МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Н. П. Уланова, В. В. Приходько

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2026

УДК 517.968: 519.642 (075)
У47

Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 (F1) Прикладна математика
(протокол № 10 від 18.03.2026)

Рецензенти:

А. П. Дзюба – д-р техн. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

В. В. Лобода – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара).

Уланова Н. П.
У47 Інтегральні рівняння [Електронний ресурс] : навч. посіб./ Н. П. Уланова, В. В. Приходько; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2026. – 125 с.

У навчальному посібнику розглянуто найбільш поширені класи інтегральних рівнянь, зокрема Вольтерри та Фредгольма. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв’язуванням типових задач. Наведено приклади, які ілюструють застосування описаного математичного апарату до розв’язування математичних і практичних задач. З метою закріплення навчального матеріалу пропонуються вправи для самостійної роботи. Контрольні питання дозволяють визначити ступінь засвоєння здобувачами теоретичного матеріалу.

УДК 517.968: 519.642 (075)

Зміст

Вступ

Випадки формулювання задач, у яких шукана функція перебувала під знаком інтеграла, мали місце ще на початку XIX ст. Як відомо з історії, у 1823 році першою задачею, яка зумовила необхідність розгляду інтегральних рівнянь, була задача Абеля про таутохрону (криву, на якій час падіння тіла не залежить від початкової точки). На рубежі XIX–XX ст. теорія інтегральних рівнянь набула розвитку в роботах В. Вольтерри, І. Фредгольма, Д. Гільберта, Е. Шмідта. Створення теорії сингулярних інтегральних рівнянь, узагальнення зв’язку між інтегральними рівняннями та крайовими задачами для диференціальних рівнянь, розвиток чисельних методів і дослідження нелінійних інтегральних рівнянь (роботи **М.Г. Крейна, Р. Куранта, К.Т. Сікорського, К. Аткінсона** та ін.), – усі перелічені здобутки дозволили розширити коло задач, для математичного опису яких ефективно використовуються інтегральні рівняння і перетворення.

Нині інтегральні рівняння відіграють важливу роль як у сучасній математиці, так і в її застосуваннях. Вони ефективно використовуються в теорії пружності, теорії потенціалу, математичній фізиці, економічному моделюванні та в інших галузях науки. Саме тому вивчення методів розв'язування інтегральних рівнянь є важливою частиною підготовки студентів математичних і фізико-технічних спеціальностей.

Навчальний посібник «Інтегральні рівняння» орієнтовано на теоретичну і методичну підтримку навчального процесу студентів з метою досягнення ними необхідного рівня знань про основні методи розв’язування інтегральних, інтегро-диференціальних та диференціальних рівнянь.

Запропонований посібник укладено відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Інтегральні рівняння» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 (F1) Прикладна математика. В процесі вивчення дисципліни студенти мають зрозуміти сутність інтегральних рівнянь та опанувати методи їхнього розв’язування (послідовних наближень, ітерованих ядер, операційними та ін.). Розглянуто також метод розкладання за власними функціями, деякі питання теорії інтегро-диференціальних рівнянь. Охарактеризовано основні поняття функціонального аналізу.

Теоретичний матеріал супроводжується прикладами розв’язування рівнянь з кожної теми і вправами для самостійного виконання. З метою кращого засвоєння теоретичного матеріалу і можливостей його застосування в кінці розділів подано питання для самоперевірки. За допомогою списку літератури можна більш детально ознайомитись з навчальним матеріалом з теми “Інтегральні рівняння”.

1. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ДЕЯКІ ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Інтегральним називають рівняння, яке містить шукану функцію під знаком інтеграла.

Розв'язком інтегрального рівняння називають функцію, яка перетворює це рівняння на тотожність.

Наприклад, розв'язком інтегрального рівняння

$$y(x) = \int_0^x y'(s)ds + y(0)$$

є будь-яка функція $y(x)$, неперервно диференційовна в околі точки $x = 0$.

§ 1.1. Класифікація інтегральних рівнянь

Лінійним називають інтегральне рівняння, до якого невідома функція входить лінійно.

Рівняння Фредгольма першого і другого роду утворюють один з найважливіших класів лінійних інтегральних рівнянь.

Рівняння Фредгольма другого роду має вигляд

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x)\,, \tag{1.1}$$

де $y(x)$ – невідома функція, $f(x)$ та $K(x,s)$ – задані функції, λ – ***параметр*** (чисельний множник). Функція $K(x,s)$, $a \le x, s \le b$, називається ***ядром*** інтегрального рівняння (1.1), функція $f(x)$, $a \le x \le b$, – ***вільним*** членом.

Межі інтегрування a і b можуть бути як скінченними, так і нескінченними.

В рівняннях Фредгольма ядро $K(x,s)$ є або неперервним в області $Q = \{(x,s):\ a \le x \le b,\ a \le s \le b\}$, або підпорядкованим умові

$$\int_a^b \int_a^b \left| K(x,s) \right|^2 dxds < +\infty\,. \tag{1.2}$$

Ядро, яке задовольняє умову (1.2), називається ***фредгольмовим***.

Вільний член $f(x)$ – або неперервний на відрізку $[a,b]$, або задовольняє нерівність

$$\int_a^b \left| f(x) \right|^2 dx < +\infty\,. \tag{1.3}$$

Умову (1.3) також називають «інтегрованістю функції $f(x)$ з квадратом на відрізку $[a,b]$».

Рівняння (1.1) називається ***однорідним***, якщо $f(x)\equiv 0$, і ***неоднорідним***, якщо $f(x)\not\equiv 0$.

Рівняння Фредгольма першого роду має вигляд

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \tag{1.4}$$

де ядро $K(x,s)$ і вільний член $f(x)$ задовольняють умови (1.2) і (1.3) відповідно. Зауважимо, що в цьому рівнянні відсутній член, який містить невідому функцію поза інтегралом.

Приклад 1. Рівняння

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x+s^3)y(s)ds + \sin x$$

є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду, в якому ядро $K(x,s) = x+s^3$ і вільний член $f(x) = \sin x$ неперервні в області $Q = \{(x,s):\ 0\le x\le 1,\ 0\le s\le 1\}$ та на відрізку $x\in[0;1]$.

Приклад 2. Рівняння

$$y(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xs}y(s)ds + f(x)$$

не є фредгольмовим, оскільки умова (1.2) не виконується, бо інтеграл

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left|K(x,s)\right|^2 dxds = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left|e^{-xs}\right|^2 dxds = \int_0^{+\infty} dx\int_0^{+\infty} e^{-2xs}ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2xs}}{x}\Bigg|_0^{+\infty} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x} = \infty \text{ (розбігається).} \tag{1.5}$$

Ще один важливий клас рівнянь утворюють ***лінійні інтегральні рівняння Вольтерри***:

другого роду $$y(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x),\ \ a\le x\le b \tag{1.6}$$

та ***першого роду*** $$\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x)\,,\ \ a \le x \le b\,, \tag{1.7}$$

ядра яких $K(x,s)$ або неперервні в трикутнику $\Delta = \{(x,s): a \le s \le x \le b\}$ (рис.1), або задовольняють умову $\iint\limits_{\Delta} \left|K(x,s)\right|^2 dxds < +\infty$.

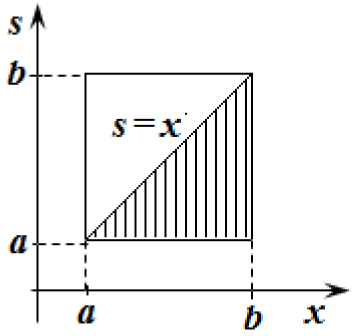


Рис. 1

Рівняння (1.6) можна розглядати як окремий випадок рівнянь Фредгольма з ядром, що визначається рівністю:

$$K(x,s) = \begin{cases} K(x,s), \text{ якщо } s \le x, \\ 0, \text{ якщо } s > x. \end{cases}$$

Нелінійним називається ***інтегральне рівняння***, до якого шукана функція входить нелінійно.

Серед нелінійних рівнянь виділимо кілька найпоширеніших типів, які мають теоретичне та прикладне значення:

– ***інтегральні рівняння Урисона першого*** і ***другого роду*** відповідно

$$\int_a^b K(x,s,y(s))ds = f(x) \quad \text{і} \quad y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s,y(s))ds + f(x)\,. \tag{1.8}$$

Тут функція $K(x,s,y(s))$ вважається неперервною при $a \le x, s \le b$, а $y(x)$ належить проміжку $[-M;M]$, де $M > 0$ – достатньо велика стала;

– ***рівняння Гаммерштейна першого*** і ***другого роду*** відповідно

$$\int_a^b K(x,s)F(s,y(s))ds = f(x) \quad \text{і} \quad y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)F(s,y(s))ds + f(x)\,, \tag{1.9}$$

де $K(x,s)$ – фредгольмове ядро;

– ***нелінійні рівняння Вольтерри першого*** та ***другого роду*** відповідно

$$\int_a^x F(x,s,y(s))ds = f(x)\,, \tag{1.10}$$

$$y(x) = \lambda\int_a^x F(x,s,y(s))ds + f(x)\,, \tag{1.11}$$

де функція $F(x,s,y(s))$ неперервна за аргументами x, s та $y(s)$ в області $a \le x, s \le b$, $y(x) \in [-M;M]$.

Інтегро-диференціальним називається рівняння, яке містить невідому функцію як під знаком інтеграла, так і під знаком похідної. Наприклад:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y(x) + \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x), \tag{1.12}$$

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y(x) + \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x). \tag{1.13}$$

Оскільки рівняння (1.12) і (1.13) містять похідну $\frac{dy}{dx}$, то на їхній розв'язок часто накладають початкову умову

$$y(a) = y_0. \tag{1.14}$$

Система інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з однією незалежною змінною має вигляд

$$y_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ij}(x,s)y_j(s)ds = f_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.15}$$

Така система зводиться до одного інтегрального рівняння типу Фредгольма. Розв'язок системи (1.15) відшукується у класі функцій, інтегрованих з квадратом на відрізку $[a,b]$, тобто

$$\int_a^b \left| y_j(x) \right|^2 dx < +\infty, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Ядра $K_{ij}(x,s)$ та функції $f_i(x)$ вважаються такими, що задовольняють умови

$$\iint_Q \left| K_{ij}(x,s) \right|^2 dxds < +\infty \quad \text{та} \quad \int_a^b \left| f_i(x) \right|^2 dx < +\infty, \qquad i, j = 1, 2, ..., n,$$

де $Q = \{(x,s):\ a \le x \le b,\ a \le s \le b\}$.

§ 1.2. Задачі, які приводять до інтегральних рівнянь

Однією з перших задач, яка привела до інтегрального рівняння, була задача обертання інтеграла

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y)dy, \tag{1.16}$$

тобто визначення функції $f(y)$ за відомою функцією $F(x)$.

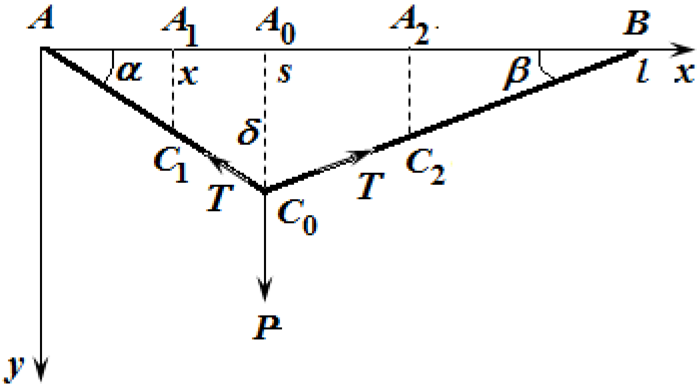
Розв'язок цієї задачі був отриманий Фур'є в 1811р. у вигляді

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ixy}F(x)dx. \qquad (1.17)$$

У формулах (1.16), (1.17) можна також вважати $f(y)$ – відомою, а $F(x)$ – шуканою функцією.

Ряд прикладних задач також зводяться до розв’язання інтегральних рівнянь. Розглянемо одну з задач механіки.

Нехай маємо гнучку струну (нитку) довжиною *l*, що закріплена в точках $x=0$ та $x=l$ і розтягнута вздовж осі Ox силою *T*, значно більшою за вагу струни й інші прикладені навантаження. У стані спокою положення струни співпадатиме з відрізком AB осі Ox. Вважається, що струна без спротиву змінює свою форму. Згідно закону Гука, щоб збільшити довжину струни на величину Δl, треба прикласти зусилля $\gamma\cdot\Delta l$, де γ – певна стала.



Припустимо, що в точці A_0, для якої $x=s$, до струни прикладена вертикальна сила *P* (вага вантажу). Під її дією струна набуває форми ламаної AC_0B. Вважаємо відхилення $A_0C_0=\delta$ малим порівняно з AA_0 та A_0B. Визначимо наближено:

$$\sin\alpha=\frac{A_0C_0}{AC_0}=\frac{\delta}{\sqrt{s^2+\delta^2}}\approx\frac{\delta}{s};\quad \sin\beta=\frac{A_0C_0}{C_0B}=\frac{\delta}{\sqrt{(l-s)^2+\delta^2}}\approx\frac{\delta}{l-s}.$$

В точці C_0 дія ваги P врівноважена натягом струни, який залишився рівним *T*. Проектуючи сили натягу струни в точці C_0 на вісь *y*, з умови рівноваги отримаємо рівність

$$T\sin\alpha+T\sin\beta=P\ ,\ \text{або}\quad T\frac{\delta}{s}+T\frac{\delta}{l-s}=P.$$

Звідси $\delta=\dfrac{Ps(l-s)}{Tl}$. Відхилення струни в точці з абсцисою x знайдемо з умови подібності через δ:

$$y(x)=PG(x,s),$$

де

$$G(x,s)=\begin{cases} x(l-s)/T\cdot l \text{ при } 0\le x\le s, \\ s(l-x)/T\cdot l \text{ при } s\le x\le l. \end{cases}$$

Величина $G(x,s)$ – ***функція впливу*** (функція Гріна) отриманої крайової задачі; вона визначає прогин в точці x від одиничного навантаження ($P=1$), прикладеного в точці з абсцисою s.

Тепер нехай замість сили P на струну діє неперервно розподілене вздовж осі Ox навантаження з лінійною щільністю $p(x)$, що являє собою силу в розрахунку на одиницю довжини в околі точки x, тобто $\Delta P/\Delta x$, або точніше $p(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta P/\Delta x=dP/dx$. Тоді на ділянці струни між точками s і $s+\Delta s$ буде діяти сила, яка наближено дорівнює $p(s)\Delta s$. Вона викликатиме відхилення струни на величину $G(x,s)p(s)\Delta s$.

За принципом суперпозиції відхилення, викликані такими елементарними силами, можна записати у вигляді наближеної рівності

$$y(x)\approx\sum_s G(x,s)p(s)\Delta s.$$

Переходячи до границі при $\Delta s\to 0$, отримаємо

$$y(x)=\int_0^l G(x,s)p(s)ds. \tag{1.18}$$

Враховуючи вигляд функції $G(x,s)$, отримаємо

$$y(x)=\frac{l-x}{Tl}\int_0^x s\cdot p(s)ds+\frac{x}{Tl}\int_x^l (l-s)p(s)ds. \tag{1.19}$$

Для (1.19) виконуються умови закріплення кінців струни $y(0)=0$, $y(l)=0$. Співвідношення (1.19) визначає залежність прогину $y(x)$ від навантаження $p(x)$. Можна отримати й розв'язок оберненої задачі, тобто визначити таке навантаження $p(x)$, для якого прогин дорівнює заданому значенню. Для цього треба розв'язати рівняння (1.18) – інтегральне рівняння відносно невідомої функції $p(x)$.

§ 1.3. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь

Інтегральні рівняння Вольтерри другого роду, так само, як і задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь, знаходять ефективне застосування для опису динаміки фізичних явищ і процесів в теорії потенціалу, теорії пружності, при аналізі перехідних процесів в електричних ланцюгах та автоматичних системах управління, задачах аеродинаміки тощо. Дуже часто задача Коші для лінійного диференціального рівняння зводиться до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду, що дозволяє значно спростити етап проектування, надає можливість безпосередньо визначати вплив параметрів системи на процеси, які в системі відбуваються. Розглянемо такий перехід на прикладах.

Приклад 1. Скласти інтегральне рівняння, яке відповідає диференціальному рівнянню

$$y'' + y = \cos x \qquad (1.20)$$

з початковими умовами $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Вважаємо, що

$$y''(x) = \varphi(x). \qquad (1.21)$$

Проінтегруємо отриманий вираз в межах від 0 до x, враховуючи початкові умови:

$$y'(x) = \int_0^x y''(s)ds + y'(0) = \int_0^x \varphi(s)ds + y'(0) = \int_0^x \varphi(s)ds + 0 = \int_0^x \varphi(s)ds. \qquad (1.22)$$

Оскільки $y(x) = \int_0^x y'(s)ds + y(0) = \int_0^x\int_0^s \varphi(z)dzds = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \int_0^s \varphi(z)dz & du = \varphi(s)ds \\ dv = ds & v = s \end{array} \right\} =$

$$= \int_0^s \varphi(z)dz \cdot s \Big|_0^x - \int_0^x s\cdot\varphi(s)ds = x\int_0^x \varphi(s)ds - \int_0^x s\cdot\varphi(s)ds = \int_0^x (x-s)\varphi(s)ds, \qquad (1.23)$$

то, підставивши $y(x), y'(x), y''(x)$ в диференціальне рівняння (1.20), отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду відносно функції $\varphi(x)$, еквівалентне заданому диференціальному рівнянню:

$$\varphi(x) = -\int_0^x (x-s)\varphi(s)ds + \cos x.$$

Тут ядро $K(x,s) = x - s$, вільний член $f(x) = \cos x$, параметр $\lambda = -1$.

Приклад 2. Скласти інтегральне рівняння, яке відповідає диференціальному рівнянню $y'' - 5y' + 6y = 0$ та початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Вважаємо

$$y''(x) = \varphi(x). \qquad (1.24)$$

Тоді першу похідну шуканої функції можна записати у вигляді

$$y'(x)=\int_0^x y''(s)ds+y'(0)=\int_0^x \varphi(s)ds+y'(0)=\int_0^x \varphi(s)ds+1\,. \qquad (1.25)$$

Тепер знайдемо функцію $y(x)$:

$$y(x)=\int_0^x y'(s)ds+y(0)=\int_0^x\left(\int_0^s \varphi(z)dz+1\right)ds=\int_0^x\int_0^s \varphi(z)dzds+\int_0^x ds=$$

$$=\left\{\begin{array}{l|l} u=\int_0^s \varphi(z)dz & du=\varphi(s)ds \\ dv=ds & v=s \end{array}\right\}=\int_0^s \varphi(z)dz\cdot s\Big|_0^x-\int_0^x s\cdot\varphi(s)ds+x=$$

$$=x\int_0^x \varphi(s)ds-\int_0^x s\cdot\varphi(s)ds+x=\int_0^x (x-s)\varphi(s)ds+x\,. \qquad (1.26)$$

Підставивши (1.24), (1.25), (1.26) у вихідне диференціальне рівняння, отримаємо

$$\varphi(x)-5\int_0^x \varphi(s)ds-5+6\int_0^x (x-s)\varphi(s)ds+6x=0\,,$$

або $\varphi(x)=\int_0^x (5-6(x-s))\varphi(s)ds+5-6x.$

Отримали інтегральне рівняння з ядром $K(x,s)=5-6(x-s)$, вільним членом $f(x)=5-6x$ та параметром $\lambda=1$.

Задачу Коші для довільного диференціального рівняння n-го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної,

$$y^{(n)}(x)=f(x,y,y',...,y^{(n-1)}),$$
$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

можна звести до системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри.

Приклад 3. Скласти систему інтегральних рівнянь, рівносильну задачі Коші

$$y''=4y+(y')^2,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=0\,.$$

Розв'язання. Покладемо

$$y_1(x)=y(x), \qquad y_1(0)=1,$$
$$y_2(x)=y'(x), \qquad y_2(0)=0.$$

Зведемо вихідну задачу до задачі Коші для нормальної системи 2-го порядку

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = 4y_1(x) + y_2^2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0.$$

В свою чергу, отримана система диференціальних рівнянь з урахуванням початкових умов зводиться до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} y_1(x) = \int\limits_0^x y_2(t)dt + 1; \\ y_2(x) = \int\limits_0^x (4y_1(t) + y_2^2(t))dt. \end{cases}$$

§ 1.4. Інтеграли, залежні від параметра. Формула Лейбніца

Якщо при кожному фіксованому значенні x із деякого інтервалу осі Ox функція $f(x,y)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ осі Oy, то визначений інтеграл

$$I(x) = \int\limits_a^b f(x,y)dy$$

є функцією параметра x і називається інтегралом, залежним від параметра. Від параметра x може залежати не тільки підінтегральна функція, але й межі інтегрування, тобто у загальному випадку

$$I(x) = \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy.$$

При цьому похідну від $I(x)$ за параметром x обчислюють за ***формулою Лейбніца:***

$$\frac{d}{dx}I(x) = \varphi'(x)f(x,\varphi(x)) - \psi'(x)f(x,\psi(x)) + \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}dy.$$

§ 1.5. Розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри першого та другого роду шляхом зведення до диференціальних рівнянь

Деякі окремі види інтегральних рівнянь Вольтерри першого і другого роду можна розв'язувати, зводячи їх до диференціальних рівнянь. Такий підхід може бути пов'язаний не тільки з постановкою задач, а й з добре розвинутими методами розв'язання диференціальних рівнянь.

Розглянемо випадок, коли ядро інтегрального рівняння Вольтерри і вільний член $f(x)$ мають неперервні похідні за змінною x. Крім того, ядро

$K(x,s)$ інтегрального рівняння є ***виродженим***, тобто таким, що його можна подати у вигляді кінцевої суми добутків двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а друга тільки від s :

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(s)\,.$$

Функції $a_i(x)$, так само, як і функції $b_i(s),\ i=1,2,...,n$, вважають лінійно незалежними між собою.

Такі рівняння можна звести або до диференціальних рівнянь, або до систем диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Знайти розв’язок інтегрального рівняння $\int\limits_0^x e^{x+s}y(s)ds=x$.

Розв’язання. Продиференціюємо обидві частини інтегрального рівняння Вольтерри першого роду за змінною x

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^x e^{x+s}y(s)ds=\frac{\partial x}{\partial x}\,.$$

За формулою Лейбніца маємо

$$1\cdot e^{x+x}y(x)-0+\int\limits_0^x e^{x+s}y(s)ds=1\,,$$

$$e^{2x}y(x)+\int\limits_0^x e^{x+s}y(s)ds=1\,.$$

Порівнявши другий доданок з лівою частиною вихідного рівняння, отримуємо

$$e^{2x}y(x)+x=1,\ \text{або}\ \ y(x)=e^{-2x}(1-x)\,.$$

Приклад 2. Знайти розв’язок інтегрального рівняння Вольтерри другого роду $y(x)=\int\limits_0^x y(s)ds+e^x$.

Розв’язання. Застосуємо диференціальний оператор до обох частин рівняння. За формулою Лейбніца

$$y'(x)=y(x)+e^x\,.$$

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'(x)-y(x)=e^x\,.$$

Знайдемо його розв’язок методом Лагранжа.

1) $y' - y = 0$, $y' = y$, $\dfrac{dy}{dx} = y$, $\int \dfrac{dy}{y} = \int dx$, $\ln y = x + \ln C$, $y = Ce^x$.

2) $y = C(x)e^x$, $y' = C'e^x + Ce^x$, $y' - y = C'e^x + Ce^x - Ce^x = e^x$, $C'e^x = e^x$, $C' = 1$, $C(x) = x + \overline{C}$, $y(x) = (x + \overline{C})e^x$.

Визначимо сталу $\overline{C}$. З вихідного рівняння маємо $y(0) = \int\limits_0^0 y(s)ds + 1$, $y(0) = 1$.

Тоді $y(0) = (0 + \overline{C})e^0 = 1$, $\overline{C} = 1$.

Розв’язок інтегрального рівняння $y(x) = (x+1)e^x$.

Приклад 3. Знайти розв’язок інтегрального рівняння

$$y(x) = 2\int\limits_0^x \frac{2s+1}{(2x+1)^2} y(s)ds + 1.$$

Розв’язання. За формулою Лейбніца

$$y'(x) = 2\left[\frac{2x+1}{(2x+1)^2} y(x) + \int\limits_0^x \frac{2s+1}{(2x+1)^3}(-4)y(s)ds\right] + 0 =$$

$$= \frac{2y(x)}{2x+1} - \frac{8}{2x+1}\int\limits_0^x \frac{2s+1}{(2x+1)^2} y(s)ds,$$

$$y' = \frac{2y(x)}{2x+1} - \frac{4}{2x+1}(y(x) - 1) = -\frac{2y(x)}{2x+1} + \frac{4}{2x+1}, \quad y' + \frac{2y(x)}{2x+1} = \frac{4}{2x+1}.$$

При $x = 0$ з вихідного рівняння отримуємо $y(0) = 1$. Розв’яжемо лінійне диференціальне рівняння методом Лагранжа.

1) $y' = -\dfrac{2y(x)}{2x+1}$, $\int \dfrac{dy}{y} = -2\int \dfrac{dx}{2x+1}$, $\ln|y| = -\ln|2x+1| + \ln C$, $y(x) = \dfrac{C}{2x+1}$.

2) $y(x) = \dfrac{C(x)}{2x+1}$, $y'(x) = \dfrac{C'(x)}{2x+1} - \dfrac{C}{(2x+1)^2}\cdot 2$,

$$\frac{C'}{2x+1} - \frac{2C}{(2x+1)^2} = -\frac{2C}{2x+1} + \frac{4}{2x+1}, \quad \frac{C'}{2x+1} = \frac{4}{2x+1}, \quad C(x) = 4x + C_1.$$

Маємо загальний розв’язок: $y(x) = \dfrac{4x + C_1}{2x+1}$. Враховуючи початкову умову $y(0) = C_1 = 1$, отримаємо $y(x) = \dfrac{4x+1}{2x+1}$.

Приклад 4. Знайти розв’язок інтегрального рівняння Вольтерри другого роду з виродженим ядром

$$y(x) = x^2 - 2\int_0^x \frac{s}{1+x^2} y(s)ds .$$

Розв’язання. Введемо позначення $u(x) = \int_0^x s \cdot y(s)ds$; очевидно $u(0) = 0$. Оскільки $u'(x) = x \cdot y(x)$, то $y(x) = \frac{u'(x)}{x}$. Переходячи в інтегральному рівнянні до нової змінної $u(x)$, здобудемо задачу Коші

$$u'(x) = x\left(x^2 - 2\frac{u(x)}{1+x^2}\right); \qquad u'(x) = x^3 - 2\frac{xu(x)}{1+x^2}, \qquad u(0) = 0 .$$

Розв’яжемо лінійне диференціальне рівняння $u'(x) + 2\frac{xu(x)}{1+x^2} = x^3$ методом Лагранжа.

$$1)\, u'(x) + 2\frac{xu(x)}{1+x^2} = 0; \quad u'(x) = -2\frac{xu(x)}{1+x^2}; \quad \int\frac{du}{u} = -\int\frac{2xdx}{1+x^2};$$

$$\ln u = -\ln(1+x^2) + C, \ u(x) = \frac{C}{1+x^2} .$$

$$2)\, u(x) = \frac{C(x)}{1+x^2}, \quad u' = \frac{C'}{1+x^2} - \frac{C \cdot 2x}{(1+x^2)^2}, \quad u' = \frac{C'}{1+x^2} - \frac{C \cdot 2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\frac{C'}{1+x^2} - \frac{C \cdot 2x}{(1+x^2)^2} + 2\frac{xC}{(1+x^2)^2} = x^3, \quad \frac{C'}{1+x^2} = x^3, \quad C' = x^3(1+x^2),$$

$$C' = x^3 + x^5, \quad C(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + C_1, \quad u(x) = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + C_1\right) \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

$$u(0) = C_1 = 0, \ u(x) = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\right) \cdot \frac{1}{1+x^2} .$$

Знайдемо функцію $y(x) = \frac{u'(x)}{x}$.

$$u'(x) = (x^3 + x^5) \cdot \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\right) \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^3(1+x^2)}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right),$$

Розв’язок рівняння $y(x) = x^2 - \frac{x^4}{6(1+x^2)^2}(2x^2 + 3)$.

Питання та приклади до самостійної роботи

1. Які рівняння називають інтегральними?
2. Що називається розв’язком інтегрального рівняння?
3. Яке інтегральне рівняння називають лінійним?
4. Наведіть приклади лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь.
5. Який вигляд має рівняння Фредгольма, а який – рівняння Вольтерри?
6. За якої умови інтегральне рівняння буде першого (другого) роду?
7. Що називають ядром інтегрального рівняння, вільним членом?
8. Коли інтегральне рівняння називають однорідним (неоднорідним)?
9. Запишіть формулу Лейбніца обчислення похідної від інтеграла за параметром x.
10. Доведіть, що функція $y(x) = e^{-x} - 2x$ є розв’язком інтегрального рівняння

$$y(x) = e^{-x} + 2\int_0^1 x \cdot e^s y(s)ds .$$

11. Скласти інтегральне рівняння, яке відповідає задачі Коші

$$y'' + 2y' + y = x^2 ,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 .$$

Відповідь: $\varphi(x) = x^2 - 1 - \int_0^x (2 + x - s)\varphi(s)ds$.

12. Розв’язати інтегральне рівняння $y(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x - s)y(s)ds$ шляхом попереднього зведення його до задачі Коші для диференціального рівняння.

Відповідь: $y(x) = \cos x$.

2. ЕЛЕМЕНТИ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ В ТЕОРІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§ 2.1. Метричні простори. Повні простори

Метричним простором М називається простір, в якому кожній парі елементів x,y поставлено у відповідність число $\rho_M(x,y)$, яке визначає відстань між елементами x та y, так що мають місце наступні властивості (аксіоми метрики):

1) $\rho_M(x, y) \ge 0$, причому $\rho_M(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$ (аксіома тотожності) ;

2) $\rho_M(x, y) = \rho_M(y, x)$ (аксіома симетрії);

3) $\rho_M(x, y) \le \rho_M(x, u) + \rho_M(u, y)$ (аксіома трикутника).

Елементи метричного простору ми будемо називати також точками цього простору.

Функцію $\rho_M(x, y)$ називають ***метрикою*** або ***відстанню*** між елементами x і y.

У теорії інтегральних рівнянь важливу роль відіграють простір $C[a, b]$ неперервних на $[a, b]$ функцій з метрикою

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} \left| x(t) - y(t) \right|$$

та простір $L_2[a, b]$ функцій, квадрати яких інтегровані на $[a, b]$ за Риманом, з метрикою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b \left(x(t) - y(t) \right)^2 dt} .$$

Визначення. Послідовність $\{x_n\}$ елементів метричного простору X називається ***збіжною в себе*** або ***фундаментальною*** послідовністю, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $N_0(\varepsilon)$ такий, що

$$\rho_X(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m > N_0(\varepsilon) .$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається до границі $x_0 \in X$, то вона фундаментальна.

Насправді, нехай $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $N_0(\varepsilon)$ такий, що

$$\rho_X(x_n, x_0) < \varepsilon / 2 \quad \text{при} \quad n > N_0(\varepsilon) ,$$

звідки матимемо

$$\rho_X(x_n, x_m) \le \rho_X(x_n, x_0) + \rho_X(x_m, x_0) < \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

при $n, m > N_0(\varepsilon)$, а це означає, що послідовність $\{x_n\}$ – фундаментальна.

У просторі $C[a, b]$ збіжність послідовності $\{x_n\}$ до точки x_0 є ***рівномірною***, а у просторі $L_2[a, b]$ її називають ***збіжністю у середньому квадратичному***.

Визначення. Якщо в метричному просторі X кожна фундаментальна послідовність збігається до деякої границі, яка є елементом того ж простору , то простір X називають ***повним***.

Простори $C[a, b]$ і $L_2[a, b]$ є повними.

§ 2.2. Принцип стискаючих відображень

Нехай X і Y – два метричні простори, D – деяка множина в просторі X.

Якщо кожній точці $x \in D$ за деяким законом поставлена у відповідність певна точка $y \in Y$, то кажуть, що на множині D задано ***оператор*** A зі значеннями в просторі Y, і пишуть

$$y = Ax.$$

Оператор A відображає множину D у простір Y:

$$D \xrightarrow{A} Y$$

Визначення. Оператор A називається лінійним, якщо:

1) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$;

2) $A(\alpha x) = \alpha Ax \; A(\alpha x) = \alpha \cdot Ax$.

Приклад. Нехай X – простір $C[a,b]$ функцій $x(t)$, неперервних на $[a,b]$.

Кожній функції $x(t) \in C[a,b]$ поставимо у відповідність функцію

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

де $K(t,s)$ – задана неперервна в квадраті $Q = \{(t,s): \; a \le t, s \le b\}$ функція. Таким чином на $C[a,b]$ визначено лінійний інтегральний оператор

$$Ax \equiv \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \qquad (2.1)$$

який називають ***оператором Фредгольма***.

Визначення. Нехай (X, ρ_X) і (Y, ρ_Y) – два метричних простори і A – відображення, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність деякий елемент $y = Ax \in Y$. Таке ***відображення*** називають ***неперервним*** у точці $x_0 \in X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in X$ таких, що $\rho_X(x, x_0) < \delta$, виконується нерівність $\rho_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon$.

Принцип стискаючих відображень визначається наступною теоремою. ***Теорема. (С. Банаха).*** Нехай у повному метричному просторі X задано оператор A, який переводить елементи простору X знову в елементи того ж простору, тобто

$$X \xrightarrow{A} X.$$

Крім того, нехай для всіх $x, y \in X$

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha \rho(x,y), \qquad (2.2)$$

де $0<\alpha<1$ і не залежить від x, y. Тоді існує одна і тільки одна точка x_0 така, що $Ax_0 = x_0$.

Оператор A, що має властивість (2.2), називається ***стискаючим*** оператором, а точка x_0 така, що $Ax_0 = x_0$, називається ***нерухомою точкою*** оператора A.

В умовах теореми Банаха, яку іноді називають ***принципом стискаючих відображень***, нерухома точка існує і до того ж тільки одна.

Зауваження. Якщо A – неперервне відображення, то для існування та єдиності нерухомої точки у повному метричному просторі достатньо лише вимагати, щоб деякий степінь цього відображення був стискаючим відображенням.

§ 2.3. Лінійні нормовані та евклідові простори

Непорожня множина L називається лінійним простором, якщо у ній введені операції додавання та множення на число, такі, що для довільних елементів x, y, z цієї множини виконуються умови:

1. $x+y=y+x$ (комутативність);
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (асоціативність);
3. $x+0=x$ (існування нуля);
4. $x+(-x)=0$ (існування протилежного елемента);
5. $1\cdot x=x$;
6. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;
7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
8. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Множини функцій, неперервних та інтегрованих з квадратом на відрізку $[a, b]$, зі звичайними операціями додавання і множення на число, утворюють лінійні простори.

Якщо у просторі L можна вказати лінійно незалежну систему, що складається з довільної скінченної кількості елементів, то такий простір називають ***нескінченновимірним***. Такими є, наприклад, простори неперервних та інтегрованих з квадратом на відрізку $[a, b]$ функцій.

Лінійний простір L називають ***нормованим***, якщо кожному елементу $x \in L$ поставлено у відповідність дійсне число $\|x\|$, яке задовольняє умови:

1. $\|x\| \geq 0$, причому $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$;
2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$;
3. $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Число $\|x\|$ називають ***нормою*** елемента x. Всякий нормований простір стає метричним, якщо покласти $\rho(x,y)=\|x-y\|$, тоді $\|x\|=\rho(x,0)$. Виходячи з цього, нормовані простори позначаються так само, як і відповідні їм метричні простори. Наприклад, у нормованих просторах $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$ відповідні формули для норм набувають вигляду:

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \quad \text{і} \quad \|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}\,.$$

Збіжність послідовності точок x_n нормованого простору до елемента x_0 цього простору визначають з умови $\|x_n - x_0\| \to 0$.

Нормований простір, у якому кожна фундаментальна послідовність збіжна, називають ***банаховим простором***. Простори $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$ є банаховими.

Задати норму в лінійному просторі L можна за допомогою скалярного добутку.

Визначення. ***Скалярним добутком*** у дійсному лінійному просторі L називається дійсна функція (x,y), яка визначена для кожної пари елементів $x, y \in L$ і задовольняє умови:

1. $(x,x) \ge 0$, причому $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $(x,y) = (y,x)$;
3. $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$;
4. $(x_1 + x_2,y) = (x_1,y) + (x_2,y)$.

Лінійний простір із заданим в ньому скалярним добутком називають ***евклідовим*** простором. Повний відносно норми $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ евклідовий простір нескінченної вимірності називається ***гільбертовим***.

Одним з прикладів гільбертового простору є простір $L_2[a,b]$ зі скалярним добутком $(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$. Простір $C[a,b]$ не є евклідовим, оскільки його норму не можна задати через скалярний добуток.

Кут між довільними ненульовими елементами x, y евклідового простору знаходять за допомогою формули

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi\,.$$

Якщо $\cos\varphi = 0$, то елементи x і y називають ***ортогональними***. Умова ортогональності ненульових елементів x і y рівносильна рівності $(x,y) = 0$.

Систему $\{x_\alpha\}$ ненульових елементів x_α евклідового простору E називають ***ортогональною***, якщо $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ для довільних α і β таких, що $\alpha \ne \beta$. Якщо, крім того, для кожного α виконується рівність $\|x_\alpha\| = 1$, то

$\{x_\alpha\}$ називають ***ортогональною нормованою*** системою. Якщо система $\{x_\alpha\}$ є ортогональною, то система $\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ – ортогональна нормована.

Теорема. Будь-яка ортогональна система $\{x_\alpha\}$ ненульових елементів евклідового простору E є лінійно незалежною.

Нехай тепер E – нескінченновимірний евклідовий простір і $\{\varphi_k\}$ – довільна ортогональна нормована система елементів цього простору. Кожному елементу $x \in E$ зіставимо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k ,$$

де $c_k = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, ...$. Цей ряд називають ***рядом Фур'є*** для елемента x за системою $\{\varphi_k\}$. Для ***коефіцієнтів Фур'є*** (чисел c_k) справджується ***нерівність Бесселя***:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \| x \|^2 .$$

Ортогональну нормовану систему $\{\varphi_k\} \subset E$ називають ***замкненою***, якщо для будь-якого $x \in E$ виконується ***рівність Парсеваля***

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| x \|^2 .$$

Замкненість системи $\{\varphi_k\}$ рівносильна тому, що для кожного $x \in E$ часткові суми ряду Фур'є збігаються до x за нормою цього простору.

§ 2.4. Лінійні оператори й обернені до них

Нехай L і L' – два нормованих простори. Відображення $A: L \to L'$, яке для довільних $x, y \in D(A) \subset L$ і сталих α, β задовольняє умову

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay ,$$

називається ***лінійним оператором***.

Визначення. Оператор A називають ***неперервним*** в точці $x_0 \in L$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ для всіх $x \in D(A)$ таких, що $\|x - x_0\| < \delta$. Якщо оператор неперервний у кожній точці $x \in D(A)$, то його називають ***неперервним оператором***.

Нормою оператора A називають невід'ємне число, що визначається наступним чином

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup_{x \ne 0} \|Ax\| / \|x\| .$$

Для лінійних операторів вводяться операції додавання та множення

$$(A+B)x = Ax + Bx, \quad (\alpha A)x = \alpha \cdot Ax, \quad x \in L.$$

Під ***добутком операторів*** A і B розуміють оператор $AB\colon L \to L$ такий, що $(AB)x = A(Bx)$. ***Степінь оператора*** $A\colon L \to L$ визначається рівністю

$$A^n x = A(A^{n-1}x).$$

До лінійних операторів належать:

- ***одиничний оператор*** $I\colon L \to L$ такий, що $Ix = x$ для всіх $x \in L$;
- ***нульовий оператор*** $0\colon L \to L'$ такий, що $0x = 0$ для всіх $x \in L$;
- оператор $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$, що визначається формулою

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds \qquad (2.3)$$

і називається ***інтегральним оператором Фредгольма***. Тут ядро $K(t,s)$ – неперервна у квадраті $Q = [a,b;\ a,b]$ функція. Якщо $|K(t,s)| \le M$, то для його норми у квадраті Q маємо оцінку

$$\|A\| \le M(b-a). \qquad (2.4)$$

Інтегральний оператор Фредгольма (2.3) можна розглядати як оператор $A\colon L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ за умови, що

$$B^2 = \iint_Q |K(t,s)|^2 dtds < \infty.$$

При цьому, якщо $|K(t,s)| \le M$, то для його норми у квадраті Q маємо оцінку $\|A\| \le B \le M(b-a)$.

Визначення. Оператор $A\colon L \to L'$ називають ***оборотним***, якщо для кожного y з множини $E(A)$ значень цього оператора рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок $x \in D(A)$. При цьому відображення $A^{-1}\colon E(A) \to D(A)$, яке кожному $y \in E(A)$ ставить у відповідність цей єдиний розв'язок $x \in D(A)$, називають ***оберненим оператором*** до оператора A. Тобто,

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

§ 2.5. Компактні самоспряжені оператори.

Нехай оператор A визначений в евклідовому просторі E. Оператор A^* називається ***спряженим*** до оператора A, якщо для всіх $x, y \in E$ виконується рівність

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Оператор A називається ***самоспряженим***, якщо для всіх $x, y \in E$ виконується рівність $(Ax, y) = (x, Ay)$. Наприклад, інтегральний оператор Фредгольма буде самоспряженим у просторі $x, y \in E$, якщо його ядро є симетричним, тобто $K(t,s) = K(s,t)$.

Число λ називають ***власним значенням*** оператора $A: L \to L$, якщо рівняння $Ax = \lambda x$ має ненульовий розв'язок. Такий розв'язок називають ***власною функцією*** оператора A, яка відповідає власному значенню λ.

Множину M нормованого простору L називають ***компактною***, якщо з будь-якої нескінченної послідовності її елементів можна виділити збіжну підпослідовність.

Якщо границі таких послідовностей існують, але не обов'язково належать до M, то таку множину називають ***передкомпактною***.

Лінійний оператор $A: L \to L'$ називають ***компактним***, якщо він кожну обмежену множину простору L переводить у передкомпактну множину простору L'.

Теорема. Інтегральний оператор Фредгольма (2.3), ядро якого $K(t,s)$ неперервне у квадраті $Q = [a,b; a,b]$, є компактним оператором у просторі $C[a,b]$.

За умов обмеженості ядра $K(t,s)$ і допуску його розривів вздовж скінченної кількості неперервних ліній $s = \varphi_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$, ***інтегральний оператор Вольтерри***

$$Ax(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds$$

з довільним неперервним ядром у трикутнику $a \le s \le t \le b$ є компактним.

Інтегральні оператори Фредгольма і Вольтерри є компактними також у просторі $L_2[a,b]$.

Для власних значень та власних функцій характерна така ***властивість***:

Кожен компактний оператор A у банаховому просторі L для довільного $\delta > 0$ може мати лише скінченну кількість лінійно незалежних власних функцій, що відповідають власним значенням, які за модулем не перевищують числа δ.

Це означає, що:

1) кожному власному значенню $\mu \neq 0$ компактного оператора A відповідає лише скінченна кількість лінійно незалежних власних функцій;

2) множина власних значень компактного оператора не більш як зліченна і може мати точкою скупчення лише точку 0.

§ 2.6. Наближене розв’язування операторних рівнянь

Розглянемо у нормованому просторі L операторне рівняння

$$A_0\tilde{y} = \tilde{f}. \tag{2.5}$$

Вважаємо, що лінійний оператор $A_0 : L \to L$ має обмежений обернений оператор A_0^{-1}, тоді рівняння (2.5) має єдиний розв’язок

$$\tilde{y} = A_0^{-1}\tilde{f}.$$

Розглянемо лінійний оператор $A = A_0 + \Delta A:\ L \to L$ такий, що

$$\left\| A_0^{-1} \right\| \cdot \left\| \Delta A \right\| < 1.$$

В цьому випадку оператор A також має обмежений обернений оператор і рівняння

$$Ay = f \tag{2.6}$$

має єдиний розв’язок $y = A^{-1}f$. Похибка отриманого наближення визначається виразом

$$\left\| y - \tilde{y} \right\| \le \frac{\left\| A_0^{-1} \right\|^2 \cdot \left\| \Delta A \right\|}{1 - \left\| A_0^{-1} \right\| \cdot \left\| \Delta A \right\|} \cdot \left\| f \right\| + \left\| A_0^{-1} \right\| \cdot \left\| f - \tilde{f} \right\|. \tag{2.7}$$

Для операторних рівнянь другого роду

$$y = \lambda Ay + f, \quad \tilde{y} = \lambda A_0\tilde{y} + \tilde{f}$$

маємо наступну оцінку похибки отриманого наближення:

$$\left\| y - \tilde{y} \right\| \le \frac{\left\| (I - \lambda A_0)^{-1} \right\|^2 \cdot \left| \lambda \right| \cdot \left\| \Delta A \right\|}{1 - \left\| (I - \lambda A_0)^{-1} \right\| \cdot \left| \lambda \right| \cdot \left\| \Delta A \right\|} \cdot \left\| f \right\| + \left\| (I - \lambda A_0)^{-1} \right\| \cdot \left\| f - \tilde{f} \right\|. \tag{2.8}$$

Похибку n-го наближення розв’язку рівняння

$$y = \lambda Ay + f,\ \left| \lambda \right| \cdot \left\| A \right\| < 1,$$

якщо $y_n = \lambda Ay_{n-1} + f,\ n \in N,\ y_0 = f$, можна подати у вигляді:

$$\left\| y - y_n \right\| \le \frac{\left| \lambda \right|^{n+1} \left\| A \right\|^{n+1} \cdot \left\| f \right\|}{1 - \left| \lambda \right| \cdot \left\| A \right\|}. \tag{2.9}$$

Питання до самостійної роботи

1. Дайте визначення метричного простору.
2. Наведіть приклади метричних просторів.
3. Запишіть формули відстаней у метричних просторах $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$.
4. Які послідовності називаються фундаментальними?
5. Які метричні простори називають повними?
6. Які відображення називаються стискаючими?
7. Яка точка називається нерухомою точкою відображення?
8. Сформулюйте принцип стискаючих відображень.
9. Дайте визначення лінійного простору.
10. Що називають нормою елемента?
11. Дайте визначення нормованого простору.
12. Який простір називають банаховим?
13. Які простори називають евклідовими?
14. Яка система елементів називається ортогональною (нормованою, ортонормованою)?
15. Які оператори називаються лінійними?
16. Дайте визначення норми оператора.
17. За якими правилами визначають суму і добуток лінійних операторів?
18. Дайте визначення оберненого і спряженого операторів.
19. Який оператор називається самоспряженим?
20. Дайте визначення власного значення і власної функції оператора.
21. Який оператор називають оператором Фредгольма (Вольтерри)?

3. ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО РОДУ

§ 3.1. Застосування принципу стискаючих відображень до інтегральних рівнянь

Розглянемо лінійне неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x) \tag{3.1}$$

в якому ядро $K(x,s)$ неперервне в замкненому квадраті $Q=\{(x,s):a\le x\le b, a\le s\le b\}$. Тоді для $(x,s)\in Q$ $|K(x,s)|\le M$.

Вважаємо, що функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, λ – довільний параметр. Розв'язок рівняння (3.1) будемо шукати в класі неперервних на $[a,b]$ функцій.

При цьому розв'язком інтегрального рівняння (3.1) будемо називати будь-яку функцію $y_0(x)\in C[a,b]$, яка при підстановці в рівняння (3.1) обертає його на тотожність по $x\in[a,b]$:

$$y_0(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y_0(s)ds+f(x).$$

Очевидно, що при $\lambda=0$ рівняння (3.1) має єдиний неперервний розв'язок $y_0(x)\equiv f(x)$.

Покажемо, що рівняння (3.1) можна однозначно розв'язати і при всіх достатньо малих за абсолютною величиною λ .

Відображення

$$Ay=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x). \tag{3.2}$$

переводить простір $C[a,b]$ в себе. Тоді питання щодо існування розв'язку $y_0(x)$ інтегрального рівняння (3.1) зводиться до питання про існування нерухомої точки у оператора *A*, тобто такої функції $y_0(x)$, яка оператором *A* переводиться в себе: $y_0=Ay_0$.

Внаслідок принципу стискаючих відображень для наявності та єдиності нерухомої точки відображення (3.2) у просторі $C[a,b]$ достатньо, щоб воно було стискаючим.

З'ясуємо умову стискання відображення (3.2). Для всіх $x\in[a,b]$

$$\left|A\overline{y}(x)-A\overline{\overline{y}}(x)\right|=\left|\lambda\int_a^b K(x,s)\overline{y}(s)ds+f(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\overline{\overline{y}}(s)ds+f(x)\right|\le$$

$$\le|\lambda|\int_a^b|K(x,s)|\left|\overline{y}(s)-\overline{\overline{y}}(s)\right|ds\le|\lambda|\int_a^b M\rho(\overline{y},\overline{\overline{y}})ds\le|\lambda|M(b-a)\rho(\overline{y},\overline{\overline{y}}),$$

де $M=\max\limits_{(x,s)\in Q}|K(x,s)|$.

Отже, $\rho(A\overline{y},A\overline{\overline{y}})\le|\lambda|M(b-a)\rho(\overline{y},\overline{\overline{y}})$.

Тоді достатньою умовою для стискання відображення буде $|\lambda|M(b-a)<1$, або

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \qquad (3.3)$$

За теоремою Банаха це означає, що інтегральне рівняння (3.1) має єдиний розв'язок у просторі $C[a,b]$.

§ 3.2. Метод послідовних наближень для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Однією з особливостей інтегральних рівнянь другого роду є розв'язання їх відносно шуканої функції, що дозволяє використовувати методи послідовних наближень, одним з яких є ***метод простої ітерації***.

В цьому методі для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (3.1) послідовні наближення функцій

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ ...,y_n(x),\ ...$$

знаходять за допомогою рекурентних співвідношень

$$y_n(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y_{n-1}(s)ds + f(x), \quad n \in N. \qquad (3.4)$$

В якості початкового наближення $y_0(x)$ обирають або довільну неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію, наприклад, $y_0(x) = f(x)$, або, після аналізу відомостей про характер шуканої функції, $y_0(x)$ обирають виходячи з фізичної постановки задачі.

Якщо всі інтеграли (3.4) знаходяться точно, то розв'язок $y(x)$ рівняння (3.1) визначають, здійснивши граничний перехід за формулою $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Оскільки у просторі $C[a,b]$ збіжність є рівномірною, то послідовність $y_n(x)$ збігається до розв'язку $y(x)$ рівномірно.

Для ширшого, ніж у просторі $C[a,b]$, класу значень параметру λ розв'язок інтегрального рівняння (3.1) можна шукати також у просторі $L_2[a,b]$. В цьому випадку при виконанні умов

$$\begin{cases} B^2 = \iint\limits_Q |K(x,s)|^2\, dsdx < \infty, \\ \int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty \end{cases}$$

послідовність (3.4) збігається до розв'язку рівняння (3.1), якщо

$$|\lambda| < \frac{1}{B}.$$

Слід зазначити, що послідовність $y_n(x)$ збігається до розв'язку $y(x)$ у просторі $L_2[a,b]$ лише у середньому квадратичному.

Приклад 1. Розв'язати методом послідовних наближень лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $y(x) = \int\limits_0^1 xs^2 y(s)ds + x^3$.

Розв'язання. Ядро $K(x,s) = xs^2$ неперервне в замкнутому квадраті $Q = \{(x,s) : 0 \le x \le 1, 0 \le s \le 1\}$, причому

$$|K(x,s)| = \left|xs^2\right| \le 1 = M.$$

Параметр $\lambda = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $\frac{1}{M(b-a)} = \frac{1}{1(1-0)} = 1$, отже, не виконується умова (3.3), що забезпечує стискання відображення у просторі $C[0,1]$.

З'ясуємо, чи можна використати метод послідовних наближень у $L_2[0,1]$.

Оскільки $B = \left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|xs^2\right|^2 dxds\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{15}}$, $|\lambda|B = \sqrt{15}/15 < 1$, то послідовність (3.4) буде збігатися до розв'язку вихідного рівняння у середньому квадратичному.

Покладемо $y_0(x) = f(x) = x^3$. Тоді, згідно з (3.4),

$$y_1(x) = \int\limits_0^1 xs^2 s^3 ds + x^3 = x\int\limits_0^1 s^5 ds + x^3 = \frac{1}{6}x + x^3,$$

$$y_2(x) = \int\limits_0^1 xs^2\left(\frac{1}{6}s + s^3\right)ds + x^3 = \left(\frac{1}{6\cdot 4} + \frac{1}{6}\right)x + x^3,$$

$$y_3(x) = \int\limits_0^1 xs^2\left(\left(\frac{1}{6\cdot 4} + \frac{1}{6}\right)s + s^3\right)ds + x^3 = \left(\frac{1}{6\cdot 4^2} + \frac{1}{6\cdot 4} + \frac{1}{6}\right)x + x^3,$$

. . . .

$$y_n(x) = \frac{1}{6}\cdot\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)x + x^3.$$

Отже,

$$y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^{n-1}}\right)x+x^3=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-1/4}x+x^3=\frac{4}{18}x+x^3. \blacktriangleright$$

Метод послідовних наближень можна застосовувати також для розв'язування систем лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$y_i(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_a^b K_{ij}(x,s)y_j(s)ds+f_i(x), \quad i=1,2,...n, \tag{3.5}$$

де
$$\iint_Q \left|K_{ij}(x,s)\right|^2 dxds<\infty\ , \quad i,j=1,2,...,n\,, \quad Q=[a,b;\,a,b],$$

$$\int_a^b \left|f_i(x)\right|^2 dx<\infty, \quad i=1,2,...,n.$$

Для цього вибирають початкові наближення, наприклад, $y_i^{(0)}=f_i(x)$, $i=1,2,...,n$, та будують послідовні наближення за формулами

$$y_i^{(k)}(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_a^b K_{ij}(x,s)y_j^{(k-1)}(s)ds+f_i(x), \quad i=1,2,...,n\,, \quad k\in N\,,$$

і знаходять розв'язок системи

$$y_i(x)=\lim_{k\to\infty} y_i^{(k)}(x)\,, \quad i=1,2,...,n.$$

§ 3.3. Метод послідовних наближень для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds+f(x). \tag{3.6}$$

Вважаємо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, ядро $K(x,s)$ неперервне в трикутнику $\Delta=\{(x,s): a\le s\le x\le b\}$, $\left|K(x,s)\right|\le M$.

Визначимо у просторі $C[a,b]$ відображення

$$Ay(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds+f(x). \tag{3.7}$$

Функція $Ay(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$, тобто належить простору $C[a,b]$ неперервних на $[a,b]$ функцій. Це випливає з властивості інтегралів зі змінною верхньою межею при накладених умовах на підінтегральну функцію. Тому A: $C[a,b] \to C[a,b]$.

Якщо A – неперервне відображення, то для доведення існування та єдиності нерухомої точки у повному метричному просторі доведемо, що деякий степінь цього відображення є стискаючим відображенням (2.2).

Розглянемо метрику

$$\left|Ay(x) - Ay_0(x)\right| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x,s)(y(s) - y_0(s))ds \right| \le$$

$$\le |\lambda| M \rho(y, y_0)(x-a) = |\lambda| M(b-a)\rho(y,y_0), \quad x \in [a,b].$$

Зауважимо, що степінь оператора A: $L \xrightarrow{A} L$ визначається рівністю $A^n x = A(A^{n-1}x)$. Відтак,

$$\left|A\bar{y}(x) - A\bar{\bar{y}}(x)\right| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x,s)(\bar{y}(s) - \bar{\bar{y}}(s))ds \right| \le |\lambda| M(x-a)\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}),$$

$$\left|A^2\bar{y}(x) - A^2\bar{\bar{y}}(x)\right| = \left|A(A\bar{y}(x)) - A(A\bar{\bar{y}}(x))\right| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x,s)(A\bar{y}(s) - A\bar{\bar{y}}(s))ds \right| \le$$

$$\le |\lambda| M \int_a^x |\lambda| M(s-a)\rho(\bar{y},\bar{\bar{y}})ds = |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \rho(\bar{y},\bar{\bar{y}}),$$

. . . .

$$\left|A^n\bar{y}(x) - A^n\bar{\bar{y}}(x)\right| \le |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \rho(\bar{y},\bar{\bar{y}}), \quad x \in [a,b].$$

Звідси маємо

$$\rho(A^n\bar{y}, A^n\bar{\bar{y}}) \le \alpha_n \rho(\bar{y},\bar{\bar{y}}),$$

де

$$\alpha_n = |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ за ознакою Даламбера збігається для всіх λ, отже, при кожному λ виконується необхідна ознака $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Тому для кожного λ знайдеться номер n, для якого $\alpha_n < 1$, а це означає, що відображення A^n буде стискаючим. З урахуванням повноти простору $C[a,b]$ можна зробити висновок, що для всіх λ відображення A має єдину нерухому точку. Тоді за принципом стискаючих відображень лінійне інтегральне рівняння

Вольтерри (3.6) з неперервним ядром і неперервним вільним членом для кожного λ має у просторі $C[a,b]$ єдиний розв'язок.

Знайдемо розв'язок інтегрального рівняння Вольтерри другого роду за допомогою ***методу послідовних наближень.***

Послідовні наближення функцій

$$y_0(x),\ \ y_1(x),\ \ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots$$

побудуємо за допомогою співвідношень

$$y_n(x) = \lambda\int\limits_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds + f(x), \quad n \in N\,, \tag{3.8}$$

де в якості початкового наближення $y_0(x)$ довільної неперервної на відрізку $[a,b]$ функції доцільно взяти $y_0(x) = f(x)$.

Розв'язок $y(x)$ рівняння (3.6) знаходимо, здійснивши граничний перехід за формулою $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$. При цьому послідовність $y_n(x)$ збігається до $y(x)$ рівномірно.

Приклад 2. Розв'язати методом послідовних наближень лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x) = x - \int\limits_0^x (x-s)y(s)ds\,.$$

Розв'язання. Покладемо $y_0(x) = 0$. Тоді дістанемо

$$y_1(x) = x\,;$$

$$y_2(x) = x - \int\limits_0^x (x-s)sds = x - \int\limits_0^x (xs - s^2)ds =$$

$$= x - \left(\frac{xs^2}{2} - \frac{s^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = x - \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = x - \frac{x^3}{3!}\,;$$

$$y_3(x) = x - \int\limits_0^x (x-s)\left(s - \frac{s^3}{3!}\right)ds = x - x\int\limits_0^x \left(\left(s - \frac{s^3}{3!}\right) - \left(s^2 - \frac{s^4}{3!}\right)\right)ds =$$

$$= x - x\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4!}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{3!5}\right)\Bigg|_0^1 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,.$$

Доведемо методом математичної індукції, що

$$y_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

При $n = 1$ ця рівність правильна. Припустивши її правильність для всіх $n \le k$, для $n = k+1$ отримуємо

$$y_{k+1}(x) = x - \int_0^x (x-s)y_k(s)ds =$$

$$= x - \int_0^x (x-s)\left(\left(s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + ... + (-1)^{k-2}\frac{s^{2(k-1)-1}}{(2(k-1)-1)!}\right) + (-1)^{k-1}\frac{s^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)ds =$$

$$= x - \int_0^x (x-s)\left(y_{k-1}(s) + (-1)^{k-1}\frac{s^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)ds = y_k(x) - \int_0^x (x-s)\frac{(-1)^{k-1}s^{2k-1}}{(2k-1)!}ds =$$

$$= y_k(x) + (-1)^k\left(x\frac{s^{2k}}{(2k)!}\bigg|_0^x - \frac{s^{2k+1}}{(2k-1)!(2k+1)}\bigg|_0^x\right) = y_k(x) + (-1)^k\frac{2k+1-2k}{(2k+1)!}x^{2k+1} =$$

$$= y_k(x) + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2n+1)!}.$$

Остаточно одержуємо розв’язок

$$y(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...\right) = \sin x.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $y(x) = \sin x$ є розв’язком заданого інтегрального рівняння.▶

Метод послідовних наближень за описаним алгоритмом можна застосовувати і для розв’язування деяких нелінійних інтегральних рівнянь,

наприклад, рівнянь Урисона.

Питання та приклади до самостійної роботи

1. Сформулюйте достатню умову для розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду методом послідовних наближень в просторі $C[a,b]$?
2. Яка достатня умова для розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду методом послідовних наближень в просторі $L_2[a,b]$?
3. Чому лінійні інтегральні рівняння Вольтерри другого роду у просторах $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$ можна розв’язувати методом послідовних наближень для довільного значення параметра λ?

4. У чому полягає метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду? За якими рекурентними формулами знаходять послідовні наближення цього рівняння?
5. У чому полягає метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду? За якими рекурентними формулами знаходять послідовні наближення цього розв'язку?
6. Методом послідовних наближень розв'язати інтегральні рівняння Фредгольма другого роду:

   а) $y(x) = x - \frac{1}{2}\int_0^1 xsy(s)ds$; б) $y(x) = x^2 + \int_0^1 xs^2 y(s)ds$.

   Відповіді: а) $y(x) = \frac{6}{7}x$; б) $y(x) = \frac{4}{15}x + x^2$.
7. Методом послідовних наближень розв'язати інтегральні рівняння Вольтерри другого роду:

   а) $y(x) = x - \int_0^x (x-s)y(s)ds$; б) $y(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-s} y(s)ds$.

   Відповіді: а) $y(x) = \sin x$; б) $y(x) = (2e)^x$.

4. МЕТОД ІТЕРОВАНИХ ЯДЕР

§ 4.1. Степені інтегральних операторів Фредгольма та Вольтерри

Розглянемо у просторі $C[a,b]$ інтегральний оператор Фредгольма

$$Ay(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds. \qquad (4.1)$$

З'ясуємо вигляд його степенів $A^2 y, \ldots, A^n y, \ldots$.

$$A^2 y(x) = A(Ay(x)) = \int_a^b K(x,s)Ay(s)ds = \int_a^b K(x,s)\left(\int_a^b K(s,t)y(t)dt\right)ds =$$

$$= \int_a^b y(t)\left(\int_a^b K(x,s)K(s,t)ds\right)dt.$$

Покладемо $K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s)K(s,t)ds$.

Функцію $K_2(x,s)$ називають ***повторним ядром*** або ***другою ітерацією*** ядра $K(x,s)$ (перша ітерація $K_1(x,s) \equiv K(x,s)$).

Отже, $$A^2y(x)=\int_a^b K_2(x,t)y(t)dt$$

або, змінивши позначення змінної інтегрування, отримаємо

$$A^2y(x)=\int_a^b K_2(x,s)y(s)ds, \quad \text{де}$$

$$K_2(x,s)=\int_a^b K(x,t)K(t,s)dt.$$

У загальному випадку для оператора $A^n y$ можна записати інтегральне подання, яке аналогічне (4.1)

$$A^n y(x)=\int_a^b K_n(x,s)y(s)ds \tag{4.2}$$

де $K_n(x,s)$ – n-та ітерація ядра $K(x,s)$ визначається за формулою

$$K_n(x,s)=\int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt, \quad n=2,3,..., \quad K_1(x,s)=K(x,s).$$

Ядро $K_n(x,s)$ називають ***ітерованим або повторним ядром порядку n.***

Якщо ядро $K(x,s)$, яке в подальшому будемо називати основним, є неперервним у квадраті $Q=[a,b;a,b]$, тоді ядра $K_n(x,s)$ теж будуть неперервним в області Q. Таким чином, n-ний степінь інтегрального оператора Фредгольма теж буде інтегральним оператором Фредгольма.

Розглянемо тепер у просторі $C[a,b]$ інтегральний оператор Вольтерри

$$Ay(x)=\int_a^x K(x,s)y(s)ds, \qquad a\le x\le b \tag{4.3}$$

Визначимо повторне ядро оператора Вольтерри у трикутнику $\Delta=\{(t,s):a\le t\le s\le x\}$:

$$A^2y(x)=A(Ay(x))=\int_a^x K(x,s)ds\int_a^s K(s,t)y(t)dt=$$

$$=\int_a^x y(t)dt\left(\int_t^x K(x,s)K(s,t)ds\right)=\int_a^x K_2(x,t)y(t)dt.$$

Змінивши t на s, отримуємо

$$A^2 y(x) = \int_a^x K_2(x,s) y(s) ds$$

де

$$K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t) K(t,s) dt .$$

У загальному випадку

$$A^n y(x) = \int_a^x K_n(x,s) y(s) ds \qquad (4.4)$$

де

$$K_n(x,s) = \int_s^x K(x,t) K_{n-1}(t,s) dt, \quad n = 2,3,..., \qquad K_1(x,s) = K(x,s).$$

Формули (4.2) і (4.4) залишаються вірними і в просторі $L_2[a,b]$.

§ 4.2. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Розглянемо в просторі $C[a,b]$ інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x) \qquad (4.5)$$

у якому ядро обмежено в квадраті $Q = \{(x,s) : a \le x \le b, a \le s \le b\}$, тобто $|K(x,s)| \le M$, а функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Покладемо

$$Ay(x) = \int_a^b K(x,s) y(s) ds .$$

Запишемо нульове наближення розв'язку рівняння (4.5)

$$y_0(x) = f(x),$$

тоді

$$y_1(x) = \lambda A y_0 + f = \lambda A f + f ,$$

$$y_2(x) = \lambda A y_1 + f = \lambda A(\lambda A f + f) + f = \lambda^2 A^2 f + \lambda A f + f ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i A^i f + f .$$

Послідовність $y_n(x)$ прямує рівномірно до розв'язку $y(x)$ при $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$, отже,

$$y(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^n A^n f+f=\lambda\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{n-1}A^n f+f=$$

$$=\lambda\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{n-1}\left[\int_a^b K_n(x,s)f(s)ds\right]+f\,.$$

Поміняємо місцями інтегрування і підсумування, оскільки ряд збігається рівномірно. Тоді матимемо

$$y(x)=\lambda\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,s)\right]f(s)ds+f(x)\,. \qquad (4.6)$$

Функція $R(x,s,\lambda)$, визначена за допомогою ряду

$$R(x,s,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,s)\ , \qquad (4.7)$$

називається ***резольвентою*** (або ***розв'язувальним ядром***).

Порівнюючи цей вираз з виразом (4.6) для розв'язку інтегрального рівняння (4.5), можна записати

$$y(x)=\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)ds+f(x) \qquad (4.8)$$

Приклад 1. Знайти резольвенту для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x)=\lambda\int_{-1}^{1}x^2s^2y(s)ds+f(x)\,,$$

де ядро $K(x,s)=x^2s^2$, $a=-1, b=1$.

Розв'язання. Знайдемо послідовно ітеровані ядра:

$$K_1(x,s)=x^2s^2\,,$$

$$K_2(x,s)=\int_{-1}^{1}K(x,t)K_1(t,s)dt=\int_{-1}^{1}x^2t^2\cdot t^2s^2dt=$$

$$=x^2s^2\left.\frac{t^5}{5}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{5}x^2s^2;$$

$$K_3(x,s)=\int_{-1}^{1}K(x,t)K_2(t,s)dt=\int_{-1}^{1}x^2t^2\cdot\frac{2}{5}t^2s^2dt=$$

$$=x^2s^2\frac{2}{5}\int_{-1}^{1}t^4ds=x^2s^2\left(\frac{2}{5}\right)^2,$$

Аналогічно знайдемо й наступні ітеровані ядра:

$$K_n(x,s) = x^2 s^2 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

Згідно з формулою (4.7)

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s) = x^2 s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\lambda\right)^{n-1} = x^2 s^2 \frac{1}{1-\frac{2}{5}\lambda} = \frac{5x^2 s^2}{5-2\lambda},$$

де $\left|\frac{2}{5}\lambda\right| < 1$, тобто $|\lambda| < \frac{5}{2}$.

Приклад 2. Розв'язати методом ітерованих ядер рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)ds + x^3. \tag{4.9}$$

Розв'язання: $\lambda = 1, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad K(x,s) = xs^2, \quad f(x) = x^3,$

$$M = \max_{x,s\in[0,1]} \left|xs^2\right| = 1, \quad |\lambda| M(b-a) = 1.$$

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 x^2 s^4 dxds = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 s^4 ds = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 \frac{s^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{15}.$$

Оскільки $|\lambda| B = \frac{\sqrt{15}}{15} < 1$, то розв'язок рівняння (4.9) шукаємо у просторі $L_2[0,1]$.

$$K_1(x,s) = K(x,s) = xs^2,$$

$$K_2(x,s) = \int_0^1 xt^2 \cdot ts^2 dt = \frac{1}{4} xs^2,$$

$$K_3(x,s) = \int_0^1 xt^2 \cdot \frac{1}{4} ts^2 dt = \left(\frac{1}{4}\right)^2 xs^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$K_n(x,s) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} xs^2.$$

Резольвента рівняння:

$$R(x,s,\lambda) = xs^2 + \frac{1}{4}xs^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 xs^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 xs^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} xs^2 + \ldots =$$

$$=\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)xs^2+\ldots=\frac{1}{1-1/4}xs^2=\frac{4}{3}xs^2.$$

За формулою (4.8):

$$y(x)=\int_0^1\frac{4}{3}xs^2\cdot s^2ds+x^3=\frac{4}{3}x\frac{s^5}{5}\bigg|_0^1+x^3=\frac{4}{15}x+x^3.$$

§ 4.3. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

Розглянемо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x)=\int_a^x K(x,s)y(s)ds+f(x). \tag{4.10}$$

Це рівняння можна розглядати як окремий випадок рівнянь Фредгольма з ядром вигляду

$$K(x,s)=\begin{cases}K(x,s), \text{ якщо } s\le x,\\ 0, \text{ якщо } s>x.\end{cases} \tag{4.11}$$

Тому до рівняння (4.10) може бути застосована вся теорія, викладена в § 4.2. Разом з тим, з урахуванням вигляду ядра (4.11), для ітерованих ядер отримаємо такі вирази:

$$K_n(x,s)=\int_s^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt,. \quad n=2,3,\ldots,\quad K_1(x,s)=K(x,s). \tag{4.12}$$

Покажемо, що ряд

$$R(x,s,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,s), \tag{4.13}$$

що визначає резольвенту ядра $K(x,s)$, для кожного значення λ є рівномірно збіжним у трикутнику $\Delta=\{(x,s): a\le s\le x\le b\}$.

Нехай $M=\max\limits_{(x,s)\in\Delta}|K(x,s)|$. Тоді для ядер $K_1(x,s),\ K_2(x,s),\ \ldots,\ K_n(x,s)$ маємо оцінки

$$|K_1(x,s)|=|K(x,s)|\le M,$$

$$|K_2(x,s)|=\left|\int_s^x K(x,t)K_1(t,s)dt\right|\le M^2(x-s),$$

$$\left|K_3(x,s)\right| = \left|\int_s^x K(x,t)K_2(t,s)dt\right| \le \int_s^x (t-s)dt \le M^3 \frac{(x-s)^2}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\left|K_n(x,s)\right| \le M^n \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Члени ряду (4.13) запишемо у вигляді:

$$\left|\lambda^{n-1} K_n(x,s)\right| \le \left|\lambda^{n-1}\right| M^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} = c_n.$$

Оскільки за ознакою Даламбера числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ є збіжним, то за ознакою Вейєрштраса ряд для резольвенти $R(x,s,\lambda)$ при кожному λ збігається рівномірно.

Зауважимо, що у просторі $L_2[a,b]$ для існування резольвенти достатньо вимагати виконання нерівності $|\lambda| B < 1$, де

$$B^2 = \iint_Q \left|K(x,s)\right|^2 dxds.$$

Розв’язок рівняння (4.10) для будь-якої неперервної функції $f(x)$ і за будь-якого значення λ має вигляд:

$$y(x) = \lambda \int_a^x R(x,s,\lambda) f(s) ds + f(x). \qquad (4.14)$$

Розв’язок $y(x)$ є неперервною функцією аргументу x.

Приклад 3. Знайти резольвенту для інтегрального рівняння Вольтерри другого роду, якщо ядро $K(x,s) = xs^2$.

Розв’язання. Послідовно знаходимо

$$K_1(x,s) = xs^2;$$

$$K_2(x,s) = \int_s^x xt^2 \cdot ts^2\, dt = xs^2 \int_s^x t^3\, dt = xs^2 \frac{t^4}{4}\bigg|_s^x = xs^2 \frac{x^4 - s^4}{4};$$

$$K_3(x,s) = \int_s^x xt^2 \cdot ts^2 \frac{t^4 - s^4}{4} dt = xs^2 \int_s^x t^3 \frac{t^4 - s^4}{4} dt =$$

$$= \frac{xs^2}{2} \left(\frac{t^4 - s^4}{4}\right)^2 \bigg|_s^x = \frac{xs^2}{2} \left(\frac{x^4 - s^4}{4}\right)^2;$$

$$K_4(x,s)=\int_s^x xt^2\cdot\frac{ts^2}{2}\left(\frac{t^4-s^4}{4}\right)^2dt=\frac{xs^2}{2}\int_s^x t^3\left(\frac{t^4-s^4}{4}\right)^2dt=$$

$$=\frac{xs^2}{2\cdot 3}\left(\frac{t^4-s^4}{4}\right)^3\Bigg|_s^x=\frac{xs^2}{2\cdot 3}\left(\frac{x^4-s^4}{4}\right)^3;$$

. . . .

$$K_n(x,s)=\frac{xs^2}{(n-1)!}\left(\frac{x^4-s^4}{4}\right)^{n-1}.$$

Запишемо резольвенту:

$$R(x,s,\lambda)=xs^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{x^4-s^4}{4}\right)^{n-1}=xs^2e^{\lambda(x^4-s^4)/4}.$$

Приклад 4. Розв’язати методом ітерованих ядер рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x)=\int_0^x e^{x-s}y(s)ds+\sin x.$$

Розв’язання. В цьому випадку $\lambda=1$, $K(x,s)=e^{x-s}$. Тоді з (4.12) маємо

$$K_1(x,s)=K(x,s)=e^{x-s},$$

$$K_2(x,s)=\int_s^x e^{x-t}e^{t-s}dt=\int_s^x e^{x-s}dt=e^{x-s}t\Big|_s^x=(x-s)e^{x-s};$$

$$K_3(x,s)=\int_s^x e^{x-t}(t-s)e^{t-s}dt=\int_s^x e^{x-s}(t-s)dt=e^{x-s}\frac{(t-s)^2}{2}\Bigg|_s^x=\frac{(x-s)^2}{2}e^{x-s};$$

. . . .

$$K_n(x,s)=\int_s^x e^{x-t}\frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!}e^{t-s}dt=e^{x-s}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\Bigg|_s^x=\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}e^{x-s}.$$

Резольвента рівняння:

$$R(x,s,\lambda)=R(x,s,1)=e^{x-s}+e^{x-s}\frac{x-s}{1!}+e^{x-s}\frac{(x-s)^2}{2!}+\ldots+e^{x-s}\frac{(x-s)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=e^{x-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-s)^n}{n!}=e^{2(x-s)}.$$

Розв’язок інтегрального рівняння за формулою (4.14) має вигляд:

$$y(x)=\sin x+\int\limits_0^x e^{2(x-s)}\sin s ds\,.$$

Обчислимо інтеграл

$$I=\int\limits_0^x e^{2(x-s)}\sin s ds=\left\{\begin{array}{l|l} u=e^{2(x-s)} & du=-2e^{2(x-s)}ds \\ dv=\sin s ds & v=-\cos s\end{array}\right\}=$$

$$=-e^{2(x-s)}\cos s\Big|_0^x-2\int\limits_0^x e^{2(x-s)}\cos s ds=-\cos x+e^{2x}-2\int\limits_0^x e^{2(x-s)}\cos s ds=$$

$$=\left\{\begin{array}{l|l} u=e^{2(x-s)} & du=-2e^{2(x-s)}ds \\ dv=\cos s ds & v=\sin s\end{array}\right\}=e^{2x}-\cos x-2\left(e^{2(x-s)}\sin s\Big|_0^x+\right.$$

$$\left.+2\int\limits_0^x e^{2(x-s)}\sin s ds\right)=e^{2x}-\cos x-2\sin x-4\int\limits_0^x e^{2(x-s)}\sin s ds\,;$$

$$5I=e^{2x}-\cos x-2\sin x\,;\quad I=\frac{1}{5}(e^{2x}-\cos x-2\sin x)\,.$$

Тоді розв’язок інтегрального рівняння

$$y(x)=\sin x+\frac{1}{5}(e^{2x}-\cos x-2\sin x)=\frac{1}{5}(e^{2x}-\cos x+3\sin x)\,.$$

Питання та приклади до самостійної роботи

1. Який оператор називається оператором Фредгольма (Вольтерри)?
2. За якими формулами будуються ітеровані ядра для рівняння Фредгольма другого роду?
3. Який вигляд має n-тий степінь інтегрального оператора Фредгольма (Вольтерри)?
4. Що називається резольвентою ядра інтегрального рівняння Фредгольма другого роду?
5. За допомогою ітерованих ядер знайти резольвенту і розв’язок інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду:

а) $y(x)=\int\limits_{-1}^{0}(1+x)(1-s)y(s)ds+\pi\cos\pi x\,;$

б) $y(x)=2\int\limits_{-1}^{1}x^2s^2y(s)ds+e^x\,.$

Відповіді: а) $R(x,s,\lambda)=\dfrac{3(1-x)(1-s)}{3-2\lambda};|\lambda|<\dfrac{3}{2};\, y(x)=-\dfrac{6}{\pi}(1+x)+\pi\cos\pi x$;

б) $R(x,s,\lambda)=\dfrac{5x^2s^2}{5-2\lambda};|\lambda|<\dfrac{5}{2};\, y(x)=10\left(e-\dfrac{5}{e}\right)x^2+e^x$.

6. Як за допомогою резольвенти можна записати розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду?
7. Що називається резольвентою інтегрального рівняння Вольтерри другого роду?
8. Як за допомогою резольвенти можна записати розв'язок інтегрального рівняння Вольтерри другого роду?
9. За допомогою ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду:

а) $y(x)=\int\limits_{-1}^{0}(1+x)(1-s)y(s)ds+\pi\cos\pi x$;

б) $y(x)=2\int\limits_{-1}^{1}x^2s^2y(s)ds+e^x$.

Відповіді: а) $R(x,s,\lambda)=\dfrac{3(1-x)(1-s)}{3-2\lambda};|\lambda|<\dfrac{3}{2};\, y(x)=-\dfrac{6}{\pi}(1+x)+\pi\cos\pi x$;

б) $R(x,s,\lambda)=\dfrac{5x^2s^2}{5-2\lambda};|\lambda|<\dfrac{5}{2};\, y(x)=10\left(e-\dfrac{5}{e}\right)x^2+e^x$.

10. За допомогою ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду:

а) $y(x)=2\int\limits_{0}^{x}e^{x^2-s^2}y(s)ds+e^{x^2+2x}$; б) $y(x)=\int\limits_{0}^{x}e^{s-x}y(s)ds+xe^{\frac{x^2}{2}}$.

Відповіді: а) $R(x,s,\lambda)=e^{x^2-s^2+\lambda(x-s)};\, y(x)=e^{2x^2+2x}(1+2x)$;

б) $R(x,s,\lambda)=e^{(\lambda-1)(x-s)};\, y(x)=e^{\frac{x^2}{2}}(x+1)-1$.

5. ТЕОРЕМИ ФРЕДГОЛЬМА

§ 5.1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром. Перша теорема Фредгольма

Розглянемо лінійне неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x)=\lambda\int\limits_{a}^{b}K(x,s)y(s)ds+f(x) \tag{5.1}$$

з виродженим ядром

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(s)\,, \tag{5.2}$$

де функції $a_i(x)$, так як і функції $b_i(s)$ $(i=1,2,...,n)$ – лінійно незалежні між собою і неперервні на відрізку $[a,b]$ зміни аргументів. Таким чином, ядро $K(x,s)$ неперервне в квадраті $Q=\{(x,s):a\le x\le b,\, a\le s\le b\}$.

Підставивши в інтегральне рівняння (5.1) замість ядра $K(x,s)$ його вираз (5.2), отримаємо

$$y(x)=\lambda\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(s)\right)y(s)ds+f(x)\,. \tag{5.3}$$

Перепишемо рівняння (5.3) у вигляді

$$y(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int_a^b b_i(s)y(s)ds+f(x)\,. \tag{5.4}$$

Покажемо, що у випадку виродженого ядра для дослідження рівняння достатньо засобів лінійної алгебри.

Позначимо

$$C_i=\int_a^b b_i(s)y(s)ds,\quad i=\overline{1,n}\,.$$

Тоді рівняння (5.4) набуває вигляду

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}C_ia_i(x)\,. \tag{5.5}$$

З рівності (5.5) видно, що розв'язок інтегрального рівняння зводиться до визначення сталих C_i. Підставимо (5.5) у рівняння (5.4):

$$f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}C_ia_i(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{j=1}^{n}C_ja_j(s)\right]ds+f(x)\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left(C_i-\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{j=1}^{n}C_ja_j(s)\right]ds\right)=0\,.$$

Оскільки функції $a_i(x)$ лінійно незалежні, то одержимо систему рівнянь

$$C_i - \int_a^b b_i(s)\left[f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(s) \right] ds = 0, \quad i = 1,2,...n,$$

яку запишемо у вигляді

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j \int_a^b a_j(s) b_i(s) ds = \int_a^b b_i(s) f(s) ds, \quad i = 1,2,...n. \tag{5.6}$$

Введемо позначення

$$\alpha_{ij} = \int_a^b a_j(s) b_i(s) ds,$$

$$f_i = \int_a^b b_i(s) f(s) ds \;,$$

тоді (5.6) набуває вигляду:

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_{ij} = f_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Отже, систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь, яку задовольняють коефіцієнти C_i, запишемо так:

$$\begin{cases} (1-\lambda\alpha_{11})C_1 - \lambda\alpha_{12}C_2 - ... - \lambda\alpha_{1n}C_n = f_1, \\ -\lambda\alpha_{21}C_1 + (1-\lambda\alpha_{22})C_2 - ... - \lambda\alpha_{2n}C_n = f_2, \\ .... \\ -\lambda\alpha_{n1}C_1 - \lambda\alpha_{n2}C_2 - ... + (1-\lambda\alpha_{nn})C_n = f_n. \end{cases} \tag{5.7}$$

Якщо ця система несумісна, то інтегральне рівняння (5.4) також буде нерозв'язним. Якщо розв'язок системи існує, то підставивши значення знайдених коефіцієнтів C_i в формулу (5.5), отримаємо розв'язок інтегрального рівняння (5.4).

Визначник системи (5.7) дорівнює

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda\alpha_{11}) & -\lambda\alpha_{12} & ... & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & (1-\lambda)\alpha_{22} & ... & -\lambda\alpha_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{..} \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & ... & (1-\lambda\alpha_{nn}) \end{vmatrix}. \tag{5.8}$$

Визначник $D(\lambda)$, який є многочленом відносно λ степеня не вище n, тотожно відмінний від нуля (оскільки дорівнює одиниці при $\lambda = 0$). Тоді цей многочлен має не більше ніж n різних коренів.

Визначник $D(\lambda)$ називають ***визначником Фредгольма*** для рівняння (5.3), а його нулі, тобто корені рівняння $D(\lambda)=0$, називають ***характеристичними числами*** ядра $K(x,s)$ (або рівняння (5.3)).

Розглянемо окремі випадки.

Випадок 1. Нехай $D(\lambda)\neq 0$, тобто λ не є характеристичним числом. Тоді система (5.7) має єдиний розв'язок для довільних правих частин f_i, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера

$$C_i=\frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)}.$$

Тут $D_i(\lambda)$ – визначник, отриманий з визначника $D(\lambda)$ заміною i-го стовпця на стовпець вільних членів f_i ($i=1,2,...,n$).

Теорема 1 (перша теорема Фредгольма). *Якщо λ не є характеристичним числом, то лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром (5.4) має єдиний розв'язок, що визначається формулою (5.5) для довільної інтегрованої з квадратом на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$.*

У разі $D(\lambda)\neq 0$ рівнянню (5.1) відповідає однорідне рівняння

$$y(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int_a^b b_i(s)y(s)ds, \tag{5.9}$$

яке має тільки тривіальний розв'язок $y(x)\equiv 0$. Дійсно, якщо $f(x)\equiv 0$ на відрізку $[a,b]$, то всі f_i ($i=1,2,...,n$) дорівнюють нулю. Тоді (5.7) буде системою однорідних лінійних рівнянь, визначник якої відмінний від нуля. Така система має тільки нульовий розв'язок $C_1=C_2=...=C_n=0$, що дозволяє іноді формулювати теорему 1 наступним чином:

Для того, щоб лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром (5.4) мало єдиний розв'язок для довільної інтегрованої з квадратом на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб відповідне однорідне рівняння мало тільки тривіальний розв'язок $y(x)\equiv 0$.

Приклад. Знайти розв'язок інтегрального рівняння $y(x)=\int_0^1 xs^2y(s)ds+x^3$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$y(x)=x\int_0^1 s^2y(s)ds+x^3. \tag{5.10}$$

Введемо позначення

$$C = \int_0^1 s^2 y(s) ds, \tag{5.11}$$

де C – невідома стала. Тоді рівняння (5.10) набуває вигляду

$$y(x) = Cx + x^3. \tag{5.12}$$

Підставивши вираз (5.12) в рівняння (5.10), отримуємо

$$Cx + x^3 = x\int_0^1 s^2 (Cs + s^3) ds + x^3.$$

Після спрощень знаходимо:

$$C = \int_0^1 s^2 (Cs + s^3) ds = C\int_0^1 s^3 ds + \int_0^1 s^5 ds = C\frac{s^4}{4}\Bigg|_0^1 + \frac{s^6}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{C}{4} + \frac{1}{6},\ C = \frac{C}{4} + \frac{1}{6},\ C = \frac{4}{18}.$$

Тоді розв’язок інтегрального рівняння (5.10):

§ 5.2. Друга й третя теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з виродженим ядром

Випадок 2. Нехай $D(\lambda) = 0$, тобто λ є характеристичним числом ядра $K(x,s)$.

Оскільки визначник системи (5.7) дорівнює нулю, то відповідна однорідна система має деяке число p $(1 \le p \le n)$ лінійно незалежних нетривіальних розв’язків $C_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$.

Тоді функції

$$y_k(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i^{(k)} a_i(x), \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

а також їхні довільні комбінації будуть нетривіальними розв’язками однорідного рівняння (5.9). Нетривіальні розв’язки однорідного рівняння називаються ***власними*** або ***фундаментальними функціями*** цього рівняння (або ядра $K(x,s)$), які відповідають даному характеристичному числу. Кількість лінійно незалежних власних функцій, що відповідає даному характеристичному числу, називають його ***рангом*** або ***кратністю*** .

Множина всіх власних функцій, які відповідають даному характеристичному числу, утворює ***лінійний простір***, вимірність якого дорівнює p . Його базисом є сукупність функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$.

Загальним розв’язком лінійного однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром, що відповідає даному характеристичному числу, називають функцію

$$y(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k(x),$$

де α_k – довільні сталі.

Зауваження. Власні функції визначаються з точністю до сталого множника. Це означає, що коли $y(x)$ – власна функція, яка належить певному характеристичному числу λ, то і $Cy(x)$, де C – довільна стала, теж буде власною функцією, яка належить тому самому характеристичному числу λ.

Приклад 1. Знайти характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння $y(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin x \sin s \; y(s) ds = 0$.

Розв'язання. Маємо

$$y(x) = \lambda \sin x \int\limits_0^{2\pi} \sin s \; y(s) ds .$$

Введемо позначення

$$C = \int\limits_0^{2\pi} \sin s \; y(s) ds, \quad C - const . \tag{5.13}$$

Тоді

$$y(x) = \lambda C \sin x . \tag{5.14}$$

Підставивши (5.14) в (5.13), отримуємо

$$C = \int\limits_0^{2\pi} \sin s \; \lambda C \sin s ds .$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 s ds = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 2s) ds = \frac{1}{2} (s - \frac{1}{2} \sin 2s) \Big|_0^{2\pi} = \pi ,$$

то маємо

$$C = \lambda C \pi , \quad C(1 - \lambda \pi) = 0 .$$

1) $C = 0$ – тривіальний розв'язок;

2) $1 - \lambda \pi = 0$; $\lambda = \frac{1}{\pi}$ – характеристичне число інтегрального оператора A.

Знайдемо власні функції, що відповідають характеристичному числу

$$y(x) = C \frac{1}{\pi} \sin x .$$

Для $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$ коефіцієнт C можна обрати довільно. Поклавши $\dfrac{C}{\pi} = C_1$, визначимо власні функції

$$y(x) = C_1 \sin x\,,\ \text{де}\ C_1 - \text{довільна стала.}$$

Приклад 2. Знайти характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння $y(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(5xs^3 + 4x^2 s + 3xs\right) y(s)ds = 0$.

Розв'язання. $$y(x) = \lambda \left[5x \int\limits_{-1}^{1} s^3\, y(s)ds + 4x^2 \int\limits_{-1}^{1} s\, y(s)ds + 3x \int\limits_{-1}^{1} s\, y(s)ds \right].$$

Введемо позначення

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} s^3 y(s)ds\,,\ C_2 = \int\limits_{-1}^{1} s \cdot y(s)ds\,. \tag{5.15}$$

Тоді

$$y(x) = 5\lambda x C_1 + \lambda C_2 (4x^2 + 3x)\,. \tag{5.16}$$

Підставимо (5.16) в (5.15) і отримаємо лінійну систему однорідних рівнянь. Знайдемо перше рівняння системи

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} s^3 [5\lambda s C_1 + 4\lambda C_2 s^2 + 3\lambda C_2 s]\, ds =$$

$$= 5\lambda C_1 \int\limits_{-1}^{1} s^4 ds + 4\lambda C_2 \int\limits_{-1}^{1} s^5 ds + 3\lambda C_2 \int\limits_{-1}^{1} s^4\, ds =$$

$$= 5\lambda C_1 \frac{s^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} + 4\lambda C_2 \frac{s^6}{6}\Bigg|_{-1}^{1} + 3\lambda C_2 \frac{s^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = 2\lambda C_1 + \frac{6}{5}\lambda C_2\,.$$

Маємо:

$$C_1 (1 - 2\lambda) - \frac{6}{5}\lambda C_2 = 0\,.$$

Знайдемо друге рівняння системи:

$$C_2 = \int\limits_{-1}^{1} s [5\lambda s C_1 + 4\lambda C_2 s^2 + 3\lambda C_2 s]\, ds =$$

$$= 5\lambda C_1 \int\limits_{-1}^{1} s^2 ds + 4\lambda C_2 \int\limits_{-1}^{1} s^3 ds + 3\lambda C_2 \int\limits_{-1}^{1} s^2\, ds =$$

$$=5\lambda C_1\frac{s^3}{3}\Big|_{-1}^{1}+4\lambda C_2\frac{s^4}{4}\Big|_{-1}^{1}+3\lambda C_2\frac{s^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{10}{3}\lambda C_1+2\lambda C_2.$$

Отже, друге рівняння: $-\frac{10}{3}\lambda C_1+(1-2\lambda)C_2=0$.

Система рівнянь для визначення коефіцієнтів C_1 і C_2 матиме вигляд:

$$\begin{cases} C_1(1-2\lambda)-\frac{6}{5}\lambda C_2=0, \\ -\frac{10}{3}\lambda C_1+(1-2\lambda)C_2=0. \end{cases}$$

Визначник системи:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-2\lambda & -\frac{6}{5}\lambda \\ -\frac{10}{3}\lambda & 1-2\lambda \end{vmatrix}=4\lambda^2-4\lambda+1-4\lambda^2=1-4\lambda=0\cdot$$

Відтак, характеристичне число $\lambda=\frac{1}{4}$. Підставивши λ в систему, отримаємо $C_2=\frac{5}{3}C_1$. Тоді

$$y(x)=5\lambda xC_1+\lambda C_2(4x^2+3x)=\lambda\left[5C_1x+(4x^2+3x)\frac{5}{3}C_1\right]=$$

$$=C_1\lambda\left[5x+\frac{20}{3}x^2+5x\right]=C_1\lambda(10x+\frac{20}{3}x^2)=10C_1\lambda(x+\frac{2}{3}x^2).$$

Поклавши $10C_1\lambda=C$, отримаємо множину власних функцій $y(x)=C\left(x+\frac{2}{3}x^2\right)$, де C – довільна стала.

Зауваження. Інтегральне рівняння може не мати характеристичних чисел і власних функцій.

Приклад 3. Знайти характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння $y(x)-\lambda\int_0^1\left(4x^2-3x\right)sy(s)ds=0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$y(x)=\lambda(4x^2-3x)\int_0^1 sy(s)ds.$$

Покладемо

$$C = \int_0^1 sy(s)ds \ , \qquad (5.17)$$

тоді матимемо

$$y(x) = \lambda(4x^2 - 3x)C \, . \qquad (5.18)$$

Підставивши (5.18) у (5.17), отримаємо

$$C = C\lambda \int_0^1 s(4s^2 - 3s)ds \, ,$$

або

$$C - C\lambda \int_0^1 s(4s^2 - 3s)ds = 0 \, . \qquad (5.19)$$

Оскільки при будь-якому λ інтеграл $\int_0^1 s(4s^2 - 3s)ds = 0$, то рівняння (5.19) має єдиний розв’язок $C = 0$.

Відтак, єдиним розв’язком однорідного інтегрального рівняння є нульовий розв’язок $y(x) = 0$, а це означає, що воно не має характеристичних чисел і власних функцій.

Приклад 4. Розв’зати однорідне інтегральне рівняння

$$y(x) = \lambda \int_0^1 xs^2 y(s)ds \, .$$

Розв’язання. Позначимо

$$C = \int_0^1 s^2 y(s)ds \, .$$

Розв’язок шукаємо у вигляді $y(x) = \lambda Cx$. Тоді

$$C = \int_0^1 s^2 \lambda Csds = \lambda C \frac{s^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{\lambda C}{4} \, ,$$

$$C - \frac{C\lambda}{4} = 0 \, , \qquad C(1 - \frac{\lambda}{4}) = 0 \, ,$$

$$C \neq 0, \quad 1 - \frac{\lambda}{4} = 0, \quad \lambda = 4 \ .$$

Для $\lambda = 4$ коефіцієнт C можна обрати довільно. Вибираючи $C = \frac{1}{4}$, одержимо власну функцію $y(x) = x$, а для $\lambda \neq 4$ єдиним розв’язком є $y(x) = 0$.

Тоді розв'язок вихідного однорідного інтегрального рівняння запишеться:

$$y(x)=\begin{cases} Cx, \text{ якщо } \lambda=4, \\ 0, \text{ якщо } \lambda\neq 4. \end{cases}$$

Приклад 5. Розв'зати однорідне інтегральне рівняння

$$y(x)=2\int_0^{\pi/4}\frac{y(s)}{1+\cos 2s}ds\,.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи буде число 2 характеристичним числом. Розглянемо рівняння

$$y(x)=\lambda\int_0^{\pi/4}\frac{y(s)}{1+\cos 2s}ds\,.$$

Оскільки інтеграл залежить тільки від змінної s, введемо сталу

$$C=\int_0^{\pi/4}\frac{y(s)}{1+\cos 2s}ds\,. \qquad (5.20)$$

Тоді розв'язок рівняння

$$y(x)=\lambda C\,. \qquad (5.21)$$

Підставимо (5.21) в (5.20):

$$C=\lambda C\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\cos 2s}ds\,.$$

Обчислимо останній інтеграл $\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\cos 2s}ds=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sin^2 s}ds=\frac{1}{2}\text{tg}s\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}$.

Рівняння для визначення характеристичного числа матиме вигляд:

$$C=\frac{\lambda C}{2}, \quad C\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)=0, \quad \lambda=2\,.$$

Тобто єдиним характеристичним числом є $\lambda=2$. Для цього значення λ коефіцієнт C можна вибрати довільно. Вибираючи $C=0,5$, одержуємо власну функцію $y_{в.ф.}=2C=1$.

Розв'язок вихідного однорідного інтегрального рівняння:

$$y(x)=\begin{cases} Cy_{в.ф.}=C, \text{ якщо } \lambda=2, \\ 0, \text{ якщо } \lambda\neq 2. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

Ядро $K^*(x,s)$, отримане з ядра $K(x,s)$ шляхом заміни x на s і навпаки, називають ***спряженим*** до ядра $K(x,s)$:

$$K^*(x,s) = K(s,x).$$

Рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K^*(x,s)\varphi(s)ds + g(x)$$

називається ***спряженим*** до рівняння (5.1).

Спряженим до інтегрального рівняння з виродженим ядром (5.3) є рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(x)\varphi(s)ds + g(x).$$

Розглянемо спряжене однорідне інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(x)\varphi(s)ds \tag{5.22}$$

Надавши рівнянню (5.22) вигляду

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n b_i(x) \int_a^b a_i(s)\varphi(s)ds, \tag{5.23}$$

введемо позначення

$$C_i^* = \int_a^b a_i(s)\varphi(s)ds, \qquad i = 1,2,...,n$$

$$\alpha_{ij}^* = \int_a^b b_j(s) a_i(s) ds = \alpha_{ji}, \qquad i,j = 1,2,...,n.$$

Тоді для визначення чисел C_i^* отримуємо однорідну систему лінійних рівнянь

$$C_i^* - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} C_j^* = 0, \qquad i = 1,2,...,n.$$

Матриця цієї системи є транспонованою до матриці системи рівнянь (5.7). Її визначник $D^*(\lambda) = D(\lambda) = 0$, а сама система для такого значення λ також має p лінійно незалежних функцій $C_i^{*(k)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, p$, яким відповідають p лінійно незалежних розв'язків

$$\varphi_k(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C *_i^{(k)} b_i(x), \quad k = 1,2,...,p$$

спряженого однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром. Таким чином, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 2 (друга теорема Фредгольма). *Якщо* λ *– характеристичне число ядра* $K(x,s)$, *то лінійне однорідне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром (5.3) і спряжене до нього однорідне рівняння (5.23) мають однакову кількість лінійно незалежних власних функцій.*

Наприклад, для рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 x^2 s\varphi(s)ds, \tag{5.24}$$

спряженого до рівняння $y(x)=\lambda\int_0^1 xs^2 y(s)ds$ (див. приклад 4, §5.2), характеристичному числу $\lambda=4$ відповідає власна функція $\varphi(x)=x^2$.

Дійсно, позначимо в (5.24)

$$C=\int_0^1 s\varphi(s)ds.$$

Тоді

$$\varphi(x)=\lambda x^2 C.$$

Підставивши $\varphi(x)$ в (5.24), отримаємо:

$$C=\lambda C\int_0^1 s^3 ds=\lambda C\left.\frac{s^4}{4}\right|_0^1=\frac{\lambda C}{4},$$

$$C-\frac{\lambda C}{4}=0, \quad C\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)=0,$$

$$C\neq 0, \quad 1-\frac{\lambda}{4}=0.$$

Маємо одне характеристичне значення $\lambda=4$. Оскільки C – довільна стала, то можна надати C значення $\frac{1}{4}$. Тоді власна функція $\varphi(x)=x^2$. ▶

Випадок 3. Розглянемо неоднорідне інтегральне рівняння з виродженим ядром (5.3), коли λ є характеристичним числом. Якщо визначати розв'язок цього рівняння у вигляді $y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}C_i a_i(x)$, то при знаходженні сталих C_i отримуємо неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (5.7), визначник якої дорівнює нулю. Необхідною і достатньою умовою сумісності системи є ортогональність стовпця вільних членів до всіх розв'язків спряженої однорідної системи, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{*(k)} f_i = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p \tag{5.25}$$

або, оскільки $f_i = \int_a^b b_i(s) f(s) ds$, то

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{*(k)} \int_a^b b_i(s) f(s) = 0. \tag{5.26}$$

Помноживши обидві частини (5.26) на λ, маємо:

$$\int_a^b \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i^{*(k)} b_i(s) f(s) ds = 0,$$

тоді

$$\int_a^b \varphi_k(s) f(s) ds = 0, \quad k = \overline{1,p}.$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 3 (третя теорема Фредгольма). *Якщо λ є характеристичним числом, то неоднорідне лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром (5.3) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли його вільний член $f(x)$ ортогональний до всіх розв'язків відповідного спряженого однорідного рівняння (5.23)* .

Відтак, якщо λ – характеристичне число, то питання щодо існування розв'язку неоднорідного інтегрального рівняння (5.3) зводиться до перевірки p умов

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{5.27}$$

Якщо ці умови виконуються, то інтегральне рівняння (5.3) має безліч розв'язків, які обчислюються за формулою

$$y(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k(x) + \overline{y},$$

де перший доданок – загальний розв'язок однорідного рівняння (5.9), а другий – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.3).

Слід зауважити, що умови (5.27) будуть виконані, якщо

$$\int_a^b f(s)b_i(s)ds = 0, \quad i = 1,2,...,n.$$

Внаслідок теорем 1 – 3 маємо:

Теорема 4 (теорема про альтернативу). *Якщо лінійне однорідне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має лише тривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння завжди має єдиний розв'язок. Якщо лінійне однорідне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має нетривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння залежно від вільного члена або не має розв'язку, або має нескінченну множину розв'язків.*

Приклад 6. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) - \lambda\int_0^1 (2xs - 4x^2)y(s)ds = 1 - 2x.$$

Знайдемо характеристичні числа:

$$y(x) = 2x\lambda\int_0^1 sy(s)ds - 4x^2\lambda\int_0^1 y(s)ds,$$

Введемо позначення

$$C_1 = \int_0^1 sy(s)ds, \quad C_2 = \int_0^1 y(s)ds.$$

Тоді

$$y(x) = 2x\lambda C_1 - 4x^2\lambda C_2.$$

Підставимо $y(x)$ в C_1 і C_2:

$$C_1 = 2\lambda C_1\int_0^1 s^2 ds - 4\lambda C_2\int_0^1 s^3 ds = \frac{2}{3}\lambda C_1 - \frac{4}{4}\lambda C_2 = \frac{2}{3}\lambda C_1 - \lambda C_2.$$

Перше рівняння системи: $C_1(1 - \frac{2}{3}\lambda) + \lambda C_2 = 0$.

$$C_2 = 2\lambda C_1\int_0^1 sds - 4\lambda C_2\int_0^1 s^2 ds = \lambda C_1 - \frac{4}{3}\lambda C_2.$$

Друге рівняння системи: $-\lambda C_1 + C_2\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) = 0$.

Система рівнянь

$$\begin{cases} C_1(1-\frac{2}{3}\lambda)+\lambda C_2=0, \\ -\lambda C_1+C_2\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right)=0 \end{cases}$$

має визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-\frac{2}{3}\lambda & \lambda \\ -\lambda & 1+\frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix}=\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right)+\lambda^2=1+\frac{4}{3}\lambda-\frac{2}{3}\lambda-\frac{8}{9}\lambda^2+\lambda^2=$$

$$=\frac{1}{9}(\lambda^2+6\lambda+9)=\frac{1}{9}(\lambda+3)^2=0,$$ характеристичні числа $\lambda_{1,2}=-3$.

Визначимо сталі C_1 і C_2. Скористаємося першим рівнянням системи:

$$C_1\left(1-\frac{2}{3}(-3)\right)-3C_2=0,\ \ 3C_1-3C_2=0,\ \ C_1=C_2.$$

Тоді $y(x)=2x(-3)C_1-4x^2(-3)C_1=-6C_1(x-2x^2)$, тобто власна функція

$$y(x)=x-2x^2.$$

Побудуємо розв'язок неоднорідного рівняння.

1) Розглянемо випадок $\lambda\neq-3$.

$$y(x)=\lambda\int_0^1(2xs-4x^2)y(s)ds+1-2x,$$

$$y(x)=2\lambda x\int_0^1 sy(s)ds-4\lambda x^2\int_0^1 y(s)ds+1-2x.$$

Введемо заміни

$$C_1=\int_0^1 sy(s)ds,\quad C_2=\int_0^1 y(s)ds.$$

Тоді вихідне рівняння матиме вигляд:

$$y(x)=2x\lambda C_1-4x^2\lambda C_2+1-2x.$$

Підставимо $y(x)$ в C_1 і C_2 .

$$C_1=2\lambda C_1\int_0^1 s^2ds-4\lambda C_2\int_0^1 s^3ds+\int_0^1(s-2s^2)ds=\frac{2}{3}\lambda C_1-\lambda C_2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=$$

$=\frac{2}{3}\lambda C_1-\lambda C_2-\frac{1}{6}$, тобто $C_1(1-\frac{2}{3}\lambda)+\lambda C_2=-\frac{1}{6}$ – перше рівняння системи.

$$C_2 = 2\lambda C_1\int_0^1 sds - 4\lambda C_2\int_0^1 s^2ds + \int_0^1 (1-2s)ds = \lambda C_1 - \frac{4}{3}\lambda C_2 + (1-1) = \lambda C_1 - \frac{4}{3}\lambda C_2 .$$

Отже, $-\lambda C_1 + \left(1+\frac{4}{3}\lambda\right)C_1 = 0$ – друге рівняння системи.

Розв’яжемо отриману систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} C_1(1-\frac{2}{3}\lambda) + \lambda C_2 = -\frac{1}{6}, \\ -\lambda C_1 + C_2\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right) = 0. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1-\frac{2}{3}\lambda & \lambda \\ -\lambda & 1+\frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(\lambda+3)^2 ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{6} & \lambda \\ 0 & 1+\frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} - \frac{4}{18}\lambda = -\frac{1}{6}\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right), \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-\frac{2}{3}\lambda & -\frac{1}{6} \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\lambda .$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{9}} \cdot \frac{1+\frac{4}{3}\lambda}{(\lambda+3)^2} = -\frac{3+4\lambda}{2(\lambda+3)^2}; \qquad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-\frac{1}{6}\lambda}{\frac{1}{9}(\lambda+3)^2} = -\frac{3}{2}\frac{\lambda}{(\lambda+3)^2} .$$

Розв’язок рівняння набуде вигляду:

$$y(x) = 2x\lambda C_1 - 4x^2\lambda C_2 + 1 - 2x = -\frac{3+4\lambda}{(\lambda+3)^2}\lambda x + \frac{9\lambda^2x^2}{(\lambda+3)^2} + 1 - 2x =$$

$$= \frac{\lambda x[-3-4\lambda+9\lambda x] - 2x(\lambda+3)^2 + (\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2} =$$

$$= \frac{-3\lambda x - 4\lambda^2x + 9\lambda^2x^2 - 2x\lambda^2 - 12\lambda x - 18x + (\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2} =$$

$$= \frac{3x(3\lambda^2x - 5\lambda - 6\lambda^2 - 6) + (\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2} = Y(x,\lambda)$$ – розв’язок при $\lambda \neq -3$.

2) Розглянемо випадок $\lambda = -3$. Перевіримо виконання третьої теореми Фредгольма

$$\int_a^b f(s)b_i(s)ds = 0, \quad i = 1,2,...,n .$$

Функції $b_i(s)$ обираються як частини ядра, що містять змінну s. В нашому випадку ядро $K(x,s) = 2xs - 4x^2$. Тоді функції $a(x)$ і $b(s)$ можна обрати в такий спосіб:

$$a_1(x) = x,\ b_1(s) = 2s,\ a_2(x) = -4x^2,\ b_2(s) = 1.$$

Обчислимо інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 (1-2s)\cdot 1 ds = \left(s - 2\frac{s^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = 0$;

б) $\int\limits_0^1 (1-2s)2sds = 2\int\limits_0^1 (s-2s^2)ds = \left(2\cdot\frac{s^2}{2} - 4\frac{s^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \neq 0$ – умова існування розв'язку для рівняння з виродженим ядром не виконується, тобто при $\lambda = -3$ розв'язок інтегрального рівняння не існує.

Відповідь: $y(x) = \begin{cases} Y(x) \text{ при } \lambda \neq -3, \\ \text{розв'язок не існує при } \lambda = -3. \end{cases}$

Питання та приклади до самостійної роботи

1. Дайте визначення виродженого ядра.

2. Сформулюйте умови, які мають задовольняти функції $a_i(x)$ і $b_i(s)$, $i = 1,2,...,n$. виродженого ядра $K(x,s) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(s)$.

3. В якому вигляді шукають розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром?

4. Опишіть алгоритм визначення розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром

5. Який визначник називається визначником Фредгольма для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром?

6. Що називається характеристичними числами ядра $K(x,s)$?

7. Сформулюйте першу теорему Фредгольма.

8. Яке ядро називається спряженим до ядра $K(x,s)$?

9. Сформулюйте другу й третю теореми Фредгольма.

10. У чому полягає альтернатива Фредгольма для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з виродженим ядром?

11. Знайти характеристичні числа і власні функції ядра рівняння:

а) $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 e^{3x}y(s)ds$; б) $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 (1-x^2)y(s)ds$.

Відповіді: а) $\lambda=\frac{3}{e^3-1}$, $y(x)=Ce^{3x}$; б) $\lambda=\frac{3}{2}$, $y(x)=C(1-x^2)$.

12. Знайти розв'язок лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром шляхом зведення до системи алгебраїчних рівнянь:

а) $y(x)=3x+\int\limits_0^1 x^3 sy(s)ds$; б) $y(x)=\sin x+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos x\sin s\,y(s)ds$.

Відповіді: а) $y(x)=3x+\frac{5}{4}x^3$; б) $y(x)=\sin x+\cos x$.

6. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА З СИМЕТРИЧНИМ ЯДРОМ

§ 6.1. Теорема Гільберта-Шмідта

Симетричним називається ядро, для якого $K(x,s)=K(s,x)$.

Інтегральне рівняння, ядро якого симетричне, будемо називати ***симетричним інтегральним рівнянням***.

Розглянемо симетричне ядро $K(x,s)$. Будемо вважати, що власні функції ядра ортонормовані, а характеристичні числа розташовані в порядку зростання абсолютних величин

$$\left|\lambda^{(1)}\right|\le\left|\lambda^{(2)}\right|\le\ldots\le\left|\lambda^{(n)}\right|\le\ldots$$

Характеристичні числа можуть мати певну кратність. Нехай характеристичне число $\lambda^{(1)}$ має кратність p_1. Введемо p_1 характеристичних чисел, які будуть співпадати з $\lambda^{(1)}$:

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{p_1}=\lambda^{(1)}.$$

Кожному з чисел λ_1, λ_2, ..., λ_{p_1} буде відповідати своя власна функція

$$y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ y_{p_1}^{(1)}(x).$$

Аналогічно для кожного характеристичного числа $\lambda^{(j)}$ кратності p_j сформуємо характеристичні числа

$$\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\ldots=\lambda_{r+p_j-1},$$

яким поставимо у відповідність власні функції

$$y_1^{(j)}(x),\ y_2^{(j)}(x),\ \ldots,\ y_{p_1}^{(j)}(x).$$

Таким чином, можна вважати, що кожному характеристичному числу відповідає тільки одна власна функція, хоча серед характеристичних чисел можуть виявитися рівні.

Побудовану систему
$$\begin{cases} \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n,\ldots \\ y_1(x), y_2(x), y_3(x),\ldots, y_n(x),\ldots \end{cases} \tag{6.1}$$

прийнято називати системою характеристичних чисел і власних функцій даного симетричного ядра. Тут $\left\{y_n(x)\right\}_{n=1}^{+\infty}$ – ортонормована система власних функцій, для якої

$$\int_a^b y_i(x)y_j(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = j, \\ 0, \text{ якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Визначення. Функція $f(x)$ називається ***представною через*** L_2***-ядро*** $K(x,s) = K(s,x)$, якщо існує довільна функція $h(x)$ з $L_2[a,b]$ така, що

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)h(s)ds\,. \tag{6.2}$$

Теорема Гільберта-Шмідта. Якщо функція $f(x)$ представна через симетричне неперервне ядро $K(x,s)$, то вона може бути розкладена в ряд Фур'є за певною ортонормованою системою власних функцій $\left\{y_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ оператора Фредгольма з ядром $K(x,s)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)\,, \tag{6.3}$$

де коефіцієнти f_n задаються рівностями

$$f_n = \int_a^b f(x)y_n(x)dx\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ряд (6.3) збігається на $[a,b]$ абсолютно і рівномірно.

Теорема Гільберта – Шмідта має місце і в просторі $C[a,b]$, тобто для неперервних ядер $K(x,s)$ і неперервних функцій $h(x)$, причому збіжність ряду (6.3) буде також рівномірною.

Будемо розглядати простір $L_2[a,b]$. Тоді будь-якій функції $g(x) \in L_2[a,b]$ можна поставити у відповідність ряд Фур'є за деякою системою ортонормованих функцій

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \varphi_n(x)\,,$$

де коефіцієнти ряду обчислюють за формулою

$$g_n = \int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx .$$

Лема. Якщо функція $f(x) \in L_2[a,b]$ представна через симетричне неперервне ядро $K(x,s) = K(s,x)$, то ряд Фур'є для цієї функції має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} y_n(x) , \qquad (6.4)$$

і, оскільки функція $f(x)$ представна через симетричне неперервне ядро, то за визначенням $f(x) = \int_a^b K(x,s)h(s)ds$, λ_n – характеристичні числа оператора з ядром $K(x,s)$, $h_n = \int_a^b h(x)y_n(x)dx$ – коефіцієнти ряду Фур'є для функції $h(x)$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x)$, представну через симетричне неперервне ядро $K(x,s) = K(s,x)$, тоді

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)h(s)ds . \qquad (6.5)$$

Функції $f(x)$ можна поставити у відповідність ряд Фур'є за системою власних функцій $y_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x) . \qquad (6.6)$$

Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є f_n. За визначенням

$$f_n = \int_a^b f(x)y_n(x)dx .$$

Підставимо в цей вираз значення $f(x)$ з (6.5):

$$f_n = \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)h(s)ds \right) y_n(x)dx ,$$

або

$$f_n = \int_a^b \int_a^b K(x,s)y_n(x)h(s)dsdx = \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)y_n(x)dx \right) h(s)ds . \qquad (6.7)$$

Оскільки вираз $\int_a^b K(x,s)y_n(x)dx$ записаний для симетричного ядра, то він означає дію оператора A на власну функцію $y_n(x)$ і за визначенням може бути поданий у вигляді $Ay_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n(x)$, де λ_n – характеристичне число.

Тоді (6.7) набуває вигляду

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b h(s)y_n(s)ds = \frac{h_n}{\lambda_n}.$$

Остаточно, підставивши f_n в (6.6), отримуємо ряд Фур'є:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} y_n(x).$$

§ 6.2. Розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з симетричним ядром

Симетричні інтегральні рівняння є потужним інструментом розв'язання задач математичної фізики (наприклад, задач квантової механіки, теорії коливань, рівнянь теплопровідності).

Отримаємо розв'язок симетричного інтегрального рівняння у припущенні, що відома система його характеристичних чисел і власних функцій.

Нехай дано інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x), \tag{6.8}$$

або в операторному вигляді

$$y(x) = \lambda Ay + f.$$

Позначимо через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n, ...$ і $y_1(x), y_2(x), y_3(x), ..., y_n(x), ...$ систему характеристичних чисел і власних функцій ядра $K(x,s)$.

Якщо $y(x)$ є розв'язком рівняння (6.8), то інтеграл

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds$$

є функцією, представною через ядро $K(x,s)$, і для неї виконується теорема Гільберта-Шмідта: якщо функції $y(x)$ відповідає ряд Фур'є

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = (y, y_n),$$

то

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} y_n(x).$$

Підставивши значення інтегралу в (6.8), отримаємо:

$$y(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} y_n(x) + f(x).$$

Визначимо коефіцієнти ряду Фур'є c_n :

$$c_n = \int_a^b y(x)y_n(x)dx = \int_a^b \left[\lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} y_k(x) + f(x) \right] y_n(x)dx =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \int_a^b y_k(x)y_n(x)dx + \int_a^b f(x)y_n(x)dx.$$

Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Фур'є, тобто якщо вона належить до класу $L_2[a,b]$, то останній інтеграл $\int_a^b f(x)y_n(x)dx = f_n$, а перший приймає значення $\int_a^b y_k(x)y_n(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ якщо } n \neq k, \\ 1, \text{ якщо } n = k. \end{cases}$ Тоді в сумі залишається один доданок для $k = n$:

$$c_n = \lambda \frac{c_n}{\lambda_n} + f_n.$$

Помножимо обидві частини виразу на λ_n :

$$\lambda_n c_n = \lambda c_n + f_n \lambda_n, \text{ або } c_n(\lambda_n - \lambda) = f_n \lambda_n.$$

Тут можливі наступні випадки.

1) λ – *не є характеристичним числом* ($\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1,2,....$).

Тоді вираз для коефіцієнтів c_n має вигляд $c_n = \dfrac{\lambda_n f_n}{\lambda_n - \lambda}$. Оскільки

$$y(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} y_n(x) + f(x),$$

то після підстановки в цей вираз значення коефіцієнта c_n, отримаємо розв'язок інтегрального рівняння, якщо $\lambda \neq \lambda_n$:

$$y(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) + f(x), \qquad (6.8)$$

де $f_n = \int_a^b f(x) y_n(x) dx$.

2) $\lambda = \lambda_n$ *– характеристичне число.*

Згідно з теоремою Фредгольма необхідною умовою розв'язності інтегрального рівняння є виконання рівностей (5.27):

$$\int_a^b f(x)\psi_n(x)dx = 0,$$

де $\psi_n(x)$ – ненульові розв'язки спряженого однорідного рівняння

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(s,x)\psi(s)ds = 0.$$

Зауважимо, що оскільки у нас ядро симетричне, тобто $K(x,s) = K(s,x)$, то спряжене однорідне рівняння співпадає з вихідним однорідним рівнянням

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = 0.$$

Це означає, що всі розв'язки спряженого рівняння співпадають з розв'язками вихідного рівняння:

$$y(x) = \psi(x) \ .$$

Тоді необхідна умова існування розв'язку набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)y_n(x)dx = 0,$$

а інтеграл в лівій частині по суті задає коефіцієнти f_n :

$$f_n = \int_a^b f(x)y_n(x)dx = 0.$$

Повертаючись до рівності

$$c_n(\lambda_n - \lambda) = f_n\lambda_n$$

і враховуючи, що $\lambda = \lambda_n$, маємо $\lambda_n - \lambda = 0$. Тоді $f_n\lambda_n = 0$, $f_n = 0$, а це вимагає виконання необхідної умови. У разі $f_n = 0$ отримуємо $c_n(\lambda_n - \lambda) = 0$ і, оскільки $\lambda = \lambda_n$, робимо висновок: c_n – невизначений коефіцієнт, який може приймати будь-які значення.

Нехай $\lambda = \lambda_p$, де λ_p – деяке характеристичне число кратності k. В цьому випадку маємо k невизначених коефіцієнтів c_n. Перепишемо розв'язок інтегрального рівняння

$$y(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) + f(x),$$

враховуючи те, що при $\lambda = \lambda_p$ в записаній сумі $n \neq p,\ n \neq p+1,\ ...,\ n \neq p+k-1$.

В цьому випадку розв'язок інтегрального рівняння запишеться у вигляді:

$$y(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) + f(x) + C_p y_p(x) + C_{p+1} y_{p+1}(x) + ... + C_{p+k-1} y_{p+k-1}(x), \qquad (6.9)$$

де індекс підсумування $n \neq p,\ n \neq p+1,\ ...,\ n \neq p+k-1$, а невизначені коефіцієнти позначені як C_n:

$$c_n = C_n \text{ при } n = p,\ n = p+1,\ ...,\ n = p+k-1.$$

Таким чином, ми отримали дві формули (6.8) і (6.9), які дозволяють знаходити розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром.

3) Якщо $\lambda = \lambda_n$ – *характеристичне число*, а $f(x)$ не ортогональна хоча б одній власній функції, що належить числу λ_n, то розв'язку не існує.

Приклад 1. Знайти характеристичні числа і власні функції однорідного інтегрального рівняння, якщо його ядро має вигляд

$$K(x,s) = \begin{cases} \sin x \cos s, & 0 \le x \le s, \\ \sin s \cos x, & s \le x \le \pi/2. \end{cases}$$

Розв'язання. Для симетричного ядра задачу про знаходження характеристичних чисел і власних функцій зведемо до лінійної крайової задачі. Визначимо характеристичні числа з однорідного інтегрального рівняння

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = 0.$$

В нашому випадку для симетричного ядра $K(x,s)$ воно запишеться у вигляді

$$y(x) - \lambda \int_0^{\pi/2} K(x,s) y(s) ds = 0,$$

або $$y(x)=\lambda\left(\cos x\int\limits_0^x \sin s\, y(s)ds+\sin x\int\limits_x^{\pi/2}\cos s\, y(s)ds\right). \qquad (6.10)$$

Диференціюючи обидві частини рівності (6.10) за змінною x, знаходимо

$$y'(x)=\lambda\left(-\sin x\int\limits_0^x \sin s\, y(s)ds+\cancel{\cos x\sin x y(x)}+\cos x\int\limits_x^{\pi/2}\cos s\, y(s)ds-\cancel{\sin x\cos x y(x)}\right),$$

$$y'(x)=\lambda\left(-\sin x\int\limits_0^x \sin s\, y(s)ds+\cos x\int\limits_x^{\pi/2}\cos s\, y(s)ds\right).$$

Повторне диференціювання дає:

$$y''=-y(x)-\lambda(\sin^2 x+\cos^2 x)y(x),$$

$$y''(x)+(1+\lambda)y(x)=0,$$

З рівності (6.10) знаходимо, що

$$y(0)=0,\ y(\pi/2)=0.$$

Отже, задане інтегральне рівняння зводиться до крайової задачі:

$$\begin{cases} y''(x)+(1+\lambda)y(x)=0, & (6.11)\\ y(0)=0,\quad y(\pi/2)=0. & (6.12)\end{cases}$$

Тут можливі три наступні випадки:

1) $\lambda=-1$. Рівняння (6.11) набирає вигляду $y''(x)=0$. Його загальний розв'язок

$$y(x)=C_1+C_2x\ .$$

Скориставшись крайовими умовами (6.12), отримаємо систему для визначення невідомих C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 0=C_1+C_2\cdot 0,\\ 0=C_1+C_2\cdot\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

звідки $C_1=0,\ C_2=0$, тобто, інтегральне рівняння має лише тривіальний розв'язок

$$y(x)\equiv 0.$$

2) $1+\lambda>0$, або $\lambda>-1$, $y''(x)+(1+\lambda)y(x)=0$, $k^2=-(1+\lambda)$, $k_{1,2}=\pm i\sqrt{1+\lambda}$. Загальний розв'язок рівняння (6.11) має вигляд:

$$y(x)=C_1\cos\sqrt{1+\lambda}x+C_2\sin\sqrt{1+\lambda}x.$$

Для визначення коефіцієнтів C_1 і C_2 скористаємось крайовими умовами:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos\frac{\sqrt{1+\lambda}\pi}{2} + C_2 \sin\frac{\sqrt{1+\lambda}\pi}{2} = 0. \end{cases} \tag{6.13}$$

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\frac{\sqrt{1+\lambda}\pi}{2} & \sin\frac{\sqrt{1+\lambda}\pi}{2} \end{vmatrix} = 0. \tag{6.14}$$

Вважаючи його рівним нулю, отримаємо рівняння для визначення характеристичних чисел:

$$\sin\frac{\sqrt{1+\lambda}\pi}{2} = 0 .$$

Всі корені рівняння (6.14) задаються формулою

$$\frac{\sqrt{1+\lambda}\pi}{2} = \pi n, \quad n = 1,2,3,... \quad \sqrt{1+\lambda} = 2n, \qquad 1+\lambda = 4n^2, \quad \lambda_n = 4n^2 - 1 .$$

При $\lambda = \lambda_n$ система (6.13) набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos\frac{2\pi n}{2} + C_2 \sin\frac{2\pi n}{2} = 0. \end{cases}$$

Вона має нескінченну множину розв'язків

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = C, \end{cases}$$

де C – довільна стала. Отже і вихідне інтегральне рівняння має нескінченну множину розв'язків виду

$$y_n(x) = \sin 2nx, \quad n = 1,2,3... ,$$

які є власними функціями інтегрального оператора з симетричним ядром.

3) $1+\lambda < 0$, $\lambda < -1$, $y''(x) + (1+\lambda)y(x) = 0$, $k^2 = -(1+\lambda)$, $k_{1,2} = \pm\sqrt{-(1+\lambda)}$. Тоді загальний розв'язок матиме вигляд:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-(1+\lambda)}x} + C_2 e^{-\sqrt{-(1+\lambda)}x} .$$

За умов (6.12) система рівнянь для визначення C_1 і C_2 має вигляд:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\frac{\sqrt{-(1+\lambda)}\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{-(1+\lambda)}\pi}{2}} = 0, \end{cases}$$

або $$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_1 e^{\frac{\sqrt{-(1+\lambda)}\pi}{2}} - C_1 e^{-\frac{\sqrt{-(1+\lambda)}\pi}{2}} = 0. \end{cases}$$

Отримуємо $C_1 = 0,\quad C_2 = 0$. Інтегральне рівняння має тривіальний розв'язок $y \equiv 0$. Таким чином, при $1+\lambda < 0$ інтегральне рівняння не має характеристичних чисел, отже, і власних функцій.

Відтак, визначаються характеристичні числа і власні функції інтегрального оператора з симетричним ядром

$$\lambda_n = 4n^2 - 1,\ y_n(x) = C\sin 2nx, \quad n = 1,2,3...$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi/6} K(x,s)y(s)ds = \sin 12x$, де

$$K(x,s) = \begin{cases} \cos 3s \sin 3x, & 0 \le x \le s, \\ \cos 3x \sin 3s, & s \le x \le \pi/6. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо характеристичні числа. Розглянемо однорідне інтегральне рівняння

$$y(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi/6} K(x,s)y(s)ds = 0.$$

Для заданого ядра $K(x,s)$ воно має вигляд:

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^x \cos 3x \sin 3s\, y(s)ds + \lambda \int\limits_x^{\pi/6} \cos 3s \sin 3x\, y(s)ds, \tag{6.15}$$

$$y(x) = \lambda \cos 3x \int\limits_0^x \sin 3s\, y(s)ds + \lambda \sin 3x \int\limits_x^{\pi/6} \cos 3s y(s)ds.$$

Продиференціюємо отриманий вираз двічі по x:

$$y'(x) = -3\lambda \sin 3x \int\limits_0^x \sin 3s\, y(s)ds + \lambda \cos 3x \sin 3x\, y(x) +$$

$$+3\lambda \cos 3x \int\limits_x^{\pi/6} \cos 3s\, y(s)ds - \lambda \sin 3x \cos 3x\, y(x);$$

$$y''(x) = -9\lambda \cos 3x \int\limits_0^x \sin 3s\, y(s)ds - 3\lambda \sin 3x \sin 3x\, y(x) -$$

$$-9\lambda\sin 3x\int_x^{\pi/6}\cos 3s\, y(s)ds-3\lambda\cos^2 3x\, y(x);$$

$$y''(x)=-3\lambda y(x)-9\big[\lambda\cos 3x\int_0^x\sin 3s\, y(s)ds+\lambda\sin 3x\int_x^{\pi/6}\cos 3s\, y(s)ds\big].$$

Вираз у квадратних дужках дорівнює $y(x)$. Тоді маємо

$$y''(x)=-3\lambda y(x)-9y(x).$$

Таким чином, число λ і функція $y(x)$ такі, що

$$y''(x)+(3\lambda+9)y(x)=0. \tag{6.16}$$

Знайдемо тепер крайові умови. Для цього, підставивши в (6.15) $x=0$ та $x=\pi/6$, отримаємо:

$$y(0)=0,\quad y(\pi/6)=0. \tag{6.17}$$

Співвідношення (6.16) і (6.17) утворюють у сукупності однорідну крайову задачу, розв'язавши яку, знайдемо характеристичні числа і відповідні їм власні функції вихідного інтегрального рівняння.

Введемо позначення $\mu=3\lambda+9$. Розглянемо три випадки.

1) $\mu=0$. Рівняння (6.16) набуває вигляду $y''=0$.

Корені характеристичного рівняння $k^2=0$ дорівнюють $k_{1,2}=0$. Тоді загальний розв'язок рівняння

$$y(x)=C_1x+C_2.$$

Скориставшись умовами (6.17), отримуємо для визначення C_1 і C_2 систему:

$$\begin{cases} C_2=0, \\ C_1\dfrac{\pi}{6}+C_2=0, \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок $C_1=0$, $C_2=0$. Тобто, крайова задача, а разом з нею й рівняння (6.15), при $\mu=0$ мають лише тривіальний розв'язок $y\equiv 0$, який не є власною функцією.

2) $\mu<0$. Корені характеристичного рівняння $k^2=-\mu$, $k_{1,2}=\pm\sqrt{-\mu}$. В цьому випадку маємо загальний розв'язок

$$y(x)=C_1e^{\sqrt{-\mu}x}+C_2e^{-\sqrt{-\mu}x}.$$

За умов (6.17) система рівнянь для визначення C_1 і C_2 має вигляд:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\pi\sqrt{-\mu}/6} + C_2 e^{-\pi\sqrt{-\mu}/6} = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_2 = -C_1, \\ C_1\left[e^{\pi\sqrt{-\mu}/6} - e^{-\pi\sqrt{-\mu}/6}\right] = 0. \end{cases}$$

Отримуємо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ і $y \equiv 0$, тобто не є власною функцією.

3) $\mu > 0$. Оскільки корені характеристичного рівняння $k^2 = -\mu$ дорівнюють $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\mu}$, то загальний розв'язок рівняння (6.15) в цьому випадку

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\mu}x + C_2 \sin\sqrt{\mu}x.$$

Система рівнянь для визначення коефіцієнтів C_1 і C_2 набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin\left(\sqrt{\mu}\dfrac{\pi}{6}\right) = 0. \end{cases}$$

Тоді $\sin\left(\sqrt{\mu}\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$, $\sqrt{\mu}\dfrac{\pi}{6} = \pi n, \quad n \in Z$, $\sqrt{\mu} = 6n, \quad n \in Z$,

$$\mu_n = 36n^2, \quad 3\lambda_n + 9 = 36n^2, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Характеристичні числа $\lambda_n = 12n^2 - 3, \quad n = 1, 2, \dots$; власні функції дорівнюють

$$y_n(x) = \sin\sqrt{\mu_n}x = \sin 6nx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Знайдемо норму функції $y_n(x)$:

$$\left\| y_n(x) \right\|^2 = \int_0^{\pi/6} \sin^2 6nx dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos 12nx}{2} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\frac{1}{12n}\sin 12nx}{2} \right) \Bigg|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12},$$

тобто $\left\| y_n(x) \right\| = \sqrt{\dfrac{\pi}{12}}$. Таким чином, характеристичні числа і ортонормовану систему власних функцій можна записати у вигляді:

$$\lambda_n = 12n^2 - 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{12}{\pi}} \sin 6nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Знайдемо розв'язок вихідного інтегрального рівняння. Обчислимо коефіцієнти f_n за формулою

$$f_n = \int_a^b f(x) y_n(x) dx.$$

Для функції $f(x) = \sin 12x$ отримуємо:

$$f_n = \int\limits_0^{\pi/6} f(x)y_n(x)dx = \int\limits_0^{\pi/6} \sin 12x \cdot \sqrt{\frac{12}{\pi}} \sin 6nxdx =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{12}{\pi}} \int\limits_0^{\pi/6} \sin^2 12xdx = \sqrt{\frac{12}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/6} (1 - \cos 24x)dx = \sqrt{\frac{12}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\pi}{12}} \text{ при } n=2, \\ \sqrt{\frac{12}{\pi}} \int\limits_0^{\pi/6} \sin 6nx \sin 12xdx = 0 \quad \text{при } n \neq 2, \ n=1,3,4... \end{cases}$$

1) при $\lambda \neq \lambda_n$ рівняння має єдиний розв’язок. За формулою (6.8)

$$y(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) + f(x) \cdot$$

Оскільки при n=1,3,4... $f_n = 0$, при n=2 $f_2 = \sqrt{\frac{\pi}{12}} \neq 0$ і $\lambda_2 = 12 \cdot 2^2 - 3 = 45$, $y_2 = \sqrt{\frac{12}{\pi}} \sin 12x$, то ряд зводиться до одного доданку:

$$y(x) = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{12}} \cdot \frac{1}{45 - \lambda} \cdot \sqrt{\frac{12}{\pi}} \sin 12x + \sin 12x =$$
$$= \sin 12x \left(\frac{\lambda}{45 - \lambda} + 1 \right) = \frac{45 \sin 12x}{45 - \lambda}.$$

2) $\lambda = \lambda_n$, n=1,3,4... (випадок, коли параметр λ співпадає з певним характеристичним числом), маємо характеристичні числа :

$$\lambda_n = 12n^2 - 3, \quad n = 1,3,4, \ldots .$$

При цьому необхідна умова існування розв’язку $f_n = 0$ ($n \neq 2$) виконується, тому розв’язок рівняння існує і обчислюється за формулою (6.9):

$$y(x) = \lambda_n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{+\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda_n} y_k(x) + \sin 12x + C_n y_n,$$

де C_n – довільна стала.

Оскільки $f_k = 0$ для всіх $k \neq 2$, а $\lambda_n \neq \lambda_2$, то ряд обертається на нуль і розв’язок спрощується

$$y(x) = \sin 12x + C_n y_n(x) = \sin 12x + C_n \sqrt{\frac{12}{\pi}} \sin(6nx), \quad n = 1,3,4,...$$

При $\lambda = \lambda_2$ розв’язок не існує, оскільки права частина рівняння не ортогональна функції $y_2(x)$ (коефіцієнт $f_2 \neq 0$).

Відповідь:

1) $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1,2,3,...$ $y(x) = \dfrac{45\sin 12x}{45-\lambda}$;

2) $\lambda = \lambda_n$ n=1,3,4... $y(x) = \sin 12x + C_n\sqrt{\dfrac{12}{\pi}}\sin(6nx)$, C_n – довільна стала;

3) $\lambda = \lambda_2$ розв’язок не існує.

Питання та приклади до самостійної роботи

1. Як перевірити, що ядро $K(x,s)$ симетричне?
2. Як побудувати систему характеристичних чисел і власних функцій даного симетричного ядра?
3. Яка функція називається представною через L_2 – ядро $K(x,s) = K(s,x)$?
4. Сформулюйте теорему Гільберта-Шмідта.
5. Запишіть формулу загального розв’язку симетричного інтегрального рівняння, якщо λ не є характеристичним числом?
6. Який вигляд має розв’язок симетричного інтегрального рівняння, якщо λ є характеристичним числом.

7. Сформулюйте необхідну умову існування розв’язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Як працює альтернатива Фредгольма для симетричних ядер?

8. Знайдіть характеристичні числа і власні функції однорідного інтегрального рівняння, якщо його ядро має вид

а) $K(x,s) = \begin{cases} s(x+1), & 0 \le x \le s, \\ (s+1)x, & s \le x \le 1, \end{cases}$ б) $K(x,s) = \begin{cases} \sin s\cos x, & 0 \le x \le s, \\ \cos s\sin x, & s \le x \le \pi. \end{cases}$

Відповіді: а) $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $n = 1, 2,...$; $y_n = C\sin n\pi x$;

б) $\lambda_n = 1 - \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2$; $y_n = C\sin\dfrac{2n+1}{2}x$, $n = 0, 1, 2,...$.

9. Знайти всі розв’язки неоднорідного інтегрального рівняння при різних значеннях параметра λ:

а) $y(x) - \lambda\int\limits_0^{\pi} K(x,s)y(s)ds = \dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{x}{2}$, $K(x,s) = \begin{cases} \cos s\sin x, & 0 \le x \le s, \\ \sin s\cos x, & s \le x \le \pi; \end{cases}$

б) $y(x) - \lambda\int\limits_0^{\pi} K(x,s)y(s)ds = x - \pi$, $K(x,s) = \begin{cases} \sin s\cos x, & 0 \le x \le s, \\ \cos s\sin x, & s \le x \le \pi. \end{cases}$

Відповіді: а) $\lambda \ne \lambda_n,\ n=0,1,2,...;\quad y(x)=\frac{\pi}{4}-\sin\frac{x}{2}+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2n+1};$

$\lambda=\lambda_0;\ y(x)=\frac{\pi}{4}-\sin\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{n(n+1)2n+1}+C\sin\frac{x}{2};\ \lambda=\lambda_n,\ n=1,2,...$ рівняння не має розв'язку;

б) $\lambda \ne \lambda_n = 1-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2,\ n=0,1,2,...;$

$y(x)=x-\pi+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2}{2n+1}\right)^2}{2n+1}\cdot\cos\frac{2n+1}{2}x;$ при $\lambda=\lambda_n,\ n=0,1,2,...$ рівняння не має розв'язку.

7. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

§ 7.1. Застосування інтегрального перетворення Фур'є до розв'язку інтегральних рівнянь

Будемо розглядати функції $f(x)$, які задовольняють умову Дирихле і належать до класу $L_1(-\infty;\infty)$ – простору абсолютно інтегрованих функцій. Наприклад, візьмемо функції $f(x)\in L_1(-\infty;\infty)$, для яких існує $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<+\infty$. Для таких функцій існує інтегральне ***перетворення Фур'є***

$$F(\omega)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\ . \tag{7.1}$$

Праву частину рівності (7.1) називають інтегральним оператором Фур'є над функцією $f(x)$ і позначають символом $\mathfrak{F}(f)$.

Знаючи $F(\omega)$, можна поновити саму функцію $f(x)$ за допомогою ***оберненого перетворення*** Фур'є

$$f(x)=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \tag{7.2}$$

Введемо поняття ***згортки.*** Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ з класу $L_1(-\infty;\infty)$ – абсолютно інтегровані функції на всій числовій осі. Тоді згорткою цих функцій буде функція

$$(f*g)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(s)g(x-s)ds. \tag{7.3}$$

Оскільки згортка за ознакою Веєрштрасса є рівномірно збіжним інтегралом з параметром, то її можна інтегрувати і диференціювати.

Властивості згортки

1. $f * g = g * f$ (комутативність);

2. $(f * g) * \varphi = f * (g * \varphi)$ (асоціативність);

3. ***Перетворення Фур'є згортки***. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні, обмежені і абсолютно інтегровані на всій числовій осі, тоді

$$(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot f \cdot g \, .$$

Таким чином, перетворення Фур'є згортки двох функцій дорівнює добутку перетворень Фур'є цих функцій.

Доведемо останню властивість.

Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні, обмежені і абсолютно інтегровані на всій числовій осі, тому функція $(f * g)(x)$ неперервна, обмежена і абсолютно інтегрована, і для неї існує перетворення Фур'є

$$(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(x-s) ds \right] e^{-i\omega x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(x-s) e^{-i\omega x} dx ds = \{\xi = x - s\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(\xi) e^{-i\omega s} e^{-i\omega \xi} d\xi ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \cdot \sqrt{2\pi} =$$

$= \sqrt{2\pi} \cdot f \cdot g$ – що й треба було довести.

Цю властивість ми будемо використовувати при розв'язанні інтегральних рівнянь Фредгольма.

Нехай дано інтегральне рівняння Фредгольма другого роду на осі $(-\infty < x < +\infty)$ з ядром, що залежить від різниці аргументів (***рівняння типу згортки***):

$$y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s) y(s) ds = f(x) \, .$$

Застосуємо до обох частин даного рівняння перетворення Фур'є. В силу лінійності отримаємо цього разу:

$$\mathfrak{F}(y) - \lambda\, \mathfrak{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)y(s)ds \right) = \mathfrak{F}(f),$$

де $\mathfrak{F}$ – символ інтегрального оператора Фур'є.

Зауважимо, що другий доданок є перетворенням Фур'є згортки функцій $y(x)$ і $K(x)$. Нехай для функцій $y(x)$, $K(x)$ і $f(x)$ існують зображення за Фур'є:

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{-i\omega x}dx,$$

$$\mathcal{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-i\omega x}dx,$$

$$\mathfrak{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx.$$

За третьою властивістю згортки $K * \varphi = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{K}(\omega) \cdot Y(\omega)$. В результаті маємо рівняння у вигляді зображень функцій

$$Y(\omega) - \sqrt{2\pi}\lambda\ \mathcal{K}(\omega)Y(\omega) = \ \mathfrak{F}(\omega).$$

З отриманого алгебраїчного рівняння знайдемо зображення функції $y(x)$:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{F}(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}\lambda\mathcal{K}(\omega)} e^{i\omega x}d\omega.$$

Для визначення невідомої функції залишається тільки застосувати обернене перетворення Фур'є

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega x}d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{F}(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}\lambda\mathcal{K}(\omega)} e^{i\omega x}d\omega. \qquad (7.4)$$

Приклад. Знайти розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = e^{-|x|} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|}y(s)ds, \quad \lambda < 1/2.$$

Розв'язання. Ядро $K(x,s) = e^{-|x-s|}$ залежить від різниці аргументів, межі інтегрування – нескінченні, отже, можна застосувати інтегральне перетворення Фур'є.

Знайдемо зображення Фур'є для функції $e^{-|x|}$:

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)} dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x(1+i\omega x)} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega} \Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-x(1+i\omega)}}{1+i\omega} \Bigg|_{0}^{+\infty} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}.$$

Нехай $Y(\omega) = y(x)$, тоді отримуємо алгебраїчне рівняння:

$$Y(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2} + \sqrt{2\pi} \lambda Y(\omega) \frac{1}{1+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2} + \frac{2\lambda Y(\omega)}{1+\omega^2},$$

звідки

$$Y(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2} \cdot \frac{1+\omega^2}{\omega^2 - 2\lambda + 1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2 - 2\lambda + 1}.$$

Визначимо функцію $y(x)$, здійснивши обернене перетворення Фур'є:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\omega x}}{\omega^2 - 2\lambda + 1} d\omega = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\omega^2 - 2\lambda + 1} d\omega.$$

Для обчислення інтеграла з нескінченними межами скористаємося методом лишків

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{k} \operatorname*{Res}\limits_{z_k, \operatorname{Im}(z_k)>0} \left[G(\omega) e^{i\omega x} \right], & x \geq 0, \\ -2\pi i \sum\limits_{k} \operatorname*{Res}\limits_{z_k, \operatorname{Im}(z_k)<0} \left[G(\omega) e^{i\omega x} \right], & x < 0, \end{cases}$$

де $g(x)$ – шукана функція-оригінал, а $G(\omega)$ – її зображення.

Враховуючи отримане вище зображення $Y(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2 - 2\lambda + 1}$, введемо функцію $f(z) = \frac{e^{izx}}{z^2 - 2\lambda + 1}$. Її особливими точками є полюси першого порядку $z_{1,2} = \pm i\sqrt{1 - 2\lambda}$.

Якщо функція $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ має тільки прості полюси, то лишок цієї функції в точці z_k обчислюють за формулою

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z))=\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}$$

Обчислимо лишки функції $f(z)$ в точках z_1, z_2:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}(f(z))=-i\frac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}}{2\sqrt{1-2\lambda}},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}(f(z))=i\frac{e^{\sqrt{1-2\lambda}x}}{2\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Тоді шукана функція $y(x)$ матиме вигляд

$$y(x)=\frac{1}{\pi}\begin{cases}2\pi i\cdot\left(-i\dfrac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}}{2\sqrt{1-2\lambda}}\right), x\ge 0;\\ -2\pi i\cdot\left(i\dfrac{e^{\sqrt{1-2\lambda}x}}{2\sqrt{1-2\lambda}}\right), x<0;\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}}{\sqrt{1-2\lambda}},\ x\ge 0;\\ \dfrac{e^{\sqrt{1-2\lambda}x}}{\sqrt{1-2\lambda}},\ x<0;\end{cases}=\frac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|}}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Відповідь: $y(x)=\dfrac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|}}{\sqrt{1-2\lambda}}$.

За допомогою перетворення Фур'є можна також знаходити розв'язки інтегральних рівнянь першого роду

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(x-s)y(s)ds=f(x). \tag{7.5}$$

Тут $y(x)$ – шукана функція, $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ – задана функція, а $K(x)$ – абсолютно інтегрована на всій осі x.

Застосувавши до обох частин (7.5) перетворення Фур'є і використовуючи теорему про згортку, одержимо

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{K}(\omega)Y(\omega)=\mathcal{F}(\omega),\quad \text{звідки}\quad Y(\omega)=\frac{F(\omega)}{\sqrt{2\pi}K(\omega)}.$$

Повертаючись до оригіналу, отримаємо шуканий розв'язок

$$y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{F}(\omega)}{\mathcal{K}(\omega)}e^{i\omega x}d\omega. \tag{7.6}$$

Для того, щоб існував розв'язок рівняння (7.5), який належить $L_2(-\infty,\infty)$, необхідно і достатньо, щоб і величина $\mathcal{F}(\omega)/\mathcal{K}(\omega)$ належала до $L_2(-\infty,\infty)$.

§ 7.2. Перетворення Лапласа та його властивості

7.2.1. Оригінал і зображення

Перетворення Лапласа є інтегральним перетворенням, яке тісно пов'язане з перетворенням Фур'є і має аналогічні властивості. Воно часто використовується в технічних дисциплінах, зокрема в електротехніці і технічній кібернетиці.

Комплекснозначна функція $f(x)$ дійсної змінної x називається ***оригіналом***, якщо вона визначена при $x \geq 0$, інтегрована на $(0, +\infty)$ і має експоненційний порядок:

$$|f(x)| \leq M e^{\alpha x}, \tag{7.7}$$

де $M > 0$ і $\alpha \geq 0$ – сталі.

Функцію

$$F(p) = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \tag{7.8}$$

де $p = s + i\sigma$ – комплексний параметр, називають ***зображенням*** оригіналу $f(x)$ і пишуть $F(p) \risingdotseq f(x)$ або $F(p) = L\{f(x)\}$, де L – оператор перетворення Лапласа.

Інтеграл Лапласа (7.8) абсолютно збігається при $\operatorname{Re} p > \alpha$, де α – показник росту функції $f(x)$ з (7.7). Тобто зображення $F(p)$ існує в півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha$. Зображення $F(p)$ в цій півплощині є аналітичною функцією від p, яка прямує до нуля при $\operatorname{Re} p \to +\infty$ і залишається обмеженою в будь-якій півплощині $\operatorname{Re} p \geq \alpha_0$, де $\alpha_0 > \alpha$.

Знайдемо зображення деяких елементарних функцій.

Приклад 1. Знайти зображення одиничної функції (***функції Хевісайда***):

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{7.9}$$

Розв'язання. За формулою (7.8):

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-px} dx = -\lim_{b \to \infty} \left. \frac{e^{-px}}{p} \right|_0^b = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

$$\mathrm{H}(x) \risingdotseq \frac{1}{p}\ . \tag{7.10}$$

Приклад 2. Знайти зображення функції e^{ax} $(a=\beta+i\gamma)$.

Розв'язання.

$$\int_0^\infty e^{ax}e^{-px}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(p-a)x}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)}\right|_0^b=\frac{1}{p-a},\ \mathrm{Re}\,p>\beta.$$

$$e^{ax}\risingdotseq\frac{1}{p-a}. \tag{7.11}$$

Приклад 3. Знайти зображення функції $f(x)=x$.

Розв'язання.

$$F(p)=\int_0^\infty xe^{-px}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-px}dt=\left\{\begin{array}{l|l} u=x; & du=dx; \\ dv=e^{-px}dx. & v=-\dfrac{e^{-px}}{p}. \end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left.\left(-\frac{xe^{-px}}{p}-\frac{e^{-px}}{p^2}\right)\right|_0^b=\frac{1}{p^2}.$$

$$x\risingdotseq\frac{1}{p^2}. \tag{7.12}$$

Наведемо теореми, які відповідають операціям над функціями-оригіналами.

Теорема 1 (*лінійність перетворення*). Якщо функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ – оригінали і їх зображення відповідно $F_1(p)$, $F_2(p)$ і якщо λ_1, λ_2 – величини, що не залежать від x і p, то справедлива рівність

$$L\{\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)\}=\lambda_1 L\{f_1(x)\}+\lambda_2 L\{f_2(x)\}. \tag{7.13}$$

Приклад 4. Застосувавши теорему лінійності, знайти зображення функцій $\sin\omega x, \cos\omega x, \mathrm{sh}\omega x, \mathrm{ch}\omega x$.

Розв'язання. За формулами Ейлера

$$\sin\omega x=\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i};\quad \cos\omega x=\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}.$$

Після підстановки в (7.11) $a=\pm i\omega$ маємо

$$\sin\omega x\risingdotseq\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}; \tag{7.14}$$

$$\cos\omega x\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}. \tag{7.15}$$

$$\mathrm{sh}\omega x=\frac{e^{\omega x}-e^{-\omega x}}{2};\quad \mathrm{ch}\omega x=\frac{e^{\omega x}+e^{-\omega x}}{2},$$

$$\mathrm{sh}\omega x \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}; \tag{7.16}$$

$$\mathrm{ch}\omega x \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}. \tag{7.17}$$

Теорема 2 (*подібності*). Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для будь-якої сталої $\lambda > 0$

$$f(\lambda x) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{7.18}$$

Теорема 3 (*зміщення аргументу зображення).* Для будь-якого дійсного або комплексного числа a

$$e^{ax} f(x) \risingdotseq F(p-a). \tag{7.19}$$

Користуючись формулами (7.14), (7.15), (7.19), можна знайти зображення функцій

$$e^{ax}\sin\omega x \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}; \tag{7.20}$$

$$e^{ax}\cos\omega x \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}, \tag{7.21}$$

а за формулами (7.16), (7.17):

$$e^{ax}\mathrm{sh}\omega x \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}; \tag{7.23}$$

$$e^{ax}\mathrm{ch}\omega x \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}. \tag{7.24}$$

Теорема 4 (*запізнення*). Для будь-якої сталої $\tau > 0$

$$f(x-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p), \tag{7.25}$$

Теорема 5 (*диференціювання ориніналу*). Якщо $f(x) \risingdotseq F(p)$, то

$$f'(x) \risingdotseq pF(p) - f(0). \tag{7.26}$$

Зокрема, якщо $f(0) = 0$, то

$$f'(x) \risingdotseq pF(p).$$

Для похідних вищих порядків маємо:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{7.27}$$

При початкових умовах $f(0)=f'(0)=...=f^{(n-1)}(0)=0$ диференціювання оригіналів призводить до множення зображення на p^n:

$$f^{(n)}(x) \risingdotseq p^n F(p), \tag{7.28}$$

Теорема 6 (*інтегрування оригіналу*). Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^x f(t)dt \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \tag{7.29}$$

тобто інтегрування оригіналу в межах від 0 до x призводить до ділення зображення на величину p.

Теорема 7 (*диференціювання зображення*). Якщо $f(x) \risingdotseq F(p)$, то

$$-x \cdot f(x) \risingdotseq F'(p), \tag{7.30}$$

Це означає, що диференціювання зображення призводить до множення оригіналу на $(-x)$.

Приклад 5. Користуючись теоремою диференціювання зображення, знайти зображення функцій $x\sin\omega x$ і $x\cos\omega x$.

Розв'язання. $-x\sin\omega x \risingdotseq \frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)=-\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$,

$$-x\cos\omega x \risingdotseq \frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)=\frac{-p^2+\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2},$$

$$x\sin\omega x \risingdotseq \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}, \qquad x\cos\omega x \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Теорема 8 (*інтегрування зображень*). Якщо $f(x) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s$, а інтеграл $\int_p^\infty F(p)dp$ збігається на півплощині $\operatorname{Re} p > s$, то

$$\frac{f(x)}{x} \risingdotseq \int_p^\infty F(p)dp, \tag{7.31}$$

тобто інтегрування зображення в межах від p до ∞ призводить до ділення оригіналу на x.

Таблиця оригіналів та відповідних зображень розміщена в Додатку.

7.2.2. Обернене перетворення Лапласа

Теорема. Якщо функція $f(x)$ є оригіналом, а $F(p)$ – її зображенням, то в будь-якій точці x неперервності оригінала $f(x)$ має місце формула

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{px}dp\,, \tag{7.32}$$

де інтегрування здійснюється вздовж будь-якої нескінченної прямої $\operatorname{Re}p=\gamma$, що лежить в півплощині абсолютної збіжності інтеграла Лапласа від $f(x)$ **(*формула оберненого перетворення Лапласа або формула Римана-Мелліна*).**

Розглянемо функцію $F(p)$, коли вона є відношенням двох многочленів. Вважаємо, що $F(p)$ – аналітична функція в усій комплексній області, за виключенням кінцевого числа особливих точок, яка задовольняє умову

$$\lim_{p\to\infty}F(p)=0\,. \tag{7.33}$$

Таким чином, вважатимемо функцію $F(p)$ правильним алгебраїчним дробом, який може бути поданий у вигляді скінченної суми простих дробів вигляду

$$\frac{A}{p-\alpha},\ \frac{A}{(p-\alpha)^k},\ \frac{Mp+N}{p^2+bp+c},\ \frac{Mp+N}{(p^2+bp+c)^k},$$

де $k=2,3,...,\ b^2-4c<0$.

Приклад 6. Знайти оригінал за відомим зображенням

$$F(p)=\frac{2p^3+p^2+9p}{(p+1)^2(p^2-2p+2)}.$$

Розв’язання. Розкладемо дріб на прості дроби:

$$\frac{2p^3+p^2+9p}{(p+1)^2(p^2-2p+2)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{(p+1)^2}+\frac{Mp+N}{p^2-2p+2};$$

$2p^3+p^2+9p=A(p+1)(p^2-2p+2)+B(p^2-2p+2)+(Mp+N)(p+1)^2$, або

$2p^3+p^2+9p=(A+M)p^3+(-A+B+2M+N)p^2+(-2B+M+2N)p+2A+2B+N$.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях p, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|c}
p^3 & A+M=2, \\
p^2 & -A+B+2M+N=1, \\
p & -2B+M+2N=9, \\
p^0 & 2A+2B+N=0.
\end{array}$$

Розв'язавши систему, маємо $A=1,\ B=-2,\ M=1,\ N=2$.

Отже,

$$F(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{2}{(p+1)^2}+\frac{p+2}{p^2-2p+2}=$$

$$=\frac{1}{p+1}-\frac{2}{(p+1)^2}+\frac{(p-1)+3}{(p-1)^2+1^2}=$$

$$=\frac{1}{p+1}-\frac{2}{(p+1)^2}+\frac{p-1}{(p-1)^2+1^2}+3\frac{1}{(p-1)^2+1^2}.$$

Тоді оригінал

$$f(x)=e^{-x}-2xe^{-x}+e^{x}\cos x+3e^{x}\sin x.$$

Згорткою двох функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається інтеграл

$$f(x)*g(x)=\int_0^x g(x-s)f(s)ds. \qquad (7.34)$$

Теорема 9 (*теорема Бореля*). Якщо $f(x)\risingdotseq F(p)$ і $g(x)\risingdotseq G(p)$, то згортці функцій $f(x)*g(x)$ відповідає добуток зображень $F(p)\cdot G(p)$:

$$f(x)*g(x)\risingdotseq F(p)\cdot G(p). \qquad (7.35)$$

7.2.3. Застосування перетворення Лапласа до розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри типу згортки

Рівняння Вольтерри другого роду типу згортки мають вид:

$$y(x)=\int_0^x K(x-s)y(s)ds+f(x), \qquad (7.36)$$

де ядро $K(x)$ неперервне в квадраті $Q=\{(x,s):a\le x\le b,a\le s\le b\}$, вільний член $f(x)$ неперервний на відрізку $[a,b]$, $y(x)$ – шукана функція.

Рівняння Вольтерри першого роду типу згортки – це рівняння виду:

$$\int_a^x K(x-s)y(s)ds=f(x). \qquad (7.37)$$

Нехай $y(t)\risingdotseq Y(p)$, $f(t)\risingdotseq F(p)$, $K(t)\risingdotseq L(p)$. Оскільки інтеграл (інтегральний оператор) має вигляд

$$\int_0^x K(x-s)y(s)ds = K(x) * y(x),$$

то за теоремою Бореля:

$$K(x) * y(x) \fallingdotseq L(p) \cdot Y(p). \qquad (7.38)$$

Операторне рівняння, що відповідає інтегральному рівнянню (7.37), матиме вигляд

$$Y(p) = L(p) \cdot Y(p) + F(p), \quad \text{або} \quad Y(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}.$$

Його розв'язком є оригінал $y(x)$, який відповідає зображенню $Y(p)$.

Приклад 7. Розв'язати операційним методом рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = 1 - \cos x .$$

Розв'язання. При переході до зображень маємо:

$$y(x) \fallingdotseq Y(p); \quad \mathrm{sh}x \fallingdotseq \frac{1}{p^2-1}; \quad 1-\cos x \fallingdotseq \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p(p^2+1)}.$$

За теоремою Бореля:

$$\int_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = \mathrm{sh}x * y(x) \fallingdotseq \frac{1}{p^2-1} \cdot Y(p) \cdot$$

З рівняння у зображеннях маємо

$$\frac{1}{p^2-1} \cdot Y(p) = \frac{1}{p(p^2+1)},$$

звідки знаходимо

$$Y(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+1)} \cdot$$

Розкладемо $Y(p)$ на елементарні дроби:

$$\frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{Mp+N}{p^2+1} = \frac{A(p^2+1) + p(Mp+N)}{p(p^2+1)} =$$

$$= \frac{p^2(A+M) + pN + A}{p(p^2+1)}.$$

$$\begin{array}{l|ll} p^2 & 1 = A + M, & \qquad M = 2, \\ p & 0 = N, & \qquad N = 0, \\ p^0 & -1 = A. & \qquad A = -1. \end{array}$$

Отож, $Y(p) = \dfrac{2p}{p^2+1} - \dfrac{1}{p} \cdot$ Відповідний оригінал, тобто шуканий розв'язок

$$y(x) = 2\cos x - 1.$$

Приклад 8. Розв'язати операційним методом рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x) = 2\int_0^x e^{x-s} y(s)ds + \mathrm{sh}3x .$$

Розв'язання. Складемо операторне рівняння.

$$y(x) \fallingdotseq Y(p), \qquad \mathrm{sh}3x \fallingdotseq \frac{3}{p^2-9}, \qquad e^x \fallingdotseq \frac{1}{p-1},$$

$$\int_0^x \mathrm{sh}(x - s)y(s)ds = e^x * y(x) \fallingdotseq \frac{1}{p-1} \cdot Y(p).$$

$$Y(p) = 2\frac{1}{p-1}Y(p) + \frac{3}{p^2-9} ,$$

$$Y(p)\left(1 - \frac{2}{p-1}\right) = \frac{3}{p^2-9} \cdot$$

$$Y(p)\frac{p-3}{p-1} = \frac{3}{p^2-9} \cdot$$

$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{(p^2-9)(p-3)} \cdot$$

Зведемо $Y(p)$ до табличного вигляду, розклавши отриманий дріб на найпростіші дроби:

$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{(p+3)(p-3)^2} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{(p-3)^2} =$$

$$= \frac{A(p-3)^2 + B(p^2-9) + C(p+3)}{(p+3)(p-3)^2};$$

$$3(p-1) = A(p-3)^2 + B(p^2-9) + C(p+3).$$

$$\begin{array}{l|ll} p=3 & 6=6C, & C=1, \\ p=-3 & -12=36A, & A=-1/3, \\ p^2 & 0=A+B. & B=1/3. \end{array}$$

Тоді

$$Y(p)=-\frac{1}{3}\frac{1}{p+3}+\frac{1}{3}\frac{1}{p-3}+\frac{1}{(p-3)^2}\ ,$$

а шуканий розв'язок

$$y(x)=-\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{3}e^{3x}+xe^{3x}=\frac{2}{3}\text{sh}3x+xe^{3x}.$$

За допомогою перетворення Лапласа можна розв'язувати ***системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду типу згортки***

$$y_i(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_0^x K_{ij}(x-s)y_j(s)ds+f_i(x)\,,\quad i=\overline{1,n}.$$

Вважається, що функції $K_{ij}(x),\ i,j=\overline{1,n}$ та $f_i(x),\ i=\overline{1,n}$ є оригіналами. Після введення позначень

$$y_i(x)\risingdotseq Y_i(p),\quad K_{ij}(x)\risingdotseq L_{ij}(p),\quad f_i(x)\risingdotseq F_i(p)$$

отримуємо систему рівнянь у зображеннях

$$Y_i(p)=\lambda\sum_{j=1}^{n}K_{ij}(p)Y_j(p)+F_i(p)\quad (i=\overline{1,n}),$$

де $Y_i(p)$ – невідомі функції, $i=\overline{1,n}$.

Приклад 9. Розв'язати операційним методом систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} y_1(x)=\sin x+\int_0^x y_2(s)ds; \\ y_2(x)=1-\cos x-\int_0^x y_1(s)ds. \end{cases}$$

Розв'язання. Виходячи з властивостей перетворення Лапласа, маємо:

$$y_1(x)\risingdotseq Y_1(p),\ y_2(x)\risingdotseq Y_2(p),\ 1\risingdotseq\frac{1}{p},\ \sin x\risingdotseq\frac{1}{p^2+1},\ \cos x\risingdotseq\frac{p}{p^2+1},$$

$$\int_0^x y_1(s)ds\risingdotseq\frac{1}{p}Y_1(p);\ \int_0^x y_2(s)ds\risingdotseq\frac{1}{p}Y_2(p),$$

Після переходу до зображень отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} Y_1(p) = \dfrac{1}{p^2+1} + \dfrac{1}{p} Y_2(p), \\ Y_2(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{1}{p} Y_1(p). \end{cases}$$

Систему лінійних рівнянь відносно $Y_1(p)$ і $Y_2(p)$ розв'яжемо за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{1}{p} \\ \dfrac{1}{p} & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2+1}{p^2};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p^2+1} & -\dfrac{1}{p} \\ \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2+1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{p^2};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{p^2+1} \\ \dfrac{1}{p} & \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+1} \end{vmatrix} = 0.$$

$$Y_1(p) = \frac{1}{p^2+1}, \quad Y_2(p) = 0.$$

Повертаючись до оригіналів, матимемо

$$y_1(x) = \sin x, \quad y_2(x) = 0.$$

Приклад 10. Розв'язати операційним методом систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} y_1(x) = x + \int\limits_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = 1 - \int\limits_0^x y_1(s)ds, \\ y_3(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^x (x-s)y_1(s)ds. \end{cases}$$

Розв’язання. Перейдемо до зображень і застосуємо теорему про згортку. Тоді дістанемо

$$y_1(x) \risingdotseq Y_1(p),\ \ y_2(x) \risingdotseq Y_2(p),\ y_3(x) \risingdotseq Y_3(p),$$

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p},\ \ x \risingdotseq \frac{1}{p^2},\ \ \sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1},$$

$$\int_0^x y_2(s)ds \risingdotseq \frac{1}{p}Y_2(p),\ \ \int_0^x y_1(s)ds \risingdotseq \frac{1}{p}Y_1(p),\ \ \int_0^x (x-s)y_1(s)ds \risingdotseq \frac{1}{p^2}Y_1(p).$$

$$\begin{cases} Y_1(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p}Y_2(p), \\ Y_2(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}Y_1(p), \\ Y_3(p) = \dfrac{1}{p^2+1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p^2}Y_1(p). \end{cases}$$

$$Y_1(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}Y_1(p),\ \text{або}\ \ Y_1(p)(1+\frac{1}{p^2}) = \frac{2}{p^2},$$

$$Y_1(p) = \frac{2}{p^2+1}, \qquad y_1(x) = 2\sin x.$$

$$Y_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}Y_1(p), \quad y_2(x) = 1 - \int_0^x y_1(s)ds =$$

$$= 1 - \int_0^x 2\sin s ds = 1 + 2\cos s\Big|_0^x = 1 - 2\cos x - 2 = 2\cos x - 1,$$

$$y_2(x) = 2\cos x - 1.$$

$$Y_3(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}Y_1(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}\cdot\frac{2}{p^2+1} =$$

$$= \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{p^2+1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2},$$

$$y_3(x) = x.$$

Розв’язок системи рівнянь:

$$y_1(x) = 2\sin x,\ y_2(x) = 2\cos x - 1,\ y_3(x) = x.$$

Системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду типу згортки

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{x} K_{ij}(x-s)y_j(s)ds = f_i(x) \quad (i=\overline{1,n}),$$

де функції $K_{ij}(x)$, $i,j=\overline{1,n}$ та $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ є оригіналами, можуть бути розв’язані за допомогою перетворення Лапласа.

7.2.4. Лінійні інтегро-диференціальні рівняння типу згортки

Для інтегро-діференціального рівняня зображення розв’язку можна знайти за допомогою теореми згортки у разі, коли ядро відповідного рівняння – функція вигляду $K(x-s)$.

Інтегро-диференціальне рівняння типу згортки має вигляд:

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'(x)+a_ny(x)+$$

$$+\sum_{m=0}^{q}\int_{0}^{x}K_m(x-s)y^{(m)}(s)ds = f(x), \tag{7.39}$$

де a_i – сталі коефіцієнти, $i=\overline{1,n}$.

При розв’язанні інтегро-диференціальних рівнянь (7.39) для шуканої функції $y(x)$ задаються початкові умови

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}. \tag{7.40}$$

Вважаємо, що функції $K_m(x)$, $m=0,1,\ldots,q$ та $f(x)$ – неперервні функції-оригінали. Нехай

$$K_m(x) \risingdotseq L_m(p),\ \ f(x) \risingdotseq F(p),\ \ y(x) \risingdotseq Y(p).$$

Застосуємо до обох частин (7.39) перетворення Лапласа:

$$p^nY(p)-p^{n-1}y(0)-p^{n-2}y'(0)-\ldots-py^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0)+$$

$$+a_1\left(p^{n-1}Y(p)-p^{n-2}y(0)-p^{n-3}y'(0)-\ldots-py^{(n-3)}(0)-y^{(n-2)}(0)\right)+$$

$$+\ldots+a_{n-1}(pY(p)-y(0))+a_nY(p)+$$

$$+\sum_{m=0}^{q}L_m(p)\left(p^mY(p)-p^{m-1}y(0)-p^{m-2}y'(0)-\ldots-y^{(m-1)}(0)\right)=F(p). \tag{7.41}$$

Розв’язавши (7.41), знаходимо операторний розв’язок $Y(p)$. Визначивши оригінал для $Y(p)$, отримуємо розв’язок $y(x)$ інтегро-диференціального рівняння (7.39), який задовольняє початковим умовам (7.40).

Приклад 11. Розв’язати операційним методом інтегро-диференціальне рівняння типу згортки

$$y''(x) + 2y'(x) - 2\int_0^x \sin(x-s)\,y'(s)\,ds = \cos x\,,$$

якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Розв’язання. Запишемо операторне рівняння, враховуючи, що

$$y(x) \risingdotseq Y(p), \quad y''(x) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p),$$

$$y'(x) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p), \quad \cos x \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}, \quad \sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1},$$

Тоді маємо рівняння

$$p^2Y(p) + 2pY(p) - 2\frac{1}{p^2+1}pY(p) = \frac{p}{p^2+1},$$

$$Y(p)\left[p^4 + p^2 + 2p^3 + 2p - 2p\right] = p\,.$$

$$Y(p) = \frac{p}{p^4 + 2p^3 + p^2} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{1}{p(p^2 + 2p + 1)} = \frac{1}{p(p+1)^2}\,.$$

Оскільки $e^{-x} \risingdotseq \frac{1}{p+1}$ і $\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p+1}\right) = -\frac{1}{(p+1)^2}$, то згідно властивості диференціювання зображення $(-xf(x) \risingdotseq F'(p))$, отримаємо

$$xe^{-x} = -(-xe^{-x}) \risingdotseq \frac{1}{(p+1)^2},$$

За теоремою інтегрування оригіналу $\int_0^x f(x)dx \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$ матимемо

$$y(x) = \int_0^x se^{-s}ds = -se^{-s}\Big|_0^x + \int_0^x e^{-s}ds = -xe^{-x} - e^{-x} + 1\,.$$

Остаточно $y(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$.▶

Теорему про згортку можна також використати для розв’язання нелінійних рівнянь Вольтерри вигляду

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_0^x y(x)y(x-s)\,ds\,. \tag{7.42}$$

Якщо $y(x) \risingdotseq Y(p)$, $f(x) \risingdotseq F(p)$, то операторне рівняння виглядатиме так:

$$Y(p) = F(p) + \lambda Y^2(p), \quad \text{або} \quad \lambda Y^2(p) - Y(p) + F(p) = 0,$$

звідки отримаємо

$$Y(p) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda F(p)}}{2\lambda}.$$

Розв'язок інтегрального рівняння буде знайдено у разі існування оригіналу для $Y(p)$.

Приклад 12. Розв'язати нелінійне інтегральне рівняння

$$\int_0^x y(s) y(x-s) ds = \frac{x^5}{120}.$$

Розв'язання. Нехай $y(x) \risingdotseq Y(p)$, $\frac{x^5}{120} \risingdotseq \frac{1}{p^6}$. Застосуємо перетворення Лапласа до обох частин інтегрального рівняння, отримаємо

$$Y^2(p) = \frac{1}{p^6},$$

$$Y(p) = \pm \frac{1}{p^3}.$$

Розв'язками рівняння будуть дві функції $y_1(x) = \frac{x^2}{2}$ та $y_2(x) = -\frac{x^2}{2}$.►

Питання та приклади до самостійної роботи

1. Яке інтегральне перетворення називається перетворенням Фур'є?
2. Для яких функцій існує інтегральне перетворення Фур'є?
3. Що називається оберненим перетворенням Фур'є?
4. Який інтеграл називається згорткою функцій в перетворенні Фур'є?
5. Сформулюйте основні властивості згортки.
6. Які рівняння називаються інтегральними рівняннями типу згортки?
7. Опишіть алгоритм розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри типу згортки за допомогою перетворення Фур'є.
8. За яких умов функція $f(x)$ дійсної змінної x називається оригіналом в перетворенні Лапласа?
9. Яка функція називається зображенням оригінала $f(x)$?
10. Яка функція називається функцією Хевісайда?
11. Сформулюйте основні властивості перетворення Лапласа.

12. Запишіть формулу оберненого перетворення Лапласа.

13. Опишіть алгоритм розв'язання інтегральних і інтегро-диференціальних рівнянь типу згортки за допомогою перетворення Лапласа.

14. Скориставшись перетворенням Фур'є, знайти розв'язок рівняння

$$y(x) = f(x) + \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-s)}y(s)ds, \qquad \text{де } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 0, \\ e^{x}, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Відповідь: $y(x) = \begin{cases} 0{,}5e^{-\frac{x}{2}}, & \text{при } x > 0, \\ 0{,}5e^{\frac{x}{2}}, & \text{при } x < 0. \end{cases}$

15. Розв'язати операційним методом інтегральні рівняння:

$$\text{а) } \int_0^x (x-s)^2 y(s)ds = x^3; \quad \text{б) } y(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-s}y(s)ds.$$

Відповіді: а) $y(x) = 3$; б) $y(x) = \frac{2}{5}e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

16. Розв'язати операційним методом системи інтегральних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} y_1(x) = -1 + \int_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = x - \int_0^x y_1(s)ds; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y_1(x) = 1 - 2\int_0^x e^{2(x-s)}y_1(s)ds + \int_0^x y_2(s)ds; \\ y_2(x) = 4x - \int_0^x y_1(s)ds + 4\int_0^x (x-s)y_2(s)ds. \end{cases}$$

Відповіді: а) $y_1(x) = 1 - 2\cos x$, $y_2(x) = 2\sin x$; б) $y_1(x) = e^{-x} - xe^{-x}$, $y_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}$.

17. Розв'язати операційним методом інтегро-диференціальні рівняння:

$$\text{а) } y''(x) + y(x) + \int_0^x \text{sh}(x-s)y(s)ds + \int_0^x \text{ch}(x-s)y'(s)ds = \text{ch}x, \; y(0) = -1, \; y'(0) = 1;$$

$$\text{б) } \int_0^x \text{e}^{x-s}\sin(x-s)y(s)ds = y''(x) - y'(x) + e^{x}(1-\cos x), \;\; y(0) = y'(0) = 1.$$

Відповіді: а) $y(x) = 1 - x + 2\sin x - 2\cos x$; б) $y(t) = e^{t}$.

8. ЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО РОДУ

§ 8.1. Лінійні інтегральні рівняння Фредгольма першого роду. Теорема Пікара

Теорема Пікара. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x).$$

Нехай виконуються наступні три умови:

1) ядро $K(x,s)$ дійсне симетричне;

2) ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 f_n^2$ збігається, де λ_n – власні числа інтегрального оператора з ядром $K(x,s)$, а f_n – коефіцієнти розкладання $f(x)$ в ряд Фур'є за системою власних функцій $y_n(x)$ інтегрального оператора;

3) система власних функцій $\{y_n(x)\}_0^\infty$ повна на $[a,b]$.

Тоді інтегральне рівняння Фредгольма першого роду має єдиний розв'язок у класі $L_2[a,b]$, який задається виразом

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f_n y_n(x). \tag{8.1}$$

Приклад 1. Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^1 K(x,s)y(s)ds = \sin^3 \pi x, \tag{8.2}$$

де $K(x,s) = \begin{cases} (1-s)x, & 0 \le s \le x, \\ s(1-x), & x \le s \le 1. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо власні числа і власні функції інтегрального оператора. Для цього розглянемо рівняння

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s)y(s)ds.$$

Підставимо вираз для ядра інтегрального рівняння:

$$y(x) = \lambda \left[(1-x)\int_0^x sy(s)ds + x\int_x^1 (1-s)y(s)ds \right].$$

Скориставшись формулою Лейбніца (1.27), продиференціюємо двічі обидві частини рівняння за змінною x:

$$y'(x) = \lambda \left[-\int_0^x sy(s)ds + x(1-x)y(x) + \int_x^1 (1-s)y(s)ds - (1-x)xy(x) \right],$$

$$y'(x)=\lambda\left[-\int_0^x sy(s)ds+\int_x^1(1-s)y(s)ds\right],$$

$$y''=\lambda\left[-xy(x)-(1-x)y(x)\right],$$

$$y''+\lambda y(x)=0.$$

Визначимо крайові умови:

$$y(0)=0,\quad y(1)=0.$$

В результаті отримуємо задачу Штурма – Ліувілля:

$$y''+\lambda y(x)=0, \tag{8.3}$$

$$y(0)=0,\quad y(1)=0. \tag{8.4}$$

Розглянемо наступні три випадки:

1) $\lambda=0$, тоді рівняння (8.3) запишеться у вигляді $y''=0$. Характеристичне рівняння $k^2=0$ має корені $k_{1,2}=0$. Розв'язок рівняння:

$$y(x)=C_1+C_2x.$$

Невідомі C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов (8.4)

$$\begin{cases}C_1+C_2\cdot 0=0,\\ C_1+C_2=0.\end{cases}$$

Тобто $C_1=0, C_2=0$, $y(x)=0$ – не є власною функцією.

2) $\lambda<0$, $y''+\lambda y(x)=0$, $k^2=-\lambda$, $k_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$.

$$y(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Використовуючи крайові умови, складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}}=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_2=-C_1,\\ C_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}}-e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)=0.\end{cases}$$

Оскільки $C_1=0, C_2=0$, то $y(x)=0$ не є власною функцією.

3) $\lambda>0$, $y''+\lambda y(x)=0$, $k^2=-\lambda$, $k_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$,

$$y(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

$$\begin{cases}C_1+C_2\cdot 0=0,\\ C_1\cos\sqrt{\lambda}+C_2\sin\sqrt{\lambda}=0,\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda} & \sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0\ , \quad \sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n \in N, \quad \lambda_n = n^2\pi^2, \quad n \in N.$$

Отримали розв'язок задачі Штурма–Ліувілля: характеристичні числа $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n \in N$; власні функції $y_n(x) = \sin \pi n x$.

Перевіримо виконання умов теореми Пікара щодо існування розв'язку вихідного рівняння.

За умовою ядро інтегрального рівняння (8.2) дійсне симетричне.

Коефіцієнти f_n розкладання функції $f(x) = \sin^3 \pi x$ в ряд Фур'є за системою власних функцій $y_n(x)$ визначимо з використанням тригонометричних тотожностей:

$$\sin^3 \pi x = \sin \pi x \cdot \sin^2 \pi x = \sin \pi x \left(\frac{1 - \cos 2\pi x}{2} \right) = \frac{\sin \pi x}{2} - \frac{\sin \pi x \cos 2\pi x}{2}.$$

Оскільки

$$\sin \pi x \cos 2\pi x = \frac{1}{2}(\sin 3\pi x - \sin \pi x),$$

то

$$\sin^3 \pi x = \frac{3}{4}\sin \pi x - \frac{1}{4}\sin 3\pi x.$$

Таким чином, отримано розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є за синусами:

$$f(x) = \frac{3}{4}\sin \pi x - \frac{1}{4}\sin 3\pi x.$$

Коефіцієнти ряду:

$$f_1 = \frac{3}{4}, \ f_3 = -\frac{1}{4}, \quad f_k = 0, \quad k = 2,4,5,...$$

З'ясуємо, чи буде ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 f_n^2$ збіжним. Підставимо значення λ_n і f_n:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 f_n^2 = \pi^4 \cdot \frac{9}{16} + 9\pi^4 \cdot \frac{81}{16} = \frac{90}{16}\pi^4.$$

Оскільки сума ряду скінченна, то ряд збігається.

Згідно з теоремою Гільберта–Шмідта, система власних функцій $\{y_n(x)\}_0^\infty$ інтегрального самоспряженого оператора з симетричним ядром є повною на відрізку $[0,1]$.

Відтак, умови теореми Пікара виконуються. Єдиний розв'язок вихідного інтегрального рівняння існує і має вигляд:

$$y(x)=\lambda_1 f_1 y_1(x)+\lambda_3 f_3 y_3(x)=\frac{3\pi^2}{4}\sin\pi x-\frac{9\pi^2}{4}\sin 3\pi x\,.$$

§ 8.2. Інтегральні рівняння Вольтерри першого роду

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds=f(x),\qquad x,s\in[a,b]. \tag{8.5}$$

На відміну від рівнянь Вольтерри другого роду при дослідженні таких рівнянь потрібні додаткові умови.

Рівняння Вольтерри першого роду (8.5) має в інтервалі (a,b) *неперервний єдиний розв'язок, якщо функції* $f(x)$ *і* $K(x,s)$ *мають неперервні похідні* $f'(x)$ *і* $K'_x(x,s)$, $f(a)=0$, а $K(x,x)$ *не обертається на нуль на* $[a,b]$.

Одним з поширених прийомів перетворень при розв'язанні рівнянь Вольтерри першого роду є зведення їх до рівнянь Вольтерри другого роду. Цей прийом здійснюється ***диференціюванням*** або ***інтегруванням частинами*** вихідного рівняння.

Розглянемо метод ***диференціювання***. Якщо в рівнянні першого роду ядро і права частина мають похідні $K'_x(x,s)$ і $f'(x)$, то після диференціювання обох частин рівняння отримуємо

$$K(x,x)y(x)+\int_a^x K'_x(x,s)y(s)ds=f'(x), \tag{8.6}$$

або, після ділення на $K(x,x)$, вираз

$$y(x)+\int_a^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)}y(s)ds=\frac{f'(x)}{K(x,x)},$$

який являє собою інтегральне рівняння Вольтерри другого роду і має той самий розв'язок, що й (8.5). Таким чином, за умови $K(x,x)\neq 0$ перехід до рівняння (8.6) дозволяє застосовувати методи розв'язання рівнянь другого роду.

Якщо $K(x,x)=0$, то (8.6) залишається рівнянням першого роду, і його можна перетворити так, як це було зроблено з рівнянням (8.5), якщо тільки ядро та права частина мають другу неперервну похідну $K''_{xx}(x,s)$ та $f''(x)$. При виконанні цих умов диференціювання (8.6) дає

$$K'_x(x,x)y(x)+\int_a^x K''_{xx}(x,s)y(s)ds = f''(x).$$

Це рівняння другого роду, якщо $K'_x(x,s)\neq 0$. Коли ж $K'_x(x,s)=0$, то можна знову застосувати диференціювання і т. д. В загальному випадку при n-кратному диференціюванні можна отримати рівняння

$$\frac{\partial^{(n-1)}K(x,x)}{\partial x^{(n-1)}}y(x)+\int_a^x \frac{\partial^n K(x,s)}{\partial x^n}y(s)ds = f^{(n)}(x),$$

яке є рівнянням другого роду за умови $\frac{\partial^{n-1}K(x,x)}{\partial x^{n-1}}\neq 0$. Якщо функції $\frac{\partial^n K(x,s)}{\partial x^n}$ та $f^{(n)}(x)$ неперервні, то отримане рівняння матиме єдиний неперервний розв'язок, який збігається з єдиним розв'язком інтегрального рівняння Вольтерри першого роду (8.5).

Приклад 2. Знайти розв'язок інтегрального рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^x e^{x+s}y(s)ds = x,$$

звівши його до інтегрального рівняння другого роду методом диференціювання.

Розв'язання. Скористаємось формулою Лейбніца. Продиференціюємо обидві частини інтегрального рівняння Вольтерри першого роду за змінною x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x e^{x+s}y(s)ds = \frac{\partial x}{\partial x}.$$

За формулою (1.27) маємо:

$$1\cdot e^{x+x}y(x)-0+\int_0^x e^{x+s}y(s)ds = 1,$$

$$e^{2x}y(x)+\int_0^x e^{x+s}y(s)ds = 1.$$

Порівнявши другий доданок з лівою частиною вихідного рівняння, отримуємо:

$$e^{2x}y(x)+x=1,\ \text{або}\ \ y(x)=e^{-2x}(1-x).$$

Приклад 3. Знайти розв'язок інтегрального рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^x (x+s+1)y(s)ds = x,$$

зводячи його до інтегрального рівняння другого роду методом диференціювання.

Розв'язання. Продиференціюємо рівняння за змінною x:

$$x\int_0^x y(s)ds + \int_0^x sy(s)ds + \int_0^x y(s)ds = x,$$

$$\int_0^x y(s)ds + xy(x) + xy(x) + y(x) = 1,$$

$$\int_0^x y(s)ds + 2xy(x) + y(x) = 1.$$

$$(2x+1)y(x) + \int_0^x y(s)ds = 1, \quad 2x+1 \neq 0, \quad x \geq 0. \tag{8.7}$$

Після ділення на $(2x+1)$ маємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду:

$$y(x) = -\int_0^x \frac{y(s)}{(2x+1)}ds + \frac{1}{2x+1}. \tag{8.8}$$

Зведемо отримане рівняння до звичайного диференціального рівняння:

$$y'(x) = -\frac{1}{2x+1}y(x) + \frac{2}{(2x+1)^2}\int_0^x y(s)ds - \frac{2}{(2x+1)^2}. \tag{8.9}$$

З (8.7) виразимо інтеграл

$$\int_0^x y(s)ds = 1-(2x+1)y(x).$$

Підставивши його в (8.9), отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'(x) = -\frac{1}{2x+1}y(x) + \frac{2}{(2x+1)^2}(1-(2x+1)y(x)) - \frac{2}{(2x+1)^2},$$

$$y'(x) = -\frac{1}{2x+1}y(x) + \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{2(2x+1)}{(2x+1)^2}y(x) - \frac{2}{(2x+1)^2},$$

$$y'(x) = -\frac{3}{2x+1}y(x). \tag{8.10}$$

З рівняння (8.8) знайдемо початкову умову $y(0)=1$. Тоді

$$\frac{dy(x)}{y(x)}=-\frac{3dx}{2x+1},$$

$$\ln y=-\frac{3}{2}\ln|2x+1|+\ln C, \quad \text{або} \quad \ln y=\ln\frac{C}{\sqrt{(2x+1)^3}}.$$

Загальний розв'язок рівняння (8.10):

$$y=\frac{C}{\sqrt{(2x+1)^3}}.$$

З урахуванням початкової умови $y(0)=1$ отримаємо:

$$1=\frac{C}{\sqrt{(2\cdot 0+1)^3}}, \quad C=1.$$

Запишемо окремий розв'язок

$$y=\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}},$$

який також є розв'язком заданого інтегрального рівняння.▶

Інтегральне рівняння Вольтерри першого роду можна звести до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду застосувавши метод ***інтегрування частинами***.

Покладемо в рівнянні (8.5)

$$Y(x)=\int_a^x y(s)ds,$$

тоді $Y(a)=0$. Ліва частина рівняння (8.5), після використання формули інтегрування частинами, в якій $u=K(x,s),\ dv=y(s)ds$, набуває вигляду

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds=[K(x,s)Y(s)]\Big|_{s=a}^{s=x}-\int_a^x K_s'(x,s)Y(s)ds.$$

При $K(x,x)\neq 0$ отримуємо рівняння

$$Y(x)-\int_a^x \frac{K_s'(x,s)}{K(x,x)}Y(s)ds=\frac{f(x)}{K(x,x)}. \tag{8.11}$$

Розв'язавши (8.11) відносно $Y(x)$ за умови, що $f(x)$ має неперервну похідну, знаходимо шукану функцію $y(x)=Y'(x)$.

Приклад 4. Знайти розв'язок інтегрального рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^x (1-x^2+s^2)y(s)ds=\frac{x^2}{2}$$

шляхом зведення його до рівняння другого роду методом інтегрування частинами.

Розв'язання. Введемо функцію $Y(x)=\int\limits_0^x y(s)ds$, тоді $Y(0)=0$, $Y'(x)=y(s)$.

Підставимо $Y(x)$ в інтегральне рівняння:

$$\int\limits_0^x (1-x^2+s^2)Y'(s)ds = \frac{x^2}{2}.$$

Для обчислення інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int\limits_0^x (1-x^2+s^2)Y'(s)ds = \left\{\begin{array}{l|l} u=1-x^2+s^2, & du=2sds, \\ dv=Y'(s)ds & v=Y(s) \end{array}\right\} =$$

$$=(1-x^2+s^2)Y(s)\Big|_0^x - 2\int\limits_0^x sY(s)ds = Y(x) - 2\int\limits_0^x sY(s)ds.$$

Підставимо результат інтегрування в рівняння:

$$Y(s)-2\int\limits_0^x sY(s)ds = \frac{x^2}{2}.$$

Після диференціювання обох частин рівняння отримаємо задачу Коші:

$$Y'(x)-2xY(x)=x,\ \ Y(0)=0.$$

Розв'яжемо отримане лінійне рівняння методом Бернуллі:

$Y(x)=uv$, $Y'(x)=u'v+uv'$, $u'v+uv'-2xuv=x$, $u'v+u(v'-2xv)=x$, $\frac{dv}{dx}=-2v$, $v=e^{x^2}$, $u'e^{x^2}=x$, $\frac{du}{dx}=xe^{-x^2}$, $u=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$, $Y(x)=\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\right)e^{x^2}$.

З урахуванням початкових умов $Y(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{x^2}$. Отже, розв'язок інтегрального рівняння Вольтерри першого роду $y(x)=Y'(x)=xe^{x^2}$.▶

Якщо ядро інтегрального рівняння залежить лише від x чи від s (або є добутком таких функцій), $K(x,x)\neq 0$ на відрізку $[a,b]$, $f(a)=0$, то інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int\limits_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x)$$

вдається розв'язати ще простіше.

Приклад 5. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^x (x+1)y(s)ds = x.$$

Розв’язання. Оскільки $x+1 \neq 0$ для $x \geq 0$, то

$$\int_0^x y(s)ds = \frac{x}{x+1}.$$

Продиференціювавши обидві частини за змінною x, одержимо:

$$y(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}, \quad \text{або} \quad y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}. ▶$$

Питання та приклади до самостійної роботи

1. Сформулюйте умови існування єдиного розв’язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з симетричним ядром.
2. За яких умов система власних функцій оператора Фредгольма називається повною?
3. Сформулюйте умови існування єдиного розв’язку інтегрального рівняння Вольтерри першого роду.
4. Які умови повинні виконуватися для зведення інтегрального рівняння Вольтерри першого роду до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду методом диференціювання?
5. Не розв’язуючи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду, вкажіть ті з них, які не мають неперервних розв’язків:

а) $\int_0^x 3^{x-s} y(s)ds = x$; б) $\int_0^x (e^{x-s}-1)y(s)ds = \sin^2 x$;

в) $\int_0^x (1-x^2+s^2)y(s)ds = x^3$; г) $\int_0^x (x-s)^3 y(s)ds = e^x - 3x - 1$.

6. Розв’язати лінійні інтегральні рівняння Вольтерри першого роду, звівши їх до рівнянь другого роду методом диференціювання і інтегрування частинами:

а) $\int_0^x e^{x-s} y(s)ds = \sin x$; б) $\int_0^x \cos(x-s)y(s)ds = \sin x$; в) $\int_1^x (2s-x)y(s)ds = x^3 - 1$.

Відповіді: 5. б, г. 6. а) $y(x) = \cos x - \sin x$; б) $y(x) = 1$; в) $y(x) = 3(2x-1)$.

9. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§ 9.1. Метод вироджених ядер

Метод вироджених ядер є обчислювально-аналітичним методом, який дозволяє за допомогою апроксимації довільного ядра виродженим отримати наближений розв’язок інтегрального рівняння в кінцевому вигляді з певним рівнем точності.

Розглянемо інтегральне рівняння

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x) \tag{9.1}$$

з довільним ядром $K(x,s)$. В якості виродженого ядра $K(x,s)$, яке близьке до $K(x,s)$, можна вибрати, наприклад, відрізок ряду Тейлора для функції $K(x,s)$ або відрізок ряду Фур’є для $K(x,s)$ за будь-якою повною ортонормованою в $L_2[a,b]$ системою функцій. Наближенням до розв’язку вихідного рівняння приймається розв’язок $y(x)$ рівняння

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x).$$

Якщо відомо, що

$$\int_a^b \left| K(x,s) - K(x,s) \right| ds < h,$$

резольвента $R_K(x,s,\lambda)$ рівняння з ядром $K(x,s)$ задовольняє нерівність

$$\int_a^b \left| R_{\tilde{K}}(x,s,\lambda) \right| ds < R,$$

а також $\left| f(x) - f_1(x) \right| < \eta$. Тоді за умови

$$1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| R) > 0,$$

рівняння

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x)$$

має єдиний розв’язок $y(x) 0$. Різниця між цим розв’язком та розв’язком $y(x)$ може бути оцінена за допомогою нерівності

$$\left| y(x) - y(x) \right| < \frac{N|\lambda|(1+|\lambda|R)^2 h}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|R)} + \eta, \tag{9.2}$$

де N – верхня межа $\left| f(x) \right|$.

Якщо довільне ядро можна подати у вигляді суми виродженого ядра $K(x,s)$ і ядра з малою нормою $\delta K(x,s)$, тобто

$$K(x,s) = K(x,s) + \delta K(x,s), \tag{9.3}$$

то при $\lambda = 1$ має місце оцінка для норми похибки

$$\left\| y - y \right\| \le \| \delta K \| \left(1 + \| R_K \|\right)\left(1 + \| R_{\tilde{K}} \|\right) \| f \|, \tag{9.4}$$

де R_K і $R_{\tilde{K}}$ – резольвенти ядер $K(x,s)$ і $K(x,s)$, $\| \delta K \|$, $\| R_K \|$, $\| R_{\tilde{K}} \|$ – норми операторів з відповідними ядрами.

Для норми резольвенти R довільного ядра $K(x,s)$ справедлива оцінка

$$\| R \| \le \frac{\| K \|}{1 - | \lambda | \| K \|}. \tag{9.5}$$

При цьому в просторі $C[0,1]$ неперервних функцій на відрізку $[0,1]$ маємо

$$\| K \| = \max_{0 \le x \le 1} \int_0^1 | K(x,s) | ds, \tag{9.6}$$

$$\| f \| = \max_{0 \le x \le 1} | f(x) |. \tag{9.7}$$

У просторі функцій, сумованих з квадратом по області $Q\{a \le x, s \le b\}$, матимемо

$$\| K \| = \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x,s) dx ds \right)^{1/2}, \tag{9.8}$$

$$\| f \| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}. \tag{9.9}$$

Приклад 1. Розв’язати рівняння

$$y(x) = x + \cos x + \int_0^1 x(\sin xs - 1) y(s) ds,$$

замінивши його ядро на вироджене.

Розв’язання. Розклавши ядро $K(x,s) = x(\sin xs - 1)$ в ряд Тейлора, отримуємо

$$K(x,s) = x(\sin xs - 1) = -x + \frac{x^2 s}{1!} - \frac{x^4 s^3}{3!} + \frac{x^6 s^5}{5!} - \ldots. \tag{9.10}$$

Візьмемо в якості виродженого ядра перші три члени розкладання (9.10):

$$K(x,s) \approx K(x,s) = -x + \frac{x^2 s}{1!} - \frac{x^4 s^3}{3!},$$

$$\delta K(x,s) = \frac{x^6 s^5}{5!}.$$

Розв'яжемо рівняння

$$y(x) = x + \cos x + \int_0^1 \left(-x + \frac{x^2 s}{1!} - \frac{x^4 s^3}{3!} \right) y(s) ds. \qquad (9.11)$$

З (9.11) отримуємо

$$y(x) = x + \cos x - xC_1 + x^2 C_2 - \frac{x^4}{6} C_3, \qquad (9.12)$$

де $$C_1 = \int_0^1 y(s) ds, \quad C_2 = \int_0^1 s y(s) ds, \quad C_3 = \int_0^1 s^3 y(s) ds. \qquad (9.13)$$

Підставивши (9.12) в (9.13), отримуємо систему для визначення невідомих C_1, C_2 і C_3:

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^1 \left(s + \cos s - C_1 s + C_2 s^2 - C_3 \frac{s^4}{6} \right) ds, \\ C_2 = \int_0^1 s \left(s + \cos s - C_1 s + C_2 s^2 - C_3 \frac{s^4}{6} \right) ds, \\ C_3 = \int_0^1 s^3 \left(s + \cos s - C_1 s + C_2 s^2 - C_3 \frac{s^4}{6} \right) ds, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{3}{2} C_1 - \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{30} C_3 = 1{,}342, \\ \frac{1}{3} C_1 + \frac{3}{4} C_2 + \frac{1}{36} C_3 = 0{,}715, \\ \frac{1}{5} C_1 - \frac{1}{6} C_2 + \frac{49}{48} C_3 = 0{,}372. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо

$$C_1 \approx 1, \quad C_2 \approx 0{,}5, \quad C_3 \approx 0{,}252.$$

Наближений розв'язок матиме вигляд

$$y(x) = \cos x + 0{,}5 x^2 - 0{,}042 x^4.$$

Оцінимо норму похибки $\left\| y(x) - y(x) \right\|$ за формулою (9.4). Для цього знайдемо норми

$$\| \delta K \| = \left(\frac{1}{120} \int_0^1 \int_0^1 x^{12} s^{10} dxds \right)^{1/2} = \frac{1}{120\sqrt{143}} < \frac{1}{1435},$$

$$\| K \| = \left(\int_0^1 \int_0^1 x^2 (\sin xs - 1)^2 dxds \right)^{1/2} \approx 0{,}393,$$

$$\left\| K \right\| = \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(-x + x^2 s - \frac{x^4 s^3}{6} \right)^2 dxds \right)^{1/2} \approx 0{,}393,$$

$$\| f \| = \left(\int_0^1 \int_0^1 (x + \cos x)^2 dxds \right)^{1/2} \approx 1{,}350,$$

$$\| R_K \| = \frac{\| K \|}{1 - \| K \|} = \frac{0{,}393}{0{,}607} < 0{,}649,$$

$$\| R_{\tilde{K}} \| = \frac{\left\| K \right\|}{1 - \left\| K \right\|} = \frac{0{,}393}{0{,}607} < 0{,}649.$$

Тоді

$$\left\| y(x) - y(x) \right\| \le \frac{1}{1435} \cdot (1 + 0{,}649) \cdot (1 + 0{,}649) \cdot 1{,}351 < 0{,}003.$$

§ 9.2. Метод Положія

Метод послідовних наближень, реалізований у вигляді простої ітерації в §3.2, при простоті обчислювального алгоритму має обмежену область збіжності. Попереднє перетворення вихідного рівняння, запропоноване у методі Положія, дозволило розширити цю область.

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x)$$

та еквівалентне йому рівняння

$$\int_a^b K(x,s) y(s) ds = \mu y(x) + F(x),$$

де $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $F(x) = -\mu f(x)$.

Знайдемо друге ітероване ядро

$$K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t)K(t,s)dt$$

та функцію

$$N(x,s) = K_2(x,s) - 2\mu K(x,s),$$

а також введемо функцію $\psi(x)$, відносно якої надалі будемо будувати всі послідовні наближення

$$\psi(x) = y(x) + \frac{1}{\mu}F(x).$$

Нульове наближення береться у вигляді

$$\psi_0(x) = \frac{2}{\sigma}F^*(x),$$

де

$$F^*(x) = \int_a^b \left(\frac{1}{\mu}K_2(x,s) - K(x,s) \right) F(s)ds,$$

$$\sigma \geq \mu^2 + 2|\mu| \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds \right)^{1/2} + \int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds.$$

Наступні наближення знаходять за формулами

$$\psi_n(x) = \psi_0(x) + q\psi_{n-1}(x) - \frac{2}{\sigma}\int_a^b N(x,s)\psi_{n-1}(s)ds, \ n = 1,2,.... \qquad (9.14)$$

де $q = 1 - \frac{2\mu^2}{\sigma}$.

Розв’язок рівняння матиме вигляд

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(x) + f(x).$$

Процес послідовних наближень метода Положія збігається для будь-яких значень λ, які не є характеристичними, якщо функції $K(x,s)$ і $f(x)$ обмежені. Це свідчить про те, що, порівняно з методом простої ітерації, даний метод має ширшу область збіжності.

Приклад. Розв'язати наближено методом Положія інтегральне рівняння

$$y(x)=x^3+\int_0^1 xs^2y(s)ds.$$

Розв'язання. Оскільки $\lambda=1$, то $\mu=1$, $F(x)=-f(x)=-x^3$. Обчислимо

$$F_2(x,s)=\int_0^1 xt^2\cdot ts^2dt=\frac{xs^2}{4},$$

$$N(x,s)=\frac{xs^2}{4}-2xs^2=-\frac{7}{4}xs^2,$$

$$F^*(x)=\int_0^1\left(\frac{xs^2}{4}-xs^2\right)\cdot(-s^3)ds=\frac{x}{8},$$

$$\sigma\geq 1+2\left(\int_0^1\int_0^1 x^2s^4dxds\right)^{1/2}+\int_0^1\int_0^1 x^2s^4dxds=1+2\frac{\sqrt{15}}{15}+\frac{1}{15}\approx 1{,}583.$$

Для подальших обчислень візьмемо $\sigma=3$. Нульове наближення $\psi_0=\frac{x}{8}$, $q=\frac{1}{3}$. Будемо шукати послідовні наближення за формулою (9.14):

$$\psi_1=\frac{x}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{8}-\frac{2}{3}\int_0^1\left(-\frac{7}{4}xs^2\right)\cdot\frac{s}{8}ds=\frac{13}{64}x,$$

$$\psi_2=\frac{x}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{64}x-\frac{2}{3}\int_0^1\left(-\frac{7}{4}xs^2\right)\cdot\frac{13}{64}sds=\frac{129}{512}x$$

$$\psi_3=\frac{x}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{129}{512}x-\frac{2}{3}\int_0^1\left(-\frac{7}{4}xs^2\right)\cdot\frac{129}{512}sds=\frac{1157}{4096}x.$$

Відтак,

$$y_3(x)=\psi_3(x)+x^3=\frac{1157}{4096}x+x^3.$$

Якщо порівняти отриманий результат з точним $y(x)=\frac{4}{15}x+x^3$, то похибка дорівнює $|\,y(x)-y_3(x)\,|=\left|\frac{4}{15}x+x^3-\frac{1157}{4096}x-x^3\right|\approx 0{,}016x<0{,}02$.

§ 9.3. Метод квадратурних формул для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Ідея метода квадратурних формул полягає в заміні інтегрального рівняння апроксимуючою системою алгебраїчних рівнянь відносно дискретних значень шуканої функції. В основу метода покладено наближення інтегрального оператора, який входить в рівняння, квадратурними формулами

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{j=1}^n A_j F(x_j) + \varepsilon(F),$$

де точки x_j $(j=\overline{1,n})$ належать відрізку $[a,b]$, коефіцієнти A_j не залежать від функції $F(x)$, $\varepsilon(F)$ – похибка заміни інтеграла сумою (залишковий член квадратурної формули).

Якщо в лінійному інтегральному рівнянні Фредгольма другого роду

$$y(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x) \qquad (9.15)$$

покласти $x = x_i$ $(i=\overline{1,n})$, то отримуємо вихідне для даного метода співвідношення

$$y(x_i) - \lambda\int_a^b K(x_i,s)y(s)ds = f(x_i), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

з якого після заміни інтеграла кінцевою сумою одержуємо систему рівнянь

$$y(x_i) - \lambda\sum_{j=1}^n A_j K(x_i,x_j)y(x_j) = f(x_i) + \lambda\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

де $\varepsilon_i = \varepsilon(K(x_i,s), y(s))$. Після відкидання малої величини $\lambda\varepsilon_i$ для знаходження наближених значень $y(x_i) = y_i$ розв'язку $y(x)$ у вузлах $x_1, x_2, ..., x_n$ запишемо лінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$y_i - \lambda\sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (9.16)$$

де введені позначення

$$K_{ij} = K(x_i,x_j), \quad f_i = f(x_i).$$

Розв'язок системи (9.16) дає значення y_1, y_2, ..., y_n, за якими шляхом інтерполяції знаходиться наближений розв'язок інтегрального рівняння (9.15) на всьому відрізку $[a,b]$. В якості наближеного розв'язку можна взяти функцію, отриману шляхом лінійної інтерполяції, тобто вона співпадає з y_i в точках x_i і є лінійною на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$.

В якості наближеного розв'язку рівняння в аналітичній формі можна прийняти функцію

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) y_j, \tag{9.17}$$

яка у вузлах $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ набуває значень $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$.

Для рівнянь Фредгольма першого роду

$$\lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x)$$

замість системи (9.16) матимо систему

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Цей метод може бути застосований і для розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь виду

$$\int_a^b K(x, s, y(x), y(s)) ds = f(x),$$

але в цьому випадку замість системи (9.16) маємо систему

$$\sum_{j=1}^{n} A_j K(x_i, x_j; y_i, y_j) = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

яка буде вже нелінійною.

Приклад 2. Розв'язати наближено методом квадратур інтегральне рівняння

$$y(x) = x^3 + \int_0^1 x s^2 y(s) ds.$$

Розв'язання. Оберемо вузлові точки $x_1 = 0, x_2 = 0{,}5, x_3 = 1$ та обчислимо в них значення правої частини $f(x) = x^3$ і ядра $K(x,s) = xs^2$:

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \quad f(1) = 1,$$

$$K(0,0) = 0, \quad K\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0, \quad K(0,1) = 0;$$

$$K\left(\frac{1}{2},0\right)=0,\quad K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8},\quad K\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{2};$$
$$K\left(1,0\right)=0,\quad K\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad K\left(1,1\right)=1.$$

Скористаємось квадратурною формулою Сімпсона

$$\int_0^1 F(s)ds \approx \frac{1}{6}\left(F(0)+4F\left(\frac{1}{2}\right)+F(1)\right).$$

Похибка обчислення інтеграла за цією формулою з кроком h дорівнює

$$R=-\frac{h^4(b-a)}{180}\frac{d^4}{ds^4}(F(s))_\xi,\quad \xi\in[a,b].$$

Для визначення наближених значень y_i $(i=1,2,3)$ розв’язку $y(x)$ у вузлах x_i, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_1-(0\cdot y_1+4\cdot 0\cdot y_2+0\cdot y_3)/6=0; \\ y_2-\left(0\cdot y_1+4\cdot\frac{1}{8}\cdot y_2+\frac{1}{2}\cdot y_3\right)/6=\frac{1}{8}; \\ y_3-\left(0\cdot y_1+4\cdot\frac{1}{4}\cdot y_2+1\cdot y_3\right)/6=1, \end{cases}$$

розв’язком якої є $y_1=0,$ $y_2=\frac{1}{4},$ $y_3=\frac{19}{18}$. Тоді, згідно (9.17), наближений розв’язок інтегрального рівняння виглядатиме

$$y(x)=x^3+\frac{1}{6}\cdot\left(1\cdot 0\cdot 0+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x+1\cdot\frac{19}{18}x\right)=x^3+0,214x.$$

Похибка такого наближення

$$R=-\frac{1}{2880}\cdot 120\xi=-\frac{\xi}{24},\ \xi\in[0,1].$$

Максимальна похибка досягається при $\xi=1$, тобто $|R|\le\frac{1}{24}\approx 0,04$.

§ 9.4. Метод Бубнова-Гальоркіна

Розглянемо метод розв’язання інтегральних рівнянь (9.15), заснований на поданні наближеного розв’язку $y(x)$ у вигляді функції, що залежить від вільних параметрів C_i $(i=\overline{1,n})$. В методі Бубнова-Гальоркіна це функція, лінійно залежна від параметрів C_i

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x). \tag{9.18}$$

де $y_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ – відомі лінійно незалежні функції. Система координатних функцій $\{y_i(x)\}$ вважається повною в $L_2[a,b]$. Вільні параметри $C_1, C_2, \ldots, C_n$ знаходять з умови ортогональності нев'язки

$$\varepsilon(x) \equiv Uy(x) \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds - f(x) = 0$$

до кожної з функцій $y_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$, тобто з системи лінійних рівнянь:

$$(y(x), y_i(x)) = (f(x), y_i(x)) + \lambda \left(\int_a^b K(x,s) y(x) ds,\, y_i(x) \right) \quad (i=\overline{1,n}), \tag{9.19}$$

де позначено $(f,y)=\int_a^b f(x)y(x)dx$, а $y(x)$ має вигляд (9.18).

Оцінимо похибку наближення (9.18) для операторного рівняння

$$y=\lambda Ay+f$$

з нев'язкою

$$\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} C_i (y_i - \lambda A y_i) - f \,.$$

Віднімаючи від точного рівняння наближене у вигляді $y=\lambda Ay+f+\varepsilon_n$, отримаємо оцінку

$$\left\| y-y \right\| \le \left\| (I-\lambda A)^{-1} \right\| \cdot \left\| \varepsilon_n \right\|.$$

Приклад 3. Методом Бубнова-Гальоркіна розв'язати рівняння

$$y(x)=1+\frac{4}{3}x+\int_{-1}^{1}(xs^2-x)y(s)ds\,.$$

Розв'язання. В якості повної системи координатних функцій обираємо систему поліномів Лежандра $P_n(x)$. Тоді наближений розв'язок матиме вигляд

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3\frac{3x^2-1}{2}.$$

Підставивши у вихідне рівняння $y(x)$ замість $y(x)$, отримаємо:

$$C_1+C_2x+C_3\frac{3x^2-1}{2}=1+\frac{4}{3}x+\int_{-1}^{1}(xs^2-x)(C_1+C_2s+C_3\frac{3s^2-1}{2})ds\,,$$

або $\quad C_1 + C_2 x + C_3 \frac{3x^2-1}{2} = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}C_1 x + \frac{4}{15}C_3 x$.

Помножимо послідовно обидві частини отриманої рівності на 1, x, та $\frac{3x^2-1}{2}$. Після інтегрування по x в межах $[-1,1]$ одержимо систему:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}\left(C_1 + C_2 x + C_3 \frac{3x^2-1}{2}\right)\cdot 1\cdot dx = \int_{-1}^{1}\left(1 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}C_1 x + \frac{4}{15}C_3 x\right)\cdot 1\cdot dx, \\ \int_{-1}^{1}\left(C_1 x + C_2 x^2 + C_3 \frac{3x^3-x}{2}\right)\cdot x\cdot dx = \int_{-1}^{1}\left(x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}C_1 x^2 + \frac{4}{15}C_3 x^2\right)\cdot x\cdot dx, \\ \int_{-1}^{1}\left(C_1 + C_2 x + C_3 \frac{3x^2-1}{2}\right)\cdot \frac{3x^2-1}{2}dx = \int_{-1}^{1}\left(1 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}C_1 x + \frac{4}{15}C_3 x\right)\cdot \frac{3x^2-1}{2}dx, \end{cases}$$

$$\text{або} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ 15C_2 - 4C_3 = 0, \\ C_3 = 0. \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$. Це дозволяє отримати розв’язок $y(x) = 1$, який співпадає з точним.

§ 9.5. Метод колокації

В методі колокації наближений розв’язок знаходиться за умови обертання на нуль нев’язки $\varepsilon(x, C_i)$ в заданій системі точок x_j $(i = \overline{1,n})$ на відрізку $[a,b]$, які називаються точками колокації, тобто

$$\varepsilon(x_j, C_i) = 0 \quad (i, j = \overline{1,n}).$$

Якщо наближений розв’язок рівняння (9.15) подано у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x),$$

то для визначення коефіцієнтів C_i $(i = \overline{1,n})$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \left\{ y_i(x) - \lambda \int_a^b K(x_j, s) y_i(s) ds \right\} = f(x_i) \qquad (j = \overline{1,n}),$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \psi_i(x_j, \lambda) = f(x_j) \quad (j = \overline{1,n}),$$

де

$$\psi_i(x,\lambda) = y_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y_i(s) ds \,.$$

Приклад 4. Розв'язати методом колокації рівняння

$$y(x) = 1 + \int_0^1 xs^2 y(s) ds \,.$$

Розв'язання. В якості повної системи координатних функцій обираємо систему поліномів Лежандра $P_n(x)$. Тоді наближений розв'язок запишеться у вигляді

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \frac{3x^2 - 1}{2} \;.$$

Підставивши $y(x)$ у вихідне рівняння, маємо

$$\varepsilon(x, C_i) = C_1 + C_2 x + C_3 \frac{3x^2-1}{2} - \int_0^1 xs^2 \left(C_1 + C_2 s + C_3 \frac{3s^2-1}{2} \right) ds - 1 \,,$$

або

$$\varepsilon(x, C_i) = C_1 \left(1 - \frac{x}{3} \right) + \frac{3}{4} C_2 x + C_3 \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{2}{15} x - \frac{1}{2} \right) - 1.$$

Обравши точки колокації $x_1 = 0,\;\; x_2 = 0{,}5,\;\; x_3 = 1$, вимагатимемо обертання на нуль нев'язки в цих точках, що приводить до системи:

$$\begin{cases} C_1 - \dfrac{1}{2} C_3 = 1, \\ \dfrac{5}{6} C_1 + \dfrac{3}{8} C_2 + \dfrac{23}{120} C_3 = 1, \\ \dfrac{2}{3} C_1 + \dfrac{3}{4} C_2 + \dfrac{14}{15} C_3 = 1. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 1,\;\; C_2 \approx 0{,}445,\;\; C_3 = 0$. Тоді наближений розв'язок набуває вигляду

$$y(x) = 1 + 0{,}445 x \,,$$

який з точністю до 0,001 збігається з точним розв'язком $y(x) = 1 + \frac{4}{9} x$.▶

Питання та приклади до самостійної роботи

1. У чому полягає метод вироджених ядер для інтегральних рівнянь Фредгольма?

2. Наведіть приклади функцій, які можуть бути обрані у якості вироджених ядер?

3. За якою формулою оцінюють похибку в методі вироджених ядер?

4. Як оцінюється норма похибки в методі вироджених ядер?

5. Які переваги має метод Положія в порівнянні з методом простої ітерації?

6. За яких умов процес послідовних наближень Положія збігається для будь-яких значень параметра λ?

7. В чому полягає ідея методу квадратурних формул?

8. Чи може метод квадратурних формул бути застосований для розв’язання інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду?

9. Як знаходяться параметри $C_1, C_2, \ldots, C_n$ наближеного розв’язку інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду в методі Бубнова-Гальоркіна?

10. Опишіть алгоритм визначення наближеного розв’язку інтегральних рівнянь методом колокації.

11. Методом вироджених ядер розв’язати рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xs} - 1)y(s)ds\,.$$

За наближене вироджене ядро прийняти перші три члени розкладання ядра $K(x,s) = x(e^{xs} - 1)$ в ряд Тейлора. Оцінить норму похибки.

12. Методом Положія знайти наближений розв’язок інтегрального рівняння

$$y(x) = \frac{4}{5}x^2 + \int_0^1 xs^2 y(s)ds\,,$$

обмежуючись трьома послідовними наближеннями. Оцінити похибку наближеного розв’язку, якщо точний розв’язок $y(x) = \frac{4}{15}x + \frac{4}{5}x^2$.

13. Використовуючи квадратурну формулу Сімпсона, знайти наближений розв’язок рівняння Фредгольма

$$y(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xs\,y(s)ds\,.$$

Порівняти наближений розв’язок з точним $y(x) = x$.

14. Розв’язати наближено методом Бубнова-Гальоркіна рівняння

$$y(x) = 1 + \int_{-1}^{1} (xs - x^2)y(s)ds\,,$$

обравши систему координатних функцій у вигляді перших трьох поліномів Лежандра. Порівняти отриманий розв’язок з точним $y(x) = 6x^2 + 1$.

15. Розв’язати наближено методом колокації рівняння

$$y(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xs\, y(s)ds,$$

Обравши за систему координатних функцій перші три поліноми Лежандра. Порівняти отриманий розв'язок з точним $y(x) = x$.

Відповіді: 11) $y(x) = e^x - x - 0{,}5x^2 - 0{,}17x^3 - 0{,}06x^4$, $\left\| y - y \right\| \approx 0{,}013$;

12) $y_3(x) = \frac{1157}{6400}x + \frac{4}{5}x^2$, $\left| y(x) - y_3(x) \right| \approx 0{,}09x \le 0{,}09$;

13) наближений розв'язок співпадає з точним $y(x) = x$;

14) наближений розв'язок співпадає з точним $y(x) = 6x^2 + 1$;

15) наближений розв'язок співпадає з точним $y(x) = x$.

Список літератури

1. Кривошея С. А., Перстюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння : підруч. для студ. природн. спец. вищ. навч. закл. Київ : Либідь, 2004. 408 с.

2. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння : навч. посіб. Вид. 3-тє, випр. Івано-Франківськ : Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2021. 248 с.

3. Чорноіван Ю. О. Інтегральні рівняння та елементи функціонального аналізу : навч. посіб. Київ : КНУ ім. Т. Шевченка, 2017. 203 с. http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/inteq-mech.pdf

4. Мартиненко М. А., Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. Вид. 2-ге. Київ : Слово, 2008. 296 с.

5. Уланова Н.П., Приходько В.В. Методичні рекомендації до опанування лекційних занять з дисципліни «Операційне числення» розділ «Перетворення Лапласа» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 Прикладна математика [Електронний ресурс] Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 78 с. https://do.nmu.org.ua/course/view.php?id=6642

Таблиця 1

ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

№ з/п	Найменування	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
I.	Лінійність	$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)$
II.	Подібність	$f(\lambda t)$, $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
III.	Зміщення	$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
IV.	Запізнення	$f(t-\tau)$, $\tau > 0$	$e^{-p\tau} F(p)$
V.	Зображення похідних	$f'(t)$ $f''(t)$ …………….. $f^{(n)}(t)$	$p \cdot F(p) - f(0)$ $p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$ …………………………… $p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \ \ldots \ - f^{(n-1)}(0)$
VI.	Зображення інтегралу	$\int\limits_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
VII.	Диферен-ціювання зображення	$t^n \cdot f(t)$	$(-1)^n \ F^{(n)}(p)$
		t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
VIII.	Зображення згортки (теорема множення)	$f * g = \int\limits_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$F(p) \cdot G(p)$
IX.	Інтеграл Дюамеля	$f(0) \cdot g(t) + \int\limits_0^t f'(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$p \cdot F(p) \cdot G(p)$

Таблиця 2

ТАБЛИЦЯ ЗОБРАЖЕНЬ ЗА ЛАПЛАСОМ

№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1.	1 або $H(t)$	$\frac{1}{p}$	**10.**	$e^{at}\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	**11.**	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	**12.**	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
4.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	**13.**	$t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
5.	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	**14.**	$t\cdot\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
6.	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	**15.**	$t\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
7.	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	**16.**	$t\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
8.	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	**17.**	$\sin\omega t-\omega t\cdot\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
9.	$e^{at}\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$	**18.**	$\delta(t)$	1

Дельта-функція Дірака

$$\delta(t)=\frac{1}{\tau}\big(H(t)-H(t-\tau)\big)=\begin{cases} 0 \text{ при } t\in(-\infty;0)\cup[\tau;\infty), \\ \frac{1}{\tau} \text{ при } t\in[0;\tau). \end{cases}$$

Навчальне видання

Уланова Наталія Петрівна
Приходько Віра Володимирівна

Інтегральні рівняння

Навчальний посібник

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання 18.03.2026. Авт. арк. 9,2

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.