

Володимир Кравець¹, Наталія Івантишин², Максим Філіпов³

¹ старший науковий співробітник, к.ф.-м.н., e-mail: volodym1960@gmail.com

² науковий співробітник, к.т.н., e-mail: n.ivantyshyn@gmail.com

³ молодший науковий співробітник, e-mail: maksym.filipov@gmail.com

¹⁻³ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів, Україна

ВПЛИВ ЗАЛІКОВУВАННЯ ТРІЩИНИ В АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ НА КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ

Анотація. Розв'язано задачу математичної теорії тріщин для анізотропного тіла з частково заповненим дефектом. Використовуючи модель вінклерівської основи задачу зведено до розв'язування сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно функції переміщень точок берегів тріщини. Числовий розв'язок рівняння отримано методом квадратур. Визначено вплив рівня заповнення тріщини на зміну коефіцієнтів інтенсивності напружень у її вершинах.

Ключові слова: заліковування тріщини, анізотропне тіло, включення, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Вступ. Для відновлення несучої здатності пошкоджених різного роду елементів конструкцій тривалої експлуатації в інженерній практиці застосовують технологію ін'єкційного зміцнення дефектних зон [1], яка полягає у введенні в пошкоджені місця (тріщини, відшарування, порожнини) під тиском рідинних матеріалів, які після кристалізації чи полімеризації формують міцні адгезійні зв'язки з основним матеріалом. В результаті відповідний елемент конструкції зміцнюється і стає здатним витримувати задані експлуатаційні навантаження. Щоб оцінити міцність та залишковий ресурс відновлених таким чином елементів конструкцій необхідно мати розв'язки задач теорії пружності та механіки руйнування для тіл із заповненими тріщинами. Для ізотропних тіл такі задачі розглянуто раніше [1].

Інтегральне рівняння задачі. Розглянемо в декартовій системі координат xOy нескінченну анізотропну пластину з прямолінійною тріщиною довжини $2l$ на осі Ox (узагальнений плоский напружений стан). Пластина на нескінченності розтягується напруженням p уздовж осі Oy . Зауважимо, що за умов плоскої деформації анізотропного тіла співвідношення між компонентами тензорів деформацій і напружень мають такий же вигляд, тільки з дещо іншими пружними сталими [2]. Вважаємо, що ін'єкційний матеріал заповнює лише центральну частину тріщини на відрізку $[-a, a]$ і після його



тверднення на поверхні поділу матеріалів отримуємо ідеальний механічний контакт. Уявно видаляємо ін'єкційний матеріал із тріщини, замінюючи його дію напруженнями згідно з моделлю вінклерівської основи: $\sigma_{yy}(x) = E[u_y^*(x)]/2h(x)$, $\tau_{xy}(x) = 0$, $-a < x < a$, де E - модуль пружності за розтягу матеріалу ізотропного заповнювача тріщини після тверднення; $2h(x)$ - товщина включення, що виникло внаслідок заповнення; $[u_y^*(x)]$ - стрибок переміщень точок поверхонь включення: $u_y^* = u_y^0 + u_y$, $u_y^0 = a_{22}py$ - однорідна складова у-компоненти переміщень в анізотропній пластині, a_{22} - одна з пружних сталих анізотропного матеріалу пластини [2].

Методом суперпозиції сформульовану задачу зводимо до визначення збуреного напруженого стану пластини з розрізом довжиною $2l$, на поверхнях якого задані зусилля

$$\sigma_{yy}(x) = \begin{cases} -p + E[u_y^*(x)]/2h(x), \tau_{xy}(x) = 0, x \in [-a; a], \\ -p, \tau_{xy}(x) = 0, x \in [-l; -a] \cup [+a; +l]. \end{cases} \quad (1)$$

За рахунок Ox , Oy -симетрій задачі на осі Ox поза відрізком $[-l, l]$ маємо нульові значення компонент дотичних напружень та вертикальних переміщень.

Комплексні потенціали напружень шукатимемо у вигляді [3]

$$\Phi_1(z_1) = \frac{\mu_2}{q_1\mu_2 - q_2\mu_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{g'(x)dx}{x - z_1}, \quad \Phi_2(z_2) = -\mu_1\Phi_1(z_1)/\mu_2, \quad (2)$$

де $g'(x) = dg(x)/dx$, $x \in [-l; +l]$, $g(x)$ - невідомі вертикальні переміщення точок верхнього берега тріщини, $q_k = a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26}$, $z_k = x + \mu_k y$ ($k = 1; 2$), μ_k - комплексні корені алгебраїчного характеристичного рівняння для анізотропної пластини, a_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) - пружні сталі матеріалу пластини [2].

З крайової умови (1) та співвідношень (2) отримано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння відносно невідомої функції переміщень $g(x)$ [3]:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi i} \frac{\mu_1 - \mu_2}{q_1\mu_2 - q_2\mu_1} \right) \int_{-l}^l \frac{g'(x)dx}{x - t} = \begin{cases} Eg(t)/h(t) - p(1 - a_{22}E), t \in [-a; a], \\ -p, t \in [-l; -a] \cup [+a; +l]. \end{cases} \quad (3)$$

Числові результати. Числовий розв'язок інтегрального рівняння (3) отримано методом квадратур [4]. Використавши залежності $g(t) = \int_{-l}^t g'(x)dx$, $g(\pm l) = 0$ і враховуючи кореневу особливість підінтегральної функції на кінцях проміжку інтегрування, перейдемо до визначення безрозмірної функції $w(\xi) = g'(x)\sqrt{1 - \xi^2}$, $x = l\xi$, $\xi \in [-1; 1]$. Рівняння (3), записане у безрозмірному вигляді,



зведено до розв'язування системи N_v лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих значень функції $w(\xi)$ у чебишовських вузлах $\xi_k = \cos\{\pi(2k-1)/(2N_v)\}$, $k = \overline{1, N_v}$. Для ортотропних матеріалів пластини ($\mu_1 = i\gamma_1$, $\mu_2 = i\gamma_2$) відносні коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) обчислювали за виразами

$$F_1^\pm = K_1^\pm / p\sqrt{\pi l} = \mp \frac{E_y \gamma_1 \gamma_2}{p(\gamma_1 + \gamma_2)} w(\pm 1) \quad (4)$$

у правій (верхній знак) та лівій (нижній) вершинах тріщини. Для розрахунків брали тріщини у формі сплющеного еліпса з півосями l , c ($c/l=0.1$), для якого $h(x) = c\sqrt{1-x^2}/l^2$. Зниження відносних КІН $F_1 = F_1^+ = F_1^-$ (4) суттєво залежить від рівня заповнення тріщини (параметра a/l) а також від пружних характеристик ортотропного матеріалу пластини (рис. 1а) та модуля Юнга ізотропного матеріалу заповнювача (рис. 1б).

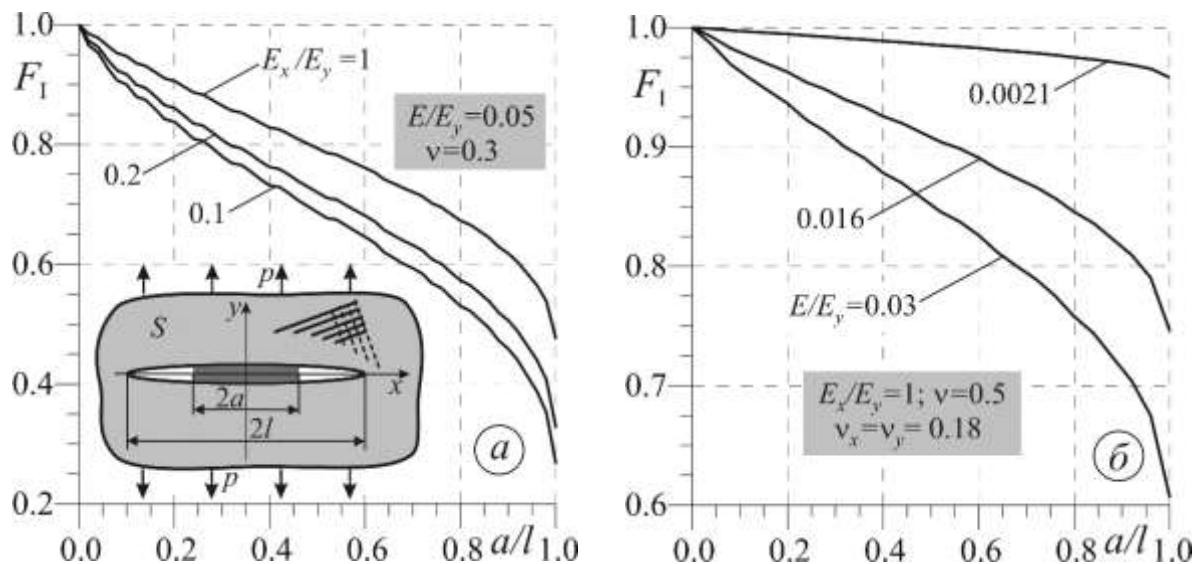


Рисунок 1 – Вплив рівня заповнення тріщини a/l на відносні КІН в ортотропній (а) та ізотропній (б) пластинах для різних ін'єкційних матеріалів.

Для повністю заповненої тріщини у формі сплющеного еліпса отримані значення для функції переміщень $g(x)$ співпадають з відомим аналітичним розв'язком [3].

Висновки. Плоску задачу теорії пружності для анізотропної пластини із частково заповненою тріщиною зведено до розв'язування сингулярного інтегродиференціального рівняння відносно функції переміщень точок поверхні тріщини. На основі числового розв'язку рівняння, отриманого методом квадратур, розраховано КІН у вершинах частково заповненої тріщини у формі сплющеного еліпса. Досліджено вплив часткового заповнення тріщини ін'єкційними матеріалами різних жорсткостей, рівня



ортотропії матеріалу пластини на зниження КІН (зміцнення пластини). Отримані результати можуть бути використані для подання рекомендацій щодо максимального зміцнення різного роду несучих елементів конструкцій з дефектами типу тріщин через вибір матеріалів як для основного тіла, так і для заповнювача дефектів.

Дослідження проведені в рамках виконання гранту Національного фонду досліджень України № 2023.04/0132.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Panasyuk, V. V., Marukha, V. I., and Sylovanyuk, V. P. (2014). *Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures*, Springer, Berlin.
2. Lekhnitskii, S. G. (1968) *Anisotropic Plates*, Gordon & Breach, New York.
3. Sylovanyuk, V.P., Ivantyshyn, N.A. (2020) Healing of Cracks in Anisotropic Bodies. *Materials Science*, (55), 804–811.
4. Kravets' V. S. (2016). Stress-strain state of a half plane with internal subsurface cracks. *Materials Science*, (51), 793-803.

