

2. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ.

Представленные в разделе 1 уравнения движения водонасыщенного грунта имеют сложный вид. В этой связи целесообразно преобразовать их таким образом, чтобы имелась возможность упростить процедуру нахождения их общих решений. Такой подход широко используется в механике сплошной среды, в частности, в теории упругости, гидро - и аэродинамике и т.д. [16, 17, 33, 47]. В настоящей главе представлены алгоритмы построения общих точных решений в рамках модели упругого водонасыщенного весомого основания при динамической внешней нагрузке. При этом рассмотрены переходной (общий случай) и стационарный процессы колебаний. Далее в ходе решения конкретных задач расчета было выполнено сопоставление напряженно – деформированного состояния водо – и неводонасыщенного основания.

2.1. Общие решения.

2.1.1. Цилиндрическая система координат.

Для нахождения общего решения системы уравнений (1.2.7) в рамках модели упругой весомой водонасыщенной среды, т.е. для динамической задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации в цилиндрической системе координат при осевой симметрии введем в рассмотрение новые функции $\Phi(r,z,t)$ и $F(r,z,t)$, связанные с перемещениями U и W равенствами

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; \\ W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}. \end{aligned} \right\}. \quad (2.1.1)$$

В этом случае при выполнении соотношений

$$\left. \begin{aligned} G \cdot \Delta F &= \rho \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}; \\ (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{\beta} \cdot P, \end{aligned} \right\}, \quad (2.1.2)$$

уравнения равновесия (первые два уравнения (1.2.7)) удовлетворяются тождественно, а уравнение порового давления (третье уравнение (1.2.7)) примет вид

$$\Delta \left[\frac{3 \cdot c_V \cdot P}{\beta \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G)} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = 0. \quad (2.1.3)$$

Решив второе уравнение (2.1.2) и (2.1.3) относительно функции Φ , найдем:

$$\Delta \left(3 \cdot c_V \cdot \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Delta \Phi - \frac{3 \rho \cdot c_V}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.1.4-a)$$

Определив из (2.1.4-а) функцию Φ , поровое давление P найдем путем решения уравнения

$$(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\beta} \cdot P. \quad (2.1.4-б)$$

С учетом изложенного общее решение системы (1.2.7) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; \\ W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}; \\ \Delta \left(3 \cdot c_V \cdot \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Delta \Phi - \frac{3 \rho \cdot c_V}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= 0; \\ G \cdot \Delta F &= \rho \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}; \\ P &= \beta \cdot \left\{ (\lambda + 2G) \Delta \Phi - \rho \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right); \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; \\ e &= \Delta \Phi; \\ \gamma_{rz} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right); \\ \omega &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \Delta F; \\ \sigma_{zz} &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \Phi + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot F - \frac{1}{\beta} P; \end{aligned} \right\}. \quad (2.1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \cdot \Phi + 2 \cdot G \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{\beta} \cdot P; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left(\lambda \cdot \Delta + \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot \Phi - \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - \frac{1}{\beta} \cdot P; \\ \tau_{rz} &= 2 \cdot G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right); \\ \sigma_{kk} &= (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi - \frac{3}{\beta} \cdot P \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

Система уравнений (2.1.4) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого водонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели получать точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.1.4) следует присоединить начальные и граничные условия (см. раздел 1.3.).

Если давлением в поровой жидкости можно пренебречь (неводонасыщенное основание), в системе уравнений (2.1.4) следует положить поровое давление $P \rightarrow 0$, а коэффициент пространственной консолидации $C_v \rightarrow \infty$. В этом случае общее решение системы уравнений (1.2.8) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; \\ W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}; \\ G \cdot \Delta F &= \rho \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}; \\ (\lambda + 2G) \Delta \Phi - \rho \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_z &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right); \\
\varepsilon_r &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z}; \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; \\
e &= \Delta \Phi; \\
\gamma_{rz} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right); \\
\gamma_{rz} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right); \\
\omega &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \Delta F; \\
\sigma_{zz} &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \Phi + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot F; \\
\sigma_{rr} &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \cdot \Phi + 2 \cdot G \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z}; \\
\sigma_{\theta\theta} &= \left(\lambda \cdot \Delta + \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot \Phi - \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; \\
\tau_{rz} &= 2 \cdot G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right); \\
\sigma_{kk} &= (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi.
\end{aligned} \right\}. \tag{2.1.5}$$

Система уравнений (2.1.5) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого неводонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели получать точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.1.5) следует присоединить начальные и граничные условия (см. раздел 1.3.).

2.1.2. Декартова система координат.

Для построения общего решения в рамках модели упругого весомого водонасыщенного основания в декартовой системе координат (система уравнений (1.2.2), динамическая задача теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации), введем в рассмотрение систему функций $\Phi(x,y,z,t)$, $F1(x,y,z,t)$, $F2(x,y,z,t)$ и $F3(x,y,z,t)$, связанных с перемещениями U , V и W такими соотношениями

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F3}{\partial y} - \frac{\partial F2}{\partial z}; \\ V &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F1}{\partial z} - \frac{\partial F3}{\partial x}; \\ W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial F2}{\partial x} - \frac{\partial F1}{\partial y}. \end{aligned} \right\}. \quad (2.1.6)$$

В этом случае при выполнении соотношений

$$\left. \begin{aligned} G \cdot \Delta F1 - \rho \cdot \frac{\partial^2 F1}{\partial t^2} &= 0; \\ G \cdot \Delta F2 - \rho \cdot \frac{\partial^2 F2}{\partial t^2} &= 0; \\ G \cdot \Delta F3 - \rho \cdot \frac{\partial^2 F3}{\partial t^2} &= 0; \\ (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi - \rho \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{\beta} \cdot P, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

уравнения равновесия (первые три уравнения (1.2.2)) удовлетворяются тождественно, а уравнение порового давления (четвертое уравнение (1.2.2)) имеет вид

$$\Delta \left(\frac{3 \cdot c_V \cdot P}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} - \beta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.1.8)$$

Решив последнее уравнение (2.1.7) и (2.1.8) относительно функции Φ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F3}{\partial y} - \frac{\partial F2}{\partial z}; \\ V &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F1}{\partial z} - \frac{\partial F3}{\partial x}; \\ W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial F2}{\partial x} - \frac{\partial F1}{\partial y}; \\ G \cdot \Delta F1 &= \rho \cdot \frac{\partial^2 F1}{\partial t^2}; \\ G \cdot \Delta F2 &= \rho \cdot \frac{\partial^2 F2}{\partial t^2}; \\ G \cdot \Delta F3 &= \rho \cdot \frac{\partial^2 F3}{\partial t^2}; \\ \Delta \left(3 \cdot c_V \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Delta \Phi - \frac{3 \cdot \rho \cdot c_V}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.1.9)$$

$$\left.
\begin{aligned}
P &= \beta \cdot \left\{ (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi - \rho \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} \\
\varepsilon_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}; \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}; \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}; \\
e &= \Delta \Phi; \\
\gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_3; \\
\gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_2 + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z}; \\
\gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_1 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z}; \\
\sigma_{xx} &= 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \cdot \Delta \Phi - \frac{1}{\beta} \cdot P; \\
\sigma_{yy} &= 2G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} \right) + \lambda \cdot \Delta \Phi - \frac{1}{\beta} \cdot P;
\end{aligned}
\right\} \tag{2.1.9}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} \right) + \lambda \cdot \Delta \Phi - \frac{1}{\beta} \cdot P; \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = G \cdot \gamma_{xy}; \\
 \tau_{xz} &= \tau_{zx} = G \cdot \gamma_{xz}; \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = G \cdot \gamma_{yz}; \\
 \sigma_{kk} &= (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi - \frac{1}{\beta} \cdot P.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.9)$$

Система уравнений (2.1.9) полностью описывает напряженно-деформированное состояние весомого упругого водонасыщенного основания при динамической внешней нагрузке и позволяет в рамках этой модели в декартовой системе координат строить точные общие решения. Для построения частных решений к (2.1.9) следует присоединить начальные и граничные условия (см. раздел 3.3).

Если давлением в поровой жидкости можно пренебречь (неводонасыщенное основание), в системе уравнений (2.1.9) следует положить поровое давление $P \rightarrow 0$, а коэффициент пространственной консолидации $C_v \rightarrow \infty$. В этом случае общее решение системы уравнений (1.2.4) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
 U &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}; \\
 V &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}; \\
 W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y};
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.10)$$

$$\left.
\begin{aligned}
G \cdot \Delta F_1 &= \rho \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}; \\
G \cdot \Delta F_2 &= \rho \cdot \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2}; \\
G \cdot \Delta F_3 &= \rho \cdot \frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2}; \\
(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi - \rho \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0; \\
\varepsilon_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}; \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}; \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}; \\
e &= \Delta \Phi; \\
\gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_3; \\
\gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_2 + \\
&\quad + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z}; \\
\gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_1 + \\
&\quad + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z}; \\
\sigma_{xx} &= 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \cdot \Delta \Phi;
\end{aligned}
\right\} \tag{2.1.10}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{yy} &= 2G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} \right) + \lambda \cdot \Delta \Phi; \\
 \sigma_{zz} &= 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} \right) + \lambda \cdot \Delta \Phi; \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = G \cdot \gamma_{xy}; \\
 \tau_{xz} &= \tau_{zx} = G \cdot \gamma_{xz}; \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = G \cdot \gamma_{yz}; \\
 \sigma_{kk} &= (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.10)$$

Система уравнений (2.1.10) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого неводонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели получать точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.1.4) следует присоединить начальные и граничные условия (см. раздел 1.3.).

В заключение необходимо подчеркнуть, что представленные в настоящем разделе алгоритмы построения общих решений могут быть использованы для решения задач теории взаимосвязанной термоупругости [33]. При этом, естественно, необходимо произвести соответствующую замену материальных констант.

2.2. Комплексные решения (стационарный процесс вынужденных колебаний).

Если основание достаточно долго находится под воздействием внешней нагрузки (например, для оснований фундаментов турбоагрегатов время воздействия внешней периодической нагрузки может измеряться в годах), заканчивающиеся достаточно быстро (в течение нескольких минут) переходные процессы не представляют никакого практического интереса. Кроме того, в данном случае частота колебаний любой точки основания равна частоте изменения внешней нагрузки. Поэтому при определении напряженно – деформированного состояния системы «основание – фундамент – сооружение» в данном случае учитывают, что перемещения, напряжения, деформации и т.д. являются произведением некоторых функций координат на некоторую периодическую функцию времени [15, 22, 23, 29, 33, 36, 39, 47, 48]. Общий вид этой функции времени не имеет значения; достаточно чтобы она имела вид отрезка ряда Фурье [23]. В этом случае для определения напряженно – деформированного состояния системы «основание – фундамент – сооружение» достаточно построить решения, соответствующие частоте изменения каждого из членов ряда Фурье и использовать принцип суперпозиции [47].

2.2.1. Цилиндрическая система координат.

Представим перемещения (2.1.4) и поровое давление в некоторой точке грунтового основания в виде

$$U = \left. \begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} = U^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t} = \\ & = \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F^*}{\partial r \partial z} \right) \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = W^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t} = \\ &\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F^*}{\partial r} \right) \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}, \\ P &= P^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}. \end{aligned} \right\}, \quad (2.2.1)$$

где U , W , Φ , F и P - фактические значения перемещений U и W , функций Φ и F и порового давления P в некоторый момент времени t ; U^* , W^* , Φ^* , F^* и P^* - их амплитудные значения; ϖ - частота изменения внешней нагрузки; $I = \sqrt{-1}$ - мнимая единица [23].

Для построения общего решения системы уравнений (2.1.4) для установившегося процесса колебаний следует найти амплитудные значения перемещений U^* и W^* , функций Φ^* и F^* порового давления P , умножить их на множитель $e^{-I \varpi t}$ и выделить действительные части полученных таким образом решений задачи. С учетом (2.2.1) имеем:

$$\left. \begin{aligned} U^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F^*}{\partial r \partial z}; \\ W^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F^*}{\partial r}; \\ \Delta \left(3 \cdot c_V \cdot \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Delta \Phi^* + \frac{3 \rho \cdot c_V \cdot \varpi^2}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \cdot \Phi^* - I \cdot \varpi \cdot \Phi^* \right) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

$$\left.
\begin{aligned}
G \cdot \Delta F^* &= -\rho \cdot \varpi^2 F^*; \\
P^* &= \beta \cdot \left\{ (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi^* + \rho \cdot \varpi^2 \cdot \Phi^* \right\}; \\
\varepsilon_z^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right); \\
\varepsilon_r^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 F^*}{\partial r^2 \partial z}; \\
\varepsilon_\theta^* &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F^*}{\partial r \partial z}; \\
e^* &= \Delta \Phi^*; \\
\gamma_{rz}^* &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2} \right); \\
\omega^* &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \Delta F^*; \\
\sigma_{zz}^* &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \Phi^* + \\
&\quad + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot F^* - \frac{1}{\beta} P^*; \\
\sigma_{rr}^* &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \cdot \Phi^* + 2 \cdot G \frac{\partial^3 F^*}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{\beta} P^*; \\
\sigma_{\theta\theta}^* &= \left(\lambda \cdot \Delta + \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot \Phi^* - \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial^2 F^*}{\partial r \partial z} - \frac{1}{\beta} \cdot P^*;
\end{aligned}
\right\} \tag{2.2.2}$$

$$\left. \begin{aligned}
\tau_{rz}^* &= 2 \cdot G \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r \partial z} + G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2} \right); \\
\sigma_{kk}^* &= (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi^* - \frac{3}{\beta} \cdot P^*; \\
U &= U^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad W = W^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad F = F^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\Phi &= \Phi^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad P = P^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\varepsilon_r &= \varepsilon_r^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad e = e^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\gamma_{rz} &= \gamma_{rz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \omega = \omega^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\sigma_{kk} &= \sigma_{kk}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}.
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

Система уравнений (2.2.2) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого водонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели получать точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.2.2) следует присоединить граничные условия (см. раздел 1.3.).

Если давлением в поровой жидкости можно пренебречь (неводонасыщенное основание), в системе уравнений (2.2.2) следует положить поровое давление $P \rightarrow 0$, а коэффициент пространственной консолидации $C_v \rightarrow \infty$. В этом случае общее решение системы уравнений

(1.2.4) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
 U^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F^*}{\partial r \partial z}; \\
 W^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F^*}{\partial r}; \\
 G \cdot \Delta F^* &= -\rho \cdot \varpi^2 F^*; \\
 (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi^* + \rho \cdot \varpi^2 \cdot \Phi^* &= 0; \\
 \varepsilon_z^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right); \\
 \varepsilon_r^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 F^*}{\partial r^2 \partial z}; \\
 \varepsilon_\theta^* &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F^*}{\partial r \partial z}; \\
 e^* &= \Delta \Phi^*; \\
 \gamma_{rz}^* &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2} \right); \\
 \omega^* &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \Delta F^*; \\
 \sigma_{zz}^* &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \Phi^* + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot F; \\
 \sigma_{rr}^* &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \cdot \Phi^* + 2 \cdot G \frac{\partial^3 F^*}{\partial r^2 \partial z}; \\
 \sigma_{\theta\theta}^* &= \left(\lambda \cdot \Delta + \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot \Phi^* - \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial^2 F^*}{\partial r \partial z};
 \end{aligned} \right\} (2.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
\tau_{rz}^* &= 2 \cdot G \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r \partial z} + G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2} \right); \\
\sigma_{kk}^* &= (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi^*; \\
U &= U^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad W = W^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad F = F^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\Phi &= \Phi^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad P = P^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\varepsilon_r &= \varepsilon_r^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad e = e^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\gamma_{rz} &= \gamma_{rz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \omega = \omega^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\sigma_{kk} &= \sigma_{kk}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}.
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

Система уравнений (2.2.3) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого неводонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели в цилиндрической системе координат получать точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.2.3) следует присоединить граничные условия (см. раздел 1.3.).

2.2.2. Декартова система координат.

Далее построим общее решение системы уравнений (1.2.2) для стационарного режима колебаний в декартовой системе координат.

Представим перемещения системы уравнений (1.2.2) в виде

$$\left. \begin{aligned}
 U &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = U^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t} = \\
 &= \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} + \frac{\partial F_3^*}{\partial y} - \frac{\partial F_2^*}{\partial z} \right) \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
 V &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = V^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t} = \\
 &= \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y} + \frac{\partial F_1^*}{\partial z} - \frac{\partial F_3^*}{\partial x} \right) \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
 W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = W^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t} = \\
 &= \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{\partial F_2^*}{\partial x} - \frac{\partial F_1^*}{\partial y} \right) \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
 P &= P^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

где $U, V, W, \Phi, F_1, F_2, F_3$ - фактические значения перемещений U, V, W и функций Φ, F_1, F_2, F_3 , а также порового давления P в некоторый момент времени t ; $U^*, V^*, W^*, \Phi^*, F_1^*, F_2^*, F_3^*$ и P^* - их амплитудные значения; ϖ - частота изменения внешней нагрузки; $I = \sqrt{-1}$ - мнимая единица [23].

Имеем:

$$U^* = \left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} + \frac{\partial F_3^*}{\partial y} - \frac{\partial F_2^*}{\partial z} \right\} \quad (2.2.5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 V^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} + \frac{\partial F_1^*}{\partial z} - \frac{\partial F_3^*}{\partial x}; \\
 W^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{\partial F_2^*}{\partial x} - \frac{\partial F_1^*}{\partial y}; \\
 G \cdot \Delta F_1^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_1^*; \\
 G \cdot \Delta F_2^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_2^*; \\
 G \cdot \Delta F_3^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_3^*; \\
 P^* &= \beta \cdot \left\{ (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi^* + \rho \cdot \varpi^2 \cdot \Phi^* \right\}; \\
 \Delta \left(\begin{aligned} &3 \cdot c_V \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Delta \Phi^* + \frac{3 \cdot \rho \cdot c_V \cdot \varpi^2}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Phi^* \\ &- \varpi \cdot i \cdot \Phi^* \end{aligned} \right) &= 0; \\
 \varepsilon_x^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial x \partial z}; \\
 \varepsilon_y^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial x \partial y}; \\
 \varepsilon_z^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial y \partial z}; \\
 e^* &= \Delta \Phi^*; \\
 \gamma_{xy}^* &= 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial x \partial z} - \\
 &\frac{\partial^2 F_2^*}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_3^*;
 \end{aligned} \right\} \tag{2.2.5}$$

$$\left. \begin{aligned}
\gamma_{xz}^* &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial x \partial y} + \\
&+ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_2^* + \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial y \partial z}; \\
\gamma_{yz}^* &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_1^* + \\
&+ \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial x \partial z}; \\
\sigma_{xx}^* &= 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial x \partial z} \right) + \\
&+ \lambda \cdot \Delta \Phi^* - \frac{1}{\beta} \cdot P^*; \\
\sigma_{yy}^* &= 2G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial x \partial y} \right) + \\
&+ \lambda \cdot \Delta \Phi^* - \frac{1}{\beta} \cdot P^*; \\
\sigma_{zz}^* &= 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial y \partial z} \right) + \\
&+ \lambda \cdot \Delta \Phi^* - \frac{1}{\beta} \cdot P^*; \\
\tau_{xy}^* &= G \cdot \gamma_{xy}^*; \\
\tau_{xz}^* &= G \cdot \gamma_{xz}^*; \\
\tau_{yz}^* &= G \cdot \gamma_{yz}^*; \\
\sigma_{kk} &= (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi - \frac{1}{\beta} \cdot P
\end{aligned} \right\} \tag{2.2.5}$$

$$\left. \begin{aligned}
U &= U^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad V = V^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad W = W^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
F_1 &= F_1^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad F_2 = F_2^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad F_3 = F_3^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\Phi &= \Phi^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad P = P^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad e = e^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{yx}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \gamma_{zy} = \gamma_{yz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\tau_{xy} &= \tau_{xy}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
\sigma_{kk} &= \sigma_{kk}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}.
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.5)$$

Система уравнений (2.2.5) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого водонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели в декартовой системе координат получать точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.2.5) следует присоединить граничные условия (см. раздел 1.3.).

Если давлением в поровой жидкости можно пренебречь (неводонасыщенное основание), в системе уравнений (2.2.5) следует положить поровое давление $P \rightarrow 0$, а коэффициент пространственной консолидации $C_v \rightarrow \infty$. В этом случае общее решение системы уравнений (1.2.4) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
U^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} + \frac{\partial F_3^*}{\partial y} - \frac{\partial F_2^*}{\partial z}; \\
V^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} + \frac{\partial F_1^*}{\partial z} - \frac{\partial F_3^*}{\partial x}; \\
W^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{\partial F_2^*}{\partial x} - \frac{\partial F_1^*}{\partial y}; \\
G \cdot \Delta F_1^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_1^*; \\
G \cdot \Delta F_2^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_2^*; \\
G \cdot \Delta F_3^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_3^*; \\
(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi^* + \rho \cdot \varpi^2 \cdot \Phi^* &= 0; \\
\varepsilon_x^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial x \partial z}; \\
\varepsilon_y^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial x \partial y}; \\
\varepsilon_z^* &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial y \partial z}; \\
e^* &= \Delta \Phi^*; \\
\gamma_{xy}^* &= 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial y \partial z} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_3^*; \\
\gamma_{xz}^* &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial x \partial y} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_2^* + \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial y \partial z};
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \gamma_{yz}^* = 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_1^* + \\
& + \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial x \partial z}; \\
& U = U^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad V = V^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad W = W^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
& F_1 = F_1^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad F_2 = F_2^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad F_3 = F_3^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
& \Phi = \Phi^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad P = P^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
& \varepsilon_y = \varepsilon_y^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad e = e^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
& \gamma_{xy} = \gamma_{yx}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \gamma_{zy} = \gamma_{yz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
& \sigma_{xx} = \sigma_{xx}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
& \tau_{xy} = \tau_{xy}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}; \\
& \sigma_{kk} = \sigma_{kk}^* \cdot e^{I \cdot \varpi \cdot t}.
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

Система уравнений (2.2.6) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого неводонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели в декартовой системе координат получать точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.2.6) следует присоединить граничные условия (см. раздел 1.3.).

Представленные в настоящем разделе алгоритмы построения общих решений могут быть использованы для решения задач теории

взаимосвязанной термоупругости [33].

В заключение следует отметить, что использование на практике представленных в настоящем разделе алгоритмов для решения задач динамики водонасыщенных оснований встречает определенные затруднения. Это связано с тем, что имеет место необходимость из общего комплексного решения выделять его действительную часть. На решение этой проблемы направлены представленные в разделе 2.3 материалы исследований.

2.3. Действительные решения (стационарный процесс вынужденных колебаний)

Изложенный в разделе 2.2 алгоритм построения общих решений включает в себя весьма трудоемкую процедуру отделения мнимой части решения от действительной. В этой связи ниже изложен алгоритм нахождения действительных решений задачи колебаний весоного водонасыщенного основания.

Предполагается, что процесс колебаний продолжается достаточно долго, а внешняя нагрузка изменяется по закону

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n [A_i \cdot \cos(\varpi_i \cdot t) + B_i \cdot \sin(\varpi_i \cdot t)]$$

Общий вид этой функции времени не имеет значения; достаточно чтобы она имела вид отрезка ряда Фурье [23, 26, 35]. В этом случае для определения напряженно – деформированного состояния системы «основание – фундамент – сооружение» достаточно построить решения, соответствующие частоте изменения каждого из членов ряда Фурье и использовать принцип суперпозиции [23, 35, 47].

2.3.1. Цилиндрическая система координат.

Представим перемещения и поровое давление в некоторой точке основания (см. системы уравнений (2.1.4)) в виде

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} = U_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + U_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t) = \left. \right\} \quad (2.3.1)$$

$$\left. \begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \Phi_c^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F_c^*}{\partial r \partial z} \right) \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi_s^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F_s^*}{\partial r \partial z} \right) \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \\
&= W_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + W_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t) = \\
&\left(\frac{\partial \Phi_c^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_c^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_c^*}{\partial r} \right) \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi_s^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_s^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_s^*}{\partial r} \right) \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
P &= P_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + P_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t).
\end{aligned} \right\}. \quad (2.3.1)$$

где U , W , Φ , F , P - фактические значения перемещений U и W , функций Φ и F и порового давления P в некоторый момент времени t ; U_c^* , W_c^* , Φ_c^* , F_c^* и P_c^* - амплитуды их изменения при колебаниях по закону косинуса; U_s^* , W_s^* , Φ_s^* , F_s^* и P_s^* - то же, по закону синуса; ϖ - частота изменения внешней нагрузки.

Для построения общего действительного решения системы уравнений (2.1.4) для установившегося процесса колебаний следует найти амплитудные значения перемещений U_c^* , W_c^* , Φ_c^* , F_c^* , P_c^* , U_s^* , W_s^* , Φ_s^* , F_s^* и P_s^* и после этого умножить их на множители $\cos(\varpi \cdot t)$ и $\sin(\varpi \cdot t)$ соответственно.

При определении амплитудных значений искомых функций следует соотношения (2.3.1) подставить в систему уравнений (2.1.4), вынести функции $\cos(\varpi \cdot t)$ и $\sin(\varpi \cdot t)$ за скобки, а выражения в скобках приравнять нулю. С учетом изложенного имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{c,s}^* &= \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r \partial z}; \\
 W_{c,s}^* &= \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{c,s}^*}{\partial r}; \\
 G \cdot \Delta F_{c,s}^* &= -\rho \cdot \varpi^2 F_{c,s}^*; \\
 (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* + \rho \cdot \varpi^2 \cdot \Phi_{c,s}^* &= \frac{1}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
 \Delta \left(3 \cdot c_V \cdot \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Delta \Phi_s^* + \frac{3 \rho \cdot c_V \cdot \varpi^2}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \cdot \Phi_s^* + \varpi \cdot \Phi_c^* \right) &= 0; \\
 \Delta \left(3 \cdot c_V \cdot \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Delta \Phi_c^* + \frac{3 \rho \cdot c_V \cdot \varpi^2}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \cdot \Phi_c^* - \varpi \cdot \Phi_s^* \right) &= 0; \\
 \varepsilon_{zc,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial r} \right); \\
 \varepsilon_{rc,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 F_{c,s}^*}{\partial r^2 \partial z}; \\
 \varepsilon_{\theta c,s}^* &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r \partial z}; \\
 e_{c,s}^* &= \Delta \Phi_{c,s}^*;
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

$$\left.
\begin{aligned}
\gamma_{rz}^* c,s &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial r \partial z} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{c,s}^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial z^2} \right); \\
\omega_{c,s}^* &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \Delta F_{c,s}^*; \\
\sigma_{zz}^* c,s &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \Phi_{c,s}^* + \\
&+ 2 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot F_{c,s}^* - \frac{1}{\beta} P_{c,s}^*; \\
\sigma_{rr}^* c,s &= \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \cdot \Phi_{c,s}^* + 2 \cdot G \frac{\partial^3 F_{c,s}^*}{\partial r^2 \partial z}; \\
\sigma_{\theta\theta}^* c,s &= \left(\lambda \cdot \Delta + \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot \Phi_{c,s}^* - \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r \partial z} - \\
&- \frac{1}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
\tau_{rz}^* c,s &= 2 \cdot G \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial r \partial z} + G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial z^2} \right); \\
\sigma_{kk}^* c,s &= (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* - \frac{3}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
U &= U_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + U_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
W &= W_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + W_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
F &= F_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + F_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\Phi &= \Phi_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \Phi_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t);
\end{aligned}
\right\} \tag{2.3.2}$$

$$\left. \begin{aligned}
P &= P_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + P_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\varepsilon_z &= \varepsilon_{zc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{zs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\varepsilon_r &= \varepsilon_{rc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{rs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\varepsilon_\theta &= \varepsilon_{\theta c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{\theta s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
e &= e_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + e_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\gamma_{rz} &= \gamma_{rz c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \gamma_{rz s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\omega &= \omega_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \omega_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\sigma_{zz} &= \sigma_{zz c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{zz s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\sigma_{rr} &= \sigma_{rr c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{rr s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{\theta\theta s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\tau_{rz} &= \tau_{rz c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \tau_{rz s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\sigma_{kk} &= \sigma_{kk c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{kk s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t).
\end{aligned} \right\}. \quad (2.3.2)$$

Система уравнений (2.3.2) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого водонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели получать точные общие действительные решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.3.2) следует присоединить граничные условия (см. раздел 1.3.).

Если давлением в поровой жидкости можно пренебречь (неводонасыщенное основание), в системе уравнений (2.3.2) следует положить поровое давление $P \rightarrow 0$, а коэффициент пространственной консолидации $C_v \rightarrow \infty$ (см. (2.1.5)). В этом случае общее действительное решение системы

уравнений (2.1.5) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{c,s}^* &= \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r \partial z}; \\
 W_{c,s}^* &= \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{c,s}^*}{\partial r}; \\
 G \cdot \Delta F_{c,s}^* &= -\rho \cdot \varpi^2 F_{c,s}^*; \\
 (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* + \rho \cdot \varpi^2 \cdot \Phi_{c,s}^* &= 0; \\
 \varepsilon_{zc,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial z^2} + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial r} \right); \\
 \varepsilon_{rc,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 F_{c,s}^*}{\partial r^2 \partial z}; \\
 \varepsilon_{\theta c,s}^* &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r \partial z}; \\
 e_{c,s}^* &= \Delta \Phi_{c,s}^*; \\
 \gamma_{rz,c,s}^* &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial r \partial z} + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{c,s}^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial z^2} \right); \\
 \omega_{c,s}^* &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \Delta F_{c,s}^*;
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \sigma_{zz}^* c, s = \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \Phi_{c,s}^* + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot F_{c,s}^* - \\
& - \frac{1}{\beta} P_{c,s}^*; \\
& \sigma_{rr}^* c, s = \left(\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot G \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \cdot \Phi_{c,s}^* + 2 \cdot G \frac{\partial^3 F_{c,s}^*}{\partial r^2 \partial z}; \\
& \sigma_{\theta\theta}^* c, s = \left(\lambda \cdot \Delta + \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot \Phi_{c,s}^* - \frac{2 \cdot G}{r} \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r \partial z} - \frac{1}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
& \tau_{rz}^* c, s = 2 \cdot G \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial r \partial z} + G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F_{c,s}^*}{\partial z^2} \right); \\
& \sigma_{kk}^* c, s = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi_{c,s}^*; \\
& U = U_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + U_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad W = W_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + W_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& F = F_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + F_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \Phi = \Phi_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \Phi_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& P = P_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + P_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{zc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{zs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& \varepsilon_r = \varepsilon_{rc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{rs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{\theta s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& e = e_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + e_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \gamma_{rz} = \gamma_{rz c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \gamma_{rz s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& \omega = \omega_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \omega_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{zz s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& \sigma_{rr} = \sigma_{rr c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{rr s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \\
& + \sigma_{\theta\theta s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& \tau_{rz} = \tau_{rz c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \tau_{rz s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \sigma_{kk} = \sigma_{kk c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \\
& + \sigma_{kk s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t).
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

Система уравнений (2.3.3) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого неводонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели в цилиндрической системе координат получать точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.3.3) следует присоединить граничные условия (см. раздел 1.3.).

2.3.2. Декартова система координат.

Далее построим общее решение системы уравнений (1.2.2) для стационарного режима колебаний в декартовой системе координат.

Представим перемещения и поровое давление системы уравнений (1.2.2) в виде

$$\left. \begin{aligned}
 U &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \\
 U_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + U_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t) &= \\
 &= \left(\frac{\partial \Phi_c^*}{\partial x} + \frac{\partial F_{3c}^*}{\partial y} - \frac{\partial F_{2c}^*}{\partial z} \right) \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \\
 &+ \left(\frac{\partial \Phi_s^*}{\partial x} + \frac{\partial F_{3s}^*}{\partial y} - \frac{\partial F_{2s}^*}{\partial z} \right) \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
 V &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = \\
 &= V_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + V_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t) =
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

$$\left. \begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \Phi_c^*}{\partial x} + \frac{\partial F_{1c}^*}{\partial y} - \frac{\partial F_{3c}^*}{\partial z} \right) \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi_s^*}{\partial x} + \frac{\partial F_{1s}^*}{\partial y} - \frac{\partial F_{3s}^*}{\partial z} \right) \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \\
&= W_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + W_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t) = \\
&\left(\frac{\partial \Phi_c^*}{\partial x} + \frac{\partial F_{2c}^*}{\partial y} - \frac{\partial F_{1c}^*}{\partial z} \right) \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi_s^*}{\partial x} + \frac{\partial F_{2s}^*}{\partial y} - \frac{\partial F_{1s}^*}{\partial z} \right) \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
P &= P_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + P_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t).
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

где U , V , W , Φ , F_1 , F_2 , F_3 и P - фактические значения перемещений U, V, W , функций Φ , F_1 , F_2 , F_3 и порового давления P в некоторый момент времени t ;

U_c^* , V_c^* , W_c^* , Φ_c^* , F_{1c}^* , F_{2c}^* , F_{3c}^* и P_c^* - амплитуды их изменения при колебаниях по закону косинуса; U_s^* , V_s^* , W_s^* , Φ_s^* , F_{1s}^* , F_{2s}^* , F_{3s}^* и P_s^* - то же, по закону синуса; ϖ - частота изменения внешней нагрузки.

Для построения общего действительного решения системы уравнений (1.2.2) для установившегося процесса колебаний следует найти амплитудные значения перемещений $U_c^*, V_c^*, W_c^*, \Phi_c^*, F_{1c}^*, F_{2c}^*, F_{3c}^*, P_c^*, U_s^*, V_s^*, W_s^*, \Phi_s^*, F_{1s}^*$,

F_{2s}^*, F_{3s}^* и P_s^* и умножить их на множители $\cos(\varpi \cdot t)$ и $\sin(\varpi \cdot t)$ соответственно.

При определении амплитудных значений искомых функций следует соотношения (2.3.4) подставить в систему уравнений (1.2.2), вынести функции $\cos(\varpi \cdot t)$ и $\sin(\varpi \cdot t)$ за скобки, а выражения в скобках приравнять нулю. С учетом изложенного имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{c,s}^* &= \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial x} + \frac{\partial F_{3c,s}^*}{\partial y} - \frac{\partial F_{2c,s}^*}{\partial z}; \\
 V_{c,s}^* &= \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial y} + \frac{\partial F_{1c,s}^*}{\partial z} - \frac{\partial F_{3c,s}^*}{\partial x}; \\
 W_{c,s}^* &= \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial z} + \frac{\partial F_{2c,s}^*}{\partial x} - \frac{\partial F_{1c,s}^*}{\partial y}; \\
 G \cdot \Delta F_{1c,s}^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_{1c,s}^*; \\
 G \cdot \Delta F_{2c,s}^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_{2c,s}^*; \\
 G \cdot \Delta F_{3c,s}^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_{3c,s}^*; \\
 (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* + \rho \cdot \varpi^2 \cdot \Phi_{c,s}^* &= \frac{1}{\beta} P_{c,s}^*; \\
 \Delta \left(3 \cdot c_V \cdot \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Delta \Phi_s^* + \frac{3 \rho \cdot c_V \cdot \varpi^2}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \cdot \Phi_s^* + \varpi \cdot \Phi_c^* \right) &= 0; \\
 \Delta \left(3 \cdot c_V \cdot \frac{\lambda + 2 \cdot G}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \Delta \Phi_c^* + \frac{3 \rho \cdot c_V \cdot \varpi^2}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot G} \cdot \Phi_c^* - \varpi \cdot \Phi_s^* \right) &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x\ c,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{3\ c,s}^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_{2\ c,s}^*}{\partial x \partial z}; \\
\varepsilon_{y\ c,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_{1\ c,s}^*}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_{3\ c,s}^*}{\partial x \partial y}; \\
\varepsilon_{z\ c,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{2\ c,s}^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_{1\ c,s}^*}{\partial y \partial z}; \\
e_{c,s}^* &= \Delta \Phi_{c,s}^*; \\
\gamma_{xy\ c,s}^* &= 2 \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_{c,s1}^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_{2\ c,s}^*}{\partial y \partial z} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_{3\ c,s}^*; \\
\gamma_{xz\ c,s}^* &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_{1\ c,s}^*}{\partial x \partial y} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_{2\ c,s}^* + \frac{\partial^2 F_{3\ c,s}^*}{\partial y \partial z}; \\
\gamma_{yz\ c,s}^* &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_{1\ c,s}^* + \\
&\quad + \frac{\partial^2 F_{2\ c,s}^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_{3\ c,s}^*}{\partial x \partial z}; \\
\sigma_{xx\ c,s}^* &= 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{3\ c,s}^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_{2\ c,s}^*}{\partial x \partial z} \right) + \\
&\quad + \lambda \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* - \frac{1}{\beta} \cdot P_{c,s}^*;
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

$$\left. \begin{aligned}
& \sigma_{yy\,c,s}^* = 2G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_{1c,s}^*}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_{3c,s}^*}{\partial x \partial y} \right) + \\
& + \lambda \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* - \frac{1}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
& \sigma_{zz\,c,s}^* = 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{2c,s}^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_{1c,s}^*}{\partial y \partial z} \right) + \\
& + \lambda \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* - \frac{1}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
& \tau_{xy\,c,s}^* = G \cdot \gamma_{xy\,c,s}^*; \\
& \tau_{xz\,c,s}^* = G \cdot \gamma_{xz\,c,s}^*; \\
& \tau_{zx\,c,s}^* = G \cdot \gamma_{xz\,c,s}^*; \\
& \sigma_{kk\,c,s}^* = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* - \frac{3}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
& U = U_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + U_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& V = V_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + V_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& W = W_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + W_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& \Phi = \Phi_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \Phi_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& F_1 = F_{1c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + F_{1s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& F_2 = F_{2c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + F_{2s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& F_3 = F_{3c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + F_{3s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& P = P_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + P_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t);
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_z^* &= \varepsilon_{zc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{zs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\varepsilon_x^* &= \varepsilon_{xc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{xs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\varepsilon_y^* &= \varepsilon_{yc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{ys}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
e &= e_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + e_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xyc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \gamma_{xys}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xzc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \\
&+ \gamma_{xzs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yzc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \gamma_{yzs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\sigma_{xx} &= \sigma_{xxc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{xxs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yyc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \\
&+ \sigma_{yys}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zzc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{zzs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
P &= P_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + P_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t).
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

Система уравнений (2.3.5) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого водонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели в декартовой системе координат получать действительные точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.3.5) следует присоединить граничные условия (см. раздел 1.3.).

Если давлением в поровой жидкости можно пренебречь (неводонасыщенное основание), в системе уравнений (2.3.5) следует положить поровое давление $P \rightarrow 0$, а коэффициент пространственной консолидации $C_v \rightarrow \infty$. В этом случае общее решение системы уравнений (1.2.4) имеет вид:

$$U_{c,s}^* = \left\{ \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial x} + \frac{\partial F_{3c,s}^*}{\partial y} - \frac{\partial F_{2c,s}^*}{\partial z} \right\}; \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned}
V_{c,s}^* &= \frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial y} + \frac{\partial F_{1c,s}^*}{\partial z} - \frac{\partial F_{3c,s}^*}{\partial x}; \\
W_{c,s}^* &= -\frac{\partial \Phi_{c,s}^*}{\partial z} + \frac{\partial F_{2c,s}^*}{\partial x} - \frac{\partial F_{1c,s}^*}{\partial y}; \\
G \cdot \Delta F_{1c,s}^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_{1c,s}^*; \\
G \cdot \Delta F_{2c,s}^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_{2c,s}^*; \\
G \cdot \Delta F_{3c,s}^* &= -\rho \cdot \varpi^2 \cdot F_{3c,s}^*; \\
(\lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* + \rho \cdot \varpi^2 \cdot \Phi_{c,s}^* &= 0; \\
\varepsilon_{x\,c,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{3\,c,s}^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_{2\,c,s}^*}{\partial x \partial z}; \\
\varepsilon_{y\,c,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_{1\,c,s}^*}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_{3\,c,s}^*}{\partial x \partial y}; \\
\varepsilon_{z\,c,s}^* &= \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{2\,c,s}^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_{1\,c,s}^*}{\partial y \partial z}; \\
e_{c,s}^* &= \Delta \Phi_{c,s}^*; \\
\gamma_{xy\,c,s}^* &= 2 \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_{c,s1}^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_{2\,c,s}^*}{\partial y \partial z} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_{3\,c,s}^*; \\
\gamma_{xz\,c,s}^* &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_{1\,c,s}^*}{\partial x \partial y} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_{2\,c,s}^* + \frac{\partial^2 F_{3\,c,s}^*}{\partial y \partial z};
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

$$\left. \begin{aligned}
& \gamma_{yz\,c,s}^* = 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_{1\,c,s}^* + \frac{\partial^2 F_{2\,c,s}^*}{\partial x \partial y} - \\
& - \frac{\partial^2 F_{3\,c,s}^*}{\partial x \partial z}; \\
& \sigma_{xx\,c,s}^* = 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{3\,c,s}^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_{2\,c,s}^*}{\partial x \partial z} \right) + \\
& + \lambda \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* - \frac{1}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
& \sigma_{yy\,c,s}^* = 2G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_{1\,c,s}^*}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_{3\,c,s}^*}{\partial x \partial y} \right) + \\
& + \lambda \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* - \frac{1}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
& \sigma_{zz\,c,s}^* = 2 \cdot G \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi_{c,s}^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{2\,c,s}^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_{1\,c,s}^*}{\partial y \partial z} \right) + \\
& + \lambda \cdot \Delta \Phi_{c,s}^* - \frac{1}{\beta} \cdot P_{c,s}^*; \\
& \tau_{xy\,c,s}^* = G \cdot \gamma_{xy\,c,s}^*; \\
& \tau_{xz\,c,s}^* = G \cdot \gamma_{xz\,c,s}^*; \\
& \tau_{yz\,c,s}^* = G \cdot \gamma_{yz\,c,s}^*; \\
& \sigma_{kk\,c,s}^* = (3 \cdot \lambda + 2 \cdot G) \cdot \Delta \Phi_{c,s}^*; \\
& U = U_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + U_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
& V = V_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + V_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t);
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

$$\left.
\begin{aligned}
W &= W_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + W_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\Phi &= \Phi_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \Phi_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
F_1 &= F_{1c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + F_{1s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
F_2 &= F_{2c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + F_{2s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
F_3 &= F_{3c}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + F_{3s}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
P &= P_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + P_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\varepsilon_z &= \varepsilon_{zc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{zs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\varepsilon_x &= \varepsilon_{xc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{xs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_{yc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \varepsilon_{ys}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
e &= e_c^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + e_s^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xyc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \gamma_{xys}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\gamma_{xz} &= \gamma_{xzc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \gamma_{xzs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\gamma_{yz} &= \gamma_{yzc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \gamma_{yzs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\sigma_{xx} &= \sigma_{xxc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{xxs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\sigma_{yy} &= \sigma_{yyc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{yys}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t); \\
\sigma_{zz} &= \sigma_{zzc}^* \cdot \cos(\varpi \cdot t) + \sigma_{zzs}^* \cdot \sin(\varpi \cdot t).
\end{aligned}
\right\} \quad (2.3.6)$$

Система уравнений (2.3.6) полностью описывает напряженно-деформированное состояние упругого весомого неводонасыщенного основания и позволяет в рамках этой модели в декартовой системе координат получать точные общие решения. Для построения частных решений к соотношениям (2.3.6) следует присоединить граничные условия (см. раздел 1.3.).

Нагрузка изменяется по закону косинуса.

Если внешняя нагрузка изменяется только по закону косинуса, то для построения общего решения в **цилиндрической системе координат** следует поступить так.

1. Положить $U^* = U_c^* / 2 = U_s^* / 2$, $W^* = W_c^* / 2 = W_s^* / 2$, $\Phi^* = \Phi_c^* / 2 = \Phi_s^* / 2$, $F^* = F_c^* / 2 = F_s^* / 2$, $P^* = P_c^* / 2 = P_s^* / 2$ и построить частное решение задачи.

2. Положить $U^* = U_c^* / 2 = -U_s^* / 2$, $W^* = W_c^* / 2 = -W_s^* / 2$, $\Phi^* = \Phi_c^* = -\Phi_s^*$, $F^* = F_c^* / 2 = -F_s^* / 2$, $P^* = P_c^* / 2 = -P_s^* / 2$ и построить частное решение задачи.

3. Найти сумму полученных таким образом решений.

Если внешняя нагрузка изменяется только по закону косинуса, то для построения общего решения в **декартовой системе координат** следует поступить так.

1. Положить $U^* = U_c^* / 2 = U_s^* / 2$, $V^* = V_c^* / 2 = V_s^* / 2$, $W^* = W_c^* / 2 = W_s^* / 2$, $\Phi^* = \Phi_c^* / 2 = \Phi_s^* / 2$, $F_1^* = F_{1c}^* / 2 = F_{1s}^* / 2$, $F_2^* = F_{2c}^* / 2 = F_{2s}^* / 2$, $F_3^* = F_{3c}^* / 2 = F_{3s}^* / 2$, $P^* = P_c^* / 2 = P_s^* / 2$ и построить частное решение задачи.

2. Положить $U^* = U_c^* / 2 = -U_s^* / 2$, $V^* = V_c^* / 2 = -V_s^* / 2$, $W^* = W_c^* / 2 = -W_s^* / 2$, $\Phi^* = \Phi_c^* / 2 = -\Phi_s^* / 2$, $F_1^* = F_{1c}^* / 2 = -F_{1s}^* / 2$, $F_2^* = F_{2c}^* / 2 = -F_{2s}^* / 2$, $F_3^* = F_{3c}^* / 2 = -F_{3s}^* / 2$, $P^* = P_c^* / 2 = -P_s^* / 2$ и построить частное решение задачи.

3. Найти сумму полученных таким образом решений.

Нагрузка изменяется по закону синуса.

Если внешняя нагрузка изменяется только по закону синуса, то для построения общего решения в **цилиндрической системе координат** следует поступить так.

1. Положить $U^* = U_c^* / 2 = U_s^* / 2$, $W^* = W_c^* / 2 = W_s^* / 2$, $\Phi^* = \Phi_c^* / 2 = \Phi_s^* / 2$, $F^* = F_c^* / 2 = F_s^* / 2$, $P^* = P_c^* / 2 = P_s^* / 2$ и построить частное решение задачи.

2. Положить $U^* = -U_c^* / 2 = U_s^* / 2$, $W^* = -W_c^* / 2 = W_s^* / 2$, $\Phi^* = -\Phi_c^* / 2 = \Phi_s^* / 2$, $F^* = -F_c^* / 2 = F_s^* / 2$, $P^* = -P_c^* / 2 = P_s^* / 2$ и построить частное решение задачи.

3. Найти сумму полученных таким образом решений.

Если внешняя нагрузка изменяется только по закону синуса, то для построения общего решения в **декартовой системе координат** следует поступить так.

1. Положить $U^* = U_c^* / 2 = U_s^* / 2$, $V^* = V_c^* / 2 = V_s^* / 2$, $W^* = W_c^* / 2 = W_s^* / 2$, $\Phi^* = \Phi_c^* / 2 = \Phi_s^* / 2$, $F_1^* = F_{1c}^* / 2 = F_{1s}^* / 2$, $F_2^* = F_{2c}^* / 2 = F_{2s}^* / 2$, $F_3^* = F_{3c}^* / 2 = F_{3s}^* / 2$, $P^* = P_c^* / 2 = P_s^* / 2$ и построить частное решение задачи.

2. Положить $U^* = -U_c^* / 2 = U_s^* / 2$, $V^* = -V_c^* / 2 = V_s^* / 2$, $W^* = -W_c^* / 2 = W_s^* / 2$, $\Phi^* = -\Phi_c^* / 2 = \Phi_s^* / 2$, $F_1^* = -F_{1c}^* / 2 = F_{1s}^* / 2$, $F_2^* = -F_{2c}^* / 2 = F_{2s}^* / 2$, $F_3^* = -F_{3c}^* / 2 = F_{3s}^* / 2$, $P^* = -P_c^* / 2 = P_s^* / 2$ и построить частное решение задачи.

3. Найти сумму полученных таким образом решений.

В целом, представленные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В рамках модели весомого водонасыщенного упругого основания в цилиндрической и декартовой системах координат получены действительные общие решения задачи взаимосвязанной фильтрационной консолидации.

2. Эти результаты обобщены на случай неводонасыщенного весомого основания.

3. Достоинством полученных нами действительных решений является отсутствие необходимости выделения их действительной и мнимой компонент, а недостатком – громоздкость.

2.4. Обсуждение результатов исследований. Выводы по разделу.

Изложенные во втором разделе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. В разделе 2.1 представлены полученные нами в рамках модели весомой упругой среды общие решения задачи уплотнения водонасыщенного основания. Эти результаты обобщены на случай модели весомой упругой неводонасыщенной среды. Область применения полученных результатов – переходные и стационарные процессы вынужденных и свободных колебаний грунтовых оснований.

2. В разделе 2.2 представлены полученные нами в рамках модели весомой упругой среды общие комплексные решения задачи уплотнения водонасыщенного основания. Эти результаты обобщены на случай модели весомой упругой неводонасыщенной среды.

Область применения полученных результатов:

2.1. Прогноз стационарных процессов вынужденных и колебаний грунтовых оснований с частотой изменения внешней нагрузки, равной ϖ .

2.2. Прогноз переходных и стационарных процессов вынужденных и свободных колебаний грунтовых оснований с использованием преобразования Фурье по временной переменной [23, 26, 35].

В этом случае перемещения и поровое давление в **цилиндрической системе координат** следует представить в виде

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} U^*(r, z, \varpi) \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 F^*}{\partial r \partial z} \right) \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi; \\ W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} W^*(r, z, \varpi) \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F^*}{\partial r} \right) \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi; \\ P &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} P^*(r, z, \varpi) \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi. \end{aligned} \right\}, \quad (2.4.1)$$

а для определения неизвестных функций Φ^*, F^*, P^* использовать систему уравнений (2.2.2) для водонасыщенного основания или использовать систему уравнений (2.2.3) для неводонасыщенного основания. Здесь ϖ - параметр преобразования Фурье [12, 18, 23, 26, 35], а не частота изменения внешней нагрузки (см. п. 2.1).

Если для решения задачи используется **декартова система координат**, то

перемещения и поровое давление следует представить в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 U &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} U^* \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} + \frac{\partial F_3^*}{\partial y} - \frac{\partial F_2^*}{\partial z} \right) \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi; \\
 V &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V^* \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y} + \frac{\partial F_1^*}{\partial z} - \frac{\partial F_3^*}{\partial x} \right) \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi; \\
 W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} W^* \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} + \frac{\partial F_2^*}{\partial x} - \frac{\partial F_1^*}{\partial y} \right) \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi; \\
 P &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} P^* \cdot e^{i \cdot \varpi \cdot t} \cdot d\varpi.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

а для определения неизвестных функций $\Phi^*, F_1^*, F_2^*, F_3^*, P^*$ использовать систему уравнений (2.2.5) для водонасыщенного основания или использовать систему уравнений (2.2.6) для неводонасыщенного основания. Здесь ϖ - параметр преобразования Фурье [12, 23], а не частота изменения внешней нагрузки (см. п. 2.1).

3. В разделе 2.3 представлены полученные нами в рамках модели весомой

упругой среды общие действительные решения задачи уплотнения водонасыщенного основания. Эти результаты обобщены на случай модели весомой упругой неводонасыщенной среды. Область применения полученных результатов - прогноз стационарных процессов вынужденных и колебаний грунтовых оснований с частотой изменения внешней нагрузки, равной ϖ . При этом предполагается, что колебания – гармонические.

В заключение уместно отметить, что представленные во втором разделе алгоритмы построения общих решений вполне могут быть использованы для решения задач теории взаимосвязанной термоупругости [33]. При этом, естественно, должна быть выполнена замена материальных констант и искомых функций, т.е. поровое давление P следует заменить на температуру T , а величину, обратную коэффициенту порового давления β - на коэффициент температурного расширения α и т.д.