5}x_4^*, \\ x_2^* = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}x_3^* + \dfrac{1}{5}x_4^*. \end{cases} \qquad (1.62)$$

Тоді, враховуючи (1.62), цільова функція запишеться так:

$$F(\mathrm{c} + \delta_c) = (7 + \delta_1) \cdot \left(\frac{21}{5} - \frac{3}{5}x_3^* - \frac{1}{5}x_4^*\right) + (-2 + \delta_2) \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x_3^* + \frac{1}{5}x_4^*\right).$$

Після зведення подібних доданків цей вираз набуває вигляду:

$$F(\mathrm{c} + \delta_c) = \frac{139}{5} + \frac{21}{5}\delta_1 + \frac{4}{5}\delta_2 + x_3^* \cdot (-\frac{17}{5} - \frac{3}{5}\delta_1 - \frac{2}{5}\delta_2) + x_4^* \cdot \left(-\frac{9}{5} - \frac{1}{5}\delta_1 + \frac{1}{5}\delta_2\right). \qquad (1.63)$$

Аби поточний оптимальний розв'язок залишався незмінним, коефіцієнти при змінних x_3^* та x_4^* із формули (1.63) мають залишатися недодатними:

$$\begin{cases} -\dfrac{17}{5} - \dfrac{3}{5}\delta_1 - \dfrac{2}{5}\delta_2 \le 0, \\ -\dfrac{9}{5} - \dfrac{1}{5}\delta_1 + \dfrac{1}{5}\delta_2 \le 0. \end{cases} \qquad (1.64)$$

1) Нехай $\delta_1 = 0$. Тоді при незмінному коефіцієнті питомого прибутку від продажу першого товару, тобто кефіру, система (1.64) запишеться так:

$$\begin{cases} 2\delta_2 \ge -17, \\ -\delta_2 \ge -9. \end{cases}$$

А, отже, при значеннях величини δ_2, які входять до інтервалу

$$-8.5 \le \delta_2 \le 9, \qquad (1.65)$$

поточний оптимальний розв'язок задачі (1.6) – (1.12) залишається незмінним.

2) Розглянемо випадок, коли $\delta_2 = 0$. При незмінному коефіцієнті питомого прибутку від продажу другого товару, тобто йогурту, система (1.64) має вигляд:

$$\begin{cases} -3\delta_1 \leq 17, \\ -\delta_1 \leq 9. \end{cases}$$

Звідки випливає, що поточний оптимальний розв'язок задачі(1.6) – (1.12) залишається незмінним, коли $-5\frac{2}{3} \leq \delta_1 \leq +\infty$.

3) Нехай тепер відбуваються одночасні зміни коефіцієнтів питомого прибутку від продажу обох видів продукції, наприклад: $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 2$. В такому разі коефіцієнт при другій змінній в цільовій функції дорівнюватиме нулю, що на практиці може відповідати ситуації, коли витрату на доставку йогурту взяла на себе держава (згідно із змінами умов державної пільгової програми для підприємств харчової промисловості, у якій бере участь молокозавод «Молочне дитинство»). Після підставлення значень величин $\delta_1 = 2$ та $\delta_2 = 2$ у систему нерівностей (1.65) отримуємо нові нерівності:

$$\begin{cases} 10 \geq -17, \\ 0 \geq -9, \end{cases}$$

обидві з яких є правильними, а отже, вищезазначена зміна коефіцієнтів питомого прибутку не призвела до недопустимості поточного оптимального розв'язку. Він залишився незмінним.

Якщо, наприклад, $\delta_1 = -5$, $\delta_2 = -2$, перша з нерівностей (1.65) не виконується, що призводить до недопустимості поточного оптимального розв'язку. Тоді новий оптимальний план випуску продукції розраховуємо, розв'язуючи задачу максимізації функції $F = 2x_1 - 4x_2$ за обмежень (1.7) – (1.12). Застосовуючи М-метод, отримаємо кінцеву сиплекс-таблицю (див. табл. 1.13). Опорний план $X_4 = (3, 0, 2, 0, 6, 1, 6)$ є оптимальним, на ньому досягається $F_{max}(X_4) = 2x_1 - 4x_2 = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 = 6$.

Таблиця 1.13 – Кінцева розрахункова симплекс-таблиця

I	Базис	$C_б$	P_0	7	-2	0	0	0	0	0	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
1	P_3	0	2	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{4}{5}$
2	P_6	0	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	-
3	P_1	2	3	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-
4	P_5	0	6	0	$-\frac{11}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-
5	P_7	0	6	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-
6			6	0	1	0	1	0	0	0	

2 ПРИКЛАД АНАЛІТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ НА ЧУТЛИВІСТЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ДВОЇСТИХ ОЦІНОК

2.1 Постановка двоїстої задачі

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі розглянемо на прикладі завдання оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва n видів продукції застосовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значенням $b_i (i = \overline{1,m})$. Норма витрат кожного з них на одиницю продукції становить $a_{ij} (j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m})$. Ціна одиниці продукції j-го виду дорівнює $c_j (j = \overline{1,n})$. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$max\, F = max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}) \;; \qquad x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Пряма задача полягає у визначенні оптимального плану виробництва продукції $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, який дає найбільший дохід при обмежених ресурсах.

Двоїста задача до поставленої прямої буде така:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y \ge c_j (j = \overline{1,n}); \qquad y_i \ge 0 (i = \overline{1,m}).$$

Економічний зміст двоїстої задачі: необхідно визначити оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів y_i, котрі використовуються для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою за умови, що витрати на ресурси при виробництві кожного виду продукції будуть не менше прибутку (виручки) від реалізації цієї продукції. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці і-го ресурсу, їх інколи ще називають **тіньовою ціною відповідного ресурсу**.

<u>Перша теорема двоїстості</u>. Якщо одна з взаємно двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має і друга, при цьому оптимальні значення їх лінійних функцій дорівнюють одне одному: $F_{max}=Z_{min}$. Якщо лінійна функція однієї із задач не обмежена, то умови другої несумісні.

<u>Друга теорема двоїстості</u>. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють абсолютним значенням коефіцієнтів при відповідних змінних лінійної функції вихідної задачі, що записана через неосновні змінні її оптимального розв'язку.

<u>Третя теорема двоїстості</u>. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють значенням часткових похідних лінійної функції $F_{max}(b)$ за відповідними аргументами, тобто

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i^*}, \quad i=1,2,\ldots,m.$$

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на **дефіцитні** та **недефіцитні** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний і-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є **недефіцитним**. Якщо ж двоїста оцінка $y_i>0$, то і-й ресурс застосовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається **дефіцитним**. У цьому разі величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), виготовляти її не вигідно, вона **нерентабельна,** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j=0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти її доцільно, вона **рентабельна,** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j>0$.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають можливість модифікувати оптимальний план задачі лінійного програмування відповідно до зміни умов прямої задачі й дістати при цьому такі результати.

1. Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та спричинити одну з таких ситуацій:
   - ✓ склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;
   - ✓ склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;
   - ✓ змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.
2. Уведення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв`язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

Введення нової змінної до математичної моделі задачі впливає на оптимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

Дослідження моделі на чутливість проведемо на прикладі прямої задачі (1.6) – (1.12):

$$F = 7x_1 - 2x_2 \to max \tag{2.1}$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \geq -3 \end{cases} \tag{2.2}$$

в умовах невід'ємності змінних $x_1, x_2 \geq 0$.

Двоїста до неї задача записується таким чином: мінімізувати значення функції

$$L = 5y_1 + 6y_2 - 3y_3 - 2y_4 + 3y_5 \tag{2.3}$$

за обмежень

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 - y_4 - y_5 \geq 7, \\ y_1 - 3y_2 - y_3 - y_4 + y_5 \geq -2 \end{cases} \tag{2.4}$$

в умовах невід'ємності змінних $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$.

Таблиця 2.1 демонструє відповідність між змінними прямої та двоїстої задач, а також їх оптимальні значення, отримані з кінцевої симплекс-таблиці (див. табл. 1.9). Далі під час дослідження моделі на чутливість будемо використовувати інформацію з цієї симплекс-таблиці.

Таблиця 2.1 – Відповідність між змінними прямої та двоїстої задач

$\frac{21}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{52}{5}$	3	$\frac{32}{5}$
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y_6	y_7	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	0	$\frac{17}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	0	0

2.2. Зміна правих частин обмежень

До ситуації, коли отриманий поточний розв'язок стає недопустимим, можуть призвести наступні зміни постановки задачі:

1) зміна запасів ресурсів (тобто правих частин обмежень);
2) введення нових обмежень.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

Зі співвідношень двоїстості випливає, що зміна правих частин обмежень може вплинути тільки на елементи правої частини симплекс-таблиці а, отже, тільки на те, чи залишиться розв'язок допустимим. Тому потрібно визначити нові значення елементів правої частини таблиці з використанням обчислювальних процедур.

Досліджуючи питання про те, запас якого з ресурсів слід збільшувати в першу чергу, зазвичай, використовуються так звані «тіньові ціни» (двоїсті оцінки). Аби визначити інтервал значень зміни запасу ресурсу, при яких тіньова ціна даного ресурсу, що фігурує в заключній симплекс-таблиці, залишається незмінною, необхідно виконати низку додаткових обчислень.

Приклад 4. Припустимо, що: 1) за новими технологічними нормами, що діють на молокозаводі «Молочне дитинство», кількість закваски, яка витрачається щоденно на виготовлення кефіру, не перевищує кількість закваски, котра витрачається щоденно на виготовлення йогурту, більше, ніж на 7 кг; 2) виробничі потужності молокозаводу «Молочне дитинство» знизилися до 2.9 тисяч упаковок виготовленої продукції за день. Як зміниться оптимальний прибуток і відповідний план виробництва у кожній з ситуацій?

Розв'язання. 1) За вказаних умов в прямій задачі (2.1), (2.2) права частина другого обмеження збільшиться з 6 до 7. Новий базисний розв'язок задачі матиме такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 7 \\ \frac{22}{5} \\ \frac{84}{5} \\ \frac{34}{5} \end{pmatrix}.$$

Оскільки елементи правої частини таблиці залишаються невід'ємними, то склад поточних базисних змінних не змінюється. Проте, вони набувають нових значень, а саме: $x_1 = \frac{22}{5}, x_2 = \frac{3}{5}, x_5 = \frac{84}{5}, x_6 = 7, x_7 = \frac{34}{5}, x_3 = x_4 = 0$. Цільова функція (формула (2.1)) досягає нового більшого значення:

$$F = 7x_1 - 2x_2 = 7 \cdot \frac{22}{5} - 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{148}{5} = 29.6.$$

Позаяк величина $\Delta_2 = 1$ не виходить за межі інтервалів стійкості двоїстих оцінок, приріст прибутку на $\Delta F = 29.6 - 27.8 = 1.8$ можна оцінити з меншими обчислювальними витратами, користуючись третьою теоремою двоїстості: $\Delta F = \Delta_2 y_2 = 1 \cdot \frac{9}{5} = 1.8$.

2) В прямій задачі (2.1) – (2.2) права частина першого обмеження зменшилася із 5 до 2.9. Новий базисний розв'язок задачі

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.9 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{25} \\ \frac{245}{50} \\ \frac{147}{50} \\ \frac{589}{50} \\ \frac{299}{50} \end{pmatrix}$$

не є допустимим, оскільки змінна x_2 приймає від'ємне значення. Величина зміни правої частини першого обмеження $\Delta_1 = -2.1$ знаходиться поза межами інтервалів стійкості двоїстих оцінок. А, отже, неможливо скористатися теоремами двоїстості. Для оцінки зміни прибутку слід розв'язати задачу за нових умов. Застосовуючи М-метод, отримуємо новий оптимальний план $X_4 = (2.9, 0, 0, 0.2, 5.7, 0.9, 5.9)$ і нове значення цільової функції: $F_{max}(X_4) = 7x_1 - 2x_2 = 7 \cdot 2.9 - 2 \cdot 0 = 20.3.$ Прибуток суттєво знижений.

2.3. Додавання нового обмеження

Введення додаткового обмеження може спричинити одну із зазначених нижче ситуацій.

1. Поточний розв'язок задовольняє нове обмеження. У цьому випадку дане обмеження не є зв'язним, і тому його додавання не змінює отриманого розв'язку.

2. Поточний розв'язок задовольняє новому обмеженню, значить є зв'язним, тоді за допомогою двоїстого симплекс-методу знаходиться новий розв'язок.

Приклад 5. Як зміниться оптимальний розв'язок задачі (2.1), (2.2) за умови доповнення моделі новим обмеженням:

а) $2x_1 + x_2 \leq 10$, (2.5)

б) $x_2 \geq 1$? (2.6)

Розв'язання. а) Нове обмеження математично може описувати витрати деякої корисної речовини, що додається до кефіру і йогурту, запас якої в лабораторії молокозаводу обмежений. Очевидно, що поточний оптимальний розв'язок, а саме $(x_1 = 4.2, x_2 = 0.8)$ задовольняє умову (2.5), а, відтак, залишається незмінним. На рис. 2.1 видно, що додаткова умова (ліва півплощина відносно прямої *NK*) є надлишковою. Але її врахування обмежує максимальну зміну запасу першого ресурсу із (2.2). Допустиме збільшення запасу даного ресурсу можна простежити на рис. 2.1, коли точка В максимуму цільової функції задачі (2.1), (2.2) переходить у точку К, де перетинаються прямі $2x_1 - 3x_2 = 6$ та $2x_1 + x_2 = 10$.

Новою множиною допустимих значень є багатокутник $NKCDEG$.

Для визначення граничного рівня збільшення першого ресурсу знаходяться точні значення координат т. K (4.5; 1). Підставляючи їх у ліву частину першого обмеження з (2.2), отримаємо:

$$x_1 + x_2 = 4.5 + 1 = 5.5.$$

Новій оптимальній точці K відповідає значення цільової функції: $F_{max} = 29.5$.

Відтак, при збільшенні виробничих потужностей молокозаводу «Молочне дитинство» до 5.5 тисяч упаковок продукції на день щоденний прибуток заводу становитиме 29.5 тисяч гривень.

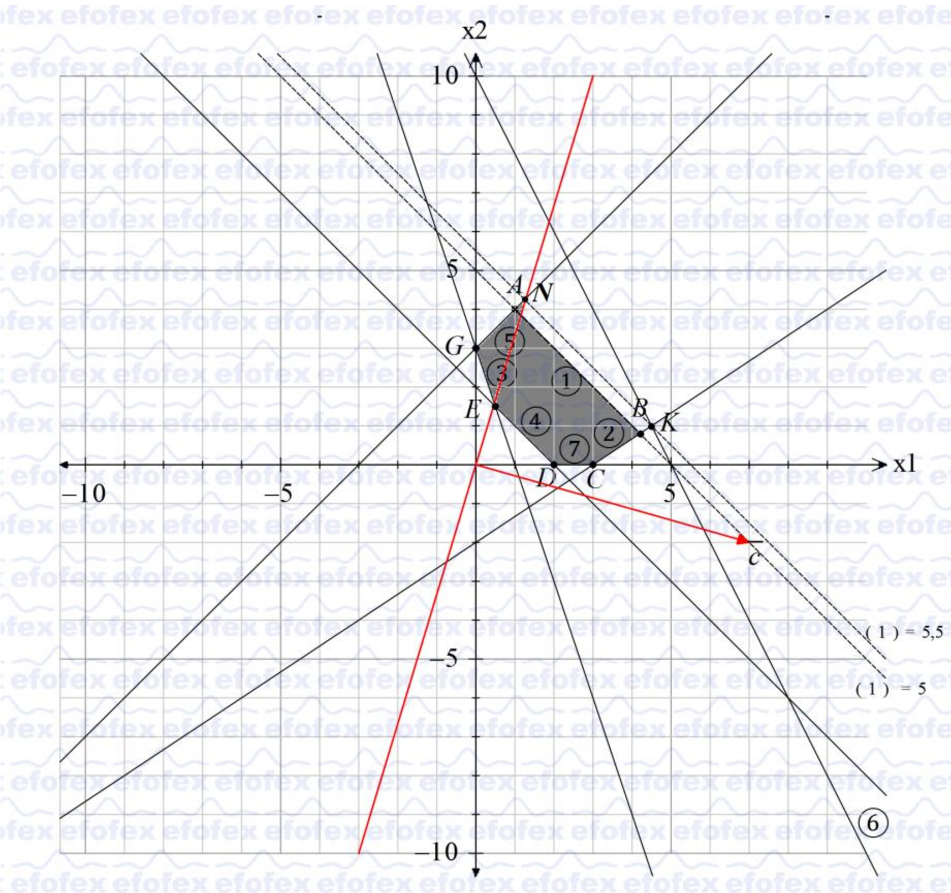


Рисунок 2.1 – Гранично допустиме збільшення запасу першого ресурсу після додавання нового обмеження

б) Доповнимо задачу (2.1), (2.2) обмеженням (2.6). На практиці воно може означати, що як мінімум 1 тисяча упаковок йогурту завод має виготовляти щодня. Очевидно, що поточний оптимальний розв’язок прямої задачі, а саме ($x_1 = 4.2, x_2 = 0.8$) не задовольняє нове обмеження. Через це виникає необхідність розв’язувати задачу наново з урахуванням умови (2.6).

На рис. 2.3 відтворений процес графічного розв’язання задачі (2.1), (2.2), (2.6). Оптимальною виявилася точка $B\ (4, 1)$, $F_{max} = 7 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 26$.

Такий самий результат можна отримати за допомогою методу штучного базису.

Нове оптимальне значення цільової функції $F_{max} = 26$ є гіршим за те, яке відповідало умовам задачі (2.1), (2.2). Даний результат є очікуваним, оскільки відомо, що додавання нового зв’язного обмеження не може покращити значення цільової функції.

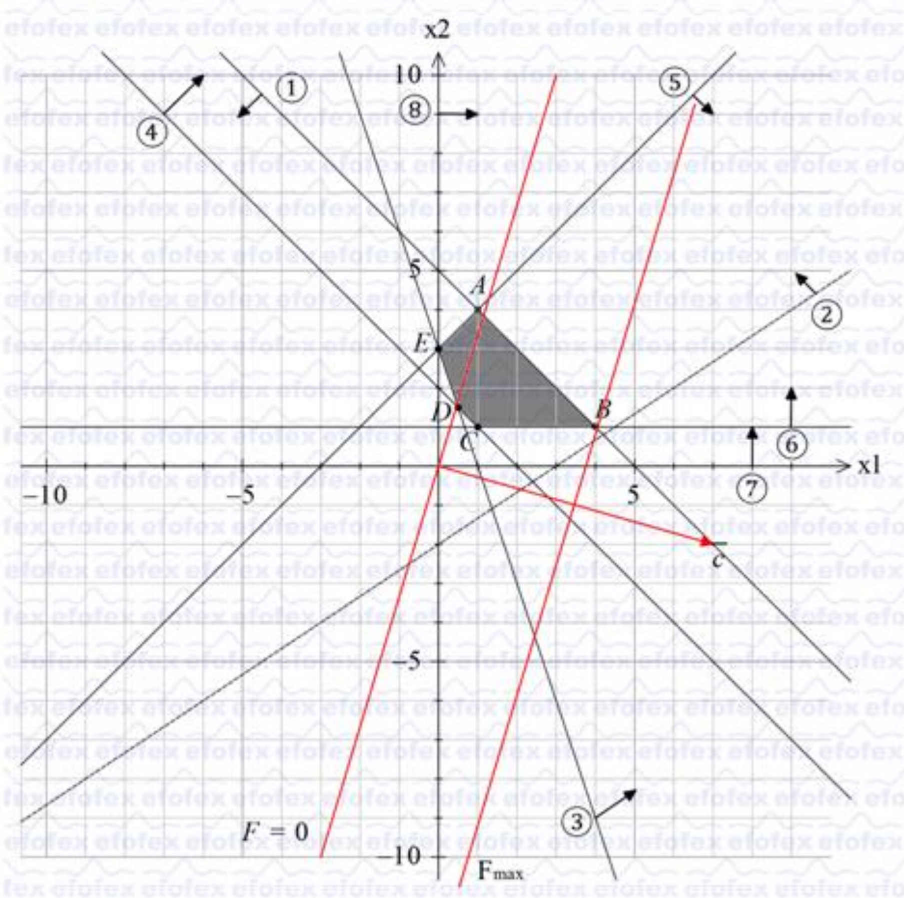


Рисунок 2.3 – Графічне розв’язання задачі ЛП (2.1), (2.2), (2.6)

2.4. Зміна умов завдання, що впливають на оптимальність розв’язку

Третій етап аналізу моделі на чутливість пов’язаний зі змінами умов завдання, які впливають на оптимальність розв’язку. Розглянемо вплив зміни коефіцієнтів цільової функції на збереження оптимальності поточного розв’язку. У такому випадку може скластися ситуація, коли зміни цільової функції пов’язані зі зміною коефіцієнтів при поточних базисних змінних. Тоді при розрахунках отримуються нові дієві оцінки, які потім використовуються для обчислення елементів F-рядка. У випадку існування зв’язку між змінами цільової функції та небазисними змінними при розрахунках елементів F-рядка використовуються поточні двоїсті оцінки.

Приклад 6. Припустимо, що цільова функція $F = 7x_1 - 2x_2$ задачі (2.1), (2.2) замінюється на таку:

$$F = 3x_1 - 5x_2$$

Як вплине це на оптимальний розв’язок?

Розв’язання. Отже, змінилися коефіцієнти при x_1 та x_2, які в даному випадку є базисними змінними поточного оптимального розв’язку. Знайдемо нові дієві оцінки:

$$(y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5) = (-5 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{5} \quad \frac{8}{5} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)$$

Коефіцієнти F-рядка обчислюються як різниці між лівими і правими частинами відповідних обмежень двоїстої задачі:

x_1-коефіцієнт = $y_1 + 2y_2 - 3y_3 - y_4 - y_5 = -\frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{8}{5} - 3 \cdot 0 - 0 - 0 = 3$,

x_2-коефіцієнт = $y_1 - 3y_2 - y_3 - y_4 + y_5 = -\frac{1}{5} - 3 \cdot \frac{8}{5} - 0 - 0 + 0 = -5$,

x_3-коефіцієнт =$y_1 - 0 = -\frac{1}{5}$,

x_4-коефіцієнт =$y_2 - 0 = \frac{8}{5}$,

x_5-коефіцієнт =$y_3 - 0 = 0$,

x_6-коефіцієнт =$y_4 - 0 = 0$,

x_7-коефіцієнт =$y_5 - 0 = 0$.

Із урахуванням нових коефіцієнтів F-рядка робимо висновок про те, що поточний розв'язок більше не є оптимальним. Обчислюємо новий оптимальний розв'язок із використанням методу штучного базису: $X_* = (3,0,2,0,6,1,6)$; нове значення цільової функції $F_{max}(X_4) = 3x_1 - 5x_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 9$.

2.5. Зміна питомих витрат ресурсів

Відомо, що зміна коефіцієнта, який характеризує витрати ресурсу на одиницю продукції для розглянутого виду виробничої діяльності, може вплинути лише на оптимальність поточного розв'язку. Проведено аналіз на чутливість моделі задачі до зміни коефіцієнтів, що відповідають питомим витратам і пов'язані із небазисними змінними.

Розглянемо цільову функцію $F = 7x_1 - 2x_2$, Припустимо, що витрати молока для виготовлення йогурту збільшилося до 2 тонн на 1 тисячу упаковок. Таким чином, дані питомі витрати дорівнюватимуть -2 замість -1. Тоді друге обмеження двоїстої задачі (формула (2.4) набуває вигляду:

$$y_1 - y_2 - 2y_3 - y_4 + y_5 \geq -2.$$

Оскільки цільова функція не змінилася, то робимо висновок про те, що двоїсті оцінки залишилися незмінними, а саме: $y_1 = \frac{17}{5}, y_2 = \frac{9}{5}, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0$. Відтак, можна розрахувати нове значення x_2-коефіцієнта в F-рядку: $x_2 = \frac{17}{5} - \frac{9}{5} - 2 \cdot 0 - 0 + 0 = \frac{8}{5}$. Дане значення виявилося невід'ємним. Отже, оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування (2.1), (2.2) залишився незмінним.

2.6. Додавання нового виду виробничої діяльності

П’ятий етап аналізу моделі на чутливість пов’язаний із додаванням нового виду виробничої діяльності.

На даному етапі було зроблено припущення про те, що у початковій задачі лінійного програмування, котра задана формулами (2.1) – (2.2), з’являється новий вид виробничої діяльності на молокозаводі «Молочне дитинство», а саме виготовлення сметани. Обсяг щоденного її виробництва (у тисячах упаковок) було позначено змінною x_3. Відомо, що прибуток підприємства із продажів 1 тисячі упаковок сметани складає 5 тисяч гривень. При цьому загальні щоденні виробничі потужності молокозаводу залишаються незмінними. Також за технологічною картою відомо, що для виготовлення 1 тисячі упаковок сметани потрібно 2 тонни молока. Із урахуванням площі складських приміщень підприємства головний технолог висунув вимогу про те, що кожного дня має бути витрачено не менше 3 тонн молока. У протилежному випадку складські приміщення будуть перевантаженими, що призведе до псування молочної продукції.

Крім того, технологічними нормами також передбачається те, що на виготовлення 1 тисячі упаковок сметани витрачається 1 кг закваски зі значним вмістом живих бактерій. Необхідно, аби кількість закваски, яка витрачається щоденно на виготовлення кефіру та сметани, не перевищувала кількості закваски, яка витрачається щоденно на виготовлення йогурту, більше, ніж на 6 кг.

До того ж за проведеними дослідженнями попиту споживачів на продукцію молокозаводу «Молочне дитинство» було визначено, що щоденний попит на йогурти, що виготовляються на ньому, не перевищує попиту на виготовлений кефір та сметану більше, ніж на 3 тисячі упаковок товару.

Із урахуванням усіх вищезазначених умов та обмежень було складено таку математичну постановку описаної задачі. Необхідно максимізувати значення функції

$$F = 7x_1 - 2x_2 + 5x_3 \tag{2.8}$$

за обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge -3, \end{cases} \tag{2.9}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Двоїста задача до прямої задачі, заданої формулами (2.8), (2.9), записується так: мінімізувати значення функції

$$L = 5y_1 + 6y_2 - 3y_3 - 2y_4 + 3y_5 \tag{2.10}$$

за обмежень

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 - y_4 - y_5 \geq 7, \\ y_1 - 3y_2 - y_3 - y_4 + y_5 \geq -2, \\ y_1 + y_2 - 3y_3 - y_4 - y_5 \geq 5. \end{cases} \quad (2.11)$$

в умовах невід'ємності змінних $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$.

Розширена задача до (2.8), (2.9) має вигляд:

$$F = 7x_1 - 2x_2 + 5x_3 - Mx_9 - Mx_{10} \rightarrow max, \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 + x_9 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_7 + x_{10} = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_8 = 3, \end{cases} \quad (2.88)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,10}.$$

Результуючу симплекс-таблицю 2.3 подано нижче.

Оскільки усі значення $\Delta_j \geq 0, j = \overline{1,8}$, то отриманий опорний план $X_5 = (\frac{21}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0, 0, \frac{52}{5}, 3, \frac{32}{5})$ є оптимальним.

$$F_{max}(X_5) = 7x_1 - 2x_2 = 7 \cdot \frac{21}{5} - 2 \cdot \frac{4}{5} = 27.8.$$

За результатами виконаних розрахунків робимо висновок, що новий вид виробничої діяльності на молокозаводі «Молочне дитинство», тобто виготовлення сметани за зазначених вище технологічних і технічних умов, є економічно невигідним.

Таблиця 2.3 – Кінцева розрахункова симплекс-таблиця задачі (2.8), (2.9)

I	Базис	$C_б$	P_0	7	-2	5	0	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_2	-2	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0
2	P_7	0	3	0	0	0	1	0	0	1	0
3	P_1	7	$\frac{21}{5}$	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0
4	P_6	0	$\frac{52}{5}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	0
5	P_8	0	$\frac{32}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	1
6			$\frac{139}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	0	0

До такого самого висновку можна дійти, використовуючи двоїсті оцінки і розраховуючи собівартість нової продукції за тіньовими цінами на ресурси:

$$\text{Собівартість}_3 = y_1^* a_{13} + y_2^* a_{23} + y_3^* a_{33} + y_4^* a_{43} + y_5^* a_{53} =$$
$$= \frac{17}{5} \cdot 1 + \frac{9}{5} \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = \frac{26}{5} = 5.2.$$

Позаяк собівартість нового виду продукції перевищує прибуток від її реалізації: $\text{собівартість}_3 \geq 5$, включення його у план виробництва не є доцільним.

3. ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ ЩОДО ОФОРМЛЕННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

3.1. Структура курсової роботи

Курсова робота повинна містити наступні розділи.

1) Титульний аркуш (додаток А).
2) Завдання на курсову роботу
3) Анотація
4) Зміст
5) Вступ
6) Основна частина:
   – теоретична частина (інтерпретація оптимізаційної задачі в термінах предметної області; математична модель задачі; графічне і аналітичне розв’язання; аналіз результатів; дослідження чутливості розв’язку щодо зміни вихідних параметрів; висновки);

   – практична частина (програмна реалізація алгоритму розв’язання задачі; тестування програми; відповідь; висновки).
7) Висновки.
8) Список використаних джерел.
9) Додатки.

3.2. Зміст розділів курсової роботи

На титульному аркуші необхідно вказати назву міністерства, якому підпорядковується заклад вищої освіти, назву закладу вищої освіти, де виконана робота, та його структурних підрозділів (факультет, кафедра), тему курсової роботи, прізвище, ім’я, по батькові автора, посаду, науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ім’я, по батькові наукового керівника, місто та рік. Зразок оформлення титульного аркуша курсової роботи наведено у додатку А. Титульна сторінка має бути підписана керівником та студентом у відповідних графах.

Завдання на курсову роботу оформлюється на бланках установленої форми (див. додаток Б). Його видача здійснюється науковим керівником в 1-й тиждень семестру, коли виконується курсова робота згідно з навчальним планом.

Анотація – це короткий виклад змісту курсової роботи.

Вона оформлюється на окремому аркуші в такій послідовності:

– прописними буквами пишеться слово «Анотація»;

– вказується тема курсової роботи;

– вказується прізвище, ініціали автора;

– у наступних 1-2 рядках пишуться ключові слова (в називному відмінку та за алфавітним порядком), які характеризують головний зміст роботи; кількість ключових слів – від 5 до 10;

– з нової строки пишеться текст анотації (0,3-0,5 стор.), вона мусить бути лаконічною, мати конкретну форму, але при цьому давати змістовну характеристику курсової роботи без побічної інформації; основне її призначення – охарактеризувати зміст роботи, основні напрямки дослідження; в ній необхідно в узагальненій формі подати головний результат курсової роботи та її особливості у практичному застосуванні; анотація пишеться від третьої особи в безособовій формі, її текст повинен бути максимально об'єктивним, змістовним і описувати тільки факти;

– вказується обсяг роботи (в сторінках), кількість рисунків, таблиць, джерел літератури, додатків.

Зразок оформлення анотації наведено в додатку В.

Зміст включає номери й найменування всіх розділів, параграфів, пунктів курсової роботи, а також вступу, висновків, списку використаної літератури і додатків із зазначенням номерів сторінок, на яких розміщається початок матеріалу. У випадку комп'ютерного набору тексту зміст зручно оформляти у вигляді таблиці з двох стовпчиків, один із яких містить назви розділів, підрозділів, а інший – нумерацію сторінок; зовнішні межі (рамки) таблиці не відображають.

У вступі необхідно обґрунтувати актуальність теми, сформулювати мету та завдання роботи, предмет та об'єкт дослідження, дати коротку характеристику проблеми, котру досліджують, описати структуру роботи, вказати методи та методики дослідження, визначити практичну спрямованість роботи.

Актуальність (лат. actualis – дієвість) теми дослідження – це її важливість, суттєве значення, відповідність сучасним потребам певної галузі науки та перспективам розвитку, практичним завданням відповідної сфери діяльності. Вона характеризує співвідношення між тим, що з даної проблеми вже відомо і що досліджується студентом уперше, і свідчить про те, для якої галузі науки чи виробництва мають цінність наукові результати роботи.

Шляхом критичного аналізу студент мусить обґрунтувати актуальність вибраної теми. Висвітлення актуальності не повинно бути багатослівним. Досить кількома реченнями висловити головне – сутність проблеми та необхідність її дослідження.

Мета курсової роботи як запланований результат має відображати спрямованість досліджень і за змістом відповідати темі роботи.

Для формулювання мети доцільно використовувати мовну конструкцію з інфінітивом (розкрити, встановити, виявити, розробити, проаналізувати, обґрунтувати, узагальнити, систематизувати), іменником у знахідному відмінку, що називає об'єкт дії (проблему, явище, функції, метод, модель, факти, елементи, сутність, систему тощо) та іменником (-ами) у родовому відмінку, котрий конкретизує об'єкт (розвитку, стратегії, управління, виробництва і т. ін.), наприклад: мета роботи – розробити моделі оцінки конкурентоздатності тощо. Не слід формулювати мету як «Дослідження…», «Вивчення…», позаяк ці слова вказують на засіб досягнення мети, а не на саму мету.

Мета роботи конкретизується у завданнях (як правило, 4 – 5 пунктів), які слід вирішити для її досягнення. Вони не мають бути глобальними, такими, що претендують стати темами окремних дипломних (магістерських) робіт чи дисертацій, та можуть включати такі складові:

– розв'язання певних теоретичних питань, які входять до загальної проблеми дослідження (наприклад, виявлення сутності понять, явищ, процесів, вивчення окремих методів та подальше їх вдосконалення, побудову моделей та розробку програмного забезпечення тощо);

– дослідження практики розв'язання даної проблеми, її типового стану, недоліків і труднощів, їх причин, особливостей, попереднього досвіду;

– обґрунтування необхідної системи заходів щодо розв'язання даної проблеми;

– розробку методичних рекомендацій та пропозицій щодо використання результатів дослідження у практичній діяльності.

Формулювати завдання слід якомога точніше, конкретніше, оскільки інформація про їх розв'язання складатиме зміст розділів курсової роботи.

Об'єкт і предмет дослідження співвідносяться між собою як загальне і часткове.

Об'єкт – це процес або явище щодо проблемної ситуації, вибраної для вивчення. Об'єктом дослідження в курсовій роботі може бути система, явище чи процес або окремі структурні одиниці будь-якої системи чи процесу, наприклад, процеси змін у суспільстві, діяльність окремих суб'єктів, стани і властивості системи, взаємодії і взаємозв'язки, залежності, функції, причини, механізми змін у процесі розвитку.

Предмет – це теоретичне відтворення дійсності, тих суттєвих зв'язків та відношень, які підлягають безпосередньому вивченню в даній роботі. Предмет вказує на аспект об'єкта, нові його властивості, відношення, функції. Предметом дослідження може бути одна з функцій, властивостей, характеристик об'єкта дослідження, його якості, галузь використання тощо.

Перелік методів дослідження, використаних для розв'язання поставлених в роботі завдань, необхідно подавати коротко та конкретно, визначаючи, що саме досліджувалось тим чи іншим методом. Це дасть можливість пересвідчитися в логічності та прийнятності виробу саме цих методів.

У курсовій роботі можуть застосовуватись наступні методи дослідження:

– методи емпіричного дослідження: спостереження, порівняння, вимірювання, експеримент;

– методи теоретичного дослідження: аналогія, екстраполяція, ідеалізація, формалізація, аксіоматичний метод, гіпотеза та припущення, історичний метод, системний підхід, систематизація, класифікація тощо.

– методи, що застосовують на емпіричному й теоретичному рівнях досліджень: абстрагування, аналіз, синтез, індукція, дедукція, моделювання та ін.

Розмір вступу не повинен перевищувати двох сторінок.

Основна частина курсової роботи поділяється на розділи.

У теоретичній частині курсової роботи здійснюється опис методів дослідження операцій (ідея методу, алгоритм методу) згідно із її темою з наведенням класу задач, до розв'язування яких дані методи можна застосовувати.

Хоча ця частина курсової роботи справді є теоретичною, необхідно сформулювати таку її назву, яка б відображала суть того, про що йдеться. Теоретична частина може містити кілька підпунктів, якщо це доцільно в структурі роботи. Структурування роботи на підрозділи, пункти, параграфи сприяє послідовності викладення інформації. Дотримуючись принципів послідовного та цілісного викладення наукових матеріалів, слід стисло й лаконічно висвітлити ступінь дослідження проблеми в сучасній вітчизняній та зарубіжній літературі, зазначивши ті питання чи аспекти проблеми, які необхідно вивчити.

У практичній частині курсової роботи студент здійснює постановку задачі, яку буде розв'язувати досліджуваними методами, будує економіко-математичну модель наведеної задачі, наводить практичну реалізацію даної задачі на конкретних числових даних та проводить аналіз отриманих результатів.

При програмній реалізації методу студент будує алгоритм, його блок-схему, створює комп'ютерну програму реалізації досліджуваного методу (текст програми слід додати у додатках) та подає інструкцію щодо її використання. Доцільно відобразити вікна програми, показати приклад розрахунку за її допомогою.

У висновках курсової роботи коротко формулюють результати, отримані у її процесі, викладають головні наукові та практичні результати досліджень, аргументуючи кількісними та якісними показниками. Висновки мусять інформувати про досягнення мети дослідження і виконання конкретних поставлених завдань. Необхідно відзначити можливість практичного застосування даної роботи, описати наявні недоліки й шляхи їхнього усунення.

Список використаних джерел повинен містити перелік джерел (Законів України, інструкцій, нормативних актів, книг, статей, методичних рекомендацій, посилань на ресурси глобальної мережі й т.п.), використаних при виконанні роботи. При написанні курсової роботи студент мусить використати не менше 15 джерел.

Пошук літератури за темою є досить трудомістким процесом, оскільки визначає ступінь інформованості в досліджуваній галузі. Список має охоплювати як літературу попередніх років, так і публікації періодичних видань останнього часу. Пошук у мережі Інтернет дає змогу отримати найновішу інформацію про стан вивченості проблеми та про головні останні напрямки сучасних досліджень. Слід заздалегідь потурбуватись про підготовку бібліографії та про коректність посилань у процесі написання роботи. Доцільно із самого початку готувати список використаних джерел згідно з вимогами до його оформлення на окремих аркушах паперу, записуючи прізвище автора, назву книги, рік видання та сторінку: це полегшує процес написання й оформлення роботи і гарантує коректність посилань.

У додатках подають матеріал, який є необхідним для повноти курсової роботи, але включення його до її основної частини може змінити впорядковане і логічне уявлення про дослідження; або ж матеріал, який не може бути розміщений в основній частині через великий обсяг, способи його відтворення або форму подання (схеми, таблиці, формули, розрахунки, опис комп’ютерних програм, розроблених у процесі виконання роботи та ін.).

4. ТЕХНІЧНІ ВИМОГИ ЩОДО ОФОРМЛЕННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Курсова робота оформлюється відповідно до вимог ДСТУ 3008-2015. «Інформація та документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура та правила оформлювання».

Текст курсової роботи має бути поданий від третьої особи. Не допускається використання виразів типу «я вирішив», «мною написана», «розглянемо». При написанні курсової роботи необхідно дотримуватись наукового стилю викладення матеріалу.

Текст друкується на білому папері формату А4 з використанням шрифту Times New Roman текстового редактора Word розміру 14 з 1,5 міжрядковим інтервалом, залишаючи поля таких розмірів: ліве – не менше 30 мм, праве – не менше 10 мм, верхнє – не менше 20 мм, нижнє – не менше 20 мм.

Обсяг основної текстової частини разом із ілюстративним матеріалом повинен складати 30-50 сторінок формату А4.

Текст курсової роботи ділять на розділи й нумерують. Заголовки розділів починаються з нової сторінки й друкуються посередині тексту великими літерами.

Аналогічно друкуються заголовки структурних частин курсової роботи: Анотація, Зміст, Вступ, Висновки, Список використаних джерел, Додатки, але вони не нумеруються. Тобто не можна друкувати: «1. АНОТАЦІЯ», «2. ЗМІСТ» або «Розділ 7. СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ». Номер розділу ставлять після слова «РОЗДІЛ», після номера крапку не ставлять, потім з нового рядка друкують заголовок розділу.

Заголовки параграфів та пунктів пишуть із абзацу, відступаючи ліворуч 1,25 см. У заголовку не допускаються переноси слів. Крапку наприкінці заголовку не ставлять.

Нумерація сторінок курсової роботи – наскрізна, включаючи додатки.

Нумерацію сторінок, розділів, підрозділів, пунктів, підпунктів, рисунків (малюнків), таблиць, формул подають арабськими цифрами без знаку №.

Першою сторінкою роботи є титульний аркуш, який включають до загальної нумерації сторінок. На титульному аркуші номер сторінки не ставлять. Завдання до курсової роботи не входить до загальної кількості сторінок та не нумерується.

Такі структурні частини, як анотація, зміст, вступ, висновки, список використаної літератури, додатки, нумерують звичайним чином, але порядковий номер на них не ставлять. На всіх інших сторінках номер проставляють у правому верхньому куті сторінки без крапки в кінці.

Не допускається розміщувати назву розділу, підрозділу, пункту, підпункту в нижній частині сторінки, якщо після неї розміщено тільки один рядок тексту.

Всю інформацію, запозичену з літературних джерел, необхідно чітко виділити (з посиланням на джерело).

Скріплюють курсову роботу за допомогою папки із швидкозшивачем.

Оформлення таблиць

Цифровий матеріал, як правило, оформлюють у вигляді наведеної нижче таблиці.

Таблиця 2.1 – Назва таблиці

Заголовок	*Заголовок графи*			
		Підзаголовок		

Таблиці нумерують послідовно арабськими цифрами в межах розділу. Номер таблиці складається з номера розділу і порядкового номера таблиці, відокремлених крапкою, наприклад, «Таблиця 2.1» – перша таблиця другого розділу.

Слово «Таблиця» вказують один раз зліва над першою частиною таблиці, над іншими частинами пишуть: «Продовження таблиці» із зазначенням номера таблиці.

Таблиці кожного додатка позначають окремою нумерацією арабськими цифрами з додаванням перед цифрою позначення додатка. На всі таблиці мають бути посилання в тексті, які складаються зі слова «таблиця» із зазначенням її номера.

Допускається розміщення таблиці вздовж довгого боку аркуша.

Якщо рядки або стовпці таблиці виходять за формат сторінки, то таблицю ділять на частини, які розміщують одна під одною або поряд, до того ж у кожній частині таблиці повторюють її заголовок і боковик. У разі поділу таблиці на частини допускається її заголовок або боковик заміняти відповідно номерами стовпців і рядків. Зокрема нумерують арабськими цифрами стовпці та (або) рядки першої частини таблиці.

Якщо в кінці сторінки таблиця переривається й її продовження буде на наступній сторінці, то в першій частині таблиці нижню горизонтальну лінію, що обмежує таблицю, не креслять.

Оформлення переліків

У тексті пунктів або підпунктів можуть бути переліки. Перед переліком ставлять двокрапку. Перед кожною позицією переліку слід ставити дефіс або (за необхідності посилання в тексті на один із переліків) малу літеру, після якої ставлять дужку. Для подальшої деталізації переліку необхідно використовувати арабські цифри, після яких ставлять дужку.

Приклад:

а) методи лінійного програмування;

б) методи нелінійного програмування:

1) методи штрафних функцій;

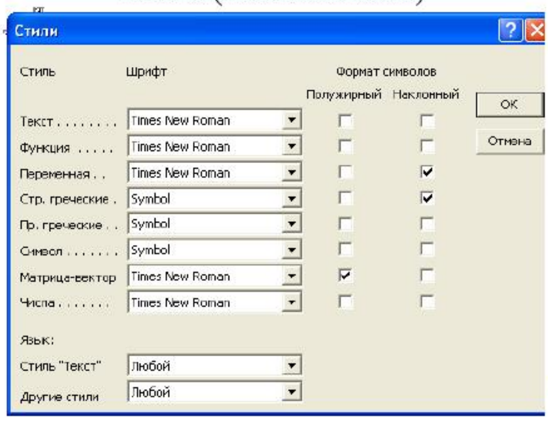
2) метод множників Лагранжа;

в) метод динамічного програмування.

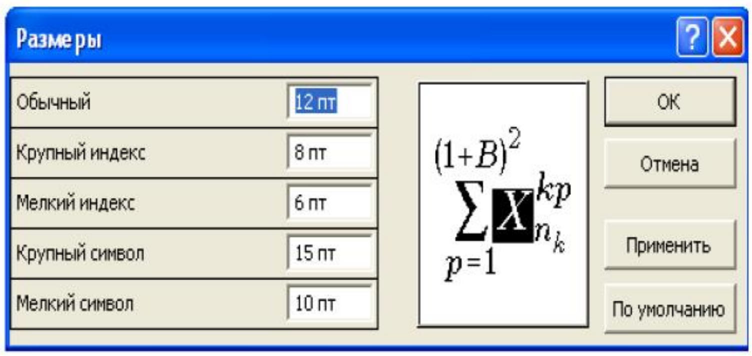
Оформлення формул

Набір формул здійснюється за допомогою Micrisoft Equation 3.0 з такими параметрами:

Стиль (математичний)



Розмір



Скановані формули, рисунки чи таблиці використовувати заборонено.

Формули нумерують (за наявності на них посилань) арабськими цифрами в межах розділу. Номери вказують з правої сторони аркуша на рівні формули в круглих дужках. Номер формули складається з номера розділу і порядкового номера формули, відокремлених крапкою, наприклад, (1.1). Посилання в тексті на порядкові номери формули дають у дужках, наприклад, у формулі (1.1). Формули в додатках нумерують окремо арабськими цифрами в межах кожного додатка з додаванням перед цифрою позначення додатка, наприклад: у формулі (А.1).

Пояснення значень символів і числових коефіцієнтів, що входять до формули, якщо вони не пояснювалися в тексті, слід наводити під формулою в тій самій послідовності, у якій їх подано, і кожне з нового рядка. Перед поясненням першого символу пишуть «де» без двокрапки.

Посилання в тексті

Посилання на джерела в тексті курсової роботи варто вказувати у квадратних дужках відповідно до номера джерела у списку використаних джерел, наприклад [5] або [35; 123] або, наприклад, «… у роботах [1 – 7]…». Якщо в тексті вжито цитату, необхідно, окрім посилання на літературне джерело, зазначити сторінку, наприклад, [123, с. 24].

У повторних посиланнях на таблиці та ілюстрації треба вказувати скорочене слово «дивись», наприклад: «див. табл. 1.3».

Оформлення графічного матеріалу

Графічний матеріал – рисунки – розміщують у роботі для встановлення властивостей або характеристик об’єкта дослідження, а також для кращого розуміння тексту роботи. На графічний матеріал мають бути посилання в тексті. Слід прагнути до того, щоб графічний матеріал наочно демонстрував мету курсової роботи, методику та техніку її досягнення, а також отримані результати.

Графічний матеріал розміщують безпосередньо після тексту, в якому про нього згадується вперше, або на наступній сторінці, а за необхідності – у додатку. Таблиці, що доповнюють графічний матеріал, подають після графічного матеріалу.

Графічний матеріал повинен бути розміщений так, щоб його було зручно розглядати без повертання роботи чи з повертанням тільки за годинниковою стрілкою. Пояснення до графічного матеріалу вказують під ним. Номер графічного матеріалу та його назву вказують нижче пояснень, наприклад, «Рисунок 1.1 – Залежність X від Y». Графічний матеріал разом із назвою відокремлюється від тексту відступами зверху та знизу.

Графічний матеріал (за винятком графічного матеріалу додатків) слід нумерувати арабськими цифрами порядковою нумерацією в межах розділу, наприклад: «Рисунок 2.1». Номер рисунка складається з номерів розділу та порядкового номера рисунка, відокремлених крапкою (Рисунок 2.1). Графічний матеріал кожного додатка позначають окремою нумерацією арабськими цифрами з додаванням перед цифрою позначення додатка (Рисунок А.3).

Оформлення списку використаних джерел

Список використаних джерел – елемент бібліографічного апарату, котрий містить бібліографічні описи використаних джерел і розміщується після висновків.

Джерела можна розміщувати одним із таких способів: у порядку появи посилань у тексті (найбільш зручний для користування і рекомендований при написанні курсової роботи), в алфавітному порядку прізвищ перших авторів або заголовків, у хронологічному порядку.

Опис навчальної, довідкової, методичної й іншої літератури обов’язково мусить містити: прізвища авторів, назву книги (її заголовок), відомості про повторність видання, місце видання, видання і рік видання, кількість сторінок.

Місто (місце) видання необхідно наводити повне у називному відмінку. Рік видання треба писати цифрами без слова «рік». Кількість сторінок записують із зазначенням слова «сторінка» у скороченому вигляді (с.).

Зразок оформлення бібліографічних посилань наведено у додатку Д.

Оформлення додатків

Додатки позначаються великою літерою (наприклад, Додаток А), за винятком Ґ, Є, З, І, Ї, Й, О, Ч, Ь, у тій послідовності, у якій на них посилаються в тексті. Додаток повинен мати заголовок, який відображає його зміст. Кожен додаток слід починати з нової сторінки із зазначенням угорі посередині сторінки слова «Додаток» і його позначенням, а під ним заголовок. Заголовок додатка друкують симетрично стосовно тексту з великої літери окремим рядком.

Оформлення літературних посилань

При написанні курсової роботи студент мусить обов’язково давати посилання на інформаційні джерела, матеріали з яких (формули, таблиці, схеми, графіки, висновки тощо) наводяться в роботі. Посилатися слід на останні видання публікацій. На більш ранні видання можна посилатися лише в тому разі, коли в них є матеріал, який не вміщено до останнього видання. Якщо студент використовує відомості, матеріали з монографій, оглядових статей, інших джерел з великою кількістю сторінок, тоді в посиланні необхідно точно вказати номери сторінок, що містять використані студентом цитати, ілюстрації, таблиці, формули. Посилання розміщується у квадратних дужках і містять порядковий номер джерела в списку використаних інформаційних джерел (додаток Б) із зазначенням сторінок, на яких знаходиться використаний матеріал, наприклад, [1, с. 7]. Посилання може також розміщуватися під текстом сторінки з цитатою у вигляді виноски, в якій вказують прізвище та ініціали автора, назву джерела, видавництво, рік видання та сторінку.

При посиланні на рисунки чи таблиці зазначають порядковий номер ілюстрації, наприклад, «рис. 2.1». При повторному посиланні вказують «див. рис. 2.2». При посиланнях на формули пишуть порядковий номер формули в круглих дужках, наприклад, «у формулі (1.2)».

5. ЗАХИСТ І КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Виконану і оформлену відповідно вищезазначених вимог курсову роботу студент повинен подати на кафедру системного аналізу та управління у встановлений термін для рецензування та визначення попередньої оцінки керівником. Рівень підготовки курсової роботи свідчить про ступінь засвоєння студентами здобутих знань.

Після ознайомлення керівника із роботою, визначення попередньої оцінки та формування зауважень, вона повертається студентові, який мусить доопрацювати її відповідно до зауважень керівника.

Після доопрацювання студент подає остаточний варіант курсової роботи на кафедру

Курсову роботу студент захищає публічно. Студент готує коротку доповідь (на 5 – 10 хв.), яка повинна відображати основні положення курсової роботи. Особливу увагу слід приділити висвітленню власного внеску в розробку проблеми. Після доповіді студент відповідає на запитання. При цьому можна користуватись роботою, тезами доповіді та ілюстративними матеріалами (матеріалами презентації).

Основні критерії оцінювання:

– повнота розкриття теми курсової роботи;
– результати, отримані в процесі дослідження;
– логічність та обґрунтованість висновків;
– рівень висвітлення в доповіді суті роботи;
– правильність та повнота відповідей на поставлені питання;
– відповідність оформлення роботи встановленим нормам та вимогам;
– своєчасність подання роботи на кафедру.

Результати виконаної курсової роботи подаються студентом у вигляді пояснювальної записки обсягом близько 40 – 45 сторінок. В ній наводяться, окрім відповідей на теоретичні запитання, також і математичні викладки та розрахунки, які супроводжуються ілюстративним матеріалом: схемами, графіками, діаграмами тощо. Пояснювальна записка оформлюється згідно із вимогами, які наведені у розділі 2. Крім роздрукованого звіту студенти здають викладачеві електронний документ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Коряшкіна Л.С. Практикум за курсом «Методи оптимізації та дослідження операцій». Частина I. Дослідження операцій: навч. посіб. / Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус / М-во освіти і науки України; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2020. – 182 с.

2. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: Навчальний посібник. / Л.О. Волонтир, Н.А. Потапова, І.М. Ушкаленко, І.А. Чіков. – Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020. – 334 с.

3. Постоптимальний аналіз моделей [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://studfile.net/preview/3740909/page:5/

4. Пошук рішень Excel [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://allref.com.ua/uk/skachaty/Poshuk_rishen-_%28Poisk_resheniiy%29_Excel

5. Коряшкіна Л.С. Практикум за курсом «Методи оптимізації та дослідження операцій». Частина ІІ. Нелінійне програмування: навч. посіб. / Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус / М-во освіти і науки України; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Д.: НТУ «ДП», 2023. – 220 с.

6. Коряшкіна Л.С. Методи оптимізації та дослідження операцій [Електронний ресурс] : навч. наоч. посіб. / Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус, О.Д. Станіна; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025 – 275 с.

7. Катренко А. В. Дослідження операцій: Підручник – 3-тє вид., стер. – Львів: «Магнолія – 2006», 2024. – 350 с.

8. Северин В.П., Нікуліна О.М. Методи та алгоритми багатовимірної безумовної оптимізації: Навчальний посібник для студентів комп'ютерних спеціальностей усіх форм навчання закладів вищої освіти / В.П. Северин, О.М. Нікуліна – Харків: НТУ «ХПІ», 2023. – 160 с.

9. Григорків В.С., Григорків М.В., Ярошенко О.І. Оптимізаційні методи та моделі : підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. 440 с.

10. Математичне моделювання та оптимізація процесів і систем. Частина 1 [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-фізичних систем в енергетиці» спеціальності 121 Інженерія програмного забезпечення / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. В. Барабаш, О. В. Свинчук, А. П. Мусієнко. Електронні текстові дані (1 файл: 3,92 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 160 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/57298

ДОДАТОК А. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Розв'язати задачу лінійного програмування та провести її аналіз на чутливість.

1	$F = 7x_1 - 2x_2 \to max$ $x_1 + x_2 \le 5$ $2x_1 - 3x_2 \le 6$ $3x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 + x_2 \ge 2$ $3x_1 + 8x_2 \le 24$ $x_1, x_2 \ge 0$	2	$F = x_1 + 2x_2 \to max$ $5x_1 - 2x_2 \le 4$ $-x_1 + 2x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
3	$F = 6x_1 + x_2 \to max$ $x_1 + 2x_2 \le 8$ $2x_1 - x_2 \ge 3$ $2x_1 - 3x_2 \le -6$ $x_1, x_2 \ge 0$	4	$F = 2x_1 + x_2 \to max$ $3x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1 + 2x_2 \le 12$ $-x_1 + 2x_2 \le 4$ $1{,}5x_1 - x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
5	$F = 4x_1 + 6x_2 \to max$ $x_1 - 2x_2 \le 2$ $2x_1 + 1x_2 \ge 3$ $x_1 + x_2 \le 7$ $x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$	6	$F = x_1 + 2x_2 \to max$ $6x_1 - 2x_2 \le 7$ $-x_1 + 3x_2 \le 9$ $2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
7	$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$ $2x_1 + x_2 \le 10$ $-x_1 + x_2 \ge 3$ $3x_1 - x_2 \ge -5$ $x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	8	$F = 3x_1 - 6x_2 \to max$ $5x_1 - 2x_3 \le 4$ $x_1 - 2x_2 \ge -4$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
9	$F = x_1 + x_2 \to max$ $2x_1 + 3x_2 \le 8$ $2x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \ge 1$ $x_1, x_2 \ge 0$	10	$F = 6x_1 - 5x \to max$ $2x_1 + 5x_2 \le 10$ $5x_1 + 2x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$
11	$F = 7x_1 + 2x_2 \to max$ $5x_1 + x_2 \ge 3$ $2x_1 + x_2 \le 4$ $-0{,}5x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 \le 1{,}5$ $x_1, x_2 \ge 0$	12	$F = x_1 + x_2 \to max$ $x_1 + 2x_2 \le 13$ $6x_1 - 3x_2 \le 18$ $-3x_1 + 7x_2 \le 21$ $x_1 \ge 1$ $x_2 \ge 1$ $x_1, x_2 \ge 0$
13	$F = 3x_1 + x_2 \to min$ $3x_1 + 5x_2 \ge 15$ $5x_1 + 3x_2 \ge 15$	14	$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$ $x_1 + 5x_2 \le 16$ $3x_1 + 2x_2 \le 12$

	$x_1 \geq 1$ $x_2 \geq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$		$2x_1 + 4x_2 \leq 16$ $x_1 \geq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$
15	$F = x_1 + x_2 \to max$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_1 + 2x_2 \leq 13$ $2x_1 + x_2 \leq 13$ $x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$	16	$F = 4x_1 + 3x_2 \to max$ $5x_1 + 2x_2 \leq 20$ $x_1 + 3x_2 \leq 15$ $x_1, x_2 \geq 0$
17	$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$ $x_1 + 2x_2 \leq 6$ $2x_1 + x_2 \leq 8$ $x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$	18	$F = 2x_1 + 2x_2 \to max$ $x_1 - x_2 \leq 3$ $x_1 + 2x_2 \geq 4$ $x_2 \leq 4$ $x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$
19	$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$ $-2x_1 + x_2 \leq 2$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1 + 2x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$	20	$F_1 = x_1 + 2x_2 \to max$ $x_1 + x_2 \leq 3$ $4x_1 - x_2 \leq 3$ $2x_2 - x_1 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
21	$F = x_1 + x_2 \to max$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 1$ $x_1 + 2x_2 \leq 14$ $2x_1 + x_2 \leq 13$ $3x_1 - x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$	22	$F = 3x_1 + x_2 \to min$ $3x_1 + 5x_2 \geq 15$ $5x_1 + 3x_2 \geq 15$ $x_1, x_2 \geq 0$
23	$F = 6x_1 - 5x_2 \to max$ $5x_1 + 2x_2 \leq 10$ $2x_1 + 5x_2 \leq 10$ $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	24	$F = 9x_1 + 2x_2 \to extr$ $x_1 + 4x_2 \leq 53$ $x_1 - x_2 \leq 3$ $7x_1 - 3x_2 \geq 71$ $x_1, x_2 \geq 0$
25	$F = 2x_1 + 3x_2 \to min$ $x_1 + 5x_2 \geq 10$ $3x_1 + 2x_2 \geq 12$ $2x_1 + 4x_2 \geq 10$ $x_1 \geq 1$ $x_2 \geq 0$	26	$F = -7x_1 + 2x_2 \to min$ $x_1 + x_2 \geq 1$ $5x_1 + x_2 \geq 3$ $-3x_1 + x_2 \leq 3$ $2x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
27	$F = x_1 + 2x_2 \to max$ $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ $2x_1 + x_2 \leq 6$ $x_1 + x_2 \geq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$	28	$F = -2x_1 + x_2 \to min$ $2x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1 + 3x_2 \geq 6$ $3x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$

29	$F = x_1 - x_2 \to max$ $-x_1 + x_2 \geq 8$ $8x_1 + 5x_2 \leq 80$ $x_1 - 2x_2 \leq 2$ $x_1 + 4x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$	30	$F = 7x_1 + x_2 \to max$ $x_1 + x_2 \leq 14$ $3x_1 - 5x_2 \leq 15$ $5x_1 + 3x_2 \geq 21$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
31	$F = 7x_1 - x_2 \to min$ $x_1 + x_2 \geq 3$ $5x_1 + x_2 \geq 5$ $x_1 + 5x_2 \geq 5$ $0 \leq x_1 \leq 1$ $0 \leq x_2 \leq 4$	32	$F = x_1 + x_2 \to min$ $3x_1 + x_2 \geq 8$ $x_1 + 2x_2 \geq 6$ $x_1 - x_2 \leq 3$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
33	$F = 2x_1 + 2x_2 \to max$ $3x_1 - 2x_2 \geq -6$ $x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 \leq 3$ $x_2 \leq 5$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	34	$F = 2x_1 + x_2 \to max$ $x_1 - x_2 \geq 4$ $x_1 + x_2 \geq 10$ $4x_1 - x_2 \leq 12$ $7x_1 + x_2 \leq 7$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
35	$F = x_1 + 3x_2 \to max$ $-x_1 + x_2 \leq 3$ $4x_1 + 3x_2 \leq 20$ $x_1, x_2 \geq 0$	36	$F = 2x_1 - 4x_2 \to max$ $8x_1 - 5x_2 \leq 16$ $x_1 + 3x_2 \geq 2$ $2x_1 + 7x_2 \leq 9$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
37	$F = x_1 + x_2 \to min$ $3x_1 + x_2 \geq 8$ $x_1 + 2x_2 \geq 6$ $x_1 - x_2 \leq 3$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	38	$F = 6x_1 + 4x_2 \to max$ $2x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - 2x_2 \leq 2$ $-x_1 + 2x_2 \geq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$
39	$F = 4x_1 + 3x_2 \to max(min)$ $5x_1 + 2x_2 \geq 20$ $x_1 + 3x_2 \leq 15$ $x_1, x_2 \geq 0$	40	$F = 3x_1 + 4x_2 \to min$ $-x_1 + x_2 \leq 3$ $5x_1 + 3x_2 \leq 97$ $x_1 + 7x_2 \geq 77$ $x_1, x_2 \geq 0$
41	$F = 9x_1 + 2x_2 \to extr$ $x_1 - x_2 \leq 3$ $7x_1 + 3x_2 \geq 71$ $x_1 + 4x_2 \leq 53$ $x_1, x_2 \geq 0$	42	$F = 5x_1 + 3x_2 \to extr$ $x_1 + 2x_2 \leq 34$ $-4x_1 + 9x_2 \geq 17$ $6x_1 - 5x_2 \geq 17$ $x_1, x_2 \geq 0$
43	$F = 5x_1 + x_2 \to extr$ $10x_1 - x_2 \geq 57$ $2x_1 + 3x_2 \leq 53$ $6x_1 - 7x_2 \leq 15$ $x_1, x_2 \geq 0$	44	$F = x_1 + x_2 \to max$ $4x_1 - x_2 \geq 6$ $9x_1 + 8x_2 \leq 157$ $-3x_1 + 11x_2 \geq 16$ $x_1, x_2 \geq 0$

45	$F = x_1 + 3x_2 \to extr$ $x_1 + 3x_2 \leq 37$ $-4x_1 + 9x_2 \geq 20$ $2x_1 - x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$	46	$F = -3x_1 + 6x_2 \to min$ $5x_1 - 2x_2 \leq 4$ $x_1 - 2x_2 \geq -4$ $x_1 + x_2 \geq 4$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
47	$F = 3x_1 + 3x_2 \to max$ $x_1 + x_2 \leq 8$ $3x_1 + 7x_2 \geq 21$ $x_1 + 2x_2 \geq 6$ $0 \leq x_1 \leq 1$ $0 \leq x_2 \leq 1$	48	$F = x_1 + x_2 \to max$ $x_1 + x_2 \geq 1$ $-5x_1 + x_2 \leq 0$ $-x_1 + 5x_2 \geq 0$ $x_1 + x_2 \leq 6$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
49	$F = x_1 + x_2 \to max$ $5x_1 - 2x_2 \leq 7$ $-x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1 + x_2 \leq 6$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	50	$F = -2x_1 + x_2 \to min$ $2x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1 + 3x_2 \geq 6$ $3x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
51	$F = -2x_1 + x_2 \to min$ $2x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1 + x_2 \leq 6$ $-3x_1 + 2x_2 \geq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$	52	$F = -3x_1 + x_2 \to min$ $x_1 + 2x_2 \geq 10$ $3x_1 + x_2 \geq 15$ $x_1 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$
53	$F = 2x_1 + 2x_2 \to max$ $3x_1 - 2x_2 \geq -6$ $x_1 + x_2 \geq 3$ $0 \leq x_1 \leq 9$ $0 \leq x_2 \leq 6$	54	$F = x_1 + 2x_2 \to max$ $x_1 + x_2 \leq 4$ $3x_1 + x_2 \geq 4$ $x_1 + 5x_2 \geq 4$ $0 \leq x_1 \leq 3;\ 0 \leq x_2 \leq 3$
55	$F = x_1 + 2x_2 \to max$ $5x_1 - 2x_2 \leq 4$ $x_1 - 2x_2 \geq -4$ $x_1 + x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$	56	$F = 2x_1 - x_2 \to max$ $x_1 - x_2 \geq -3$ $6x_1 + 7x_2 \leq 42$ $3x_1 - 2x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
57	$F = 2x_1 - 4x_2 \to min$ $8x_1 - 5x_2 \leq 16$ $x_1 + 3x_2 \geq 2$ $2x_1 + 7x_2 \leq 9$ $x_1, x_2 \geq 0$	58	$F = x_1 + x_2 \to max$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 1$ $x_1 + 2x_2 \leq 14$ $2x_1 + x_2 \leq 13$ $3x_1 - x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$
59	$F = 7x_1 + 2x_2 \to max$ $2x_1 - 2x_2 \leq 2$ $x_1 + 2x_2 \leq 6$ $2x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$	60	$F = 3x_1 + 3x_2 \to min$ $x_1 + 4x_2 \geq 4$ $4x_1 + x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$

ДОДАТОК Б. ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ТИТУЛЬНОЇ СТОРІНКИ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

Факультет інформаційних технологій

Кафедра системного аналізу та управління

КУРСОВА РОБОТА

З дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій»

на тему: Дослідження математичної моделі оптимізації на чутливість

Виконав:

Студент групи 124-24-1

Іванов Сергій Вікторович

Науковий керівник:

доцент Одновол М.М.

Дніпро 2024

ДОДАТОК В. ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ЗАВДАННЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

Факультет інформаційних технологій

Кафедра системного аналізу та управління

ЗАВДАННЯ

на виконання курсової роботи

З дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій»

Видане студенту ____

Групи___________

Тема курсової роботи____

____

Дата отримання завдання_________________

Підпис студента, який отримав завдання__________________________

Підпис керівника роботи____

ДОДАТОК Г. ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ АНОТАЦІЇ

АНОТАЦІЯ

«ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ НА ЧУТЛИВІСТЬ»

Іванов С.В.

Курсова робота: загальний обсяг роботи – 105 сторінок, 16 рисунків, 30 таблиць, 2 додатки на 25 сторінках, 17 джерел літератури.

Метою даної роботи є побудувати математичну модель задачі лінійного програмування для заданої практичної постановки завдання, виконати оптимізацію побудованої задачі лінійного програмування, провести аналіз на чутливість створеної математичної моделі задачі лінійного програмування після розрахунку її оптимального плану.

Об'єктом дослідження є оптимізаційні задачі лінійного програмування, які використовуються як моделі реальних об'єктів або процесів.

Предметом дослідження є графічні, аналітичні та програмні методи розв'язання задачі лінійного програмування, методи дослідження задачі лінійного програмування на чутливість.

Методи дослідження: методи лінійного математичного моделювання, графічний метод, метод штучного базису.

Значимість даної роботи полягає в дослідженні методів оптимізації та аналізу на чутливість задач лінійного програмування, які є моделями реальних практичних об'єктів або процесів.

Для оптимізації та дослідження на чутливість задачі лінійного програмування побудована її математична модель, за допомогою методу штучного базису визначено оптимальний план задачі та екстремальне значення її цільової функції, проведено аналіз моделі на чутливість.

Ключові слова: аналіз на чутливість, задача лінійного програмування, математична модель, метод штучного базису, моделювання, оптимальний план, оптимізаційна задача, симплекс-таблиця, цільова функція.

ДОДАТОК Д. ПРИКЛАДИ ОФОРМЛЕННЯ БІБЛІОГРАФІЧНИХ ПОСИЛАНЬ

Характеристика джерела	Приклад оформлення
Книги: Один автор	1. Катренко А.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник / А.В. Катренко – Львів : «Магнолія 2006», 2007. – 480 с. 2. Машина Н.І. Математичні методи в економіці : навч. посіб. / Н.І. Машина. – Київ : Центр навч. л-ри, 2003. – 148 с. 3. Коренівський Д.Г. Дестабілізуючий ефект параметричного білого шуму в неперивних та дискретних динамічних системах / Коренівський Д.Г. – К.: Ін-т математики, 2006. – 111 с. – (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України; т. 59).
Два автори	1. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці. Навч. пос. / О.В. Боровик, Л.В. Боровик – К.: ЦУЛ, 2007. – 424 с. 2. Дацко М.В. Дослідження операцій. Навч. пос. / М.В. Дацко, М.М. Карбовник – Львів: «ПАЇС», 2009. -288 с. 3. Федоренко І.К. Дослідження операцій в економіці: Підручник / І.К. Федоренко, О.І. Черняк – К.: Знання, 2007. – 558 с.
Три автори	1. Вітлінський В.В. Математичне програмування – навчально-методичний посібник для самост. вивч. дисц. / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко – вид. 2-ге без змін – Київ : КНЕУ, 2006. – 248 с. 2. Карагодова О.О. Дослідження операцій: Навч. пос. / О.О. Карагодова, В.Р. Кігель, В.Д. Рожок – К.: ЦУЛ, 2007. -256 с.
Чотири автори	1. Математичне програмування: [Навч. пос.] / М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак, В.М. Сороківський – львів: «Новий світ-2000», 2006. – 216 с. 2. Математичні методи дослідження операцій: [Навч. пос.] / В.П. Лавренчук, М.І. Букатар, Т.І. Готинчан, Г.С. Пасічник – Чернівці: Рута, 2005. – 360 с.
П’ять і більше авторів	1. Математичні моделі в менеджменті та маркетингу: Навч. посібник / [С.К. Рамазанов, Н.О. Рязанцева, Т.В. Ляшенко та ін.] – Луганськ : СПД Резніков В.С., 2010. – 311 с.
Без автора	1. Тіло чи особистість? Жіноча тілесність у вибраній малій українській прозі та графіці кінця XIX – початку XX століття : [антологія / упоряд.: Л. Таран, О. Лагутенко]. – К. : Грані-Т, 2007. – 190, [1] с. 2. Проблеми типологічної та квантитативної лексикології : [зб. наук. праць / наук. ред. Каліущенко В. та ін.]. –

	Чернівці : Рута, 2007. – 310 с.
Багатотомний документ	1. Бондаренко В.Г. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.1 / В.Г. Бондаренко, І.Ю. Канівська, С.М. Парамонова. – К. : НТУУ «КПІ», 2006. – 125 с.
Матеріали конференцій, з’їздів	1. Кібернетика в сучасних економічних процесах: зб. текстів виступів на республік. міжвуз. наук.-практ. конф. / Держкомстат України, Ін-т статистики, обліку та аудиту. – К. :ІСОА, 2002. – 147 с. 2. Матеріали IX з’їзду Асоціації українських банків, 30 червня 2000 р. інформ. бюл. – К. : Асоц. укр. банків, 2000. – 117 с. – (Спецвип.: 10 років АУБ). 3. Теорія і практика економіки і підприємництва : матер. VIII міжнар. наук.-практ. конф., 19-21 травня 2011 р. м. Алушта. – Сімферополь, 211. – 151 с.
Препринти	1. Панасюк М.І. Про точність визначення активності твердих радіоактивних відходів гамма-методами / Панасюк М.І., Скорбун А.Д., Сплошной Б.М. – Чорнобиль : Ін-т пробл. безпеки АЕС НАН України, 2006. – 7, [1] с. – (Препринт / НАН України, Ін-т пробл. безпеки АЕС ; 06-1).
Словники	1. Тимошенко З.І. Болонський процес в дії: словник-довідник основ. термінів і понять з орг. навч. процесу у вищ. навч. закл. / З.І. Тимошенко, О.І. Тимошенко. – К.: Європ. Ун-т, 2007. – 57 с. 2. Європейський союз : словник-довідник / [ред.-упоряд. М. Марченко]. – 2-ге вид., оновл. – К. : К.І.С., 2006. – 138 с.
Електронні ресурси	1. Економіко-математичне моделювання оптимізації обсягу і структури оборотних активів вугледобувних підприємств і джерел їхнього формування [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн. : http://www.referaty.pp.ua/abstracts/ua/ economica-pidpriemstva/ economica-pidpriemstva_4850.php 2. Савчук В.П. Оптимізація фондового портфелю [Електронний ресурс]. Режим доступу : htpp://www.management. com.ua/finance/fin013.html 3. Економіка торговельного підприємства: конспект лекцій [Електронний ресурс] / Наукова бібліотека «Буковина». – Режим доступу : htpp://buklib.net/index.php? option=com_jbook&catud=265

Навчальне видання

Одновол Микола Миколайович
Коряшкіна Лариса Сергіївна
Гаранжа Дмитро Миколайович

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Методичні рекомендації до виконання курсової роботи
для здобувачів ступеня бакалавра
освітньо-професійної програми «Системний аналіз»
зі спеціальності 124 Системний аналіз

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання 05.09.2024. Авт. арк. 2,79.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка».
49600, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19