

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра системного аналізу та управління

Л.С. Коряшкіна, С.В. Козир, М.М. Одновол

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Методичні рекомендації до практичних занять
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 124 Системний аналіз
(F4 Системний аналіз та наука про дані)

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

Математична економіка [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів в ступеня бакалавра спеціальності 124 Системний аналіз (F4 Системний аналіз та наука про дані) / уклад.: Л.С. Коряшкіна, С.В. Козир, М.М. Одновол ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 66 с.

Укладачі:

Л.С. Коряшкіна, д-р техн. наук, доц.;

С.В. Козир;

М.М. Одновол.

Затверджено науково-методичною комісією зі спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані (протокол № 3 від 07.05.2025) за поданням кафедри системного аналізу та управління (протокол № 7 від 07.05.2025).

Наведено матеріал практичних занять відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів зі спеціальності 124 Системний аналіз.

Орієнтовано на активізацію навчальної діяльності здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 124 Системний аналіз та закріплення практичних навичок у засвоєнні дисципліни «Математична економіка».

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу та управління
Т.А. Желдак, канд. техн. наук, доц.

Зміст

ВСТУП.....	4
ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ № 1 – 4.....	5
Короткі теоретичні відомості.....	5
Методика виконання типового завдання.....	10
Приклад виконання завдання.....	10
Контрольні питання.....	20
Варіанти до індивідуального завдання 1 «Виробничі функції».....	20
ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ № 5 – 7.....	26
Короткі теоретичні відомості.....	26
Методика виконання типового завдання.....	27
Приклад аналізу функції споживання оздоровчих путівок.....	28
Контрольні питання:.....	38
Варіанти до індивідуального завдання 2 «Аналіз функцій споживання і попиту».....	38
ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ № 8 – 9.....	39
Короткі теоретичні відомості.....	39
Методика виконання завдання.....	41
Приклад виконання завдання.....	42
Контрольні питання.....	46
Варіанти до індивідуального завдання 3 «Оптимізаційна модель міжгалузевого балансу».....	46
ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ № 10, 11.....	48
Короткі теоретичні відомості.....	48
Порядок виконання роботи.....	53
Приклад виконання завдання.....	54
Контрольні питання.....	59
Варіанти до індивідуального завдання 4 «Моделі взаємодії споживачів і виробників. Моделі встановлення рівноважної ціни».....	59
ЗАХИСТ І КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ.....	63
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	64

ВСТУП

Математична економіка є сферою наукової діяльності, теоретичної та прикладної, яка вивчає економічні об'єкти, процеси та явища за допомогою методів інтегрального та диференціального числення, матричної алгебри, диференціальних рівнянь, оптимізації. Мовою математики аналітики формулюють та перевіряють змістовні гіпотези про складні виробничі і логістичні процеси.

Метою дисципліни є формування у студентів систематичних знань з основ теорії моделювання, сучасної методології побудови економіко-математичних моделей для проведення системного аналізу соціально-економічних систем, явищ та процесів на мікро- та макроекономічному рівнях.

Метою даного видання є допомога здобувачам в опануванні основ математичної економіки, розвитку навичок аналізу економічних систем. В посібнику розглянуті типові завдання і демонструються методи їх розв'язування.

Практичні заняття проводяться з метою детального розгляду здобувачами окремих теоретичних положень навчальної дисципліни, розвитку вміння та навичок застосування теорії на практиці шляхом виконання групою або індивідуально спеціально розроблених завдань. Кожне практичне заняття включає загальну постановку задачі, обговорення ідеї методу її розв'язання, виконання індивідуальних завдань, їх перевірку, оцінювання.

Кожне заняття спрямоване на виховання здатності творчого пошуку будь-яких обґрунтованих рішень. Під час його проведення здобувачі самостійно або у групах розв'язують запропоновані задачі різного рівня складності. З метою виявлення рівня засвоєння матеріалу викладачем проводиться перевірка й обговорення робіт, а також підбиття підсумків із одержанням відповідних оцінок залежно від результатів.

Програмні результати навчання після засвоєння дисципліни спрямовані на набуття ряду знань, умінь і навичок вирішення складних спеціалізованих задач та практичних проблем економічної сфери фахівцями-аналітиками:

- знати основи теорії оптимізації, оптимального керування, теорії прийняття рішень, вміти застосовувати їх на практиці для розв'язування прикладних задач управління і проектування складних систем
- знати основи математичного моделювання, вміти будувати та досліджувати математичні моделі природних, техногенних, економічних і соціальних об'єктів та процесів.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ № 1 – 4

Тема: Виробничі функції

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок побудови виробничих функцій у формі багатофакторної статистичної залежності – регресійних моделей за даними спостережень, а також їхнього економічного аналізу.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися моделювати виробничу діяльність підприємств, будувати виробничу функцію Кобба-Дугласа на основі статистичних спостережень; опанувати метод найменших квадратів

Короткі теоретичні відомості

Виробнича функція – це модель, яка показує, як змінюється кількість виробленої продукції залежно від того, скільки ресурсів (наприклад, праці, капіталу чи сировини) використовується. Інакше кажучи, вона допомагає зрозуміти, скільки товарів можна виготовити при різних комбінаціях витрат.

Перші спроби побудови виробничих функцій були пов'язані з аналізом сільськогосподарського виробництва в США. У 1909 році Мітчерліх запропонував нелінійну функцію, що описувала зв'язок між кількістю добрив і врожайністю. Незалежно від нього Спілман розробив показникову модель врожайності. Ці підходи стали основою для створення інших агротехнічних функцій.

Практика показала, що максимізація фізичних показників (наприклад, надоїв чи приросту ваги тварин) не завжди веде до максимального прибутку. Тобто технічний і економічний оптимум - це різні речі.

У 1928 році Ч. Кобб і П. Дуглас представили першу емпіричну виробничу функцію для обробної промисловості США, яка враховувала капітал і працю. Вона стала класичним прикладом у подальших дослідженнях. Загальний вигляд функції Кобба–Дугласа:

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}, \quad (1.1)$$

де:

- Q – обсяг виробництва (output),
- A – технологічний коефіцієнт (рівень продуктивності),
- L – кількість праці (labor),

- K – кількість капіталу (capital),
- α і β – еластичності виробництва за працею і капіталом відповідно.

Того ж року В. Рамсей запропонував модель, яка не лише описувала економічне зростання, а й ставила питання про його оптимізацію. Цей підхід став основою для подальших моделей економічного розвитку.

Загалом, виробничі функції використовуються для моделювання процесу виробництва як на рівні окремих підприємств, так і цілих галузей чи економіки в цілому.

Загальний вигляд виробничої функції:

$$Y = Y(R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_n), \quad (1.2)$$

де: Y – результат виробництва (наприклад, обсяг продукції), R_i - значення i -го виробничого ресурсу (фактору), n - загальна кількість виробничих ресурсів.

Припущення щодо виробничих функцій поділяються на дві групи:

1) *Математичні припущення:* функція має бути неперервною і двічі диференційованою (щоб можна було аналізувати граничні ефекти та кривизну);

2) *Економічні припущення* полягають в тому, що при відсутності хоча б одного виробничого ресурсу виробництво неможливо, тобто виконується:

$$\begin{aligned} Y(0, R_2, \dots, R_i, \dots, R_n) = \dots = Y(R_1, R_2, \dots, 0_i, \dots, R_n) = \dots \\ = Y(R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, 0) = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Основні властивості виробничої функції:

1. *Зростання результату при збільшенні ресурсів*

Якщо збільшується обсяг використання будь-якого ресурсу, то обсяг виробництва також зростає (за інших рівних умов):

$$\frac{\partial Y}{\partial R_i} > 0, \quad \text{при } R_i > 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.4)$$

Це означає, що кожна додаткова одиниця ресурсу дає позитивний внесок у результат виробництва.

2. *Зменшення граничної продуктивності ресурсу*

Зі збільшенням кількості одного ресурсу (при фіксованих інших) ефективність його використання знижується:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial R_i^2} < 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.5)$$

Це відображає закон *спадної граничної продуктивності* - ключове економічне припущення.

При макроекономічному моделюванні часто використовується припущення про пропорційність результату зростанню витрат ресурсів:

$$Y(\lambda R_1, \lambda R_2, \dots, \lambda R_i, \dots, \lambda R_n) = \lambda Y(R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_n), \text{ при } \lambda > 0, \quad (1.6)$$

Це означає, що при пропорційному збільшенні всіх ресурсів обсяг виробництва також зростає пропорційно.

За умови виконання цього припущення графік двофакторної виробничої функції $Y(K, L)$ має вигляд, зображений на рисунку 1.1.

Розглянемо точку Y_C , що відповідає певному рівню виробництва Y_C . Проведемо через неї площину, паралельну площині KOL , яка перетинає виробничу поверхню. Проекція лінії перетину цієї площини з поверхнею на площину KOL називається *ізоквантою* або *кривою байдужості виробництва $Y_C = F(K, L) = const$.*

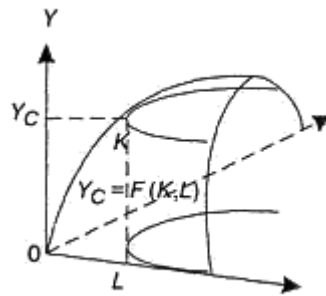


Рисунок 1.1 - Графік виробничої функції

Ізокванта – геометричне місце точок, кожна з яких відповідає однаковому рівню випуску продукції.

Суть ізокванти полягає в тому, що однакова кількість продукції Y_C може бути вироблена за різних комбінацій ресурсів K і L . Приклад ізокванти наведено на рисунку 1.2.

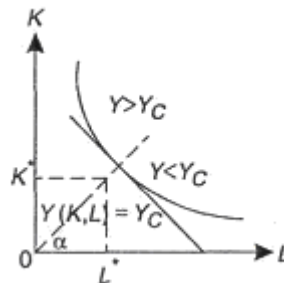


Рисунок 1.2 - Ізокванта виробничої функції

Проекції виробничої функції на площині YOK й YOL утворюють криві, що називаються кривими "витрати - випуск". Вони зображені на рис. 1.3

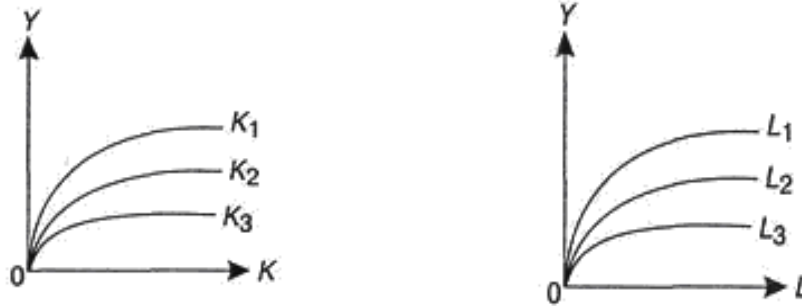


Рисунок 1.3 - Криві "витрати - випуск" ($K_1 > K_2 > K_3$ і $L_1 > L_2 > L_3$)

Виробничі функції дозволяють аналізувати **ключові характеристики виробничого процесу**, зокрема:

- *Середню віддачу ресурсів* - обсяг продукції, що припадає на одиницю використаного ресурсу:

$$\Phi_i = \frac{Y}{R_i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.7)$$

- *Граничну віддачу ресурсів* - приріст випуску продукції внаслідок збільшення використання одного з ресурсів на одиницю, за незмінного рівня інших ресурсів:

$$V_i = \frac{\partial Y}{\partial R_i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.8)$$

- *Коефіцієнти еластичності випуску за ресурсами* - відображають відсоткову зміну обсягу виробництва у відповідь на зміну обсягу використання певного ресурсу:

$$E_K = \frac{\partial Y(K, L)}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y(K, L)}, \quad (1.9)$$

$$E_L = \frac{\partial Y(K, L)}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y(K, L)}, \quad (1.10)$$

де: E_K - коефіцієнт еластичності з капіталу (capital), E_L - коефіцієнт еластичності з праці (labor); коефіцієнти еластичності E_K і E_L залежать від того, при яких значеннях K і L вони підраховуються.

- *Граничну норму технологічного заміщення ресурсів (MRTS)* - показує,

скільки одиниць одного ресурсу можна замінити іншим без зміни обсягу виробництва;

- *Коефіцієнти еластичності заміщення ресурсів* - характеризують ступінь взаємозамінності ресурсів у виробничому процесі.

Для двофакторної виробничої функції *граничною нормою заміщення ресурсу* K називається характеристика $\gamma = dK(L)/dL$, що показує, скільки одиниць ресурсу K може бути вивільнене (притягнуте) при збільшенні (зменшенні) витрат ресурсу L на одиницю. Аналогічно може бути визначена гранична норма заміщення ресурсу L .

Для кількісної оцінки швидкості зміни граничної норми технологічного заміщення ресурсів уздовж ізокванти використовується показник σ , що називається *еластичністю заміщення ресурсів*. Величина σ показує, на скільки відсотків повинне змінитися співвідношення між ресурсами (наприклад, K/L) при русі уздовж ізокванти, щоб гранична норма заміщення ($MRTS$) змінилася на один відсоток:

$$\sigma = \frac{\frac{d(K/L)}{K/L}}{\frac{d\gamma}{\gamma}}. \quad (1.11)$$

Найпоширенішими типами виробничих функцій, що використовуються в макроекономічних дослідженнях, є такі:

- *степенева функція (Коба-Дугласа):*

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad \alpha = const; 0 < \alpha < 1 \quad (1.12)$$

- *функція CES (функція з постійною еластичністю заміни):*

$$F(K, L) = (aK^{-\beta} + bL^\beta)^{-1/\beta}, \quad a, b = const; a, b > 0 \quad (1.13)$$

- *функція з фіксованими коефіцієнтами:*

$$F(K, L) = \min\{K/a, L/a\}, \quad a, b = const; a, b > 0 \quad (1.14)$$

- *лінійна функція:*

$$F(K, L) = aK + bL + c, \quad a, b, c = const; a, b, c > 0 \quad (1.15)$$

У мікроекономічних дослідженнях для побудови виробничих функцій успішно

застосовуються експонентні і поліноміальні залежності другого, третього і більш високих порядків.

Методика виконання типового завдання

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Побудувати виробничі функції (ВФ), що визначаються у формі багатofакторних (див. табл.1) статистичних залежностей – регресійних рівнянь.

В результаті роботи мають бути виконані наступні види аналізу:

1. Провести статистичний аналіз даних.
2. Регресійний аналіз даних і вибір форми виробничої функції.
3. Економічний аналіз виробничої функції.
4. Імітаційні розрахунки планових варіантів зміни виробництва.

Провести імітаційні розрахунки варіантів планів при наступних пропозиціях: випуск базового періоду складає 10 одиниць при трудовитратах, величину який пропонується установити здобувачу самостійно. Потрібно 1) збільшити випуск у наступному періоді на 25%, 2) а далі ще на 25%, причому припускаючи, що витрати ресурсу K не обмежені, а трудовитрати повинні залишатися на колишньому рівні чи зменшитися на 10%.

3. Оформити звіт такого змісту:

- тема індивідуального завдання;
- постановка завдання;
- всі види аналізу згідно п.2;
- графік витрати-випуск при фіксованих L ;
- ізокванти лінійної виробничої функції.

Приклад виконання завдання

Виробничі функції формуються у вигляді однофакторних або багатofакторних статистичних залежностей, які подаються у формі регресійних рівнянь.

Вихідні дані для побудови виробничої функції наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Вихідні дані для побудови ВФ

N_0	Y	K	L
1	112,5	3,45	2,12
2	116,4	3,48	2,2
3	111,6	3,06	2,11

4	108,9	3,66	2,03
5	116,5	3,79	2,21
6	104,5	3,85	1,88
7	102,7	3,44	1,91
8	110,2	4,08	2
9	104,7	4,5	1,9
10	109,4	4,31	1,99
11	101,1	3,57	1,54
12	102,6	3,55	1,74
13	128,5	4,61	2,23
14	122,5	3,99	2,14
15	105,2	4,78	1,87

Y – показник, що характеризує результати виробництва;

K – факторний показник, що характеризується витратами грошових фондів;

L – факторний показник, що характеризується витратами праці.

Задля побудови та вибору аналітичної форми виробничої функції мають бути виконані наступні види аналізу:

1. Провести статистичний аналіз даних
2. Регресійний аналіз даних і вибір форми виробничої функції
3. Економічний аналіз виробничої функції
4. Імітаційні розрахунки планових варіантів зміни виробництва

Статистичний аналіз даних

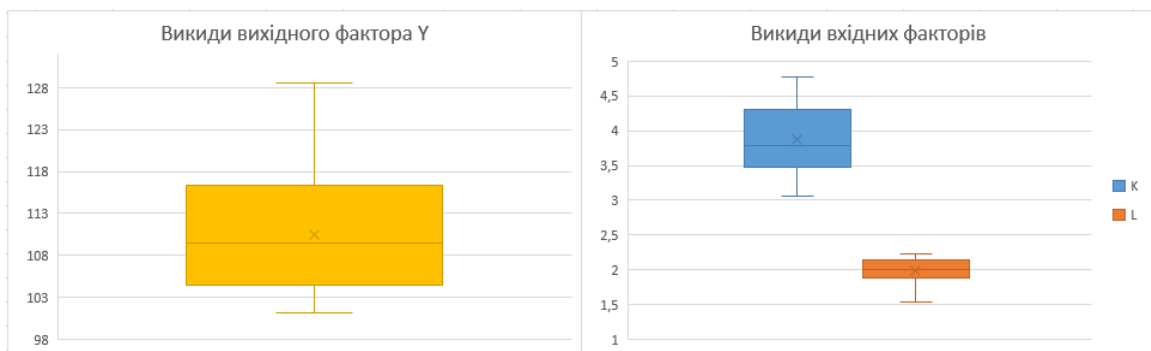


Рисунок.1.4 - Ящик з вусами за вихідними масивами значень факторів

На рис. 1.5 представлено послідовність статистичних розрахунків, необхідних для побудови та вибору аналітичної форми виробничої функції. Відповідні обчислення за контрольними завданнями слід оформлювати у звіті в аналогічному

або подібному форматі з відповідними підзаголовками.

№	Z-тест		
	Y	K	L
1	0,848842476	0,00029531	0,996516
2	0,998775409	0,000703619	0,999994
3	0,715792992	2,18009E-11	0,993589
4	0,208140723	0,041209353	0,791292
5	0,998967714	0,246665773	0,999998
6	0,001080658	0,420907413	0,009775
7	3,31334E-05	0,000218397	0,044031
8	0,441618665	0,951674138	0,572113
9	0,00151511	0,99999979	0,027719
10	0,28885705	0,999785999	0,488846
11	7,58335E-07	0,006850819	1,46E-21
12	2,66643E-05	0,004309504	6,79E-08
13	1	0,999999999	1
14	1	0,824625368	0,999089
15	0,003379477	1	0,00547

Ранги		
Y	K	L
5	13	5
4	12	3
6	15	6
9	9	7
3	8	2
12	7	12
13	14	10
7	5	8
11	3	11
8	4	9
15	10	15
14	11	14
1	2	1
2	6	4
10	1	13

Вхідні дані		
Y	K	L
112,5	3,45	2,12
116,4	3,48	2,2
111,6	3,06	2,11
108,9	3,66	2,03
116,5	3,79	2,21
104,5	3,85	1,88
102,7	3,44	1,91
110,2	4,08	2
104,7	4,5	1,9
109,4	4,31	1,99
101,1	3,57	1,54
102,6	3,55	1,74
128,5	4,61	2,23
122,5	3,99	2,14
105,2	4,78	1,87

Гіпотеза по Z-тесту: вибірка вважається репрезентативною, якщо у вибірці не більш 10% даних повинні мати імовірні оцінки < 0,7	
* загальна кіл-ть рядків для угодження гіпотези про 10%	2,222222
* кіл-ть рядків, що можна залишити за вибором	0
* кіл-ть рядків, що узгоджується за всіма факторами	2
* кіл-ть рядків, де всі фактори мають імовірні оцінки < 0,7	4 (26%)

Числові характеристики вибірок			
Min	101,1	3,06	1,54
Max	128,5	4,78	2,23
Медіана	109,4	3,79	2
Сер.кв.від.	7,559617862	0,478691	0,184675
Дисперсія	61,22980952	0,245512	0,036541

Коефіцієнт Пірсона			
	Y	K	L
Y	1		
K	0,191282	1	
L	0,842901	0,017802459	1

Коефіцієнт Спірмена			
	Y	K	L
Y	1		
K	0,15	1	
L	0,946429	-0,05	1

Коефіцієнт коваріації			
	Y	K	L
Y	1		
K	0,692195556	1	
L	1,176751111	0,001574	1

Рисунок.1.5 - Послідовність статистичних розрахунків

Аналіз розрахованих статистичних показників:

Дисперсії вибірок вихідних даних є відносно невеликими порівняно зі значеннями самих даних, за винятком одного з факторів – вихідного Y. Це свідчить про незначний розкид точок у більшості вибірок. Середньоквадратичні відхилення також мають задовільні значення для більшості параметрів. У разі, якщо б ці показники виявилися незадовільними, доцільно було б виключити пікові (мінімальні та максимальні) значення з відповідних вибірок перед проведенням регресійного аналізу.

Водночас, відхилення максимальних і мінімальних значень відносно медіан і середніх значень не є цілком задовільними. Це свідчить про те, що точки у вибірках розташовані нещільно. Крім того, спостерігається значна асиметрія за окремими факторами, що підтверджується графіками на рис. 1.4: саме за цими факторами дані розташовані несиметрично відносно 95% довірчого інтервалу. Розмахи значень

також є значними, тому на наступному етапі доцільно провести нормалізацію даних.

Z-тестування вибірки застосовується для отримання стандартної оцінки кожного елемента у вибірках. Перед проведенням тесту *априорно* встановлюється *правило оцінки репрезентативності*: наприклад, вибірка вважається репрезентативною, якщо не більше 10% її значень мають імовірнісні оцінки менше ніж 0,7 згідно з результатами *Z-тесту*.

Якщо це правило не виконується (а згідно з наведеними розрахунками воно порушується суттєво), вибірка вважається *нерепрезентативною*, і подальший аналіз таких даних є *недоцільним* - саме з такою ситуацією ми маємо справу.

Результати *Z-тесту* показують, що 26% записів у вибірці мають надто низькі імовірності потрапляння у відповідні генеральні сукупності за всіма факторами (зокрема, для змінних Y_6 , Y_7 , Y_{11} , Y_{12}). Навіть попри ці значення, *гіпотеза репрезентативності не може бути прийнята*, оскільки лише два записи задовольняють встановленим критеріям. Тому при вирішенні практичних задач відповідні рядки слід виключити з подальшого аналізу, а статистичне опрацювання необхідно повторити для оновлених вибірок.

Висновок Вибірка виявилася *нерепрезентативною* через значні статистичні відхилення та малий обсяг, тому для подальшого аналізу необхідно провести нові експерименти та сформувати оновлені дані.

Оскільки наразі немає можливості провести нові експерименти та оновити дані, подальший аналіз буде здійснено на основі наявної вибірки.

Регресійний аналіз даних і вибір форми виробничої функції

Найважливішим етапом *аналізу кореляційних коефіцієнтів*, отриманих на попередньому етапі, є оцінка взаємозв'язку між незалежними факторами K і L (таблиці рис. 1.5). За всіма розрахованими коефіцієнтами – Пірсона (0,018), Спірмена (-0,05) та коваріацією (0,0016) – корельованість між ними є дуже слабкою. Це свідчить про те, що фактори є достатньо незалежними, а отже – коректно обраними для побудови регресійної моделі.

На цьому етапі було застосовано метод найменших квадратів для побудови багатofакторної регресійної залежності результуючого показника від відібраних факторів (рис. 1.6).

№	Нормалізовані дані		
	Y	K	L
1	4,722953222	1,238374231	0,751416
2	4,757032535	1,247032294	0,788457
3	4,71492105	1,118414916	0,746688
4	4,69043003	1,297463147	0,708036
5	4,757891273	1,332366019	0,792993
6	4,649187071	1,348073148	0,631272
7	4,631812117	1,235471471	0,647103
8	4,702296897	1,406096988	0,693147
9	4,651099118	1,504077397	0,641854
10	4,69501089	1,460937904	0,688135
11	4,616110126	1,272565596	0,431782
12	4,630837933	1,266947603	0,553885
13	4,855928904	1,528227857	0,802002
14	4,80811103	1,383791231	0,760806
15	4,6558633	1,564440547	0,625938

№	Вихідний фактор		
	Y	LP	CP
1	112,5	113,6231	113,4724
2	116,4	117,3442	115,9838
3	111,6	110,9736	111,9955
4	108,9	110,8154	111,2662
5	116,5	119,5412	117,148
6	104,5	105,231	106,9651
7	102,7	104,2441	106,8872
8	110,2	111,8588	111,3689
9	104,7	109,7947	109,0787
10	109,4	112,7156	111,5801
11	101,1	88,55397	94,83152
12	102,6	97,3194	101,6262
13	128,5	125,0664	119,7689
14	122,5	117,5648	115,5297
15	105,2	110,0464	108,6597

F - тест			
	Y	K	L
Y	1		
K	0,030712	1	
L	0,171884	0,402554	1

Регресія:	Рівняння:
Лінійна	$Y = 44,393 * L + 5,655 * K$
Степенева	$Y = 66,375 * L^{0,571} * K^{0,087}$

	Лінійна регресія			Степенева регресія		
	L	K	a	L	K	a
Коефіцієнти регресії	44,39269	5,655247	0	0,570724	0,086713	4,195326
Стандартні помилки	4,106916	2,103758	#Н/Д	0,10446	0,083104	0,131723
Коефіцієнт детермінантності	0,998353			0,722456		
F - статистика Фішера	3939,94			15,61819		
Розсіювання регресії	183663,8			0,048235		
Ступені свободи	13			12		
Залишкова дисперсія	4,82783			0,039296		
Залишкове розсіювання	303,0032			0,01853		
Серед. квадрат. відхилення	0,031473			0,027266		

Рисунок.1.6 - Побудова багатфакторної регресійної залежності $Y(K, L)$

Аналіз результатів регресійного моделювання

Кореляційний зв'язок між вихідним значенням та факторами різниться: фактор L демонструє помірну кореляцію, тоді як фактор K – слабкий. Це свідчить про відсутність стійкої лінійної залежності між результуючим показником і обома факторами. Водночас модель демонструє високі показники якості: коефіцієнт детермінації становить $0,998$, а середньоквадратична похибка ($RMSE$) – $3,15\%$, що свідчить про її ефективність у межах наявних даних.

За коефіцієнтом Спірмена спостерігається слабка нелінійна залежність між змінними, зокрема між Y та K , де коефіцієнт становить лише $0,15$. Водночас

застосування степеневі моделі демонструє кращі результати: коефіцієнт детермінації дорівнює 0,72, а середньоквадратична похибка (*RMSE*) - 2,73%, що свідчить про певну доцільність її використання.

Однак, згідно з результатами *F-критерію*, загальний вплив факторних ознак на результуючу змінну є незначним, навіть попри попередню нормалізацію даних. Це підтверджує, що обидва фактори (*K* і *L*) мають низьку інформативність, про що також свідчили значення коефіцієнтів кореляції на попередніх етапах. Таким чином, ці фактори доцільно виключити з подальшого аналізу як малозначущі для моделювання виробничого процесу, і замінити їх на більш релевантні змінні.

Додаткові статистичні показники, отримані при побудові лінійної та степеневі моделей, дозволяють зробити такі висновки:

Стандартні помилки коефіцієнтів у лінійній моделі є значними (2,103 для *K* і 4,107 для *L*), тоді як у степеневій моделі вони значно менші (0,083 і 0,105 відповідно), що свідчить про перевагу останньої. *RMSE* для лінійної моделі становить 3,15%, що також гірше порівняно з степеневою.

Висновок Незважаючи на деякі позитивні показники степеневі моделі, загальна надійність обох моделей є низькою. Встановлені залежності мають випадковий характер і не можуть бути використані для достовірного прогнозування. Тому рекомендувати будь-яку форму регресійного зв'язку між розглянутих як виробничу функцію для подальшого застосування - недоцільно.

Втім, наступні етапи аналізу буде продовжено з використанням лінійної моделі через її простоту та зручність у подальшій інтерпретації.

Економічний аналіз виробничої функції

Структуру економічного аналізу виробничої функції розглянемо на прикладі лінійної залежності, яка має вигляд:

$$Y = 44,393K + 5,655L$$

Першим кроком є визначення *масштабу виробничої функції*. Оскільки функція є лінійною, зміна масштабу факторів призводить до пропорційної зміни обсягу випуску *Y*, що свідчить про *постійну віддачу від масштабу*.

Для ілюстрації зафіксуємо три значення фактора *L*: 3, 4 і 5. Підставляючи їх у рівняння, отримаємо відповідні функції:

$$Y = 44,393K + 16,965$$

$$Y = 44,393K + 22,62$$

$$Y = 44,393K + 28,275$$

Ці рівняння описують три паралельні прямі, що відображають залежність між витратами ресурсу K та обсягом випуску Y при фіксованих значеннях L . Відповідні графіки наведено на рис. 1.7.

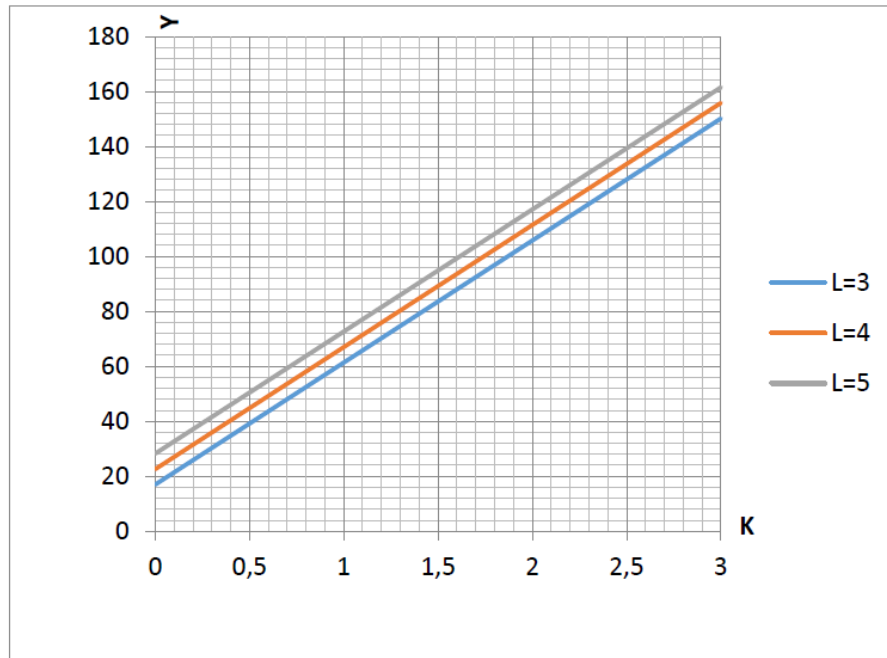


Рисунок 1.7 - Графік витрати-випуск при фіксованих L

Будується графік ізоквант для лінійної виробничої функції $Y = 44,393K + 5,655L$ при фіксованих* значеннях $Y = 150, 200, 250$ (рис. 1.8).

* фіксуються деякі значення Y співрозмірні із вихідними (табл. 1.1).

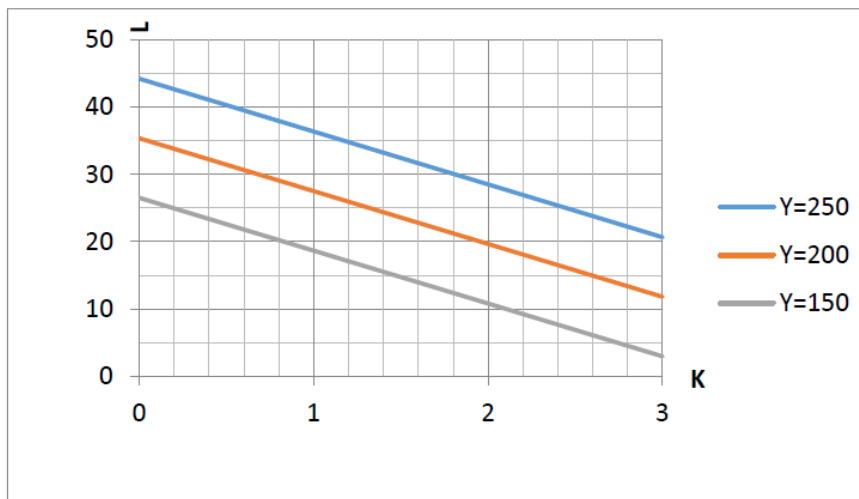


Рисунок 1.8 - Ізокванти лінійної виробничої функції

- Кожна лінія на графіку - це ізокванта, яка показує всі комбінації ресурсів K і L , що забезпечують однаковий рівень випуску Y .

- Ізокванти мають *лінійну форму*, що характерно для виробничих функцій із постійною граничною нормою заміщення.
- *Еластичність заміщення* у цьому випадку є нескінченною, оскільки ресурси можуть взаємозамінюватися у фіксованій пропорції без зміни обсягу випуску.

Гранична ефективність фактору - це додатковий обсяг продукції, який отримується в результаті використання однієї додаткової одиниці цього виробничого фактору за інших незмінних умов. Чим меншою є похідна функції випуску за цим фактором, тим повільніше зростає обсяг виробництва при збільшенні витрат ресурсу. Для ВФ від праці і капіталу:

- *гранична фондоддача* (гранична ефективність фондів) – $V_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = 44,393$;
- *гранична продуктивність праці* (ефективність праці) - $V_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = 5,655$.

Для лінійної функції граничні ефективності ресурсів постійні.

Розраховуються коефіцієнти еластичності випуску по ресурсах:

$$E_K = \frac{V_K}{\Phi_K} = \frac{V_K}{Y(K, L)/K} = \frac{44,393}{44,393 + 5,655(L/K)}$$

$$E_L = \frac{V_L}{\Phi_L} = \frac{V_L}{Y(K, L)/L} = \frac{5,655}{5,655 + 44,393(K/L)}$$

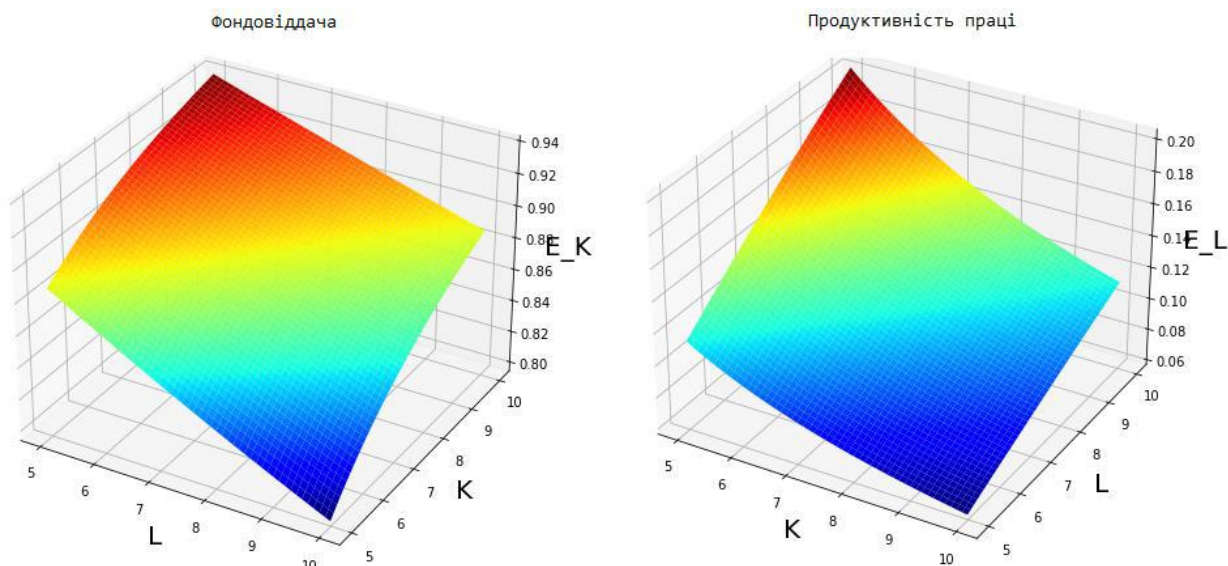


Рисунок 1.9 – Оцінка ефективності виробничих ресурсів за допомогою граничних показників

Імітаційні розрахунки планових варіантів зміни виробництва

Припустимо, що в базовому періоді обсяг випуску продукції становив 10 одиниць (де одна одиниця відповідає, наприклад, 100 000 грн), тобто $Y_0 = 10$.

У цьому періоді *середні показники ефективності* використання ресурсів були такими:

- *Продуктивність праці* – $\Phi_L = 9,52$ одиниці продукції на одну одиницю праці;
- *Фондовіддача* – $\Phi_K = 109,29$ одиниці продукції на одну одиницю капіталу.

1. Планується в наступному плановому періоді збільшити обсяг випуску на 25%, тобто випускати відповідно 12,5 од. Передбачається, що обмежень по ресурсах немає (K – це витрати основних виробничих фондів (ОВФ), а L – ресурси трудовитрат).

Так як в розглянутій економічній системі має бути постійна віддача від розширення виробництва, то очевидно, що для чергового планового періоду варто планувати витрати ресурсів, пропорційні витратам у базовому періоді. Якщо, наприклад, у базовому періоді на випуск 10 одиниць продукції витрачалося 1,05 одиниць трудовитрат ($L = \frac{Y_0}{\Phi_L} = \frac{10}{9,52} \approx 1,05$) і відповідно 0,0915 одиниць вартості ОВФ ($K = \frac{Y_0}{\Phi_K} = \frac{10}{109,29} \approx 0,0915$), то в черговому плановому періоді їх буде потрібно відповідно: $K = 0,0915 * 1,25 = 0,1145$ і $L = 1,05 * 1,25 = 1,3125$ одиниць.

Випуск становитиме: $Y = 44,393 * 0,1145 + 5,655 * 1,3125 = 12,5$.

Середні показники ефективності використання ресурсів були у базовому періоді: продуктивність праці 9,52 і фондовіддача 109,29. У плановому періоді відповідно вони не зміняться. Не зміняться й еластичності ресурсів.

2. Аналогічно розраховуються характеристики інших планових варіантів:

- 2.1 В цей плановий період збільшується обсяг випуску *ще на 25%*, витрати ресурсу K не обмежені, а трудовитрати повинні залишатися на колишньому рівні.

$K = 0,1145 * 1,25 = 0,143$ і $L = 1,3125 * 1,25 = 1,641$ одиниць.

Випуск становитиме: $Y = 44,393 * 0,143 + 5,655 * 1,641 = 15,63$.

Середні показники ефективності використання ресурсів були у базовому періоді: продуктивність праці 9,52 і фондовіддача 109,29. У плановому періоді відповідно вони не зміняться. Не зміняться й еластичності ресурсів.

- 2.2 В цей плановий період збільшується обсяг випуску *ще на 25%*, витрати ресурсу K не обмежені, а трудовитрати повинні зменшитися на 10%.

$$Y = 15,63 * 1,25 = 19,5 \text{ і } L = 1,3125 * 0,9 * 1,25 = 1,477 \text{ одиниць.}$$

Витрати основних виробничих фондів при цьому складуть:

$$K = (19,5 - 5,655 * 1,477) / 44,393 = 0,25.$$

Середня ефективність ресурсів у базовому періоді: продуктивність праці 13,2 і фондівдача 77,55. У плановому періоді відповідно вони змінилися при обернено пропорційній зміні трудовитрат та виготовлення продукції. Зміниться й еластичність ресурсів (рис. 1.10).

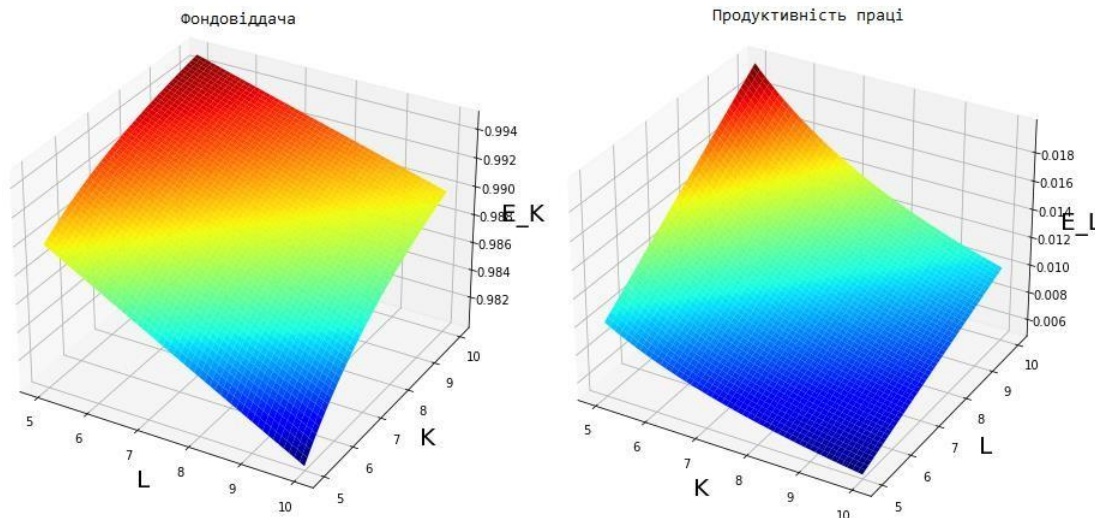


Рисунок 1.10 - Оцінка ефективності виробничих ресурсів, що відповідає імітаційним розрахункам

Таблиця 2.

Результати імітаційних розрахунків у Excel

Період	Обсяг випуску	ОВФ	трудовитрати	Середня ефективність ресурсів	
	Y	K	L	фондовіддача	продуктивність
базовий	10	0,091501352	1,05	109,2880024	9,523809524
1.	12,5	0,11437669	1,3125	109,2880024	9,523809524
2.1	15,625	0,142970863	1,640625	109,2880024	9,523809524
2.2	19,53125	0,251864109	1,4765625	77,54677729	13,22751323

Висновки за результатами економічного аналізу та імітаційних розрахунків:

1. Пропорційне розширення виробництва (на 25%) за умови незмінної ефективності ресурсів призводить до відповідного збільшення витрат праці та капіталу. Це підтверджує припущення про постійну віддачу від масштабу в моделі.
2. Збереження ефективності ресурсів у першому та другому планових періодах

(продуктивність праці – 9,52; фондівіддача – 109,29) свідчить про стабільність технологічного процесу при розширенні виробництва.

3. *Зміна структури витрат* у третьому плановому періоді (зменшення трудовитрат на 10%) призводить до:
 - зростання фондівіддачі до 77,55;
 - зростання продуктивності праці до 13,2;
 - зміни еластичності ресурсів, що вказує на *перехід до іншого режиму використання факторів виробництва*.
4. *Модель дозволяє гнучко оцінювати вплив змін у ресурсному забезпеченні на кінцевий результат*, що є корисним для планування виробничої програми та оптимізації витрат.
5. *Графічна візуалізація (рис. 1.10) та табличні дані (табл. 2) підтверджують аналітичні висновки та можуть бути використані для подальшого моделювання альтернативних сценаріїв*.

Контрольні питання

1. Що таке виробнича функція та які основні фактори вона враховує?
2. У чому полягає відмінність між граничним і середнім продуктом виробничого фактору?
3. Що означає закон спадної граничної продуктивності і як він проявляється у виробничій функції?
4. Які існують типи виробничих функцій? Наведіть приклади та коротко охарактеризуйте їх.
5. Як змінюється випуск продукції при зміні масштабу виробництва? Поясніть поняття постійної, зростаючої та спадної віддачі від масштабу.

Варіанти до індивідуального завдання 1 «Виробничі функції»

№1	Y	K	L
1	2,27	112,5	48
2	1,94	116,4	42,1
3	2,32	111,6	42,3
4	2,49	108,9	43,7
5	2,57	116,5	42,8
6	2,01	104,5	41,8
7	1,87	102,7	30
8	2,39	110,2	44,4
9	2,18	104,7	51,2
10	2,17	109,4	54,6

№2	Y	K	L
1	2,27	48	2,12
2	1,94	42,1	2,2
3	2,32	42,3	2,11
4	2,49	43,7	2,03
5	2,57	42,8	2,21
6	2,01	41,8	1,88
7	1,87	30	1,91
8	2,39	44,4	2
9	2,18	51,2	1,9
10	2,17	54,6	1,99

11	1,8	101,1	57,4
12	2,36	102,6	53,2
13	2,5	128,5	57,6
14	2,27	122,5	58,3
15	2,33	105,2	55,7
№3	Y	K	L
1	48	2,27	112,5
2	42,1	1,94	116,4
3	42,3	2,32	111,6
4	43,7	2,49	108,9
5	42,8	2,57	116,5
6	41,8	2,01	104,5
7	30	1,87	102,7
8	44,4	2,39	110,2
9	51,2	2,18	104,7
10	54,6	2,17	109,4
11	57,4	1,8	101,1
12	53,2	2,36	102,6
13	57,6	2,5	128,5
14	58,3	2,27	122,5
15	55,7	2,33	105,2
№5	Y	K	L
1	3,45	2,27	48
2	3,48	1,94	42,1
3	3,06	2,32	42,3
4	3,66	2,49	43,7
5	3,79	2,57	42,8
6	3,85	2,01	41,8
7	3,44	1,87	30
8	4,08	2,39	44,4
9	4,5	2,18	51,2
10	4,31	2,17	54,6
11	3,57	1,8	57,4
12	3,55	2,36	53,2
13	4,61	2,5	57,6
14	3,99	2,27	58,3
15	4,78	2,33	55,7
№7	Y	K	L
1	3,45	48	112,5
2	3,48	42,1	116,4
3	3,06	42,3	111,6
4	3,66	43,7	108,9
5	3,79	42,8	116,5

11	1,8	57,4	1,54
12	2,36	53,2	1,74
13	2,5	57,6	2,23
14	2,27	58,3	2,14
15	2,33	55,7	1,87
№4	Y	K	L
1	15,16	32,1	24,56
2	16,7	31	23,7
3	15,44	32,4	23,78
4	15,65	33,2	24,1
5	13,13	31,2	24
6	14,22	34,8	23,67
7	16,73	35,4	24,9
8	17,8	33	32,75
9	16,88	34,8	26,24
10	15,67	33,3	25,37
11	15,99	36,1	25,66
12	14,33	38,3	24,34
13	15,77	30,6	22,1
14	15,28	32,1	20,57
15	17,04	37,6	24,61
№6	Y	K	L
1	15,16	2,12	32,1
2	16,7	2,2	31
3	15,44	2,11	32,4
4	15,65	2,03	33,2
5	13,13	2,21	31,2
6	14,22	1,88	34,8
7	16,73	1,91	35,4
8	17,8	2	33
9	16,88	1,9	34,8
10	15,67	1,99	33,3
11	15,99	1,54	36,1
12	14,33	1,74	38,3
13	15,77	2,23	30,6
14	15,28	2,14	32,1
15	17,04	1,87	37,6
№8	Y	K	L
1	3,45	112,5	2,12
2	3,48	116,4	2,2
3	3,06	111,6	2,11
4	3,66	108,9	2,03
5	3,79	116,5	2,21

6	3,85	41,8	104,5
7	3,44	30	102,7
8	4,08	44,4	110,2
9	4,5	51,2	104,7
10	4,31	54,6	109,4
11	3,57	57,4	101,1
12	3,55	53,2	102,6
13	4,61	57,6	128,5
14	3,99	58,3	122,5
15	4,78	55,7	105,2
№9	Y	K	L
1	3,45	2,12	32,1
2	3,48	2,2	31
3	3,06	2,11	32,4
4	3,66	2,03	33,2
5	3,79	2,21	31,2
6	3,85	1,88	34,8
7	3,44	1,91	35,4
8	4,08	2	33
9	4,5	1,9	34,8
10	4,31	1,99	33,3
11	3,57	1,54	36,1
12	3,55	1,74	38,3
13	4,61	2,23	30,6
14	3,99	2,14	32,1
15	4,78	1,87	37,6
№11	Y	K	L
1	112,5	2,27	2,12
2	116,4	1,94	2,2
3	111,6	2,32	2,11
4	108,9	2,49	2,03
5	116,5	2,57	2,21
6	104,5	2,01	1,88
7	102,7	1,87	1,91
8	110,2	2,39	2
9	104,7	2,18	1,9
10	109,4	2,17	1,99
11	101,1	1,8	1,54
12	102,6	2,36	1,74
13	128,5	2,5	2,23
14	122,5	2,27	2,14
15	105,2	2,33	1,87
№13	Y	K	L
1	112,5	3,15	2,12

6	3,85	104,5	1,88
7	3,44	102,7	1,91
8	4,08	110,2	2
9	4,5	104,7	1,9
10	4,31	109,4	1,99
11	3,57	101,1	1,54
12	3,55	102,6	1,74
13	4,61	128,5	2,23
14	3,99	122,5	2,14
15	4,78	105,2	1,87
№10	Y	K	L
1	3,45	32,1	24,56
2	3,48	31	23,7
3	3,06	32,4	23,78
4	3,66	33,2	24,1
5	3,79	31,2	24
6	3,85	34,8	23,67
7	3,44	35,4	24,9
8	4,08	33	32,75
9	4,5	34,8	26,24
10	4,31	33,3	25,37
11	3,57	36,1	25,66
12	3,55	38,3	24,34
13	4,61	30,6	22,1
14	3,99	32,1	20,57
15	4,78	37,6	24,61
№12	Y	K	L
1	112,5	2,27	3,45
2	116,4	1,94	3,48
3	111,6	2,32	3,06
4	108,9	2,49	3,66
5	116,5	2,57	3,79
6	104,5	2,01	3,85
7	102,7	1,87	3,44
8	110,2	2,39	4,08
9	104,7	2,18	4,5
10	109,4	2,17	4,31
11	101,1	1,8	3,57
12	102,6	2,36	3,55
13	128,5	2,5	4,61
14	122,5	2,27	3,99
15	105,2	2,33	4,78
№14	Y	K	L
1	201,6	3,15	0,43

2	116,4	3,54	2,2
3	111,6	3,66	2,11
4	108,9	3,15	2,03
5	116,5	3,26	2,21
6	104,5	3,24	1,88
7	102,7	3,76	1,91
8	110,2	3,88	2
9	104,7	3,91	1,9
10	109,4	4,01	1,99
11	101,1	3,71	1,54
12	102,6	4,65	1,74
13	128,5	4,22	2,23
14	122,5	3,29	2,14
15	105,2	4,06	1,87
№15	Y	K	L
1	201,6	10,11	0,43
2	202	13,65	0,77
3	202,6	13,75	1,35
4	201,8	11,64	1,99
5	203,3	12,87	0,88
6	203,4	12,43	0,98
7	204,7	14,33	1,56
8	204,3	15,26	2,09
9	204,5	15,9	1,44
10	203,9	18,21	2,13
11	202,7	13,22	1,17
12	205,8	13,45	1,44
13	209,5	12,22	1,87
14	204,3	12	2,66
15	208,8	13,07	2,05
№17	Y	K	L
1	10,11	6,17	3,45
2	13,65	7,55	3,48
3	13,75	6,93	3,06
4	11,64	6,55	3,66
5	12,87	6,71	3,79
6	12,43	7,73	3,85
7	14,33	7,43	3,44
8	15,26	7,55	4,08
9	15,9	7,6	4,5
10	18,21	6,88	4,31
11	13,22	6,54	3,57

2	202	3,54	0,77
3	202,6	3,66	1,35
4	201,8	3,15	1,99
5	203,3	3,26	0,88
6	203,4	3,24	0,98
7	204,7	3,76	1,56
8	204,3	3,88	2,09
9	204,5	3,91	1,44
10	203,9	4,01	2,13
11	202,7	3,71	1,17
12	205,8	4,65	1,44
13	209,5	4,22	1,87
14	204,3	3,29	2,66
15	202,8	4,06	2,05
№16	Y	K	L
1	201,6	3,45	10,11
2	202	3,48	13,65
3	202,6	3,06	13,75
4	201,8	3,66	11,64
5	203,3	3,79	12,87
6	203,4	3,85	12,43
7	204,7	3,44	14,33
8	204,3	4,08	15,26
9	204,5	4,5	15,9
10	203,9	4,31	18,21
11	202,7	3,57	13,22
12	205,8	3,55	13,45
13	209,5	4,61	12,22
14	204,3	3,99	12
15	202,8	4,78	13,07
№18	Y	K	L
1	6,17	0,43	3,45
2	7,55	0,77	3,48
3	6,93	1,35	3,06
4	6,55	1,99	3,66
5	6,71	0,88	3,79
6	7,73	0,98	3,85
7	7,43	1,56	3,44
8	7,55	2,09	4,08
9	7,6	1,44	4,5
10	6,88	2,13	4,31
11	6,54	1,17	3,57

12	13,45	4,37	3,55
13	12,22	6,82	4,61
14	12	7,33	3,99
15	13,07	6,01	4,78
№19	Y	K	L
1	3,45	3,15	0,43
2	3,48	3,54	0,77
3	3,06	3,66	1,35
4	3,66	3,15	1,99
5	3,79	3,26	0,88
6	3,85	3,27	0,98
7	3,44	3,76	1,56
8	4,08	3,88	2,09
9	4,5	3,91	1,44
10	4,31	4,01	2,13
11	3,57	3,71	1,17
12	3,55	4,65	1,44
13	4,61	4,22	1,87
14	3,99	3,29	2,66
15	4,78	4,06	2,05
№21	Y	K	L
1	10,11	0,43	3,45
2	13,65	0,77	3,48
3	13,75	1,35	3,06
4	11,64	1,99	3,99
5	12,87	0,88	3,79
6	12,43	0,98	3,85
7	14,33	1,56	3,44
8	15,26	2,09	4,08
9	15,9	1,44	4,5
10	18,21	2,13	4,31
11	13,22	1,17	3,57
12	13,45	1,44	3,55
13	12,22	1,87	4,61
14	12	2,66	3,99
15	13,07	2,05	4,78
№23	Y	K	L
1	10,11	3,15	0,43
2	13,65	3,54	0,77
3	13,75	3,66	1,35
4	11,64	3,15	1,99

12	4,37	1,44	3,55
13	6,82	1,87	4,61
14	7,33	2,66	3,99
15	6,01	2,05	4,78
№20	Y	K	L
1	201,6	3,15	3,45
2	202	3,54	3,48
3	202,6	3,66	3,06
4	201,8	3,15	3,66
5	203,3	3,26	3,79
6	203,4	3,27	3,85
7	204,7	3,76	3,44
8	204,3	3,88	4,08
9	204,5	3,91	4,5
10	203,9	4,01	4,31
11	202,7	3,71	3,57
12	205,8	4,65	3,55
13	209,5	4,22	4,61
14	204,3	3,29	3,99
15	202,8	4,06	4,78
№22	Y	K	L
1	10,11	3,45	6,17
2	13,65	3,48	7,88
3	13,75	3,06	6,93
4	11,64	3,66	6,55
5	12,87	3,79	6,71
6	12,43	3,85	7,73
7	14,33	3,44	7,43
8	15,26	4,08	7,55
9	15,9	4,5	7,6
10	18,21	4,31	6,88
11	13,22	3,57	6,54
12	13,45	3,55	4,37
13	12,22	4,61	6,82
14	12	3,99	7,33
15	13,07	4,78	6,01
№24	Y	K	L
1	10,11	3,15	3,45
2	13,65	3,54	3,48
3	13,75	3,66	3,06
4	11,64	3,15	3,66

5	12,87	3,26	0,88
6	12,43	3,27	0,98
7	14,33	3,76	1,56
8	15,26	3,88	2,09
9	15,9	3,91	1,44
10	18,21	4,01	2,13
11	13,22	3,71	1,17
12	13,45	4,65	1,44
13	12,22	4,22	1,87
14	12	3,29	2,66
15	13,07	4,06	2,05
№25	Y	K	L
1	10,11	3,45	6,17
2	13,45	3,48	7,55
3	13,75	3,06	6,93
4	11,64	3,66	6,55
5	12,87	3,79	6,17
6	12,43	3,85	7,73
7	14,33	3,44	7,43
8	15,26	4,08	7,55
9	15,9	4,5	7,6
10	18,21	4,31	6,88
11	13,22	3,57	6,54
12	13,45	3,55	4,37
13	12,22	4,61	6,82
14	12	3,99	7,33
15	13,07	4,78	6,01

5	12,87	3,26	3,79
6	12,43	3,27	3,85
7	14,33	3,76	3,44
8	15,26	3,88	4,08
9	15,9	3,91	4,5
10	18,21	4,01	4,31
11	13,22	3,71	3,57
12	13,45	4,65	3,55
13	12,22	4,22	4,61
14	12	3,29	3,99
15	13,07	4,06	4,78
№26	Y	K	L
1	32,1	0,43	3,45
2	31	0,77	3,48
3	32,4	1,35	3,06
4	33,2	1,99	3,66
5	31,2	0,88	3,79
6	34,8	0,98	3,85
7	35,4	1,56	3,44
8	33	2,09	4,08
9	34,8	1,44	4,5
10	33,3	2,13	4,31
11	36,1	1,17	3,57
12	38,3	1,44	3,55
13	30,06	1,87	4,61
14	32,1	2,66	3,99
15	37,6	2,05	4,78

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ № 5 – 7

Тема: Моделювання сфери споживання. Аналіз функцій споживання і попиту

Мета: формування вмінь та знань і набуття практичних навичок моделювання сфери споживання та проведення аналізу функцій споживання і попиту.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися моделювати сферу споживання, зокрема, відновлювати за статистичними даними функції споживання та попиту на продукцію; застосовувати їх на практиці для розв'язування прикладних задач управління і проектування складних систем.

Короткі теоретичні відомості

Важливим класом економетричних функцій є функції споживання та попиту. Функції споживання відображають кінцеві результати використання різних споживчих благ і характеризують рівень добробуту споживача. У регресійному аналізі параметричні моделі споживання часто називають цільовими функціями споживання, оскільки вони можуть використовуватись як глобальні критерії оптимальності в задачах пошуку екстремуму.

Функції споживання також відомі під назвами функції рівня життя, функції добробуту, суспільної корисності тощо. Вони описують спільне споживання певного набору благ і визначають загальний рівень споживання.

У просторі благ кожній функції споживання відповідає сімейство неперетинних поверхонь байдужості, які відображають однаковий рівень задоволення потреб при різних комбінаціях благ. Рівень споживання зручно виражати у вартісному вимірі - через витрати на придбання благ.

Співвідношення граничних корисностей благ, узятє зі зворотним знаком, у теорії споживання називається нормою еквівалентної замінності благ (гранична норма заміщення).

Функції споживання можуть бути трансформовані у функції купівельного попиту, якщо вважається, що споживач максимізує корисність у межах свого бюджету з урахуванням цін на блага.

Функції попиту можуть:

- охоплювати всю сферу споживання (макроекономічні моделі),

- або відображати *індивідуальний попит* (мікроекономічні моделі).

При аналізі функцій попиту особливу увагу приділяють *еластичності* — зокрема, *еластичності за доходом*, *ціновій еластичності* та *еластичності заміщення*, які дозволяють оцінити чутливість попиту до змін зовнішніх умов.

Еластичність попиту за доходом - це показник, який відображає *відсоткову зміну обсягу попиту на благо* у відповідь на *зміну доходу споживача на 1%*.

- якщо еластичність *менше 1* ($E_i < 1$), попит вважається *нееластичним* - це характерно для *товарів першої необхідності*.
- якщо еластичність *більше 1* ($E_i > 1$), попит є *еластичним* - це притаманно для *предметів розкоші*.
- якщо еластичність *негативна* ($E_i < 0$), йдеться про *нижчі (інфериорні) блага*, попит на які зменшується зі зростанням доходу.

Еластичність попиту за ціною - це аналогічний показник, що вимірює *чутливість попиту до зміни ціни*:

- **Пряма цінова еластичність** - зміна попиту на благо при зміні його власної ціни.
- **Перехресна цінова еластичність** - зміна попиту на одне благо при зміні ціни іншого.

Позначимо цінову еластичність як $E_{p_{ij}}$:

- якщо $E_{p_{ij}} > 1$ – попит *еластичний*;
- якщо $E_{p_{ij}} < 1$ – попит *нееластичний*;
- якщо $E_{p_{ij}} = 1$ - має місце *одинична еластичність*, або *нормальний попит*.

Еластичність заміщення - це показник, що характеризує *ступінь взаємозамінності благ*:

- якщо еластичність *позитивна*, блага є *взаємозамінними* (конкурентними);
- якщо *нульова*, блага є *незалежними*;
- якщо *негативна*, блага є *взаємодоповнюючими*.

Методика виконання типового завдання

Постановка задачі: Дослідити властивості функції споживання оздоровчих послуг та побудувати відповідні економічні моделі на основі регресійної залежності $U(q_1, q_2)$, де:

- q_1 - кількість туристичних путівок;
- q_2 - кількість путівок на санаторно-курортне лікування.

Порядок виконання завдання

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал

2. Під час планування замовлення путівок для оздоровлення колективу було досліджено потреби працівників у туристичних та санаторно-курортних послугах, у результаті чого отримано функцію витрат $U(q_1, q_2)$.

 **Завдання для аналізу функції споживання оздоровчих путівок:**

- 1) **Перевірити, чи може функція $U(q_1, q_2)$ бути інтерпретована як функція корисності споживача.** (Оцінити властивості: монотонність, опуклість, гранична норма заміщення тощо.)
- 2) **У разі позитивної відповіді:**
 - a) Побудувати карти байдужості;
 - b) Побудувати карти переваг.
- 3) **Виконати імітаційні розрахунки варіантів споживання путівок за умов:**
 - a) пропозиція залишається незмінною;
 - b) пропозиція зростає на 10 одиниць.
- 4) **Побудувати загальну функцію попиту на путівки та функції попиту за видами q_1, q_2 використовуючи:**
 - a) Середні ціни путівок ρ_1 і ρ_2 ;
 - b) Задані значення загального бюджету Z для варіантів:
 - i) $Z = 100\ 000$ грн;
 - ii) $Z = 1\ 000\ 000$ грн.
- 5) **Проаналізувати функції попиту**, розрахувавши:
 - a) Еластичність за доходом;
 - b) Цінову еластичність;
 - c) Еластичність заміщення між видами путівок.

3. Оформити звіт такого змісту:

- тема індивідуального завдання;
- постановка завдання;
- всі завдання для аналізу функції споживання оздоровчих путівок згідно п.2.

Приклад аналізу функції споживання оздоровчих путівок

Під час розробки плану замовлення путівок для оздоровчих заходів колективу фірми було проведено дослідження потреб співробітників у двох видах путівок: туристичних маршрутах q_1 та санаторно-курортному лікуванні q_2 . У результаті регресійного аналізу отримано функціональну залежність суми коштів, сплачених працівниками за путівки, від кількості путівок кожного виду:

$$U(q_1, q_2) = 50q_1 - 4q_1^2 + 92q_2 - q_2^2.$$

- 1) **Аналіз можливості інтерпретації функції $U(q_1, q_2)$ як функції корисності**

споживача

Перевіряється функція $U(q_1, q_2)$ на опуклість.

У стаціонарній точці \bar{q}^0 функція $U(q_1, q_2)$ має максимум, якщо значення її другого диференціала в цій точці $d^2U < 0$ і мінімум, якщо це значення $d^2U > 0$ при будь-яких збільшеннях dq_1 і dq_2 , не обертаються в нуль одночасно.

Негативність другого диференціала функції в точці \bar{q}^0 гарантує, що в деякій околиці цієї точки функція багатьох змінних строго опукла вгору (увігнута), а значить, має в цій точці локальний *максимум*.

Позитивність другого диференціала функції в точці \bar{q}^0 гарантує, що в деякій околиці цієї точки функція багатьох змінних строго опукла вниз, а значить, що має в цій точці локальний *мінімум*.

Задля перевірки функції $U(q_1, q_2)$ на опуклість знаходять значення другого повного диференціала функції.

Перший повний диференціал цієї функції:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) dq_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) dq_2 = (50 - 8q_1) dq_1 + (92 - 2q_2) dq_2.$$

Тоді другий повний диференціал:

$$\begin{aligned} d^2U &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right) dq_1^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right) dq_1 dq_2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1}\right) dq_2 dq_1 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right) dq_2^2 \\ &= -8dq_1^2 - 2dq_2^2. \end{aligned}$$

Оскільки dq_1^2 і dq_2^2 позитивні за будь-яких значень q_1 і q_2 , то $d^2U < 0$, а отже, $U(q_1, q_2)$ опукла вгору (рис. 2.1 праворуч) і може служити цільовою функцією споживання.

Якщо в точці \bar{q}^* функція $U(q_1, q_2)$ має локальний екстремум, то часткові похідні функції в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) = (50 - 8q_1) = 0$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) = (92 - 2q_2) = 0$$

В результаті розв'язку системи рівнянь: $q_1 = 6,25$, $q_2 = 46$.

Отже, $(6,25; 46)$ - точка максимуму функції.

2) а) Побудова карти байдужості для заданої функції

Криві байдужості є лініями рівного рівня витрат $U(q_1, q_2)$. Для побудови кривих байдужості варто виразити одне з благ через інше і рівень витрат, величина якого приймається за константу. Наприклад, формула для вираження q_2 має вигляд:

$$q_2 = 46 \pm \sqrt{2116 - 4q_1^2 + 50q_1 - U(q_1, q_2)}.$$

Підставляючи різні значення q_1 при фіксованому рівні корисності $U(q_1, q_2)$, можна визначити відповідні значення q_2 , отримати набір розрахункових точок і побудувати криву байдужості. У нашому випадку функція $U(q_1, q_2)$ має форму рівняння кола, яке в канонічному вигляді записується як:

$$\frac{(q_1 - 6,25)^2}{(2272,25 - U(q_1, q_2))} + \frac{(q_2 - 46)^2}{(2272,25 - U(q_1, q_2))} = 1.$$

Центр кола в точці **(6,25; 46)**, радіус $R = \sqrt{2272,25 - U(q_1, q_2)}$. Знайдемо криві байдужості для рівнів споживання $U(q_1, q_2)$, рівних 700, 1000, 1350 і 2000. Радіуси кіл, що визначають криві споживання, відповідно рівні: 39,65; 35,67; 30,37 та 16,5.

Тому що величини q_1 і q_2 позитивні, дуги кривих розташовані тільки в першому квадранті системи координат. Результати побудови приведені на рис. 2.1.

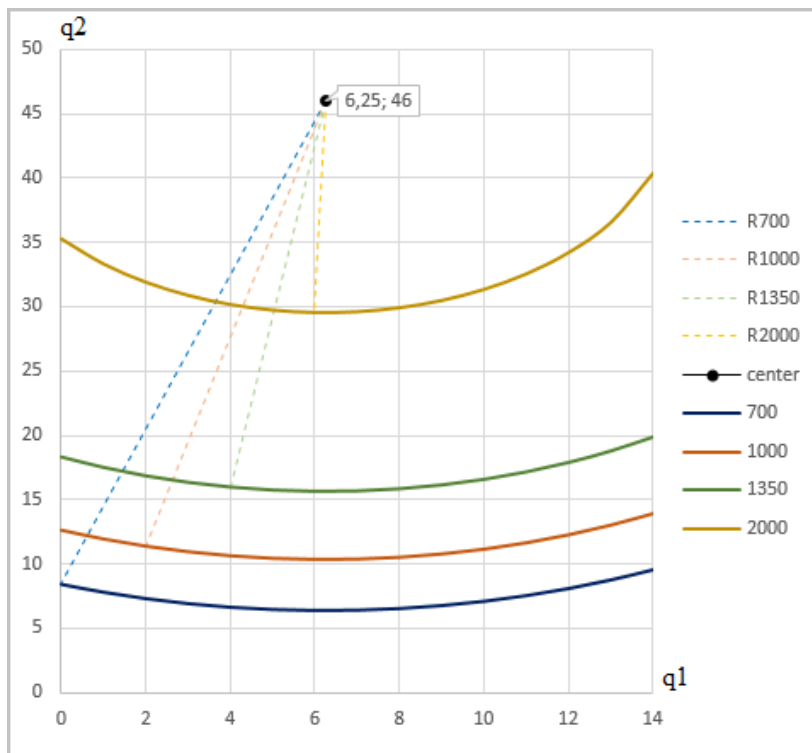


Рисунок 2.1 – Карта байдужості

б) Побудова карти переваг

Для побудови карти переваг визначаються вирази для еквівалентної норми змінності благ. Вони можуть бути знайдені як рівняння дотичної до кривих байдужості:

$$\gamma = \left(\frac{dq_1}{dq_2} \right) = - \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial q_2} \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial q_1} \right)} = - \frac{(92 - 2q_2)}{(50 - 8q_1)} = - \frac{(46 - q_2)}{(25 - 4q_1)}.$$

Рівняння нормалі до цієї дотичної знайдемо як:

$$\left(\frac{dq_1}{dq_2}\right) = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)} = \frac{(25-4q_1)}{(46-q_2)} \text{ або } \frac{dq_1}{(25-4q_1)} = \frac{dq_2}{(46-q_2)} = c$$

Перетворюючи останній вираз, одержимо: $(q_2 - 46) = c(4q_1 - 25)$, тобто сімейство прямих, що сходяться в точці $(6,25; 46)$, нахил яких визначається кутовим коефіцієнтом C . Зіставляючи цей вираз з виразом для норми змінності благ, легко бачити, що $c = -(1/\gamma)$, тому можна одержати лінії переваги, підставляючи замість c негативні значення зворотної норми змінності.

Побудуємо карту переваг для значень зворотної нормалі заміщення, рівних 0,11; 0,6; 1,0; 2,0. Щоб побудувати кожен прямокутник переваги, досить крім відомої точки перетинання всіх прямих $(6,25; 46)$ знайти ще одну точку.

Це легко зробити, якщо підставляти в рівняння $q_2(c, q_1) = c(4q_1 - 25) + 46$, наприклад, нульові значення q_1 . Наприклад, для $c = 0,11$ при $q_1 = 0$ одержимо $q_2 = 43,25$. Аналогічно можна знайти інші точки, що визначають прямі переваги. На рис. 2.3 приведені відповідна карта переваг.

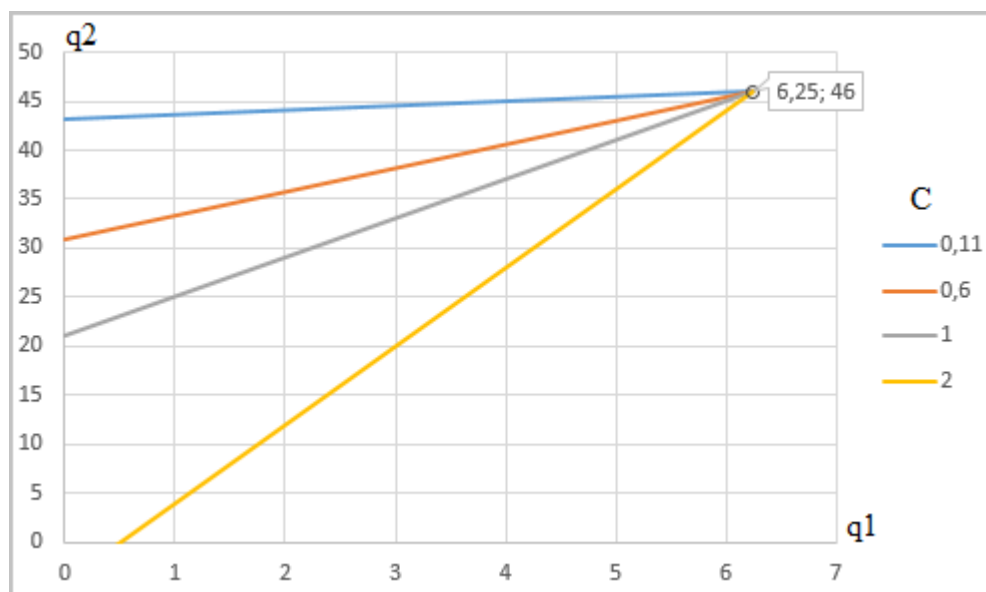


Рис. 2.3 – Карта переваг для значень зворотної нормалі заміщення

Криві переваги, спрямовані до центра кола вказують напрямком найбільшої зміни потреби в розглянутій сукупності благ. Відповідно до заданої функції споживання максимальний рівень придбання путівок складе $q_1 = 6$ і $q_2 = 46$ штук.

3) Імітаційні розрахунки варіантів споживання путівок

Аналіз змін у структурі попиту на путівки за умов зростання витрат

Припустимо, що в базовому періоді фірма придбала 1 туристичних путівок та

30 санаторно-курортних путівок. *Еквівалентна норма заміщення (MRS)* між цими двома видами путівок становила **0,8**, а загальні витрати на їх придбання — **1900 грн.**

У плановому періоді передбачається збільшення бюджету на путівки до **2000 грн.** Необхідно:

- Розрахувати нову кількість путівок кожного типу, якщо еквівалентна норма заміщення залишиться незмінною.
- Проаналізувати зміну граничної норми заміщення (MRS) у двох випадках:
 - а) кількість санаторно-курортних путівок *залишається на рівні 30*;
 - б) кількість санаторно-курортних путівок *зростає*.

При незмінній нормі, еквівалентній нормі заміщеності в плановому періоді, значення q_1 і q_2 знайдемо, розв'язуючи спільно задане рівняння функції споживання і прямої переваги:

$$q_2 = 0,8(4q_1 - 25) + 46$$

$$50q_1 - 4q_1^2 + 92q_2 - q_2^2 = 2000.$$

При підстановці q_2 вираженого з першого рівняння, одержуємо два корені $q_1^1 = 1,88$ (приблизно 2 шт.) і $q_1^2 = 10,62$. Другий корінь необхідно відкинути як нереальний. Тоді значення $q_2 = 32,4$, тобто приблизно 32 штуки. Отже, при незмінній еквівалентній нормі заміщеності, при збільшенні витрати на путівки до 2000 грн., тобто на $(2000/1900 - 1) \cdot 100\% = 5,26\%$, число *туристичних путівок* збільшиться **на 1 штуку**, чи на 100%, а путівок *санаторно-курортного лікування* **на 2 шт.**, тобто приблизно на 6%. Таким чином, при визначенні пропозиції путівок санаторно-курортного типу в плановому періоді будемо мати:

- для *варіанта а)*, коли пропозиція санаторно-курортних путівок *залишається на рівні* базового періоду (30 шт.), з рівняння $50q_1 - 4q_1^2 + 92q_2 - q_2^2 = 2000$ знаходиться число туристичних путівок. Воно буде дорівнює приблизно 4 штукам, а гранична норма заміщення (MRS) визначиться зі співвідношення

$$\gamma = -\frac{(46 - 32)}{(25 - 4 \cdot 4)} = -\frac{16}{9} = -1,78$$

- для *варіанта б)* коли кількість санаторно-курортних путівок *зростає* до 32 шт., то число туристичних путівок буде приблизно дорівнювати 1 - 2 штукам, а

$$\gamma = -\frac{(46 - 32)}{(25 - 4 \cdot 2)} = -\frac{14}{17} = -0,82.$$

Висновок Результати аналізу говорять про те, що зі зростанням пропозиції путівок санаторно-курортного лікування число туристичних путівок незначно знижується, а еквівалентна норма заміщеності цих благ різко диференціюється.

4) *Побудова загальної функції попиту на путівки та функції попиту за видами*

q_1, q_2 використовуючи:

- a) Середні ціни путівок p_1 і p_2 ;
- b) Задані значення загального бюджету Z для варіантів:
 - i) $Z = 100\ 000$ грн;
 - ii) $Z = 1\ 000\ 000$ грн.

У теорії споживання передбачається, що споживач прагне *максимізувати свою корисність*, тобто отримати якомога більше задоволення від споживання товарів, і єдиним обмеженням для нього є *обсяг доступного доходу*. Якщо задано *цільову функцію корисності*, відомі *ціни товарів та бюджет*, то на основі гіпотези про повне використання бюджету можна визначити *функції попиту*.

Припустимо, що:

- Середня ціна *туристичної путівки* становить $p_1 = 900$ грн;
- Середня ціна *санаторно-курортної путівки* $p_2 = 2000$ грн;

Бюджет фірми на придбання путівок у рік:

- a) $Z = 100\ 000$ грн;
- b) $Z = 1\ 000\ 000$ грн.

Завдання:

1. **Знайти функцію попиту** на путівки, виходячи з заданої цільової функції корисності.
2. **Визначити оптимальну кількість путівок** кожного типу для варіантів бюджету a) і b).

Розподіл коштів на придбання путівок, імовірно, здійснюється відповідно до бюджетного обмеження:

$$Z = p_1 q_1 + p_2 q_2, \quad (2.1)$$

де Z - загальний дохід (або витрати споживача).

Щоб знайти максимальне значення цільової функції споживання при заданому розподілі доходу, необхідно прирівняти до нуля повний диференціал функції корисності:

$$dU = (50 - 8q_1)dq_1 + (92 - 2q_2)dq_2 = 0, \quad (2.2)$$

що відповідає умові незмінного рівня корисності при малих змінах у споживанні q_1 і q_2 .

Ці зміни повинні задовольняти бюджетне обмеження (2.1).

На основі рівнянь 2.1 -2.2 можна вивести рівняння, яке описує *лінію переваги* (або криву байдужості) у вигляді:

$$q_2 - 46 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) (4q_1 - 25),$$

де кутовий коефіцієнт (нахил прямої) $\gamma = (p_2/p_1)$ відображає *граничну норму заміщення* (MRS) між двома видами путівок.

Це рівняння зважується разом з рівнянням розподілу засобів на путівки, звідки виходять *функції попиту*:

$$q_1 = \frac{(p_1 Z - 46 p_1 p_2 + 6,25 p_2^2)}{(p_1^2 + p_2^2)}$$

$$q_2 = \frac{(p_2 Z - 6,25 p_1 p_2 + 46 p_1^2)}{(p_1^2 + p_2^2)}$$

Тоді оптимальний попит на путівки:

- для варіанта а) $Z=100\ 000$:

$$q_1 = \frac{(900 * Z - 46 * 900 * 2000 + 6,25 * 2000^2)}{(900^2 + 2000^2)} = 6,69 \approx 7шт$$

$$q_2 = \frac{(2000 * Z - 6,25 * 900 * 2000 + 46 * 900^2)}{(900^2 + 2000^2)} = 55,28 \approx 55шт$$

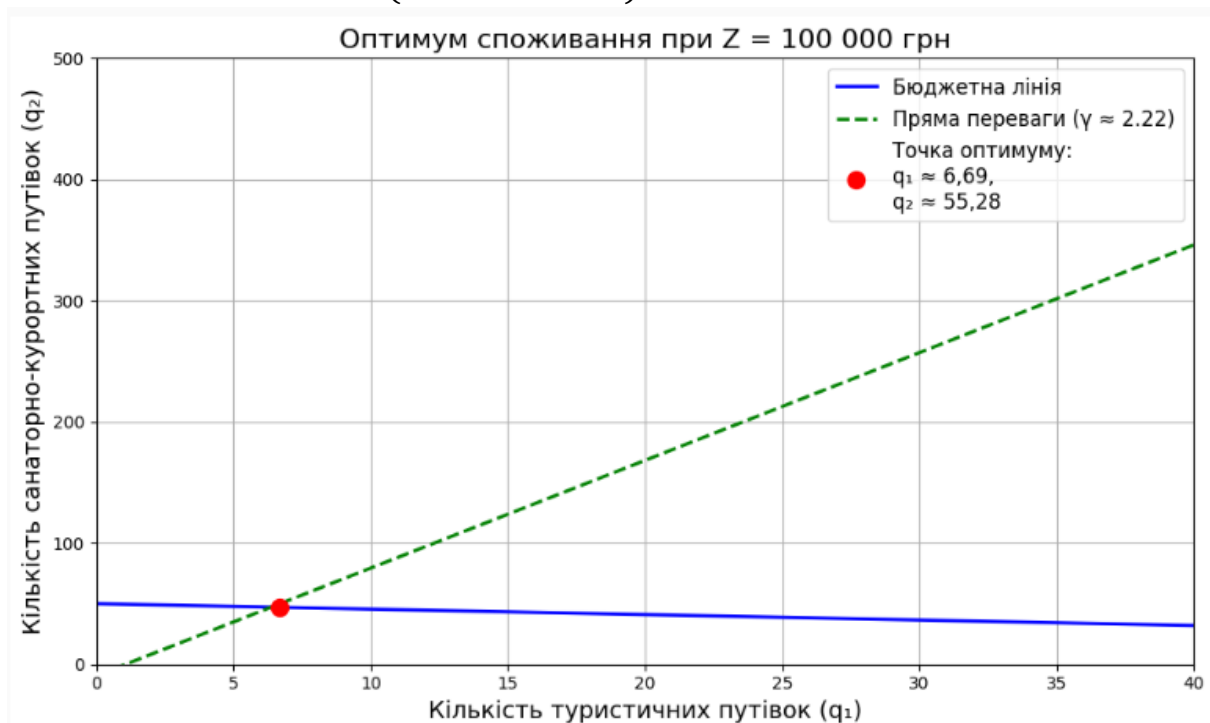


Рисунок 2.5 - Найкраще поєднання кількості путівок, яке забезпечує максимальну корисність за наявного бюджету

- для варіанта b): $Z = 1000\ 000$ грн

$$q_1 = \frac{(900 * 1\ 000\ 000 - 46 * 900 * 2000 + 6,25 * 2000^2)}{(900^2 + 2000^2)} = 175,09 \approx 175 \text{ шт}$$

$$q_2 = \frac{(2000 * 1000\ 000 - 6,25 * 900 * 2000 + 46 * 900^2)}{(900^2 + 2000^2)} = 421,21 \approx 421 \text{ шт}$$

5) Аналіз функцій попиту.

Щоб визначити характер розглянутих благ (путівок), необхідно розрахувати еластичності їхнього попиту по доходу і за ціною, а також часткові еластичності заміни.

Еластичність попиту за доходом визначається за допомогою наступної формули:

$$E_i = \frac{\left(\frac{\partial q_i}{\partial Z}\right)}{\left(\frac{q_i}{Z}\right)}. \quad (2.3)$$

Еластичність попиту за ціною:

$$E_{p_{ij}} = \frac{\left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right)}{\left(\frac{q_i}{p_j}\right)}. \quad (2.4)$$

Часткові еластичності заміни:

$$S_{ij} = \left(E_{p_{ij}} / k_j\right) - E_i, \quad (2.5)$$

де k_j - частка сумарного доходу, витраченого на благо q_i , величина якого визначається за формулою $k_j = (q_j p_j / Z)$

При $i = j$ маємо пряму еластичність за ціною, при $i \neq j$ - перехресну еластичність.

a) Еластичність попиту по доходу

- Коли $Z = 100\ 000$ грн та збільшення доходу на 1% $\Delta Z = 1000$ грн:
 - еластичність попиту на блага першого виду(туристичні) по

доходу

$$E_1 = \frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial Z}\right)}{\left(\frac{q_1}{Z}\right)} = \frac{\frac{\Delta q_1}{q_1}}{\frac{\Delta Z}{Z}} = \frac{\frac{6,88-6,69}{1000}}{\frac{1000}{100\ 000}} = 2,795 ,$$

○ еластичність попиту на блага другого виду(санаторно-курортні) по доходу

$$E_2 = \frac{\left(\frac{\partial q_2}{\partial Z}\right)}{\left(\frac{q_2}{Z}\right)} = \frac{\frac{\Delta q_2}{q_2}}{\frac{\Delta Z}{Z}} = \frac{(47,4 - 46,98)/46,98}{1000/100\ 000} = 0,885.$$

• Коли $Z = 1000\ 000$ грн та збільшення доходу на 1% $\Delta Z = 10\ 000$ грн

○ еластичність попиту на блага першого виду(туристичні) по доходу

$$E_1 = \frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial Z}\right)}{\left(\frac{q_1}{Z}\right)} = \frac{\frac{\Delta q_1}{q_1}}{\frac{\Delta Z}{Z}} = \frac{(176,9-175,1)/175,1}{10\ 000/1000\ 000} = 1,07 ;$$

○ еластичність попиту на блага другого виду(санаторно-курортні) по доходу

$$E_2 = \frac{\left(\frac{\partial q_2}{\partial Z}\right)}{\left(\frac{q_2}{Z}\right)} = \frac{\frac{\Delta q_2}{q_2}}{\frac{\Delta Z}{Z}} = \frac{(425,4 - 421,2)/421,2}{10\ 000/1000\ 000} = 0,987 .$$

б)  **Еластичності попиту за ціною**

Оскільки в формулі 2.4 при $i = j$ маємо *пряму еластичність за ціною* (визначаємо зміну попиту на благо при зміні його власної ціни), а при $i \neq j$ - *перехресну еластичність* (зміна попиту на одне благо при зміні ціни іншого), то для зручності розпізнавання перезначимо індекси $E_{p_{ij}}$ на $E_{q_i p_j}$

○ Коли $Z = 100\ 000$ грн :

$E_{q_1 p_1} = \frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right)}{\left(\frac{q_1}{p_1}\right)} = \frac{\left(\frac{\Delta q_1}{q_1}\right)}{\left(\frac{\Delta p_1}{p_1}\right)} = \frac{\frac{6.687 - 6.69}{9}}{\frac{6.69}{900}} = -0.115;$	$E_{q_1 p_2} = \frac{\frac{6.52 - 6.69}{20}}{\frac{6.69}{2000}} = -2.638;$
$E_{q_2 p_1} = \frac{\frac{46.96 - 46.98}{9}}{\frac{46.98}{900}} = -0.057;$	$E_{q_2 p_2} = \frac{\frac{46.6 - 46.98}{20}}{\frac{46.98}{2000}} = -0.823.$

- Коли $Z = 1\,000\,000$ грн :

$E_{q_1p_1} = \frac{\frac{176.2 - 175.1}{175.1}}{\frac{9}{900}} = 0.63;$	$E_{q_1p_2} = \frac{\frac{172.15 - 175.1}{175.19}}{\frac{20}{2000}} = -1.682;$
$E_{q_2p_1} = \frac{\frac{419.92 - 421.2}{421.28}}{\frac{9}{900}} = -0.057;$	$E_{q_2p_2} = \frac{\frac{418.35 - 421.28}{421.28}}{\frac{20}{2000}} = -0.679.$

с)  **Часткові еластичності заміни:**

- Коли $Z = 100\,000$ грн :

$S_{12} = \left(\frac{E_{q_1p_2}}{k_2} \right) - E_1 =$ $= \frac{-2.638}{\frac{46.98 \cdot 2000}{100\,000}} - 2,795 = -5.62;$	$S_{21} = \left(\frac{E_{q_2p_1}}{k_1} \right) - E_2 =$ $= \frac{-0.057}{\frac{7 \cdot 900}{100\,000}} - 0,885 = -1.79.$
---	--

- Коли $Z = 1\,000\,000$ грн :

$S_{12} = \frac{-1.682}{\frac{421,21 \cdot 2000}{1\,000\,000}} - 1.07 = -3.067;$	$S_{21} = \frac{-0.306}{\frac{175.09 \cdot 900}{1\,000\,000}} - 0,987 = -2.93.$
--	---

Висновок

На основі аналізу еластичності попиту за доходом, за ціною та часткові еластичності заміщення можна зробити такі висновки:

- **Санаторно-курортні путівки** мають коефіцієнт еластичності в межах $0 < E_2 < 1$, що свідчить про їх **нееластичність за доходом**. Це означає, що вони належать до **необхідних благ**.
- **Туристичні путівки** мають еластичність $E_1 > 1$, тобто є **еластичними за доходом**, що дозволяє класифікувати їх як **предмети відносної розкоші**.
- Для обох варіантів - $Z_1 = 100\,000$ грн та $Z_2 = 1\,000\,000$ грн - обидва види благ є **нееластичними за ціною**, оскільки всі коефіцієнти цінової еластичності $E_{q_i p_j} < 1$.
- Оскільки всі **часткові еластичності заміщення є негативними**, це свідчить

про те, що туристичні та санаторно-курортні путівки є *взаємодоповнюючими благами* (тобто *комплементами*, а не конкурентами).

Контрольні питання:

1. Дати визначення функцій споживання і попиту.
2. Що називається показниками еластичності для цих функцій і як вони аналітично визначаються?
3. Як змістовно трактуються значення показників еластичності? Як здійснюється перехід від функцій пропозиції до функцій попиту?

Варіанти до індивідуального завдання 2 «Аналіз функцій споживання і попиту»

№	Функція споживання $U(q_1, q_2)$	Середні ціни	
		p_1	p_2
1	$U = 50q_1 - q_1^2 + 20q_2 - q_2^2$	500	1200
2	$U = 90q_1 - q_1^2 + 90q_2 - q_2^2$	400	1000
3	$U = 80q_1 - q_1^2 + 100q_2 - q_2^2$	350	800
4	$U = 15q_1 + 20q_2 - 30q_2^2 - q_1^2$	600	1700
5	$U = -4q_1^2 + 60q_2 - 2q_2^2 + 60q_1$	400	2000
6	$U = 60q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$	700	2500
7	$U = 70q_1 + 90q_2 - 3q_1^2 - 2q_2^2$	500	3000
8	$U = -q_1^2 + 66q_2 - q_2^2 + 70q_1$	300	4000
9	$U = 72q_1 + 92q_2 - q_2^2 - q_1^2$	400	2000
10	$U = 70q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$	500	1500
11	$U = -2q_1^2 + 20q_2 - 4q_2^2 + 60q_1$	800	1200
12	$U = 50q_1 + 40q_2 - 9q_2^2 - 7q_1^2$	400	1400
13	$U = 50q_1 - q_2^2 - 4q_1^2 + 92q_2$	900	2000
14	$U = 70q_1 - q_2^2 - q_1^2 + 80q_2$	300	2500
15	$U = 70q_1 - q_1^2 + 60q_2 - q_2^2$	400	1000
16	$U = 80q_1 - q_1^2 + 60q_2 - q_2^2$	600	1400
17	$U = 72q_1 - q_1^2 + 46q_2 - q_2^2$	700	1600
18	$U = 7q_1 - 9q_1^2 + 6q_2 - 5q_2^2$	500	1700
19	$U = 5q_1 + q_2 - 6q_2^2 - 8q_1^2$	800	1200
20	$U = 80q_1 - q_1^2 + 40q_2 - q_2^2$	900	1300
21	$U = -4q_1^2 + 30q_2 - 4q_2^2 + 60q_1$	1000	1100
22	$U = 50q_1 + 40q_2 - q_2^2 - q_1^2$	800	1600
23	$U = 36q_1 + 72q_2 - q_2^2 - q_1^2$	650	2000
24	$U = 94q_1 + 74q_2 - q_2^2 - q_1^2$	750	1600
25	$U = 30q_1 - q_1^2 + 40q_2 - q_2^2$	700	2000

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ № 8 – 9

Тема: Оптимізаційна модель міжгалузевого балансу

Мета: поглиблення теоретичних знань і набуття практичних навичок у розв'язуванні задач оптимального планування випуску продукції, оцінки рентабельності продукції, що випускається, проведення аналізу обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися розв'язувати задачу оптимального планування випуску продукції при заданих умовах; оцінювати рентабельність продукції, що випускається; проводити аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.

Короткі теоретичні відомості

Для аналізу економічних моделей міжгалузевого балансу широко застосовується *теорія двоїстості в лінійному програмуванні*. Вона дозволяє не лише знаходити оптимальні рішення, але й глибше розуміти економічну суть задачі.

Зокрема, *економічна інтерпретація двоїстої задачі* чітко проявляється на прикладі *оптимального використання обмежених ресурсів*. У цьому контексті:

- *Пряма задача* описує, як найкраще розподілити наявні ресурси між виробничими процесами для досягнення максимального результату (наприклад, прибутку або обсягу виробництва).
- *Двоїста задача* інтерпретується як оцінка вартості ресурсів: вона визначає тіньові ціни (або граничні оцінки) кожного ресурсу, що відображають його внесок у досягнення оптимального результату.

Таким чином, аналіз двоїстої задачі дозволяє:

- оцінити ефективність використання ресурсів;
- виявити «вузькі місця» у виробництві;
- обґрунтувати економічну доцільність розширення ресурсної бази.

Узагальнимо умову наступним чином: для виробництва n видів продукції використовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями b_i ($i = \overline{1, m}$). Норма витрат кожного ресурсу на одиницю продукції становить a_{ij} ($j = \overline{1, n}$); $i = \overline{1, m}$). Прибуток від реалізації одиниці продукції j -го виду складає P_j . Математична модель задачі має такий вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^n P_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m});$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Розв'язок прямої задачі полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ який дає найбільший прибуток при обмежених ресурсах.

Двоїста задача до поставленої прямої буде така:

$$Z = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq P_j \quad (j = \overline{1, n});$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає у визначенні такої оптимальної системи двоїстих оцінок ресурсів y_i , які використовуються у виробництві, за якої загальна вартість усіх ресурсів буде мінімальною. При цьому має виконуватись умова: витрати на ресурси для виробництва кожного виду продукції не повинні бути меншими за прибуток (виручку) від її реалізації.

Іншими словами, двоїста задача дозволяє оцінити, наскільки цінним є кожен ресурс у контексті досягнення оптимального результату. Змінні y_i в двоїстій задачі мають економічну інтерпретацію як **тіньові ціни** - тобто *граничні оцінки вартості одиниці відповідного ресурсу*. Ці оцінки показують, наскільки зросте цільова функція прямої задачі (наприклад, прибуток), якщо збільшити доступну кількість певного ресурсу на одну одиницю.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з взаємо двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має і друга, при цьому оптимальні значення їх лінійних функцій рівні: $F_{\max} = Z_{\min}$. Якщо лінійна функція однієї із задач не обмежена, то умови другої задачі несумісні.

Друга теорема двоїстості. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють абсолютним значенням коефіцієнтів при відповідних змінних лінійної функції вихідної задачі, що записана через неосновні змінні її оптимального розв'язку.

Третя теорема двоїстості. Компоненти оптимального розв'язку

двоїстої задачі дорівнюють значенням часткових похідних лінійної функції $F_{max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ за відповідними аргументами, тобто

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i} = y_i^*, i = \overline{1, m}.$$

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу у прямій задачі лінійного програмування, а також оцінити рентабельність продукції, що виготовляється.

Ресурси, які використовуються у виробництві, умовно поділяють на дефіцитні та недефіцитні залежно від того, чи передбачає оптимальний план їх повне або часткове використання:

- якщо двоїста оцінка $y_i = 0$, це означає, що відповідний ресурс не використовується повністю і є **недефіцитним**.
- якщо $y_i > 0$, то ресурс використовується повністю і вважається **дефіцитним**.

У другому випадку значення y_i має важливу економічну інтерпретацію: воно показує, наскільки зросте значення цільової функції Z , якщо обсяг відповідного ресурсу буде збільшено на одну умовну одиницю. Таким чином, **двоїста оцінка відображає тіньову ціну ресурсу**.

Аналіз рентабельності продукції також базується на двоїстих оцінках і обмеженнях двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження у двоїстій задачі відображає сумарну вартість ресурсів, необхідних для виробництва однієї одиниці j -ї продукції. *Якщо ця вартість перевищує ринкову ціну продукції c_j , то виробництво такої продукції є економічно недоцільним* – вона **нерентабельна** і не включається до оптимального виробничого плану ($x_j = 0$).

Якщо загальна вартість усіх ресурсів, необхідних для виробництва одиниці продукції, дорівнює її ринковій ціні, то виготовлення такої продукції є економічно доцільним. У цьому випадку вона вважається **рентабельною**, і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна x_j набуває **додатного значення**: $x_j \geq 0$.

Методика виконання завдання

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал
2. В результаті роботи мають бути виконані наступні завдання:
 - 1) Вирішити задачу оптимального планування випуску продукції при заданих умовах
 - 2) Оцінити рентабельність продукції, що випускається
 - 3) Провести аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.
3. Оформити звіт такого змісту:

- тема індивідуального завдання;
- постановка завдання;
- всі завдання згідно п.2.

Приклад виконання завдання

 **Вирішити задачу оптимального планування випуску продукції при наступних умовах.**

Для виготовлення двох видів продукції використовуються три види сировини. При виробництві одиниці продукції першого виду витрачається a_1 кг сировини першого виду, a_2 кг сировини другого виду і a_3 кг сировини третього виду. При виробництві одиниці продукції другого виду витрачається b_1 кг сировини першого виду, b_2 кг сировини другого виду і b_3 кг сировини третього виду. Запаси сировини першого виду складають A кг, другого - B кг, третього - C кг. Прибуток від реалізації одиниці продукції першого виду складає P_1 грн., від реалізації одиниці продукції другого виду – P_2 грн.

Таблиця 3.1

Вихідні дані

a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	A	B	C	P_1	P_2
9	7	4	5	8	16	1431	1224	1328	3	2

Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 F &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max & (3.1) \\
 \begin{cases} 9x_1 + 5x_2 \leq 1431 \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 1224 \\ 4x_1 + 16x_2 \leq 1328 \end{cases} \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Канонічна форма задачі (3.1) записується так:

$$\begin{aligned}
 F &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max & (3.1) \\
 \begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + x_3 = 1431 \\ 7x_1 + 8x_2 + x_4 = 1224 \\ 4x_1 + 16x_2 + x_5 = 1328 \end{cases} \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

ЗЛП розв'язується симплекс-методом і остання симплекс-таблиця для задачі (3.1) має вигляд:

Остання симплекс-таблиця для задачі (3.1)

№п/п	Базис	Вільні члени	Змінні				
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	144	1	0	8/37	-5/37	0
2	x_2	27	0	1	-7/37	9/37	0
3	x_5	320	0	0	80/37	-124/37	1
	F	486	0	0	10/37	3/37	0

Оптимальний план можна записати так: $X^* = (144, 27, 0, 0, 320)$.

$$F_{max} = 3 * 144 + 2 * 27 = 486 \text{ грн.}$$

Аналіз оптимального плану.

В оптимальний план увійшла додаткова змінна x_5 . Отже, при реалізації такого плану є недовикористані ресурси в кількості 320 одиниць. Оцінки в нижньому рядку симплекс-таблиці мають сенс:

- значення 0 в стовпці x_1 означає, що випускати x_1 – вигідно;
- значення 0 в стовпці x_2 означає, що випускати x_2 – вигідно;
- значення $10/37 = 0.27$ в стовпці x_3 означає, що тіньова ціна (двоїста оцінка) дорівнює $y_1 = 0.27$;
- значення $3/37 = 0.08$ в стовпці x_4 означає, що тіньова ціна (двоїста оцінка) дорівнює $y_2 = 0.08$;
- значення 0 в стовпці x_5 означає, що двоїста оцінка $y_3 = 0$, і це означає, що відповідний ресурс не використовується повністю і є недефіцитним.

Відповідність між початковими змінними однієї із двоїстих задач та допоміжними змінними другої задачі наведена в наступній таблиці 3.3.

Таблиця 3.3

Таблиця відповідності між початковими змінними однієї із двоїстих задач та допоміжними змінними другої задачі

Змінні задачі (3.1)											
Вихідні						Допоміжні					
X_1	X_2	...	X_j	...	X_n	X_{1+n}	X_{2+n}	...	X_{j+n}	...	X_{m+n}
Y_{1+m}	Y_{2+m}	...	Y_{m+j}	...	Y_{m+n}	Y_1	Y_2	...	Y_j	...	Y_m
Допоміжні						Вихідні					
Змінні двоїстої задачі (3.2)											

 **Побудуємо двоїсту задачу** за такими правилами.

1. Кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості нерівностей у вихідній.
2. Матриця коефіцієнтів двоїстої задачі є транспонованою до матриці коефіцієнтів вихідної.
3. Система обмежень двоїстої задачі записується у вигляді нерівностей протилежного змісту нерівностям системи обмежень прямої задачі.
4. Стовпець вільних членів вихідної задачі є рядком коефіцієнтів для цільової функції двоїстої. Цільова функція в одній задачі максимізується, в іншій - мінімізується.
5. Умовам невід'ємності змінних вихідної задачі відповідають нерівності-обмеження двоїстої, спрямовані в іншу сторону. І навпаки, нерівностям-обмеженням у вихідній відповідають умови невід'ємності в двоїстої.

Нерівності, пов'язані стрілками (\leftrightarrow), називаються спареними.

Вихідна задача (3.1)		Двоїста задача (3.2)
$x_1 \geq 0$	\leftrightarrow	$9y_1 + 7y_2 + 4y_3 \geq 3$
$x_2 \geq 0$	\leftrightarrow	$5y_1 + 8y_2 + 16y_3 \geq 2$
$3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$	\leftrightarrow	$1431y_1 + 1224y_2 + 1328y_3 \rightarrow \min$
$9x_1 + 5x_2 \leq 1431$	\leftrightarrow	$y_1 \geq 0$
$7x_1 + 8x_2 \leq 1224$	\leftrightarrow	$y_2 \geq 0$
$4x_1 + 16x_2 \leq 1328$	\leftrightarrow	$y_3 \geq 0$

Отже, математична модель двоїстої задачі :

$$Z = 1431y_1 + 1224y_2 + 1328y_3 \rightarrow \min \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} 9y_1 + 7y_2 + 4y_3 \geq 3 \\ 5y_1 + 8y_2 + 16y_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі виписуємо із останньої симплекс-таблиці прямої задачі (табл. 3.2), а саме: $Y^* = (10/37, 3/37, 0)$.

$$Z_{\min} = 1431 * \frac{10}{37} + 1224 * \frac{3}{37} + 1328 * 0 = 486 \text{ грн.}$$

Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних(надлишкових) ресурсів

Підставимо оптимальний план прямої задачі в систему обмежень математичної моделі (3.1):

$$\begin{cases} 9 * 144 + 5 * 27 = 1431 = 1431 \\ 7 * 144 + 8 * 27 = 1224 = 1224 \\ 4 * 144 + 16 * 27 = 1008 \leq 1328 \end{cases}$$

- 1-е обмеження прямої задачі виконується як рівність. Це означає, що 1-ий ресурс повністю використовується в оптимальному плані, є дефіцитним і його оцінка згідно з другою теоремою двоїстості відмінна від нуля ($y_1 \neq 0$).
- 2-е обмеження прямої задачі виконується як рівність. Це означає, що 2-ий ресурс повністю використовується в оптимальному плані, є дефіцитним і його оцінка згідно з другою теоремою двоїстості відмінна від нуля ($y_2 \neq 0$).
- 3-є обмеження виконується як суворі нерівність, тобто ресурс 3-го виду витрачений не повністю. Значить, цей ресурс не є дефіцитним і його оцінка в оптимальному плані ($y_3 = 0$)

Невикористаний економічний резерв 3-го ресурсу становить 320 (1328-1008). Цей резерв не може бути використаний в оптимальному плані, але вказує на можливість змін в об'єкті моделювання (наприклад, резерв ресурсу можна продати або здати в оренду).

Ресурс	Статус ресурсу	Тіньова ціна
1	дефіцитний	0,27
2	дефіцитний	0,08
3	недефіцитний	0

При підстановці оптимальних двоїстих оцінок в систему обмежень двоїстої задачі отримуємо:




$$\begin{cases} 9 * 0,27 + 7 * 0,08 + 4 * 0 = 3 \\ 5 * 0,27 + 8 * 0,08 + 16 * 0 = 2 \end{cases}$$

Висновок: І перше і друге обмеження двоїстої задачі виконуються як рівність. Це означає, що обидва продукти **економічно доцільно** виробляти, а їх випуск передбачено оптимальним планом прямої задачі (3.1), де $x_1 = 144$ шт., $x_2 = 27$ шт., тобто x_1 та $x_2 > 0$).

Контрольні питання

1. Сформулювати першу теорему двоїстості
2. Дати економічну інтерпретацію першої теореми двоїстості
3. Сформулювати другу теорему двоїстості
4. Дати економічну інтерпретацію двоїстим оцінкам
5. Сформулювати третю теорему двоїстості
6. Дати економічну інтерпретацію третьої теореми двоїстості
2. Як визначити рентабельність продукції за двоїстою оцінкою?
7. Як визначається дефіцитність ресурсу за відповідною двоїстою оцінкою?

Варіанти до індивідуального завдання 3 «Оптимізаційна модель міжгалузевого балансу»

- 1)  Вирішити задачу оптимального планування випуску продукції при заданих умовах (табл. 3.4)
- 2)  Оцінити рентабельність продукції, що випускається
- 3)  Провести аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.

Постановка задачі. Для виготовлення двох видів продукції використовуються три види сировини. При виробництві одиниці продукції першого виду витрачається a_1 кг сировини першого виду, a_2 кг сировини другого виду і a_3 кг сировини третього виду. При виробництві одиниці продукції другого виду витрачається b_1 кг сировини першого виду, b_2 кг сировини другого виду і b_3 кг сировини третього виду. Запаси сировини першого виду складають A кг, другого - B кг, третього - B кг. Прибуток від реалізації одиниці продукції першого виду складає P_1 грн., від реалізації одиниці продукції другого виду - P_2 грн.

Таблиця 3.4

Вихідні дані за варіантами індивідуального завдання

№ п/п	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	A	B	B	P_1	P_2
1	14	14	6	5	8	12	350	392	408	10	5
2	16	9	6	4	9	12	400	333	360	9	12
3	12	4	3	3	5	14	284	136	266	6	4
4	14	4	3	4	4	12	252	120	240	30	40
5	15	4	4	2	3	14	285	113	322	15	9
6	16	3	3	2	2	15	304	83	375	10	12
7	13	4	3	2	4	14	260	124	280	12	10
8	8	6	3	5	8	14	1202	1114	1004	6	7
9	6	5	3	3	10	12	714	910	948	3	9
10	15	5	4	4	3	8	225	100	192	6	8
11	2	3	4	5	6	36	80	102	91	5	11
12	10	8	6	4	6	12	196	168	182	18	10

13	3	2	1	6	5	5	102	80	75	3	10
14	4	2	6	10	10	12	166	138	182	6	20
15	3	4	2	4	7	8	182	807	768	3	2
16	3	4	3	5	8	11	453	616	627	2	5
17	3	4	5	6	3	2	102	91	105	7	9
18	5	3	2	2	3	3	505	393	348	7	4
19	5	4	3	3	3	4	750	630	700	5	6
20	6	4	3	2	3	4	600	520	600	6	3
21	4	7	6	3	5	3	552	607	476	3	6
22	5	5	9	7	1	5	446	503	333	10	12
23	8	7	2	9	9	4	252	321	450	13	7
24	6	5	4	7	2	8	267	444	650	7	12
25	4	5	6	7	8	9	765	655	546	4	3
26	3	2	3	5	5	8	620	345	400	2	7

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ № 10, 11

Тема: Моделі взаємодії споживачів і виробників. Моделі встановлення рівноважної ціни

Мета: поглиблення теоретичних знань і набуття практичних навичок моделювання механізмів ринкового саморегулювання шляхом аналізу динаміки зміни ціни, попиту та пропозиції.

Очікувані результати навчання: за результатами виконання практичної роботи здобувачі мають навчитися моделювати моделювання механізмів ринкового саморегулювання шляхом аналізу динаміки зміни ціни, попиту та пропозиції; моделювати взаємодію споживачів і виробників; будувати короткострокову та довгострокову задачі оптимізації виробництва

Короткі теоретичні відомості

Динамічні нерівноважні моделі ринку застосовуються для аналізу змін ціни, попиту та пропозиції у часовому вимірі, особливо в ситуаціях, коли початкова ціна відхиляється від рівноважної. У таких моделях процес встановлення рівноваги може описуватися різними сценаріями - залежно від обраного механізму коригування ціни - навіть за умови використання однакових функцій попиту і пропозиції. Це дозволяє досліджувати реакцію ринку на дисбаланс, оцінити стабільність або нестабільність рівноважного стану, а також прогнозувати можливі траєкторії розвитку ринкової ситуації.

Павутиноподібна модель (модель з дискретним часом)

Це тип динамічної моделі ринку, що описує зміну ціни, попиту та пропозиції у часі, коли рішення виробників і споживачів приймаються з певним часовим лагом. У таких моделях ціна в кожному періоді визначається на основі попередніх значень, що створює характерну «павутиноподібну» траєкторію на графіку.

Крім стандартних позначень функції попиту і пропозиції $D(p)$ і $S(p)$, в цій моделі для позначення значень ціни, обсягу попиту та пропозиції в дискретні моменти часу t будемо використовувати символи $p_t = p(t)$, D_t , S_t відповідно.

Залежно від обраних гіпотез, у дискретній моделі динаміки цін можливі різні варіанти запізнення реакції ринку:

- якщо запізнюється припущення виробників щодо ціни (тобто вони

орієнтуються на ціну попереднього періоду), то формується один тип динамічного процесу: $S(p_{t+1}) = D(p_t)$

- якщо ж *запізнюється реакція споживачів* (тобто попит залежить від ціни попереднього періоду), то виникає інший тип процесу: $D(p_{t+1}) = S(p_t)$.

Кожен із цих підходів призводить до різних моделей поведінки ринку, які можуть бути стабільними або нестабільними залежно від параметрів функцій попиту та пропозиції.

Функції пропозиції і попиту задовольняють звичайних умов монотонності:

$$S'(p) > 0, D'(p) < 0$$

В обох випадках на площині **QOp** відповідно ітераційний процес зображується у вигляді павутини, яка намотується на криві попиту і пропозиції. Це дало підставу для загальної назви дискретних динамічних моделей. Дискретні моделі представляють інтерес тому, що в них більш послідовно, ніж в безперервних, відображаються процедури прийняття рішень.

Павутиноподібна модель із запізненням попиту.

Розглянемо гіпотези, які лежать в основі цієї моделі.

Гіпотеза 1. Товаровиробник, приймаючи рішення про обсяг пропозиції, орієнтується на ціну попереднього періоду.

Гіпотеза 2. Ринок завжди знаходиться в стані локальної рівноваги.

Формально ці дві гіпотези означають наступне:

1. Обсяг своєї пропозиції на ринку S_{t+1} в момент часу $t + 1$ виробник визначає за значенням ціни попереднього періоду p_t , за допомогою функції пропозиції

$$S_{t+1} = S(p_t)$$

3. На ринку в кожен момент часу $t + 1$ встановлюється локально-рівноважна ціна p_{t+1} , причому ця ціна є рішенням рівняння

$$D(p_{t+1}) = S_{t+1}$$

(тобто ціна змінюється з p_t на p_{t+1} , таку, яка забезпечить рівність попиту наявного пропозицією S_{t+1});

3. Споживач пред'являє попит, який при ціні p_{t+1} дорівнює пропозиції S_{t+1} , внаслідок чого споживач набуває все, що йому запропоновано.

Динаміка ціни (а також попиту і пропозиції) в рамках даної моделі може бути зображена у вигляді кривої, яку називають або павутиною, або спіраллю (рис. 4.1).

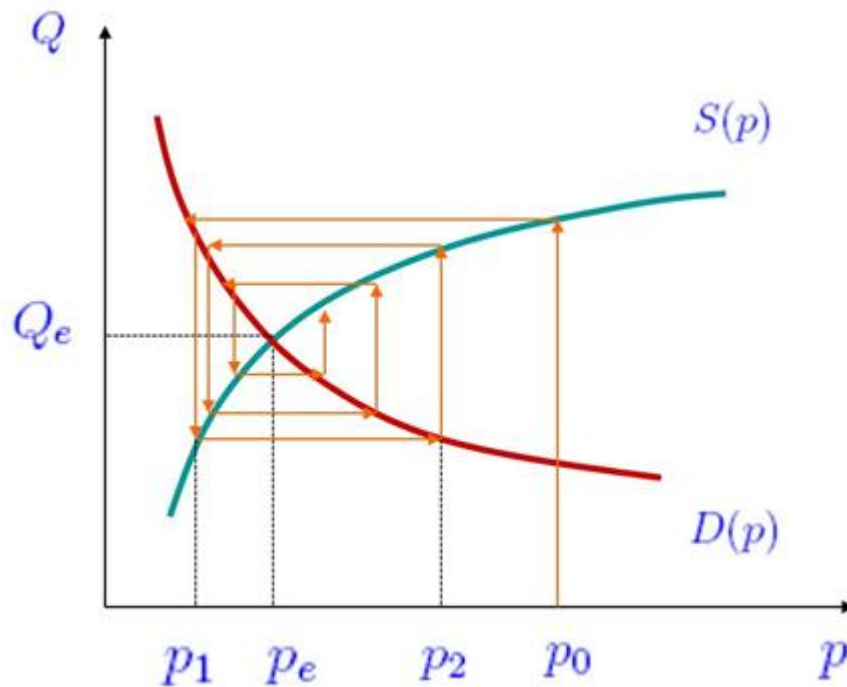


Рис.4.1 - Павутиноподібна модель з запізненням попиту.

Дійсно, в силу правила (1) товаровиробник за значенням ціни p_0 за допомогою кривої пропозиції визначає S_1 ; в силу правила (2) на ринку встановлюється ціна p_1 (знаходиться за допомогою кривої попиту); в силу правила (3) весь товар в кількості S_1 знаходить споживача; в силу гіпотези (1) товаровиробник, орієнтуючись на ціну p_1 , визначає обсяг і пропозиції S_2 і т.д. Далі, розглянутий процес повторюється. Павутина при цьому намотується на точку рівноваги проти годинникової стрілки.

У випадку, зображеному на рис. 4.1 функція попиту - опукла, а функція пропозиції - увігнута, внаслідок чого послідовність цін p_t прагне до рівноважного рівня p_e , і, таким чином, з часом встановлюється рівновага. Якби функція пропозиції теж була опуклою, то описаний процес розходився б, хоча точка рівноваги p_e існує.

Павутиноподібна модель з запізненням пропозиції

Розглянемо гіпотези, які лежать в основі цієї моделі.

Гіпотеза 1. При визначенні обсягу пропозиції в кожен період часу товаровиробник орієнтується на попит в попередній період.

Гіпотеза 2. Ціна пропонованого товару встановлюється товаровиробником на рівні, що визначається відповідно до функцією пропозиції.

Гіпотеза 3. Обсяг споживання товару не може перевищувати ні обсягу пропозиції, ні обсягу попиту.

Підкреслимо, що перша і друга гіпотези визначають модель пропозиції товарів.

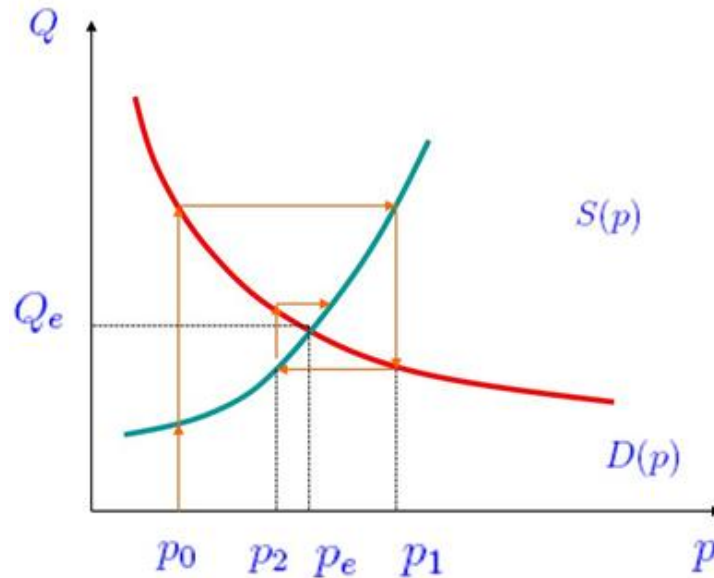


Рис.4.2. - Павутиноподібна модель з запізненням пропозиції

Розглянемо описаний ітераційний процес (див. рис. 4.2). На першому кроці, при ціні p_0 , має місце надлишковий попит, внаслідок чого споживання товару одно його пропозицією. Так як в цьому випадку реалізований товар в обсязі S_0 , що менше рівноважного значення Q_e , то товаровиробник втрачає частину прибутку, оскільки і ціна, як виявилось, занижена, і запропоновано товару менше, ніж могло б бути продано.

Упущена вигода змушує товаровиробника збільшити ціну товару до p_1 і збільшити обсяг його пропозиції. Припускаючи при цьому, що попит не зміниться, він приймає рішення збільшити випуск до обсягу наявного попиту D_0 . Пропозиція при такому обсязі є, як сподівається товаровиробник, оптимальним у разі, коли ціна p_1 задовольняє рівняння $S(p_1) = D_0$. Це означає, що на наступному кроці продавець (він же товаровиробник) встановлює ціни, використовуючи криву пропозиції.

Так як ціна, що збільшилася, p_1 відповідає попиту D_1 , то, в силу $D_1 < S_1$ споживання на цьому кроці все одно D_1 (тепер частина запропонованого товару не знаходить покупця через високу ціну). В результаті такого дисбалансу підприємство знову опиняється в програті, бо недоотримає частину прибутку.

Для поліпшення ситуації на ринку в цьому випадку фірма повинна скоротити пропозицію і знизити ціну. Відповідно до використовуваними тут допущеннями, припущення повинно знизитися до рівня попиту D_1 , а ціна - до рівня p_2 , який визначається з умови $S(p_2) = D_1$. Далі процес повторюється.

Відзначимо, що в моделі із запізненням пропозиції, на відміну від моделі з запізненням попиту, павутина намотується вже за годинниковою стрілкою. Таким

чином, зміна гіпотез про поведінку споживача і товаровиробника призвела до зміни напрямку руху за спіраллю на протилежне. (Зверніть увагу на вид функції пропозиції, що забезпечує збіжність процесу і його відмінність від моделі з запізненням попиту).

Завдання: Для відповіді на питання про те, коли в даній моделі ітераційний процес призводить до рівноваги, розглянути випадок лінійних функції попиту і пропозиції:

$$\begin{aligned} D(p) &= a - bp, & a > 0, & & b > 0; \\ S(p) &= \alpha - \beta p, & \alpha > 0, & & \beta > 0. \end{aligned}$$

Вважаємо, що $a > \alpha$ (при нульовій ціні попит перевищує пропозицію). Розглянути ітераційний процес при $b > \beta, b < \beta < b = \beta$. Зробити висновки.

Досить повне уявлення того, як відбувається «намацування» стану рівноваги на ринку товарів, надає павутиноподібна модель. Її побудова заснована на припущенні, що попит і пропозиція є функціями від ціни.

Введемо позначення:

Q_t^D — попит на момент часу t ;

Q_t^S — пропозиція на момент часу t ;

p_t — ціна товару на момент часу t .

В моделі із запізненням пропозиції попит на цей момент часу залежить від ціни в цей же момент часу:

$$Q_t^D = a + bp_t, \tag{4.1}$$

а пропозиція - від ціни в попередній момент часу:

$$Q_t^S = \alpha + \beta p_{t-1}, \tag{4.2}$$

тобто є запізнювання в реакції виробництва на зміну ціни.

Оскільки зі збільшенням ціни попит звичайно зменшується, а пропозиція збільшується, то $b < 0, \beta > 0$.

Рівність у кожний момент часу попиту та пропозиції'

$$Q_t^D = Q_t^S, \tag{4.3}$$

завершує опис павутино подібної моделі.

Зі співвідношення (4.3) легко отримати модель для ціни у вигляді різницевого рівняння першого порядку:

$$p_t = \frac{\beta}{b} * p_{t-1} + \frac{\alpha - a}{b} \quad (4.4)$$

Значення ціни, за якої устанавлюється рівність попиту та пропозиції, і яка не призводить до подальших її змін, позначимо через p^* . Це саме та ціна, для якої у стані рівноваги попиту та пропозиції, слухне співвідношення:

$$p_t^* = \frac{\beta}{b} * p_t^* + \frac{\alpha - a}{b}, \quad (4.5)$$

звідки одержуємо її значення:

$$p_t^* = \frac{\gamma}{1 - \beta/b}, \quad (4.6)$$

де: $\gamma = \frac{\alpha - a}{b}$.

Дослідження процесу, який представляється даною моделлю, на збіжність надає підставу стверджувати:


- якщо $r = \left| \frac{\beta}{b} \right| < 1$, то при $t \rightarrow \infty, p_t \rightarrow p^*$;
- якщо $r = 1$, то при $t \rightarrow \infty, p_t$ коливається близько рівноважного значення;
- якщо $r > 1$, то при $t \rightarrow \infty$ ціна буде відхилятися на все більшу величину від її рівноважного значення.

Графічно процес «намацування» рівноважних цін добре проілюстрований на рис. 4.1. та 4.2

Порядок виконання роботи

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал
2. Ознайомитися з вихідними даними та розрахувати траєкторії зміни ціни, попиту та пропозиції.
3. Побудувати графіки для кожного з трьох сценаріїв:
 - рух ціни до рівноважного стану;
 - коливання ціни навколо рівноважного значення;
 - відхилення ціни від рівноваги з тенденцією до зростання амплітуди.
- 4 Проаналізувати отримані результати та зробити висновки.

Приклад виконання завдання


 За даними таблиці розрахувати траєкторії зміни ціни, попиту та пропозиції й побудувати графіки руху ціни:

- 1) до рівноважного стану,
- 2) коливання близько рівноважного значення,
- 3) коли вона буде відхилятися на все більшу величину від її рівноважного значення.


Для виконання завдання можна застосовувати будь-які застосунки й інструменти. При першому наближенні, найпростішим інструментом для побудови дискретних динамічних моделей типу павутиноподібної може слугувати Microsoft Excel, що має високу сумісність, різноманітні засоби моделювання та програмування, а також не потребує якихось додаткових умов чи обмежень.

Уведемо вихідні дані на робочий аркуш Excel

№ п/п.	Ціна	Попит	Пропозиція
1	7,50	23.25	10.13
2	15,38	19.32	12.87
3	19.25	17.39	14.24
4	21.12	16.44	14.90
5	24.21	14.90	15.98
6	25.53	14.24	16.44
7	28.25	12.89	17.39
8	33.75	10.13	19.32

 Оцінимо параметри регресійної залежності попиту від ціни за допомогою пакета Аналіз даних або за допомогою вбудованої функції лінійної регресії. Результати розрахунків будуть наступні:

$$Q_t^D = 27 - 0,5p_t. \quad (4.7)$$

 Оцінимо параметри регресійної залежності пропозиції від ціни. Результати розрахунків:

$$Q_t^S = 7,5 + 0,35p_{t-1} \quad (4.8)$$

 Напишемо умову рівноваги попиту та пропозиції:

$$27 - 0,5p_t = 7,5 + 0,35p_{t-1} \quad (4.9)$$

або ж у зручному вигляді для реалізації ітерацій:

$$p_t = \frac{0,35}{-0,5} * p_{t-1} + \frac{27 - 7,5}{0,5}. \quad (4.10)$$

 Розрахуємо траєкторії зміни ціни, попиту та пропозиції:


- а) на вільне поле робочої сторінки Excel (наприклад, у комірку A8 і A9) двічі введемо значення первинної ціни, що дорівнює 7,5;
- б) у комірку A10 введемо формулу (4.10), а у комірку A11 введемо «= A10» (тобто лише повернемо значення комірки A10) і скопіюємо тепер A10-A11 в блок A12...A27;
- в) у комірку B8 введемо формулу (4.7) і скопіюємо її в блок B9...B27;
- г) у комірку C9 введемо формулу (4.8) і скопіюємо її в блок C10...C27;
- д) у комірки D8 і D9 введемо відповідно формули (4.7) і (4.8) і останню з них скопіюємо в блок D10...D31.

У результаті цих дій отримаємо таблицю розрахункових значень точок траєкторії (табл. 4.1)

За даними, що описують траєкторію ціни, попиту та пропозиції, побудуємо графік типу XY, призначивши X кроки ітерацій, Y1 — блок A8...A27, Y2 — блок D8...D27 (рис. 4.3).

Щоб побудувати павутиноподібну траєкторію руху ціни до рівноважного положення побудуємо графік типу XY, призначивши X блок A8...A27, Y1 — блок A8...A27, Y2 — блок C11...C27 (увага! — зміщення комірки), Y3 — блок D8...D27 (рис. 4.4).

Можливі 3 випадки:

- I.  коли $|b| > |\beta|$, то коливання будуть поступово затухати, а ринкова рівновага відновлюватися

Таблиця розрахункових значень точок траєкторії

	A	B	C	D
2				
3	a,b	27	-0,5	D
4	α, β	7,5	0,35	S
5				
6				
7	Ціна	Траєкторія попиту	Траєкторія пропозиції	Траєкторія руху до рівноважної ціни
8	7,500	23,250		23,250
9	7,500	23,250	10,125	10,125
10	33,750	10,125	10,125	10,125
11	33,750	10,125	19,313	19,313
12	15,375	19,313	19,313	19,313
13	15,375	19,313	12,881	12,881
14	28,238	12,881	12,881	12,881
15	28,238	12,881	17,383	17,383
16	19,234	17,383	17,383	17,383
17	19,234	17,383	14,232	14,232
18	25,536	14,232	14,232	14,232
19	25,536	14,232	16,438	16,438
20	21,125	16,438	16,438	16,438
21	21,125	16,438	14,894	14,894
22	24,213	14,894	14,894	14,894
23	24,213	14,894	15,974	15,974
24	22,051	15,974	15,974	15,974
25	22,051	15,974	15,218	15,218
26	23,564	15,218	15,218	15,218
27	23,564	15,218	15,747	15,747
28	22,505	15,747	15,747	15,747
29	22,505	15,747	15,377	15,377
30	23,246	15,377	15,377	15,377
31	23,246	15,377	15,636	15,636

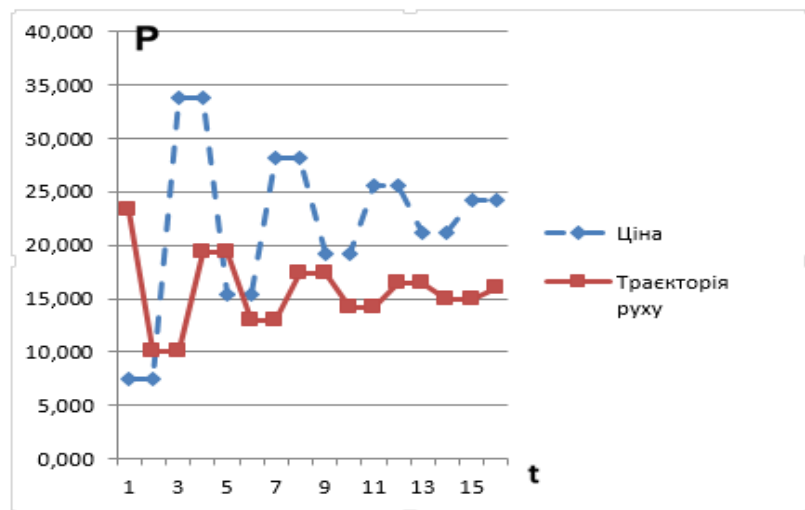


Рисунок 4.3. - Траєкторія руху ціни до рівноважного положення

Тобто коли $|b| > |\beta|$, то коливання будуть поступово затухати, а ринкова рівновага відновиться

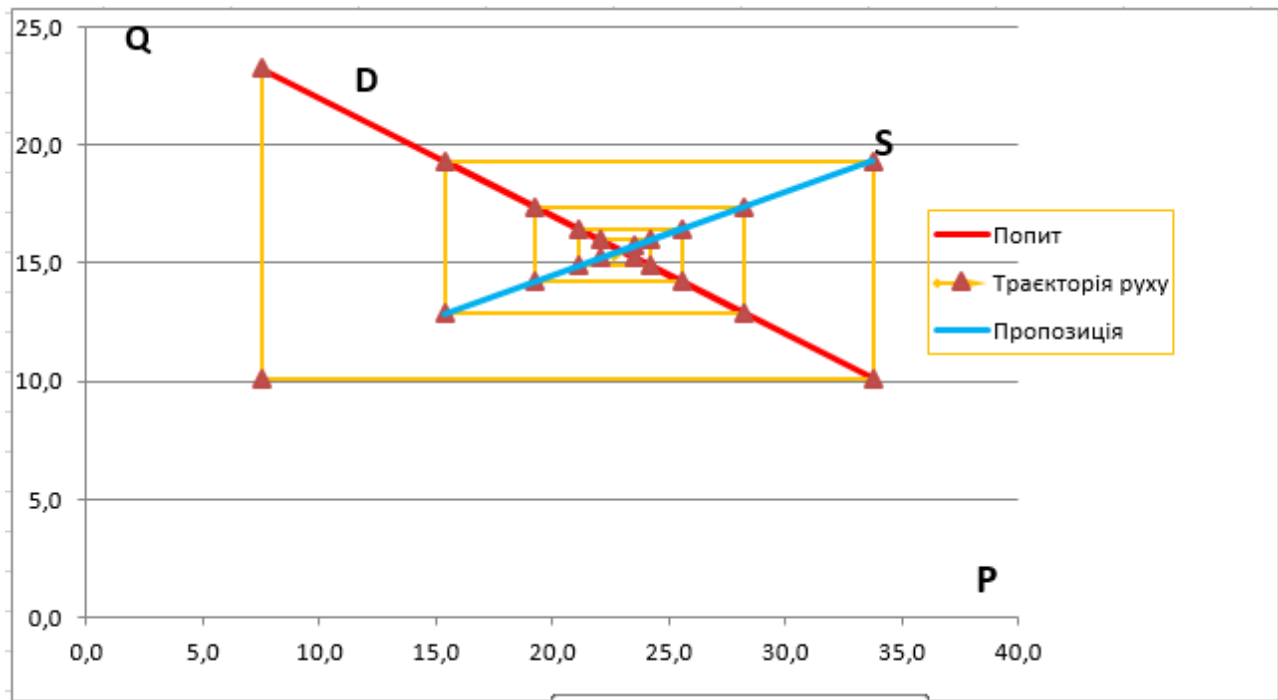



Рисунок 4.4. - Павутиноподібна траєкторія руху ціни до рівноважного положення

II.  коли $|b| = |\beta|$, то будь-яке початкове відхилення від рівноваги приведе до коливань цін і обсягів однакової амплітуди

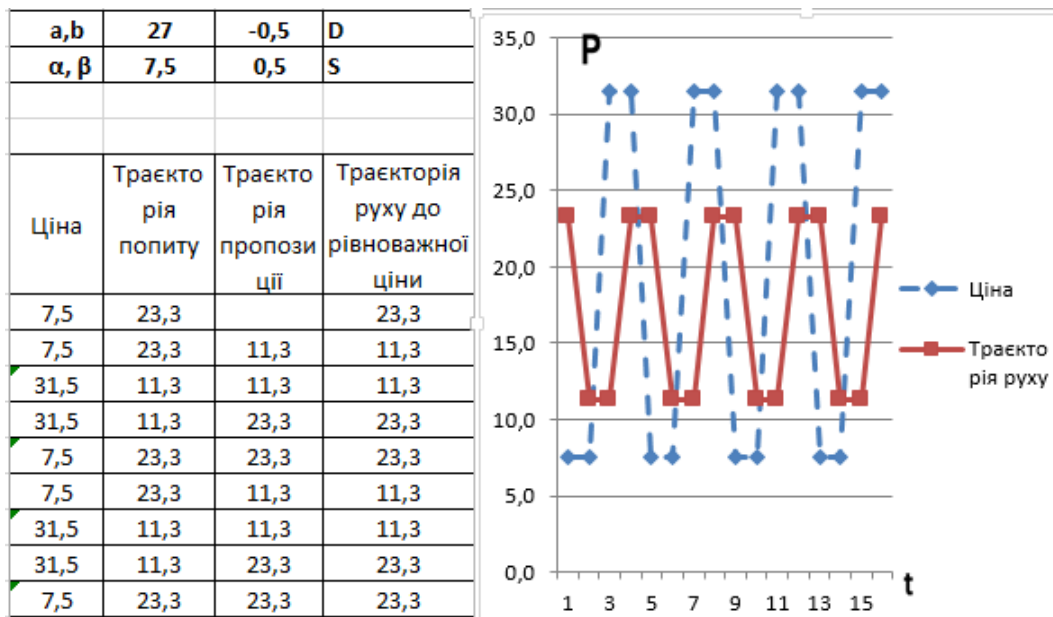


Рисунок 4.5. - Значення і графіки коливання ціни близько рівноважного

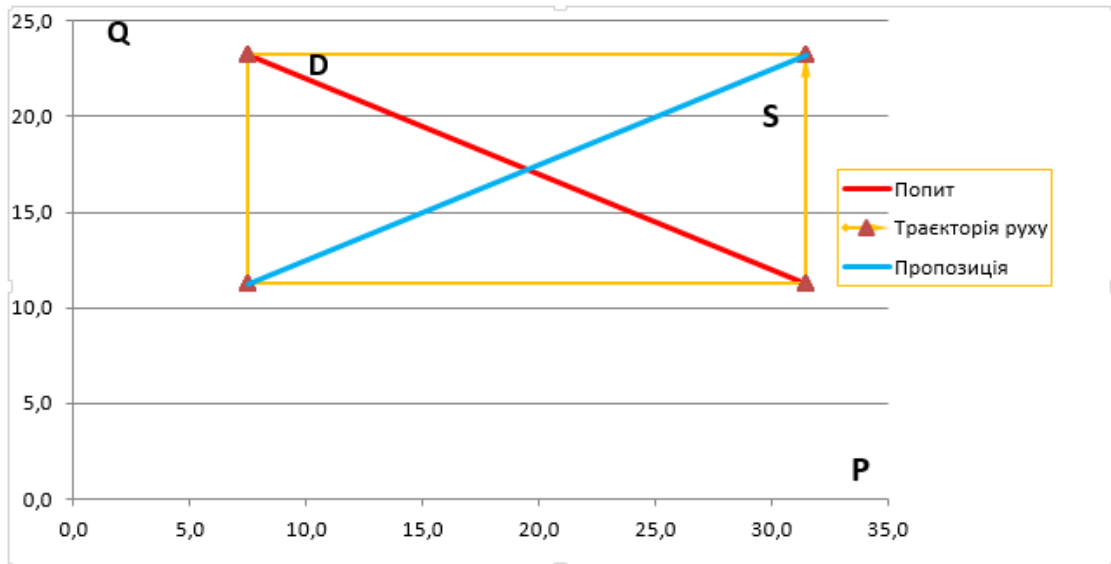


Рисунок 4.6. - Павутиноподібна траєкторія за регулярних коливань ціни на ринку з постійною амплітудою

III. 🔍 коли $|b| < |\beta|$, то будь-яке відхилення від рівноваги буде вести до збільшення коливань ціни і обсягів, все більше віддаляючи початкове положення від точки рівноваги

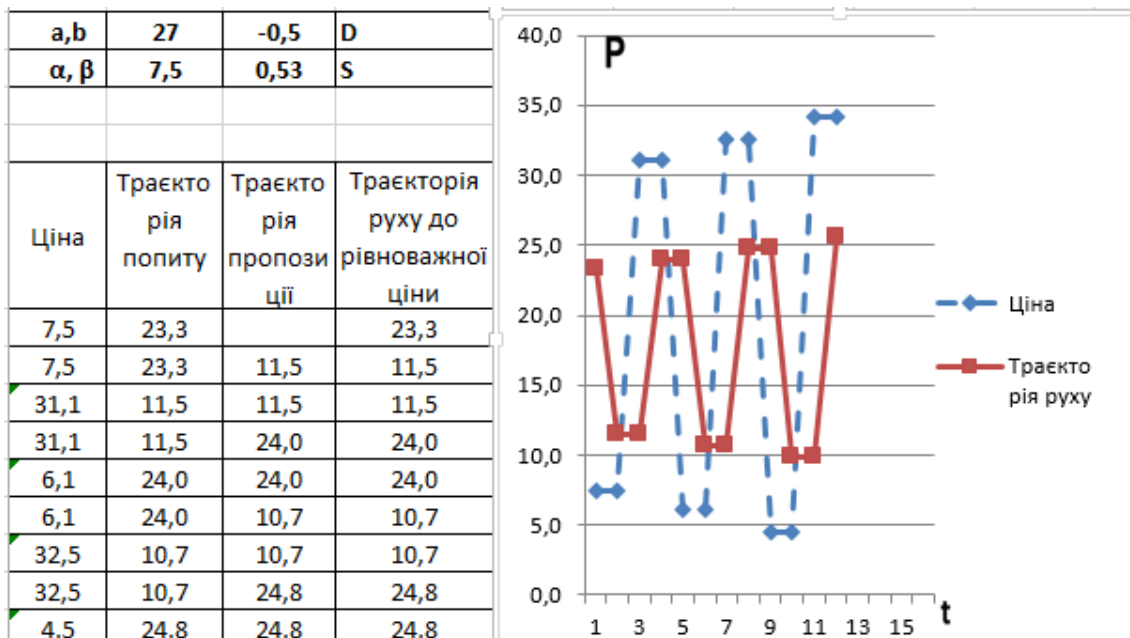


Рисунок 4.7. - Значення і графіки ціни, що відхиляється на все більшу величину від її рівноважного значення

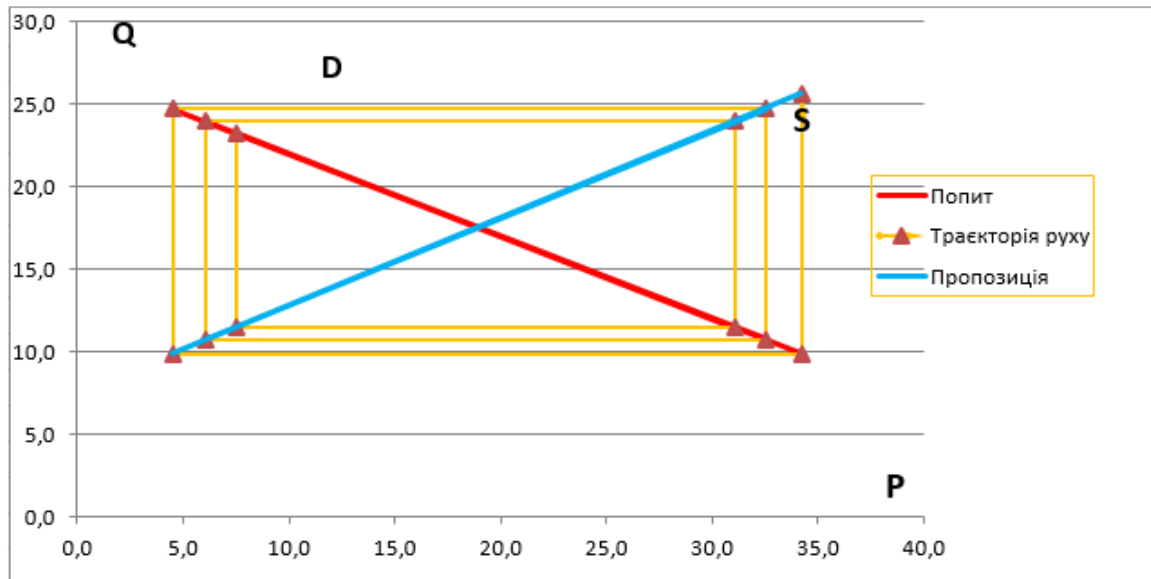



Рисунок 4.8. - Павутиноподібна траєкторія коливання ціни, коли ціна буде відхилятися на все більшу величину від її рівноважного значення.




Висновок: Павутиноподібна модель встановлення рівноважної ціни може в достатній мірі використовуватись лише до конкретної продукції, так як не враховує ряд важливих факторів (кліматичні умови, зміни попиту споживачів). Але вона показує залежність функціонування ринку від часу реакції в сфері пропозиції і форми кривих попиту і пропозиції. Досягнення стійкої рівноваги не означає зупинки в розвитку виробництва, тому стійкість ринкової рівноваги носить відносний характер.

Контрольні питання

1. Що таке рівноважна ціна?
2. Які фактори впливають на стабільність рівноваги?
3. У чому полягає різниця між стабільною та нестабільною рівновагою?

Варіанти до індивідуального завдання 4 «Моделі взаємодії споживачів і виробників. Моделі встановлення рівноважної ціни»

 За даними таблиці розрахувати траєкторії зміни ціни, попиту та пропозиції й побудувати графіки руху ціни:

-  до рівноважного стану;
-  коливання близько рівноважного значення;
-  коли вона буде відхилятися на все більшу величину від її рівноважного значення.

Вихідні дані

Варіант 1			Варіант 2			Варіант 3		
Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція
18	146	54	23	85	69	10	160	30
19	124	57	24	80	48	11	145	33
20	100	60	25	75	75	12	164	36
21	74	63	26	70	52	13	161	39
22	90	66	27	38	108	14	130	28
23	62	69	28	32	56	15	155	60
24	104	96	29	84	87	16	120	64
25	100	75	30	110	90	17	98	34

Варіант 4			Варіант 5			Варіант 6		
Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція
22	134	88	15	155	45	15	155	45
23	62	69	16	152	64	16	120	64
24	80	72	17	115	51	17	149	68
25	75	50	18	146	54	18	128	36
26	70	104	19	86	38	19	105	57
27	119	81	20	100	80	20	140	80
28	60	112	21	137	63	21	137	63
29	55	58	22	90	66	22	90	88

Варіант 7			Варіант 8			Варіант 9		
Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція
20	100	60	16	152	32	15	110	60
21	74	63	17	115	34	16	120	32
22	90	66	18	128	54	17	132	34
23	62	46	19	124	76	18	128	36
24	80	72	20	120	60	19	105	57
25	50	75	21	116	84	20	120	60
26	44	104	22	134	66	21	137	84
27	65	81	23	85	69	22	134	44

Варіант 10			Варіант 11			Варіант 12		
Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція
30	80	60	10	140	20	18	128	54
31	45	62	11	145	44	19	86	57
32	72	64	12	128	36	20	100	80
33	101	66	13	148	52	21	74	42
34	64	102	14	144	56	22	90	66
35	60	70	15	110	60	23	62	92

36	0	144	16	152	48	24	56	96
37	0	74	17	132	68	25	75	50

Варіант 13			Варіант 14			Варіант 15		
Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція
23	108	46	25	50	75	18	110	72
24	56	96	26	70	78	19	143	76
25	50	75	27	92	81	20	140	60
26	70	78	28	116	112	21	116	84
27	38	81	29	55	87	22	112	66
28	32	112	30	50	120	23	108	46
29	26	116	31	14	93	24	128	72
30	50	60	32	8	96	25	50	75

Варіант 16			Варіант 17			Варіант 18		
Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція
27	92	108	22	90	66	13	122	52
28	88	112	23	62	46	14	158	42
29	26	116	24	128	72	15	125	45
30	80	60	25	75	50	16	152	64
31	107	62	26	44	104	17	115	68
32	72	64	27	119	54	18	92	36
33	101	99	28	32	56	19	124	76
34	98	136	29	113	116	20	140	60

Варіант 19			Варіант 20			Варіант 21		
Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція
25	75	100	25	125	100	16	136	48
26	122	52	26	44	104	17	98	51
27	119	54	27	38	108	18	128	72
28	32	112	28	116	56	19	124	38
29	26	87	29	84	87	20	120	60
30	50	90	30	110	90	21	137	84
31	14	93	31	76	124	22	112	66
32	72	128	32	40	64	23	131	46

Варіант 22			Варіант 23			Варіант 24		
Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція	Ціна	Попит	Пропозиція
18	146	36	13	135	39	10	170	30
19	143	76	14	116	42	11	167	33
20	100	60	15	125	45	12	164	36
21	116	42	16	136	48	13	148	39

22	90	88	17	149	51	14	130	42
23	108	46	18	92	36	15	155	30
24	80	96	19	86	57	16	120	64
25	100	100	20	120	80	17	132	51

. Вимоги до оформлення

- Графіки повинні бути підписані та мати легенду.
- Розрахунки подаються у вигляді таблиць або формул.
- Висновки формулюються чітко, з урахуванням економічного змісту.

ЗАХИСТ І КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Виконане і оформлене відповідно до вищезазначених вимог індивідуальне завдання здобувач повинен подати викладачу з практики у встановлений термін для визначення попередньої оцінки. Рівень підготовки завдання свідчить про ступінь засвоєння здобувачами здобутих знань.

Після ознайомлення викладача із роботою, визначення попередньої оцінки та формування зауважень, робота повертається здобувачеві, який мусить доопрацювати її відповідно до зауважень.

Після доопрацювання здобувач подає остаточний її варіант для реєстрації у журналі групи.

Захист кожного індивідуального завдання відбувається за графіком, складеним викладачем відповідно до робочої програми дисципліни. Виконане індивідуальне завдання здобувач захищає публічно. Здобувач готує коротку доповідь (на 5 – 10 хв.), яка повинна відображати основні положення роботи. Особливу увагу слід приділити висвітленню власного внеску в розробку проблеми. Після доповіді здобувач відповідає на запитання викладача. При цьому можна користуватись роботою, тезами доповіді та ілюстративними матеріалами (матеріалами презентації).

Основні критерії оцінювання:

- повнота розкриття теми (до 20 балів);
- коректність отриманих результатів (до 20 балів);
- логічність та обґрунтованість висновків (до 15 балів);
- рівень висвітлення в доповіді суті роботи (до 10 балів);
- правильність та повнота відповідей на поставлені питання (до 15 балів);
- відповідність оформлення роботи встановленим нормам та вимогам (до 10 балів);
- своєчасність захисту виконаного завдання (10 балів).

Результати виконаного індивідуального завдання подаються здобувачем у вигляді пояснювальної записки (вимоги до її оформлення наведено для кожного завдання окремо). Крім роздрукованого звіту здобувачі здають викладачеві електронний документ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пошук рішень Excel [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://allref.com.ua/uk/skachaty/Poshuk_rishen-_%28Poisk_resheniuy%29_Excel
2. Коряшкіна Л.С., Ус С.А. Практикум за курсом «Методи оптимізації та дослідження операцій». Частина І. Дослідження операцій: навч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2020. 182 с.
3. Капустян В. О., Мажара Г. А., Фартушний І. Д. Моделювання економіки [Електронний ресурс] : підручник для студентів спеціальності 051 Економіка. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 265 с.
4. Григорків В.С. Моделювання економіки: підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. 360 с.
5. Лось В.О. Моделі економічної динаміки: навч. посіб. Запоріжжя : ЗНУ, 2020. 78 с.
6. Ніколіна І.І. Моделі економічної динаміки: конспект лекцій. Вінниця : ВНАУ, 2019. 81 с.
7. Здрок В.В., Лагоцький Т.Я., Паславська І.М. Моделювання економічної динаміки : практикум. Львів : Магнолія, 2018. 252 с.
8. Волонтир Л.О., Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., Чіков І.А. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: навч. посіб. Вінниця : ВНАУ, 2020. 334 с.
9. Одновол М.М., Коряшкіна Л.С., Гаранжа Д.М. Методи оптимізації та дослідження операцій. Методичні рекомендації до виконання курсової роботи з дисципліни для студентів спеціальності 124 Системний аналіз. Дніпро : НТУ «ДП», 2023. 68 с.
10. Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Основи математичної економіки. Київ : Інформтехніка, 2015. 320 с.
11. Товкач Р. В. Математична економіка. Луцьк : СНУ ім. Лесі Українки, 2018. 146 с.
12. Гамалій В. Ф., Сотніков В. С., Вишневська В. А. та ін. Математичні моделі у маркетингу та менеджменті. Кропивницький : ЦНТУ, 2017. 136 с.
13. Економіко-математичне моделювання / за ред. О. Т. Івашука. Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.

14. Мазник Л. В., Березянко Т. В., Безпалько О. В. та ін. Економіко-математичні методи і моделі в галузі управління персоналом. Київ : Кафедра, 2019. 290 с.

15. Малярець М. М. Економіко-математичні методи та моделі. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. 412 с.

16. Соколовська З. М., Андрієнко В. М., Івченко І. Ю. Математичне та комп'ютерне моделювання економічних процесів. Одеса : Астропринт, 2016. 308 с.

17. Моклячук М. П., Ямненко Р. Є. Теорія вибору та прийняття рішень. Київ : ВПЦ Київський університет, 2020. 527 с.

Навчальне видання

Коряшкіна Лариса Сергіївна
Козир Світлана Василівна
Одновол Микола Миколайович

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Методичні рекомендації до практичних занять
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 124 Системний аналіз
(F4 Системний аналіз та наука про дані)

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання 12.06.2025. Авт. арк. 4,6.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка».
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.