Висновок. Використання в середовищі Ni LabVIEW підпрограм та циклової структури істотно скорочує тривалість розрахунків та побудови графіків досліджуваних процесів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дербаба В.А. Моделирование влияния погрешностей измерения общих нормалей зубьев на показатели разбраковки / В.А. Дербаба. // Восточно-Европейский журнал передових технологий. – Харьков. – 2013. – 6/4(66). – С.48–52. Режим доступу: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/18935/17117

2. Derbaba V.A. Evaluation of the adequacy of the statistical simulation modeling method while investigating the components presorting processes / В.А. Дербаба, В.В. Зіль, С.Т. Пацера // Науковий вісник Національного гірничого університету – Д.: НГУ, 2014. – № 5 (143). – С.45–50. Режим доступу: http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84914695179&partnerID=MN8TOARS

3. Пацера С.Т. Алгоритм имитационно-статистического моделирования случайных погрешностей измерения и контроля толщины зубьев и его программная реализация в Ni LabVIEW / С.Т. Пацера, В.І. Корсун, В.А. Дербаба, П.А. Ружин // Системи обробки інформації. «Метрологія, інформаційно-вимірювальні технології та системи » №6(143) – Харків. – 2016. – С. 116–119 (входить до наукометричних баз даних).

УДК 378:512:004

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

О.Е. Корнійчук

кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра загальнотехнічних та природничих дисциплін, Житомирський агротехнічний коледж, м. Житомир, Україна, e-mail: elena.k.02@i.ua

Анотація. У статті проведено дослідження і аналіз механічної системи, яка описує вільні загасаючі коливання, складається з тіла, пружини й амортизатора та не піддається впливу зовнішніх сил. Модель побудовано на основі теорії диференціальних рівнянь з використанням комп'ютерної графічної інтерпретації розв'язку.

Ключові слова: загасаючі коливання, диференціальне рівняння, амплітуда, амортизатор.

STUDY OF DIFFERENTIAL MODELS OF MECHANICAL SYSTEMS

Olena Korniichuk

Ph.D., Associate Professor, Department of General Technical and Natural Sciences, Zhytomyr Agro-technical College, Zhytomyr, Ukraine, e-mail: elena.k.02@i.ua

Abstract. *The article investigates and analyzes a mechanical system that describes free damped oscillations, consists of a body, a spring, a shock absorber and is not influenced by* *external forces. The model is constructed on the basis of the theory of differential equations using computer graphic interpretation of the solution.*

Keywords: damped oscillations, differential equation, amplitude, shock absorber.

Вступ. Нові вимоги до вищої освіти вимагають впровадження розвиваючих технологій навчання, перегляду змісту математичної освіти з точки зору її професійного спрямування. Зокрема, вивчення диференціальних рівнянь у курсі вищої математики в основному орієнтується на формальне розв'язування стандартних типів рівнянь. Задачі прикладного змісту та комп'ютерні засоби змінюють уявлення про диференціальні рівняння, їх роль та можливості застосувань у науці та інженерній справі.

Мета роботи: розширити діапазон реальних застосувань вищої математики, поглиблення теоретичних знань студентів та їх компетенцій щодо математичного моделювання, яке необхідне для вивчення спеціальних дисциплін, сприяє підвищенню рівня підготовки майбутніх фахівців, а саме у галузі агроінженерії та енергетики.

Виклад матеріалу. Важливим аспектом у моделюванні механічних конструкцій і систем є диференціальні рівняння. Простим прикладом коливань, що виникають у більш складних механічних системах є рух фізичного тіла, яке з'єднане з пружиною. Для багатьох подібних систем задача дослідження коливань зводиться до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо тіло масою *m*, що з'єднане з одного боку зі звичайною пружиною, яка надає опору як розтягненню, так і стисканню, а з іншого – з амортизатором (пристроєм, що поглинає удари). Тіло може рухатися вперед або назад, без тертя, по горизонтальній площині.

Нехай *x* – відстань від тіла до положення рівноваги. За законом Гука зворотня сила F_R (*reverse force*), з якою пружина діє на тіло: $F_R = -kx$, де *k* – коефіцієнт жорсткості пружини. Сила F_D, з якою діє амортизатор (*damping force*), пропорційна швидкості $v = \frac{dx}{dt}$ руху тіла:

$$F_D = -cv = -c\frac{dx}{dt} = -cx',$$

де *c* – коефіцієнт поглинання. Якщо крім сил F_Rта F_D на тіло діє й зовнішня сила (*external force*) $F_E = F(t)$, то рівнодіюча сил, що діють на тіло: $F = F_R + F_D + F_E$.

Використовуючи другий закон Ньютона $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mx''$, отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку, яке описує рух тіла:

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{1}$$

Якщо амортизатор відсутній (або ми нехтуємо силами опору), то у рівнянні (1) коефіцієнт $c = 0$ – коливання *незагасаючі*. При $c > 0$ – коливання *загасаючі*. Якщо на систему зовнішні сили не діють, то вважаємо $F(t) = 0$, а коливання *вільними*. У випадку $F(t) \neq 0$ – коливання *вимушені*.

Однорідне рівняння (2) описує вільні коливання системи, яка складається з тіла, пружини й амортизатора та не піддається впливу зовнішніх сил:

$$mx'' + cx' + kx = 0 \qquad (2)$$

Рівняння загасаючих коливань (2) можна подати у вигляді:

$$x'' + 2px' + w_0^2 x = 0, \qquad (3)$$

де $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – кругова частота незагасаючих коливань і $p = \frac{c}{2m} > 0$. Тоді $r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - w_0^2}$ – корені відповідного характеристичного рівняння:

$$r^2 + 2pr + w_0^2 = 0. \qquad (4)$$

Дійсними або комплексними будуть ці корені залежить від знаку підкореневого виразу:

$$p^2 - w_0^2 = \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}.$$

Критичне загасання $c_{кр}$ відбувається у разі, коли $c^2 - 4km = 0$, а отже $c_{кр} = \sqrt{4km}$. Можливі три випадки: $c > c_{кр}$ – закритичне загасання, $c = c_{кр}$ – критичне, $c < c_{кр}$ – загасаючі коливання (рис. 1).

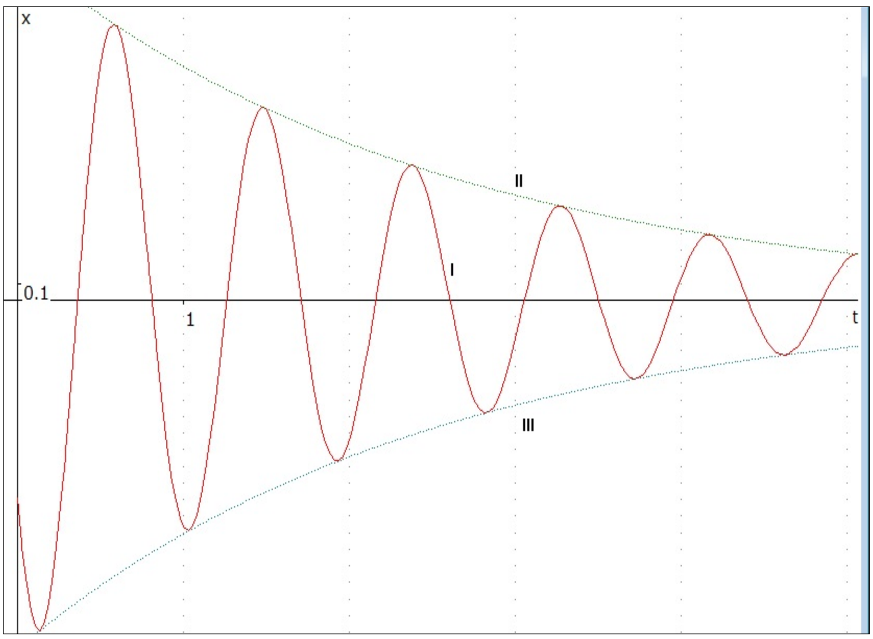

Рис. 1 – Загасаючі коливання $x(t) = Ce^{-pt}\cos(w_1 t - \alpha)$

Розглянемо розв’язок характеристичного рівняння (4) у випадку загасаючих коливань (докритичного загасання): $c < c_{кр}$ або $c^2 < 4km$. Це два комплексних спряжених кореня:

$$r_{1,2} = -p \pm i\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m} = -p \pm i\sqrt{w_0^2 - p^2} = -p \pm iw_1. \qquad (5)$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$x(t) = e^{-pt}(Acos(w_1t) + Bsin(w_1t)) \text{ або}$$
$$x(t) = \mathrm{C}e^{-pt}(\frac{A}{C}cos(w_1t) + \frac{B}{C}sin(w_1t)), \text{ звідки}$$
$$x(t) = Ce^{-pt}(cos\alpha \cdot cos(w_1t) + sin\alpha \cdot \sin(w_1t)),$$

де $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $cos\alpha = \frac{A}{C}$, $sin\alpha = \frac{B}{C}$.

За формулою косинуса суми кутів:

$$x(t) = Ce^{-pt}\cos(w_1t - \alpha). \qquad (6)$$

Розв'язок (6) відображує експоненціально загасаючі коливання матеріальної точки біля положення рівноваги. Геометричну інтерпретацію цього розв'язку проведено за допомогою пакету *GRAN1* (рис. 1). Дослідження моделей та аналіз геометричного змісту параметрів можливо проводити й у більш потужних системах комп'ютерної математики, таких, як *MATLAB*, *Mathematika*, *Maple*, *MathCAD* та ін. Деякі приклади застосувань цих технологій наведено у роботах [1-12].

Графік (I), зображеної на рис. 1 функції $x(t)$, міститься між обмежуючими амплітуду кривими $x(t) = Ce^{-pt}$ (II) та $x(t) = -Ce^{-pt}$ (III). Такі коливання не є гармонічними, а рух не є періодичним. Проте, і в цьому випадку, w_1 називається круговою частотою загасаючих коливань, α – фазою, $T_1 = \frac{2\pi}{w_1}$ – умовним періодом загасаючих коливань, а Ce^{-pt} – амплітудою загасаючих коливань. З виразу (5) видно, що w_1 менше за кругову частоту незагасаючих коливань w_0, тому T_1 більше за період $T = \frac{2\pi}{w_0}$ коливань тіла такої самої маси, що з'єднане з такою самою пружиною, але без амортизатора.

Отже, дія амортизатора проявляється, принаймні, у двох явищах.

1. Амортизатор гасить коливання і вони експоненціально загасають (це виражається в залежності (зменшенні) амплітуди від часу).
2. Амортизатор уповільнює рух, а саме зменшує частоту коливань.

На практиці механічна система з малим загасанням під дією резонансних коливань може зруйнуватися. Наступним важливим кроком постає задача розробки та дослідження диференційних моделей задля визначення власної частоти системи і запобігання руйнівної сили резонансних явищ.

Висновки. Демонстрація широти тематики і застосувань диференціальних рівнянь спонукає студентів до самостійної роботи, до поглибленого вивчення математичних методів, до побудови і досліджень моделей у самих різних галузях знань – як природничо-наукових (механіка, фізика, хімія, біологія), так і гуманітарних (соціологія, статистика).

ЛІТЕРАТУРА

1. Корнійчук О.Е. GRAN–ілюстрація та прогнозні обчислення еколого-економічної моделі / О.Е. Корнійчук // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. № 2. Комп’ютерно орієнтовані системи навчання. – Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007. – Вип. 5 (12). – С. 131-136.
2. Корнійчук О. Мотивація в системі навчання математичних дисциплін / О. Корнійчук // Витоки педагогічної майстерності. Сер. Педагогічні науки. – Полтава : ПНПУ ім. В. Г. Короленка, 2012. – Вип. 10. – С. 144-148.
3. Корнійчук О.Е. Взаємодія між дисциплінами фундаментальної і професійної підготовки в процесі вивчення компонент інтелектуальної системи / О.Е. Корнійчук, Є.Ю. Тімченко // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 2012. – № 7 (103). – С. 15-19.
4. Корнійчук О.Е. Новітні методи і прийоми навчання математичного моделювання та дослідження організації виробництва / О.Е. Корнійчук // Освіта та педагогічна наука. – Луганськ : ЛНПУ ім. Т. Шевченка, 2012. – № 3 (152). – С. 54-61.
5. Корнійчук О.Е. Методи інтегрального числення та GRAN-застосування для розв’язування задач економічного змісту / О. Е. Корнійчук // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 2012. – № 8 (104). – С. 12-16.
6. Корнійчук О.Е. Професійно орієнтований тренінг у формуванні математичних компетентностей інженерів еколого-природознавчого напряму / О. Е. Корнійчук // Гуманітарний вісник ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький ДПУ ім. Г. Сковороди». Сер. Педагогіка. Психологія. Філософія. – 2013. – Вип. 28, т. 2. – С. 439-445.
7. Корнійчук О.Е. Формування професійного інтелекту в процесі моделювання систем штучного інтелекту / О.Е. Корнійчук // Зб. наук. праць К-ПНУ ім. І. Огієнка. Сер. педадогічна. – Кам’янець-Подільський : К-ПНУ ім. І. Огієнка, 2014. – Вип. 20. – С. 90-93.
8. Корнійчук О.Е. Пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики / О. Е. Корнійчук // Сб. научных трудов междун. конф. «Современные инновационные технологии подготовки инж. кадров для горной промышленности и транспорта 2016». – Днепропетровск, ГВУЗ «НГУ», 2016. – С. 431-440.
9. Корнійчук О.Е. Вивчення похідної разом із Maple / О.Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта. – Суми : СДПУ ім. А. С. Макаренка, 2016. – № 3(9). – С. 61-69.
10. Корнійчук О.Е. Графічне трактування лінійних програм засобом GRAN / О.Е. Корнійчук // Сборник научных трудов междун. конф. «Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2017». – Днепр, Национальный горный университет, 2017. – С. 568-575.
11. Корнійчук О.Е. Моделі динаміки у задачах менеджменту лісового та мисливського господарства / О.Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта. – Суми : СДПУ ім. А.С. Макаренка, 2017. – Вип. 1(11). – С. 62-67.
12. Корнійчук О.Е. Візуалізація екстремальних значень лінійної форми / О.Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – №3(13). – С. 72-77.