

Трач Володимир<sup>1</sup>, Подворний Андрій<sup>2</sup>, Жукова Наталія<sup>3</sup>

<sup>1</sup>завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки,  
д.т.н., професор, Національний університет водного господарства та  
природокористування, Україна, email: [v.m.trach@nuwm.edu.ua](mailto:v.m.trach@nuwm.edu.ua)

<sup>2</sup> професор кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки, д.т.н.,  
доцент,  
Національний університет водного господарства та природокористування, Україна, e-  
mail: [a.v.podvorni@nuwm.edu.ua](mailto:a.v.podvorni@nuwm.edu.ua)

<sup>3</sup>старший науковий співробітник відділу обчислювальної механіки та техніки,  
к.ф.-м.н., старший науковий співробітник, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка  
НАН України, Україна, email: [zukowa\\_n@ukr.net](mailto:zukowa_n@ukr.net)

## ВИКОРИСТАННЯ ВАРІАЦІЙНОГО ПРИНЦИПУ ХУ – ВАСІДЗУ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ

В роботі, представлено підхід до отримання просторової системи диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних теорії пружності анізотропного тіла, при використанні варіаційного принципу Ху – Васідзу. Приведення отриманої системи до одновимірної проведено з використанням аналітичного методу Бубнова – Галеркіна. Досліджено стійкість нетонких циліндричних оболонок з композитних матеріалів, що включають функціонально-градієнтні матеріали.

**Ключові слова:** варіаційний принцип Ху – Васідзу, циліндрична оболонка, стійкість, функціонально-градієнтні матеріали.

**Вступ.** Розв’язання задач теорії пружності та будівельної механіки тісно пов’язане із використанням варіаційних принципів [7, 8], за допомогою яких можливо створити нові несуперечливі моделі розрахунку оболоноквих конструкцій. Класичні та уточнені теорії розрахунку оболоноквих конструкцій, створені також із використанням варіаційних методів [2, 3, 5], дозволяють отримувати достовірні результати розв’язку задач напружено-деформованого стану, стійкості та динаміки анізотропних оболонок. Однак, використання в сучасній техніці новітніх композитних матеріалів призводить до зростання вимог щодо побудови математичних моделей і, відповідно, до необхідності застосування більш точних підходів до розрахунків. Так широке використання



функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) в різних галузях сучасної техніки вимагає створення підходів, що дозволяють б найповніше враховувати особливості таких матеріалів під різними видами впливів. Використання ФГМ в якості матеріалу оболонкових конструкцій потребує врахування зміни їх структури, наприклад, за товщиною, що можливе при використанні співвідношень просторової теорії пружності.

Розв'язанню задач стійкості оболонкових конструкцій з ізотропних та ортотропних матеріалів у тривимірній постановці присвячена значна кількість робіт. Серед них найповнішою та узагальнюючою є наукова праця [4]. Водночас, використання сучасних композитних матеріалів потребує удосконалення методів розв'язку таких задач. Це може бути пов'язане з неспівпадінням головних напрямів пружності між власними осями попередньо ортотропного матеріалу та криволінійною системою координат оболонок. Складність створення підходів до розрахунку подібних оболонкових конструкцій спричинена взаємозв'язком деформацій розтягу (стиску) та зсуву, вигину та кручення, що призводить до складніших, порівняно з ортотропними, рівнянь стійкості [1, 6].

В роботі приведено підхід до модифікації функціонала узагальненого варіаційного принципу Ху – Васідзу до виду, що враховує особливості сучасних матеріалів і ґрунтується на співвідношеннях теорії пружності анізотропного тіла. Пружні властивості таких матеріалів характеризуються наявністю однієї площини пружної симетрії.

Матеріал і результати досліджень. Відповідно до варіаційного принципу Ху – Васідзу [8] рівняння стійкості, співвідношення пружності, геометричні співвідношення та відповідні граничні умови можуть бути отримані з умови стаціонарності функціоналу  $\Pi_1$ , що визначається з інтегралу:

$$\Pi_1 = \iiint_V \left\{ W(e_{ij}) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[ e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \right\} dV + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS_2. \quad (1)$$

В (1), без додаткових умов, варіюються переміщення  $u_i$ , деформації  $e_{ij}$ , напруження  $e_{ij}$ , напруження  $p_i$  на поверхні  $S_2$ , що викликані переміщеннями  $\bar{u}_i$ . Також в цьому функціоналі  $W(e_{ij})$  – потенціальна енергія деформації,  $\Phi(u_i)$ ,  $\Psi(u_i)$  – потенціали об'ємних і поверхневих навантажень,  $V$  – об'єм матеріалу оболонки.

Після послідовності математичних перетворень, що включають в себе операцію варіювання отримано лінеаризовану систему диференціальних рівнянь стійкості для анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.



З метою приведення тривимірної задачі до одновимірної використано процедуру аналітичного методу Бубнова – Галеркіна [6]. Згідно з нею, розкладемо всі компоненти напружень і переміщень системи рівнянь стійкості в подвійні тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної  $z$  так, що б вони задовольняли граничним умовам на торцях, а також врахуємо їх періодичність за коловою координатою  $\varphi$ .

Розв'язок одновимірної системи диференціальних рівнянь проводився при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Була розглянута задача порівняння величин критичних навантажень анізотропної циліндричної оболонки, виготовленої з попередньо ортотропного волокнистого матеріалу боропластику з такою ж, але із зовнішнім шаром з кераміко-металевого функціональноградієнтного матеріалу. Обидві оболонкові конструкції знаходились під дією розподіленого зовнішнього тиску. Головні напрямки пружності боропластику та ФГМ можуть бути повернуті на кут  $\alpha$  відносно напрямку твірної оболонки. Температура матеріалів була прийнята незмінною і такою, що відповідає температурі вихідного недеформованого стану конструкцій  $t=293^{\circ}\text{K}$ .

Висновки. В роботі, спираючись на варіаційний принцип Ху – Васідзу, отримано тривимірну систему диференціальних рівнянь, що описує стійкість циліндричної анізотропної оболонкової конструкції. Приведення системи до одновимірної здійснюється при використанні розкладів у подвійні тригонометричні ряди Фур'є. При цьому апроксимація невідомих уздовж твірної та за коловим напрямком оболонкової конструкції проводиться при використанні аналітичного методу Бубнова – Галеркіна.

Застосування запропонованого підходу дозволяє розв'язувати задачі стійкості для шаруватих оболонкових конструкцій, при виготовленні яких використано сучасні композитні матеріали, у тривимірній постановці.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амбарцумян, С. (1974). *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука.
2. Баженов, В., Семенюк, М. & Трач, В. (2010). *Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: монографія*. К.: Каравела.
3. Григоренко, Я. & Крюков, Н. (1988). *Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами*. К.: Наук. думка.



4. Гузь, А. & Бабич І. (1985). *Трёхмерная теория устойчивости деформируемых тел. Пространственные задачи теории упругости и пластичности*. К.: Наук. думка.
5. Трач, В., Подворний, А. & Хоружий М. (2019). *Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: монографія*. К.: Каравела.
6. Semenyuk, N., Trach, V. & Podvornyi, A. (2023). Stress–strain state of a thick-walled anisotropic cylindrical shell, *International Applied Mechanics*, 59 (1), 79–89.
7. Tonti, E. (1967). Variational principles in elastostatics. *Meccanica*, (2), 201–208.
8. Washizu, K. (1982). *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Pr; Subsequent edition.

