

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
Кафедра системного аналізу та управління

**СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ**

**Методичні рекомендації до виконання практичних робіт**  
для здобувачів ступеня бакалавра  
освітньо-професійної програми «Системний аналіз»  
зі спеціальності 124 Системний аналіз

Дніпро  
НТУ «ДП»  
2025

**Системи та методи прогнозування** [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до виконання практичних робіт для здобувачів ступеня бакалавра освітньо-професійної програми «Системний аналіз» зі спеціальності 124 Системний аналіз / уклад.: Т.В. Хом'як, О.Б. Владико, К.С. Хабарлак, Д.М. Гаранжа ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 56 с.

Укладачі:

Т.В. Хом'як, канд. фіз.-мат. наук, доц.;

О.Б. Владико, канд. техн. наук, доц.;

К.С. Хабарлак, PhD;

Д.М. Гаранжа.

Затверджено до видання науково-методичною комісією зі спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані (протокол № 7 від 28.10.2025) за поданням кафедри системного аналізу та управління (протокол № 13 від 28.10.2025).

Містить теоретичні відомості, приклади вирішення задач, завдання до практичних робіт з критеріями їх оцінювання, список рекомендованих джерел.

Орієнтовано на активізацію навчальної діяльності здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 124 Системний аналіз та закріплення практичних навичок у засвоєнні дисципліни «Системи та методи прогнозування».

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу та управління Т.А. Желдак, канд. техн. наук, доц.

## ЗМІСТ

ВСТУП	4
<b>Практична робота № 1</b> Визначення основних характеристик часового ряду. Перевірка стаціонарності часових рядів. Перевірка часового ряду на випадковість за допомогою методу поворотних значень	5
<b>Практична робота № 2</b> Прогнозування методом рухомого (ковзного) середнього і методом зваженого (ковзного) середнього. Розрахунок абсолютних показників точності прогнозу і коефіцієнту розбіжності прогнозу	12
<b>Практична робота № 3</b> Використання методів згладжування часових рядів	18
<b>Практична робота № 4</b> Застосування методів прогнозування часових рядів на основі тренду	23
<b>Практична робота № 5</b> Методи аналізу сезонних коливань	27
<b>Практична робота № 6</b> Прогнозування часових рядів за допомогою моделей авторегресії	35
<b>Практична робота № 7</b> Методи прогнозування багатомірних процесів	43
<b>Практична робота № 8</b> Методи експертних оцінок	47
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	54
Додаток А Приклад оформлення титульної сторінки	55

## ВСТУП

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт з курсу «Системи та методи прогнозування» призначені для здобувачів спеціальності 124 Системний аналіз, що навчаються за програмою бакалаврату денної та заочної форм.

До виконання практичних завдань здобувач зобов'язаний прочитати методичні рекомендації, прослухати лекцію і виконати самостійно завдання. Під час практичного заняття з дисципліни здобувач показує викладачеві результати роботи. Коли робота виконана, здобувач повинен її захистити. Захист полягає у відповіді на питання за темою практичної роботи.

За кожною роботою здобувач повинен зробити звіт. Звіти оформляються за допомогою текстового редактора відповідно до вимог стандартів по оформленню технічної документації.

**Мета дисципліни** – формування у здобувачів вищої освіти компетентностей щодо моделей та алгоритмів прогнозування, методів прогнозування одновимірних та багатовимірних процесів.

Під час вивчення дисципліни здобувачі набувають таких дисциплінарних результатів навчання:

- розуміти суть прогнозування, застосовувати базові знання суміжних дисциплін для класифікації прогнозів;
- отримувати основні характеристики часових рядів, здійснювати перевірку стаціонарності і випадковості часових рядів;
- оцінювати точність та якість прогнозів;
- застосовувати метод рухомого (ковзного) середнього та метод зваженого (ковзного) середнього;
- застосовувати методи згладжування часових рядів для прогнозування природних, економічних і соціальних об'єктів та процесів;
- отримувати прогнозні значення на основі тренду;
- застосовувати методи аналізу сезонних коливань;
- отримувати прогноз за допомогою моделей авторегресії;
- здійснювати прогнозування багатовимірних процесів;
- використовувати основні математичні методи й алгоритми обробки експертних оцінок.

Дане видання має допомогти здобувачам у виконанні практичних робіт з дисципліни. Практичні навички, отримані при вивченні даної дисципліни, можуть бути використані для передбачення майбутніх викликів і виявлення залежностей, а також визначення адекватності зробленого прогнозу.

## Практична робота № 1

### Визначення основних характеристик часового ряду. Перевірка стаціонарності часових рядів. Перевірка часового ряду на випадковість за допомогою методу поворотних значень.

**Мета:** закріпити теоретичні знання і розвинути практичні навички з визначення характеристик часових рядів та алгоритмів аналізу на випадковість та стаціонарність.

### Теоретичні відомості

**Часовим рядом (time series)** будемо називати послідовність спостережень, отриманих у рівновіддалені моменти часу. Приклади часових рядів (ЧР): динаміка темпів інфляції, курсів акцій, темпів зростання ВВП, курс валют (рис. 1.1).

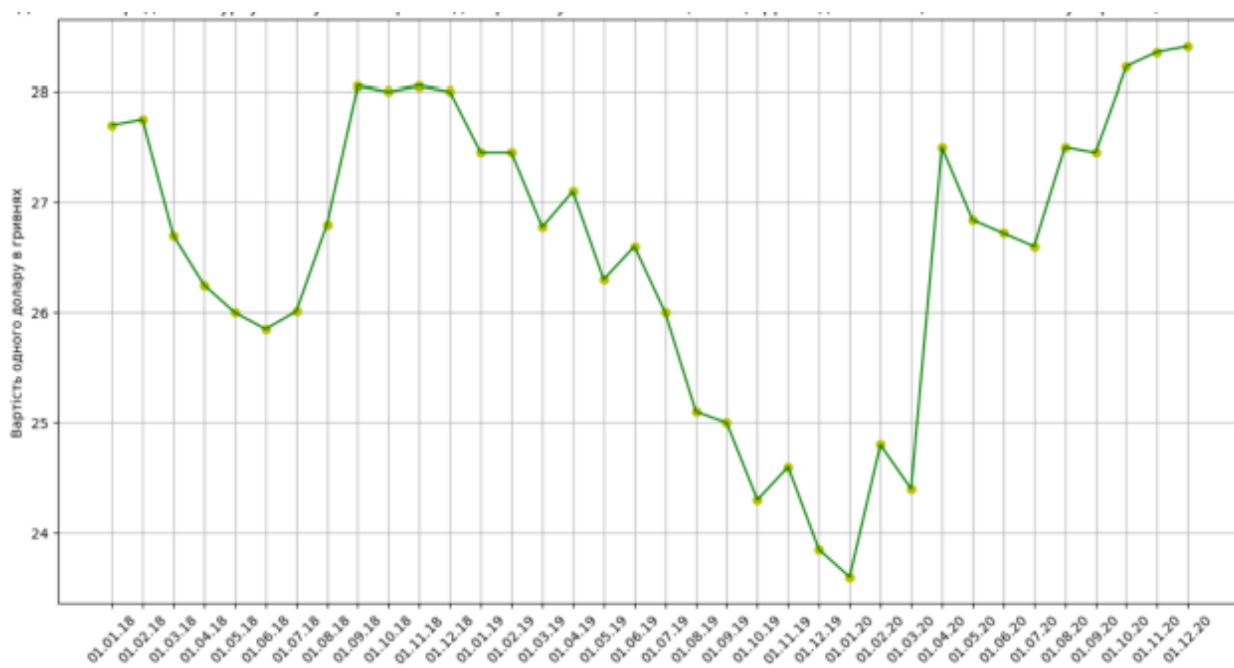


Рисунок 1.1 – Динаміка середнього курсу гривня-долар щомісяця у 2018-2020 рр. за даними НБУ України.

Залежно від характеру часового параметра розрізняють моментні та інтервальні часові ряди. У моментних рядах рівні характеризують значення показника станом на певний момент часу. Їм відповідають змінні типу запасу. Зокрема, моментними є ряди цін на різноманітні товари станом на певні моменти часу, курсів валют, кількості населення, маси об'єкта, електричної напруги у мережі, температури хворого тощо. В інтервальних рядах рівні характеризують значення показника за певні періоди (інтервали) часу. Їм відповідають змінні типу потоку. Прикладами є ряди динаміки виробництва продукції (річного, квартального, місячного, добового), міграції населення, прибутку підприємства, валового національного доходу, розсіюваної потужності, витрат реагентів у хімічному реакторі тощо.

Кожен рівень часового ряду формується під впливом великої кількості факторів, які умовно можна поділити на 3 групи:

- 1) фактори, що формують тенденцію ряду;
- 2) фактори, що формують циклічні коливання ряду;
- 3) випадкові фактори.

При різних сполученнях цих факторів залежність рівнів ряду від часу може приймати різні форми.

По-перше, більшість часових рядів економічних показників мають тенденцію, що характеризує сукупну довгочасну дію множини факторів на динаміку показника, що вивчається. Швидше за все, ці фактори, взяті окремо, можуть спричиняти різноспрямовану дію на показник, що досліджується. Однак у сукупності вони формують його зростаючу та спадну тенденцію.

По-друге, для показника, що вивчається, можуть бути характерні циклічні коливання. Ці коливання можуть носити сезонний характер, наприклад, економічна діяльність ряду галузей залежить від часу року (ціни на сільськогосподарську продукцію, ціни на відпочинок на курорті). При наявності великих масивів даних за тривалі проміжки часу можна виявити циклічні коливання, пов'язані із загальною динамікою кон'юнктури ринку, а також з фазою бізнес-циклу, в якій знаходиться економіка країни.

Деякі часові ряди не містять тенденції та циклічну компоненту, а кожен наступний їх рівень утворюється як сума середнього рівня ряду і деякої (додатної або від'ємної) випадкової компоненти.

Очевидно, що реальні дані не відповідають повністю жодній з описаних вище моделей. Частіше за все, вони містять усі три компоненти. Кожен їх рівень формується під впливом тенденції, сезонних коливань і випадкової компоненти.

У більшості випадків фактичний рівень часового ряду можна представити як суму або добуток трендової, циклічної та випадкової компонент.

Модель, у якій ЧР представлений як сума перерахованих компонент, називається адитивною моделлю часового ряду:

$$y_t = u_t + s_t + v_t + e_t,$$

де  $y_t$  - рівні часового ряду;  
 $u_t$  - часовий тренд;  
 $s_t$  - сезонний компонент;  
 $v_t$  - циклічна складова;  
 $e_t$  - випадкова складова.

Модель, в якій часовий ряд представлений як добуток перерахованих компонент, називається мультиплікативною моделлю:

$$y_t = u_t s_t v_t e_t.$$

Існує також мішана модель часового ряду:

$$y_t = u_t s_t v_t + e_t.$$

Основна задача дослідження окремого ЧР – виявлення і надання кількісного вираження кожній з перерахованих вище компонент, з тим, щоб використовувати

отриману інформацію для прогнозування майбутніх значень ряду або при побудові моделей взаємозв'язку двох або більше часових рядів.

### Метод поворотних значень (критерій піків)

Для часового ряду значення  $y_i$  є поворотним, якщо  $y_{i-1} < y_i > y_{i+1}$  або  $y_{i-1} > y_i < y_{i+1}$ . У першому випадку значення  $y_i$  є «піком», у другому — «впадиною». Зауважимо, що перше й останнє значення не можуть бути поворотними.

Метод поворотних значень зводиться до підрахунку кількості впадин і піків у часовому ряді і порівнянні цієї кількості з теоретичним значенням, яке дорівнює математичному сподіванню кількості поворотних точок у «чисто випадковому» ряду, що складається з  $T$  спостережень.

Позначимо загальне число поворотних точок через  $p$ . Математичне очікування числа точок повороту  $\bar{p}$  і дисперсія  $\sigma_p^2$  виражаються формулами:

$$\bar{p} = \frac{2}{3}(T - 2), \quad \sigma_p^2 = \frac{16T - 29}{90}.$$

Критерієм випадковості з 5% -ним рівнем значущості, тобто з довірчою ймовірністю 95%, є виконання нерівності

$$p > \left[ \bar{p} - 1,96 \sqrt{\sigma_p^2} \right],$$

де квадратні дужки означають цілу частину числа.

### Метод Ірвіна для виявлення аномальних рівнів часових рядів

Поява аномальних значень може бути спричинена:

1) технічними похибками при зборі, обробці, передачі інформації – помилки першого роду;

2) аномальні значення можуть бути властивими реальним процесам (наприклад, падіння курсів валют) – це помилки другого роду, що не можна видалити.

Нехай маємо часовий ряд:  $\tilde{y}_t = y_1, y_2, \dots, y_n$ ,

Основна формула методу Ірвіна:

$$\lambda_t = |y_t - y_{t-1}| / \sigma_y, \quad t = \overline{1, n}$$

де  $\sigma_y$  - середнє квадратичне відхилення часового ряду

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2 / (n-1)}$$

Розрахункові значення  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  порівнюються з табличними значеннями критерію Ірвіна  $\lambda_\alpha$ . Якщо одне з них є більшим за табличне, то відповідне значення  $y_i$  рівня ряду вважається аномальним.

Значення критерію Ірвіна при рівні значимості  $\alpha = 0,05$  наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Значення критерію Ірвіна при рівні значимості  $\alpha = 0,05$

n	2	3	10	20	30	50	100
$\lambda_\alpha$	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

Після того, як виявлено аномальні рівні необхідно визначити причини їх виникнення. Якщо вони є наслідком технічних помилок, то можливі два шляхи вирішення проблеми:

- заміна аномальних рівнів відповідними значеннями на кривій, що є апроксимацією часового ряду,
- заміна аномалій середньою арифметичною двох сусідніх до них рівнів ряду.

Помилки, що виникають під дією факторів об'єктивного характеру виправити неможливо.

**Приклад 1.1.** Часовий ряд задано у вигляді таблиці 1.2. Перевірити наявність аномальних значень.

Таблиця 1.2

Вихідний часовий ряд

t	$y_i$
1	1,6
2	1,9
3	2,1
4	2,4
5	4,5
6	2,8

7	3,1
8	3,3
9	3,6
10	3,8

Результати проміжних обчислень заносимо до таблиці 1.3.

Середнє значення ряду:  $\bar{y} = \sum_t y_t / n = 29,1 / 10 = 2,91$ .

Середнє квадратичне відхилення часового ряду:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2 / (n-1)} = \sqrt{7,66/9} = 0,92$$

Таблиця 1.3

Вихідний часовий ряд та розрахунки за методом Ірвіна

t	$y_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	1,6	-1,31	1,72
<b>2</b>	<b>1,9</b>	<b>-1,01</b>	<b>1,02</b>
3	2,1	-0,81	0,66
4	2,4	-0,51	0,26
<b>5</b>	<b>4,5</b>	<b>1,59</b>	<b>2,53</b>
6	2,8	-0,11	0,01
7	3,1	0,19	0,04
8	3,3	0,39	0,15
9	3,6	0,69	0,48
10	3,8	0,89	0,79
$\Sigma$	29,1	-	7,65

Перевіримо на аномальні значення точки t=2 та t=5.

$$\lambda_2 = |y_2 - y_1| / \sigma_y = (1,9 - 1,6) / 0,92 = 0,32;$$

$$\lambda_5 = |y_5 - y_4| / \sigma_y = (4,5 - 2,4) / 0,92 = 2,28..$$

Для ряду довжини  $n=10$  за таблицею 1 маємо  $\lambda_\alpha = 1,5$ .

Оскільки  $\lambda_2 = 0,32 < 1,5$ , то другий рівень є нормальним, але  $\lambda_5 = 2,28 > 1,5$ , тому п'ятий рівень є аномальним.

Якщо п'ятий рівень відноситься до помилок першого роду, то його можна замінити середнім арифметичним:  $y_5 = (2,4 + 4,5) / 2 = 3,45$ .

### Завдання до практичної роботи 1

**Завдання 1.** Обрати часовий ряд даних (загальна кількість не менша 30) спостережень об'єкту чи процесу предметної області наукового дослідження (кваліфікаційної роботи) користуючись такими правилами:

1) часовий ряд має включати результати спостережень, починаючи від першого до останнього;

2) усі часові проміжки між елементами часового ряду повинні мати однакову тривалість - не варто включати в один ряд дані за місяці та роки;

3) спостереження фіксуються в один і той самий момент кожного часового періоду. Наприклад, формуючи часовий ряд на основі щотижневих результатів, потрібно фіксувати дані в певний день тижня.

4) пропуск даних в часовому ряді не допускається.

5) відсутність аномальних значень серед рівнів часового ряду.

Вказати назву, періодичність, безпосередньо дані. Навести графічне представлення часового ряду.

Для вибору часового ряду можна скористатися відповідними сайтами, наприклад:

- Портал відкритих даних <https://data.gov.ua>
- Сайт Кабінету міністрів України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.kmu.gov.ua/>
- Сайт Міністерства фінансів України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.minfin.gov.ua/>
- Сайт Верховної ради України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.rada.gov.ua/>
- Офіційний сайт Державної служби статистики в Україні. Статистична інформація [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.ukrstat.gov.ua>
- Офіційний сайт статистичної служби Європейського Союзу Eurostat. – Режим доступу : Eurostat [Електронний ресурс] <http://ec.europa.eu/eurostat/web/main/home>
- Офіційний сайт Асоціації українських банків [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://aub.org.ua>
- Офіційний сайт Національного банку України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://bank.gov.ua>

- Офіційний сайт Міжнародного валютного фонду [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.imf.org/external/index.htm>
- Офіційний сайт Європейського банку реконструкцій та розвитку [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.ebrd.com/ru/news/2015/-300-.html>
- Офіційний сайт Європейського інвестиційного банку [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.eib.org/about/index.htm>
- Офіційний сайт Світового банку [Електронний ресурс] – Режим доступу : <http://www.worldbank.org>
- Сайт Аудиторської палати України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [www.apu.com.ua](http://www.apu.com.ua)

**Завдання 2.** Перевірити часовий ряд на випадковість за допомогою методу поворотних значень.

**Завдання 3.** Перевірити часовий ряд на відсутність аномальних значень за допомогою методу Ірвіна.

### **Критерії оцінювання практичної роботи 1**

За умови своєчасного та в повному обсязі виконаного завдання здобувач може отримати 100 балів (матеріал якісно викладено в логічній послідовності, без помилок, зроблено висновки до виконаного завдання, виявлено підвищений рівень володіння матеріалом).

Загальна оцінка знижується на 5 балів за наступних умов:

- відсутній опис часового ряду або його візуалізації,
- метод поворотних значень застосований з неточностями,
- застосування методу Ірвіна з помилками або неточностями.

### **Перелік рекомендованих джерел**

1. Кулявець В.О. Прогнозування соціально-економічних процесів : навч. посіб. Київ : Кондор, 2016. 194 с.

2. Касьяненко В.О., Старченко Л.В. Моделювання та прогнозування економічних процесів. Конспект лекцій : навч. посіб. Суми : ВТД "Університетська книга", 2017. 185 с.

3. Яровий А. Т., Страхов Є. М. Аналіз часових рядів : навч.-метод. посіб. для студентів математичних та економічних спеціальностей. Одеса : Освіта України, 2019. 109 с.

## Практична робота № 2

### Прогнозування методом рухомого (ковзного) середнього і методом зваженого (ковзного) середнього. Розрахунок абсолютних показників точності прогнозу і коефіцієнту розбіжності прогнозу.

**Мета:** закріпити теоретичні знання і розвинути практичні навички з використання методів згладжування часових рядів.

#### Теоретичні відомості

Методи згладжування використовуються для зменшення впливу випадкового компонента (випадкових коливань) у часових рядах. Вони дають можливість отримувати більш “чисті” значення, які складаються лише з детермінованих компонентів. Деякі з методів направлені на виділення лише деяких компонентів, наприклад, тренду.

До основних методів аналізу часових рядів можна віднести метод ковзного середнього, експоненціального згладжування і проектування тренда.

Метод ковзного середнього, є одним з найпростіших, який дозволяє виділити тренд. Для застосування цього методу дослідник повинен мати доволі довгий ряд спостережень. При визначенні тенденції за допомогою ковзаної середньої треба сформулювати укрупнені інтервали, що складаються з однакової кількості рівнів. Кожен наступний інтервал отримують, поступово рухаючись від початкового рівня динамічного ряду на один рівень. За сформованим більш крупним інтервалом визначають суми значень рівнів і розраховують плинні середні. При згладжуванні ряду за допомогою ковзаної середньої більш крупний інтервал складають з непарної кількості рівнів ряду (3, 5, 7).

Метод рухомого (ковзного) середнього метод розділяють на 2 типи:

- метод рухомого (ковзного) середнього
- метод зваженого (ковзного) середнього.

#### Метод рухомого (ковзного) середнього (moving average)

Цей метод полягає в тому, що розрахунок показника на прогнозований момент часу будується шляхом усереднення значень цього показника за декілька попередніх днів.

Для загального випадку розрахункова формула виглядає так:

$$f_k = \frac{x_{k-N} + x_{k-N+1} + \dots + x_{k-1}}{N}$$

або

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{k-i},$$

де  $x_{k-i}$  – реальне значення показника в момент часу  $t_{k-i}$ ;

$N$  – число попередніх моментів часу;

$f_k$  – прогноз на момент часу  $t_k$ .

Більш гладкий тренд дозволяє виділити метод подвійного усереднення, яке двічі використовує усереднення часового ряду. При цьому кількість спостережень зменшується на два повних цикли сезонності, тому для використання методу необхідно мати часовий ряд, який складається щонайменше з 3-х повних циклів сезонності.

**Метод зваженого (ковзного) середнього (Weighted moving average)**

При прогнозуванні методом усереднення часто доводиться спостерігати, що ступінь впливу використаних при розрахунку реальних показників виявляється неоднаковим, при цьому звичайно більш «свіжі» дані мають більшу вагу. Математично метод зваженого рухомого середнього можна записати як

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^N w_{k-i} x_{k-i}}{\sum_{i=1}^N w_{k-i}},$$

де  $x_{k-i}$  – реальне значення показника в момент часу  $t_{k-i}$ ;

$N$  – кількість попередніх моментів часу, що використовуються при розрахунку;

$f_k$  – прогноз на момент часу  $t_k$ ,

$w_{k-i}$  – вага, з якою використовується показник  $x_{k-i}$  при розрахунку.

Вага – це завжди додатне число. У разі, коли вся вага однакова, одержуємо формулу методу ковзаного середнього.

**Приклад 2.1.** Припустимо, що об'єми продажів деякого товару описуються в перебігу тижня часовим рядом, представленим в табл. 2.1. Потрібно зробити розрахунок продажів на 8-й день методом ковзаного середнього.

Таблиця 2.1

Об'єми продажів деякого товару за тиждень

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	6	5	11	9	8	7

Припустимо, що у нас є дані показника тільки за перші три дні. Обчислимо прогнозоване число продажів на четвертий день тижня (четвер). Для цього визначимо середнє значення числа продажів за попередні три дні – понеділок, вівторок і середу – і знайдемо їх середнє арифметичне:

$$f_4 = \frac{10+6+5}{3} = 7.$$

Прогнозований об'єм продажів на п'ятницю обчислюється аналогічним чином по реальних показниках за три попередні дні – вівторок, середу і четвер:

$$f_5 = \frac{6+5+11}{3} \approx 7.33.$$

Подібним способом розраховуються прогнози на суботу, неділю і наступний понеділок:

$$f_6 = \frac{5+11+9}{3} \approx 8.33.$$

$$f_7 = \frac{11+9+8}{3} \approx 9.33,$$

$$f_8 = \frac{9+8+7}{3} \approx 8.$$

В результаті можна отримати такі дані:

<b>x</b>	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>y</b>	10	6	5	11	9	8	7	-
<b>f</b>	-	-	-	7	7.33	8.33	9.33	8

Порівняльні результати наведені на рис. 2.1: світлішою лінією відзначені реальні значення, а жирним – прогнозовані значення.

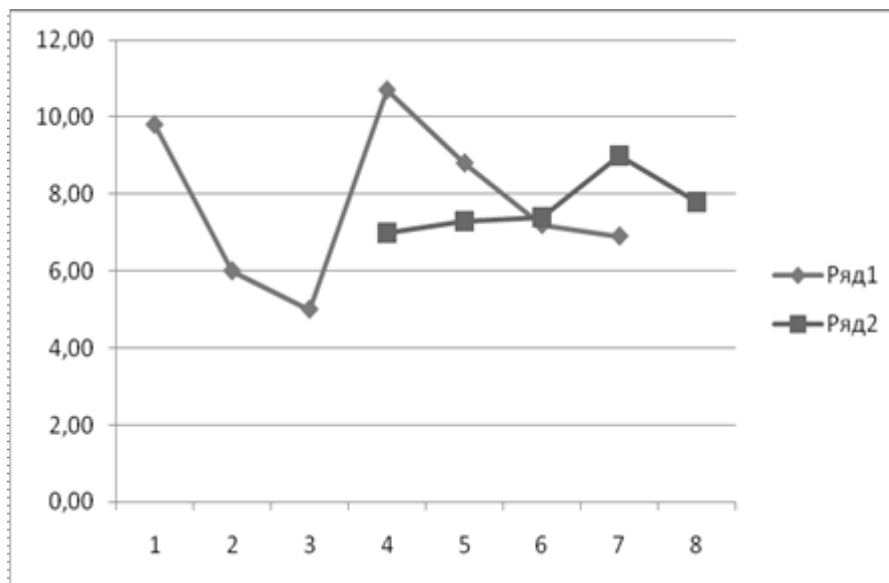


Рисунок 2.1 – Порівняльні результати прогнозу методом ковзного середнього.

**Приклад 2.2.** Припустимо, що об'єми продажів деякого товару описуються в перебігу тижня часовим рядом, представленим в табл. 2.1. Потрібно зробити розрахунок об'єму продажів на 8-й день методом зваженого ковзаного середнього.

Для розрахунків звернемося до початкового часового ряду з прикладу 2.1, вважаючи, що при складанні прогнозу на завтрашній день об'єм сьогоднішніх продажів береться з вагою 60, вчорашніх – з вагою 30, а позавчорашніх – з вагою 10.

Тоді отримаємо:

$$f_4 = \frac{10 * 10 + 30 * 6 + 60 * 5}{10 + 30 + 60} \approx 5.8,$$

$$f_5 = \frac{10 * 6 + 30 * 5 + 60 * 11}{10 + 30 + 60} \approx 8.7$$

$$f_6 = \frac{10 * 5 + 30 * 11 + 60 * 9}{10 + 30 + 60} \approx 9.2$$

$$f_7 = \frac{10 * 11 + 30 * 9 + 60 * 8}{10 + 30 + 60} \approx 8.6$$

$$f_8 = \frac{10 * 9 + 30 * 8 + 60 * 7}{10 + 30 + 60} \approx 5.8$$

Результати розрахунків наведені в таблиці.

<b>x</b>	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>t</b>	10	6	5	11	9	8	7	-
<b>f</b>	-	-	-	5,8	8,7	9,2	8,6	7,5

На рис. 2.2 жирним відзначені прогнозовані дані, світлішим кольором – фактичні початкові дані.

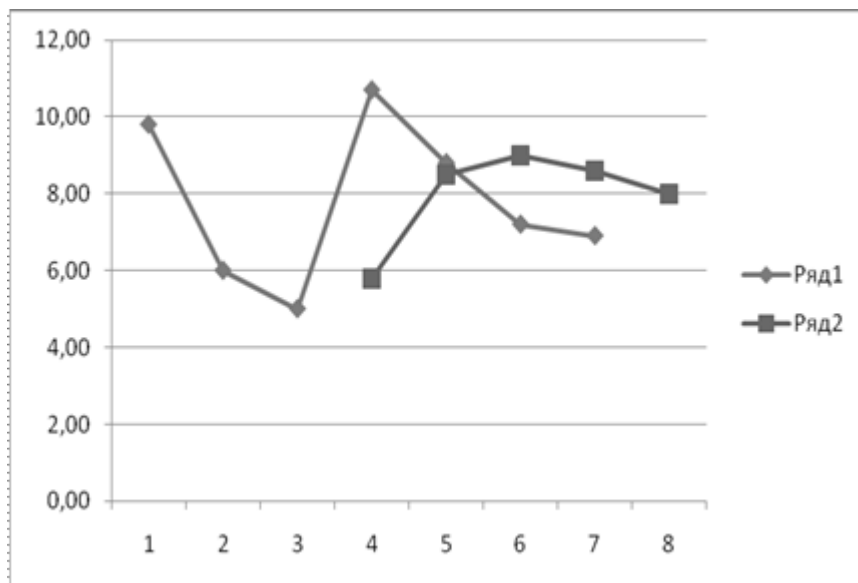


Рисунок 2.2 – Порівняльні результати прогнозу методом зваженого ковзного середнього.

Незалежно від того, як ми будували модель, питання про можливість застосування її для аналізу і прогнозування економічних показників можливе тільки після встановлення її адекватності.

У якості статистичних показників точності використовуються такі:

- 1) Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-p} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}.$$

За цим параметром порівнюються між собою декілька моделей, і та буде кращою, у якої середнє квадратичне відхилення менше.

2) Середня відносна похибка апроксимації

$$MAPE = \frac{100\%}{n} \sum \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t}.$$

Ця величина має такі порогові значення:

- < 10% - висока точність апроксимації
- 10 ÷ 20% - добра точність апроксимації
- 20 ÷ 50% - задовільна точність апроксимації
- > 50% - незадовільна точність апроксимації

3) Коефіцієнт детермінації

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2},$$

де  $\bar{\hat{y}}$  - середнє арифметичне оцінених значень у за моделлю,  
 $\bar{y}$  - середнє арифметичне часового ряду.

Коефіцієнт детермінації змінюється від 0 до 1. Чим ближче  $R^2$  до 1, тим точніша модель. Коефіцієнт детермінації має недолік: якщо в моделі збільшується кількість параметрів, то  $R^2$  збільшується. Тому на практиці досить часто користуються скоригованим коефіцієнтом детермінації за Тейлом:

$$\bar{R}_T^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-p},$$

де  $p$  - кількість параметрів у моделі.

## Завдання до практичної роботи 2

**Завдання 1.** На основі даних практичної роботи 1 скласти прогноз методом рухомого (ковзного) середнього і методом зваженого (ковзного) середнього.

**Завдання 2.** Розрахувати абсолютні показники точності прогнозу і коефіцієнт розбіжності прогнозу (коефіцієнт Тейла). Навести графік часового ряду, а також графіки, отримані методами рухомого (ковзного) середнього.

## Критерії оцінювання практичної роботи 2

За умови своєчасного та в повному обсязі виконаного завдання здобувач може отримати 100 балів (матеріал якісно викладено в логічній послідовності, без помилок, зроблено висновки до виконаного завдання, виявлено підвищений рівень володіння матеріалом).

Загальна оцінка знижується на 5 балів за наступних умов:

- не визначено показники точності прогнозів;
- не наведено графіку часового ряду або графіків, отриманих за методами ковзаного середнього;
- неточності в застосуванні методів ковзаного середнього.

### **Перелік рекомендованих джерел**

1. Касьяненко В.О., Старченко Л.В. Моделювання та прогнозування економічних процесів. Конспект лекцій : навч. посіб. Суми : ВТД "Університетська книга", 2017. 185 с.

2. Яровий А. Т., Страхов Є. М. Аналіз часових рядів : навч.-метод. посіб. для студентів математичних та економічних спеціальностей. Одеса : Освіта України, 2019. 109 с.

3. Beran J. Mathematical Foundations of Time Series Analysis : A Concise Introduction. Springer, 2017. 307 p.

4. Системний аналіз : навч. посіб. / А.В. Малієнко, О.Б. Владико, Т.В. Хом'як, С.В. Козир; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро : НТУ «ДП», 2025. 228 с.

### Практична робота № 3 Використання методів згладжування часових рядів.

**Мета:** закріпити теоретичні знання і розвинути практичні навички з використання методів згладжування часових рядів для прогнозування.

#### Теоретичні відомості

##### Метод експоненціального згладжування (exponential smoothing)

Експоненціальне згладжування – це дуже популярний метод прогнозування багатьох часових рядів. Історично метод був незалежно відкритий Брауном і Холтом. Цей метод значно переважає попередні методи.

Розрахунок прогнозу методом експоненціального згладжування проводиться за формулою:

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1}, \quad t = \overline{2, T},$$

де  $\alpha$  – стала згладжування ( $0 < \alpha < 1$ ):

Єдина вага  $\alpha$  може обиратися кількома шляхами. По-перше, якщо обирається значення близьке до 1, то будуть більш важливими при прогнозуванні останні дані часового ряду, а при виборі  $\alpha$  близьким до 0, більш впливовими будуть минулі значення. По-друге, можна покласти  $\alpha = \frac{2}{T+1}$ . По-третє, вибір  $\alpha$ , при якому мінімізується один з критеріїв точності прогнозів на  $n$  періодів. При цьому розрахунки повинні проводитися лише по перших  $T - n$  значеннях часового ряду, а отримані прогнози повинні бути порівняні з реальними даними. При використанні цієї методики відкидається обмеження  $0 < \alpha < 1$ .

Прогноз значень часового ряду за цим методом дорівнює останньому члену послідовності  $S_t$ :

$$\hat{y}_{T+p} = S_t, \quad p = 1, 2, \dots$$

Початкове значення послідовності можна вибрати таким чином:

$$S_1 = y_1 \quad \text{або} \quad S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Результат згладжування залежить від параметра  $\alpha$ . На практиці звичайно рекомендується брати  $\alpha$  від 0,1 до 0,3. Крім того, параметр згладжування  $\alpha$  часто знаходиться пошуком на сітці. Можливі значення параметра  $\alpha$  розбиваються сіткою з певним кроком. Наприклад, розглядається сітка значень  $\alpha$  від  $\alpha = 0,1$  до  $\alpha = 0,9$ , з кроком 0,1. Потім вибирається той  $\alpha$ , для якого сума квадратів (або середніх квадратів) залишків (значення, що спостерігаються, мінус прогнози на крок вперед) є мінімальною.

**Приклад 3.1.** Для розрахунків методом експоненціального згладжування звернемося до початкового часового ряду (табл. 2.1), вважаючи, що  $\alpha = 0,2$  і що прогноз на понеділок дорівнює 8 ( $f_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ ).

Результати зведені в таблицю.

<b>x</b>	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>y</b>	10	6	5	11	9	8	7	-
<b>f</b>	8	7.6	7.08	7.86	8.09	8.07	7.86	7.86

На рис. 3.1 - синіми точками відзначені реальні значення, а червоними – прогнозовані.

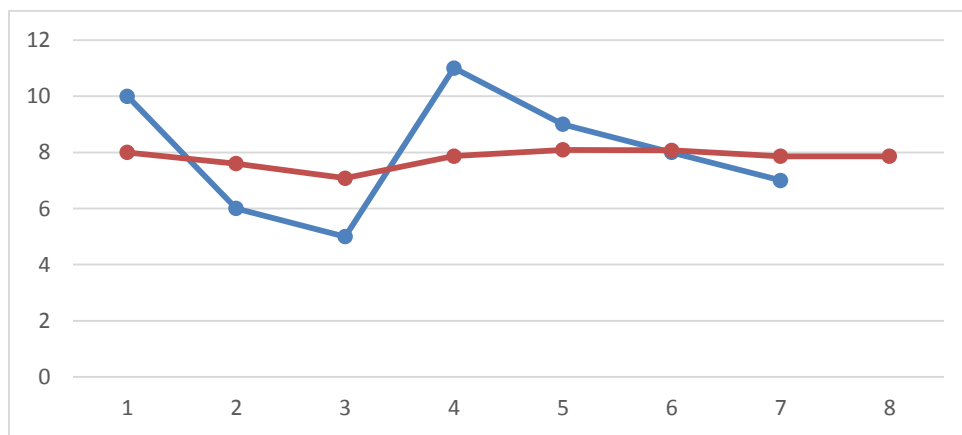


Рисунок 3.1 – Порівняльні результати прогнозу методом експоненціального згладжування

### Подвійне експоненціальне згладжування Брауна

Цей метод будується аналогічно попередньому, тільки процес згладжування робиться двічі:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= y_1, \\
 S'_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)S'_{t-1}, \\
 S''_t &= \alpha S'_t + (1 - \alpha)S''_{t-1}, \quad t = \overline{2, T}, \quad 0 < \alpha < 1.
 \end{aligned}$$

Метод використовується, коли дані часового ряду нестационарні. Прогноз будується як останнє значення другої послідовності:

$$\hat{y}_{T+p} = S''_t, \quad p = 1, 2, \dots$$

**Приклад 3.2.** Для розрахунків методом подвійного експоненціального згладжування звернемося до початкового часового ряду (табл. 2.1). Результати зведені в таблицю.

<b>x</b>	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>y</b>	10	6	5	11	9	8	7	-
<b>f1</b>	8	7.6	7.08	7.86	8.09	8.07	7.86	7.86
<b>f2</b>	7.80	7.76	7.62	7.67	7.75	7.82	7.83	7.83

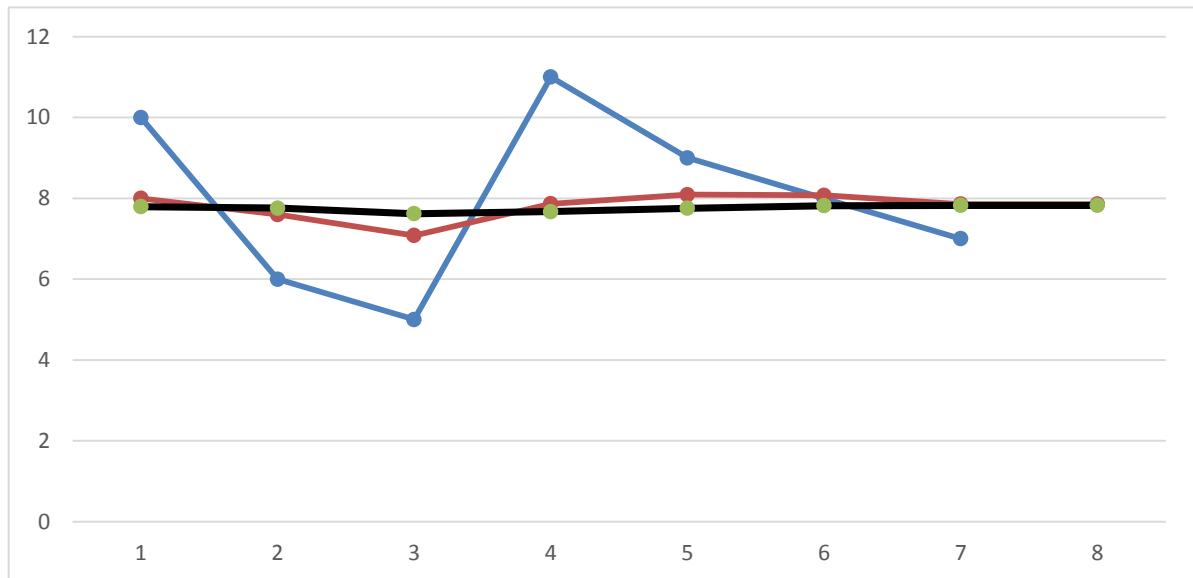


Рисунок 3.2 – Порівняльні результати прогнозу методом подвійного експоненціального згладжування

### Потрійне експоненціальне згладжування Брауна

Цей метод аналогічний двом попереднім, тільки процес згладжування робиться тричі. Це дозволяє прогнозувати нестационарні часові ряди з великими перепадами мінімального та максимального значень. Нові послідовності будуються за правилом:

$$\begin{aligned}
 S'_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)S'_{t-1}, \\
 S''_t &= \alpha S'_t + (1 - \alpha)S''_{t-1}, \\
 S'''_t &= \alpha S''_t + (1 - \alpha)S'''_{t-1}, \quad 0 < \alpha < 1.
 \end{aligned}$$

Прогноз на наступні періоди має вигляд:

$$\hat{y}_{T+p} = S'''_t, \quad p = 1, 2, \dots$$

### Адаптивне згладжування

Цей метод дозволяє автоматично змінювати константу згладжування в процесі розрахунку. Нова послідовність будуються за правилом:

$$S_{t+1} = \alpha_t y_t + (1 - \alpha_t)S_t,$$

де  $\alpha_t$  змінюється з часом в залежності від похибки прогнозування  $\alpha_t = \left| \frac{E_t}{M_t} \right|$ ,

$$\begin{aligned} E_t &= \beta(y_t - \hat{y}_t) + (1 - \beta)E_{t-1}, \\ M_t &= \beta|y_t - \hat{y}_t| + (1 - \beta)M_{t-1}. \end{aligned}$$

Параметр  $\beta$  знаходиться у межах (0; 1). Для випадкових похибок коефіцієнт  $\alpha$  буде близьким до 0,5.

### Несезонна модель Холта-Вінтерса

Ця модель схожа на подвійне експоненціальне згладжування, але дозволяє виділяти трендовий компонент за допомогою другої послідовності:

$$\begin{aligned} S'_2 &= y_2, \quad S''_2 = y_2 - y_1, \\ S'_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(S'_{t-1} + S''_{t-1}), \quad 0 < \alpha < 1, \\ S''_t &= \beta(S'_t - S'_{t-1}) + (1 - \beta)S''_{t-1}, \quad 0 < \beta < 1. \end{aligned}$$

Прогноз на наступні періоди:

$$\hat{y}_{T+p} = S'_T + pS''_T, \quad p = 1, 2, \dots$$

Слід відмітити, що прогнози, зроблені за цим методом, як правило, або сильно завищені, або занижені, внаслідок того, що додається постійний трендовий компонент, який на практиці змінюється протягом року.

### Мультиплікативна модель Холта-Вінтерса

Мультиплікативна модель Холта-Вінтерса використовує індекс сезонності:

$$S_{t+p} = (a_t + b_t p)c_{t+p},$$

де

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha \left( \frac{y_t}{c_{t-s}} \right) + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}, \\ c_t &= \gamma \left( \frac{y_t}{a_t} \right) + (1 - \gamma)c_{t-s}, \quad 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1, t = \overline{2s + 1, T}, \end{aligned}$$

де  $s$  – кількість циклів сезонності. Цей метод вимагає щонайменше 2 повних цикли сезонності по минулих спостереженнях для побудови розрахунків.

Прогноз на період  $T + p$  будується наступним чином:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+p} &= (y_t + pb_t)c_{T-s+p}, \quad p = 1, 2, \dots, s, \\ \hat{y}_{T+p} &= (y_t + pb_t)c_{T-2s+p}, \quad p = s + 1, s + 2, \dots, 2s. \end{aligned}$$

### **Завдання до практичної роботи 3**

**Задача 1.** Для обраного в практичній роботі 1 часового ряду застосувати наступні методи згладжування:

- експоненціальне згладжування (exponential smoothing);
- подвійне експоненціальне згладжування;
- потрійне експоненціальне згладжування (якщо є потреба);
- модель Холта-Вінтерса;
- мультиплікативна модель Холта-Вінтерса (якщо є сезонна компонента в часовому ряді);
- адаптивне згладжування.

**Задача 2.** Навести графік часового ряду і згладжуваних кривих. Зробити короткостроковий прогноз. Підрахувати похибку прогнозування. Порівняти прогнозні значення різних методів згладжування.

### **Критерії оцінювання практичної роботи 3**

За умови своєчасного та в повному обсязі виконаного завдання здобувач може отримати 100 балів (матеріал якісно викладено в логічній послідовності, без помилок, зроблено висновки до виконаного завдання, виявлено підвищений рівень володіння матеріалом).

Загальна оцінка знижується на 5 балів за наступних умов:

- не застосовано один із зазначених методів згладжування;
- відсутній графік часового ряду або згладжуваних кривих;
- не наведений короткостроковий прогноз;
- не розраховано похибку прогнозування.

### **Перелік рекомендованих джерел**

1. Beran J. Mathematical Foundations of Time Series Analysis: A Concise Introduction. Springer, 2017. 307 p.

2. Mills T. Applied Time Series Analysis: A Practical Guide to Modeling and Forecasting. Academic Press, 2019. 327 p.

3. Системний аналіз : навч. посіб. / А.В. Малієнко, О.Б. Владико, Т.В. Хом'як, С.В. Козир; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро : НТУ «ДП», 2025. 228 с.

4. Яровий А. Т., Страхов Є. М. Аналіз часових рядів : навч.-метод. посіб. для студентів математичних та економічних спеціальностей. Одеса : Освіта України, 2019. 109 с.

## Практична робота № 4

### Застосування методів прогнозування часових рядів на основі тренду

**Мета:** закріпити теоретичні знання і розвинути практичні навички з застосування методів прогнозування часових рядів на основі тренду.

#### Теоретичні відомості

Для аналізу тенденції на основі динамічних рядів і побудови прогнозу з врахуванням закономірностей, що склалися в "передісторії", широко застосовується залежність, яка має назву рівняння тренда:

$$y = f(t) + \varepsilon_t, \quad (4.1)$$

де  $f(t)$  – детермінована не випадкова компонента процесу (явища);  $\varepsilon_t$  – стохастична випадкова компонента процесу (явища).

Тренд, який звично називають часовим трендом, відображає тенденцію зміни явища (процесу, об'єкта) у часі.

Аналітичне вирівнювання тренда – це досить поширений метод прогнозування.

Екстраполяція здійснюється шляхом підстановки у рівнянні тренда (4.1) значення незалежної змінної  $t$ , яка відповідає величині горизонту прогнозування:

$$y_{n+p} = f(t_{n+p}) + \varepsilon_t, \quad (4.2)$$

де  $p$  – величина горизонту прогнозування (період, на який складається прогноз).

У рівнянні (4.1) випадкова компонента  $\varepsilon_t$  необхідна у подальшому для визначення уточнених характеристик прогнозу.

Рівняння тренда може бути описане широким спектром залежностей, зокрема:

лінійна	$y = b + at,$	(4.3)
квадратична	$y = a_0 + a_1t + a_2t^2,$	
степенева	$y = a_0t^{a_1},$	
показникова	$y = a_0a_1^t,$	
експоненційна	$y = a_0e^{a_1t},$	
експоненційно-степенева	$y = a_0t^{a_1}e^{a_1t}$	
та інші.		

#### Розрахунок параметрів і характеристик рівняння лінійного тренда

Параметри  $a, b$  рівняння (4.3) визначаються за допомогою методу найменших квадратів (запропонований К. Гауссом та А. Лежандром). Щоб знайти коефіцієнти  $a$  і  $b$  виконують такі дії: для кожного значення  $t$  розраховують змінну  $y$ , користуючись формулою (4.3). Потім знаходять різницю  $at_i + b -$

$-x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , яку потім підносять до квадрату (щоб не думати про знак):  $(at_i + b - x_i)^2$ .

Функція приймає мінімальне значення у тому випадку, коли величини  $a$  і  $b$  задовольняють таку лінійну систему:

$$\varphi(a, b) = \sum_{i=1}^n (at_i + b - x_i)^2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n t_i + bn = \sum_{i=1}^n x_i \\ a \sum_{i=1}^n t_i^2 + b \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n t_i x_i. \end{cases}$$

Ця система завжди має єдине рішення.

**Приклад 4.1.** Розглянемо конкретний приклад, знов використавши часовий ряд з прикладу 2.1. Складемо допоміжну таблицю:

Таблиця 4.1

Допліжна таблиця для розв'язання прикладу

$t_i$	$x_i$	$t_i x_i$	$t_i^2$
1	10	10	1
2	6	12	4
3	5	15	9
4	11	44	16
5	9	45	25
6	8	48	36
7	7	49	49
$\sum_{i=1}^n t_i = 28$	$\sum_{i=1}^n x_i = 56$	$\sum_{i=1}^n t_i x_i = 223$	$\sum_{i=1}^n t_i^2 = 140$

В такому випадку система рівнянь для обчислення коефіцієнтів  $a$  і  $b$  набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} 28a + 7b = 56 \\ 140a + 28b = 223. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо:  $a = -\frac{1}{28} \sim -0,04$ ,  $b = \frac{57}{7} \sim 8,14$ .

Тоді  $y = -0,04t + 8,14$  – рівняння шуканого тренду. Розрахунок показника для наступного дня за допомогою отриманого рівняння тренду проводиться наступним чином:  $f_8 = -0,04 \cdot 8 + 8,14 \sim 7,82$ .

На рис. 4.1 показано реальну та прогнозовану криві, побудовані за допомогою методу проєктування тренда.

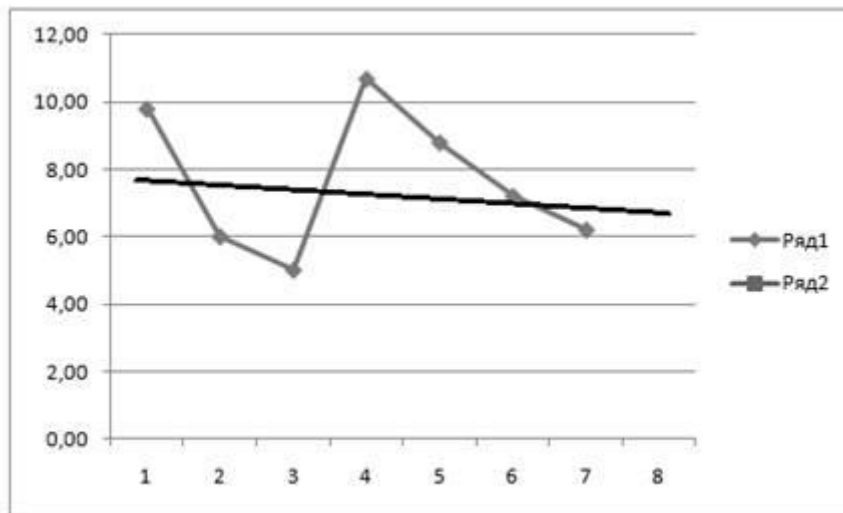


Рисунок 4.1 – Порівняльні результати прогнозу методом проєктування тренда

Точність прогнозу далі можна оцінити за допомогою показників, що наведено в практичній роботі 2.

#### Завдання до практичної роботи 4

**Завдання 1.** Аналітично отримати лінійне рівняння тренду часового ряду методом найменших квадратів, навести графік тренду, зробити короткостроковий прогноз, розрахувати похибку прогнозу.

**Завдання 2.** Для часових рядів побудувати різні види трендів в MS Excel:

- лінійний тренд;
- квадратичний тренд;
- поліноміальний тренд;
- експонентний тренд;
- показниковий тренд;
- логарифмічний тренд.

Навести графік тренду, рівняння тренду, величину достовірності апроксимації. Зробити на їх основі прогнози, підрахувати помилку прогнозування.

#### Критерії оцінювання практичної роботи 4

За умови своєчасного та в повному обсязі виконаного завдання здобувач може отримати 100 балів (матеріал якісно викладено в логічній послідовності, без

помилку, зроблено висновки до виконаного завдання, виявлено підвищений рівень володіння матеріалом).

Загальна оцінка знижується на 5 балів за наступних умов:

- не отримано рівняння лінійного тренду;
- не розраховано прогнозне значення на основі отриманого рівняння лінійного тренда;
- не наведено розрахунку похибки прогнозу;
- не побудовано різні види тренда в MS Excel;
- не наведено величину достовірності апроксимації для отриманих рівнянь тренду.

### **Перелік рекомендованих джерел**

1. Яровий А. Т., Страхів С. М. Аналіз часових рядів : навч.-метод. посіб. для студентів математичних та економічних спеціальностей. Одеса : Освіта України, 2019. 109 с.

2. Beran J. Mathematical Foundations of Time Series Analysis: A Concise Introduction. Springer, 2017. 307 p.

3. Mills T. Applied Time Series Analysis: A Practical Guide to Modeling and Forecasting. Academic Press, 2019. 327 p.

## Практична робота № 5 Методи аналізу сезонних коливань

**Мета:** закріпити теоретичні знання і розвинути практичні навички з аналізу сезонних коливань в часових рядах.

### Теоретичні відомості

Для багатьох явищ суспільного життя характерні повторювані коливання, які називаються *сезонними*. Сезонні коливання спостерігаються і в різних галузях: при виробництві більшості сільськогосподарських продуктів, їх переробці, у будівництві, транспорті, торгівлі та ін.

Сезонні коливання зазвичай негативно позначаються на роботі багатьох галузей, так як зазвичай призводять до нерівномірного використання трудових ресурсів, до простоїв обладнання, що в свою чергу спричиняє підвищення витрат виробництва. Тому вивчення закономірностей, що складаються в області сезонних коливань, має велике практичне і пізнавальне значення для подолання або зменшення їх негативних наслідків. Крім того, вивчення сезонності необхідно для внутрірічного планування, зокрема для розбивки річного плану по місяцях з урахуванням сезонних коливань. Для аналізу сезонності необхідні дані по досліджуваному явищу у вигляді часового ряду за кілька років, при цьому ці дані повинні бути як мінімум кварталними; для більш детального дослідження необхідні дані за кожен місяць, кожен декаду року.

Серед численних методів аналізу сезонності можна виділити три основні групи:

- ітераційні методи фільтрації компонент часового ряду,
- статистичні методи розрахунку сезонної хвилі (індексів сезонності)
- методи гармонійного аналізу на основі рядів Фур'є.

### Ітераційні методи фільтрації компонент часового ряду

При розгляді методів цієї групи слід мати на увазі, що під фільтрацією (виділенням) компонент часового ряду розуміється процес отримання оцінок всіх трьох складових часового ряду (сезонної, випадкової та теоретичного рівня ряду за моделлю); основна ідея ітераційних процедур зазначеної фільтрації полягає в багаторазовому застосуванні розрахунку ковзної середньої та оцінці сезонної компоненти в кожному циклі. Детально ці методи аналізу сезонності продемонстровано на прикладі ітераційних методів Четверикова і Шіскіпа – Ейзенпресса. Розглянемо далі дві інші з зазначених груп методів аналізу сезонних коливань.

### Статистичні методи розрахунку сезонної хвилі (індексів сезонності)

Для виявлення та вимірювання інтенсивності сезонних коливань в цих методах використовуються *індекси сезонності*, сукупність яких прийнято називати *сезонної хвилею*.

Залежно від характеру динаміки застосовуються різні способи розрахунку індексів сезонності. У тих випадках, коли середній річний рівень сезонного явища залишається від року до року відносно незмінним, іншими словами, в часі ряду відсутній тренд, застосовується **метод простих середніх**. Суть методу полягає у визначенні простої середньої за одні й ті ж місяці (квартали, декади) усього досліджуваного періоду і в зіставленні цих середніх з середньою за весь досліджуваний період. Слід зазначити, що при використанні даних тільки одного року розрахунки можуть бути занадто ненадійними чинності елемента випадковості. Тому на практиці для виявлення закономірності в сезонних коливаннях використовуються дані за ряд років (наприклад, місячні дані за три роки). Тоді для кожного місяця розраховується середня величина рівня ряду за три роки, після чого на основі отриманих даних розраховується середньомісячний рівень за весь період спостереження. Ставлення середніх для кожного місяця до загального середньомісячного рівню (частіше виражається у відсотках) і утворює сукупність індексів сезонності. Покажемо розрахунок індексів сезонності методом простих середніх на прикладі.

Індекс сезонності визначається за формулою:

$$I_c = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}}, \quad \bar{y}_i = \frac{\sum_i^k y_i}{k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_j^n \bar{y}_i}{n} = \frac{\sum_j^n \sum_i^k y_{ij}}{kn}, \quad (5.1)$$

де  $\bar{y}_i$  – середнє значення показника за прийнятий проміжок часу,

$\bar{y}$  – середнє значення показника за весь період,  $k$  – кількість років,  $m$  – кількість місяців.

**Приклад 5.1.** За даними, які характеризують обсяг реалізації продукції хлібозаводами об'єднання (табл. 5.1), розрахувати індекс сезонності, побудувати сезонну хвилю і прогноз обсягу реалізації продукції на окремі місяці наступного року.

Таблиця 5.1

Обсяг реалізації хлібобулочних виробів (тис.т.)

Рік Місяць	1-й рік	2-й рік	3-й рік	4-й рік	Разом за 4 роки (2+3+4+5)	В середньому за 4 роки гр. 6/4, $\bar{y}_i$	Індекс сезонності $\left(\frac{\bar{y}_i}{\bar{y}}\right) 100$	Прогноз обсягу реалізації продукції на наступний рік
	2	3	4	5	6	7	8	
01	5,3	5,4	5,5	6,4	22,6	5,65	74,6	6,1
02	5,4	5,6	5,7	6,7	23,4	5,85	77,2	6,3
03	6,2	6,0	5,9	6,9	25,0	6,25	82,5	6,7
04	6,4	6,6	6,7	7,3	27,0	6,75	89,1	7,3
05	7,0	7,2	7,5	7,7	29,4	7,35	97,0	7,9
06	7,5	7,7	8,0	8,2	31,4	7,85	103,6	8,5
07	8,0	8,1	8,5	8,7	33,3	8,33	110,0	9,0
08	8,5	8,6	8,8	9,1	35,0	8,75	115,5	9,4
09	8,9	9,0	9,2	9,5	36,6	9,15	180,8	9,9
10	8,3	8,5	9,0	9,1	34,9	8,72	115,1	9,4
11	8,0	8,3	8,6	8,4	33,3	8,33	110,0	9,0
12	7,5	7,9	8,3	8,0	31,7	7,93	104,7	8,5
Разом	87,0	88,9	91,7	96,0	363,6	-	1200,0	98,0
В середньому						7,575 ( $\bar{y}$ )		

Розраховані для даних із табл 5.1 індекси сезонності подані в колонці 8, а їх ряд створює сезонну хвилю. Індекс сезонності для складання прогнозу використовується таким чином. Припустимо, що на наступний рік об'єднання передбачає реалізувати 98 тис. т. хлібобулочних виробів. Для того, щоб скласти помісячний план реалізації продукції можна використати таку залежність:

$$\hat{Q}_i = \frac{\hat{Q} \cdot I_c}{100n},$$

де  $\hat{Q}_i$  – очікуваний місячний об'єм реалізації продукції ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ),

$\hat{Q}$  – очікуваний річний обсяг реалізації продукції,

$I_c$  – індекс сезонності,  $n$  – кількість періодів ( $n = 12$ ).

Результати розрахунків наведені в графі 9 таблиці 5.1.

Описаний метод простих середніх застосовують для аналізу сезонності у часових рядах без явно вираженого тренда. Якщо рівень часового ряду виявляє тенденцію до зростання або зниження, тобто має місце тренд, то відхилення від постійного середнього рівня можуть спотворити сезонні коливання. У таких випадках застосовується **метод помісячних відносин**. Він полягає в тому, що спочатку обчислюються по кожному року процентні відносини між показниками за кожний даний і попередній місяці, а потім з отриманих відносин визначаються їх середні арифметичні. Ці середні показують динаміку зміни показника в даному місяці в порівнянні з попереднім. Розглянемо використання методу помісячних відносин на прикладі аналізу сезонності в економічному процесі.

**Приклад 5.2.** На основі даних, наведених в таблиці 5.1 потрібно проаналізувати сезонні коливання на фірмі з використанням методу помісячних відносин.

Результати розрахунків представлені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Визначення індексів сезонності методом помісячних відносин

Місяць	Помісячні відносини, %				Середні помісячні відносини, %
	1-й рік	2-й рік	3-й рік	4-й рік	
1	100	100	100	100	100
2	104	104	104	105	104
3	115	107	104	103	107
...	...	...	...	...	...
12					

Пояснення розрахунків (як і в попередньому прикладі, обчислення робляться з точністю до цілих). Всі відносини за січень кожного року приймаємо за 100%. За даними розглянутого прикладу (табл. 5.2) для лютого кожного року отримаємо наступні чотири відносини: у 1-й рік –  $5.4/5.3 \cdot 100 = 104\%$ ; у 2-й рік –

$5.6/5.4 \cdot 100 = 104\%$ ; у 3-й рік –  $5.7/5.5 \cdot 100 = 104\%$ , у 4-й рік -  $6.7/6.4 \cdot 100 = 105\%$ . Середня арифметична цих величин дає середнє помісячне ставлення в лютому:  $(104 + 104 + 104 + 105) / 4 = 104\%$ . Це означає, що в лютому продаж порівняно з січнем зростає в середньому на 4%. Аналогічно розраховується помісячне ставлення березня до лютого і так по всіх місяцях року.

Метод помісячних відносин дає більш точне уявлення про сезонні коливання в порівнянні з методом простих середніх. Слід зазначити, що в тих випадках, коли динамічний ряд має тенденцію до зростання або зниження, для дослідження сезонності в економічних процесах використовуються також інші статистичні методи, наприклад, *метод рухомих (ковзних) середніх*.

### Методи гармонійного аналізу сезонності

Розглянемо деякі питання застосування гармонійного аналізу при дослідженні та моделюванні сезонних коливань. Якщо зміна будь-якого показника носить періодичний характер, то такій зміні відповідає періодична *функція Фур'є*. Сезонна хвиля являє собою синусоїдальну функцію з періодом один рік; розкладання таких функцій в тригонометричний ряд Фур'є носить назву *гармонійного аналізу*, та аналітичної формою сезонної хвилі служить тригонометричний многочлен виду

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

де  $k$  – порядковий номер гармоніки ряду Фур'є;

$m$  – число гармонік;

$t$  – час, що приймає значення  $0, 2\pi / n, 2 \cdot 2\pi / n, \dots, (n - 1) \cdot 2\pi / n$  (для місячних даних  $n = 12$ );

параметри  $a_0, a_k, b_k$  знаходяться у відповідності з методом найменших квадратів і задаються наступними співвідношеннями:

$$a_0 = \sum \frac{y_t}{n}; \quad a_k = 2 \sum \frac{y_t \cos kt}{n}; \quad b_k = 2 \sum \frac{y_t \sin kt}{n}.$$

На практиці при вирівнюванні даних сезонних процесів по ряду Фур'є розраховують не більше чотирьох гармонік, а потім визначають, при якому числі гармонік щонайкраще відбивається періодичність зміни рівнів ряду. Слід мати на увазі, що збільшення числа гармонік, з одного боку, збільшує точність апроксимації, а з іншого - може зменшити значущість моделі в результаті збільшення дисперсії

$$\sigma_{\hat{y}_t}^2 = \frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - p},$$

де  $p$  – число визначених параметрів апроксимуючого рівняння.

**Приклад 5.3.** Покажемо процес вирівнювання сезонних коливань по ряду Фур'є на умовних місячних даних про чисельність персоналу фірми, пов'язаної з переробкою сільськогосподарської продукції.

Вихідні дані, а також вирази  $y_t \cdot \cos t$ ,  $y_t \cdot \sin t$  і  $y_t \cdot \sin 2t$ , необхідні для визначення параметрів згладжених рівнянь за першою і другою гармонікам, наведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Розрахунки для розкладання в ряд Фур'є

Місяць	$t$	Чисельність персоналу $y_t$	$y_t \cdot \cos t$	$y_t \cdot \sin t$	$y_t \cdot \cos 2t$	$y_t \cdot \sin 2t$
1	0	750	750,00	0	750,00	0
2	$\pi/6$	740	640,84	370,00	370,00	640,84
3	$\pi/3$	810	405,00	701,46	-405,00	701,46
4	$\pi/2$	840	0	840,00	-840,00	0
5	$2\pi/3$	990	-495,00	857,34	-495,00	-857,34
6	$5\pi/6$	1 200	-1039,20	600,00	600,00	-1039,20
7	$\pi$	1280	-1280,00	0	1280,00	0
8	$7\pi/6$	1 240	-1073,84	-620,00	620,00	1073,84
9	$4\pi/3$	1150	-575,00	-995,90	-575,00	995,90
10	$3\pi/2$	990	0	-990,00	-990,00	0
11	$5\pi/2$	880	440,00	-762,08	-440,00	-762,08
12	$11\pi/6$	840	727,44	-420,00	420,00	-727,44
		11710	1499,76	-419,18	295,00	25,98

На основі даних цієї розрахункової таблиці знаходимо:

$$a_0 = \sum \frac{y_t}{n} = \frac{11710}{12} = 975,83;$$

$$a_1 = 2 \sum \frac{y_t \cos t}{n} = \frac{1499,76}{6} = 249,96; \quad b_1 = 2 \sum \frac{y_t \sin t}{n} = \frac{-419,18}{6} = -69,86;$$

$$a_2 = 2 \sum \frac{y_t \cos 2t}{n} = \frac{295}{6} = 49,17; \quad b_2 = 2 \sum \frac{y_t \sin 2t}{n} = \frac{25,98}{6} = 4,33;$$

Таким чином, апроксимируючий многочлен Фур'є з урахуванням тільки першої гармоніки має вигляд

$$\hat{y}_{t1} = 975,83 + 249,96\cos t - 69,86\sin t,$$

а з урахуванням і другої гармоніки

$$\hat{y}_{t2} = 975,83 + 249,96\cos t - 69,86\sin t + 49,17\cos 2t + 4,33\sin 2t.$$

Значення чисельності персоналу фірми по обох згладжуваним рівнянням, а також дані для розрахунку дисперсій апроксимації наведено в наступній табл.

Місяць	$y_t$	$\hat{y}_{t1}$	$\hat{y}_{t2}$	$(y_t - \hat{y}_{t1})^2$	$(y_t - \hat{y}_{t2})^2$
1	750	725,83	775,00	584,19	625,00
2	740	724,44	752,77	242,11	163,07
3	810	790,35	769,52	386,12	1638,63
4	840	905,97	856,80	4352,04	282,24
5	990	1040,31	1011,98	2531,10	483,12
6	1 200	1157,36	1178,19	1818,17	475,68
7	1280	1225,79	1274,96	2938,72	25,40
8	1 240	1227,23	1255,56	163,07	242,11
9	1150	1161,31	1140,48	127,92	90,63
10	990	1045,70	996,53	3102,49	42,64
11	880	911,36	883,03	983,45	9,18
12	840	794,30	815,13	2088,49	618,52
	11710	11 709,95	11 709,95	19 317,87	4696,22

З цих розрахунків випливає, що дисперсії апроксимації для двох наведених вище згладжуваних рівнянь дорівнюють відповідно

$$\sigma_{\hat{y}_{t1}}^2 = \frac{19317,87}{12-3} = 2146,43,$$

$$\sigma_{\hat{y}_{t2}}^2 = \frac{4696,22}{12-5} = 670,89.$$

Відповідні значення середніх квадратичних відхилень (стандартних помилок) апроксимації рівні  $\sigma_1 = 46,33$  і  $\sigma_2 = 25,90$ . Отже, часовий ряд краще апроксимується тригонометричним многочленом з урахуванням другої гармоніки.

Знаючи емпіричні і теоретичні значення чисельності персоналу, можна визначити індекси сезонності для досліджуваного показника, тобто сезонну хвилю:

$$J_j = \frac{\hat{y}_j}{\bar{y}_t} \cdot 100\%.$$

Таким чином, для першого місяця  $J_1 = (775,00 / 975,83) \cdot 100\% = 79,42\%$ , для другого  $J_2 = (752,77 / 975,83) \cdot 100\% = 77,14\%$  і т. д. по місяцях року. Графік сезонної хвилі досліджуваного показника представлений на рис. 5.1.

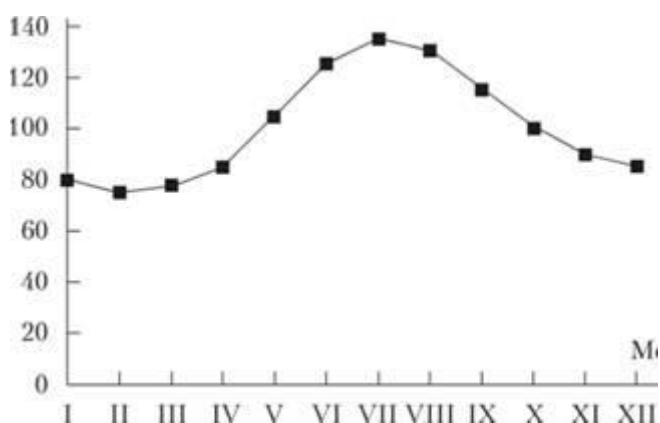


Рисунок 5.1 - Сезонна хвиля чисельності персоналу фірми.

### Завдання до практичної роботи 5

**Завдання 1.** В залежності від наявності вираженого тренду часового ряду побудувати сезонну хвилю (сукупність індексів сезонності) методом простих середніх або методом помісячних відносин. Скласти прогноз по місяцях або кварталах на наступний рік з урахуванням індексу сезонності.

**Завдання 2.** Скласти многочлен Фур'є з урахуванням однієї чи декількох гармонік. На основі середніх квадратичних відхилень (стандартних помилок) апроксимації обрати кращий многочлен.

### Критерії оцінювання практичної роботи 5

За умови своєчасного та в повному обсязі виконаного завдання здобувач може отримати 100 балів (матеріал якісно викладено в логічній послідовності, без помилок, зроблено висновки до виконаного завдання, виявлено підвищений рівень володіння матеріалом).

Загальна оцінка знижується на 5 балів за наступних умов:

- не визначено індексів сезонності;
- не побудовано сезонну хвилю;

- не розраховано прогноз по місяцях або кварталах на наступний рік з урахуванням індексу сезонності;
- не наведено многочлену Фур'є за декількох гармонік;
- відсутні розрахунки середніх квадратичних відхилень;
- не зроблено висновку щодо обрання кращого многочлену Фур'є.

### **Перелік рекомендованих джерел**

1. Касьяненко В.О., Старченко Л.В. Моделювання та прогнозування економічних процесів. Конспект лекцій : навч. посіб. Суми : ВТД "Університетська книга", 2017. 185 с.

2. Найко Д.А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Вінниця : ВНАУ, 2020. 382 с.

3. Яровий А. Т., Страхов Є. М. Аналіз часових рядів : навч.-метод. посіб. для студентів математичних та економічних спеціальностей. Одеса : Освіта України, 2019. 109 с.

## Практична робота № 6

### Прогнозування часових рядів за допомогою моделей авторегресії

**Мета:** закріпити теоретичні знання і розвинути практичні навички з розробки прогнозів часових рядів за допомогою моделей авторегресії.

#### Теоретичні відомості

Авторегресійні моделі широко використовуються для опису стаціонарних випадкових процесів. Характерною особливістю стаціонарних часових рядів є те, що їх імовірнісні властивості рядів не змінюються в часі. Інакше кажучи, функції розподілу стаціонарних динамічних рядів не змінюються при зсуві часу.

Зазвичай виявляється, що значення часового ряду в деякій точці сильно корельовано із кількома попередніми і/або наступними значеннями. Дійсно, для багатьох явищ їх сучасний стан функціонально визначається попередніми станами системи, більшою мірою недавніми, в набагато меншій - далеко відстоять від заданого по часовому ряду. Подібні зв'язки прийнято називати автокореляцією - кореляцією ряду з самим собою.

Автокорреляція першого порядку характеризує тісноту зв'язку між сусідніми значеннями часового ряду, автокорреляція другого порядку - між віддаленими одна від одної на два періоди. І взагалі, автокорреляція  $n$ -го порядку відноситься до ступеня пов'язаності значень, рознесених на  $n$  періодів. Припускаючи, що виник зв'язок між значеннями, і що він збережеться деякий час в майбутньому, ми отримуємо механізм прогнозування, заснований на побудові регресії точок ряду на самих себе, тобто - авторегресії.

Модель, в якій розрахункові значення рівнів ряду визначаються як лінійна функція від попередніх спостережень, називають **авторегресійною**.

Якщо поточна величина рівня ряду  $y_t$  залежить тільки від одного попереднього значення  $y_{t-1}$ , то така модель є **авторегресійною моделлю першого порядку  $AR(1)$** , якщо  $y_t$  залежить від двох попередніх рівнів  $y_{t-1}$  і  $y_{t-2}$ , моделлю другого порядку  **$AR(2)$**  і т.д. до порядку  $p$ , тобто  **$AR(p)$** .

#### Структура моделі

Загальний вигляд моделі авторегресії:

$$Y_i = a_0 + \sum a_i * Y_{i-1} + \epsilon_i,$$

де  $a_0$  - постійна - коефіцієнт описує ситуацію проходження факторів, що впливають через початок координат, тобто показує яким буде підсумок моделі в разі, коли впливаючі фактори дорівнюють нулю;

$a_i$  - коефіцієнти, які описують ступінь залежності підсумкового  $Y$  від факторів, що впливають, в даному випадку, від того яким був  $Y$  в минулому періоді регресії;

$Y_{i-1}$  - впливаючі фактори, які в даному випадку і є підсумковий  $Y$ , але той, яким він був раніше.

$\mathcal{E}_i$  - випадкова компонента або, як ще її прийнято називати, похибка моделі (по суті, це різниця між розрахунковим значенням моделі за певні періоди і між самими відомими значеннями, тобто  $Y_{розр.} - Y$ ).

### AR I - Авторегресія першого порядку

$$Y_i = a_0 + a_i * Y_{i-1} + \mathcal{E}_i$$

Як видно з формули вище, лінійна модель авторегресії першого порядку складається тільки з одного впливаючого чинника, а саме з  $Y-1$ , тобто вивчається найбільш тісна залежність тільки від того, яким був підсумковий показник періодом з кроком назад.

Розглянемо побудову моделі за допомогою "пакета аналізу" в Excel на прикладі.

**Приклад 6.1.** Нехай надано ряд динаміки ВВП України з 2004 по 2012 рр. Потрібно побудувати модель AR(1) для заданого часового ряду.

Вихідні дані попередньо потрібно підготувати, а саме прописати  $x(Y_{i-1})$  вказавши попередній  $Y$  - це, як ми вже з'ясували, і буде впливаючим чинником. Таким чином, динамічний ряд, який буде використовуватися для регресії, скоротився на одну позицію, тобто з 2005 по 2012 рр.

Далі в Excel активуємо вкладку "Дані" і натискаємо "Аналіз даних", вказуємо діапазон вихідних даних за прикладом як на рис. 6.1 і тиснемо кнопку ОК. Якщо немає кнопки "Аналіз даних", то пакет аналізу потрібно активувати.

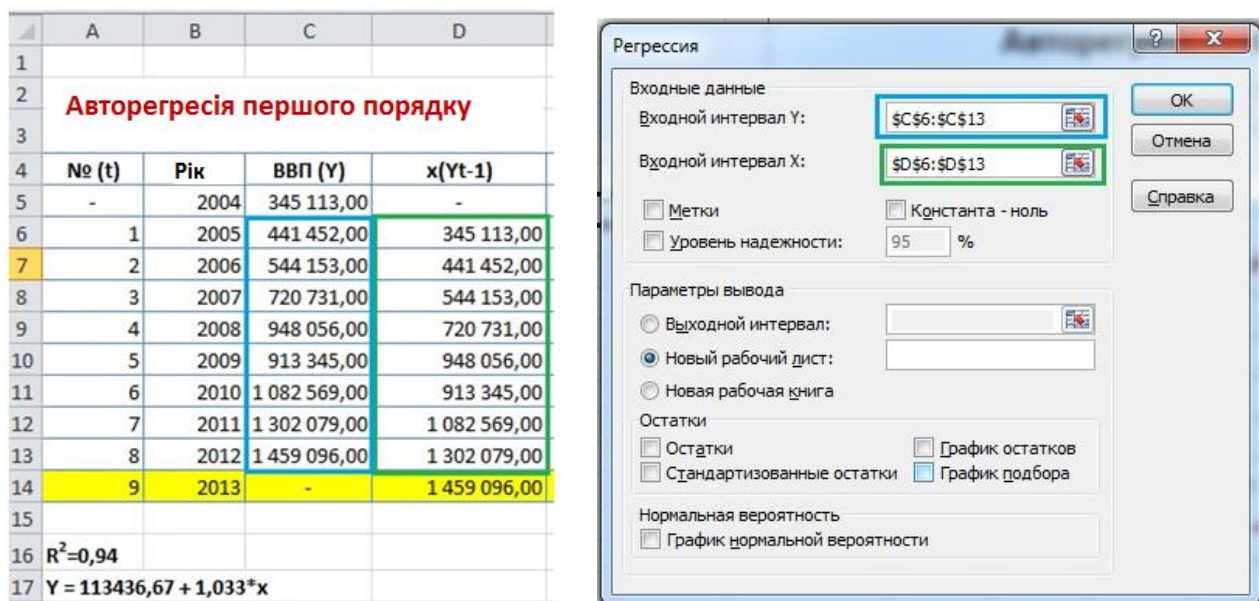


Рисунок 6.1 – Авторегресія 1-го порядку.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ВЫВОД ИТОГОВ								
2									
3	<i>Регрессионная статистика</i>								
4	Множественный R	0,971302904							
5	R-квадрат	0,943429332							
6	Нормированный R-квадрат	0,934000887							
7	Стандартная ошибка	90751,79091							
8	Наблюдения	8							
9									
10	Дисперсионный анализ								
11		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>			
12	Регрессия	1	8,241E+11	8,241E+11	100,0620322	5,78175E-05			
13	Остаток	6	49415325316	8235887553					
14	Итого	7	8,73515E+11						
15									
16		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>верхние 95%</i>	<i>нижние 95%</i>	<i>Срхние 95,0%</i>
17	Y-пересечение	113436,6764	87378,79114	1,298217507	0,241878233	-100371,5232	327244,9	-100372	327244,9
18	Переменная X 1	1,032789147	0,103246897	10,00310113	5,78175E-05	0,780153093	1,285425	0,780153	1,285425
19									
20									
21	Y = 113436,67 + 1,033*X								
22									

Риунок 6.2 – Результати розрахунків для моделі авторегресії 1-го порядку.

Результати розрахунків пакет аналізу видає у вигляді, як на рис. 6.2, першочергові за важливістю клітинки виділено жовтим кольором, і з цих даних збираємо модель, підставляючи в рівняння загального вигляду розраховані коефіцієнти:

$$Y = 113436,67 + 1,033 * X$$

або

$$Y = 113436,67 + 1,033 * Y_{i-1}$$

Повертаємося в таблицку з вихідними даними і підставляємо отримане рівняння в стовпець як формули, таким чином, отримуємо розрахункові значення за моделлю, що ми і зробили в стовпці Y (розрахунковий), за отриманою формулою на період нижче, отримуємо прогноз (в таблицці рядок виділено жовтим).

	A	B	C	D	E	F	
1							
2	<b>Авторегресія першого порядку</b>						
3							
4	<b>№ (t)</b>	<b>Рік</b>	<b>ВВП (Y)</b>	<b>x(Yt-1)</b>	<b>Y (розрахунковий)</b>	<b>Відхилення (E)</b>	
5	-	2004	345 113,00	-	-	-	
6	1	2005	441 452,00	345 113,00	469 938,40	28 486,40	
7	2	2006	544 153,00	441 452,00	569 456,59	25 303,59	
8	3	2007	720 731,00	544 153,00	675 546,72	45 184,28	
9	4	2008	948 056,00	720 731,00	857 951,79	90 104,21	
10	5	2009	913 345,00	948 056,00	1 092 778,52	179 433,52	
11	6	2010	1 082 569,00	913 345,00	1 056 922,06	25 646,95	
12	7	2011	1 302 079,00	1 082 569,00	1 231 730,45	70 348,55	
13	8	2012	1 459 096,00	1 302 079,00	1 458 484,28	611,72	
14	9	2013	-	1 459 096,00	1 620 682,84	-	
15						Σ	465 119,21
16	R <sup>2</sup> =0,94					середн. відхил.	58 139,90
17	Y = 113436,67 + 1,033*x						

Риунок 6.3 – Розрахунок прогнозу за моделлю авторегресії 1-го порядку.

Порівняти реальні дані з отриманими за моделлю AP(1) можна за допомогою графіка:

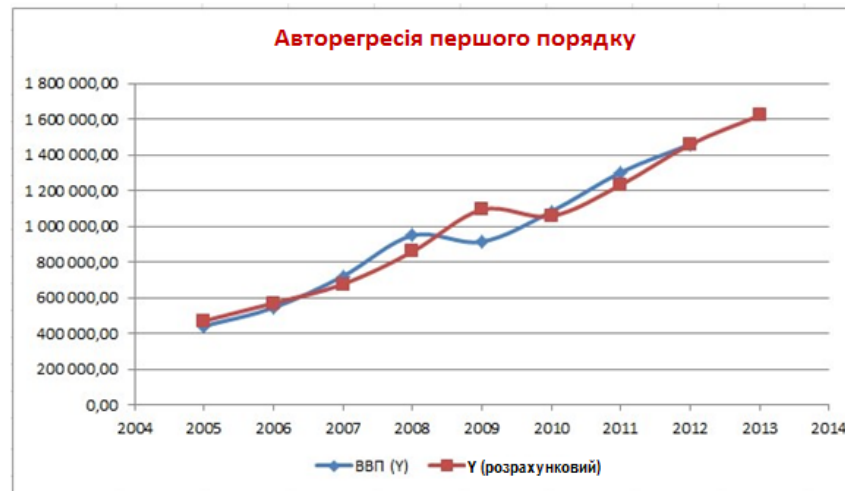


Рисунок 6.4 – Порівняння початкових даних і моделі авторегресії 1-го порядку.

## AR II - Авторегресія другого порядку

$$Y_i = a_0 + a_1 * Y_{i-1} + a_2 * Y_{i-2} + \epsilon_i$$

Модель авторегресії другого порядку відрізняється від першої тим, що вона включає в себе ще один впливаючий фактор  $Y_{i-2}$ , тобто показується залежність від того, яким був  $Y$  не тільки один період назад, але і від того, яким він був два періоди назад. Часом це дозволяє виявити взаємозв'язок і відповідно побудувати більш точний прогноз.

**Приклад 6.2.** Нехай надано ряд динаміки ВВП України з 2004 по 2012 рр. Потрібно побудувати модель AR(2) для заданого часового ряду.

Всі розрахунки проводяться аналогічно опису в авторегресії першого порядку, за тією лише різницею, що тепер два стовпці є впливаючими факторами (рис. 6.5). Також варто звернути увагу на те, що на цей раз діапазон динамічного ряду вихідних даних використаних для побудови моделі скоротиться не на один період, а вже на два.

Авторегресія другого порядку							
№ (t)	Рік	ВВП (Y)	$x_1(Y_{t-1})$	$x_2(Y_{t-2})$	Y (розрахунквий)	Відхилення (E)	
23	-	2004	345 113,00	-	-	-	
24	-	2005	441 452,00	345 113,00	-	-	
25	1	2006	544 153,00	441 452,00	345 113,00	581 443,40	37 290,40
26	2	2007	720 731,00	544 153,00	441 452,00	686 627,40	34 103,60
27	3	2008	948 056,00	720 731,00	544 153,00	847 334,19	100 721,81
28	4	2009	913 345,00	948 056,00	720 731,00	1 068 422,45	155 077,45
29	5	2010	1 082 569,00	913 345,00	948 056,00	1 116 035,69	33 466,69
30	6	2011	1 302 079,00	1 082 569,00	913 345,00	1 227 446,34	74 632,66
31	7	2012	1 459 096,00	1 302 079,00	1 082 569,00	1 440 523,26	18 572,74
32	8	2013	-	1 459 096,00	1 302 079,00	1 624 446,77	-
33						Σ	453 865,34
34	$R^2=0,927$				середн. відхил.		64 837,91
35	$Y=151395,987+0,724*x_1+0,32*x_2$						
36							

Рисунок 6.5 – Авторегресія 2-го порядку.

В даному випадку, отримана модель має вигляд:

$$Y=151395,987+0,724*x_1+0,32*x_2 \quad \text{або} \quad Y=151395,987+0,724*Y_{i-1}+0,32*Y_{i-2},$$

Показник детермінації  $R^2$  нижче ніж у моделі першого порядку (0,927 проти 0,94) та й середнє відхилення у неї більше (64 837,91 проти 58 139,90), це означає, що модель першого порядку точніша. Це може бути пов'язано з тим, що діапазон вихідних даних досить малий, щоб його скорочення на один період мало значні наслідки для точності моделі.



Рисунок 6.6 – Порівняння початкових даних і моделі авторегресії 2-го порядку.

### AR III - Авторегресія третього порядку

$$Y_i = a_0 + a_1*Y_{i-1} + a_2*Y_{i-2} + a_3*Y_{i-3} + \varepsilon_i$$

Модель авторегресії третього порядку найтісніше описує залежність від того яким був підсумковий показник раніше, так як в якості факторів, що впливають використовується три відправні точки - яким Y був 1 період назад, 2 періоди назад і 3 періоди назад. Тобто, вона більше актуальна для аналізу тих сфер діяльності, де отриманий результат впливає на розмір довгострокових інвестицій, наприклад - ВВП, доходи по галузях, продажу великих корпорацій і т.д.

У той же час вимоги до розмаху досліджуваного динамічного ряду у цій моделі вище - так як діапазон вихідних даних скорочується на три періоди, то щоб не постраждала якість моделі, необхідно розширювати досліджуваний період.

**Приклад 6.3.** Нехай надано ряд динаміки ВВП України з 2004 по 2012 рр. Потрібно побудувати модель AP(3) для заданого часового ряду.

Необхідні маніпуляції для побудови моделі і прогнозу аналогічні тому, що наведені в прикладах 6.1 та 6.2 і включають в себе попередню підготовку даних і обробку їх пакетом аналізу.

Авторегресія третього порядку								
№ (t)	Рік	ВВП (Y)	$x_1(Y_{t-1})$	$x_2(Y_{t-2})$	$x_3(Y_{t-3})$	Y (розрахунковий)	Відхилення (E)	
45	-	2004	345 113,00	-	-	-	-	-
46	-	2005	441 452,00	345 113,00	-	-	-	-
47	-	2006	544 153,00	441 452,00	345 113,00	-	-	-
48	1	2007	720 731,00	544 153,00	441 452,00	345 113,00	720 950,11	219,11
49	2	2008	948 056,00	720 731,00	544 153,00	441 452,00	880 804,39	67 251,61
50	3	2009	913 345,00	948 056,00	720 731,00	544 153,00	1 102 475,60	189 130,60
51	4	2010	1 082 569,00	913 345,00	948 056,00	720 731,00	1 141 391,63	58 822,63
52	5	2011	1 302 079,00	1 082 569,00	913 345,00	948 056,00	1 242 824,03	59 254,97
53	6	2012	1 459 096,00	1 302 079,00	1 082 569,00	913 345,00	1 464 216,14	5 120,14
54	7	2013	-	1 459 096,00	1 302 079,00	1 082 569,00	1 643 817,11	-
55							Σ	379 799,05
56	$R^2=0,888$						середн. відхил.	63 299,84
57	$Y=189893,52+0,745*x_1+0,33*x_2-0,058*x_3$							

Рисунок 6.7 – Авторегресія 3-го порядку

В даному випадку, коефіцієнт детермінації  $R^2$  найбільш низький (0,89), так і середнє відхилення більше ніж у моделі першого порядку, знову таки, це пояснюється тим, що досліджуваний період досить короткий, щоб його зменшення давало значний вплив на якість побудови моделі.



Рисунок 6.8 – Порівняння початкових даних і моделі авторегресії 3-го порядку.

### **Переваги:**

Отримання високоякісної моделі з адекватним прогнозом при мінімумі витрат часу і вимог до вихідних даних.

### **Недоліки:**

1. Прогноз за вихідними даними можливий тільки на один період вперед. Якщо потрібно зробити прогноз на більш тривалий термін, то в якості факторів, що впливають для розрахунку доведеться брати не реально існуючий  $Y$ , а той який розрахований за моделлю, що в підсумку дасть прогноз на прогнозі, а значить адекватність такого прогнозу, як мінімум, в два рази менше.

2. Із збільшенням розрядності авторегресії виникає необхідність розширювати діапазон вихідних даних.

При моделюванні нестационарних за своєю природою економічних процесів авторегресійна функція об'єднується з іншими методами аналізу динаміки: ковзної середньої, трендом, сезонної хвилею. Об'єднання різних моделей в єдине ціле істотно розширює сферу їх використання.

Побудова моделей авторегресії та отримання прогнозних оцінок вихідного ряду можливе тільки з використанням програмних засобів. При грамотному використанні гарні результати дає модель Боксу - Дженкінса.

## **Завдання до практичної роботи 6**

Побудувати авторегресійну модель першого порядку  $AR(1)$  та другого порядку  $AR(2)$ . Порівняти результати, обрати найкращу модель і зробити прогноз.

## **Критерії оцінювання практичної роботи 6**

За умови своєчасного та в повному обсязі виконаного завдання здобувач може отримати 100 балів (матеріал якісно викладено в логічній послідовності, без помилок, зроблено висновки до виконаного завдання, виявлено підвищений рівень володіння матеріалом).

Загальна оцінка знижується на 5 балів за наступних умов:

- не наведено прогнозу;
- відсутнє порівняння моделей  $AR(1)$  та  $AR(2)$ ;
- помилки в розрахунках.

### **Перелік рекомендованих джерел**

1. Кулявець В.О. Прогнозування соціально-економічних процесів : навч. посіб. Київ : Кондор, 2016. 194 с.
2. Mills T. Applied Time Series Analysis: A Practical Guide to Modeling and Forecasting. Academic Press, 2019. 327 p.

## Практична робота № 7

### Методи прогнозування багатомірних процесів

**Мета:** закріпити теоретичні знання і розвинути практичні навички щодо застосування методів аналізу і прогнозування багатовимірних процесів.

#### Теоретичні відомості

Побудова та дослідження множинної лінійної регресії та деяких типів нелінійної парної регресії, множинної регресії базується на використанні методу найменших квадратів (МНК). Разом з тим, адекватне його використання вимагає відповідного ряду умов.

Нехай початкові дані наведені у вигляді табл 7.1, де  $X_1, \dots, X_n$  – вектор вхідних факторів,  $Y$  – результуюча характеристика,  $m$  – кількість статистичних спостережень або експериментів. Рівняння лінійної множинної регресії записується наступним чином:

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n + U, \quad (7.1)$$

де  $U$  – залишок, обумовлений випадковими факторами.

Таблиця 7.1

Початкові дані для багатofакторної лінійної регресії				
$X_1$	$X_2$	...	$X_n$	$Y$
$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$	$y_1$
...	...	...	...	...
$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mn}$	$y_m$

Перепишемо таблицю 7.1 в матричному вигляді:

$$Y = AX + U, \quad (7.2)$$

де  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ ,  $X = (1, X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ,  $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ , знаком "Т" позначено вектор-стовпець. Із рівняння (7.2) отримуємо, що  $U = Y - AX$ . Розглянемо функцію

$$E = \sum_{i=1}^m u_i^2 = UU^T, \quad (7.3)$$

яку необхідно мінімізувати.

Оскільки

$$UU^T = (Y - AX)(Y - AX)^T = YY^T - 2AXY^T + AXX^T A^T, \quad (7.4)$$

то якщо знайти диференціал останнього виразу за змінною  $A$ , отримуємо

$$\frac{\partial(UU^T)}{\partial A} = -2XY^T + 2XX^T A^T = 0,$$

або

$$XX^T A^T = XY^T.$$

Звідки

$$A^T = (XX^T)^{-1}XY^T,$$

де

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & \dots & x_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

**Приклад 7.1.** Нехай початкові дані задано у вигляді таблиці 7.2.

Таблиця 7.2

Початкові дані

$X_1$	$X_2$	$Y$
1	2	4
2	3	5
4	6	9
7	8	17
1	5	7
4	2	6

Припустимо, що ці дані описують залежність  $Y = a_1X_1 + a_2X_2$ , а відхилення розрахованих значень початкової характеристики від табличних значень викликані випадковими факторами. Необхідно знайти коефіцієнти залежності.

На першому кроці знаходимо добуток

$$XX^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 8 \\ 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 & 101 \\ 101 & 142 \end{pmatrix},$$

обернену матрицю

$$(XX^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,07598 & -0,054 \\ -0,054 & 0,04548 \end{pmatrix}$$

і добуток

$$(XX^T)^{-1}X = \begin{pmatrix} 0,07598 & -0,054 \\ -0,054 & 0,04548 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.0321 & -0.0102 & -0,0203 & 0,1 & -0,1942 & 0.196 \\ 0,0369 & 0,02836 & 0,0567 & -0,0567 & -0,014 & -0,1252 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо значення  $A^T = (XX^T)^{-1}XY^T = \begin{pmatrix} 1,144997 \\ 1,016586 \end{pmatrix}$ .

Таким чином,

$$Y = 1,145X_1 + 1,017X_2. \quad (7.5)$$

Якщо в моделі (7.5) передбачалась наявність вільного члена, то необхідно було би матрицю  $X$  розглядати у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

а подальші обчислення робити за аналогією.

### Перевірка мультиколінеарності

Алгоритмом повного дослідження мультиколінеарности є алгоритм Фаррара-Глобера. З його допомогою перевіряють три критерія:

1. У сукупності всіх факторів (критерій Пірсона (хі-квадрат)).
2. Кожного фактора з іншими (критерій Фішера).
3. Кожної пари факторів (критерій Стьюдента).

Для оцінки параметрів моделі, в яку входять мультиколінеарні змінні, використовують також метод головних компонент.

### Завдання до практичної роботи 7

**Завдання 1.** Додати до існуючого часового ряду вхідні дані. Перевірити вхідні фактори на мультиколінеарність за алгоритмом Фаррара-Глобера (за потреби усунути мультиколінеарність).

**Завдання 2.** Використовуючи метод найменших квадратів скласти рівняння множинної лінійної регресії. Зробити короткостроковий прогноз, розрахувати похибку прогнозу.

### Критерії оцінювання практичної роботи 7

За умови своєчасного та в повному обсязі виконаного завдання здобувач може отримати 100 балів (матеріал якісно викладено в логічній послідовності, без помилок, зроблено висновки до виконаного завдання, виявлено підвищений рівень володіння матеріалом).

Загальна оцінка знижується на 5 балів за наступних умов:

- не визначено додаткових вхідних даних;
- відсутня перевірка вхідних факторів на мультиколінеарність за алгоритмом Фаррара-Глобера;

- неточності в отриманому рівнянні множинної лінійної регресії;
- не зроблено короткостроковий прогноз;
- не розраховано похибку прогнозу.

### **Перелік рекомендованих джерел**

1. Beran J. Mathematical Foundations of Time Series Analysis: A Concise Introduction. Springer, 2017. 307 p.
2. Mather B. Time Series with Python: How to Implement Time Series Analysis and Forecasting Using Python. Independently published, 2020. 170 p.

## Практична робота № 8

### Методи експертних оцінок

**Мета:** закріпити теоретичні знання і розвинути практичні навички з використання методів експертних оцінок.

#### Теоретичні відомості

Методи, які основані на припущенні про те, що на базі думок спеціалістів в певній галузі знань можна побудувати адекватну картину майбутнього розвитку з урахуванням всіх можливих зсувів та стрибків, отримали назву **методів експертизи** або **методів експертних оцінок**.

Зазначені методи поділяються на дві групи:

- **індивідуальні (персональні) експертні оцінки,**
- **групові (колективні) експертні оцінки.**

Методи індивідуальних експертних оцінок, в свою чергу, поділяються на аналітичні експертні оцінки, інтерв'ю, парні порівняння та інші.

Методи колективної експертної оцінки включають метод комісій, метод Дельфі, Паттерн та інші.

Поділ на методи індивідуальних та колективних експертних оцінок проводять в залежно від того, розробляється прогноз на основі висновків окремих, ізольованих один від одного, експертів чи групи експертів, які певним чином пов'язані між собою. Індивідуальні експертні оцінки основані на використанні думок спеціалістів в певній сфері незалежно одне від одного.

Використовуються, в основному, *два методи індивідуальної експертної оцінки*: інтерв'ю та аналітичні записки.

**Метод інтерв'ю** передбачає бесіду організатора експертизи (прогнозіста) зі спеціалістом-експертом в певній області знання, що проводиться згідно з раніше розробленою програмою.

**Метод аналітичних записок (оцінок)** передбачає можливість довгострокової та ретельної роботи експерта над поставленими запитаннями, що дозволяє використовувати необхідну інформацію для оцінювання тенденції, шляхів розвитку прогнозованого об'єкта. Результати своєї роботи експерт оформляє у вигляді аналітичної записки.

Суттєвим **недоліком методу індивідуальних експертних оцінок** є те, що далеко не кожний експерт бере на себе відповідальність самостійно дати оцінку складним явищам (процесам) без урахування думки інших експертів. Тому за необхідності прогнозування складних проблем, особливо тих, що знаходяться на стику різних сфер знань, застосовують групові (колективні) методи експертних оцінок, наприклад, метод комісій, метод Дельфі.

**Суть методу комісії** полягає в тому, що спеціалісти, які входять до однієї групи, погоджують свою думку про стан будь-якого процесу (явища, об'єкта) в майбутньому або шляхи і методи досягнення цілей у відкритій дискусії, найчастіше за круглим столом. Одним з найпоширеніших методів експертних оцінок є **метод Дельфі**.

В методі Дельфі прямі дебати замінюються ретельно розробленою програмою послідовних індивідуальних опитувань, що проводяться у вигляді анкетування. Експертне опитування за методом Дельфі рекомендується проводити у декілька турів (наприклад у чотири тури). Після кожного туру експерти знайомляться з відповідями своїх колег, а тому мають можливість за бажанням внести корективи у свої відповіді. Водночас вважається доцільно завершити процес опитування і раніше, якщо досягнуто прийнятний рівень узгодженості думок експертів.

### **Визначення кількісних параметрів та показників експертного опитування**

В прогнозуванні широке розповсюдження отримала оцінка порівняльної важливості окремих факторів (параметрів, напрямків). Оцінювання експертом відносної важливості факторів здійснюється, як правило, шляхом присвоєння деякої кількісної оцінки, наприклад, за 100-бальною системою.

Експерт надає кожному фактору (параметру, напрямку) кількість балів в межах від 0 до 100. Нуль присвоюється в тому випадку, якщо фактор, на думку експерта, не має суттєвого значення; 100 балів присвоюється тому фактору, який має найбільш важливе вирішальне значення.

Експерт може надати однакову кількість балів декільком факторам, якщо, на його думку, вони однаковою мірою суттєві, рівнозначні. При обробці матеріалів колективної експертної оцінки відносної ваги факторів (параметрів, напрямку) доцільно використовувати **метод рангової кореляції**.

Тому дані, отримані в балах, відповідним чином ранжують за зменшенням і таким чином отримують оцінки рангів. Порядковий номер, що визначає місце кожного фактора в загальній сукупності факторів, називається **рангом**. Зазвичай ранги відповідають числам натурального ряду 1, 2, 3, ... n, де n — кількість ранжованих факторів.

Ранг, рівний одиниці, присвоюється найважливішому фактору. Якщо експерт присвоює однакову кількість балів декільком факторам, то їм надаються стандартизовані ранги.

**Стандартизований ранг** — це частка від ділення суми місць, зайнятих факторами з однаковими рангами, на загальну кількість таких альтернатив.

Припустимо, що експерт поставив напрямкам досліджень такі бали:

100, 90, 90, 90, 80, 60, 50, 50, 40.

Тоді займані місця кожного напрямку згідно з кількістю балів становлять:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Використовуючи правила визначення стандартизованих рангів, отримаємо такі їх значення:

1; 3; 3; 3; 5; 6; 7,5; 7,5; 9, де  $3 = (2+3+4):3 = 3$ ;  $7,5 = (7+8):2$ .

Введемо такі умовні позначення:

m — кількість експертів, що взяли участь в колективній експертній оцінці;

1, 2, 3, ..., i, ..., m — можливі номери експертів;

n — кількість напрямків досліджень, що запропоновані до оцінки;

1, 2, 3, ..., j, ..., n — можливі номери напрямків досліджень;

$m_j$  – кількість експертів, які оцінили  $j$ -ий напрямок;

$m_{100j}$  – кількість максимально можливих оцінок (100 балів), отриманих  $j$ -им напрямком досліджень;

$S_{ij}$  – оцінка відносної ваги (в балах), даних  $i$ -им експертом  $j$ -ому напрямку досліджень.

При обробці результатів експертних оцінок за відотною важливістю напрямків визначається ряд статистичних характеристик, на основі яких оцінюється кожний напрямок (параметр, фактор). Процедура обробки даних опитувальних анкет розглядається в наведеному прикладі.

**Приклад 8.1.** Є такі дані про оцінки десяти напрямків розвитку, виставлених чотирма експертами.

1-й експерт		2-й експерт		3-й експерт		4-й експерт	
Напрямок	Кількість балів	Напрямок	Кількість балів	Напрямок	Кількість балів	Напрямок	Кількість балів
1	100	1	100	1	90	1	80
2	90	2	100	2	80	2	100
3	90	3	80	3	100	3	90
4	90	4	70	4	70	4	70
5	70	5	90	5	50	5	60
6	80	6	60	6	60	6	50
7	50	7	60	7	40	7	50
8	50	8	60	8	30	8	40
9	40	9	50	9	20	9	0
10	60	10	50	10	10	10	20

На основі даних опитування сформована матриця балів (табл. 8.1).

Таблиця 8.1.

Матриця балів оцінки напрямків розвитку

Напрямки (фактори, параметри)	Експерти				
	2	3	4	5	
1					
1	100	100	90	80	
2	90	100	80	100	
3	90	80	100	90	
4	90	70	70	70	
5	70	90	50	60	
6	80	60	60	50	
7	50	60	40	50	
8	50	60	30	40	
9	40	50	20	0	
10	60	50	10	20	

Матрицю балів перетворюємо в матрицю рангів (табл. 8.2).

Матриця рангів оцінки напрямків розвитку

Напрямки (фактори, параметри)	Експерти			
	1	2	3	4
1	1	1,5	2	3
2	3	1,5	3	1
3	3	4	1	2
4	3	5	4	4
5	6	3	6	5
6	5	7	5	6,5
7	8,5	7	7	6,5
8	8,5	7	8	8
9	10	9,5	9	10
10	7	9,5	10	9

Сума рангів, призначених експертами  $j$ -тому напрямку досліджень, визначається формулою:

$$S_j = \sum_{i=1}^m R_{ij}. \quad (8.1)$$

Для першого напрямку сума рангів дорівнює:

$$S_1 = 1 + 1,5 + 2 + 3 = 7,5.$$

Для другого напрямку сума рангів дорівнює:

$$S_2 = 3 + 1,5 + 3 + 1 = 8,5.$$

Аналогічно визначається сума рангів для усіх напрямків.

**Очевидно, чим менша сума рангів, тим важливіший певний напрямок.**

Середній ранг для кожного напрямку дорівнює:

$$\bar{S}_j = \frac{\sum_{i=1}^m R_{ij}}{m} = \frac{S_j}{m}.$$

Для першого напрямку середній ранг дорівнює:

$$\bar{S}_1 = \frac{7,5}{4} = 1,875.$$

Для другого напрямку середній ранг дорівнює:

$$\bar{S}_2 = \frac{8,5}{4} = 2,125.$$

Для порівняння важливості різних напрямків за  $\bar{S}_j$  найбільш важливим слід вважати напрямок, що характеризується найменшим значенням середньої величини рангу.

Поряд з середніми рангами для кожного напрямку визначається середня величина в балах:

$$M_j = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{m_j}. \quad (8.3)$$

Середнє значення  $M_j$  може набувати значень від 0 до 100 залежно від того, яку оцінку відповідно з важливістю дали експерти тому чи іншому напрямку.

Середнє значення в балах для першого напрямку дорівнює:

$$M_1 = \frac{(100+100+90+80)}{4} = 92,5 \text{ бала.}$$

Аналогічно визначаються середні значення і для інших напрямків.

Зауважимо, що при визначенні середнього значення в балах, враховується тільки та кількість експертів, котра дала оцінку певному напрямку. Оскільки дев'ятому напрямку один з експертів не поставив кількість балів, то в такому випадку середня кількість визначається без урахування одного експерта, тобто:

$$M_9 = \frac{(40+50+20)}{43} = 36,7 \text{ бала.}$$

Чим більше значення  $M_j$ , тим вища, на думку експертів, важливість розвитку  $j$ -го напрямку.

При оцінюванні важливості окремих напрямків становить інтерес показник частоти максимально можливих оцінок, що визначається за формулою

$$K_{100j} = \frac{m_{100j}}{m_j}. \quad (8.4)$$

Показник  $K_{100j}$  може набувати значення в межах від 0 до 1. Важливість  $j$ -го напрямку зростає при зміні  $K_{100j}$  від 0 до 1.

Для першого напрямку  $K_{100j}$  дорівнює:

$$K_{100j} = \frac{2}{4} = 0,5.$$

Для другого та третього напрямків  $K_{100j}$  буже дорівнювати:

$$K_{100j} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Для всіх інших семи напрямків  $K_{100j} = 0$ .

Оскільки оцінки, поставлені експертами окремим напрямкам, зазвичай різняться, доцільно обчислити розмах варіації, використовуючи для цього залежність:

$$L_j = C_{jmax} - C_{jmin}, \quad (8.5)$$

де  $L_j$  – розмах варіації оцінок в балах, даних  $j$ -му напрямку,  $C_{jmax}$ ,  $C_{jmin}$  – відповідно максимальна і мінімальна оцінки, поставлені  $j$ -му напрямку.

Активність експертів для кожного напрямку обчислюється за допомогою коефіцієнтів активності:

$$K_{aej} = \frac{m_j}{m}, \quad (8.6)$$

де  $K_{aej}$  – коефіцієнт активності експертів для  $j$ -го напрямку,  $m_j$  – кількість експертів, що оцінили  $j$ -й напрямок,  $m$  – загальна кількість експертів.

Таблиця 8.3.

Показники порівняльної важливості напрямків

Напрямки (фактори, параметри)	Середній ранг, $\bar{S}$	Середнє значення в балах, $M_j$	Чистота максимально можливих оцінок, $K_{100j}$	Розмах, $L_j$	Коефіцієнт активності експертів $K_{aej}$
1	2	3	4	5	6
1	1,875	92,500	0,50	20	1,000
2	2,125	92,500	0,50	20	1,000
3	2,500	90,000	0,25	20	1,000
4	4,000	75,000	0	20	1,000
5	5,000	67,500	0	40	1,000
6	5,875	62,500	0	30	1,000
7	7,250	50,000	0	20	1,000
8	7,875	45,000	0	30	1,000
9	9,625	36,667	0	50	0,750
10	8,875	35,000	0	50	1,000

В табл. 8.3 наведені показники, що відображають порівняльну важливість напрямків, обчислених за формулами (8.1)-(8.6).

Оцінка показників відносної важливості напрямків, які містяться в табл. 8.3, свідчить про те, що група експертів віддала перевагу в основному першому та другому напрямкам і менш схильна вважати доцільним 10-й і особливо 9-й напрямки. Разом з тим, як показує величина розмаху варіації, для окремих напрямків в оцінках експертів значних коливань не спостерігається.

За значеннями показника активності експертів можна судити, з одного боку, про компетентність експертів, а з іншого боку, що всі напрямки досить обгрунтовані, оскільки, за виключенням 9-го напрямку, всі експерти дали оцінку запропонованим напрямкам.

Таким чином, організатори експертизи повинні з перших двох, а можливо навіть з перших трьох напрямків шляхом співставлення та додаткових оцінок вибрати найбільш прийнятний напрямок.

## **Завдання до практичної роботи 8**

Вигадати 5-8 напрямків розвитку (станів) фірми, виставити оцінки 4-х експертів для кожного напрямку (в якості експертів залучити однокласників). На основі виставлених балів за 100-бальною шкалою сформувати матрицю оцінки напрямків розвитку, матрицю рангів, навести показники порівняльної важливості напрямків. На основі проведеного аналізу зробити висновок щодо доцільності розвитку напрямків (станів).

### **Критерії оцінювання практичної роботи 8**

За умови своєчасного та в повному обсязі виконаного завдання здобувач може отримати 100 балів (матеріал якісно викладено в логічній послідовності, без помилок, зроблено висновки до виконаного завдання, виявлено підвищений рівень володіння матеріалом).

Загальна оцінка знижується на 5 балів за наступних умов:

- не правильно визначено ранги оцінок експертів;
- не наведено показників порівняльної важливості напрямків.

### **Перелік рекомендованих джерел**

1. Beran J. Mathematical Foundations of Time Series Analysis: A Concise Introduction. Springer, 2017. 307 p.
2. Mather B. Time Series with Python: How to Implement Time Series Analysis and Forecasting Using Python. Independently published, 2020. 170 p.
3. Кулявець В.О. Прогнозування соціально-економічних процесів : навч. посіб. Київ : Кондор, 2016. 194 с.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кулявець В.О. Прогнозування соціально-економічних процесів : навч. посіб. Київ : Кондор, 2016. 194 с.
2. Касьяненко В.О., Старченко Л.В. Моделювання та прогнозування економічних процесів. Конспект лекцій : навч. посіб. Суми : ВТД "Університетська книга", 2017. 185 с.
3. Моделювання та реінжиніринг бізнес-процесів : підруч. / С.В. Козир, В.В. Слесарев, С.А. Ус, Т.В. Хом'як ; М-во освіти і науки України; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро : НТУ «ДП», 2022. 163 с. Режим доступу: <https://ir.nmu.org.ua/server/api/core/bitstreams/bdd1cdf1-cce2-429e-8e23-b9949e90b1fb/content>
4. Найко Д.А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Вінниця : ВНАУ, 2020. 382 с.
5. Положення про порядок видання в світ інформаційно-методичного забезпечення освітнього процесу в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка» / М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро : НТУ «ДП», 2024, 31 с.
6. Системний аналіз : навч. посіб. / А.В. Малієнко, О.Б. Владико, Т.В. Хом'як, С.В. Козир; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро : НТУ «ДП», 2025. 228 с.
7. Хом'як Т.В. Аналіз та моделювання діяльності додаткових курсів на кафедрі : дипл. проєкт магістра. Запоріжжя : Запорізька політехніка, 2023. 87 с. Режим доступу: <https://eir.zp.edu.ua/items/99cbe81d-579b-411e-8842-2023ee03929c>
8. Яровий А. Т., Страхов Є. М. Аналіз часових рядів : навч.-метод. посіб. для студентів математичних та економічних спеціальностей. Одеса : Освіта України, 2019. 109 с.
9. Beran J. Mathematical Foundations of Time Series Analysis: A Concise Introduction. Springer, 2017. 307 p.
10. Mather B. Time Series with Python: How to Implement Time Series Analysis and Forecasting Using Python. Independently published, 2020. 170 p.
11. Mills T. Applied Time Series Analysis: A Practical Guide to Modeling and Forecasting. Academic Press, 2019. 327 p.

## ДОДАТОК А. ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ТИТУЛЬНОЇ СТОРІНКИ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
Кафедра системного аналізу та управління

**ПРАКТИЧНА РОБОТА № \_\_\_\_\_**  
з дисципліни «Системи та методи прогнозування»  
на тему: \_\_\_\_\_

Виконав:  
здобувач групи \_\_\_\_\_  
ПІБ

Прийняв:  
доцент Хом'як Т.В.

Дніпро  
2025

Навчальне видання

**Хом'як** Тетяна Валеріївна  
**Владико** Олександр Борисович  
**Хабарлак** Костянтин Сергійович  
**Гаранжа** Дмитро Миколайович

## **СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ**

**Методичні рекомендації до виконання практичних робіт**  
для здобувачів ступеня бакалавра  
освітньо-професійної програми «Системний аналіз»  
зі спеціальності 124 Системний аналіз

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.  
Підписано до видання 04.11.2025. Авт. арк. 4,0.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка».  
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.