МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ФАКУЛЬТЕТ АРХІТЕКТУРИ, БУДІВНИЦТВА ТА ЗЕМЛЕУСТРОЮ

Кафедра будівництва, геотехніки і геомеханіки

УПРАВЛІНСЬКА АНАЛІТИКА ТА ЦИФРОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ В БУДІВЕЛЬНІЙ ГАЛУЗІ

Практикум з виконання практичних завдань
для здобувачів ступеня магістра
освітньо-професійної програми «Будівництво та цивільна інженерія»
зі спеціальності G19 Будівництво та цивільна інженерія

Дніпро
НТУ «ДП»
2026

Гапєєв С.М.

Управлінська аналітика та цифрове моделювання в будівельній галузі [Електронний ресурс] : практикум з виконання практичних завдань для здобувачів ступеня магістра освітньо-професійної програми «Будівництво та цивільна інженерія» зі спеціальності G19 Будівництво та цивільна інженерія / С. М. Гапєєв, Г. А. Старушенко, В. В. Янко, М. О. Єлісєєва ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2026. – 68 с.

Автори:
С. М. Гапєєв, д-р техн. наук, проф.
Г. А. Старушенко, д-р техн. наук, проф.
В. В. Янко, канд. техн. наук, доц.
М. О. Єлісєєва, канд. техн. наук.

Затверджено науково-методичною комісією зі спеціальності G19 Будівництво та цивільна інженерія (протокол № 3 від 18.03.2026) за поданням кафедри будівництва, геотехніки і геомеханіки (протокол № 13 від 18.03.2026).

Наведено основний теоретичний матеріал дисципліни «Управлінська аналітика та цифрове моделювання в будівельній галузі», розглянуто розв’язки типових прикладів з посиланням на використовувані формули та співвідношення, запропоновано завдання, які можна використовувати для розв’язання на практичних заняттях або під час самостійної роботи.

Призначено для закріплення здобувачами вищої освіти теоретичного матеріалу, набуття практичних навичок та при підготовці до поточного контролю і виконанні індивідуальних контрольних завдань із дисципліни.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри будівництва, геотехніки і геомеханіки С. М. Гапєєв, д-р техн. наук, проф.

ЗМІСТ

ВСТУП

Питання оптимізації та вдосконалення методів управління в усіх сферах людської діяльності є одним із ключових трендів розвитку держави і суспільства на сучасному етапі. У глобальному сенсі сучасне управління передбачає гармонійне поєднання технічних, організаційних та соціальних складових, і його ефективність значною мірою залежить від здатності координувати взаємодію між людиною та машиною. Саме тому відповідальні управлінські рішення мають бути кількісно обґрунтовані й прийматися на основі строгих математичних розрахунків, із використанням сучасних інструментів цифрових технологій.

Цифрові моделі являють собою ефективний засіб структурованого, більше компактного й наглядного подання наявної інформації. Це особливо важливо при прийнятті управлінських рішень у тих випадках, коли великі масиви інформації задаються у вигляді статистичного числового матеріалу, у графічній формі, у вигляді неупорядкованих емпіричних даних та ін. Аналіз результатів цифрової математичної обробки таких даних дозволяє розробити конкретні рекомендації щодо доцільності тих чи інших способів дій.

У будівельній галузі управлінські процеси характеризуються високою складністю, багаторівневою структурою та значним впливом зовнішніх і внутрішніх факторів. Підвищення вимог до ефективності реалізації будівельних проєктів, дотримання строків, раціонального використання ресурсів та забезпечення якості обумовлює необхідність застосування сучасних підходів до організації управління та його оптимізації.

Аналітичне опрацювання будівельних проєктів та процесів будівництва за допомогою математичних моделей дає змогу об'єктивно оцінювати ризики, прогнозувати результати впроваджених рішень й оптимізувати використання ресурсів. Застосування цифрових моделей та алгоритмічних підходів дозволяє не лише візуалізувати складні сценарії, а й автоматизувати окремі аспекти управління, що особливо важливо в умовах цифрової трансформації галузі.

Невід'ємними елементами сучасного управління в будівництві стали віддалене планування і контроль, цифрові платформи для управління проєктами, електронні сервіси, системи автоматизованого обліку, геоінформаційні системи, ВІМ-моделювання та інші технологічні інструменти. Такі трансформації зумовлюють необхідність застосування нових підходів до організації управління в будівництві, що ґрунтуються на цифрових рішеннях, методах і моделях та являються потужним інструментом модернізації управлінських процесів, підвищення їх ефективності, прозорості і адаптивності.

Використання математичних методів та цифрових моделей в будівництві та цивільній інженерії дозволяє формалізувати й аналізувати складні управлінські задачі, моделювати варіанти розвитку подій, здійснювати оптимізацію рішень за заданими критеріями та обмеженнями. Інтеграція таких інструментів у практику управління будівельною галуззю сприяє підвищенню точності планування, ефективності розподілу ресурсів, зменшенню витрат та покращенню загальної результативності реалізації будівельних проєктів.

Цифровізація управління в будівельній сфері вимагає оновлення кадрової політики, зокрема формування цифрових навичок і компетентностей у фахівців будівельної галузі, що на сьогодні є ключовою умовою ефективної професійної діяльності. Такі вимоги потребують вміння ефективно застосовувати цифрові засоби в процесах планування, проєктування, контролю й оптимізації ресурсів та передбачають необхідність кількісного обґрунтування управлінських рішень на основі строгих математичних моделей і сучасних цифрових технологій.

Пріоритетною метою вивчення курсу «Управлінська аналітика та цифрове моделювання в будівельній галузі» є формування у здобувачів вищої освіти загальних і професійних компетентностей щодо застосування сучасних методів управлінської аналітики та цифрових моделей для оптимізації процесів планування, організації, контролю та прийняття рішень у будівельній галузі.

Основними завданнями навчальної дисципліни є:

- формування у здобувачів системного розуміння сучасних підходів до управлінської аналітики в будівництві: здатності аналізувати управлінські ситуації та розробляти практичні рекомендації щодо підвищення ефективності діяльності будівельних підприємств;
- розвиток навичок застосування математичних моделей, цифрових алгоритмів та спеціалізованого програмного забезпечення для оптимізації управління будівельними ресурсами;
- вироблення вміння оцінювати ефективність управлінських рішень на основі кількісних показників.

За результатами опанування дисципліни здобувачі вищої освіти насамперед мають набути професійних компетентностей, необхідних для ефективного управління будівельними проєктами в умовах цифровізації галузі.

Дисципліна «Управлінська аналітика та цифрове моделювання в будівельній галузі» є складовою професійної підготовки магістрів за спеціальністю «Будівництво та цивільна інженерія» і призначена для інтегрування знань з математичного моделювання, методів оптимізації, аналітики даних, інформаційних технологій та інженерії, створюючи міждисциплінарну основу для ефективного управління ресурсами, оптимізації витрат та підвищення якості реалізації проєктів. Отримані знання та практичні навички створять основу для подальшого вивчення фахових дисциплін, виконання кваліфікаційної роботи, а також професійної діяльності у сфері цифрового проєктування та аналітичного супроводу будівельних процесів.

Необхідність видання практикуму обумовлена зростаючими вимогами до професійної підготовки фахівців будівельної галузі: сучасний ринок праці потребує спеціалістів, які здатні не лише організовувати будівельні процеси, але й використовувати аналітичні інструменти для їх оптимізації та кількісного обґрунтування управлінських рішень.

Призначення практикуму – слугувати навчально-методичним інструментом для закріплення теоретичних знань, розвитку практичних умінь та формування професійних компетентностей у сфері управлінської аналітики й цифрового моделювання задля підготовки магістрів до реальних викликів сучасної індустрії будівництва та цивільної інженерії.

1. УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Підприємства та фірми часто роблять різні запаси ресурсів: зберігаються сировина, заготовки, готова продукція, призначена для продажу. Запасів не повинно бути ні занадто багато, ні занадто мало. У першому випадку виникає необхідність невиправданих затрат на зберігання та амортизаційних витрат. У другому випадку може виявитися, що на складі не буде потрібного товару. Крім того, мала кількість запасів потребує їх частого поповнення, що також приводить до додаткових витрат.

У будівництві раціональне **управління запасами (Inventory Management)** є ключовим чинником ефективності й безперервності виконання будівельних робіт. Оптимізація обсягів замовлень і частоти постачання з урахуванням графіка будівництва значно знижує ризики простоїв та перевитрат коштів: запаси будівельних матеріалів, комплектуючих та техніки повинні бути доступними в потрібний момент і в потрібному обсязі, але без надлишку.

Моделі управління запасами дозволяють мінімізувати витрати на зберігання та транспортування матеріально-технічних ресурсів і водночас уникнути затримок виконання робіт через їх дефіцит.

Задача управління запасами полягає в тому, щоб оптимізувати загальні витрати, зробивши їх по можливості меншими, і забезпечивши при цьому наявність запасів у необхідній кількості.

Розглянемо деякі з найбільш використовуваних детермінованих моделей управління запасами.

1.1. Основна модель

Введемо основні величини і припущення щодо них, прийняті в рамках основної моделі.

Приймемо за одиницю виміру грошових коштів умовні одиниці (у. о.) – це можуть бути гривні, долари та ін.; як одиницю виміру часу будемо використовувати рік.

Приймемо наступні позначення:

1. **Ціна одиниці товару** – c у. о. Ціна постійна для одного виду товару.
2. **Інтенсивність попиту** – d одиниць товару на рік. Будемо вважати, попит постійним і безперервним.
3. **Організаційні витрати** – s у. о. за одну партію товару. Вважатимемо, що організаційні витрати не залежить від розміру поставки, тобто від кількості одиниць товару в одній партії.
4. **Витрати на зберігання запасу** – h у. о. на одиницю товару за рік. Будемо вважати ці витрати постійними.
5. **Розмір однієї партії товару** є сталою величиною – q одиниць. Партія надходить миттєво в той момент, коли виникає дефіцит, тобто коли запас на складі стає рівним нулю.

Параметри c, d, s, h вважаються заданими.

Задача управління запасами полягає у виборі параметра q таким чином, щоб мінімізувати річні витрати.

Для розв'язання сформульованої задачі потрібно виразити ці витрати через параметри c, d, s, h, q.

Функція загальних витрат C має вигляд:

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}, \tag{1.1}$$

де параметри c, d, s, h – задані константи.

Розв'язок задачі визначається за формулою:

$$q^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}}, \tag{1.2}$$

яка називається **формулою оптимального запасу**, або **формулою Харріса** (Harris).

Визначивши оптимальний розмір замовлення q^*, можна обчислити:

1. Оптимальну кількість поставок товару за рік n^*:

$$n^* = \frac{d}{q^*}. \tag{1.3}$$

2. Відповідну тривалість циклу зміни запасу t^*:

$$t^* = \frac{365}{n^*}. \tag{1.4}$$

Приклад 1.1. Нехай інтенсивність рівномірного попиту становить 500 одиниць товару на рік. Організаційні витрати дорівнюють 4 у. о., витрати на зберігання – 2 у. о. на одиницю товару в рік, ціна товару – 5 у. о.

У припущенні, що система підпорядковується основній моделі, визначити:

1) оптимальний розмір партії товару q^*;
2) загальні витрати $C(q^*)$;
3) оптимальне число поставок за рік n^*;
4) тривалість циклу зміни запасу t^*.

Розв'язок:

За умовою задачі маємо:

$$d = 500;\ s = 4;\ h = 2;\ c = 5.$$

1) За формулою Харріса (1.2) визначаємо оптимальний розмір партії товару у вигляді:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 500}{2}} = \sqrt{2000} \approx 45 \text{ (одиниць товару).}$$

2) Знаходимо значення функції загальних витрат (1.1) при $q = q^*$:

$$C(q^*) = 5 \cdot 500 + \frac{4 \cdot 500}{45} + \frac{45 \cdot 2}{2} = 2589{,}44 \text{ (у. о.).}$$

3) Оптимальну кількість поставок товару за рік визначаємо за формулою (1.3). Отже, маємо:

$$n^* = \frac{500}{45} \approx 11 \text{ (поставок за рік).}$$

4) Обчислимо тривалість циклу зміни запасу, використовуючи співвідношення (1.4). Тоді знаходимо:

$$t^* = \frac{365}{11} \approx 33 \text{ (дня).}$$

Приклад 1.2. Інтенсивність рівномірного попиту становить 1200 одиниць товару на рік. Організаційні витрати s у. о. та витрати на зберігання запасу h у. о. залежать від розміру поставки (тобто від кількості одиниць товару в одній партії q) і описуються відповідно співвідношеннями:

$$s(q) = \frac{500}{q^2 + \ln q}; \quad h(q) = \frac{q^2}{500(\ln q + 1)}.$$

Ціна товару складає 11 у. о.

У припущенні, що система підпорядковується основній моделі, визначити:

1) оптимальний розмір партії товару q^*;
2) загальні витрати $C(q^*)$;
3) оптимальне число поставок за рік n^*;
4) тривалість циклу зміни запасу t^*.

Розв'язок:

За умовою задачі:

$$d = 1200; \; s(q) = \frac{500}{q^2 + \ln q}; \; h(q) = \frac{q^2}{500(\ln q + 1)}; \; c = 11.$$

1) Вираз для функції загальних витрат $C = C(q)$:

$$C(q) = cd + \frac{d\,s(q)}{q} + \frac{q\,h(q)}{2}$$

у даному випадку має вигляд:

$$C(q) = 11 \cdot 1200 + \frac{1200 \cdot 500}{q(q^2 + \ln q)} + \frac{q \cdot q^2}{2 \cdot 500(\ln q + 1)},$$

тобто

$$C(q) = 13200 + \frac{600000}{q(q^2 + \ln q)} + \frac{q^3}{1000(\ln q + 1)}. \tag{1.5}$$

Використовуємо необхідну умову екстремуму функції однієї змінної $C = C(q)$:

$$C'(q) = 0 \tag{1.6}$$

для визначення критичних точок.

Для цього знаходимо першу похідну функції $C(q)$:

$$\frac{dC(q)}{dq}=-\frac{600000\left(2q+\frac{1}{q}\right)}{q\left(q^2+\ln q\right)^2}-\frac{600000}{q^2\left(q^2+\ln q\right)^2}+\frac{3q^3}{1000(\ln q+1)}-\frac{q^3}{1000(\ln q+1)^2}=$$

$$=-\frac{600000\left(2q^2+1\right)}{q^2\left(q^2+\ln q\right)^2}-\frac{600000}{q^2\left(q^2+\ln q\right)^2}+\frac{3q^3}{1000(\ln q+1)}-\frac{q^3}{1000(\ln q+1)^2}=$$

$$=-\frac{1200000\left(q^2+1\right)}{q^2\left(q^2+\ln q\right)^2}+\frac{q^3\left(3(\ln q+1)-1\right)}{1000(\ln q+1)}=-\frac{1200000\left(q^2+1\right)}{q^2\left(q^2+\ln q\right)^2}+\frac{q^3(3\ln q+2)}{1000(\ln q+1)}$$

і прирівнюємо нулю отриманий вираз:

$$\frac{dC(q)}{dq}=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1200000\left(q^2+1\right)}{q^2\left(q^2+\ln q\right)^2}+\frac{q^3(3\ln q+2)}{1000(\ln q+1)}=0.$$

Трансцендентне рівняння

$$-\frac{12\cdot 10^5\left(q^2+1\right)}{q^2\left(q^2+\ln q\right)^2}+\frac{q^3(3\ln q+2)}{10^3(\ln q+1)}=0,$$

або

$$-12\cdot 10^8\left(q^2+1\right)(\ln q+1)+q^5(3\ln q+2)\left(q^2+\ln q\right)^2=0$$

розв'язуємо графічним способом.

Для цього при $q\geq 1$ потрібно (рис. 1.1, 1.2):

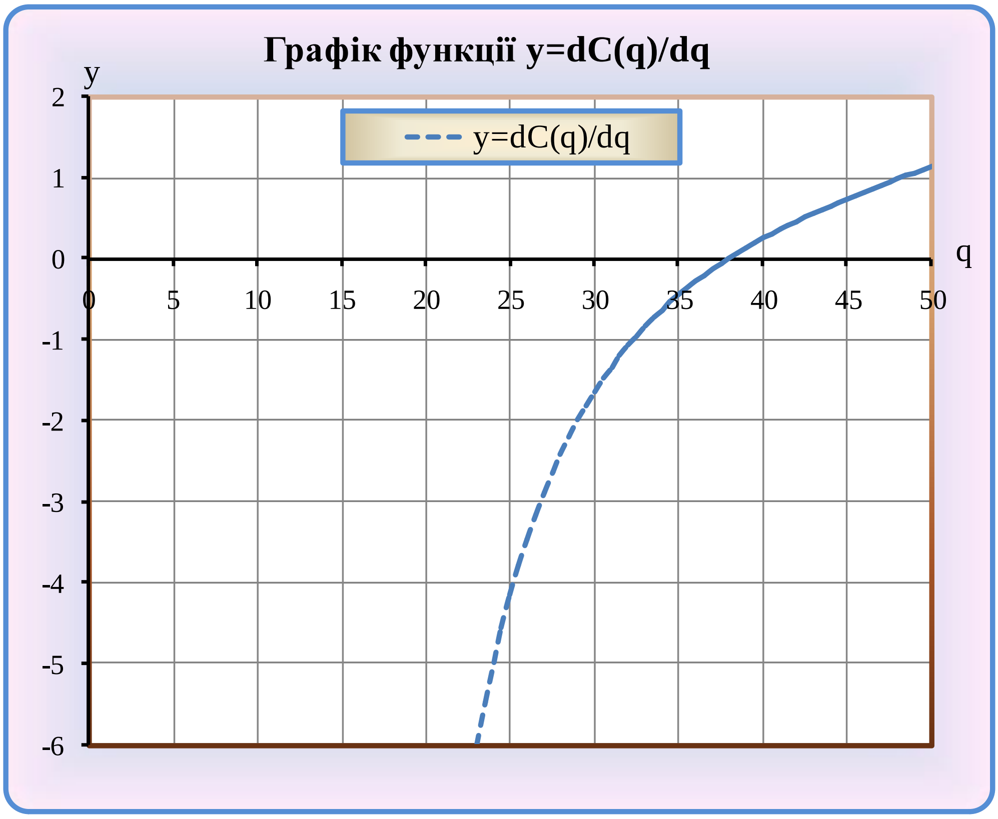


Рис. 1.1. Графік функції $y=dC(q)/dq$

- побудувати графік функції $y = \frac{dC(q)}{dq}$;
- побудувати графік функції $y = 0$;
- знайти точку їх перетину.

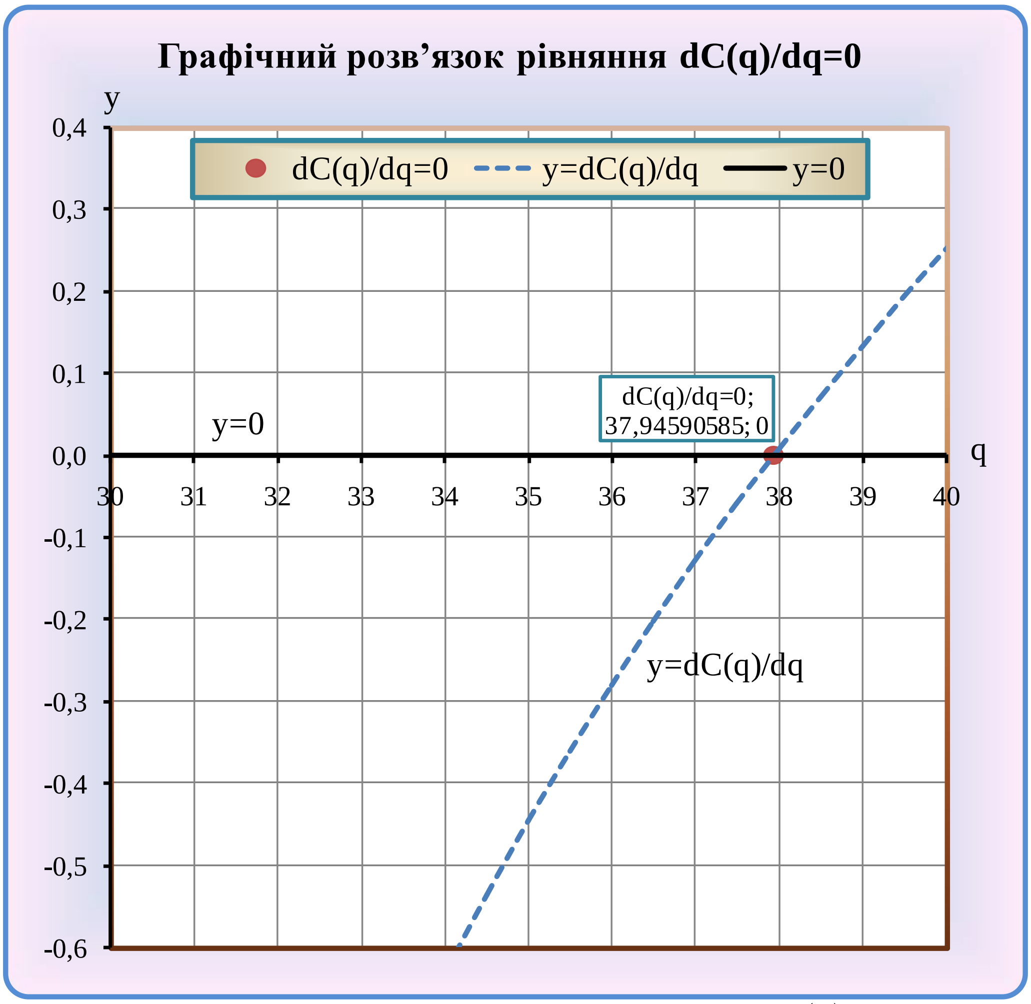


Рис. 1.2. Графічний розв’язок рівняння $\frac{dC(q)}{dq} = 0$

На рис. 1.1, 1.2 й далі всі графічні побудови виконані з використанням редактора MS Excel.

З рис. 1.2 отримуємо, що функція $C = C(q)$ має одну критичну точку $M^*(q^*; C^*)$, абсциса якої, округлена до цілого, приймає значення: $q^* = 38$.

При переході через критичну точку $M^*(q^*; C^*)$ похідна функції $C = C(q)$ змінює свій знак з «мінуса» на «плюс». А це в силу достатньої умови екстремуму функції однієї змінної означає, що функція загальних витрат $C = C(q)$ (1.5) має в критичній точці $M^*(q^*; C^*)$ екстремум – мінімум.

Таким чином, отримуємо таке значення (округлене до цілого) оптимального розміру партії товару, при якому загальні витрати мінімальні:

$$q^* = 38.$$

2) Знаходимо значення функції загальних витрат (1.6) при $q = q^*$:

$$C\left(q^*\right)\Big|_{q^*=38} = \left(13200 + \frac{600000}{q^*\left(\left(q^*\right)^2 + \ln q^*\right)} + \frac{\left(q^*\right)^3}{1000\left(\ln q^* + 1\right)}\right)\Bigg|_{q^*=38},$$

тобто

$$C(38) = 13200 + \frac{600000}{38\left(38^2 + \ln 38\right)} + \frac{38^3}{1000\left(\ln 38 + 1\right)} \approx 13212{,}92 \text{ (у. о.).}$$

3) Оптимальне число поставок товару за рік n^* визначаємо за формулою (1.3):

$$n^* = \frac{d}{q^*} \quad \Rightarrow \quad n^* = \frac{1200}{38} \approx 32.$$

4) Обчислимо тривалість циклу зміни запасу t^*, використовуючи співвідношення (1.4):

$$t^* = \frac{365}{n^*} \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{365}{32} \approx 11 \text{ (днів).}$$

1.2. Модель виробничих поставок

В основній моделі передбачалося, що надходження товарів на склад відбувається миттєво. Це припущення досить добре відображає ситуацію, коли товар поставляється протягом одного дня (або ночі). Якщо товари поставляються з працюючої виробничої лінії, необхідно модифікувати основну модель. У цьому випадку до параметрів c, d, s, h додається ще один – продуктивність виробничої лінії p (одиниць товару на рік); будемо вважати її заданою і сталою.

Ця нова модель називається **моделлю виробничих поставок**. Величина q, як і раніше, позначає розмір партії. На початку кожного циклу відбувається «підключення» до виробничої лінії, яке триває до накопичення одиниць товару. Після цього поповнення запасів не відбувається до тих пір, поки не виник дефіцит.

За **моделлю виробничих поставок** оптимальний розмір партії товару q^* визначається за формулою:

$$q^* = \sqrt{\frac{2psd}{h(p-d)}}. \tag{1.7}$$

Вираз для **функції загальних витрат** $C = C(q)$ має вигляд:

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{(p-d)qh}{2p}. \tag{1.8}$$

Обчисливши оптимальний розмір замовлення товару, можна визначити:

1. Оптимальну кількість поставок товару за рік n^*:

$$n^* = \frac{d}{q^*}; \tag{1.9}$$

2. Тривалість поставки τ^*:

$$\tau^* = \frac{q^*}{p} \cdot 365; \tag{1.10}$$

3. Тривалість циклу поповнення запасу t^*:

$$t^* = \frac{365}{n^*}. \tag{1.11}$$

Приклад 1.3. Інтенсивність рівномірного попиту становить 700 одиниць товару на рік. Товар поставляється з конвеєра, продуктивність якого складає 2 тис. одиниць на рік. Організаційні витрати дорівнюють 8 у. о., витрати на зберігання – 3 у. о., ціна одиниці товару – 10 у. о.

У рамках моделі виробничих поставок визначити:

1) оптимальний розмір партії товару q^*;
2) загальні витрати $C(q^*)$;
3) оптимальне число поставок товару за рік n^*;
4) тривалість поставки τ^*;
5) тривалість циклу поповнення запасу t^*.

Розв'язок:

За умовою задачі в даному випадку маємо:

$$d = 700;\ p = 2000;\ s = 8;\ h = 3;\ c = 10.$$

1) Використовуючи модель виробничих поставок, знаходимо оптимальний розмір партії товару за формулою (1.7). Тоді отримуємо:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 8 \cdot 700}{3(2000 - 700)}} = \sqrt{\frac{224000}{39}} \approx 76.$$

2) Використовуючи співвідношення (1.8), знаходимо значення функції загальних витрат при $q = q^* = 76$:

$$C(q^*) = 10 \cdot 700 + \frac{8 \cdot 700}{76} + \frac{(2000 - 700) \cdot 76 \cdot 3}{2} =$$

$$= 7000 + \frac{5600}{76} + 148200 = 155273{,}68 \text{ (у. о.)}.$$

3) Визначаємо оптимальне число поставок товару за рік n^* за формулою (1.9). Отже, маємо:

$$n^* = \frac{700}{76} \approx 9.$$

4) Тривалість поставки τ^* знаходимо у силу співвідношення (1.10) таким чином:

$$\tau^* = \frac{76}{2000} \cdot 365 \approx 14 \text{ (днів).}$$

5) Використовуючи вираз (1.11), обчислюємо тривалість циклу поповнення запасу t^*:

$$t^* = \frac{365}{9} \approx 41 \text{ (день).}$$

1.3. Модель поставок зі знижкою

Розглянемо ситуацію, описувану в цілому основною моделлю, але з однією особливістю, яка полягає в тому, що товар можна поставляти за пільговою ціною (зі знижкою), якщо розмір партії достатньо великий. Іншими словами, якщо розмір партії q не менш заданого числа q_0, то товар поставляється за ціною c_0, де $c_0 < c$.

Функція **загальних витрат** задається в такому випадку наступним чином:

$$C(q) = \begin{cases} cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}, & \text{якщо} \quad q < q_0 \\ c_0 d + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}, & \text{якщо} \quad q \geq q_0 \end{cases}. \tag{1.12}$$

Для з'ясування питання про те, який розмір партії оптимальний, слід порівняти значення функції $C(q)$ у точках q_0 і $\bar{q}$:

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{2sd}{h}}.$$

Та точка, де функція приймає менше значення, буде оптимальним розміром партії q^* в моделі поставок зі знижкою.

Приклад 1.4. Інтенсивність рівномірного попиту становить 2000 одиниць товару на рік. Організаційні витрати дорівнюють 8 у. о., витрати на зберігання – 6 у. о. Ціна одиниці товару дорівнює 10 у. о., проте, якщо розмір партії не менш 100 одиниць, ціна знижується до 7 у. о.

Знайти оптимальний розмір партії товару.

Розв'язок:

За умовою задачі маємо:

$$d = 2000;\ s = 8;\ h = 6;\ c = 10;\ q_0 = 100;\ c_0 = 7.$$

Загальні витрати визначаються за співвідношенням (1.12) функцією $C(q)$:

$$C(q) = \begin{cases} f(q) = 10 \cdot 2000 + \frac{8 \cdot 2000}{q} + \frac{q \cdot 6}{2} & \text{при} \quad q < 100 \\ f_0(q) = 7 \cdot 2000 + \frac{8 \cdot 2000}{q} + \frac{q \cdot 6}{2} & \text{при} \quad q \geq 100 \end{cases},$$

тобто

$$C(q)=\begin{cases} f(q)=20000+\dfrac{16000}{q}+3q & \text{при} \quad q<100 \\ f_0(q)=14000+\dfrac{16000}{q}+3q & \text{при} \quad q\ge 100 \end{cases}.$$

Визначимо точку локального мінімуму функції $C(q)$, використовуючи необхідну умову екстремуму функції однієї змінної (1.6). Отже, знаходимо:

$$f'(q)=f_0'(q)=-\frac{16000}{q^2}+3.$$

Тоді маємо:

$$\bar{q}=\sqrt{\frac{16000}{3}}\approx 73.$$

Оскільки $\bar{q}=73<100$, то знаходимо:

$$C(\bar{q})=f(\bar{q})=f(73)=20000+\frac{16000}{73}+3\cdot 73\approx 20438{,}18.$$

У точці $q=q_0$ отримуємо:

$$C(q_0)=f_0(q_0)=f(100)=14000+\frac{16000}{100}+3\cdot 100=14460.$$

Таким чином, так як

$$C(q_0)=C(100)=14460<C(\bar{q})=C(73)=20438{,}18,$$

то

$$q^*=q_0=100.$$

1.4. Завдання для самостійного розв’язання

1.1. Система управління запасами деякого виду товару підпорядковується умовам основної моделі. Щороку з постійною інтенсивністю надходить попит на 15 тис. одиниць товару, витрати на організацію поставки становлять $ 10 за одну партію, ціна одиниці товару – $ 3, а витрати на її зберігання – $ 0,75 на рік.

Знайти оптимальний розмір партії.

Визначити, якими будуть:

а) тривалість циклу;

б) число поставок за рік,

якщо стратегія управління запасами в задачі 1.1 є оптимальною?

1.2. Система управління запасами описується моделлю виробничих поставок і має наступні значення параметрів: попит дорівнює 1,5 тис. одиниць на рік, ціна – 2 у. о., витрати на зберігання одиниці товару протягом року – 0,2 у. о., організаційні витрати – 10 у. о. Протягом року може бути вироблено 4,5 тис. одиниць товару при повному завантаженні виробничої лінії.

Побудувати графік зміни запасів.

Обчислити:

а) оптимальний розмір партії;

б) тривалість поставки;

в) тривалість циклу;

г) середній рівень запасів.

1.3. Інтенсивність попиту в моделі виробничих поставок становить чверть швидкості виробництва, яка дорівнює 20 тис. одиниць товару на рік. Організаційні витрати для однієї партії дорівнюють \$ 150, а витрати на зберігання одиниці товару протягом року – \$ 0,3.

Визначити оптимальний розмір партії.

1.4. Меблевій фірмі потрібно 1000 штук дверних ручок на рік, які витрачаються з постійною інтенсивністю. Організаційні витрати становлять 30 у. о. за партію, витрати на зберігання однієї ручки оцінені в 1 у. о. Ціна дверної ручки становить 2 у. о., а при закупівлі партіями об’ємом не менше 750 штук – 1,9 у. о. за штуку.

Знайти оптимальний розмір партії поставок.

1.5. Торговець має стабільний попит на деякий товар у кількості 500 одиниць на рік. Товар він купує у постачальника за ціною 6 у. о. за штуку, причому витрати на оформлення поставки та інші підготовчі операції становлять у кожному випадку 10 у. о. Якщо торговець купує відразу партію в кількості 150 одиниць товару або більше, ціна зменшується до 5 у. о. за штуку.

Який розмір партії є оптимальним, якщо річні витрати на зберігання одиниці товару дорівнюють 1 у. о.?

2. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА

При вирішенні оптимізаційних задач управління важливо вміти визначати ефективність виробництва економічної системи за наявною кількісною інформацією про обсяг необхідних витрат, що неминуче супроводжують будь-яке виробництво.

Модель Леонтьєва, відома як **модель міжгалузевого балансу (Input–Output Model)**, застосовується для аналізу взаємозв’язків між постачальниками, підрядниками та кінцевими споживачами, оптимізуючи розподіл ресурсів у будівельних ланцюгах поставок. Модель дає можливість оцінити взаємозалежності між будівельною галуззю та суміжними секторами економіки: металургією, енергетикою, виробництвом будматеріалів, цементною промисловістю, транспортом тощо.

Модель Леонтьєва ефективно використовується для аналізу структури витрат і прогнозування потреб у ресурсах на різних етапах реалізації будівельних проєктів. Її практичне застосування дозволяє оцінити мультиплікативний ефект інвестицій у будівництво на суміжні сектори економіки. Такий підхід дозволяє не лише аналізувати структуру витрат на будівництво, а й прогнозувати ефекти від державних інвестицій у будівництво на рівні всієї економіки, що сприяє прийняттю обґрунтованих стратегічних рішень щодо планування великих інфраструктурних програм.

У рамках одного проєкту модель Леонтьєва може бути використана для аналізу ресурсної залежності між етапами будівництва, а також для оптимізації логістичних потоків.

2.1. Продуктивні матриці

Нехай є економічна система, сфера виробництва якої складається з галузей, що випускають n видів продукту, причому кожна галузь випускає рівно один вид.

Припустимо, що для виробництва k-ою галуззю одиниці k-го продукту потрібно $a_{ij} > 0$ одиниць i-го продукту, який виробляє i-а галузь. Відповідна **таблиця витрат** наведена в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Таблиця витрат

	1-ий продукт	…	k-ий продукт	…	n-ий продукт
1-а галузь	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
………………….	…	…	………………	…	………………
i-а галузь	a_{i1}	…	a_{ik}	…	a_{in}
………………….	…	…	………………	…	………………
n-а галузь	a_{n1}	…	a_{nk}	…	a_{nn}

Дані табл. 2.1 можуть бути записані в матричному вигляді таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ik} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nk} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Невід'ємна матриця (2.1) називається **матрицею матеріальних витрат**, або **технологічної матрицею**.

Припустимо, що за деякий фіксований відрізок часу (тиждень, місяць, квартал або рік) вироблено x_1 одиниць 1-го продукту, x_2 одиниць 2-го продукту, ... , x_n одиниць n-го продукту. Тим самим задано стовпець

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (2.2)$$

який називається **стовпцем випуску**, або **режимом роботи галузей**.

Матриця **матеріальних витрат** $A \ge 0$ називається **продуктивною**, якщо знайдеться такий стовпець випуску $x > 0$, для якого виконується нерівність:

$$Ax < x.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. Для будь невід’ємної квадратної матриці $A \ge 0$ умови, що формулюються нижче, рівносильні:

1) матриця A продуктивна;

2) для будь-якого стовпця $c > 0$ існує, і притому рівно один, стовпець випуску $x > 0$ такий, що:

$$x - Ax = c; \qquad (2.3)$$

3) стовпець випуску $x > 0$, сукупні витрати на створення якого задовольняють умові

$$Ax \ge x,$$

не існує;

4) найбільше власне значення матриці A задовольняє нерівність:

$$\lambda_A = \lambda_{max} < 1. \qquad (2.4)$$

Сказане вище означає, що при виконанні хоча б однієї з цих умов виконуються й три інших. Зокрема, виконання нерівності

$$\lambda_A < 1.$$

дозволяє стверджувати, що **матриця** A **продуктивна**.

Приклад 2.1. Перевірити, чи являється матриця матеріальних витрат

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/12 & 1/4 \end{pmatrix}$$

продуктивною.

Розв’язок:

Для відповіді на питання, чи є задана матриця A продуктивною, знайдемо її власні значення.

Складемо характеристичне рівняння матриці A:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Перетворимо це співвідношення, використовуючи правило обчислення визначників 2-го порядку. Тоді отримуємо:

$$\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\cdot\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\lambda + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{24} = 0,$$

тобто

$$\lambda^2 - \frac{7}{12}\lambda + \frac{1}{24} = 0.$$

Корені цього рівняння обчислюються за формулою:

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Отже, в даному випадку маємо:

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{24} \pm \sqrt{\frac{49}{576} - \frac{1}{24}} = \frac{7}{24} \pm \sqrt{\frac{49-24}{576}} = \frac{7}{24} \pm \sqrt{\frac{25}{576}} = \frac{7}{24} \pm \frac{5}{24},$$

тобто

$$\lambda_1 = \frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{2}; \;\; \lambda_2 = \frac{7}{24} - \frac{5}{24} = \frac{1}{12}.$$

Таким чином, так як виконується умова (2.4)

$$\lambda_{max} = \lambda_2 = \frac{1}{2} < 1,$$

то задана матриця A являється продуктивною.

Приклад 2.2. Знайти стовпець випуску $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, якщо задані матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/12 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ і } c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок:

Як було з'ясовано в прикладі 2.1, матриця A є продуктивною і $\lambda_{max} = \frac{1}{2} < 1$. А це означає, що система рівнянь (2.3)

$$x - Ax = c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = c_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 = c_2 \end{cases},$$

тобто

$$\begin{cases} \left(1-\frac{1}{3}\right)x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 4 \\ -\frac{1}{12}x_1 + \left(1-\frac{1}{4}\right)x_2 = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 4 \\ -\frac{1}{12}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 5 \end{cases}$$

завжди має розв'язок (сумісна).

Знайдемо розв'язок цієї системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 4 \\ -\frac{1}{12}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 24 \\ -x_1 + 9x_2 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x_1 = 132 \\ -x_1 + 9x_2 = 60 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = \frac{60 + x_1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = \frac{60+12}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = 8 \end{cases}.$$

Таким чином, щоб забезпечити заданий додатковий продукт $c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, необхідно, щоб стовпець випуску (2.2) дорівнював:

$$x = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2.2. Обмеження на ресурси

Модель Леонтьєва відображає ті потенційні можливості, які закладені в технології виробничого сектора. У цій моделі передбачається, що всі проміжні продукти до того моменту, коли вони виявляються необхідними, вже зроблені. Однак у реальній ситуації потрібно приймати в розрахунок наявність таких обмежувальних факторів виробництва, як потужність кожної галузі (матеріальні ресурси) і загальна кількість робочої сили в системі (трудові ресурси).

Нехай L – загальна кількість робочих і

$$\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ldots & \ell_n \end{pmatrix}$$

– **матриця-рядок витрат робочої сили**: кожен її елемент $\ell_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ показує кількість робітників, необхідних для виробництва одиниці k -го продукту.

Зрозуміло, що кількість робочої сили, необхідної у сфері виробництва при режимі роботи x, не може перебільшувати загального числа робочих:

$$\ell x \le L. \tag{2.5}$$

Обмеження на потужності галузей можна описати за допомогою стовпця:

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \ldots \\ m_n \end{pmatrix},$$

перевершити який стовпець випуску не може, тобто:

$$x \le m. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. Нехай задані:

- продуктивна матриця $A > 0$;
- стовпець $c > 0$;
- стовпець $m > 0$;
- рядок $\ell > 0$;
- число $L > 0$.

Тоді задача

$$\begin{cases} x - Ax = \alpha c \\ \ell x \le L \\ x \le m \\ x \ge 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\alpha \to \max$$

має, і притому єдиний, розв’язок.

При $n = 2$ співвідношення (2.7) приймає вигляд:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = \alpha c_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 = \alpha c_2 \end{cases}; \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 \le L \\ x_1 \le m_1 \\ x_2 \le m_2 \end{cases}; \qquad (2.9)$$

$$\alpha \to \max.$$

Розв'язок системи рівнянь (2.8) можна представити у вигляді:

$$x_1 = \alpha b_1; \quad x_2 = \alpha b_2,$$

де b_1 і b_2 виражаються через елементи матриці A та стовпця c. Звідси отримуємо:

$$\frac{x_1}{b_1} = \frac{x_2}{b_2} = \alpha,$$

або, виключивши α:

$$x_1 b_2 = x_2 b_1. \qquad (2.10)$$

Отримана рівність (2.10) описує на площині Ox_1x_2 пряму, що проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

Приклад 2.3. Задані:

- продуктивна матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/12 & 1/4 \end{pmatrix};$$

- матриця кінцевого попиту:

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix};$$

- матриця обмежень на потужності галузей:

$$m = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix};$$

- матриця-рядок затрат робочої сили:

$$\ell = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix};$$

- загальна кількість робочої сили в системі (трудові ресурси):

$$L = 40.$$

Знайти стовпець випуску продукції.

Розв'язок:

Розглянемо систему рівнянь (2.8):

$$x - Ax = \alpha c \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/12 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

і, записавши у рівносильній формі

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 4\alpha \\ -\frac{1}{12}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 5\alpha \end{cases},$$

знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 4\alpha \\ -\frac{1}{12}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 5\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 24\alpha \\ -x_1 + 9x_2 = 60\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x_1 = 132\alpha \\ -x_1 + 9x_2 = 60\alpha \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 12\alpha \\ x_2 = \frac{60 + x_1}{9}\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12\alpha \\ x_2 = \frac{60 + 12}{9}\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12\alpha \\ x_2 = 8\alpha \end{cases},$$

або

$$x = \begin{pmatrix} 12\alpha \\ 8\alpha \end{pmatrix}.$$

Отриманий стовпець повинен задовольняти умови (2.5), (2.6):

$$\ell x \le L \quad \text{і} \quad x \le m,$$

які в даному випадку приймають вигляд:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12\alpha \\ 8\alpha \end{pmatrix} \le 40; \quad \begin{pmatrix} 12\alpha \\ 8\alpha \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що система нерівностей (2.9) перетворюється таким чином:

$$\begin{cases} 80\alpha \le 40 \\ 12\alpha \le 4 \\ 8\alpha \le 3 \end{cases},$$

тобто

$$\begin{cases} \alpha \le \frac{1}{2} \\ \alpha \le \frac{1}{3} \\ \alpha \le \frac{3}{8} \end{cases}. \qquad (2.11)$$

Найбільше значення, яке задовольняє всім трьом умовам (2.11), дорівнює 1/3 (рис. 2.1).

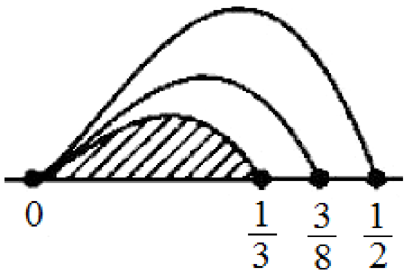


Рис. 2.1. Розв’язок системи нерівностей (2.11)

Таким чином, отримали:

$$\alpha_{max} = \frac{1}{3};$$

- стовпець випуску продукції має вигляд:

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 8/3 \end{pmatrix};$$

- кінцевий продукт визначається наступним чином:

$$\alpha_{max}\, c = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що співвідношення між кількістю першого і другого додаткового продукту дорівнює 4:5, тобто те ж саме, що й у разі відсутності будь-яких обмежень на матеріальні та трудові ресурси.

Приклад 2.4. Задана матриця матеріальних затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 1/18 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

1) Перевірити, чи є матриця A продуктивною.

2) Якщо матриця А продуктивна, то знайти стовпець випуску продукції за умови, що задані:

- матриця кінцевого попиту:

$$c = \begin{pmatrix} 35 \\ 8 \end{pmatrix};$$

- матриця обмежень на потужності галузей:

$$m = \begin{pmatrix} 45 \\ 11 \end{pmatrix};$$

- матриця-рядок витрат робочої сили:

$$\ell = \begin{pmatrix} 42 & 10 \end{pmatrix};$$

- загальна кількість робочої сили в системі (трудові ресурси):

$$L = 1602.$$

Розв'язок:

1) Для того, щоб перевірити, чи є задана матриця А продуктивною, знайдемо її власні значення.

Складемо характеристичне рівняння матриці A:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Перетворимо це співвідношення, використовуючи правило обчислення визначників 2-го порядку. Тоді отримуємо:

$$\left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{9} - \lambda\right) - \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \frac{13}{36}\lambda + \frac{1}{36} - \frac{1}{216} = 0;$$

$$\lambda^2 - \frac{13}{36}\lambda + \frac{5}{216} = 0.$$

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \frac{13}{72} \pm \sqrt{\frac{169}{5184} - \frac{5}{216}} = \frac{13}{72} \pm \sqrt{\frac{169-120}{5184}} = \frac{13}{72} \pm \sqrt{\frac{49}{5184}} = \frac{13}{72} \pm \frac{7}{72},$$

тобто

$$\lambda_1 = \frac{13}{72} + \frac{7}{72} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}; \ \lambda_2 = \frac{13}{72} - \frac{7}{72} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}.$$

Таким чином, так як

$$\lambda_{max} = \lambda_1 = \frac{5}{18} < 1,$$

то, отже, за теоремою 2.1 задана матриця A є продуктивною.

2) Для того, щоб знайти стовпець випуску продукції, розглянемо систему рівнянь (2.3):

$$x - Ax = \alpha c \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 1/18 & 1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 35 \\ 8 \end{pmatrix},$$

або в еквівалентному вигляді (2.8):

$$\begin{cases} \frac{3}{4} x_1 - \frac{1}{12} x_2 = 35\alpha \\ -\frac{1}{18} x_1 + \frac{8}{9} x_2 = 8\alpha \end{cases},$$

і знайдемо її розв'язок матричним способом.

Для матриці Δ, складеної з коефіцієнтів при невідомих

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{18} & \frac{8}{9} \end{pmatrix},$$

знайдемо зворотну матрицю Δ^{-1} за допомогою вбудованої математичної функції MS Excel **МОБР**, яка має наступний синтаксис:

МОБР(масив),

де **масив** – числовий масив з рівною кількістю рядків і стовпців.

Тоді отримаємо:

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}3427 & 0{,}1259 \\ 0{,}0839 & 1{,}1329 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи рівнянь визначається у вигляді:

$$x = \alpha \Delta^{-1} \cdot c.$$

Добуток матриць Δ^{-1} і c обчислимо з використанням вбудованої математичної функції MS Excel **МУМНОЖ**:

МУМНОЖ(масив1;масив2),

де **масив1**, **масив2** – масиви, що перемножуються; при цьому кількість стовпців аргументу **масив1** має дорівнювати кількості рядків аргументу **масив2**.

Отже, маємо:

$$x = \Delta^{-1} \cdot \alpha c \quad \Rightarrow \quad x = \alpha \begin{pmatrix} 1,3427 & 0,1259 \\ 0,0839 & 1,1329 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48\alpha \\ 12\alpha \end{pmatrix}.$$

Отриманий стовпець x повинен задовольняти умови (2.5), (2.6):

$$\ell x \le L \quad \text{і} \quad x \le m,$$

які в даному випадку приймають вигляд:

$$\begin{pmatrix} 42 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48\alpha \\ 12\alpha \end{pmatrix} \le 1602; \quad \begin{pmatrix} 48\alpha \\ 12\alpha \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 45 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо:

$$\begin{cases} 2136\alpha \le 1602 \\ 48\alpha \le 45 \\ 12\alpha \le 11 \end{cases},$$

тобто

$$\begin{cases} \alpha \le \mathbf{0,75} \\ \alpha \le 0,9375. \\ \alpha \le 0,9167 \end{cases}$$

Тоді маємо найбільше значення, яке задовольняє всі три умови:

$$\alpha = 0,75.$$

Таким чином, отримали:

$$\alpha_{\max} = 0,75;$$

- стовпець випуску продукції має вигляд:

$$x = \begin{pmatrix} 48\alpha \\ 12\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \cdot 0,75 \\ 12 \cdot 0,75 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 36 \\ 9 \end{pmatrix};$$

- кінцевий продукт визначається наступним чином:

$$\alpha_{\max} c = 0,75 \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \cdot 0,75 \\ 8 \cdot 0,75 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\max} c = \begin{pmatrix} 26,25 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2.3. Завдання для самостійного розв'язання

2.1. Сфера виробництва деякої економічної системи складається з двох галузей. Знайти оптимальний режим роботи цих галузей, що забезпечують структуру додаткового продукту, заданого стовпцем c, за умови, що матриця матеріальних витрат A і рядок робочої сили ℓ мають наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad \ell = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Потужність першої галузі не перевершує 24, потужність другої галузі не перевершує 12, а загальне число робочих L дорівнює 120.

2.2. Сфера виробництва деякої економічної системи складається з двох галузей. Знайти оптимальний режим роботи цих галузей, що забезпечують структуру додаткового продукту, заданого стовпцем c, за умови, що матриця матеріальних витрат A і рядок робочої сили ℓ мають наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}; \; c = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}; \; \ell = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Потужність першої галузі не перевершує 8, потужність другої галузі не перевершує 12, а загальне число робочих L дорівнює 90.

2.3. Сфера виробництва деякої економічної системи складається з двох галузей. Знайти оптимальний режим роботи цих галузей, що забезпечують структуру додаткового продукту, заданого стовпцем c, за умови, що матриця матеріальних витрат A і рядок робочої сили ℓ мають наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/4 \end{pmatrix}; \; c = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}; \; \ell = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Потужність першої галузі не перевершує 20, потужність другої галузі не перевершує 11, а загальне число робочих L дорівнює 72.

2.4. Сфера виробництва деякої економічної системи складається з двох галузей. Знайти оптимальний режим роботи цих галузей, що забезпечують структуру додаткового продукту, заданого стовпцем c, за умови, що матриця матеріальних витрат A і рядок робочої сили ℓ мають наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/4 \end{pmatrix}; \; c = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}; \; \ell = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Потужність першої галузі не перевершує 12, потужність другої галузі не перевершує 8, а загальне число робочих L дорівнює 96.

3. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ

При вирішенні багатьох практичних завдань доводиться мати справу з ситуаціями, коли необхідним є одночасне виконання декількох **умов (критеріїв)**, часто суперечливих. Задачі, в яких потрібно визначити оптимальний розв’язок, що одночасно задовольняє декілька критеріїв, називаються **багатокритеріальними**.

Будівництво як сфера з високим ступенем складності часто передбачає ухвалення рішень, які повинні одночасно враховувати кілька суперечливих критеріїв, наприклад, вартість будівлі, терміни виконання робіт, якість матеріалів, тип конструкцій, енергоспоживання, екологічні аспекти тощо.

Методи **багатокритеріального прийняття рішень (Multi-Criteria Decision-Making)** застосовуються для вибору оптимального варіанту проєктного рішення або постачальника. Такі задачі особливо актуальні на етапах проєктування, при виборі технологій, формуванні тендерних вимог або оптимізації логістичних схем. Застосування методів багатокритеріального аналізу дає змогу порівнювати альтернативи і приймати зважені управлінські рішення, тим самим підвищуючи об’єктивність і прозорість процесу прийняття рішень у складних багатофакторних умовах.

3.1. Множина Парето

Розглянемо на площині OUV область Ω. Множину всіх її граничних точок називають границею області та позначають $\partial\Omega$.

Множина точок, переміщення яких по області Ω неможливе при не зменшенні хоча б однієї з координат, називається **границею (множиною) Парето** даної множини Ω (рис. 3.1, виділена дуга BQ).

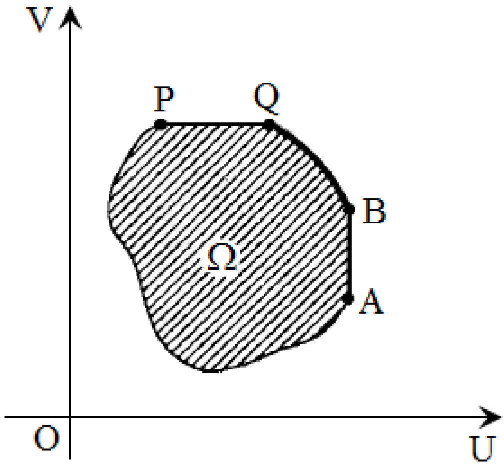


Рис. 3.1. Ілюстрація границі (множини) Парето

Нехай на площині Oxy задано множину ω, і в кожній точці цієї множини визначені дві безперервні функції: $U = \Phi(x, y)$ і $V = \Psi(x, y)$.

Розглянемо задачу: на множині ω знайти точку $\left(x^0; y^0\right)$, в якій:

$$\Phi\left(x^0, y^0\right) = \max \text{ и } \Psi\left(x^0, y^0\right) = \max,$$

тобто

$$\Phi(x, y) \to \max; \ \Psi(x, y) \to \max; \ (x; y) \in \omega.$$

Серед відомих методів пошуку таких рішень варто відзначити два:

1. **Метод поступок**.
2. **Метод ідеальної точки**.

Розглянемо далі основні положення **методу ідеальної точки**.

3.2. Метод ідеальної точки

Сутність **методу ідеальної точки** полягає у знаходженні на **границі Парето** точки, найближчої до **точки утопії**, яка задається особою, що приймає рішення. Як правило, мета формулюється у вигляді бажаних значень показників і за координати цільової точки вибирається поєднання найкращих значень всіх критеріїв. Зазвичай ця точка не реалізується при заданих обмеженнях, тому її і називають **точкою утопії**.

Розглянемо множину ω площини Oxy, яка визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \\ Ax + By \le C \end{cases}, \tag{3.1}$$

де a, b, c, d, A, B, C – відомі константи.

Нехай на множині ω задані дві лінійні функції:

$$U = a_{11}x + a_{12}y + b_1; \quad V = a_{21}x + a_{22}y + b_2. \tag{3.2}$$

Потрібно знайти розв’язок задачі:

$$U \to \max; \quad V \to \max. \tag{3.3}$$

Множина ω (3.1) являє собою п’ятикутник, вершини якого мають координати (рис 3.2.):

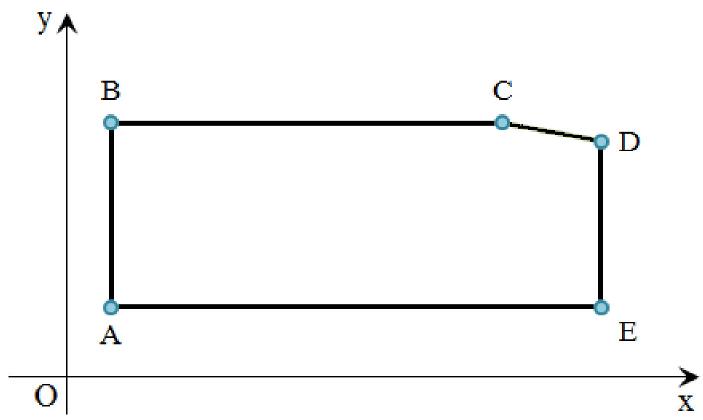


Рис. 3.2. Множина ω на площині Oxy – п’ятикутник $ABCDE$:
$A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, $D(x_D; y_D)$, $E(x_E; y_E)$

У силу лінійності критеріїв U і V п’ятикутник ABCDE переходить в п’ятикутник $A^*B^*C^*D^*E^*$ (рис. 3.3), координати вершин якого обчислюються за формулами (3.2):

$$A^*(U_{A^*}; V_{A^*});\ B^*(U_{B^*}; V_{B^*});\ C^*(U_{C^*}; V_{C^*});\ D^*(U_{D^*}; V_{D^*});\ E^*(U_{E^*}; V_{E^*}).$$

Границею Парето являється відрізок C^*D^*; **точкою утопії** – точка $M^*(U_{M^*}; V_{M^*})$ (її координатами є найбільші значення U і V).

Потрібно знайти на **множині Парето** точку $N^*(U_{N^*}; V_{N^*})$, найближчу до **точки утопії** $M^*(U_{M^*}; V_{M^*})$.

З рис. 3.3 видно, що шукана точка $N^*(U_{N^*}; V_{N^*})$ повинна лежати на відрізку C^*D^*.

Координати **ідеальної точки** $N^*(U_{N^*}; V_{N^*})$ визначаються виразами:

$$V_{N^*} = V = \left[V_{M^*} - \frac{U_{D^*} - U_{C^*}}{V_{D^*} - V_{C^*}} \left(\frac{U_{C^*}V_{D^*} - V_{C^*}U_{D^*}}{V_{D^*} - V_{C^*}} - U_{M^*} \right) \right] \left[\left(\frac{U_{D^*} - U_{C^*}}{V_{D^*} - V_{C^*}} \right)^2 + 1 \right]^{-1}. \tag{3.4}$$

$$U_{N^*} = V_{N^*} \cdot \frac{U_{D^*} - U_{C^*}}{V_{D^*} - V_{C^*}} + \frac{U_{C^*} V_{D^*} - V_{C^*} U_{D^*}}{V_{D^*} - V_{C^*}}. \qquad (3.5)$$

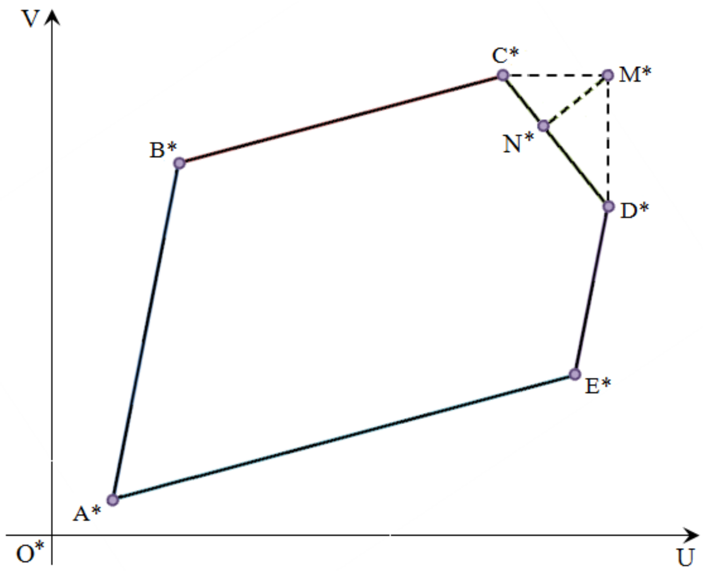


Рис. 3.3. П'ятикутник $A^*B^*C^*D^*E^*$, точка утопії M^* та ідеальна точка N^* на площині O^*UV

Відповідні координати $x_{опт}$ і $y_{опт}$ **оптимальної точки** $O_{опт}(x_{опт}; y_{опт})$ множини ω площини Oxy визначаються із системи лінійних рівнянь (3.2):

$$\begin{cases} U_{N^*} = a_{11} x_{опт} + a_{12} y_{опт} + b_1 \\ V_{N^*} = a_{21} x_{опт} + a_{22} y_{опт} + b_2 \end{cases}. \qquad (3.6)$$

Відзначимо, що на практиці часто зустрічаються ситуації, коли задачі оптимізації формулюються у відмінному від (3.3) вигляді; наприклад,

$$\Phi(x, y) \to \max; \; \Psi(x, y) \to \min; \qquad (3.7)$$

або

$$\Phi(x, y) \to \min; \; \Psi(x, y) \to \min. \qquad (3.8)$$

Задачі виду (3.7), (3.8) можна вирішувати і безпосередньо. Але значно зручніше звести їх до розглянутої вище задачі оптимізації (3.3), якщо врахувати, що функція

$$\Theta(x, y) = -\Psi(x, y)$$

має наступну властивість: вона досягає найбільшого значення в тих точках, де функція Ψ приймає найменше значення, і навпаки.

Іншими словами, умови

$$\Psi(x, y) \to \min \text{ і } \Theta(x, y) \to \max$$

рівносильні.

Тому, помінявши у разі потреби знак критерію на протилежний, можна звести будь-яку двокритеріальну задачу до вже розглянутої (3.1) – (3.3).

Приклад 3.1. На множині ω площини Oxy, що визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} 2{,}5 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 3{,}5 \\ 2x + 6y \le 31 \end{cases}, \tag{3.9}$$

задані дві лінійні функції:

$$\begin{aligned} U &= 4x - 2y + 3 \\ V &= 3x + 5y - 15 \end{aligned}. \tag{3.10}$$

Знайти розв'язок задачі:

$$U \to \max; \quad V \to \max. \tag{3.11}$$

Розв'язок:

Множина ω (3.9) на площині Oxy являє собою п'ятикутник $ABCDE$, вершини якого мають координати (рис. 3.4):

$$A(2{,}5;0),\ B(2{,}5;3{,}5),\ C(5;3{,}5),\ D\left(6;3\frac{1}{6}\right),\ E(6;0).$$

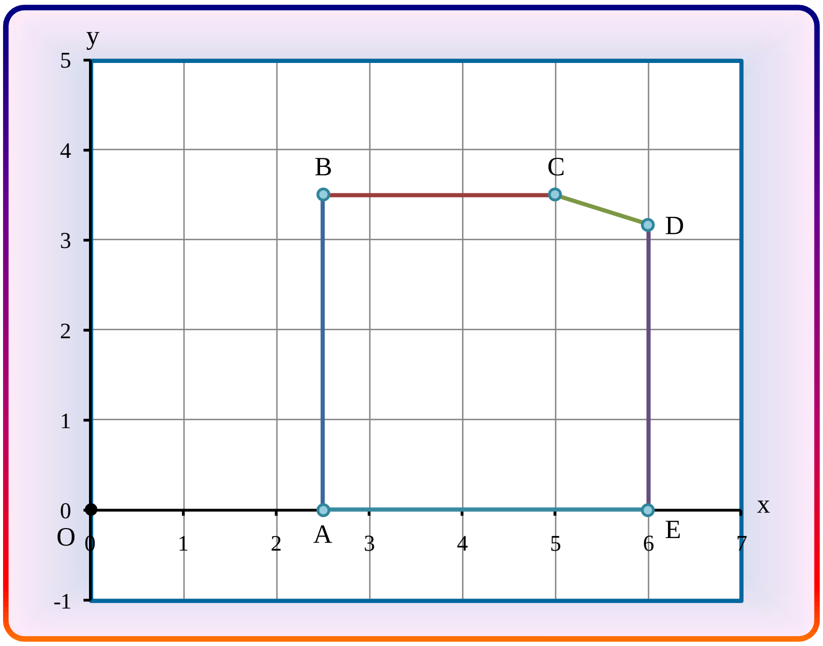


Рис. 3.4. Множина ω на площині Oxy – п'ятикутник $ABCDE$

У силу лінійності критеріїв U і V п'ятикутник $ABCDE$ переходить на площині O^*UV у п'ятикутник $A^*B^*C^*D^*E^*$ (рис. 3.5), координати вершин якого обчислюються за формулами (3.10):

$$A^*(13;-7{,}5);\ B^*(6;10);\ C^*(16;17{,}5);\ D^*\left(20\frac{2}{3};18\frac{5}{6}\right);\ E^*(27;3).$$

Знаходимо **границю Парето** – у даному випадку це відрізок D^*E^*. Точкою утопії є точка $M^*\left(27;18\frac{5}{6}\right)$ – її координатами являються найбільші значення U і V. Потрібно знайти на **множині Парето** точку, найближчу до точки утопії $M^*\left(27;18\frac{5}{6}\right)$.

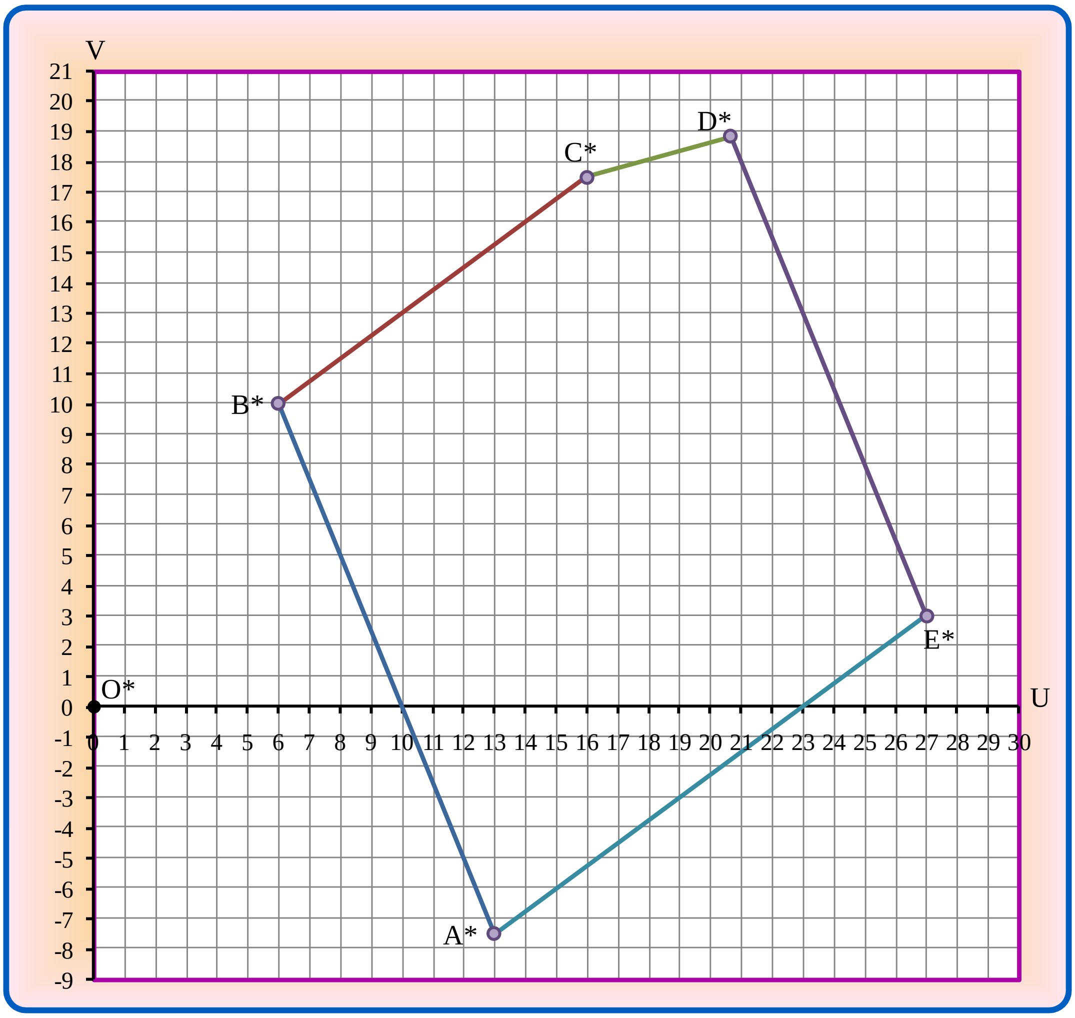


Рис. 3.5. П’ятикутник $A^*B^*C^*D^*E^*$ на площині O^*UV

Отримаємо рівняння прямої D^*E^*, яке можна записати як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $D^*\left(U_{D^*};V_{D^*}\right)=D^*\left(20\frac{2}{3};18\frac{5}{6}\right)$ і $E^*\left(U_{E^*};V_{E^*}\right)=E^*(27;3)$:

$$\frac{U-U_{E^*}}{U_{D^*}-U_{E^*}}=\frac{V-V_{E^*}}{V_{D^*}-V_{E^*}}.$$

Тоді маємо:

$$\frac{U-27}{62/3-27}=\frac{V-3}{113/6-3} \quad\Rightarrow\quad \frac{U-27}{-19/3}=\frac{V-3}{95/6} \quad\Rightarrow\quad \frac{U-27}{-38}=\frac{V-3}{95};$$

$$U-27=\frac{V-3}{-2{,}5} \quad\Rightarrow\quad U+0{,}4V-27-\frac{3}{2{,}5} \quad\Rightarrow\quad U+0{,}4V-28{,}2=0,$$

або

$$5U+2V-141=0.$$

Отже, на прямій

$$D^*E^*:\ 5U+2V-141=0 \tag{3.12}$$

треба знайти точку $N^*(U_{N^*};V_{N^*})$, відстань від якої до точки $M^*\left(27;18\frac{5}{6}\right)$ є мінімальною, т. е. розв'язати екстремальну задачу:

$$d=\sqrt{(U-27)^2+\left(V-\frac{113}{6}\right)^2}\to \min. \qquad (3.13)$$

Як відомо, відстань від точки до прямої дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з точки на пряму. Тому, щоб розв'язати екстремальну задачу (3.13), достатньо побудувати пряму M^*N^*, перпендикулярну прямій D^*E^* (3.12), і знайти точку перетину цих прямих (рис. 3.6).

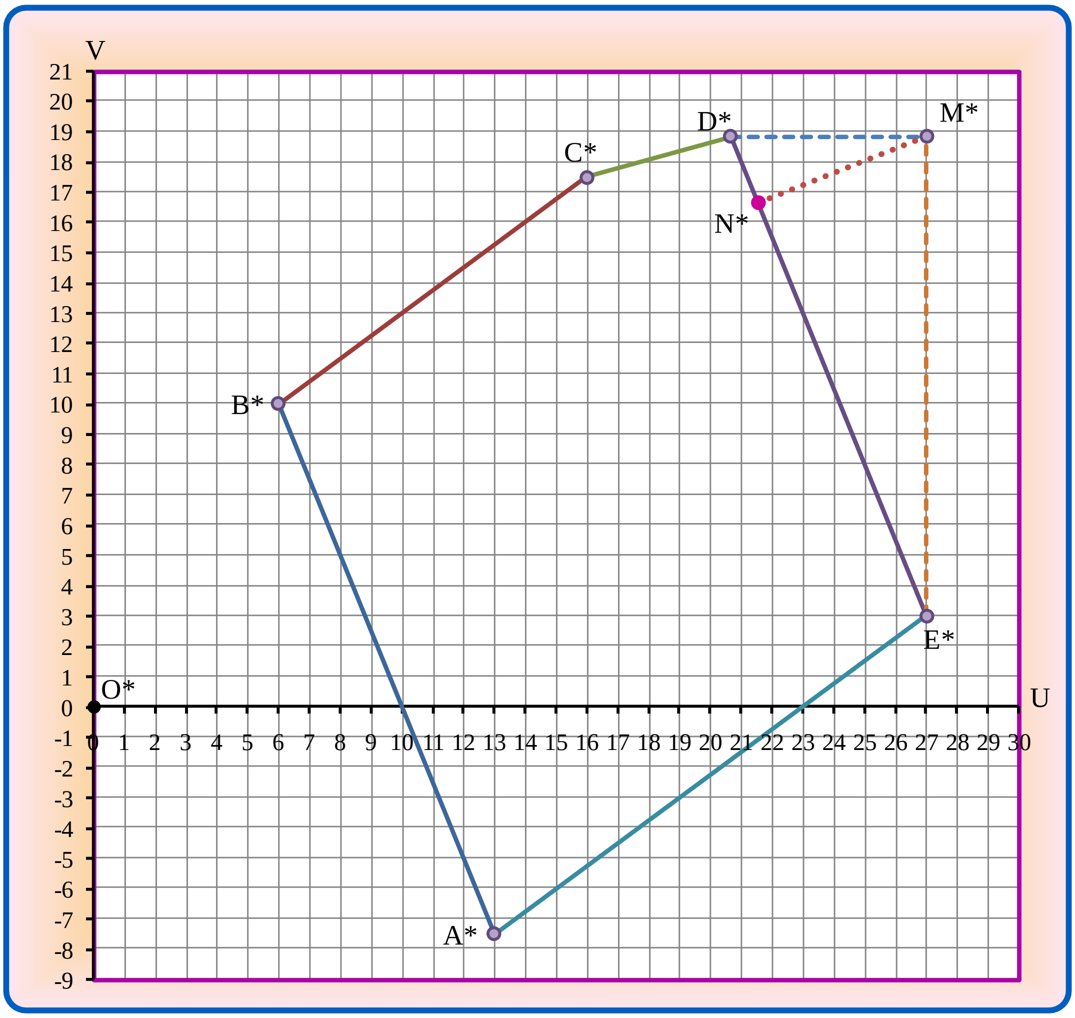


Рис. 3.6. Розв'язок задачі методом ідеальної точки

Рівняння прямої M^*N^* знайдемо як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку $M^*\left(27;18\frac{5}{6}\right)$:

$$V-V_{M^*}=k_{M^*N^*}\left(U-U_{M^*}\right). \qquad (3.14)$$

Так як

$$M^*N^* \perp D^*E^*,$$

то кутові коефіцієнти цих прямих зв'язані співвідношенням:

$$k_{M^*N^*} = -\frac{1}{k_{D^*E^*}}.$$

Зі співвідношення (3.12) маємо:

$$U + 0{,}4V - 28{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -2{,}5U + 70{,}5 \quad \Rightarrow \quad k_{D^*E^*} = -2{,}5;$$

тоді

$$k_{M^*N^*} = -\frac{1}{-2{,}5} = 0{,}4.$$

Отже, рівняння прямої M^*N^* (3.14) отримуємо у вигляді:

$$V - \frac{113}{6} = 0{,}4(U - 27),$$

або

$$M^*N^*:\ 12U - 30V + 241 = 0. \qquad (3.15)$$

Координати точки N^* – точки перетину прямих D^*E^* і M^*N^* – знаходимо як розв'язок системи рівнянь (3.12) і (3.15):

$$\begin{cases} 5U + 2V = 141 \\ 12U - 30V = -241 \end{cases}. \qquad (3.16)$$

Отримаємо рішення системи рівнянь (3.16) матричним способом:

$$\Delta_{N^*} = \Delta^{-1} \cdot \Delta_b,$$

де $\Delta_{N^*} = \begin{pmatrix} U_{N^*} \\ V_{N^*} \end{pmatrix}$ – матриця шуканих координат точки N^*;

Δ^{-1} – матриця, зворотна матриці Δ, складеній з коефіцієнтів при невідомих системи рівнянь (3.16):

$$\Delta = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & -30 \end{pmatrix};$$

Δ_b – матриця вільних членів системи рівнянь (3.16):

$$\Delta_b = \begin{pmatrix} 141 \\ -241 \end{pmatrix}.$$

Операції знаходження зворотної матриці Δ^{-1} і множення матриць Δ^{-1} і Δ_b виконуємо за допомогою вбудованих математичних функцій MS Excel **МОБР** і **МУМНОЖ** відповідно.

Тоді отримуємо:

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1724 & 0{,}0115 \\ 0{,}0690 & -0{,}0287 \end{pmatrix};$$

отже,

$$\begin{pmatrix} U_{N^*} \\ V_{N^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1724 & 0{,}0115 \\ 0{,}0690 & -0{,}0287 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 141 \\ -241 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21{,}5402 \\ 16{,}6494 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ідеальна точка N^* має координати (рис 3.6):

$$N^*(21{,}5402; 16{,}6494)$$

і знаходиться від точки утопії $M^*\left(27; 18\frac{5}{6}\right)$ на відстані:

$$d_{M^*N^*} = \sqrt{(U_{M^*} - U_{N^*})^2 + (V_{M^*} - V_{N^*})^2},$$

тобто

$$d_{M^*N^*} = \sqrt{(27 - 21{,}5402)^2 + (113/6 - 16{,}6494)^2} \approx 5{,}8804.$$

Відповідні координати $x_{опт}$ і $y_{опт}$ оптимальної точки $O_{опт}(x_{опт}; y_{опт})$ множини ω на площині Oxy визначаються із системи лінійних рівнянь (3.10):

$$\begin{cases} 4x - 2y + 3 = 21{,}5402 \\ 3x + 5y - 15 = 16{,}6494 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 18{,}5402 \\ 3x + 5y = 31{,}6494 \end{cases}. \qquad (3.17)$$

Розв’язок системи рівнянь (3.17) матричним способом має вигляд:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1923 & 0{,}0769 \\ -0{,}1154 & 0{,}1538 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{опт} \\ y_{опт} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1923 & 0{,}0769 \\ -0{,}1154 & 0{,}1538 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9{,}2701 \\ 31{,}6494 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2{,}7299 \end{pmatrix}.$$

Розв’язок задачі (3.9)–(3.11) у початкових координатах, тобто оптимальна точка

$$O_{опт}(x_{опт}; y_{опт}) = O_{опт}(6; 2{,}7299)$$

на площині Oxy, представлено на рис. 3.7.

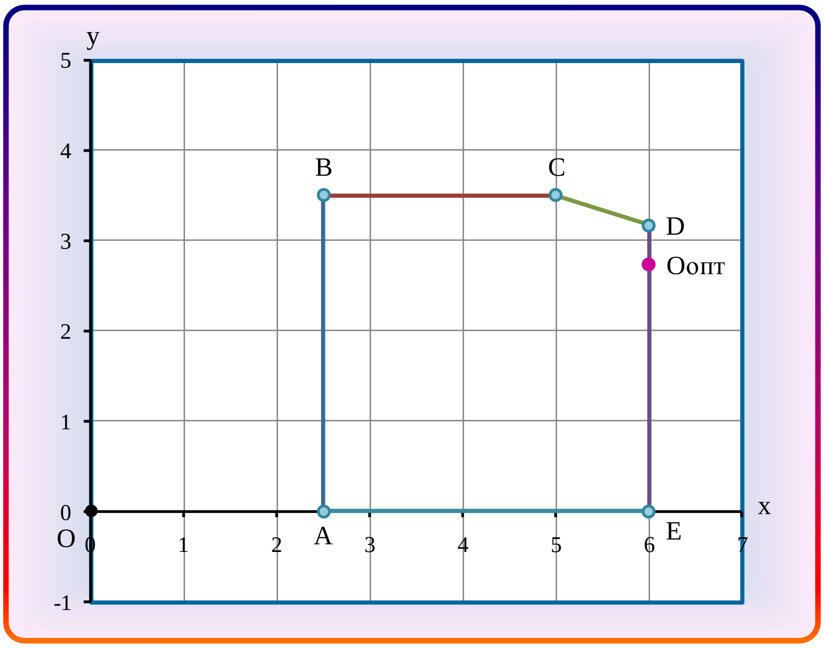


Рис. 3.7. Оптимальний розв’язок задачі

Приклад 3.2. На множині ω площини Oxy, що визначається системою нерівностей

$$\omega:\ \begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ 1 \le y \le 3 \\ 3x + 4y \le 23 \end{cases} \qquad (3.18)$$

задані дві лінійні функції:

$$U = 2x + 3y - 5; \qquad (3.19)$$

$$V = -4x + 2y + 1. \qquad (3.20)$$

Знайти розв’язок задачі:

$$U \to \max;\quad V \to \min. \qquad (3.21)$$

Розв’язок:

Введемо нову функцію:

$$W = -V = 4x - 2y - 1. \qquad (3.22)$$

Тоді умова оптимізації (3.21) запишеться наступним чином:

$$U \to \max;\quad W \to \max. \qquad (3.23)$$

Побудуємо на площині Oxy множину ω – п’ятикутник ABCDE (3.18), вершини якого мають координати (рис 3.8):

$$A(2;1);\ B(2;3);\ C(3{,}6667;3);\ D(5;2);\ E(5;1).$$

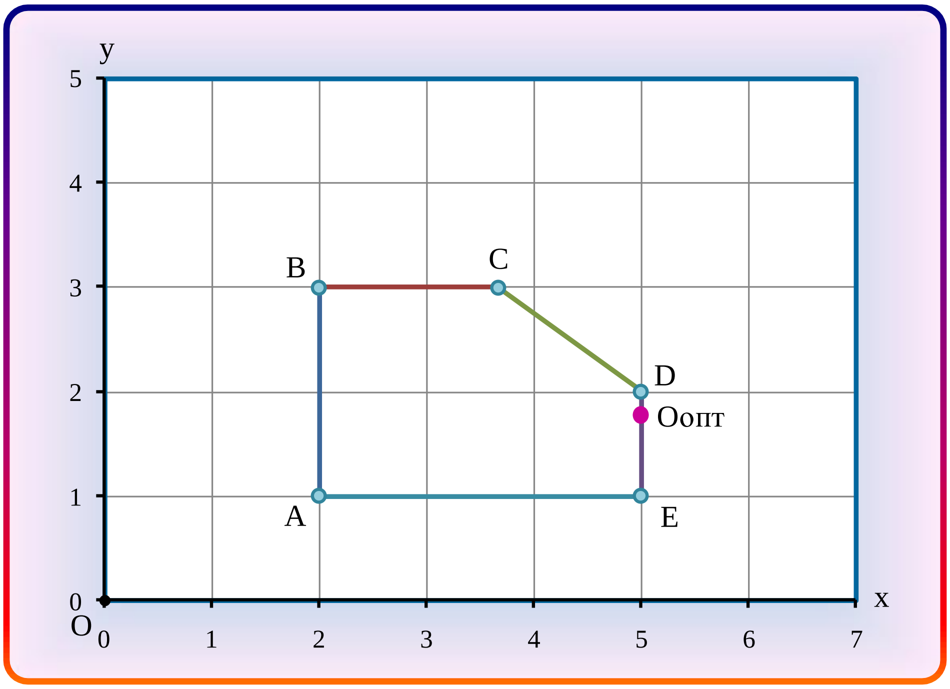


Рис. 3.8. Оптимальний розв’язок задачі на площині Oxy

У силу лінійності критеріїв U і W п’ятикутник ABCDE переходить на площині O^*UW в п’ятикутник $A^*B^*C^*D^*E^*$ (рис. 3.9), координати вершин якого обчислюються за формулами (3.19), (3.22):

$$A^*(2;5);\ B^*(8;1);\ C^*(11{,}3333;7{,}6667);\ D^*(11;15);\ E^*(8;17).$$

Знаходимо **границю Парето** – відрізки D^*E^* і E^*C^*. Точкою утопії є точка $M^*(11{,}3333;17)$, координати якої є найбільшими значеннями U і W.

Потрібно знайти на **множині Парето** точку, найближчу до **точки утопії** $M^*(11{,}3333;17)$.

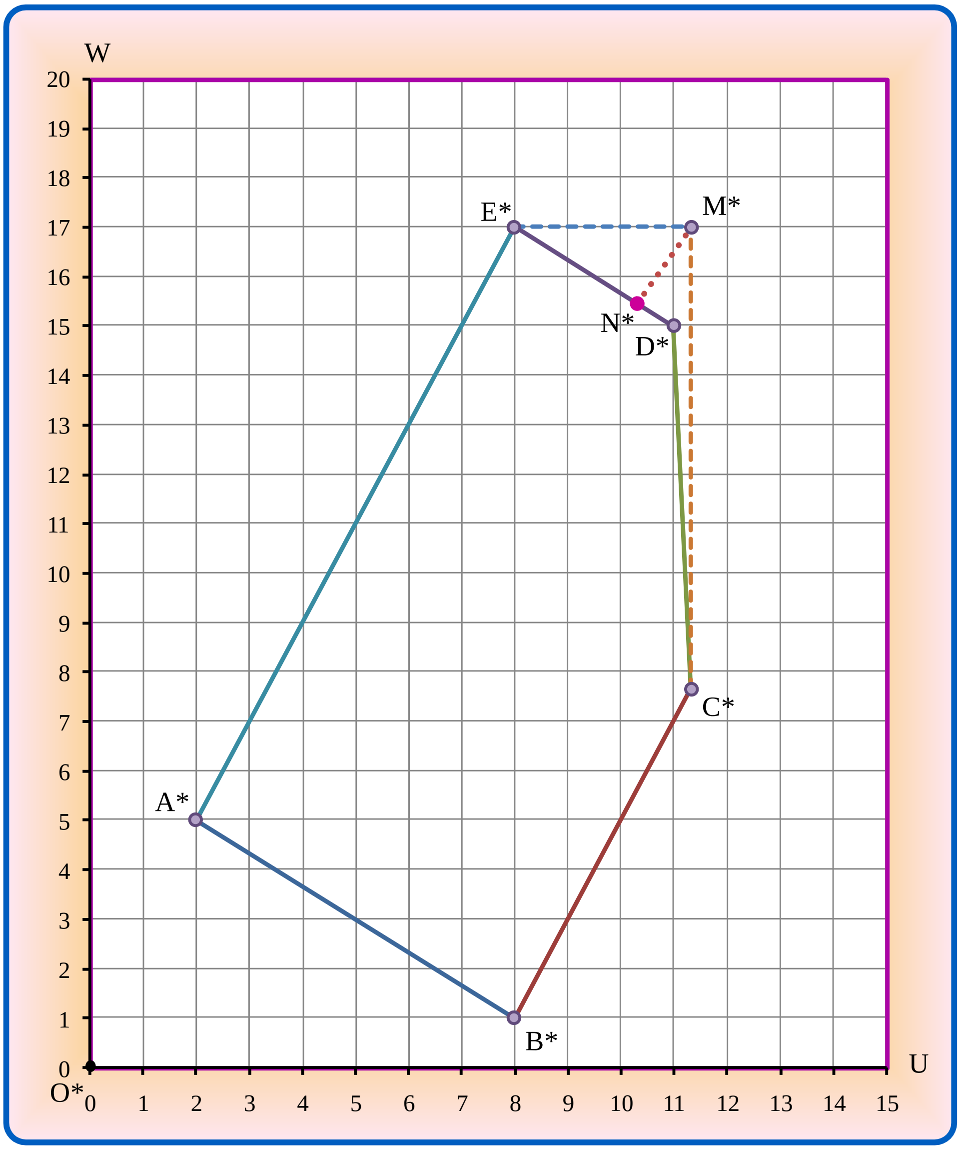


Рис. 3.9. Розв’язок задачі методом ідеальної точки на площині O^*UW

Знайдемо рівняння прямої D^*E^* як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $D^*\left(U_{D^*};W_{D^*}\right)=D^*(11;15)$ і $E^*\left(U_{E^*};W_{E^*}\right)=E^*(8;17)$:

$$\frac{U-U_{E^*}}{U_{D^*}-U_{E^*}}=\frac{W-W_{E^*}}{W_{D^*}-W_{E^*}}.$$

Тоді маємо:

$$\frac{U-8}{11-8}=\frac{W-17}{15-17} \quad \Rightarrow \quad 2U+3W-67=0.$$

На прямій

$$D^*E^*:\ 2U + 3W - 67 = 0 \qquad (3.24)$$

потрібно знайти точку $N^*\left(U_{N^*}; W_{N^*}\right)$, відстань від якої до точки $M^*(11{,}3333; 17)$ мінімальна.

Побудуємо пряму M^*N^*, перпендикулярну прямій D^*E^*. Рівняння прямої M^*N^* знайдемо як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку $M^*(11{,}3333; 17)$:

$$W - W_{M^*} = k_{M^*N^*}\left(U - U_{M^*}\right). \qquad (3.25)$$

Так як

$$M^*N^* \perp D^*E^*,$$

то

$$k_{M^*N^*} = -\frac{1}{k_{D^*E^*}} \quad \Rightarrow \quad k_{M^*N^*} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = 1{,}5.$$

Отже, з використанням виразу (3.25) отримуємо рівняння прямої M^*N^* у вигляді:

$$M^*N^*:\ 3V - 2W = 0. \qquad (3.26)$$

Знайдемо далі точку N^* перетину прямих D^*E^* і M^*N^*. Координати точки N^* визначаються як розв'язок системи рівнянь (3.24) и (3.26):

$$\begin{cases} 2U + 3W - 67 = 0 \\ 3V - 2W = 0 \end{cases}. \qquad (3.27)$$

Визначаючи розв'язок системи рівнянь (3.27) матричним способом, з використанням математичних функцій MS Excel **МОБР** і **МУМНОЖ**, маємо:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1538 & 0{,}2308 \\ 0{,}2308 & -0{,}1538 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} U_{N^*} \\ W_{N^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1538 & 0{,}2308 \\ 0{,}2308 & -0{,}1538 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 67 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}3077 \\ 15{,}4615 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ідеальна точка N^* має координати (рис. 3.9):

$$N^*(10{,}3077; 15{,}4615)$$

і знаходиться від точки утопії $M^*(11{,}3333; 17)$ на відстані:

$$d_{M^*N^*} = \sqrt{(11{,}3333 - 10{,}3077)^2 + (17 - 15{,}4615)^2} \approx 1{,}8490.$$

Відповідні координати $x_{опт}$ і $y_{опт}$ оптимальної точки $O_{опт}\left(x_{опт}; y_{опт}\right)$ на площині Oxy визначаються із системи лінійних рівнянь (3.19), (3.22):

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 10{,}3077 \\ 4x - 2y - 1 = 15{,}4615 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 15{,}3077 \\ 4x - 2y = 16{,}4615 \end{cases}. \qquad (3.28)$$

Розв'язок системи рівнянь (3.28) матричним способом має вигляд:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}1875 \\ 0{,}25 & -0{,}125 \end{pmatrix};$$

отже,

$$\begin{pmatrix} x_{опт} \\ y_{опт} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}1875 \\ 0{,}25 & -0{,}125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15{,}3077 \\ 16{,}4615 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}7692 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, на площині Оxy оптимальним розв'язком задачі (3.18), (3.19), (3.22), (3.23) буде точка (рис. 3.8):

$$O_{опт}(x_{опт}; y_{опт}) = O_{опт}(5; 1{,}7692).$$

А отже, ця ж точка $O_{опт}(x_{опт}; y_{опт})$ являється і оптимальним розв'язком задачі (3.18) – (3.21).

3.3. Завдання для самостійного розв'язання

3.1. На множині

$$\begin{cases} 2 \le x \le 3{,}5 \\ 2 \le y \le 5 \\ x + 4y \le 23 \end{cases}$$

задані лінійні функції:

$$\begin{aligned} U &= -x + 3y + 2 \\ V &= 4x + 4y - 5 \end{aligned}.$$

Знайти розв'язок задачі:

$$U \to \max; \quad V \to \max.$$

3.2. На множині

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 5 \\ 4x + 2y \le 19 \end{cases}$$

задані лінійні функції:

$$\begin{aligned} U &= 2x - y + 5 \\ V &= 3x + 2y + 3 \end{aligned}.$$

Знайти розв'язок задачі:

$$U \to \max; \quad V \to \max.$$

3.3. На множині

$$\begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 3 \\ 5x + 3y \le 30 \end{cases}$$

задані лінійні функції:

$$\begin{aligned} U &= 3x + 2y - 7 \\ V &= -x + 2y + 6 \end{aligned}.$$

Знайти розв'язок задачі:

$$U \to \max; \; V \to \max.$$

3.4. На множині

$$\begin{cases} 2 \le x \le 6 \\ 4 \le y \le 6 \\ x + 2y \le 15 \end{cases}$$

задані лінійні функції:

$$U = 4x - 2y + 7$$
$$V = -2x - 3y + 8.$$

Знайти розв’язок задачі:

$$U \to \max; \; V \to \min.$$

4. УПРАВЛІННЯ РОЗПОДІЛОМ РЕСУРСІВ

Управління розподілом ресурсів у галузі будівництві та цивільної інженерії є одним із ключових завдань, що безпосередньо впливає на терміни будівництва, його вартість та якість реалізації проєкту. Ефективне планування розподілу ресурсів дозволяє уникнути перевантаження окремих ділянок, запобігти простоям і забезпечити баланс між критичними та допоміжними роботами.

Математичні **моделі розподілу ресурсів (Resource Allocation Models)** дозволяють оптимізувати використання трудових, матеріальних, технічних та фінансових ресурсів з урахуванням значної кількості обмежень, таких як бюджет, наявність персоналу чи графік будівництва. Цифрові інструменти на основі моделей управління ресурсами здатні забезпечити візуалізацію і коригування ресурсного плану в реальному часі. Застосування моделей управління ресурсами особливо важливе при реалізації багатопроєктного будівництва, коли необхідно координувати використання спільних ресурсів між кількома майданчиками або об’єктами.

Використання моделей управління ресурсами дає можливість мінімізувати витрати на будівництво за рахунок:

- підвищення продуктивності праці будівельних бригад завдяки раціональному розподілу матеріалів, техніки та робочої сили;
- синхронізації будівельних процесів, раціоналізації графіків виконання робіт та дотримання строків виконання проєкту;
- автоматизації планування та контролю логістичних витрат;
- можливості передбачити потенційний дефіцит матеріалів або затримку будівельних робіт та знизити ризики зриву проєкту;
- швидкого перерозподілу ресурсів у відповідь на зміни в проєктних вимогах або форс-мажорні обставини.

4.1. Постановка задачі розподілу ресурсів

Суть **задачі розподілу ресурсів** полягає в наступному: елементи – надалі будемо називати їх **Споживачами** – представляють **Центру** заявки на отримання деякого ресурсу (для простоти розглядається один вид ресурсу). **Центр** на підставі цих заявок розподіляє наявний в його розпорядженні ресурс.

Якщо всі заявки можуть бути повністю задоволені, то **Центр** виділяє кожному **Споживачеві** стільки, скільки він просить.

Істотно складнішою є ситуація дефіциту, коли сумарний обсяг заявок перевершує наявний в розпорядженні **Центру** ресурс. У цьому випадку задача розподілу ресурсу стає нетривіальною, і універсальних рекомендацій щодо її рішення не існує.

Далі розглянемо деякі способи, або механізми, розподілу ресурсів, кожен з яких має певні переваги і недоліки.

Проведемо **формалізацію задачі розподілу ресурсів**.

Існують n **Споживачів**, кожен з яких подає **Центру** заявку на s_i $(i=1,2,\dots,n)$ одиниць ресурсу, а також, можливо, ще деяку додаткову інформацію.

Далі **Центр** на підставі заявок **Споживачів**, наявного в його розпорядженні ресурсу R та додаткової інформації про споживачів обчислює по деякому правилу обсяг ресурсу x_i $(i=1,2,\dots,n)$, який виділяється i-му **Споживачеві**.

Далі будемо вважати, що виконується нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i > R, \tag{4.1}$$

тобто сумарні заявки **Споживачів** перевищують ресурс **Центру**.

4.2. Механізм прямих пріоритетів

Механізм прямих пріоритетів відноситься до числа так званих пріоритетних механізмів, характерною рисою яких є приписування кожному **Споживачеві** деякого пріоритету.

Отже, поряд з розмірами заявок s_i $(i=1,2,\dots,n)$ **Центр** враховує **пріоритет** кожного **Споживача**, який визначається числом A_i $(i=1,2,\dots,n)$.

Відповідно до **механізму прямих пріоритетів** розподіл ресурсу здійснюється за правилом:

$$x_i = \min\{s_i, \gamma A_i s_i\},\ i=1,2,\dots,n,$$

де γ – загальний для всіх **Споживачів** параметр – визначається за умови:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = R, \tag{4.2}$$

тобто весь ресурс розподіляється без залишку.

Вираз для параметра γ визначається у вигляді:

$$\gamma = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} s_i}. \tag{4.3}$$

Сенс описаного механізму розподілу ресурсів полягає в тому, що всі заявки пропорційно «урізаються» шляхом множення на число γ.

Приклад 4.1. П'ять Споживачів подали заявки в розмірі 5, 8, 12, 7 і 8. Наявний в розпорядженні Центру ресурс становить 32. Як має бути розподілений цей ресурс відповідно до механізму прямих пріоритетів?

Розв'язок:

За умовою задачі маємо:

$$s_1 = 5,\ s_2 = 8,\ s_3 = 12,\ s_4 = 7,\ s_5 = 8;\ R = 32.$$

Оскільки у даному випадку виконується нерівність (4.1):

$$\sum_{i=1}^{5} s_i = 5 + 8 + 12 + 7 + 8 = 40 > 32 = R,$$

то має місце дефіцит ресурсу.

Визначимо коефіцієнт γ за формулою (4.3). Тоді знаходимо:

$$\gamma = \frac{32}{40} = 0{,}8.$$

Отже, на цей коефіцієнт γ і слід помножити всі заявки.

У підсумку маємо, що кожен зі Споживачів отримає відповідно таку кількість ресурсу:

$$x_1 = \gamma s_1 = 5 \cdot 0{,}8 = 4;\ \ x_2 = \gamma s_2 = 8 \cdot 0{,}8 = 6{,}4;\ \ x_3 = \gamma s_3 = 12 \cdot 0{,}8 = 9{,}6;$$
$$x_4 = \gamma s_4 = 7 \cdot 0{,}8 = 5{,}6;\ \ x_5 = \gamma s_5 = 8 \cdot 0{,}8 = 6{,}4.$$

4.3. Механізм зворотних пріоритетів

Механізм зворотних пріоритетів ґрунтується на припущенні, що чим менше потрібно **Споживачеві** ресурсу, тим більше **ефективність** його використання. Відповідно до цього розподіл ресурсу здійснюється за правилом:

$$x_i = \min\left\{ s_i, \gamma \frac{A_i}{s_i} \right\},\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{4.4}$$

де число γ визначається, як і в механізмі прямих пріоритетів, з умови (4.2):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = R.$$

З формули (4.4) випливає, що, подаючи дуже малу або дуже велику заявку s_i, **Споживач** отримає малий ресурс s_i.

У цьому зв'язку має сенс визначити, яку ж заявку s_i потрібно подати i-ому **Споживачеві Центру**, щоб отримати максимальний ресурс x_i.

Рівноважний набір стратегій **Споживачів**, тобто набір стратегій s_i, $i = 1, 2, \dots, n$, при якому

$$x_i = s_{i\,max} = s_i^*,\ i = 1, 2, \dots, n,$$

визначається за формулою:

$$s_i^* = \sqrt{\gamma A_i}. \tag{4.5}$$

Вибираючи замість s_i^* будь-яку іншу стратегію s_i, i-ий **Споживач** лише зменшить ресурс, що виділяється йому.

Обчислюючи константу γ, маємо:

$$\sqrt{\gamma} = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i}}. \qquad (4.6)$$

Приклад 4.2. Є п'ять Споживачів, пріоритети яких визначаються числами 15, 9, 18, 11, 16. Ресурс Центру становить 65.

Визначити рівноважні стратегії (заявки) Споживачів, якщо ресурс розподіляється відповідно до механізму зворотних пріоритетів.

Розв'язок:

За умовою задачі маємо:

$$A_1 = 15,\ A_2 = 9,\ A_3 = 18,\ A_4 = 11,\ A_5 = 16;\ R = 65.$$

Обчислимо константу γ за формулою (4.6). Тоді в даному випадку отримуємо:

$$\sqrt{\gamma} = \frac{65}{\sqrt{15} + \sqrt{9} + \sqrt{18} + \sqrt{11} + \sqrt{16}} \approx 3{,}5264.$$

Отже, визначаємо рівноважний набір стратегій Споживачів за формулою (4.5) у вигляді:

$$s_1^* = 3{,}5264\sqrt{15} \approx 13{,}6578;\ s_2^* = 3{,}5264\sqrt{9} \approx 10{,}5793;\ s_3^* = 3{,}5264\sqrt{18} \approx 14{,}9614;$$
$$s_4^* = 3{,}5264\sqrt{11} \approx 11{,}6958;\ s_1^* = 3{,}5264\sqrt{16} \approx 14{,}1057.$$

4.4. Конкурсний механізм

Конкурсний механізм застосовується в тих випадках, коли недоцільно «урізати» заявки, оскільки **Споживачам** ресурс потрібен на реалізацію будь-яких конкретних проектів, на які меншого ресурсу не вистачить. У цих умовах **Центр** проводить конкурс заявок. Ті, хто перемагають у конкурсі, повністю отримують необхідний ресурс, а переможені не отримують нічого.

Реалізація **конкурсного механізму** відбувається наступним чином:

1. Споживачі повідомляють **Центру** свої заявки s_i, а також величини w_i, що характеризують ефект, який вони мають намір отримати.

2. На підставі цих даних **Центр** обчислює для кожного **Споживача** показник ефективності:

$$e_i = \frac{w_i}{s_i};\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.7)$$

3. Після цього розподіляється ресурс:

- спочатку розглядається **Споживач** з найбільшою ефективністю; йому виділяється стільки, скільки він просить (якщо у **Центра** вистачає ресурсу);
- потім береться другий за ефективністю **Споживач** і т. д.;

- в якийсь момент виявляється, що на задоволення чергової заявки ресурсу, що залишився у **Центра,** не вистачає. Тоді цей **Споживач**, так само як і всі інші, нічого не отримає.

Приклад 4.3. Є шість Споживачів, які подали заявки у розмірі 21, 24, 15, 28, 36, 19 і повідомили Центру відповідно наступні показники ефекту: 55, 51, 43, 57, 74, 46.

Яким має бути розподіл ресурсу об’ємом 110 відповідно до конкурсного механізму?

Розв’язок:

За умовою задачі задано:

$$R = 110;$$

$$s_1 = 21,\ s_2 = 24,\ s_3 = 15,\ s_4 = 28,\ s_5 = 36,\ s_6 = 19;$$

$$w_1 = 55,\ w_2 = 51,\ w_3 = 43,\ w_4 = 57,\ w_5 = 74,\ w_6 = 46.$$

Обчислимо показники ефективності для кожного Споживача за формулою (4.7). Тоді отримуємо:

$$e_1 = \frac{55}{21} \approx 2{,}62;\ e_2 = \frac{51}{24} \approx 2{,}13;\ e_3 = \frac{43}{15} \approx 2{,}87;$$

$$e_4 = \frac{57}{28} \approx 2{,}04;\ e_5 = \frac{74}{36} \approx 2{,}06,\ e_6 = \frac{46}{19} \approx 2{,}42.$$

Розташуємо ці числа в порядку убування:

$$e_3 = 2{,}87;\ \ e_1 = 2{,}62;\ \ e_6 = 2{,}42;\ \ e_2 = 2{,}13;\ \ e_5 = 2{,}06;\ \ e_4 = 2{,}04,$$

тобто

$$e_3 > e_1 > e_6 > e_2 > e_5 > e_4.$$

Розподіл ресурсу починається з 3-го Споживача:

$$x_3 = 15.$$

Тоді ресурсу залишилося:

$$110 - 15 = 95.$$

Далі в порядку убування показників ефективності знаходиться 1-ий Споживач:

$$x_1 = 21.$$

Ресурсу залишилося:

$$95 - 21 = 74.$$

Далі виділяється ресурс 6-ому Споживачеві:

$$x_6 = 19.$$

Ресурсу залишилося:

$$74 - 19 = 55.$$

Наступному виділяється ресурс 2-ому Споживачеві:

$$x_2 = 24.$$

Ресурсу залишилося:

$$55 - 24 = 31.$$

Наступному, п’ятому Споживачеві потрібно 36 одиниць ресурсу, а у Центра залишилося лише 31. Тому 5-ий, а також 4-ий Споживачі нічого не отримають:

$$x_5 = x_4 = 0.$$

4.5. Механізм відкритого управління

Опишемо один з можливих механізмів відкритого управління.

Розподіл ресурсів проводиться в кілька етапів:

- на першому етапі весь ресурс розділяється порівну між усіма **Споживачами**, тобто по $\frac{R}{n}$ кожному. Якщо заявки яких-небудь **Споживачів** виявилися не більше, ніж $\frac{R}{n}$, то вони повністю задовольняються. Тим самим число Споживачів зменшується до n_1; при цьому зменшується і ресурс **Центру** – до R_1;
- на другому етапі ресурс R_1, що залишився, розподіляється порівну між рештою **Споживачів** і т. д.;
- на якомусь етапі виявляється, що, розділивши ресурс порівну між рештою **Споживачів**, не вдається задовольнити жодної заявки. Тоді всі ці **Споживачі** отримають ресурс, що залишився, порівну.

Реалізація описаного механізму відкритого управління призводить до того, що всі **Споживачі** діляться на **пріоритетних** (які отримали стільки, скільки просили) і **непріоритетних** (заявки яких задовольняються не повною мірою).

Пріоритетні Споживачі отримують стільки, скільки просять, тому їм не має сенсу спотворювати свої реальні потреби. **Непріоритетні** ж **Споживачі** не можуть збільшити виділений їм ресурс ні підвищуючи, ні знижуючи свою заявку.

Таким чином, при розподілі ресурсів відповідно до описаного механізму **Центр** отримує достовірну інформацію щодо реальних потреб **Споживачів**.

Приклад 4.4. 10 Споживачів подали Центру свої заявки (табл. 4.1). Центр має ресурс $R = 718$.

Таблиця 4.1

Заявки Споживачів

Споживачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Потреби	63	82	84	57	78	81	65	73	69	78

Потрібно розподілити цей ресурс відповідно до механізму відкритого управління.

Розв’язок:

1. У даному випадку на першому етапі розподілу ресурсу:

$$R = 718; \quad n = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{n} = \frac{718}{10} = 71{,}8.$$

Очевидно, що можна задовольнити заявки чотирьох Споживачів: 1-го, 4-го, 7-го і 9-го:

$$x_1 = s_1 = 63; \;\; x_4 = s_4 = 57; \;\; x_7 = s_7 = 65; \;\; x_9 = s_9 = 69.$$

При цьому кількість ресурсу, що залишився, становитиме:

$$R_1 = R - x_1 - x_4 - x_7 - x_9,$$

тобто

$$R_1 = 718 - 63 - 57 - 65 - 69 = 464.$$

2. На другому етапі маємо:

$$R_1 = 464; \;\; n_1 = n - 4 = 10 - 4 = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{n_1} = \frac{464}{6} \approx 77{,}33.$$

Отже, можна задовольнити заявку одного Споживача – 8-го:

$$x_8 = s_8 = 73.$$

Ресурс, що залишився, складе:

$$R_2 = R_1 - x_8 = 464 - 73 = 391.$$

3. На третьому етапі отримуємо:

$$R_2 = 391; \;\; n_2 = n_1 - 1 = 6 - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{n_2} = \frac{391}{5} = 78{,}20.$$

Таким чином, можуть бути задоволені заявки ще двох Споживачів – 5-го і 10-го:

$$x_5 = s_5 = 78; \;\; x_{10} = s_{10} = 78.$$

Знаходимо кількість ресурсу, що залишився:

$$R_3 = R_2 - x_5 - x_{10} = 391 - 78 - 78 = 235.$$

4. На четвертому етапі:

$$R_3 = 235; \;\; n_3 = n_2 - 2 = 5 - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_3}{n_3} = \frac{235}{3} = 78{,}33.$$

Три заявки, які залишилися – 2-го, 3-го і 6-го Споживачів – перевищують 78,33. Тому 2-ий, 3-ій і 6-ий Споживачі отримають по 78,33 одиниць ресурсу:

$$x_2 = 78{,}33; \;\; x_3 = 78{,}33; \;\; x_6 = 78{,}33.$$

Отже, 2-ий, 3-ій і 6-ий Споживачі недоотримають відповідно наступну кількість одиниць ресурсу:

$$s_2 - x_2 = 82 - 78{,}33 = 3{,}67; \;\; s_3 - x_3 = 84 - 78{,}33 = 5{,}67; \;\; s_6 - x_6 = 81 - 78{,}33 = 2{,}67.$$

Таким чином, остаточний розподіл ресурсу відповідно до механізму відкритого управління має вигляд, наведений в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Розподіл ресурсу між Споживачами

Споживачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Потреби, s_i	63	82	84	57	78	81	65	73	69	78
Розподіл ресурсу, x_i	63	78,33	78,33	57	78	78,33	65	73	69	78

4.6. Відкрите управління і експертне опитування

Якщо потрібно визначити обсяг фінансування великого проекту, то часто вдаються до проведення експертного опитування. Процедура опитування полягає в наступному: кожному з n експертів пропонується повідомити число s з проміжку $[d; D]$, після чого на підставі експертних оцінок визначається підсумкове рішення.

Опишемо механізм вироблення рішення, що є механізмом відкритого **управління** (тобто **неманіпулюємим механізмом**).

Не обмежуючи спільності міркувань, будемо вважати, що оцінки, які повідомили експерти, розташовані по зростанню (не зменшенню) – цього завжди можна домогтися перенумерацією експертів:

$$s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n .$$

Далі обчислюються n допоміжних чисел:

$$v_i = D - (i-1)\frac{D-d}{n}; \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{4.8}$$

ці числа ділять відрізок $[d; D]$ на n рівних частин.

Після цього для кожного i вибирається менше з двох чисел s_i і v_i:

$$\min\{s_i; v_i\}. \tag{4.9}$$

Остаточно з усіх мінімумів (4.9) вибирається найбільший, який і є підсумковим рішенням:

$$x^* = \max_{1 \le i \le n} \min\{s_i; v_i\}. \tag{4.10}$$

Відзначимо, що в разі необхідності можна вводити коефіцієнти, що дозволяють враховувати думку різних експертів різним чином – ідею механізму це принципово не змінить.

Приклад 4.5. Десяти експертам було запропоновано повідомити оцінку обсягу фінансування з проміжку $[55; 100]$. Експерти повідомили наступні оцінки: 80, 57, 75, 70, 75, 90, 64, 78, 100, 89.

Визначити підсумкове рішення за допомогою механізму відкритого управління.

Розв'язок:

Перенумеруємо експертів, розташувавши їх оцінки по не зменшенню:

$$s_1 = 57;\ s_2 = 64;\ s_3 = 70;\ s_4 = 75;\ s_5 = 75;$$

$$s_6 = 78;\ s_7 = 80;\ s_8 = 89;\ s_9 = 90;\ s_{10} = 100.$$

Обчислимо числа v_i за формулою (4.8), де у даному випадку:

$$D = 100;\ d = 55;\ n = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{D-d}{n} = \frac{100-55}{10} = 4{,}5.$$

Тоді маємо:

$$v_1 = 100;\ v_2 = 95{,}5;\ v_3 = 91;\ v_4 = 86{,}5;\ v_5 = 82;$$

$$v_6 = 77{,}5;\ v_7 = 73;\ v_8 = 68{,}5;\ v_9 = 64;\ v_{10} = 59{,}5.$$

Складемо таблицю (табл. 4.3), в якій запишемо:

- у першому рядку – порядкові номери експертів;
- у другому – впорядковані по не зменшенню оцінки експертів;
- у третьому – відповідні числа v_i $(i = 1, 2, \dots, 10)$;
- у четвертому рядку – знайдене відповідно до співвідношення (4.10) мінімальне значення двох чисел s_i і v_i, тобто $\min\{s_i; v_i\}$ $(i = 1, 2, \dots, 10)$.

Таблиця 4.3

Вироблення рішення відповідно до механізму відкритого управління і експертного опитування

№ експерта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	57	64	70	75	75	78	80	89	90	100
v_i	100	95,5	91	86,5	82	77,5	73	68,5	64	59,5
$\min\{s_i; v_i\}$	57	64	70	75	75	$\boxed{77,5}$	73	68,5	64	59,5

Як підсумкове рішення беремо максимальне число в останньому рядку:

$$x^* = \max_{1 \le i \le 10} \min\{s_i; v_i\} = 77,5.$$

4.7. Завдання для самостійного розв’язання

4.1. 8 Споживачів подали Центру заявки в розмірі 9, 18, 15, 14, 10, 13, 7, 14. Наявний в розпорядженні Центру ресурс становить 84.

Як має бути розподілений цей ресурс відповідно до механізму прямих пріоритетів?

4.2. Розподіл ресурсу проводиться відповідно до механізмом зворотних пріоритетів. Пріоритети чотирьох Споживачів визначаються числами 26, 18, 24, 20.

Якими є рівноважні стратегії (заявки) Споживачів, якщо наявний в розпорядженні Центру ресурс становить 70?

4.3. Розподіл ресурсу здійснюється відповідно до конкурсного механізму. 5 Споживачів повідомили Центру свої заявки: 5, 8, 6, 9, 8 і показники ефекту: 12, 21, 18, 23, 23 відповідно.

Як має бути розподілений між Споживачами ресурс обсягом 32?

4.4. 8 Споживачів подали Центру заявки 13, 10, 16, 19, 9, 12, 14, 11. Центр має ресурс об’ємом 97.

Як має бути розподілений цей ресурс відповідно до механізму відкритого управління?

4.5. Восьми експертам було запропоновано повідомити оцінку обсягу фінансування з проміжку $[0; 80]$. Експерти повідомили наступні оцінки: 45, 10, 35, 80, 65, 35, 60, 55.

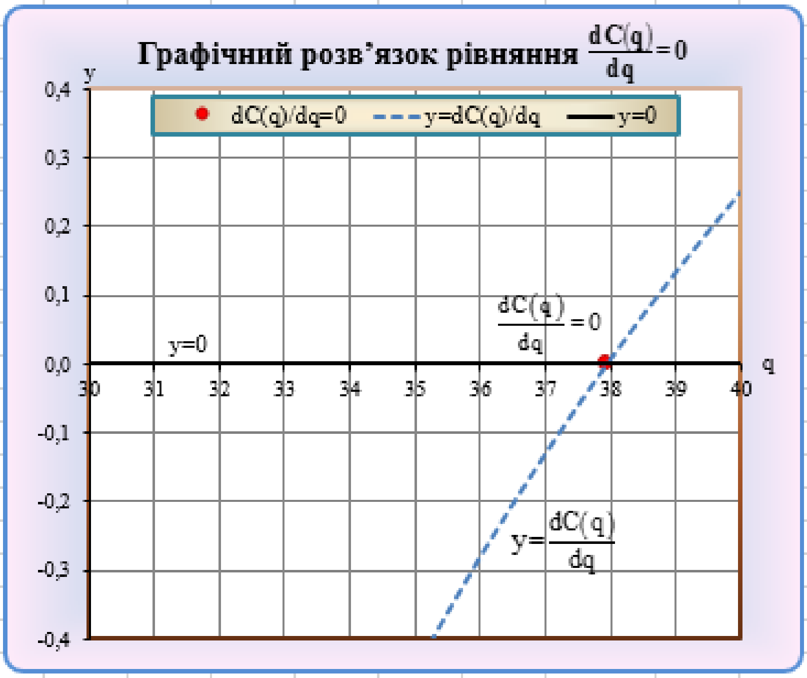
Визначити підсумкове рішення за допомогою механізму відкритого управління.

5. ЦИФРОВІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ УПРАВЛІНСЬКИХ ПРОЦЕСІВ У БУДІВЕЛЬНІЙ ГАЛУЗІ

5.1. Цифрова модель розрахунку оптимального розміру замовлення при змінних організаційних витратах і витратах на зберігання запасу товару

Цифрова модель в MS Excel, побудована за умовою прикладу 1.2, представлена на рис. 5.1.

q	y
30	-1,64
30,5	-1,48
31	-1,34
31,5	-1,2
32	-1,07
32,5	-0,95
33	-0,84
33,5	-0,73
34	-0,63
34,5	-0,54
35	-0,45
35,5	-0,36
36	-0,28
36,5	-0,2
37	-0,13
37,5	-0,06
38	0,007
38,5	0,072
39	0,133
39,5	0,193
40	0,25



$s(q)=\frac{500}{q^2+\ln q}$	$h(q)=\frac{q^2}{500(\ln q+1)}$	d	c
0,0345	0,6227	1200	11

$C(q)=cd+\frac{sd}{q}+\frac{qh}{2}$	13212,92
$n^*=\frac{d}{q^*}$	32
$t^*=\frac{365}{n^*}$	11

Рис. 5.1. Цифрова модель розрахунку оптимального розміру замовлення при змінних організаційних витратах і витратах на зберігання запасу товару

Цифрова модель, побудована за умовою прикладу 1.2 в онлайн-редакторі WolframAlpha, наведена на рис. 5.2.

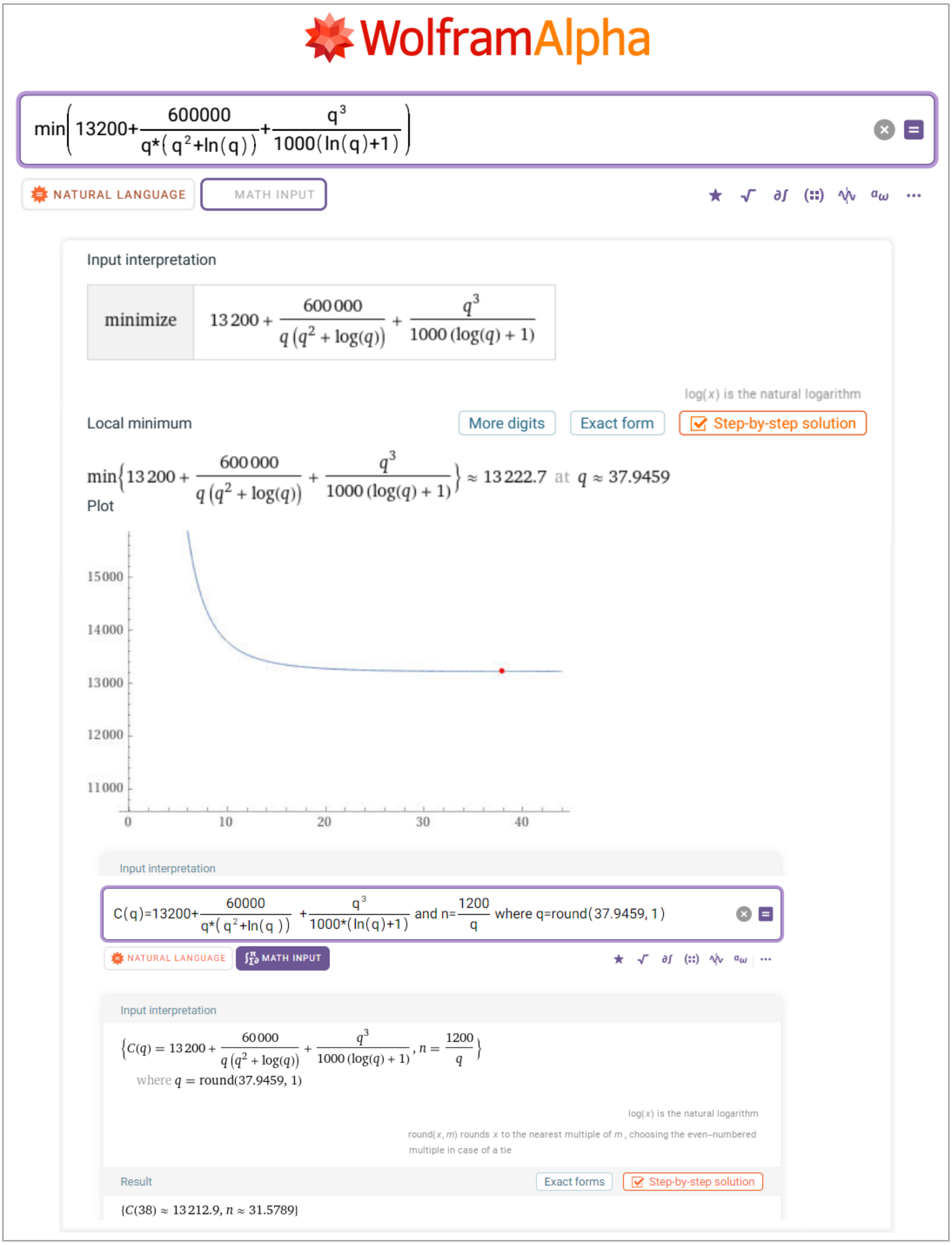
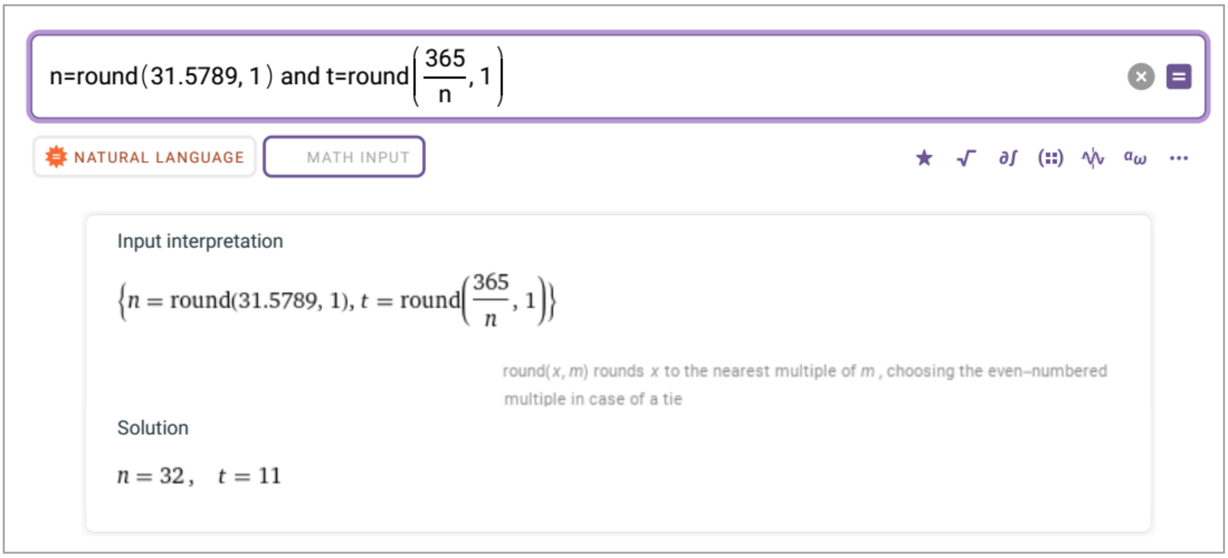


Рис. 5.2. Цифрова модель розрахунку оптимального розміру замовлення в редакторі WolframAlpha



Продовж. рис. 5.2. Цифрова модель розрахунку оптимального розміру замовлення в редакторі WolframAlpha

5.2. Цифрова модель поставок зі знижкою

За умовою прикладу 1.3 побудовані цифрові моделі розрахунку оптимального розміру замовлення поставок зі знижкою: в MS Excel (рис. 5.3) і в онлайн-редакторі WolframAlpha (рис. 5.4).

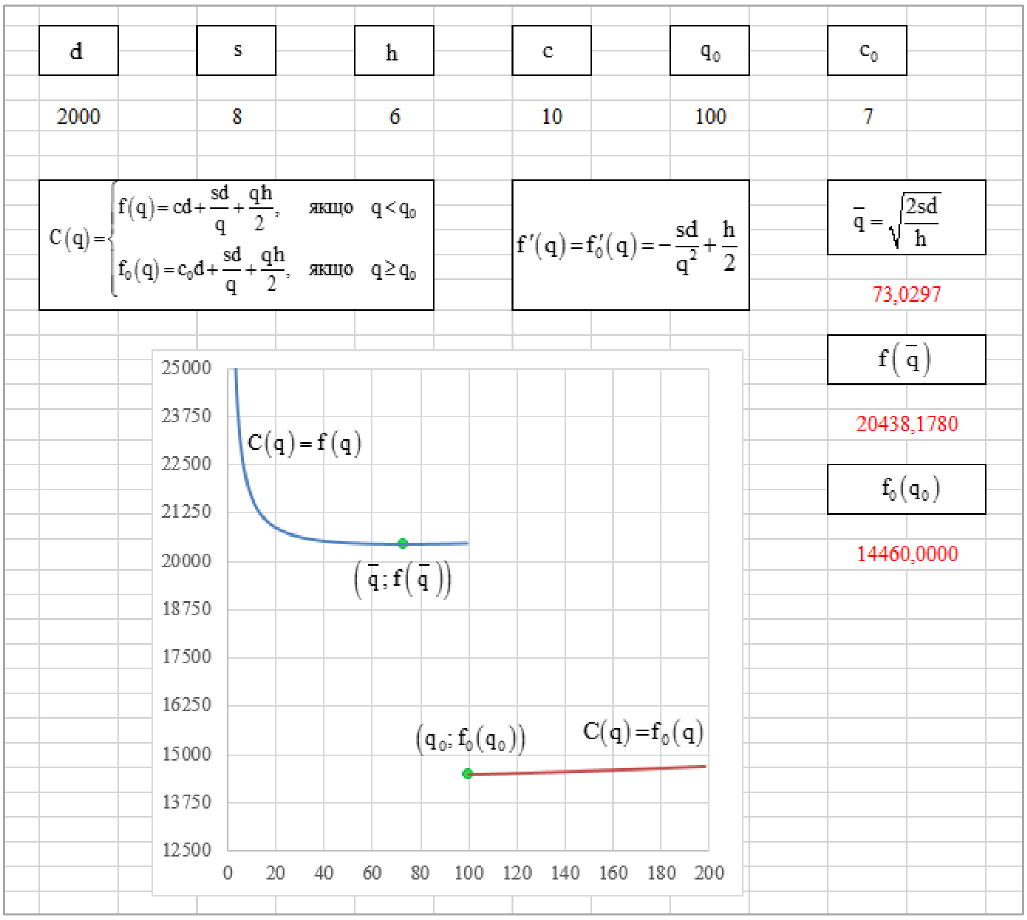


Рис. 5.3. Цифрова модель розрахунку оптимального розміру замовлення поставок зі знижкою в MS Excel

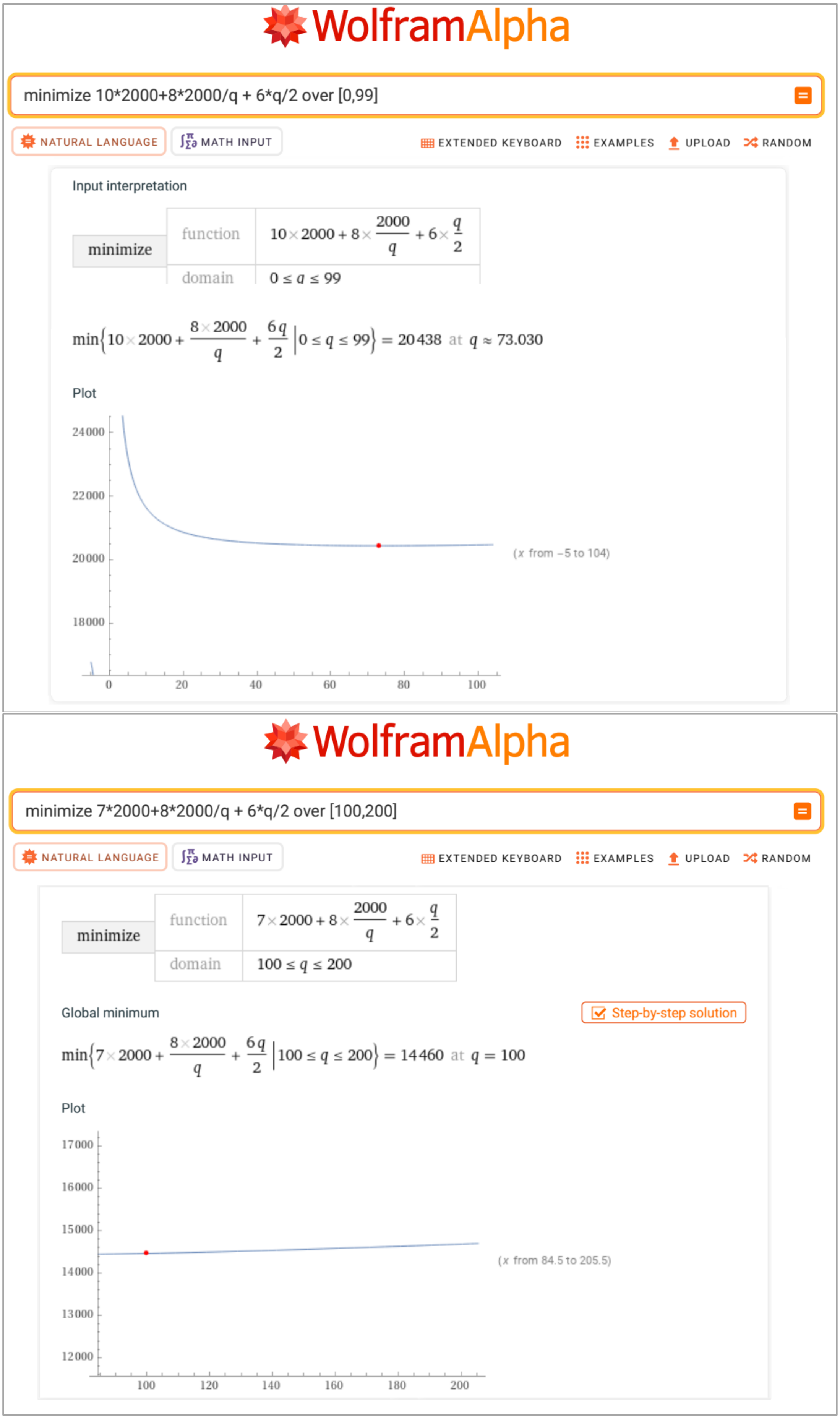


Рис. 5.4. Цифрова модель розрахунку оптимального розміру замовлення поставок зі знижкою в онлайн-редакторі WolframAlpha

5.3. Цифрова модель оптимального режиму роботи галузей виробництва

За умовою прикладу 2.3 цифрові моделі оптимального режиму роботи галузей виробництва побудовані в MS Excel (рис. 5.5) і в онлайн-редакторі WolframAlpha (рис. 5.6).

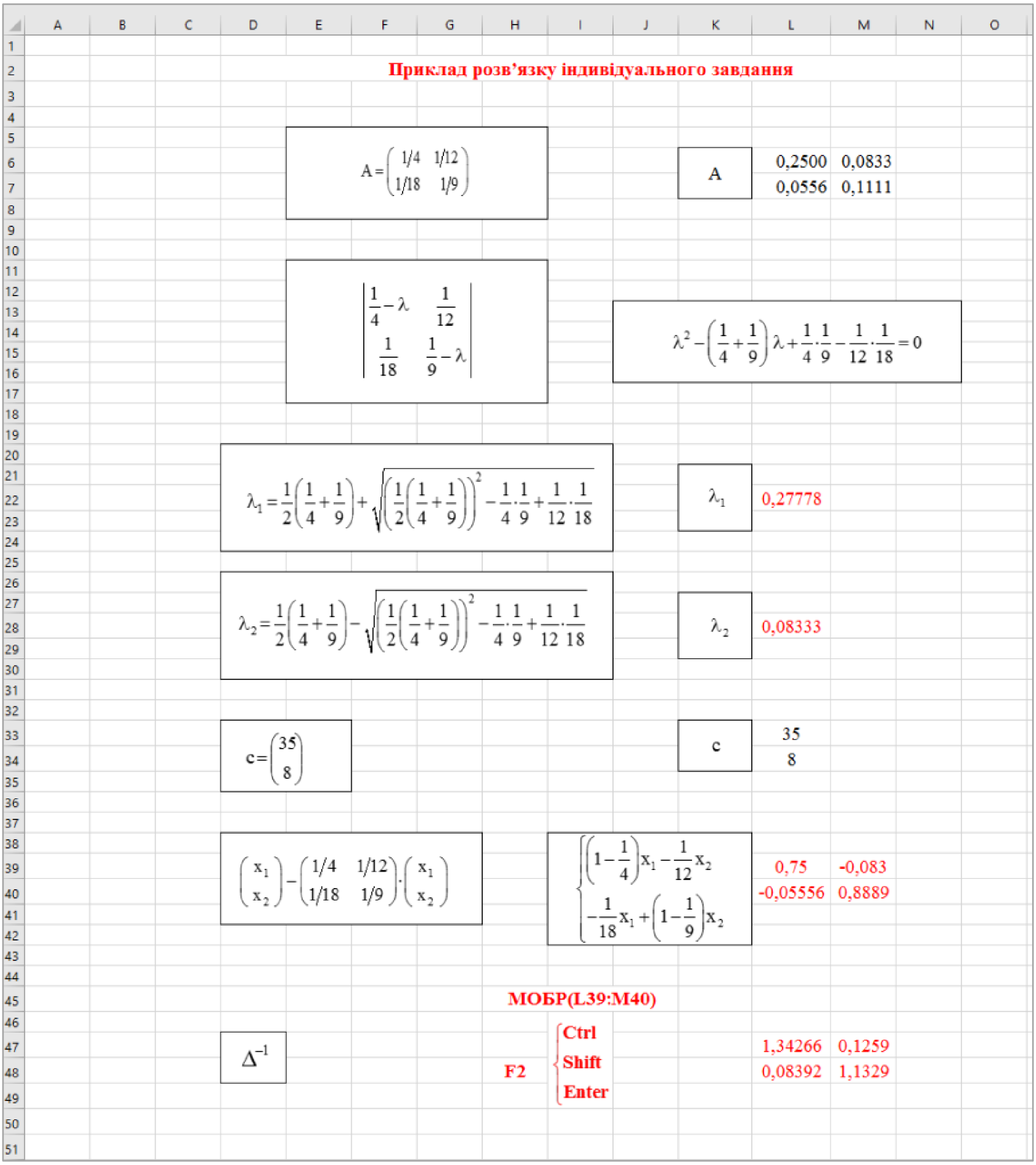
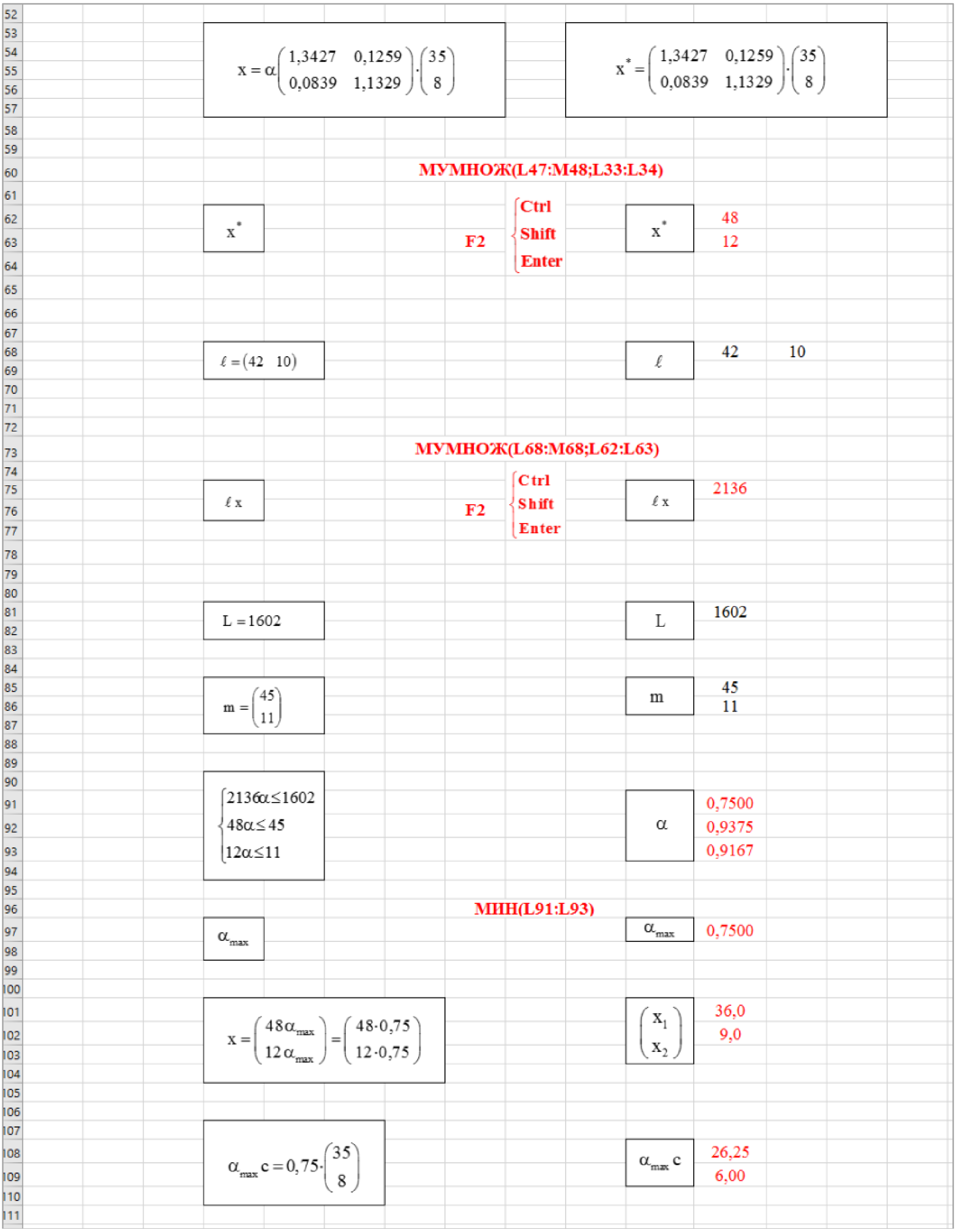


Рис. 5.5. Цифрова модель оптимального режиму роботи галузей виробництва в MS Excel



Продовж. рис. 5.5. Цифрова модель оптимального режиму роботи галузей виробництва в MS Excel

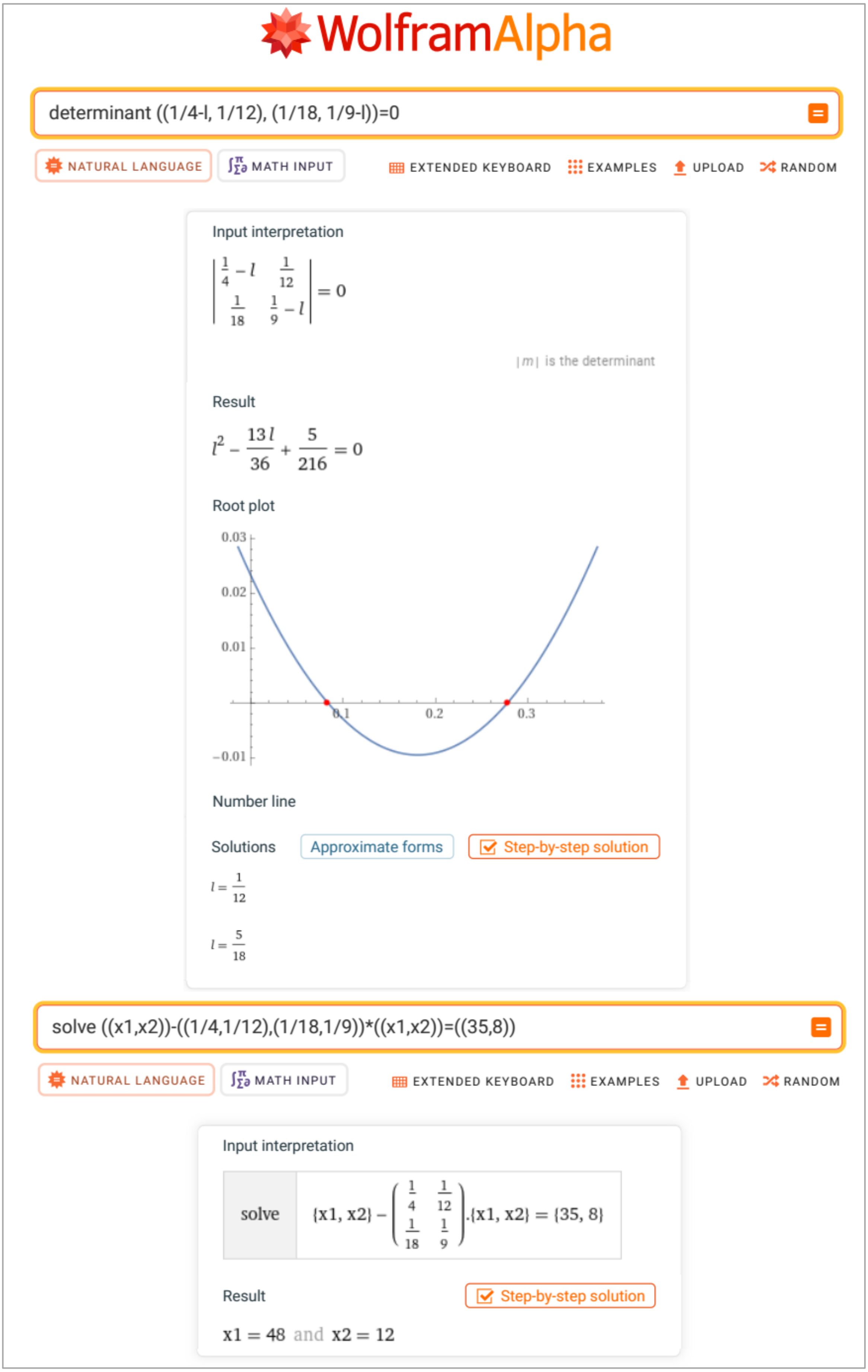


Рис. 5.6. Цифрова модель оптимального режиму роботи галузей виробництва в онлайн-редакторі WolframAlpha

Продовж. рис. 5.6. Цифрова модель оптимального режиму роботи галузей виробництва в онлайн-редакторі WolframAlpha

5.4. Цифрова модель розв’язку двокритеріальної задачі

За умовою прикладу 3.1 побудовані цифрові моделі розв’язку двокритеріальної задачі: в MS Excel (рис. 5.7) і у WolframAlpha (рис. 5.8).

$$\Omega:\ \begin{cases} 2{,}5\le x\le 6\\ 0\le y\le 3{,}5\\ 2x+6y\le 31\end{cases}$$

x	y
2,5	0
6	0

x	y
2,5	3,5
6	3,5

y	x
0	2,5
3,5	2,5

y	x
0	6
3,5	6

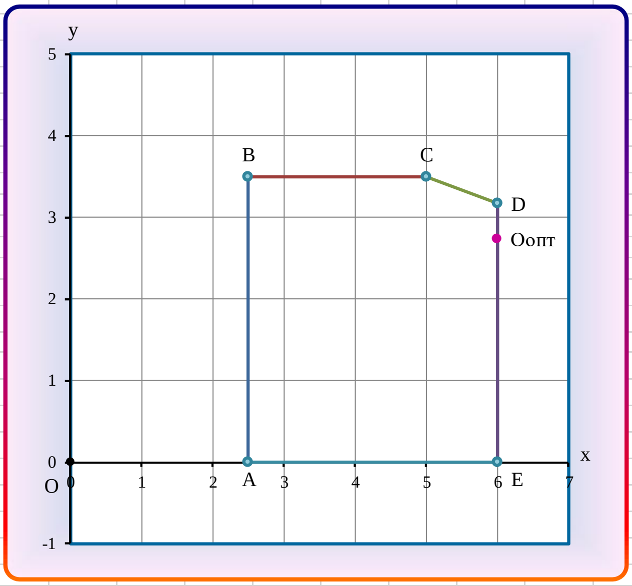
x	y
2,5	4,3333
6	3,1667

	x	y
A	2,5	0
B	2,5	3,5
C	5	3,5
D	6	3,1667
E	6	0
A	2,5	0

$$U=4x-2y+3$$
$$V=3x+5y-15$$

4	-2	3
3	5	-15

	U	V
A*	13,0000	-7,5000
B*	6,0000	10,0000
C*	16,0000	17,5000
D*	20,6667	18,8333
E*	27,0000	3,0000
A*	13,0000	-7,5000
max	27,0000	18,8333



max		U	V
x	E*	27,0	3,0
	M*	27,0	18,8
y	D*	20,7	18,8

$k_{D^*E^*}$	-2,5
$k_{M^*N^*}$	0,4

	5	2	141
DE	1,0	0,4	28,2
MN	-0,4	1,0	8,0333
	12	-30	-241

$$U+0{,}4V-28{,}2=0$$
$$-0{,}4U+V-\frac{241}{30}=0$$

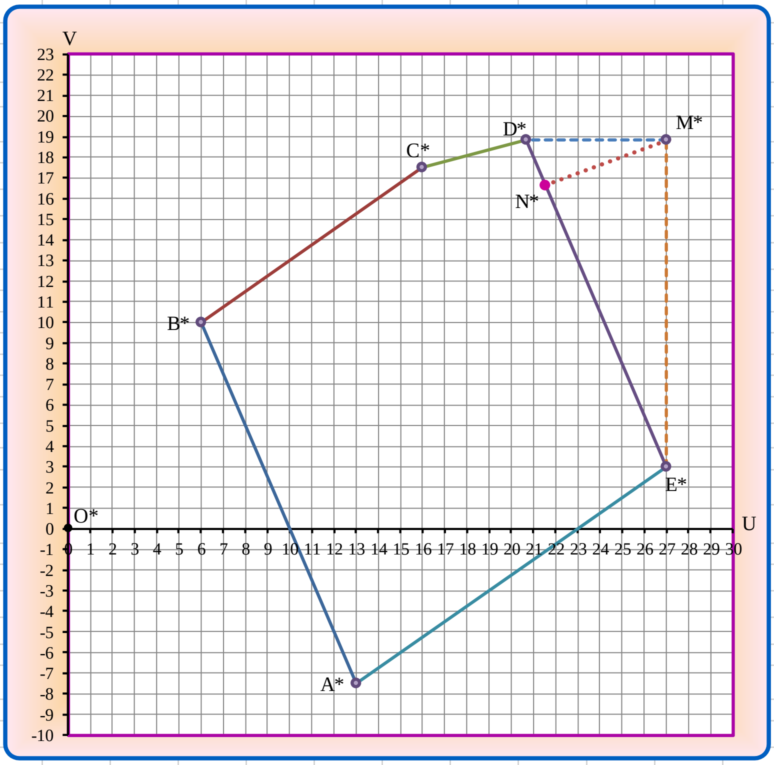
Зворотна матриця		
	0,8621	-0,3448
	0,3448	0,8621

N_U^*	21,54
N_V^*	16,6494

	U	V
M*	27,00	18,83
N*	21,5402	16,6494

$d_{M^*N^*}$	5,8804

4,00	-2,00	18,54
3,00	5,00	31,65



Зворотна матриця		
	0,1923	0,0769
	-0,1154	0,1538

x	6,0000
y	2,7299

Рис. 5.7. Цифрова модель розв’язку двокритеріальної задачі в MS Excel

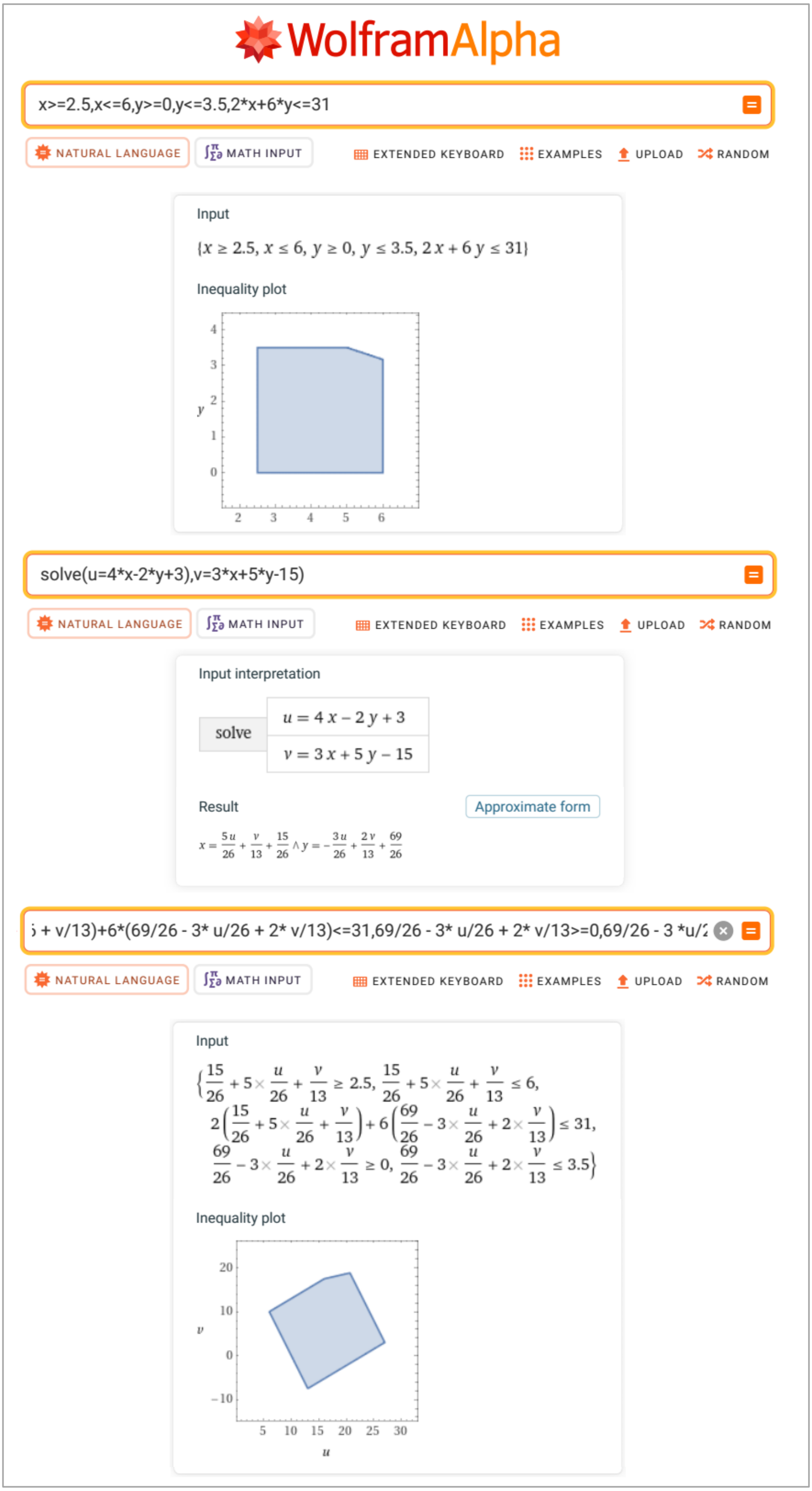
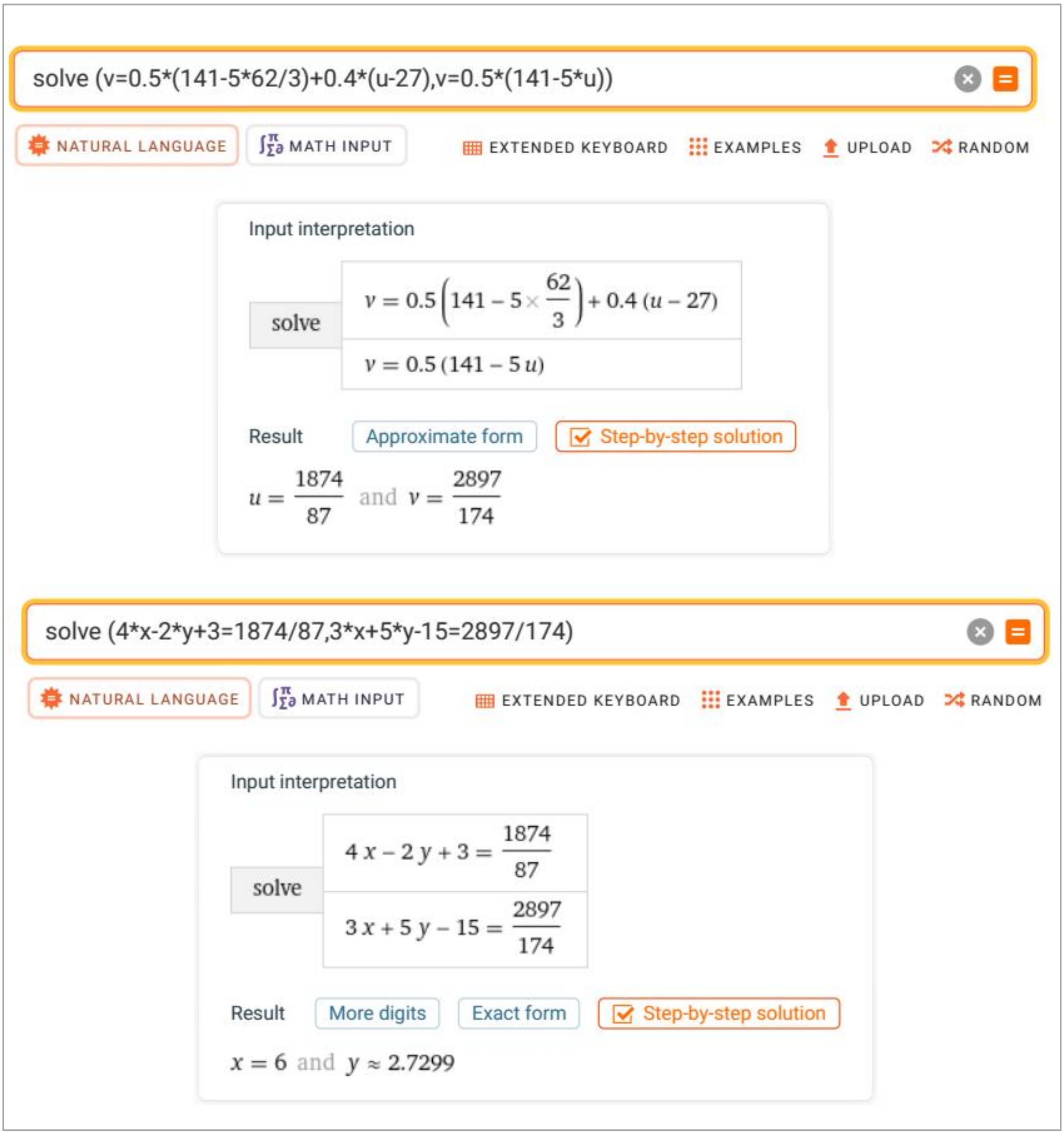


Рис. 5.8. Цифрова модель розв’язку двокритеріальної задачі у WolframAlpha



Продовж. рис. 5.8. Цифрова модель розв'язку двокритеріальної задачі у WolframAlpha

5.5. Цифрова модель задачі розподілу ресурсів за механізмом відкритого управління

За умовою прикладу 4.4 побудовані цифрові моделі задачі розподілу ресурсів за механізмом відкритого управління в MS Excel (рис. 5.9) і в онлайн-редакторі WolframAlpha (рис. 5.10).

	Потреби										Підсумок	
І-ий етап	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**10**	
	Споживачі											**Ресурси**
	63	82	84	57	78	81	65	73	69	78	**730**	**718**
	71,80	71,80	71,80	71,80	71,80	71,80	71,80	71,80	71,80	71,80		
	63			**57**			**65**		**69**		**254**	**464**
ІІ-ий етап		2	3		5	6		8		10	**6**	
		77,33	77,33		77,33	77,33		77,33		77,33		
	63			57			65	**73**	69		**327**	**391**
ІІІ-ій етап		2	3		5	6				10	**5**	
		78,20	78,20		78,20	78,20				78,20		
	63			57	**78**		65	73	69	**78**	**483**	**235**
IV-ий етап		2	3			6					**3**	
		78,33	78,33			78,33						
	63	**78,33**	**78,33**	57	78	**78,33**	65	73	69	78	**718**	**0**
		-3,67	***-5,67***			***-2,67***					***-12,00***	**730**
Розподіл ресурсу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**718**	
	63	**78,33**	**78,33**	**57**	**78**	**78,33**	**65**	**73**	**69**	**78**		

Рис. 5.9. Цифрова модель задачі розподілу ресурсів між Споживачами відповідно до механізму відкритого управління, побудована в MS Excel

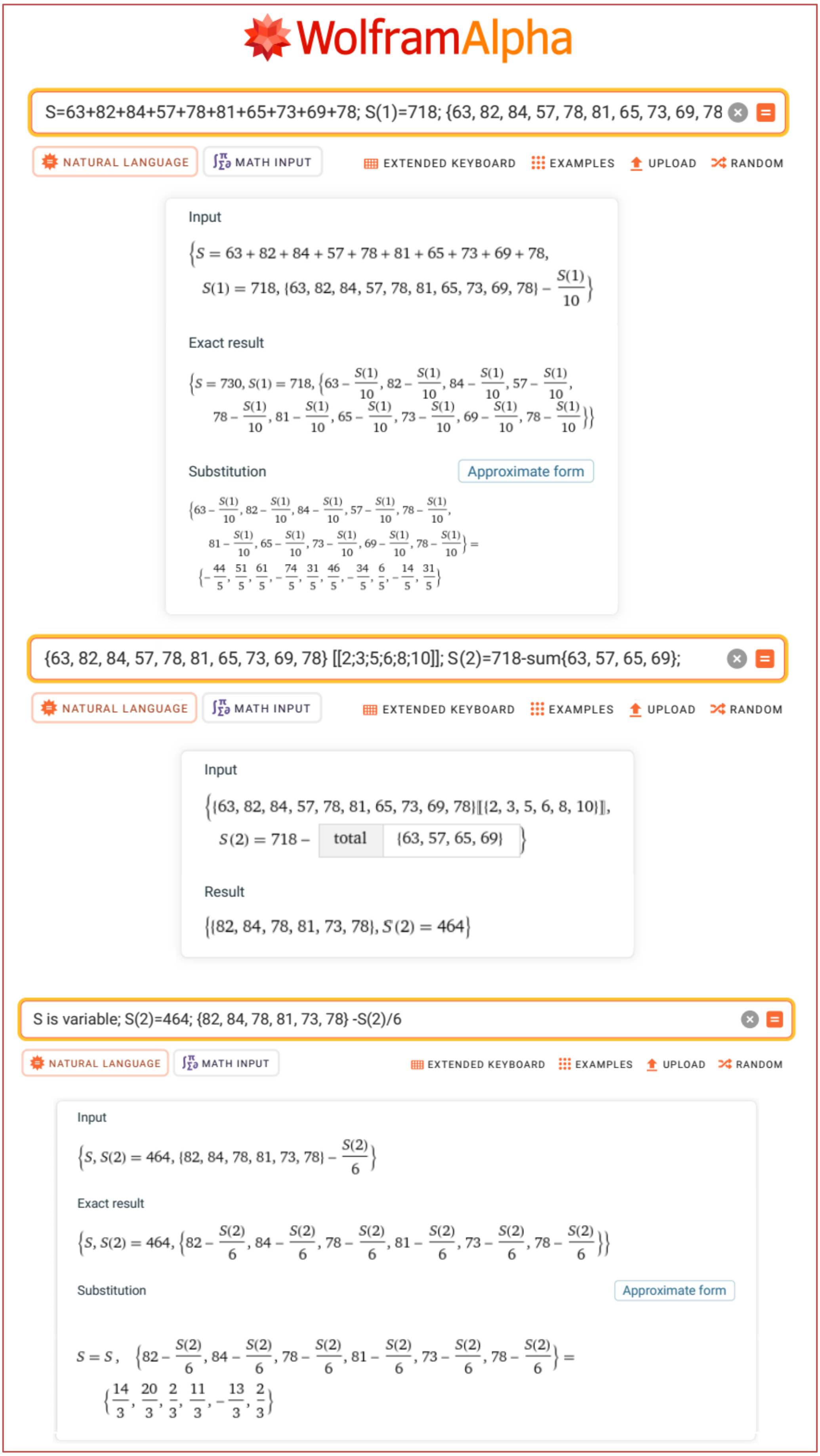
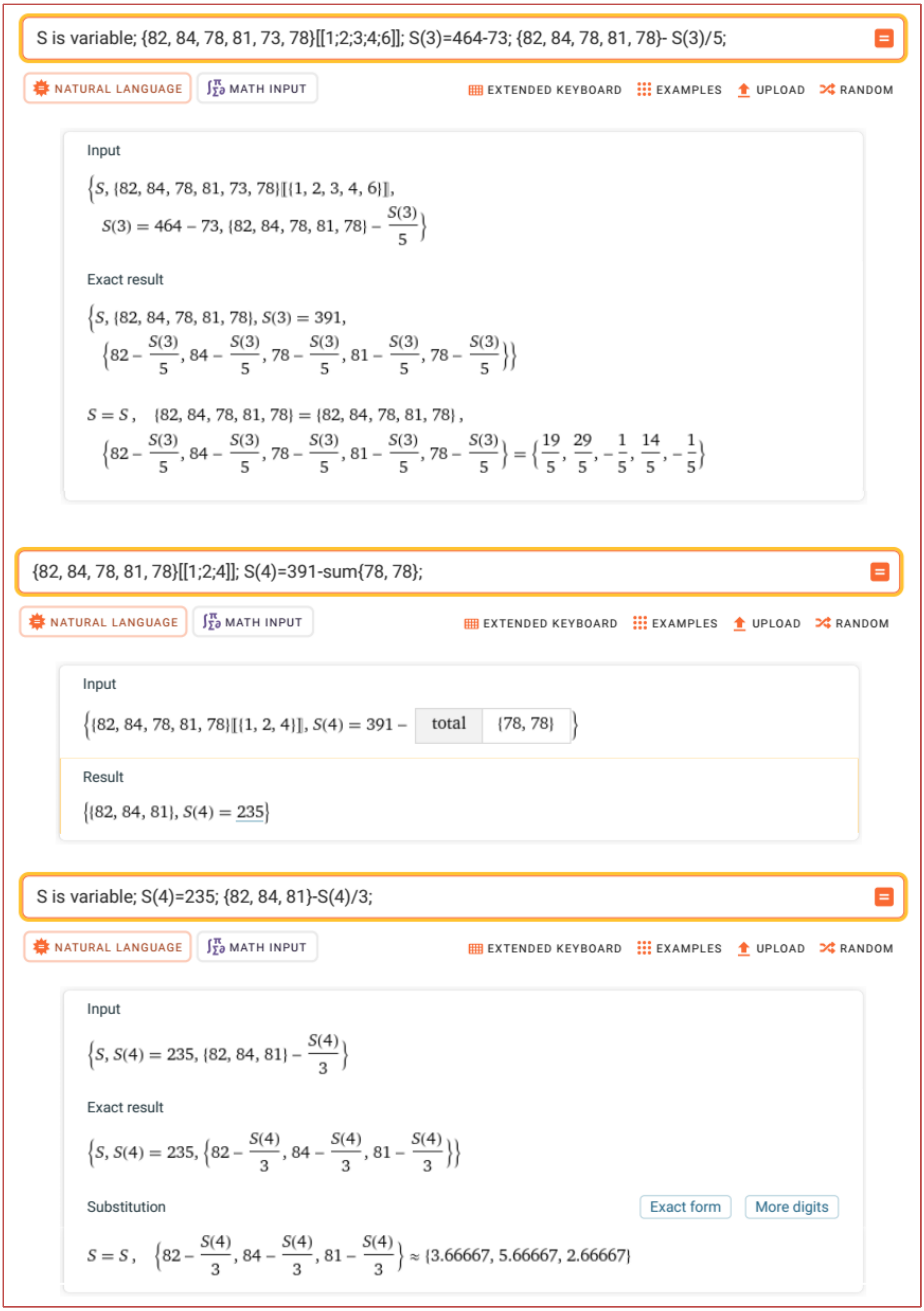


Рис. 5.10. Цифрова модель задачі розподілу ресурсів між Споживачами відповідно до механізму відкритого управління, побудована у WolframAlpha



Продовж. рис. 5.10. Цифрова модель задачі розподілу ресурсів між Споживачами відповідно до механізму відкритого управління, побудована у WolframAlpha

5.6. Завдання для самостійного розв’язання

Побудувати цифрові моделі оптимізації публічно-управлінських рішень, використовуючи:

а) MS Excel;

б) онлайн-редактор WolframAlpha.

1. Інтенсивність рівномірного попиту становить d одиниць товару на рік. Організаційні витрати s у. о. та витрати на зберігання запасу h у. о. залежать від розміру поставки (тобто від кількості одиниць товару в одній партії q) і описуються відповідно співвідношеннями:

1) $s(q)=\dfrac{20}{q+2^q}$; $h(q)=\dfrac{q\sqrt{q}}{385\ln q}$.

Ціна товару складає 11 у. о.; $d=750$.

2) $s(q)=\dfrac{50}{\ln(\ln q)}$; $h(q)=\dfrac{q^3}{145\sqrt{q+1}}$.

Ціна товару складає 10 у. о.; $d=1400$.

3) $s(q)=\dfrac{2}{\left(\sqrt{q}+1\right)^2}$; $h(q)=\dfrac{\ln(q+\ln q)}{55}$.

Ціна товару складає 7 у. о.; $d=800$.

4) $s(q)=\dfrac{400}{\ln(q\ln q)}$; $h(q)=\dfrac{1}{600}\left(\dfrac{3}{2}\right)^q$.

Ціна товару складає 8 у. о.; $d=750$.

5) $s(q)=\dfrac{1}{\sqrt{q}+1}$; $h(q)=\dfrac{2\ln(\ln q)}{35}$.

Ціна товару складає 12 у. о.; $d=900$.

У припущенні, що система підпорядковується основній моделі, визначити:

1) оптимальний розмір партії товару q^*;
2) загальні витрати $C(q^*)$;
3) оптимальне число поставок за рік n^*;
4) тривалість циклу зміни запасу t^*.

2. Інтенсивність рівномірного попиту становить d одиниць товару на рік. Організаційні витрати дорівнюють s у. о., витрати на зберігання товару – h у. о. Ціна одиниці товару дорівнює c у. о., проте, якщо розмір партії не менш q_0 одиниць, ціна знижується до c_0 у. о.

1) $d=2000;\ s=8;\ h=6;\ c=10;\ q_0=100;\ c_0=7$.

2) $d=140;\ s=9;\ h=12;\ c=30;\ q_0=50;\ c_0=29$.

3) $d=500;\ s=10;\ h=11;\ c=18;\ q_0=75;\ c_0=15$.

4) $d=65;\ s=6;\ h=5;\ c=30;\ q_0=50;\ c_0=29$.

5) $d=1000;\ s=18;\ h=12;\ c=25;\ q_0=60;\ c_0=23$.

Знайти оптимальний розмір партії товару.

3. Задана матриця матеріальних витрат A.

1) Перевірити, чи являється матриця A продуктивною.

2) Якщо матриця A продуктивна, то знайти стовпець випуску продукції за умови, що задані:

- матриця кінцевого попиту c;
- матриця обмежень на потужності галузей m;
- матриця-рядок затрат робочої сили ℓ;
- загальна кількість робочої сили в системі (трудові ресурси) L.

1) $A=\begin{pmatrix} 1/21 & 1/105 \\ 1/35 & 1/15 \end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix} 199 \\ 92 \end{pmatrix};\ m=\begin{pmatrix} 126 \\ 90 \end{pmatrix};\ \ell=\begin{pmatrix} 140 & 70 \end{pmatrix};\ L=26250$.

2) $A=\begin{pmatrix} 1/10 & 1/12 \\ 1/60 & 1/30 \end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix} 93 \\ 172 \end{pmatrix};\ m=\begin{pmatrix} 95 \\ 135 \end{pmatrix};\ \ell=\begin{pmatrix} 70 & 100 \end{pmatrix};\ L=22000$.

3) $A=\begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 \\ 1/20 & 1/4 \end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix} 58 \\ 41 \end{pmatrix};\ m=\begin{pmatrix} 70 \\ 48 \end{pmatrix};\ \ell=\begin{pmatrix} 50 & 45 \end{pmatrix};\ L=4690$.

4) $A=\begin{pmatrix} 1/8 & 1/16 \\ 1/48 & 1/6 \end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix} 120 \\ 77 \end{pmatrix};\ m=\begin{pmatrix} 124 \\ 80 \end{pmatrix};\ \ell=\begin{pmatrix} 40 & 32 \end{pmatrix};\ L=5888$.

5) $A=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/28 \\ 1/7 & 1/7 \end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix} 61 \\ 36 \end{pmatrix};\ m=\begin{pmatrix} 42 \\ 50 \end{pmatrix};\ \ell=\begin{pmatrix} 70 & 45 \end{pmatrix};\ L=5600$.

4. На множині ω площини Oxy задані дві лінійні функції $U(x;y)$ і $V(x;y)$.

1) $\omega:\ \begin{cases} 3\le x\le 6 \\ 1\le y\le 4 \\ 3x+2y\le 23 \end{cases};\quad \begin{matrix} U=3x-3y-4 \\ V=2x+y+5 \end{matrix}$.

2) $\omega:\ \begin{cases} 1\le x\le 5{,}5 \\ 1{,}5\le y\le 6 \\ x+4y\le 28 \end{cases};\quad \begin{matrix} U=-2x+5y-4 \\ V=2x+2y-3 \end{matrix}$.

3) $\omega:\begin{cases}0\le x\le 4\\ 1\le y\le 2{,}5\\ 2x+3y\le 14\end{cases};\quad \begin{matrix}U=x+4y-5\\ V=3x-3y-2\end{matrix}.$

4) $\omega:\begin{cases}3\le x\le 6\\ 2\le y\le 5\\ 2x+2y\le 19\end{cases};\quad \begin{matrix}U=-2x+2y+3\\ V=2x+3y-8\end{matrix}.$

5) $\omega:\begin{cases}1\le x\le 4{,}5\\ 2{,}5\le y\le 5\\ 5x+2y\le 28\end{cases};\quad \begin{matrix}U=4x+2y-7\\ V=-2x+3y+5\end{matrix}.$

Знайти розв’язок задачі: $U\to \max$; $V\to \max$.

5. 10 Споживачів подали Центру свої заявки (дані наведені в таблиці). Центр має ресурс R.

1) $R=200$

Споживачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Потреби	25	18	33	12	18	15	29	18	23	21

2) $R=402$

Споживачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Потреби	42	33	38	54	51	46	39	50	41	34

3) $R=702$

Споживачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Потреби	77	79	65	61	75	80	61	69	62	90

4) $R=491$

Споживачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Потреби	45	57	62	60	41	42	53	59	47	50

5) $R=168$

Споживачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Потреби	21	12	18	11	23	24	10	17	15	23

Потрібно розподілити цей ресурс відповідно до механізму відкритого управління.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основні

1. Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. URL: https://ru.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf.

2. Волонтир Л. О, Потапова Н. А., Ушкаленко І. М., Чіков І. А. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності : навч. посіб. Вінниця : ВНАУ, 2020. 404 с. URL: http://socrates.vsau.edu.ua/repository/getfile.php/25186.pdf.

3. Гапєєв С. М., Старушенко Г. А., Іванова Г. П., Вигодін М. О. Цифрова модель оцінки інвестиційного ризику в галузі енергетики // Енергетичний менеджмент: стан та перспективи розвитку : збірник наукових праць X Міжнародної наук.-техн. конф. (м. Київ, 26-27 листопада 2024 р.). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. С. 22–24. URL: http://pems.kpi.ua/proc/issue/view/18723.

4. Гапєєв С. М., Старушенко Г. А., Кравченко К. В. Вигодін М. О. Цифрова модель оптимального режиму роботи підприємств будівельної галузі. – Міжнародний форум «Безпечна, комфортна, спроможна, територіальна громада» - 2024 : матеріали міжнар. конф. (м. Дніпро, 16-18 жовтня 2024 р.). Дніпро : НТУ «Дніпровська політехніка», 2024. С. 25–28. URL: https://science.nmu.org.ua/ua/conferences/Forum/Zbirnyk2024.pdf.

5. Григорків В. С., Григорків М. В. Оптимізаційні методи та моделі : підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2016. 400 с. URL: https://archer.chnu.edu.ua/handle/123456789/10762?show=full.

6. Зельцер Р. Я., Бєлєнкова О. Ю., Дубінін Д. В. Інноваційні моделі і методи організації, управління і економічної оцінки технологічних процесів будівельного виробництва : монографія. Київ : «МП Леся», 2018. 208 с. URL: https://repositary.knuba.edu.ua/server/api/core/bitstreams/48776bb1-f255-4868-bfda-f44ba8cd1f38/content.

7. Сердюк Т. В., Пляцок М. С. Особливості інноваційної діяльності на будівельних підприємствах. *Сучасні технології, матеріали і конструкції в* будівництві. 2019. Вип. 25. № 2. С. 134–139. DOI: https://doi.org/10.31649/2311-1429-2018-2-134-139.

8. Сікора Я. Б., Щехорський А. Й., Якимчук Б. Л. Методи оптимізації та дослідження операцій : навч. посіб. Житомир : ЖДУ ім. І. Франка, 2019. 148 с. URL: http://eprints.zu.edu.ua/33082/1/МОДО_пос.pdf.

9. Старушенко Г. А. Узагальнена цифрова модель оптимізації управління запасами // Стратегії глобальної конкурентоспроможності: соціально-економічні виміри : матеріали X міжнар. наук.-практ. конф. (м. Черкаси, 23 березня 2023 р.) / упоряд. : Л. О. Петкова, Д. М. Паламарчук. Черкаси : Черкаський держ. технологічний ун-т, 2023. С. 211–214. URL: https://er.chdtu.edu.ua/bitstream.

10. Старушенко Г. Цифрові методи і моделі оптимізації публічно-управлінських рішень: узагальнення моделі логістичних витрат Харріса – Уілсона. *Аспекти публічного управління*. 2022. Т. 10. № 2. С. 5–15. DOI: https://doi.org/10.15421/152207.

11. Старушенко Г. А., Чекін В. В. Узагальнення основної моделі управління запасами на випадок змінних організаційних витрат і витрат на збереження запасу товару // Сучасний менеджмент: тенденції, проблеми та перспективи розвитку : тези доповідей І Міжнар. наук.-практ. конф. молодих вчених і студентів (м. Дніпро, 29 берез. 2018 р.). Дніпро : Ун-т ім. Альфреда Нобеля, 2018. С. 80–82. URL: https://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/lib/25700/1/3_Тезисы_2018-1_МК.pdf.

12. Структурні зміни та виклики в будівельній індустрії України: аналіз та прогнози. Kyiv School of Economics. Серпень 2024. URL: https://kse.ua/wp-content/uploads/2024/09/02_09_24_Zvit_Strukturni_zmini_ta_vikliki_v_budivelnii--_industrii--.pdf.

13. Трач Р. В., Рижакова Г. М., Крижановський В. І. Інформаційне моделювання та концепція інтегрованої реалізації будівельних проектів, як основа інноваційного розвитку будівельного підприємства. *Управління розвитком складних систем*. 2017. Вип. 31. С. 173–178. URL: https://urss.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-31/26.pdf.

14. Тугай О., Дворнічен І., Олійник В., Зяхор Д., Молодько О. Використання теоретико-прикладного інструментарію для оптимізації інвестиційно-будівельних проектів. *Шляхи підвищення ефективності будівництва*. 2024. Вип. 54. № 1. С. 156–163. DOI: https://doi.org/10.32347/2707-501x.2024.54(1).156-163.

Додаткові

15. Аксельрод Р. Б., Шпаков А. В., Рижакова Г. М. Економіко-управлінські предиктори трансформації операційних систем будівельного девелопменту в умовах цифровізації економіки. *Формування ринкових відносин в Україні*. 2021. № 12 (247). С. 113–121. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.6090221.

16. Гергі М., Кацюба І., Кирик Я., Хоменко О., Жалдак Р. Базові функціонали цифрової трансформації організаційно-технологічних процесів в мультипроектному середовищі будівництва. *Містобудування та територіальне планування*. 2024. № 87. С. 179–192. DOI: https://doi.org/10.32347/2076-815x.2024.87.179-192.

17. Єпіфанова І., Ткачук Л., Беркатюк Ю. Теоретико-методичні аспекти управління основними засобами будівельних підприємств. *Innovation and Sustainability*. 2022. № 4. С. 94–100. DOI: https://doi.org/10.31649/ins.2022.4.94.100.

18. Єсипенко А. Д., Дубінін Д .В. Мультипроектне середовище як основа цифрової трансформації організаційно-технологічних процесів будівництва. *Нові технології в будівництві*. 2023. № 43. С. 67–75. DOI: https://doi.org/10.32782/2664-0406.2023.43.9.

19. Інформаційне та соціально-правове моделювання : посібник / Д. В. Ланде, В. М. Фурашев ; за заг. ред. Д. В. Ланде. Київ-Одеса : Фенікс, 2021. 276 с. URL: http://ippi.org.ua/sites/default/files/posibnik.pdf
20. Пономаренко Ю. А., Рач В. А. Глобальна цифровізація як основа нового етапу розвитку галузі «Інформаційні технології». Держава, регіони, підприємництво: інформаційні, суспільно-правові, соціально-економічні аспекти розвитку : матеріали III Міжнародної конференції (м. Київ, 2-3 грудня 2021 р.). Київ : Університет «КРОК», 2021. URL: https://conf.krok.edu.ua/SRE/SRE-2021/paper/viewPaper/781.
21. Рижакова Г. М., Орленко І. М., Малихіна О. М. Методологічна регламентація та аналітико-інформаційне забезпечення менеджменту організацій в сучасній системі будівельного девелопменту. *Формування ринкових відносин в Україні*. 2021. № 7–8. С. 59–65. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5561124.
22. Рижакова Г., Приходько Д., Поколенко В., Петруха Н., Чуприна Ю., Хоменко О. Оновлення науково-методичних підходів до побудови полікритеріальної системи адміністрування діяльністю підприємств-стейкхолдерів проєктів будівництва. *Просторовий розвиток*. 2022. № 1. С. 218–233. DOI: https://doi.org/10.32347/2786-7269.2022.1.218-233.
23. Старушенко Г. А. Цифрова модель ризик-менеджменту оптимізації інвестицій // Розвиток сучасного українського суспільства у соціологічному вимірі : матеріали IX міжнар. наук.-практ. конфер. (м. Харків, 25 листопада 2022 р.). Харків : НТУ «ХПІ», 2023. С. 137–140. URL: http://web.kpi.kharkov.ua/sp/wp-content/uploads/sites/95/2023/03/Zbirnik_tez__listopad_2022_kaf_SPU.pdf.
24. Старушенко Г. А., Базилевський С. В. Методологічні аспекти математичного моделювання процесів управління сталим розвитком територій // Abstracts of X International Scientific and Practical Conference "Modern Approaches to the Introduction of Science into Practice" (San Francisco, USA, 30-31 March 2020). International Science Group, 2020. P. 186–190. URL: https://isg-konf.com/modern-approaches-to-the-introduction-of-science-into-practice/.
25. Старушенко Г. А., Фургало Д. Ю. Цифрова модель ризик-менеджменту оцінки ефективності інвестицій // Цифрова трансформація та диджитал технології для сталого розвитку всіх галузей сучасної освіти, науки і практики : матеріали міжнар. наук.-практ. конфер. (м. Ломжа, м. Харків, 26 січня 2023 р.) / за заг. ред. І. Жуховського, З. Шарлович, О. Мандич. Міжнар. акад. прикладних наук (Польща) – Держ. біотехнологічний ун-т (Україна). Ломжа : MANS w Łomży, 2023. Ч. 3. С. 236–243. URL: https://mans.edu.pl/fcp/iOEUfFzs9BjEkLTg1Y1BSe0N_YAVTHwIIOgIaTAIABCRvRQMEOjBBaHICPXNtSBk6PjIyBV4RBDYnD1cYTk8cOjYCEg/2/public/wydawnictwa/zbior_prac_tom_3__26012023.pdf.
26. Adekunle P., Aigbavboa C. Akinradewo O., Oke A. Emerging trends in construction information management. Cham : Springer, 2026. 155 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-032-09679-1.

27. Akinradewo O. I., Aigbavboa C. O., Oke A. E. Digital transformation in construction. In: *Blockchain Technology for Information Management: A New Era for Sustainable Construction Practices. Artificial Intelligence and Sustainable Development*. Singapore : Springer, 2025. P. 59–86. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-95-2664-2_4.

28. Bonanomi M. M., Hall D. M., Staub-French S., Tucker A., Talamo C. M. L. The impact of digital transformation on formal and informal organizational structures of large architecture and engineering firms. *Engineering, Construction and Architectural Management*. 2020. Vol. 27 No. 4. P. 872–892. DOI: https://doi.org/10.1108/ECAM-03-2019-0119.

29. Digital transformation in architecture and construction / Ed.: A. Z. Sampaio, series ed.: A. N. Haddad. London : IntechOpen, 2025. 124 p. DOI: https://doi.org/10.5772/intechopen.1004677.

30. Digitalization in Construction. Recent trends and advances / Eds.: C. Park, F. P. Rahimian, N. Dawood, A. Pedro, L. Dongmin, R. Hussain, M. Soltani. 2025. 366 p. London, New York : Routledge. URL: https://www.routledge.com/Digitalization-in-Construction-Recent-trends-and-advances/Park-Rahimian-Dawood-Pedro-Dongmin-Hussain-Soltani/p/book/9781032528892.

31. Lak A., Aghamohammad S. M. A systematic review of data analytics applications in construction project management. *Power System Technology*. 2025. Vol. 49. No. 4. P. 2546–2556. URL: https://powertechjournal.com/index.php/journal/article/view/2855/2049.

32. Nyqvist R., Peltokorp A., Lavikka R., Ainamo A. Building the digital age: management of digital transformation in the construction industry. *Construction Management and Economics*. 2025. Vol. 43. No. 4. P. 262–283. DOI: https://doi.org/10.1080/01446193.2024.2416033.

33. Organizational and technological, economic quality control aspects in the construction industry : collective monograph / Tugai O. A. et al. Lviv-Toruń : Liha-Pres, 2019. 133 p. URL: http://catalog.liha-pres.eu/index.php/liha-pres/catalog/book/89.

34. Vararean-Cochisa D., Crisan E.-L. The digital transformation of the construction industry: a review. *IIM Ranchi Journal of Management Studies*. 2025. Vol. 4. No. 1. P. 3–16. DOI: https://doi.org/10.1108/IRJMS-04-2024-0035.

35. Zeltser R. Ya., Bielienkova O. Yu., Novak Ye. V, Dubinin D. V. Digital Transformation of Resource Logistics and Organizational and Structural Support of Construction. *Science and Innovation*. 2019. Vol. 15. No. 5. P. 39–51. DOI: https://doi.org/10.15407/scine15.05.034.

Навчальне видання

Гапєєв Сергій Миколайович
Старушенко Галина Аркадіївна
Янко Валентин Вікторович
Єлісєєва Марина Олександрівна

УПРАВЛІНСЬКА АНАЛІТИКА ТА ЦИФРОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ В БУДІВЕЛЬНІЙ ГАЛУЗІ

Практикум з виконання практичних завдань
для здобувачів ступеня магістра
освітньо-професійної програми «Будівництво та цивільна інженерія»
зі спеціальності G19 Будівництво та цивільна інженерія

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання 14.04.2026. Авт. арк. 1,75.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка».
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.