

Кирилюк Віталій Семенович¹, Левчук Ольга Іванівна²

¹провідний науковий співробітник, д.ф.-м.н., с.н.с., Інститут механіки ім. С.П.

Тимошенка, Київ, Україна, kirilyuk_v@ukr.net, kirilyuk6131@gmail.com

²старший науковий співробітник, к.ф.-м.н., с.н.с., Інститут механіки ім. С.П.

Тимошенка, Київ, Україна, e-mail: 2013levchuk@gmail.com

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ З ВРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ НЕОДНОРІДНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ, ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ, ДЕФЕКТІВ НА ГРАНИЦІ ПОДІЛУ

Анотація. Представлені результати досліджень тривимірних контактних задач електропружності для п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного матеріалу. Встановлено вплив на контактну взаємодію неоднорідного розподілу температурного поля, фрикційного тепловиділення при терті ковзання, досліджено контактну взаємодію електропружних тіл при стисканні за наявності приповерхневих виїмок чи жорстких включень на границі поділу матеріалів.

Ключові слова: контактна взаємодія, електропружний півпростір, жорсткий штамп, розподіл температури, фрикційне тепловиділення, приповерхнева виїмка, жорсткі включення, контактні напруження.

Вступ. При створенні елементів вимірювальних приладів і систем (датчиків) та перетворювачів енергії широко застосовуються п'єзоелектричні матеріали, що стимулює проведення аналізу розподілу напружень у електропружних тілах. Але проведення таких досліджень ускладнюється тим, що система рівнянь електропружності враховує зв'язаність силових і електричних полів, і має суттєво більш складну структуру, ніж система рівнянь теорії пружності.

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2} (c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + \\ + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = \lambda_{11} T_{,x}, \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2} (c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + \\ + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = \lambda_{11} T_{,y}, \\ (c_{13}^E + c_{44}^E) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15} (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = \lambda_{33} T_{,z}, \\ (e_{31} + e_{15}) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15} (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = -p_3 T_{,z}. \end{aligned}$$



$$T_{,11} + T_{,22} + (k_{33} / k_{11})T_{,33} = 0 ;$$

Представлення розв'язків системи рівнянь через потенціальні функції

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

Неоднорідний розподіл температурного поля в області контакту.

$$u_z(x, y, 0) = \delta - \beta_y x + \beta_x y - \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} B_1^{\text{Piezo}} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = -p(x, y) - \gamma_S^{\text{Piezol}} T_0(x, y)$$

Значення B_1^{Piezo} і γ_S^{Piezol} – різні для електродованих і неелектродованих поверхонь.

Плоский еліптичний штамп

$$p(x, y) = \frac{P - Q_1}{2\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2} + \gamma_1^{\text{Piezo}} T_0(x, y) \quad \delta = \frac{P - Q_1}{2\pi a} B_1^{\text{Piezo}} K(e)$$

$$P \geq Q_1 = \gamma_1^{\text{Piezo}} \iint_{\Omega} T_0(x, y) dx dy$$

Неплоский еліптичний штамп

$$p(x, y) = \frac{3}{2} \frac{P - Q_3}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

$$\frac{2\pi}{B_1^{\text{Piezo}}} \left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) = \frac{3}{2a} \frac{P - Q_3}{2a} \left[K(e) - \frac{x^2}{a^2} D(e) - \frac{y^2}{a^2} \frac{B(e)}{1 - e^2} \right]$$

Фрикційне тепловиділення при терті ковзання.

$$k_{33}^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial z_1^{(1)}} + k_{33}^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial z_2^{(2)}} = -\frac{\nu f p}{J}, \quad T_1 = T_2 \text{ при } (x, y) \in \Omega ;$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z_1^{(1)}} = \frac{\partial T_2}{\partial z_2^{(2)}} = 0 \quad \text{при } (x, y) \notin \Omega$$

Маємо

$$T_i(x, y, z_i) = \frac{\nu f}{2\pi \left(\frac{\lambda_{33}^{(1)}}{\sqrt{\mu_4^{(1)}}} + \frac{\lambda_{33}^{(2)}}{\sqrt{\mu_4^{(2)}}} \right) J} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z_i^{(i)})^2}} ;$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(K(e) - E(e)) - \gamma^* a e (1 - e^2)}{(E(e) / (1 - e) - K(e)) - \gamma^* a e}, \quad e = \frac{2}{3} \frac{e^2}{(2 - e^2) \sqrt{1 - e^2}} ;$$

$$a = \left[P (A_1^{\text{Piezo}} + A_2^{\text{Piezo}})^{1/3} \right] \alpha_a ; \quad p(x, y) = \frac{3}{2} \frac{P - Q_3}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} ;$$



$$\alpha_a = \left\{ \frac{3}{2\pi} \left[\frac{1}{e^2} (K(e) - E(e)) - \frac{2}{3} \gamma^* a \frac{\sqrt{1-e^2}}{2-e^2} \right] \right\}^{1/3}, \quad \gamma^* = (\beta_1^* + \beta_2^*) / (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo})$$

Приповерхнева виїмка на границі поділу при стисканні

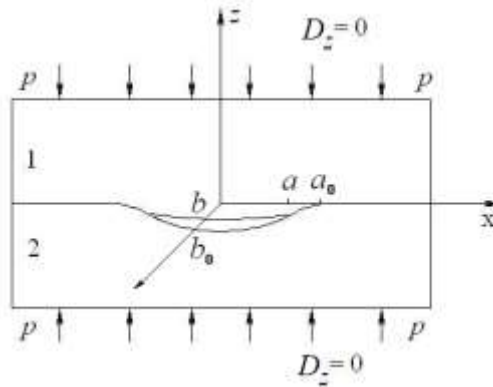


Рисунок 1 – Приповерхнева виїмка

Отримуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь з невідомою областю інтегрування

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_1} \frac{h(\xi) d\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_0} \frac{r(\xi) d\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} + 2\pi M^* p, \quad (x, y) \in S_1$$

Після її розв’язання маємо [2]

$$a = a_0 \sqrt{1 - N_0}; \quad b = b_0 \sqrt{1 - N_0}; \quad h = r_0 [1 - N_0]^{3/2}; \quad N_0 = 2M^* p b_0 \sqrt{1 - e_0^2} / (3r_0 E(e_0))$$

При $p \geq p^* = [r_0 3E(e_0)] / (2M^* b_0 \sqrt{1 - e_0^2})$ – повне закриття виїмки.

Пропорційні за висотою жорсткі включення довільного перерізу на границі поділу. Узагальнено результат Елати про пропорційні включення для ізотропних півпросторів на випадок електропружних півпросторів з різними властивостями. Встановлено, якщо жорсткі включення пропорційні за висотою і коефіцієнт пропорційності визначається певним чином з властивостей обох п’єзоелектричних трансверсально-ізотропних матеріалів, то контактні напруження у кожному півпросторі стають тотожними. У частинному випадку отримано узагальнення Гладвела стосовно плоских включень (довільного перерізу) скінченної товщини між ізотропними півпросторами на випадок п’єзоелектричних півпросторів [1]. Отримано аналітичний розв’язок задачі про дископодібне включення скінченної товщини між електропружними півпросторами при стисканні.

Висновки. Таким чином досліджено ряд контактних задач електропружності та термоелектропружності. Встановлено принципові закономірності розподілу контактних



напружень у п'єзоелектричних тілах, які можуть використовуватись при аналізі міцності п'єзоелементів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Kirilyuk, V.S., & Levchuk, O.I. (2024) Contact interaction of two piezoelectric transversely isotropic half-spaces with rigid flat inclusion of arbitrary shape between them. *International Applied Mechanics* (1), 70 - 79..
2. Kirilyuk, V.S., & Levchuk, O.I. (2022) Stress contact interaction of two piezoelectric half-space, one of which contains a near-surface notch of elliptical cross-section. *International Applied Mechanics* (4), 436 – 444.
3. Kirilyuk, V.S., & Levchuk, O.I., & Kobzar, P.Yu., & Viter, M.B. (2024) Mathematical modeling of displacement of rigid elliptical disk in piezoelectric space along symmetry axis of material. *International Applied Mechanics* (4), 415 - 421.

