

Володимир Лобода<sup>1</sup>, Віктор Адлущкий<sup>2</sup>, Роман Воєділо<sup>3</sup>

<sup>1</sup>зав. кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки, д.ф.-м.н., професор,  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна, e-mail:

[loboda@dnu.dp.ua](mailto:loboda@dnu.dp.ua)

<sup>2</sup>с.н.с. НДЛ механіки руйнування та пластичного деформування матеріалів, к.ф.-  
м.н., с.н.с., Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро,

Україна, e-mail: [adluckyivyy\\_kkt@dnu.dp.ua](mailto:adluckyivyy_kkt@dnu.dp.ua)

<sup>3</sup>аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки, Дніпровський  
національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна, e-mail:

[roman.voyedilo@gmail.com](mailto:roman.voyedilo@gmail.com)

## СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ ПАРАМЕТРІВ РУЙНУВАННЯ ЧАСТКОВО ЕЛЕКТРОДОВАНОЇ ТРІЩИНИ В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ МАТЕРІАЛІ

**Анотація.** Розглядається плоскодеформований стан частково електродованої тріщини в п'єзоелектричному матеріалі. Електродована зона симетрично розташована на обох берегах тріщини. Допускається утворення зон механічного контакту між берегами тріщини. Проведено аналіз впливу на параметри руйнування таких факторів, як довжина електродованої зони, напрямок електричного поля й напрямок поляризації п'єзоматеріалу.

**Ключові слова:** п'єзоелектричний матеріал, частково електродована тріщина, метод скінченних елементів, параметри руйнування, інтегральний метод віртуального закриття тріщини.

П'єзоелектричні матеріали широко використовуються в сучасних мікроелектронних виробках, які часто є елементами конструкцій спеціального призначення. В процесі експлуатації вони зазвичай піддаються значним навантаженням як механічної, так і електричної природи. Відомо [1], що п'єзоелектричні матеріали схильні до крихкого руйнування, тому дослідження їх електромеханічної поведінки та руйнування мають велике практичне значення. Часто виникає необхідність оцінки можливості подальшого руйнування внаслідок утворення на берегах тріщини зон з різними електричними властивостями, як це, наприклад, має місце при відшаруванні електроду від п'єзоматеріалу, або при розшаруванні самого електроду. На відміну від



випадків антиплоского механічного навантаження, аналітичні розв'язки подібних плоских задач невідомі. Метою даної роботи є дослідження плоскодеформованого стану частково електродованої і частково ізолюваної тріщини в однорідному п'єзоелектричному матеріалі методом скінченних елементів з метою оцінки впливу на параметри руйнування таких факторів, як довжина електродованої зони, напрямок електричного поля й напрямок поляризації п'єзоматеріалу.

Розглядається плоска деформація нескінченної площини  $x_1x_3$ , заповненої однорідним п'єзоматеріалом, вісь поляризації якого лежить в цій площині й утворює кут  $\alpha$  з віссю  $x_1$ . На відрізку  $x_3 = 0$  розташована тріщина, зона електродування якої має довжину  $d$  (рис. 1).

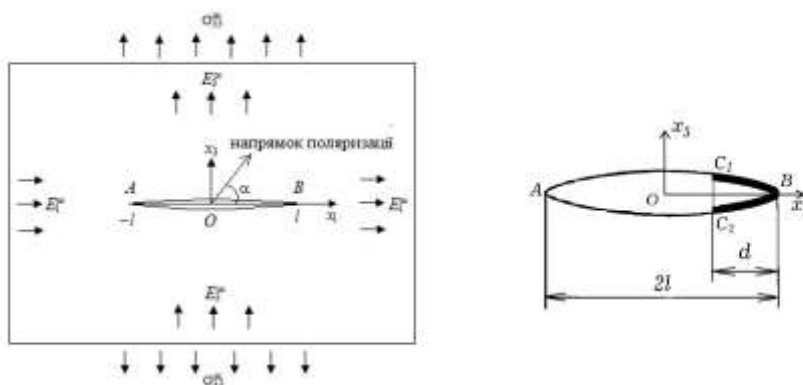


Рисунок 1 – П'єзоелектричний матеріал з частково електродованою тріщиною

Замкнена система рівнянь п'єзостатики за відсутності масових сил і вільних зарядів описується рівняннями [1]:

$$\sigma_{ij,i} = 0; \quad D_{i,i} = 0; \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl} - e_{kij}E_k; \quad D_i = e_{ikl}\epsilon_{kl} + \chi_{ik}E_k;$$

$$D_i = e_{ikl}\epsilon_{kl} + \chi_{ik}E_k; \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad E_i = -\varphi_{,i}; \quad i, j, k, l = \overline{1,3},$$

де  $u_i$  – компоненти вектора переміщень  $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$  – компоненти тензорів напружень та деформацій;  $E_i, D_i$  – компоненти векторів електричного поля та електричної індукції;  $c_{ijkl}, e_{ijk}, \chi_{ij}$  – компоненти пружної, п'єзоелектричної та діелектричної матриць. Електрична гранична умова в електродованій зоні  $C_1BC_2$  має вигляд  $\varphi(x_i, 0) = 0$ .

На решті тріщини виконується гранична умова ізолюваності  $D_3(x_1, 0) = 0$ . На нескінченності задані компоненти електромеханічних полів  $\sigma_{33}^\infty, E_1^\infty, E_3^\infty$ .



За результатами розв'язання крайової задачі розшуковуються такі параметри руйнування, як розкриття тріщини  $\Delta(x_1) = u_3^+(x_1, 0) - u_3^-(x_1, 0)$  та швидкості вивільнення енергії (ШВЕ)  $G(A)$  і  $G(B)$  у вершинах тріщини  $A$  і  $B$ . Обчислення ШВЕ здійснюється за допомогою інтегрального методу віртуального закриття тріщини [2]. Наприклад, ШВЕ в вершині  $B$  представляється сумою механічної і електричної компонент  $G^M(B)$  і  $G^E(B)$ :

$$G_I^M(B) = \frac{1}{2\delta} \int_0^\delta \sigma_{33}(s) \Delta u_3(s-\delta) ds; \quad G_{II}^M(B) = \frac{1}{2\delta} \int_0^\delta \sigma_{13}(s) \Delta u_1(s-\delta) ds; \quad G^M(B) = G_I^M(B) + G_{II}^M(B);$$

$$G^E(B) = \frac{1}{2\delta} \int_0^\delta [D_3(s) \Delta \varphi(s-\delta) - D_3^+(s-\delta) \varphi^+(s-\delta) + D_3^-(s-\delta) \varphi^-(s-\delta) - \Delta D_3(s-\delta) \varphi(s)] ds;$$

$$\Delta u_i(s) = u_i^+(s) - u_i^-(s), \quad i = 1, 3; \quad \Delta \varphi(s) = \varphi^+(s) - \varphi^-(s); \quad \Delta D_3(s) = D_3^+(s) - D_3^-(s),$$

де  $\delta$  – довжина ділянки віртуального закриття тріщини. Позначка ”+“ відноситься до верхнього берега тріщини, а ”-“ – до нижнього.

На рис. 2 та в табл.1 наведено деякі з отриманих скінченноелементних результатів.

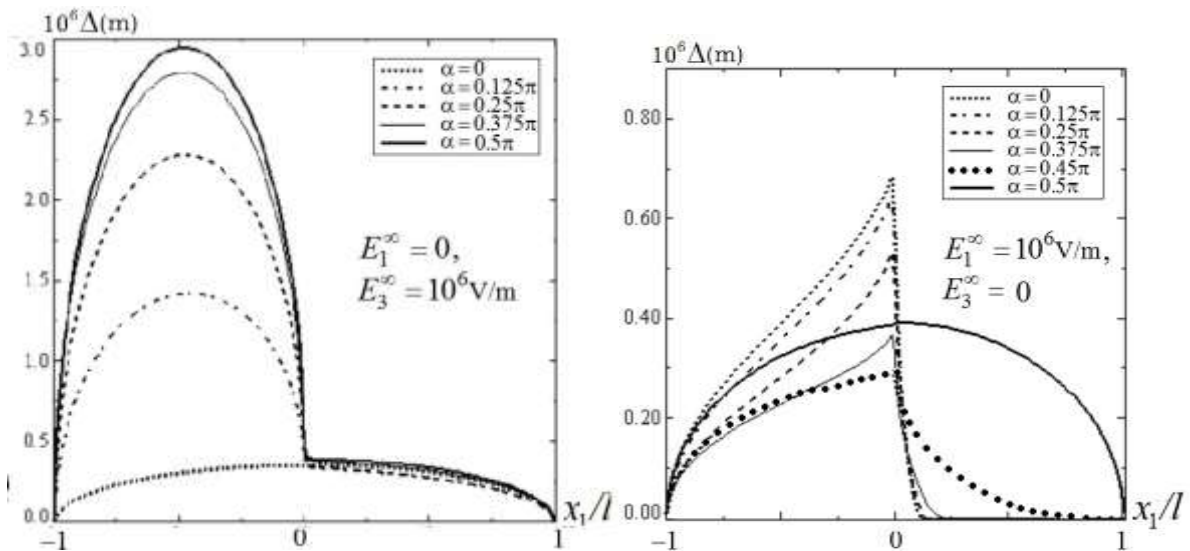


Рисунок 2 – Розкриття  $\Delta$  тріщини, електродованої на проміжку  $d=1$ , при  $\sigma_{33}^{\infty} = 10^6 \text{ Pa}$  та різних значеннях кута  $\alpha$  і напрямку електричного поля (п'єзоматеріал PZT-5Н)



Таблиця 1 – Компоненти ШВЕ для тріщини, електродованої на проміжку  $d=1$  $\sigma_{33}^0 = 10^6 \text{ Pa}$  та різних значеннях кута  $\alpha$  (п'єзоматеріал PZT-5H)

$\alpha / \pi$	$E_1^\infty = 0, E_3^\infty = 10^6 \text{ V/m}$				$E_1^\infty = 10^6 \text{ V/m}, E_3^\infty = 0$			
	$G^M(A)$ (N/m)	$G^E(A)$ (N/m)	$G^M(B)$ (N/m)	$G^E(B)$ (N/m)	$G^M(A)$ (N/m)	$G^E(A)$ (N/m)	$G^M(B)$ (N/m)	$G^E(B)$ (N/m)
0	0.27	-193.7	0.29	-0.01	0.32	0.58	-0.11	234.7
0.25	2.47	-173.2	0.25	0.26	0.30	0.45	-1.15	243.2
0.5	3.25	-152.7	0.31	0.00	0.58	0.37	-1.88	250.1

Аналіз отриманих розрахункових даних показує, що наявність електродованої зони тріщини спричиняє значний вплив на її деформування, внаслідок чого виникають деформовані конфігурації, які не спостерігаються при однорідних електричних граничних умовах. Типовим є утворення контактних зон на берегах тріщини, а також її вигинання. Найбільш небезпечною з точки зору руйнування виявляється ситуація, коли напрямок електричного поля співпадає з напрямком поляризації п'єзоматеріалу, а тріщина орієнтована перпендикулярно до них. За таких умов спостерігаються максимальні значення як розкриття тріщини, так і механічних компонент ШВЕ.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Fang, D., & Liu, J. (2013). Fracture mechanics of piezoelectric and ferroelectric solids. Tsinghua University Press, Beijing.
2. Adlucky, V. J., Levchenko, M. S., & Loboda, V. V. (2024). Finite-element analysis of the parameters of fracture in a piezoelectric bimaterial with interface crack for various types of boundary conditions on its faces. Journal of Mathematical Sciences, 279(2), 1–16.

