Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

Кафедра системного аналізу і управління

Т.А. Желдак, Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Методичні рекомендації
до виконання індивідуальних завдань
з дисципліни «Нечітка математика»
студентами спеціальності 124 системний аналіз

Дніпро
НТУ «ДП»
2022

Желдак Т.А. Елементи теорії нечітких множин. Методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань з дисципліни «Нечітка математика» студентами спеціальності 124 Системний аналіз / Т.А. Желдак, Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 46 с.

Автори:
Т.А. Желдак, канд. техн. наук., доц.;
Л.С. Коряшкіна, канд. фіз.-мат. наук, доц.;
С.А. Ус, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено до видання навчально-методичним відділом (протокол № 7 від 20.07.2022) за поданням методичної комісії зі спеціальності 124 Системний аналіз (протокол № 4 від 30 червня 2022).

Мета рекомендацій – допомогти студентам у самостійному засвоєнні дисципліни «Нечітка математика» під час виконання індивідуальних робіт і підготовки до модульного контролю.

Подано основні теоретичні відомості й рекомендації до розв’язування типових задач як основи для виконання індивідуальних завдань із змістового модуля «Елементи теорії нечітких множин».

У матеріал видання включено програму змістового модуля, перелік теоретичних питань, а також задачі для самостійного розв’язування. Подано методичні поради до практичних робіт, наведено приклади розв’язування задач.

Сформульовано питання для самоконтролю та критерії оцінювання індивідуальних робіт. Рекомендації орієнтовано на активізацію виконавчого етапу навчальної діяльності студентів.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу та управління, канд. техн. наук, доц. Желдак Т.А.

Зміст

Вступ

Сучасна наука і техніка все більше використовує математичні методи дослідження, моделювання та проектування. Це зумовлено передусім швидким розвитком обчислювальної техніки, завдяки чому значно розширюються можливості успішного застосування математики у вирішенні конкретних проблем.

Дисципліна «Нечітка математика» є необхідним елементом сучасної освіти спеціаліста-інженера. Вона належить до загальноосвітнього циклу навчання як основа для вивчення курсів «Системи та методи прийняття рішень», «Системи штучного інтелекту», «Інтелектуальний аналіз даних» та інших, пов'язаних із інтелектуальним аналізом.

Мета вивчення дисципліни – пізнання студентами основ сучасного математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і прикладних інженерних задач; формування в них уміння виконувати математичний аналіз технічних систем; застосовувати математичний апарат до розв'язування прикладних задач електротехніки. Набуті знання сприяють розвитку логічного мислення, формуванню компетентностей щодо обґрунтованого застосування та аналізу методів прийняття рішень в умовах невизначеності.

Основні завдання дисципліни:

– розвиток логічного й алгоритмічного мислення студентів;

– опанування студентами основних методів дослідження і розв'язування математичних задач;

– виховання в студентів уміння самостійно застосовувати свої математичні знання та проводити математичний аналіз прикладних задач.

– стимулювати студентів до систематичної самостійної навчальної роботи.

Під час вивчення дисципліни студенти мають досягти таких результатів навчання:

– будувати логічні висновки, використовувати нечіткі моделі для створення програмних та інформаційних систем;

– використовувати методи нечіткого аналізу для розв'язування задач класифікації;

– знати і вміти застосовувати на практиці основні поняття теорії нечітких множин, формалізувати поняття у вигляді лінгвістичних змінних, формулювати та застосовувати нечіткі логічні висновки.

Мета цих методичних рекомендацій – допомогти студентові засвоїти дисципліну «Нечітка математика» і набути навичок розв'язування задач, підготуватися до модульного контролю знань.

Видання включає тематику й розподіл годин, відведених на практичні заняття, перелік основних теоретичних питань, короткі теоретичні відомості й задачі для самостійного розв'язування з основних розділів програми дисципліни. Описано також методики обчислень і наведено схеми розгляду типових задач.

Програма змістового модуля 1
«Нечіткі множини»

Тема 1. Нечіткі множини.

1.1. Поняття належності. Визначення нечіткої множини та пов'язана з нею термінологія. Приклади нечітких множин.

1.2. Операції над нечіткими множинами. Спеціальні операції над нечіткими множинами.

1.3. Розкладання нечіткої множини на множини рівня.

1.4. Відстань між множинами. Індекс нечіткості.

Після вивчення змістового модуля «Нечіткі множини » студенти мають

Знати:

– визначення нечіткої множини і відповідну термінологію;

– особливості застосування операцій перетину, об'єднання, доповнення у класі нечітких множин;

– спеціальні операції над нечіткими множинами.

Уміти:

– визначати нормальні та субнормальні нечіткі множини, їхні носії;

– здійснювати операції над нечіткими множинами (доповнення, перетин, об'єднання, концентрування та розтягування);

– визначати множини рівня і найближчу до нечіткої множини чітку множину;

– здійснювати розкладання нечіткої множини на множини рівня і виконувати синтез нечітких множин;

– обчислювати лінійний і квадратичний індекс нечіткості множини; розраховувати лінійну та квадратичну відстань між нечіткими множинами.

Індивідуальне завдання

Тема завдання: Нечіткі множини.

Мета завдання: вивчення властивостей нечітких множин, операцій над ними, набуття навичок роботи з нечіткими множинами.

Порядок виконання завдання

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Виконати кожен з поданих нижче пунктів завдання, використовуючи вихідні дані відповідно до свого варіанта[1] (див. далі перелік). При виконанні завдань можна застосовувати стандартні засоби ЕОМ або власноруч написані програми.
3. Оформити звіт про виконання завдання.
4. Захистити виконану роботу.

Зміст завдання

Дано нечіткі множини A, B, C, D (див. варіанти індивідуальних завдань).

1. Чи будуть ці множини нормальними? Субнормальними? Визначити їхні носії.
2. Знайти перетин та об'єднання таких множин: а) A та B , б) C та D (за трьома визначеннями).
3. Визначити доповнення множин A, C.
4. Виконати операції концентрування й розтягування множин B та D.
5. Розкласти нечіткі множини A, B, D на множини рівня.
6. Знайти найближчі до множин A, B, C, D звичайні множини.
7. Визначити відстань Хеммінга та евклідову відстань між такими множинами: а) A та B, б) C та D.
8. Знайти лінійний і квадратичний індекси нечіткості множин B та D.

Зауваження. У всіх завданнях передбачити, що нечіткі множини C і D задано в такій універсальній множині $E = \left[0;10\right]$.

Короткі теоретичні відомості й приклади виконання завдань

Визначення 1. Нехай E – деяка множина (у звичайному уявленні). *Нечіткою підмножиною A* в множині E назвемо сукупність пар такого вигляду:

[1] Вибір варіанта визначає викладач.

$(x, \mu_A(x))$, де $x \in E$, функція $\mu_A : E \to [0;1]$. При цьому $\mu_A(x)$ називається *функцією належності* нечіткої підмножини A.

Значення $\mu_A(x)$ цієї функції для конкретного елемента x називається *ступенем належності* цього елемента до нечіткої підмножини A.

Скінченні нечіткі множини можна записати таким чином:

$$A = \{(\mu(x_1)/x_1),\ (\mu(x_2)/x_2), \ldots,\ (\mu(x_n)/x_n)\};$$

$$A = \{(\mu(x_1), x_1),\ (\mu(x_2), x_2), \ldots,\ (\mu(x_n), x_n)\}$$

$$A = \frac{\mu(x_1) \mid \mu(x_2) \mid \ldots \mid \ldots \mid \mu(x_n) \mid}{x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid \ldots \mid x_n \mid},$$

$$A = \{(\mu(x_1), x_1) + (\mu(x_2), x_2) + \ldots + (\mu(x_n), x_n)\},$$

$$A = \left\{ \frac{\mu(x_1)}{x_1} + \frac{\mu(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu(x_2)}{x_2} \right\}.$$

При цьому похила та горизонтальна риски тільки розділяють символи, а знак «+» означає не алгебраїчну суму, а операцію об'єднання елементів. Нескінченні нечіткі множини іноді записують через інтеграл, а саме:

$$\int \mu(x_n)/x_n,$$

але це також не пов'язано безпосередньо з операцією інтегрування, а скоріше традиційний запис, який відображає перехід до нескінченності.

Нечітку множину може бути позначено символом тильди «~», розміщеним згори або знизу відповідної літери, або вживанням її рукописного варіанта, наприклад: A.

Універсальну множину E описують функцією належності такого вигляду

$$\mu_E(x) = 1, \quad \forall x \in E. \tag{1}$$

Завдання 1

Дано нечіткі множини. Визначити, чи будуть ці множини нормальними? Субнормальними? Записати їхні носії.

В и з н а ч е н н я 2. *Носієм* нечіткої підмножини A з функцією належності $\mu_A(x)$ (позначається як $\operatorname{supp} A$) називається множина (у звичайному сенсі), що має такий вигляд:

$$\operatorname{supp} A = \{x \mid x \in E,\ \mu_A(x) \geq 0\}. \tag{2}$$

П р и к л а д 1. Нехай універсальна множина $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, її підмножина $A = \{(x_1|0{,}1), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}5), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

Тоді $\operatorname{supp} A = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$.

В и з н а ч е н н я 3. Нечітка підмножина A називається *нормальною*, якщо виконується така рівність: $\sup\limits_{x \in E} \mu_A(x) = 1$. В іншому випадку нечітка підмножина називається *субнормальною*.

Наприклад, нечітка підмножина $\widetilde{A}$ з прикладу 1 – нормальна.

В и з н а ч е н н я 4. Нехай $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ нечіткі підмножини в множині E, а $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ їхні функції належності відповідно. Будемо говорити, що $\widetilde{A}$ містить у собі $\widetilde{B}$ (тобто $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$), якщо для будь-якого елемента $x \in E$ буде справедливою така нерівність:

$$\mu_B(x) \le \mu_A(x). \tag{3}$$

Зауважимо, що коли $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$, то $\operatorname{supp} B \subset \operatorname{supp} A$.

В и з н а ч е н н я 5. Множини A та B збігаються (еквівалентні), якщо

$$\mu_B(x) = \mu_A(x), \qquad \forall x \in E.$$

П р и к л а д 2. Нехай задано таку універсальну множину: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Розглянемо дві її підмножини:

$$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0{,}5)\};$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}2)\}.$$

Чи будуть ці множини нормальними? Субнормальними?

Розв'язування

Обчислимо висоти нечітких підмножин A та B. $h_A = \max\limits_{x \in A} \mu_A(x) = 1$, отже нечітка підмножина A – нормальна, $h_B = \max\limits_{x \in B} \mu_B(x) = 0{,}5 < 1$, тому множина B – субнормальна. Крім того, $B \subset A$, оскільки $\mu_B(x_i) \le \mu_A(x_i)$, $\forall x_i \in E$.

П р и к л а д 3. Розглянемо множини C, D, які подано їхніми характеристичними функціями, а саме:

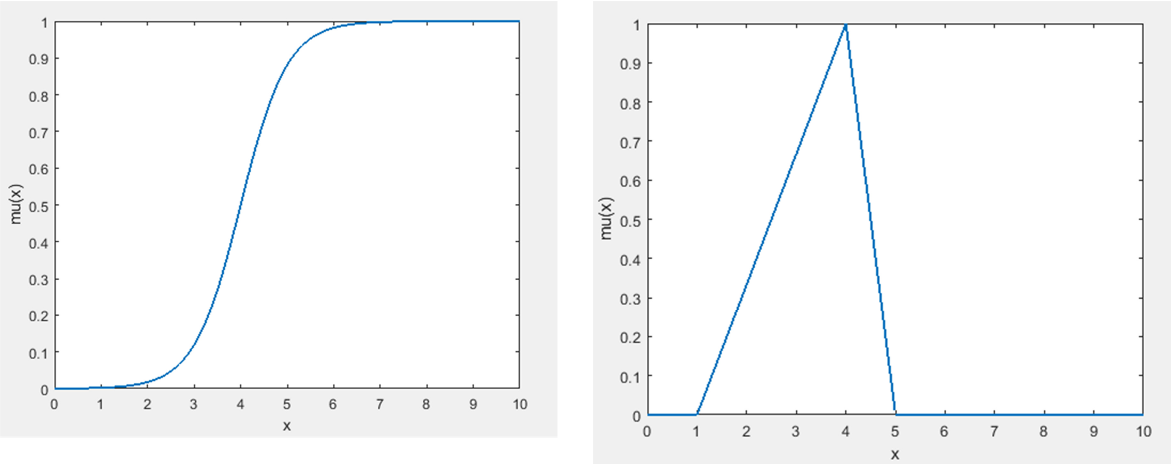
$$\mu_C(x) = \frac{1}{1 + \exp\left[-2\left(x - 4\right)\right]}; \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1 < x \le 4, \\ 5 - x, \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5; \end{cases}$$

.

Чи будуть ці множини нормальними? субнормальними? Визначити їхні носії.

Розв'язування

Для наочності побудуємо графіки множин C та D (рис. 1).



а *б*

Рис. 1 Графіки функцій *а* – , *б* –

Розглянемо нечітку множину C. З графіка функції належності (рис. 1, *а*) видно, що вона зростає на всьому відрізку [0;10], і набуває максимального значення, коли $x = 10$, . Отже, множина C є субнормальною на універсальній множині: . Носій множини C являє собою таку множину: . Зауважимо, що коли розглядати цю нечітку множину на універсальній множині R, то і в цьому випадку множина C буде нормальною.

Для визначення носія множини D розглянемо графік функцій належності (рис. 1, *б*). Функція набуває ненульових значень на інтервалі , отже, . Максимального значення функція досягає, коли $x = 4$, , отже, нечітка множина нормальна.

Завдання 2

Визначити перетин та об'єднання даних нечітких множин.

Стосовно нечітких множин звичайні операції, наприклад, об'єднання і перетин, можна виконати багатьма способами. Вибір конкретного способу здійснення операції залежить від сенсу, якого вона набуває в рамках задачі.

В и з н а ч е н н я 6. Об'єднанням нечітких підмножин A та B називається нечітка підмножина $A \bigcup B$, функція належності якої може бути визначена за однією з таких формул:

1. $\mu_{A \bigcup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in E.$ (4)

2. $\mu_{A \bigcup B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_A(x) + \mu_B(x) \geq 1, \\ \mu_A(x) + \mu_B(x) & \text{в інших випадках.} \end{cases}$ (5)

Цю формулу інакше можна записати таким чином:

$$\mu_{A \bigcup B}(x) = \min\{\ 1\ ,\ \mu_A(x) + \mu_B(x)\ \}. \tag{6}$$

3. $\mu_{A \bigcup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$. (7)

П р и к л а д 4. Нехай на універсальній множині: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, подано такі нечіткі множини: $A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}2), (x_3|0), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}8)\}$ та $B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}5), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}2), (x_5|0)\}$. Знайти їх об'єднання за трьома визначеннями.

Розв'язування

Для зручності запишемо множини у вигляді таблиці.

Нечітка множина	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mu_A(x)$	1	0,2	0	0,5	0,8
$\mu_B(x)$	0	0,5	0,2	0,2	0,3
$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$	1	0,5	0,2	0,5	0,8
$\mu_{A \bigcup B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_A(x) + \mu_B(x) \geq 1, \\ \mu_A(x) + \mu_B(x) & \text{в інших випадках.} \end{cases}$	1	0,7	0,2	0,7	1
$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$	1	0,6	0,2	0,56	1

П р и к л а д 5. Припустимо, що множини C та D задано характеристичними функціями, а саме:

$$\mu_C(x) = \frac{1}{1+\exp\left[-2\left(x-4\right)\right]}; \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1 < x \le 4, \\ 5-x, \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

Виконати об'єднання цих множин за трьома визначеннями.

Розв'язування

1. Знайдемо об'єднання множин C та D за таким правилом:

.

Для цього побудуємо графіки функцій (рис. 2). Функцією належності об'єднання множин буде верхня обвідна цих кривих.

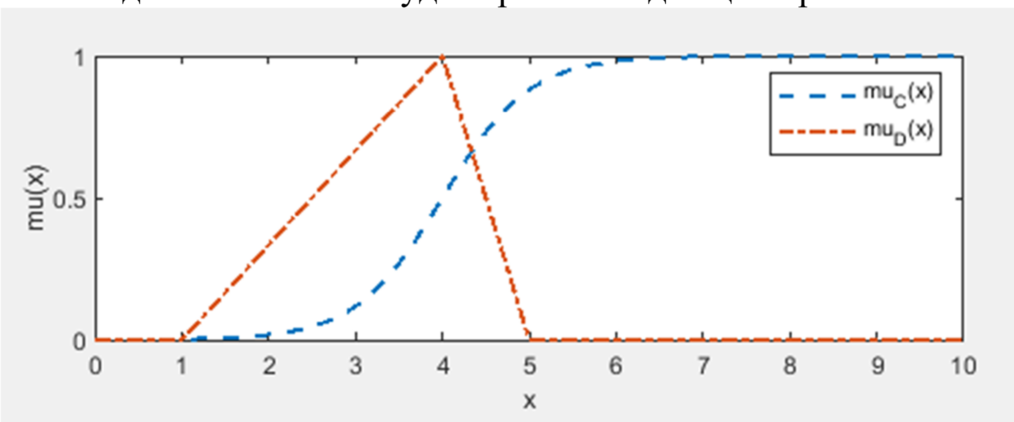


Рис. 2. Функції належності нечітких множин C та D

Запишемо аналітичний вигляд функції належності об'єднання. З графіка видно, що

де – точка перетину функцій .

Отже, для коректного аналітичного запису необхідно визначити точку . З цією метою складемо таке рівняння:

,

Результат розв'язку: точка .

Тепер можна конкретизувати вигляд функції належності об'єднання множин C та D, а саме:

Її графік подано на рис. 3.

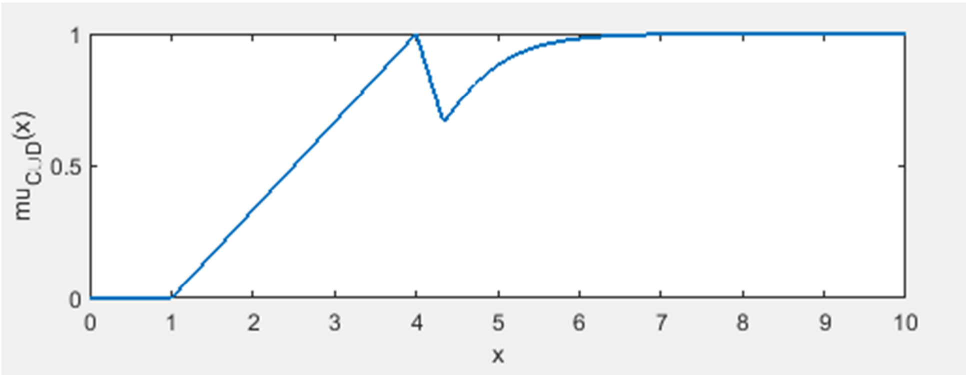


Рис. 3. Графік функції належності об'єднання множин , яке здійснено за формулою (4)

2. Тепер виконаємо об'єднання цих множин за другим визначенням [формула (5)], тобто

Для побудови цього об'єднання спочатку необхідно визначити інтервали, де сума функцій більша за 1. Отже, необхідно розв'язати таку нерівність:

.

Враховуючи, що функцію задано на інтервалах, отримуємо такі нерівності:

$$\frac{x-1}{3}+\frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\geq 1, \text{ якщо } \quad ;$$

та

$$5-x+\frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\geq 1, \text{ якщо } \quad .$$

У результаті розв’язування цих нерівностей бачимо, що сума буде більшою за одиницю, коли . Отже, функція належності об’єднання за другим визначенням набуває такого вигляду:

Її графік показано на рис. 4.

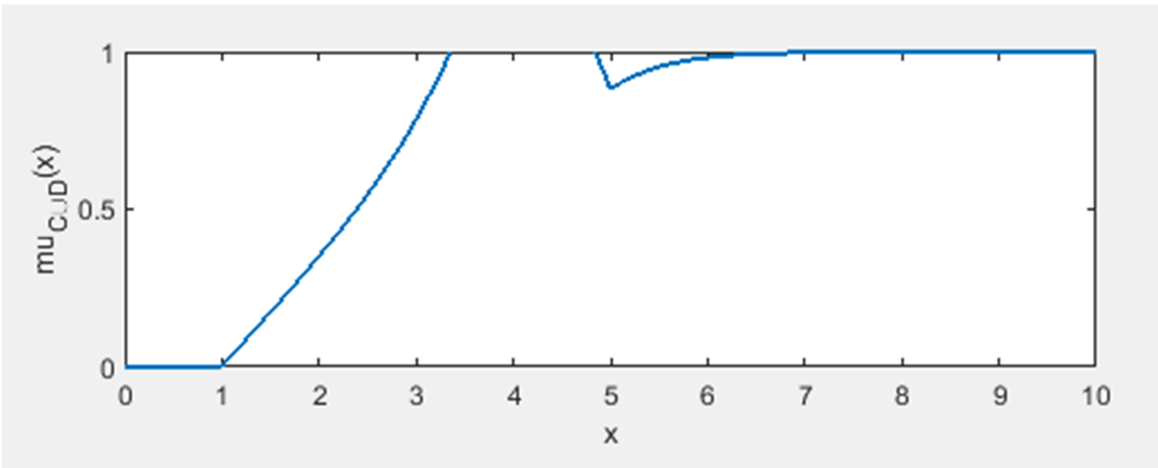


Рис. 4. Графік функції за формулою (5)

3. Тепер знайдемо об'єднання за формулою (7), а саме:

.

Враховуючи вигляд функцій , функцію можна записати таким чином:

Її графік показано на рис. 5.

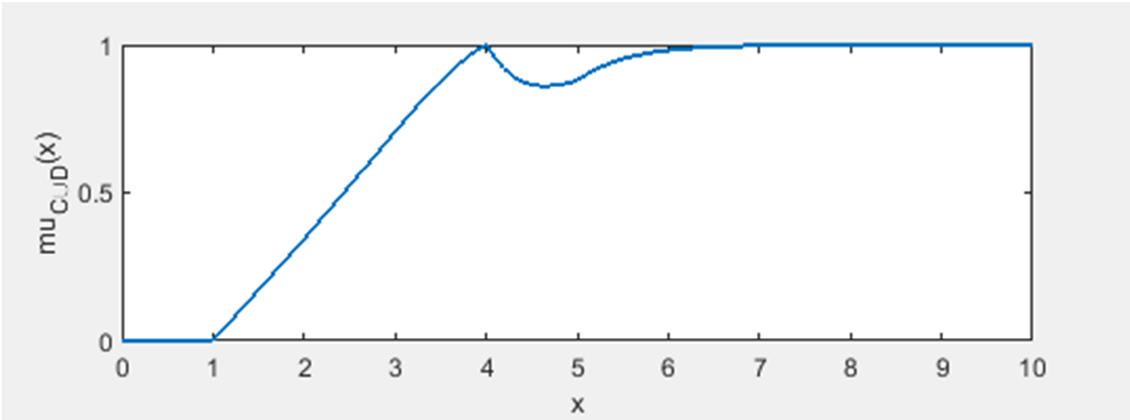


Рис. 5. Графік функції за формулою (7)

В и з н а ч е н н я 7. Перетином нечітких підмножин A та B універсальної множини E називається нечітка підмножина, функцію належності якої можна визначити за однією з таких формул:

1. $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in E$. (10)

2. $\mu_{A \cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$. (11)

3. $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$. (12)

П р и к л а д 6. Визначимо перетин $A \cap B$ нечітких підмножин A та B універсальної множини E за трьома визначеннями, якщо

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

,

.

Розв'язування

Для зручності запишемо множини у вигляді таблиці.

Нечітка множина	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mu_A(x)$	1	0,4	0	0,1	0,8
$\mu_B(x)$	0	1	0,2	0,4	0,3
$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$	0	0,4	0	0,1	0,3
$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mu_A(x) + \mu_B(x) \le 1, \\ \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$	0	0,4	0	0	0,1
$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$	0	0,4	0	0,04	0,24

П р и к л а д 7. Визначимо перетин нечітких множин C та D з прикладу 5 за трьома способами.

1. Спочатку використаємо формулу (10), а саме:

$$\mu_{C\cap D}(x) = \min\{\mu_C(x), \mu_D(x)\}.$$

Для визначення перетину розглянемо графіки функцій $\mu_C(x), \mu_D(x)$ (рис. 6, *а*). Функцією належності перетину буде нижня обвідна цих кривих, тобто

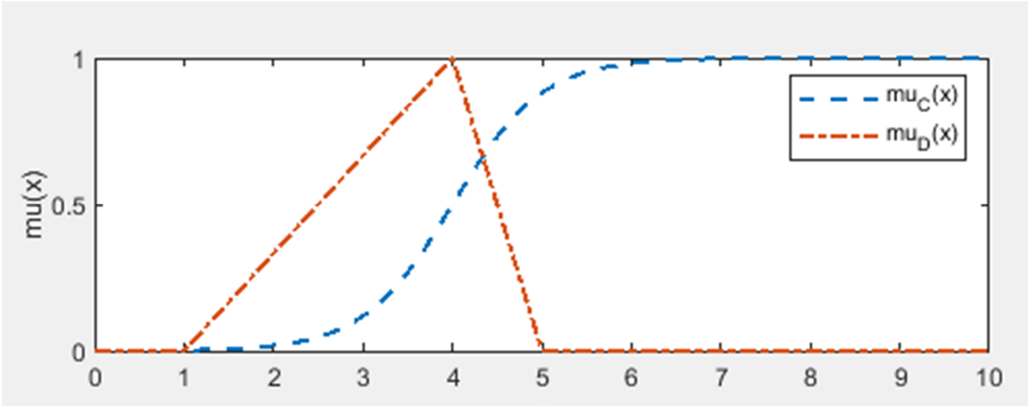
$$\mu_{C\cap D}(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & \text{якщо } x \le x_0, \\ \mu_D(x), & \text{якщо } x \ge x_0, \end{cases}$$

де x_0 точка перетину функцій $\mu_C(x), \mu_D(x)$.

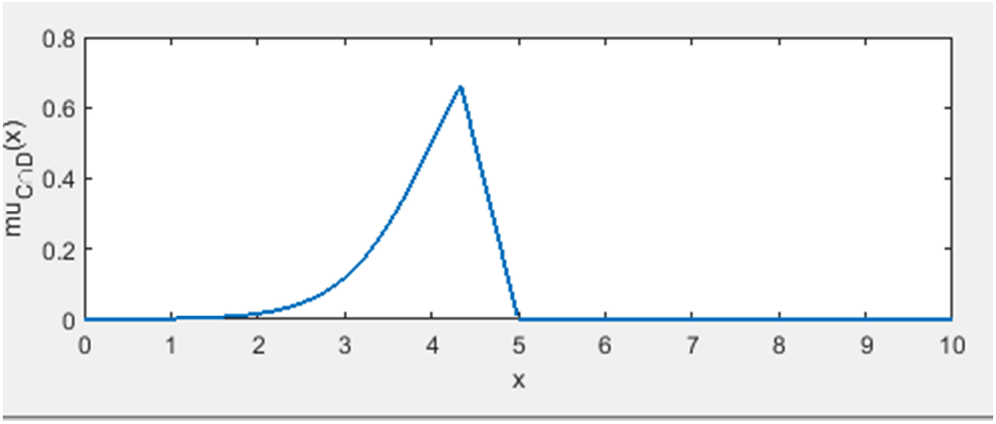
Точку перетину функцій було визначено в прикладі 5. Отже, запишемо аналітичне подання функції належності для перетину, а саме:

$$\mu_{C\cap D}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\exp(-2x+8)}, & \text{якщо} 1 < x \le 4{,}34, \\ 5 - x, & \text{якщо } 4{,}34 < x < 5, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Графік цієї функції належності показано на рис. 6, *б*.



а



б

Рис. 6. Графіки функції належності: *а* – ; *б* – їхнього перетину за формулою (10)

2. Тепер побудуємо перетин, використовуючи формулу (11), тобто

.

Враховуючи вигляд функцій , робимо висновок, що функцію належності перетину також буде задано на інтервалах. Обчислимо її на кожному з інтервалів, а саме:

1) .

Враховуючи, що , отримуємо такий результат:

= 0.

2) .

На цьому інтервалі , .

Отже,

3) .

На цьому інтервалі , ,

відтак

.

4) .

Тут , ,

отже, .

Тепер функція належності перетину набуває такого вигляду:

Її графік подано на рис. 7.

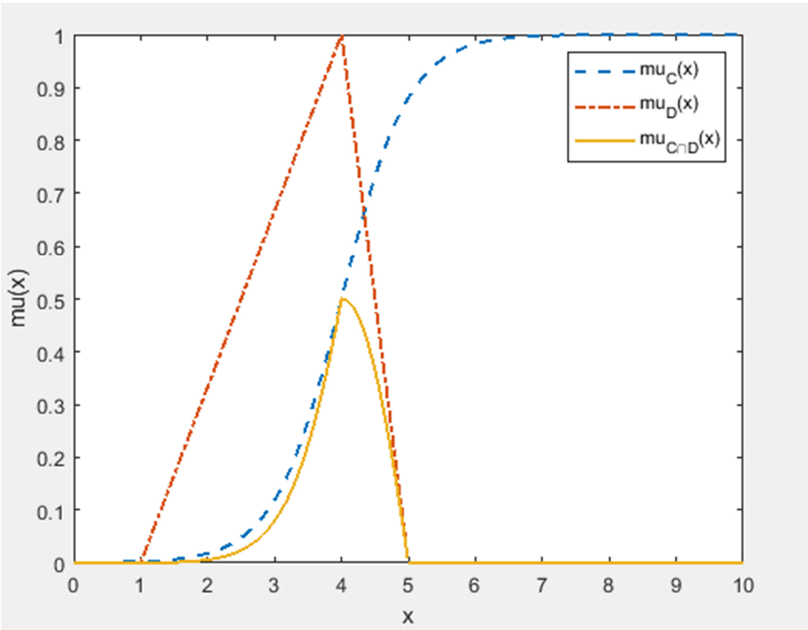


Рис. 7. Графік функцій

3. Знайдемо перетин множин за формулою (12), тобто

Для визначення перетину необхідно знайти точки, коли функція набуває від’ємних значень.

Точки зміни знака функції, можна знайти, розв’язуючи такі рівняння:

коли ;

, якщо .

Розв’язування показує, що .

Отже,

Графік функції належності перетину за формулою (12) показано на рис. 8.

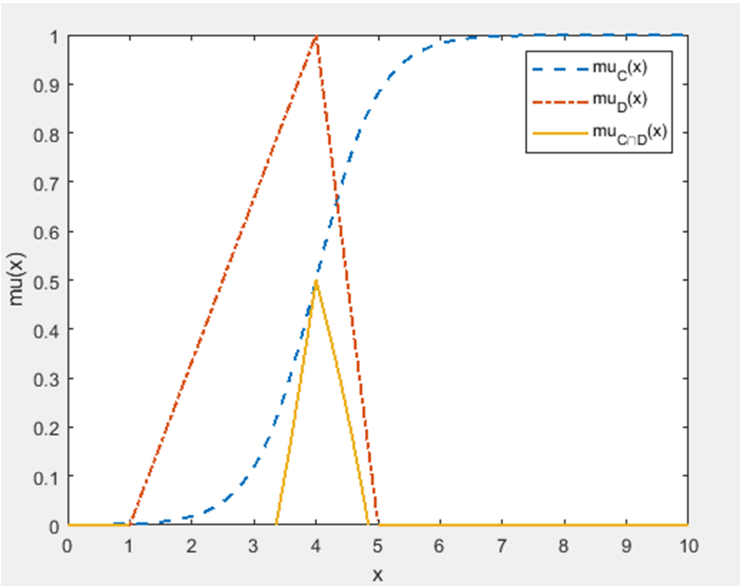


Рис. 8. Графік функцій та їх перетину , що визначений за формулою (12)

Завдання 3

Знайти доповнення нечіткої множини.

В и з н а ч е н н я 8. *Доповненням* нечіткої множини A універсальної множини E називається нечітка множина $\bar{A}$, характерна такою функцією належності:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x),\ x \in E. \qquad (13)$$

П р и к л а д 8. Визначити доповнення множин A, C, D якщо

$A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}2), (x_3|0), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}8)\}$;

$\mu_C(x) = \dfrac{1}{1 + \exp\left[-2(x-4)\right]}$;

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1 < x \le 4, \\ 5 - x, \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

Розв'язування

Для визначення доповнення множини скористаємось такою формулою:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = 1 - \mu_C(x).$$

Тоді

$$\bar{A} = \{(x_1 0), (x_2 8), (x_3|1), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}2)\};$$

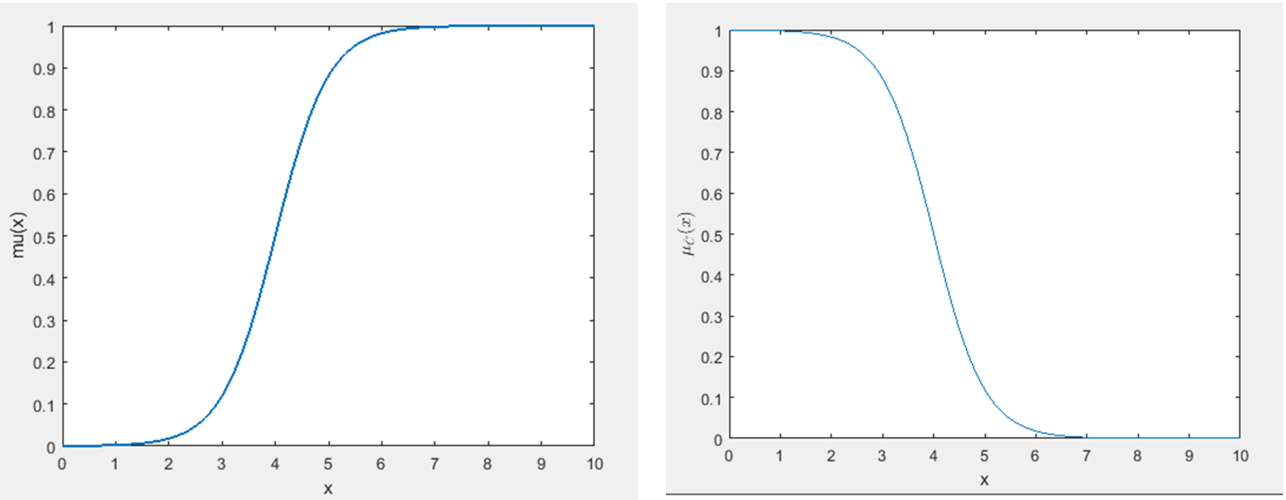
$$\mu_{\bar{C}}(x) = 1 - \frac{1}{1+exp(-2x+8)} = \frac{exp(-2x+8)}{1+exp(-2x+8)}.$$

$$\mu_{\bar{D}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \le 1, \\ 1 - \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1 < x \le 4, \\ 1 - (5 - x), \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 1, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

Або після перетворення

$$\mu_{\bar{D}}(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{4-x}{3}, \text{ якщо } 1<x\le 4,\\ x-4, \text{ якщо } 4<x<5,\\ 1, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

Графіки функції належності нечіткої множини C та її доповнення показано на рис. 9.



а *б*

Рис. 9. Графіки функціїї належності: *а* – множини C; *б* – доповнення множини C

В и з н а ч е н н я 9. *Різницею* підмножин A та B універсальної множини E назвемо нечітку множину $A\backslash B$, характерну такою функцією належності:

$$\mu_{A\backslash B}(x)=\begin{cases}\mu_A(x)-\mu_B(x), & \text{коли } \mu_A(x)\ge\mu_B(x),\\ 0 & \text{в інших випадках,}\end{cases} \tag{14}$$

тобто

$$\mu_{A\backslash B}(x)=\max\{\mu_A(x)-\mu_B(x),0\}. \tag{15}$$

Знайдемо різницю нечітких підмножин A та B, якщо $A\subset E$, $B\subset E$, $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, а саме:

$$A=\{(x_1|1),(x_2|0{,}4),(x_3|0),(x_4|0{,}7),(x_5|0{,}8)\};$$

$$B=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0{,}2),(x_4|0{,}4),(x_5|0)\}.$$

Тоді

Завдання 4

Виконати операції концентрування й розтягування множин B та D.

Визначення 10. Операції концентрування (CON) й розтягування (DIL) задамо таким чином:

$$\text{CON}\,A = A^2\,; \tag{16}$$

$$\text{DIL}\,A = A^{0,5}\,, \tag{17}$$

при цьому

$$\mu_{A^\alpha}(x) = \mu_A^\alpha(x),\ x \in X,\ \alpha > 0.$$

Приклад 9. Нехай універсальна множина $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, $A \subset E$, а саме:

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6}{0{,}25 \mid 0{,}9 \mid 0{,}4 \mid 0{,}6 \mid 1 \mid 0}.$$

Визначимо такі множини: $A^{1/2} = \text{CON}\,A$, $A^2 = \text{DIL}\,A$, а саме:

$$\mathrm{A}^{1/2} = \frac{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6}{0{,}0625 \quad 0{,}81 \quad 0{,}16 \quad 0{,}36 \quad 1 \quad 0};$$

$$\mathrm{A}^2 = \frac{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6}{0{,}5 \quad 0{,}95 \quad 0{,}64 \quad 0{,}78 \quad 1 \quad 0}.$$

Приклад 10. Припустимо, що множину D задано такою формулою:

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1 < x \le 4, \\ 5 - x, \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

Застосуємо до неї операції розтягування і концентрування, а саме:

$$\text{DIL}(D) = \sqrt{\mu_D(x)} = \begin{cases} 0, \#\text{коли } x \le 1, \\ \sqrt{\frac{x-1}{3}}, \#\text{коли } 1 < x \le 4, \\ \sqrt{5-x}, \ \#\text{коли } 4 < x < 5, \\ 0, \#\text{коли } x > 5. \end{cases}$$

Графіки функцій належності отриманих множин показано на рис. 10, 11.

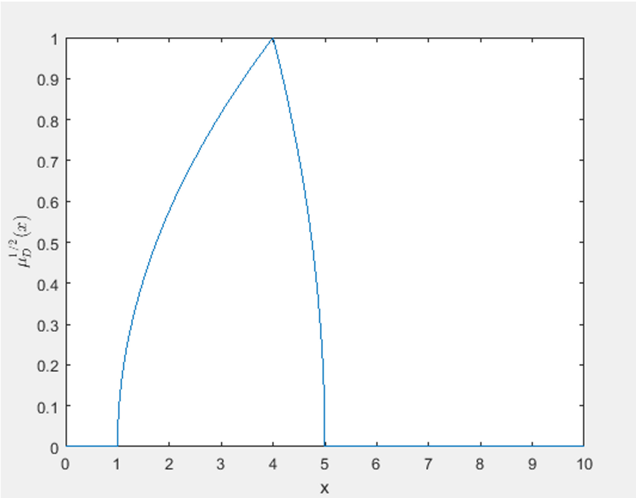


Рис. 10. Розтягування множини *D*

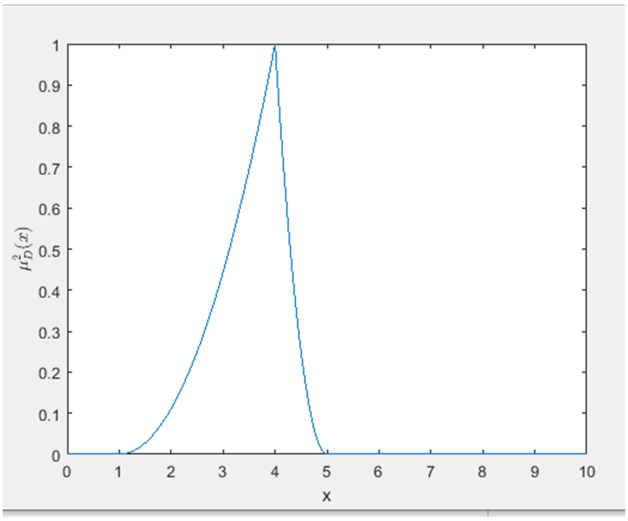


Рис. 11. Концентрування множини *D*

Застосування до нечіткої множини операції концентрування означає зменшення її “нечіткості”. У реальних задачах це може свідчити про надходження нової інформації, що дозволяє більш точно (чітко) описати подану нечітку множину. Аналогічно операція розтягування може застосовуватися для моделювання ситуацій, пов’язаних із втратою інформації.

Завдання 5

Розкласти нечітку множину на множини рівня.

Визначення 11. Нехай $\alpha \in [0;1]$. Підмножиною α-рівня нечіткої підмножини *A* (позначається як) будемо називати звичайну множину, котра включає тільки ті елементи множини *A*, функція належності яких не менша за α, тобто

$$A_\alpha = \{x \,|\, \mu_{\mathrm{A}}(x) \geq \alpha\}. \tag{18}$$

Приклад 11. Нехай нечітку множину *A* задано в такому вигляді:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0{,}8 & 0{,}1 & 1 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{array}.$$

Визначимо множину рівня 0,3 цієї нечіткої підмножини, а саме:

$$A_{0,3} = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{1 \mid 0 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 0 \mid 1}, \qquad A_{0,3} = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\},$$

Т е о р е м а 1. Будь-яку нечітку підмножину A можна розкласти на множини рівня, тобто подати її в такому вигляді:

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_{\alpha}, \tag{19}$$

причому функція належності множини αA_{α}: $\mu_{\alpha A_{\alpha}}(x) = \alpha \mu_{A_{\alpha}}(x)$, об′єднання нечітких множин виконується за всіма значеннями $\alpha \in [0, 1]$, а саме:

$$\mu_{A_{\alpha}}(x) = \begin{cases} 1, \mu_A(x) \geq \alpha, \\ 0, \mu_A(x) < \alpha. \end{cases}$$

П р и к л а д 12. Розкласти подані нижче нечіткі множини A, D на множини рівня.

$$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0{,}5)\}.$$

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \leq 1, \\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1 < x \leq 4, \\ 5 - x, \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

Розв'язування

1. Розкладання множини A виконаємо за такою формулою:

$$A_{\alpha} = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Запишемо множини рівня тільки для тих ненульових значень параметра α, які використовуються в описі множини, тобто α = 0,2; 0,4; 0,5; 1. Отже,

$$A_{0,2} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\},\ A_{0,4} = \{x_2, x_4, x_5\}, A_{0,5} = \{x_4, x_5\}, A_1 = \{x_4\}.$$

2. Для розкладання множини D розглянемо графік її функції належності (рис. 12) та опишемо загальний вигляд множини рівня α.

Як видно із графіка функції, кожна множина рівня є деяким інтервалом $[x_1; x_2]$. Отже, необхідно обчислити границі цих інтервалів залежно від значення α.

встановлення границь інтервалу розв’яжемо такі рівняння.

Для лівої границі

і

Для правої границі відповідно,

Отже, множина рівня α має такий вигляд:

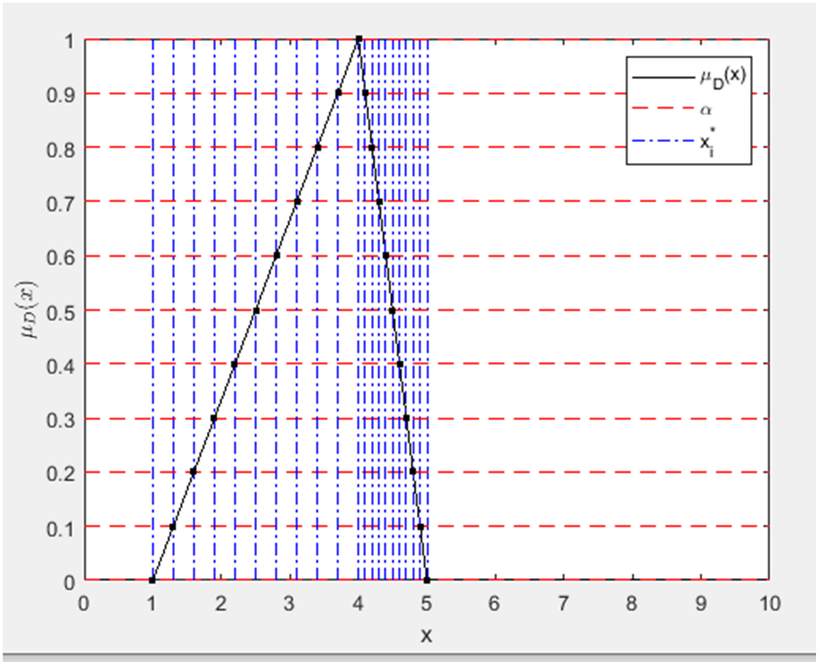


Рис. 12. Графічне зображення множин рівня α множини *D*

Завдання 6

Знайти звичайну множину, найближчу до нечіткої множини.

Визначення 12. *Найближчою* до нечіткої множини *A* звичайною множиною називається множина $\underline{A}$, характерна такою функцією належності:

(20)

Приклад 13. Припустимо, що $E = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \}$, $A \subset E$ і $A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}8), (x_3|0{,}5), (x_4|0{,}3), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|0{,}9), (x_8|0{,}4)\}$.

Найближчою до множини *A* звичайною множиною буде така:

$$\underline{A} = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|1), (x_8|0)\}.$$

Оскільки це звичайна множина, ми можемо записати її в такому вигляді:

$$\underline{A} = \{x_2, x_5, x_7\}.$$

Приклад 14. Знайти найближчі до множин *C, D* звичайні множини, за умови, що $E = [0; 10]$. Функції належності множин *C, D* подано нижче.

$$\mu_C(x) = \frac{1}{1 + \exp\left[-2(x-4)\right]}; \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1 < x \le 4, \\ 5 - x, \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

Розв'язування

Для визначення найближчої звичайної множини до нечіткої множини *D* скористаємось результатами прикладу 12. Найближча чітка множина визначається за таким правилом: $\mu_{\underline{D}}(x) = \{x \in E | \mu_D(x) > 0{,}5\}$, а множина рівня 0,5: $D_{0,5} = \{x \in E | \mu_D(x) \ge 0{,}5\}$.

Враховуючи загальний вигляд множини рівня α: $D_\alpha = [3\alpha + 1; 5 - \alpha]$ і строгий знак нерівності, отримуємо такий результат:

$\underline{D} = (3 \cdot 0{,}5 + 1; 5 - 0{,}5) = (2{,}5; 4{,}5).$

Отже, $\underline{D} = (2{,}5; 4{,}5)$

Для визначення найближчої до множини *C* чіткої множини необхідно обчислити точку x^* відповідну такій умові; $\mu_C(x^*) = 0{,}5$.

Враховуючи вигляд функції належності множини *C*, розв'яжемо таке рівняння: $\frac{1}{1+\exp(-2x+8)} = 0{,}5$. У результаті $x^* = 4$ і найближча чітка множина $\underline{C} = (4; 10)$.

Завдання 7

Визначити відстань Хеммінга та евклідову відстань між нечіткими множинами.

Узагальнена відстань Хеммінга, або *лінійна відстань*, обчислюється за такою формулою:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|. \tag{21}$$

Очевидно, що $0 \le d(A, B) \le n$.

Евклідову або *квадратичну* відстань розраховують у такий спосіб:

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}. \tag{22}$$

Ця відстань задовольняє таку умову: $0 \le e(A, B) \le \sqrt{n}$.

Визначимо також відносні відстані, скориставшись поданими нижче залежностями.

Узагальнена відносна відстань Хеммінга

$$\delta(A,B)=\frac{d(A,B)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right|, \tag{23}$$

для неї буде справедливою така нерівність: $0\le\delta(A,B)\le 1$.

Відносна евклідова відстань

$$\varepsilon(A,B)=\frac{e(A,B)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}\,. \tag{24}$$

Зрозуміло, що $0\le\varepsilon(A,B)\le 1$.

Очевидно, що можна також задати інші відстані.

П р и к л а д 15. Визначити відстань між такими нечіткими множинами:

$$A=\frac{x_1}{0{,}7}\left|\frac{x_2}{0{,}2}\right|\frac{x_3}{0}\left|\frac{x_4}{0{,}6}\right|\frac{x_5}{0{,}5}\left|\frac{x_6}{1}\right|\frac{x_7}{0},\quad B=\frac{x_1}{0{,}2}\left|\frac{x_2}{0}\right|\frac{x_3}{0}\left|\frac{x_4}{0{,}6}\right|\frac{x_5}{0{,}8}\left|\frac{x_6}{0{,}4}\right|\frac{x_7}{1}.$$

Розв'язування

$d(A, B) = |0{,}7 – 0{,}2| + |0{,}2 – 0| + |0 – 0| + |0{,}6 – 0{,}6| + |0{,}5 – 0{,}8| + |1 – 0{,}4| +$

$+ |0 – 1| = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}6 + 1 = 2{,}6.$

$$\delta(A,B)=\frac{1}{7}d(A,B)=\frac{2{,}6}{7}=0{,}37.$$

$$e(A,B)=\sqrt{(0{,}7-0{,}2)^2+(0{,}2-0)^2+(0-0)^2+(0{,}6-0{,}6)^2+(0{,}5-0{,}8)^2+(1-0{,}4)^2+(0-1)^2}=$$

$$=\sqrt{(0{,}5)^2+0{,}2^2+0{,}3^2+0{,}6^2+1}=\sqrt{0{,}25+0{,}04+0{,}09+0{,}36+1}=\sqrt{1{,}74}=1{,}32,$$

$$e\,(A,B)=1{,}32,\qquad \varepsilon(A,B)=\frac{1}{7}\cdot 1{,}32=0{,}49.$$

Якщо $E = R$, то

$$d(A,B)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mu_A(x)-\mu_B(x)\right|dx; \tag{25}$$

і

$$e(A,B) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2\,dx}\,, \qquad (26)$$

коли інтеграли збігаються.

Якщо ж множина $E \subset R$ обмежена зверху й знизу, то відповідні інтеграли завжди збігаються, а відстані $d(A, B)$ та $e(A, B)$ будуть скінченними. Тоді можна також визначити відносні відстані, а саме:

$$\delta(A,B) = \frac{d(A,B)}{\beta - \alpha}; \qquad (27)$$

$$\varepsilon(A,B) = \frac{e(A,B)}{\beta - \alpha}, \qquad (28)$$

тут $d(A,B) = \int_\alpha^\beta |\mu_A(x) - \mu_B(x)|dx$ і $e(A,B) = \sqrt{\int_\alpha^\beta (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2\,dx}$.

П р и к л а д 16. Визначити відстань Хеммінга й евклідову відстань між множинами C та D з прикладу 14.

Звичайна відстань Хеммінга обчислюється за такою формулою:

$d(C,D) = \int_\alpha^\beta |\mu_C(x) - \mu_D(x)|dx$, де $\alpha = \min(E)\,, \beta = \max(E)$.

Враховуючи вигляд множини E, бачимо, що $\alpha = 0, \beta = 10$.
Тоді

$$d(C,D) = \int_0^{10} |\mu_C(x) - \mu_D(x)|dx = \int_0^1 \left|-\frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\right| dx +$$

$$\int_1^4 \left|\frac{x-1}{3} - \frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\right| dx + \int_4^5 \left|5 - x - \frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\right| dx +$$

$$+\int_5^{10} \left|-\frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\right| dx \approx 0{,}001 + 1{,}155 + 0{,}384 + 4{,}937 \approx 6{,}477.$$

Відносна відстань Хеммінга

$$\delta(C,D) = \frac{d(C,D)}{\beta - \alpha} = \frac{6{,}477}{10} \approx 0{,}648.$$

Визначимо евклідову відстань між множинами *C* та *D* за поданими нижче залежностями.

Звичайна евклідова відстань

$$e(C,D)=\sqrt{\int_{\alpha}^{\beta}\left(\mu_C(x)-\mu_D(x)\right)^2dx}.$$

Тоді

$$e(C,D)=\sqrt{\int_{0}^{10}\left(\mu_C(x)-\mu_D(x)\right)^2dx}=$$

$$=\left(\int_0^1\left(-\frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\right)^2dx+\int_1^4\left(\frac{x-1}{3}-\frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\right)^2dx++\right.$$

$$\left.+\int_4^5\left(5-x-\frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\right)^2dx++\int_5^{10}\left(-\frac{1}{1+\exp(-2x+8)}\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\approx$$

$$\approx\sqrt{0+0{,}54+0{,}207+4{,}877}\approx\sqrt{5{,}624}\approx 2{,}371.$$

Відносна евклідова відстань

$$\varepsilon(C,D)=\frac{e(C,D)}{\beta-\alpha}=\frac{2{,}371}{10}\approx 0{,}237.$$

Завдання 8

Знайти лінійний і квадратичний індекси нечіткості множин *A* та *D*.

Для визначення індексу нечіткості скористаємось формулами, поданими нижче.

Лінійний індекс нечіткості

$$\nu(A)=\frac{2}{n}d(A,\underline{A}),\qquad(29)$$

або $\nu(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{A\cap\overline{A}}(x_i)$. (30)

Квадратичний індекс нечіткості

$$\eta(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}e(A,\underline{A}).\qquad(31)$$

Значення індексу нечіткості завжди буде в таких межах: $0\le\nu(A,\underline{A})\le 1$, $0\le\eta(A,\underline{A})\le 1$.

Коли $E=[a,b]\subset R$, то лінійний індекс нечіткості обчислюють за такою формулою:

$$\nu(A,B)=\frac{2}{b-a}\int_a^b \left|\mu_A(x)-\mu_{\underline{A}}(x)\right|dx. \tag{32}$$

Індекси нечіткості можна також визначити іншим способом, а саме:

$$\nu(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A(x_i),\mu_{\overline{A}}(x_i)), \tag{33}$$

$$\eta(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\min\left\{\mu_A^2(x_i),\mu_{\overline{A}}^2(x_i)\right\}}. \tag{34}$$

П р и к л а д 17. Нехай $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$, $A\subset E$,

$A=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}8),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}3),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|0{,}9),(x_8|0{,}4)\}$, обчислити індекс нечіткості для цієї множини.

Розв'язування

Скористаємось формулою (30). Запишемо доповнення множини A, тобто

$\bar{A}=\{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}2),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}7),(x_5|0),(x_6|1),(x_7|0{,}1),(x_8|0{,}6)\}$,

Обчислимо індекс нечіткості множини A. Для цього спочатку визначимо перетин множин A та $\bar{A}$, а саме:

$$A\cap\overline{A}=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}2),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}3),(x_5|0),(x_6|0),(x_7|0{,}1),(x_8|0{,}4)\}.$$

Тепер обчислимо лінійний індекс нечіткості, тобто

$$\nu(A)=\frac{2}{8}(0{,}2+0{,}2+0{,}5+0{,}3+0+0+0{,}1+0{,}4)=0{,}425.$$

Зауважимо, що індекс нечіткості перетину підмножин A та B може бути як меншим, так і більшим від індексів нечіткості вихідних підмножин. Те саме можна сказати і про об′єднання нечітких підмножин. Сформульоване твердження буде справедливим також і для квадратичного індексу нечіткості.

П р и к л а д 18. Обчислити квадратичний індекс нечіткості такої множини A:

$A=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}8),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}3),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|0{,}9),(x_8|0{,}4)\}$.

Розв'язування

Спочатку визначимо найближчу чітку множину до множини A, а саме:

$$\underline{A} = \{x_2, x_5, x_7\}.$$

Скориставшись термінологією функції належності, ми можемо її записати в такий спосіб:

$$\underline{A} = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|5), (x_6|0), (x_7|7), (x_8|0)\}.$$

Застосуємо формулу (31), але спочатку необхідно знайти евклідову відстань, а саме:

$$e(A, \underline{A}) = \sqrt{0{,}2^2 + (-0{,}2)^2 + 0{,}5^2 + (0{,}3)^2 + 0 + 0 + (-0{,}1)^2 + 0{,}4^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}25 + 0{,}09 + 0{,}01 + 0{,}16} = \sqrt{0{,}59} \approx 0{,}768.$$

Отже,

$$\eta(B) = \frac{2 \cdot 0{,}768}{\sqrt{8}} \approx \frac{1{,}536}{2{,}83} \approx 0{,}54.$$

П р и к л а д 19. Знайти лінійний і квадратичний індекси нечіткості множини D.

Розв'язування

Для обчислення лінійного індексу нечіткості множини D *с*користаємось формулою (32).

Запишемо найближчу до множини D чітку множину (див. приклад 14), а саме:

$$\underline{D} = (2{,}5; 4{,}5) = \begin{cases} 0, \text{коли } x \le 2{,}5; \\ 1, \text{коли } 2{,}5 < x \le 4{,}5; \\ 0, \text{коли } x > 4{,}5. \end{cases}$$

Тоді

$$d(D, \underline{D}) = \int_0^{10} \left|\mu_D(x) - \mu_{\underline{D}}(x)\right| dx = \int_1^{2.5} \left|\frac{x-1}{3}\right| dx + \int_{2.5}^{4} \left|\frac{x-1}{3} - 1\right| dx +$$

$$+\int_{4}^{4.5}|5-x-1|dx+\int_{4.5}^{5}|5-x|dx+\int_{5}^{10}|0|dx\approx 0+0{,}375+0{,}375+0{,}125+0{,}125\approx$$
$$\approx 1.$$

Отже,

$$\nu(D)=\frac{2\cdot 1}{10-0}=\frac{2}{10}=0{,}2.$$

Тепер обчислимо квадратичний індекс нечіткості множини *D* за такою формулою:

$$\eta(D)=\frac{2\cdot e(D,\underline{D})}{\beta-\alpha}.$$

Тоді

$$e(D,\underline{D})=\sqrt{\int_{0}^{10}\left(\mu_D(x)-\mu_{\underline{D}}(x)\right)^2dx}=$$
$$=\left(\int_{0}^{1}0^2dx+\int_{1}^{2.5}\left(\frac{x-1}{3}\right)^2dx+\int_{2.5}^{4}\left(\frac{x-1}{3}-1\right)^2dx++\int_{4}^{4.5}(5-x-1)^2dx+\right.$$
$$\left.+\int_{4.5}^{5}(5-x)^2dx+\int_{5}^{10}0^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\approx\sqrt{0+0{,}125+0{,}125+0{,}0412+0{,}0412+0}\approx$$
$$\approx\sqrt{0{,}333}\approx 0{,}577.$$

Отже,

$$\eta(D)=\frac{2\cdot 0{,}577}{10\text{-}0}=\frac{0{,}818}{10}\approx 0{,}1155.$$

Варіанти індивідуальних завдань [2]

№ 1

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,4	0,7	0,8	1	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,4	0,8	0,7	0,7	0,9

.

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{8}, \text{ якщо } 0 < x \le 2, \\ 1 - \dfrac{(4-x)^2}{8}, \text{ якщо } 2 < x < 4, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 4; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ x-1, \text{ якщо } 1 < x \le 2, \\ 3-x, \text{ якщо } 2 < x < 3, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 3. \end{cases}$$

№ 2

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,1	0	0,1	0,7	0,2

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0,5	0,4	0,2	0,5	0,7	0

.

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ 2(x-1)^2, \text{ якщо } 1 < x \le 1{,}5, \\ 1 - 2(2-x)^2, \text{ якщо } 1{,}5 \le x < 2, \\ 1, \text{ якщо } 2 \le x \le 3, \\ 1 - 2(x-3)^2, \text{ якщо } 3 < x \le 3{,}5, \\ 2(4-x)^2, \text{ якщо } 3{,}5 < x \le 4, \\ 0, \text{ якщо } x > 4; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 2, \\ \dfrac{x-2}{2}, \text{ якщо } 2 < x \le 4, \\ 5-x, \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

---

[2] Номер варіанта визначає викладач

№ 3

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,3	0,2	0,1	0	0	0

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0,9	0,8	0,8	0,7	0,5	0,3

.

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{1}{1+2(x-1)}, \text{ якщо } 1 < x < 10, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 10; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1 < x < 3, \\ 1, \text{ якщо } 3 \le x \le 5, \\ 6-x, \text{ якщо } 5 < x < 6, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 6. \end{cases}$$

№ 4

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,4	0,7	0,8	1	1	1

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,7	0,9	1	1	0,7	0,5

.

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{(x-3)^2}{2}\right], \text{якщо } x \in [0; 6], \\ 0, \text{якщо } x \notin [0; 6]; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ x-1, \text{ якщо } 1 < x < 2, \\ 1, \text{ якщо } 2 \le x \le 3, \\ 4-x, \text{ якщо } 3 < x < 4, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 4. \end{cases}$$

№ 5

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0,3	0,8	1	0,9	0,5

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,4	0,8	0,7	0,8	0,9

.

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\exp\left[-\left(x-3\right)\right]}, \text{якщо } x \in \left[0;6\right], \\ \text{якщо } x \notin \left[0;6\right]; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0 < x \le 2, \\ \dfrac{4-x}{2}, \text{ якщо } 2 < x < 4, \\ 0, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$$

№ 6

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4		x_5	x_6	x_7
0,1	0,2	0,3	0,5		0,5	0,6	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,9	0,7	0,6	0,8	0,4	0,2	0

.

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{18}, \text{ якщо } 0 < x \le 3, \\ 1 - \dfrac{\left(6-x\right)^2}{18}, \text{ якщо } 3 < x < 6, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 6; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ x-1, \text{ якщо } 1 < x < 2, \\ 1, \text{ якщо } 2 \le x \le 3, \\ 4-x, \text{ якщо } 3 < x < 4, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 4. \end{cases}$$

№ 7

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,6	0,7	0,8	1	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0,4	0,8	1	1	0,9

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}1,\ \text{якщо}\ x\le 3,\\ \dfrac{1}{1+(x-3)^2},\ \text{якщо}\ 3<x\le 6,\\ 0,\ \text{якщо}\ x>6;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 1,\\ x-1,\ \text{якщо}\ 1<x<2,\\ 1,\ \text{якщо}\ 2\le x\le 4,\\ 5-x,\ \text{якщо}\ 4<x<5,\\ 0,\ \text{якщо}\ x\ge 5.\end{cases}$$

№ 8

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,2	0,5	0,8	1	0,9	0,7

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	0	0,2	0,5	0,5	0

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{8},\ \text{якщо}\ 0<x\le 2,\\ 1-\dfrac{(4-x)^2}{8},\ \text{якщо}\ 2<x<4,\\ 1,\ \text{якщо}\ x\ge 4;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2},\ \text{якщо}\ 1<x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2},\ \text{якщо}\ 3<x<5,\\ 0,\ \text{якщо}\ x>5.\end{cases}$$

№ 9

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	1	0	0,5	0,5	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0,2	0,5	0,7	0,9	0,1

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}\exp\left[-\dfrac{(x-2)^2}{2}\right], \text{ якщо } x\in[0;6],\\ 0, \text{ якщо } x\notin[0;6];\end{cases} \qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ 4-x, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$$

№ 10

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	0,7	0,5	0,3	0	0

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,5	0,8	0,9	0,7	0,5

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\exp\left[-(x-4)\right]}, \text{ якщо } x\in[0;8],\\ 0, \text{ якщо } x\notin[0;8];\end{cases} \quad ; \quad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{6-x}{4}, \text{ якщо } 2<x<6,\\ 0, \text{ якщо } x>6.\end{cases}$$

№ 11

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,3	0,4	0,7	0,8	1	0,9	0,7

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,4	0,8	1	1	0,9

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\notin[0;10],\\ \dfrac{1}{1+x^2}, \text{ якщо } x\in[0;10];\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ x-1, \text{ якщо } 1<x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 5.\end{cases}$$

№ 12

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,1	0,7	0,8	1	0,5	0,1

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0,7	0,4	0,3	0,1	0	0

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } 0\le x\le 3,\\ \dfrac{1}{1+(x-3)^2}, \text{ якщо } x>3,\\ 0, \text{ якщо } x\le 0;\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x<3,\\ 1, \text{ якщо } 3\le x\le 5,\\ 6-x, \text{ якщо } 5<x<6,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 6.\end{cases}$$

№ 13

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,4	0,7	0,8	1	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,4	0,8	0,7	0,7	0,9

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{8},\ \text{якщо}\ 0<x\le 2,\\ 1-\dfrac{(4-x)^2}{8},\ \text{якщо}\ 2\le x<4,\\ 1,\ \text{якщо}\ 4\le x\le 5,\\ 1-\dfrac{(x-5)^2}{8},\ \text{якщо}\ 5<x\le 7\\ \dfrac{(9-x)^2}{8},\ \text{якщо}\ 7<x\le 9,\\ 0,\ \text{якщо}\ x>9;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2},\ \text{якщо}\ 1<x<3,\\ \dfrac{6-x}{3},\ \text{якщо}\ 3<x<6,\\ 0,\ \text{якщо}\ x\ge 6.\end{cases}$$

№ 14

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,2	0,4	0,3	0,8	0,1	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,9	0,8	1	0,5	0,9

.

$$\mu_C(x)=\frac{1}{1+\exp\left[-(x-2)\right]};\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 0,\\ x,\ \text{якщо}\ 0<x\le 1,\\ \dfrac{3-x}{2},\ \text{якщо}\ 1<x\le 3,\\ 0,\ \text{якщо}\ x>3.\end{cases}$$

№ 15

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0	0,9	0,8	0,1	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,2	0,5	0,9	0,7	0

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\le 2,\\ \dfrac{1}{1+2(x-2)^2}, \text{ якщо } x>2;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0\\ \dfrac{x}{4}, \text{ якщо } x\in(0;4),\\ 1, \text{ якщо } x\ge 4.\end{cases}$$

№ 16

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,4	0,1	0,8	0,6	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0,5	0,4	0,8	0,6	0,7	0,9

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{(x-1)^2}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 2,\\ 1-\dfrac{(3-x)^2}{2}, \text{ якщо } 2\le x<3,\\ 1, \text{ якщо } 3\le x\le 5,\\ 1-\dfrac{(x-5)^2}{2}, \text{ якщо } 5<x\le 6,\\ \dfrac{(7-x)^2}{2}, \text{ якщо } 6<x\le 7,\\ 0, \text{ якщо } x>7;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 3,\\ x-3, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 1, \text{ якщо } 4\le x\le 6,\\ 7-x, \text{ якщо } 6<x<7,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 7.\end{cases}$$

№ 17

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,1	0,4	0,5	0,8	1	0,7	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,1	0,2	0,3	0,7	0	0

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{8}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ 1-\dfrac{(4-x)^2}{8}, \text{ якщо } 2<x<4,\\ 1, \text{ якщо } x\ge 4;\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

№ 18

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,6	0,7	0,1	0	0,4	1

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0	0,8	0,7	0,1	0,9

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{1}{1+(x-1)^2}, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{5-x}{3}, \text{ якщо } 2<x\le 5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

№ 19

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,4	0,8	0,8	0,3	0,1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,4	0,8	0,1	0,5	0,4

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ 2(x-1)^2, \text{ якщо } 1<x\le 1{,}5,\\ 1-2(2-x)^2, \text{ якщо } 1{,}5\le x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 3,\\ 1-2(x-3)^2, \text{ якщо } 3<x\le 3{,}5,\\ 2(4-x)^2, \text{ якщо } 3{,}5<x\le 4,\\ 0, \text{ якщо } x>4;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x<3,\\ 1, \text{ якщо } 3\le x\le 5,\\ 6-x, \text{ якщо } 5<x<6,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 6.\end{cases}$$

№ 20

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,5	0,7	0,2	1	0,1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,1	0,2	0,5	0,8	0,7	1

.

$$\mu_C(x)=\exp\left[-\frac{(x-3)^2}{2}\right];\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x<3,\\ 1, \text{ якщо } 3\le x\le 5,\\ 6-x, \text{ якщо } 5<x<6,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 6.\end{cases}$$

№ 21

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,3	0,1	0,8	1	0,1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,7	0,1	0,6	0,5	0,1	0,3	0

.

$$\mu_C(x)=\frac{1}{1+\exp\left[-\left(x-3\right)\right]};\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 0,\\ \dfrac{x}{2},\ \text{якщо}\ 0<x\le 2,\\ \dfrac{5-x}{3},\ \text{якщо}\ 2<x\le 5,\\ 0,\ \text{якщо}\ x>5.\end{cases}$$

№ 22

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,8	0,7	0,4	1	0,1	0,7

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,5	0,8	0,1	0,7	0,1

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 0,\\ \dfrac{2x^2}{25},\ \text{якщо}\ 0<x\le 2{,}5,\\ 1-\dfrac{2\left(5-x\right)^2}{25},\ \text{якщо}\ 2{,}5<x<5,\\ 1,\ \text{якщо}\ x\ge 5;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 0,\\ \dfrac{x}{2},\ \text{якщо}\ 0<x<2,\\ 1,\ \text{якщо}\ 2\le x\le 3,\\ 4-x,\ \text{якщо}\ 3<x<4,\\ 0,\ \text{якщо}\ x\ge 4.\end{cases}$$

№ 23

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,8	0	0,2	0,4	0	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,1	1	0,8	0,7	0,1	0

.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}1,\ \text{якщо}\ x\le 3,\\ \dfrac{1}{1+\left(x-3\right)^2},\ \text{якщо}\ x>3;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le 1,\\ x-1,\ \text{якщо}\ 1<x<2,\\ 1,\ \text{якщо}\ 2\le x\le 4,\\ 5-x,\ \text{якщо}\ 4<x<5,\\ 0,\ \text{якщо}\ x\ge 5.\end{cases}$$

№ 24

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,2	0,4	0,3	0,8	0,1	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,9	0,8	1	0,5	0,9

.

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{(x-1)^2}{2}, \text{ якщо } 1 < x \le 2, \\ 1 - \dfrac{(4-x)^2}{8}, \text{ якщо } 2 < x < 4, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 4; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1 < x \le 3, \\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

№ 25

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,4	0,6	0,3	0,9	0	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,6	0,8	0,1	0	0,9

.

$$\mu_C(x) = \frac{1}{1 + \exp\left[-(x-3)\right]}; \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0 < x \le 2, \\ \dfrac{4-x}{2}, \text{ якщо } 2 < x \le 4, \\ 0, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$$

Контрольні питання

1. Який сенс має характеристична функція множини?

2. Дайте визначення нечіткої множини.

3. Що являє собою носій нечіткої множини?

4. Які операції над нечіткими множинами ви знаєте?

5. Як можна визначити доповнення нечіткої множини? Об’єднання та перетин нечітких множин?

6. Чим пояснюється існування кількох операцій об’єднання й перетину нечітких множин?

7. Які спеціальні операції над нечіткими множинами ви знаєте?

8. Який сенс мають операції концентрування й розтягування нечіткої множини?

9. Яким чином обчислюється відстань Хеммінга при розгляді скінченної множини? Лічильної множини? Множини потужності континуума?

10. Яким чином обчислюють евклідову відстань між множинами?

11. Який геометричний сенс має лінійна відстань між множинами?

12. Яку властивість характеризує індекс нечіткості множини? Яким чином його обчислюють?

13. Чи залежить значення індексу нечіткості перетину (об’єднання) нечітких множин від значень індексів нечіткості вихідних множин?

14. Чи змінюється індекс нечіткості множини внаслідок операцій її концентрування та розтягування?

15. Дайте визначення найближчої чіткої множини до даної нечіткої.

16. Яку множину називають множиною рівня α нечіткої множини?

17. Сформулюйте теорему про розкладання нечіткої множини на множини рівня.

18. Сформулюйте теорему про декомпозицію нечітких множин.

Відповідь на кожне питання передбачає формулювання визначення, опис особливостей його застосування, наведення прикладів.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

При оцінюванні індивідуального завдання враховується правильність його виконання (50 %), пояснення до обраних методів і правил обчислення, знання визначень і термінології (40 %), своєчасне подання завдання на перевірку (10 %). Самостійно написана програма для обчислення завдань оцінюється додатковим балом.

Рекомендована література

1. Желдак Т.А. Нечіткі множини в системах управління та прийняття рішень: навч. посіб. / Т.А. Желдак, Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2020. – 387 с.
Електронна версія за адресою: http://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/156356

2. Ус С. А. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С. А. Ус, Л. С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – 2-ге вид. випр. – Дніпро : НТУ «ДП», 2018. – 302 с.
3. Штовба С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику [Электронный ресурс] / С. Д. Штовба. – URL:matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/bookl/.

Додаткові джерела

1. Беллман Р. Вопросы принятия решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – Москва : Мир, 1976. – 46 с.
2. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – Москва : Мир, 1976. – 165 с.
3. Зайченко Ю. П. Исследование операций: нечеткая оптимизация. учеб. пос. / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища шк., 1991. – 191 с.
4. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – Москва : Радио и связь, 1982. – 432 с.
5. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. В. Леоненков. – Санкт-Петербург : БХВПетербург, 2005. – 736 с.

Навчальне видання

Тимур Анатолійович **Желдак**
Лариса Сергіївна **Коряшкіна**
Світлана Альбертівна **Ус**

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Методичні рекомендації
до виконання індивідуальних завдань
з дисципліни «Нечітка математика» студентами спеціальности 124
Системний аналіз

Редактор О.Н. Ільченко

Підписано до друку 14.09.2022. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,6.
Обл.-вид. арк. 3,2. Тираж 50 пр. Зам. № .

НТУ «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д.Яворницького, 19