

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



**ФІЗИКА**

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина 2

Дніпро  
НТУ «ДП»  
2025

УДК 53 (075.8)

Ф 50

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей  
183 Технології захисту навколишнього середовища, 101 Екологія, 103 Науки про  
землю та 163 Біомедична інженерія  
(протокол № 6 від 25.04.25)*

Рецензенти:

Е. П. Штапенко – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Український державний університет науки і технологій);

О. Й. Соколовський – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара).

Автори: В.В. Титаренко, В.М. Горєв, А.В. Подляцька, М.О. Журавльов.

**Фізика** [Електронний ресурс] : навч. посіб. у 2-х ч. Ч. 2 / Ф 50 В. В. Титаренко, В. М. Горєв, А. В. Подляцька, М. О. Журавльов; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 237 с.

Посібник містить наступні розділи теоретичного матеріалу дисципліни «Фізика» як друга частина видання. Зміст посібника становить розгляд основ магнетизму, коливальних і хвильових процесів, оптики, атомної та ядерної фізики. Поданий у посібнику матеріал містить детальне математичне обґрунтування фізичних процесів.

Видання розраховано на здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей 183 Технології захисту навколишнього середовища, 101 Екологія, 103 Наука про землю та 163 Біомедична інженерія. Крім того, посібником можуть скористатись здобувачі інших технічних або фізико-математичних спеціальностей.

УДК 53 (075.8)

© В. В. Титаренко, В. М. Горєв, А. В. Подляцька, М. О. Журавльов 2025

© НТУ «Дніпровська політехніка», 2025

## Зміст

Вступ.....	6
<b>Розділ 4 МАГНЕТИЗМ.....</b>	<b>7</b>
Тема 14 Магнітне силове поле .....	7
14.1 Індукція магнітного поля. Закон Біо – Савара – Лапласа. Магнітне поле деяких провідників зі струмами. Закон Ампера.....	7
14.2 Закон повного струму для магнітного поля у вакуумі. Магнітне поле тороїда і довгого соленоїда. Сила Лоренца. Ефект Холла.....	16
14.3 Магнітний потік. Теорема Остроградського – Гаусса. Робота під час переміщення провідника та контуру зі струмом у магнітному полі.....	27
Тема 15 Магнітне поле в магнетиках .....	33
15.1 Намагніченість середовища. Магнітне поле у магнетикові.....	33
15.2 Діамагнетики. Парамагнетики. Феромагнетики.....	35
Тема 16 Явище електромагнітної індукції.....	43
16.1 Закон Ленца. Закон електромагнітної індукції.....	43
16.2 Явище самоіндукції. Індуктивність. Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність.....	46
Контрольні питання до розділу 4.....	54
<b>Розділ 5 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ. ПРУЖНІ ХВИЛІ.....</b>	<b>57</b>
Тема 17 Вільні незгасаючі гармонічні коливання .....	57
17.1 Рівняння вільних незгасаючих гармонічних коливань. Швидкість і прискорення гармонічних коливань .....	57
17.2 Енергія системи, яка здійснює гармонічні коливання.....	63
Тема 18 Маятники.....	66
18.1 Математичний маятник.....	66
18.2 Пружинний маятник.....	68
18.3 Фізичний маятник.....	69
18.4 Крутильний маятник.....	70

Тема 19 Додавання коливань.....	72
19.1 Додавання коливань однакового напрямку.....	72
19.2 Додавання взаємно перпендикулярних коливань.....	75
Тема 20 Згасаючі та змушені гармонічні коливання.....	78
20.1 Згасаючі гармонічні коливання.....	78
20.2 Змушені гармонічні коливання.....	81
Тема 21 Пружні хвилі.....	86
21.1 Пружна хвиля та її характеристики. Рівняння плоскої та сферичної хвиль.....	86
21.2 Стоячі хвилі.....	93
Контрольні питання до розділу 5.....	96
<b>Розділ 6 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ. ЗМІННИЙ СТРУМ.....</b>	<b>98</b>
Тема 22. Електромагнітні коливання.....	98
22.1. Коливальний контур. Формула Томсона.....	98
22.2. Згасаючі та змушені електромагнітні коливання в коливальному контурі. Резонанс.....	101
Тема 23. Змінний електричний струм.....	105
23.1. Змінний електричний струм. Коло змінного струму, яке становить послідовно увімкнені резистор, котушку індуктивності й конденсатор.....	105
Контрольні питання до розділу 6.....	111
<b>Розділ 7 ОПТИКА.....</b>	<b>113</b>
Тема 24. Геометрична оптика.....	113
24.1 Закони геометричної оптики.....	113
24.2 Лінзи та зображення в лінзах.....	115
Тема 25. Хвильова оптика.....	120
25.1 Інтерференція світла.....	120
25.2 Дифракція світла.....	143
Тема 26. Взаємодія світла з речовиною.....	159

26.1 Поглинання світла.....	159
26.2 Дисперсія світла.....	161
26.3 Поляризація світла.....	164
Тема 27. Квантова оптика.....	174
27.1 Теплове випромінювання. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа.....	174
27.2 Закон Стефана – Больцмана. Закон Віна. Формула Релея – Джинса.....	178
27.3 Зовнішній фотоефект і його закони. Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту.....	185
27.4 Маса та імпульс фотона. Ефект Комптона.....	190
Контрольні питання до розділу 7.....	197
<b>Розділ 8 ФІЗИКА АТОМА ТА АТОМНОГО ЯДРА.....</b>	<b>199</b>
Тема 28. Фізика атома.....	199
28.1 Досліди Резерфорда. Ядерна модель атома.....	199
28.2 Атом водню і його спектр за теорією Бора. Формула де Бройля.....	202
Тема 29. Ядерна фізика.....	209
29.1 Розмір, склад і заряд ядра. Масове і зарядове число. Дефект маси і енергія зв'язку ядра.....	209
29.2 Радіоактивність. Основний закон радіоактивного перетворення атомних ядер.....	213
29.3 Закономірності радіоактивного випромінювання атомних ядер. Гамма-випромінювання і його властивості.....	218
29.4 Ядерні реакції. Реакція ядерного поділу. Ланцюгова реакція поділу. Ядерний реактор.....	224
Контрольні питання до розділу 8.....	235
Список рекомендованої літератури.....	236

## Вступ

Дисципліна «Фізика» являє собою базовий освітній компонент програми підготовки здобувачів спеціальностей 183 «Технології захисту навколишнього середовища», 101 «Екологія», 103 «Науки про землю» та 163 «Біомедична інженерія» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

Вивчення дисципліни має на меті сформувати в здобувачів уявлення про сучасну фізичну картину світу, виробити навички застосування фундаментальних знань до розв'язування конкретних практичних задач у процесі виконання таких видів навчальної роботи:

- ознайомлення із сучасною науково-дослідною апаратурою та вимірювальною технікою; формування навичок експериментальної роботи на приладах та апаратурі для вивчення фізичних законів, процесів і явищ;
- ознайомлення з основними тенденціями розвитку сучасної фізики та можливістю використання її найновіших досягнень у своїй майбутній фаховій діяльності;
- створення необхідної наукової бази для вивчення інших загально-професійних та спеціальних дисциплін, передбачених ОПП.

Фізика є невід'ємною складовою навчального процесу та професійної підготовки здобувачів спеціальностей природничого та екологічного спрямування, а також інженерії в галузі охорони здоров'я та довкілля. Вивчення матеріалу дисципліни формує фундаментальні знання, необхідні для аналізу та вирішення актуальних проблем, пов'язаних з розвитком технічних і природничих наук. Опанування матеріалу посібника дає можливість здобувачам освіти отримати базові знання з фізики, необхідні й корисні в їхній професійній освіті.

У посібнику викладено наступні розділи теоретичного матеріалу дисципліни як друга частина навчального посібника «Фізика», що буде корисним у підготовці здобувачів зазначених спеціальностей. Зміст матеріалу другої частини становить основи магнетизму, коливальних та хвильових процесів, оптики, атомної та ядерної фізики. Кожний розділ включає детальне математичне обґрунтування фізичних явищ.

Посібник видано в рамках освітньої теми Ш-518 «Розробка методичного забезпечення дисциплін, що викладаються кафедрою фізики НТУ «Дніпровська політехніка».

## Розділ 4 ОСНОВИ МАГНЕТИЗМУ

### Тема 14 Магнітне силове поле

#### 14.1 Індукція магнітного поля. Закон Біо – Савара – Лапласа. Магнітне поле деяких провідників зі струмами. Закон Ампера. Сила Лоренца.

Досліди показали, що навколо провідників зі струмом і постійних магнітів існує *магнітне поле*, яке можна виявити за силовою дією, якою воно впливає на інші провідники зі струмом або постійні магніти.

Якщо підвісити заряджену кульку на нитці коло магнітної стрілки, то не помітимо будь-якої дії з боку нерухомих електричних зарядів кульки на магнітну стрілку. У свою чергу, магнітне поле стрілки не діє на заряджену кульку. Отже, нерухомі електричні заряди не створюють магнітного поля і постійне магнітне поле не діє на нерухомі електричні заряди.

А якщо пропустити постійний струм  $I$  через провідник, то магнітна стрілка повернеться навколо своєї осі так, щоб стати перпендикулярно до провідника зі струмом (рис. 14.1). Це явище відкрив Ерстед. Він виявив, що напрямок повороту північного полюсу стрілки змінюється на протилежний, якщо змінити напрямок струму в провіднику.

Струм у провіднику - впорядкований рух електричних зарядів. Навколо всякого рухомого заряду існує магнітне поле. При цьому матеріал провідника і характер його провідності, а також процеси, що відбуваються в ньому, ніякої ролі не відіграють.

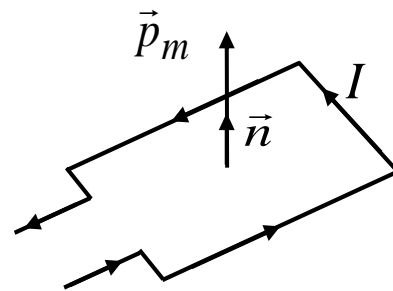


Рис. 14.1

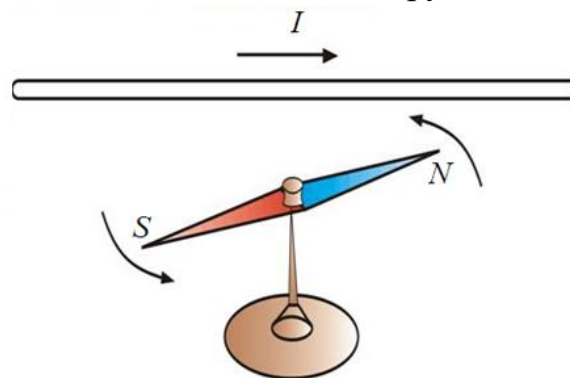


Рис. 14.2

Отже, навколо будь-якого рухомого заряду, чи то буде електрон, іон або заряджене тіло, крім електричного поля, існує також і магнітне поле.

Електричне поле діє як на рухомі, так і на нерухомі електричні заряди. Магнітне поле діє лише на рухомі в цьому полі електричні заряди.

Щоб охарактеризувати магнітне поле, треба розглянути його дію на певний струм. Розглянемо замкнений плоский контур зі струмом, розміри якого малі порівняно з відстанню до струмів, що утворюють поле. За позитивний напрямок нормалі приймається напрямок поступального руху свердлика, головка якого обертається в напрямку струму, що тече в контурі (рис. 14.2).

Контур зі струмом характеризується **магнітним моментом**  $\vec{p}_m$ , який дорівнює добутку сили струму  $I$ , що протікає у контурі, на площу поверхні контуру  $S$ :

$$\vec{p}_m = I S \vec{n}, \quad (14.1)$$

де  $\vec{n}$  одиничний вектор нормалі до поверхні рамки. Напрямок вектора  $\vec{p}_m$  збігається з напрямком позитивної нормалі рамки.

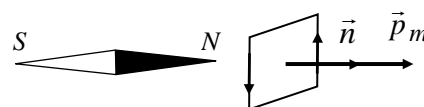


Рис. 14.3

Контур зі струмом в магнітному полі повертається, набуваючи рівноважного положення і його позитивна нормаль розміщується вздовж осі стрілки в напрямку від її магнітного полюса (рис. 14.3).

Контуром зі струмом можна скористатись і для кількісного опису магнітного поля. На контур в магнітному полі діє пара сил. Обертальний момент сил  $M$  залежить від властивостей контуру:

$$M \sim p_m. \quad (14.2)$$

Якщо контур зі струмом повернути на  $90^\circ$  від рівноважного положення, то на нього буде діяти максимальний обертальний момент  $M_{max}$ .

Якщо в дане місце магнітного поля поміщати контури з різними

магнітними моментами, то на них діятимуть різні обертальні моменти, але відношення  $M_{max}/p_m$  для всіх контурів однакове і служить кількісною характеристикою магнітного поля:

$$B = \frac{M_{max}}{p_m}. \quad (14.3)$$

**Магнітна індукція**  $\vec{B}$  в даному місці магнітного поля визначається максимальним обертальним моментом, що діє на контур з одиничним магнітним моментом.

Одиниця магнітної індукції – тесла:  $1 \text{ Тл}$  – магнітна індукція такого магнітного поля, в якому на рамку з магнітним моментом  $1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$  діє максимальний момент сили  $1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

За напрямком магнітної індукції  $\vec{B}$  приймається напрямок магнітного моменту контуру  $p_m$ , який знаходиться в рівноважному положенні у цьому полі.

Для графічного зображення магнітних полів зручно користуватись лініями магнітної індукції.

**Лініями магнітної індукції** називають такі лінії, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком вектора  $\vec{B}$  в цих точках поля.

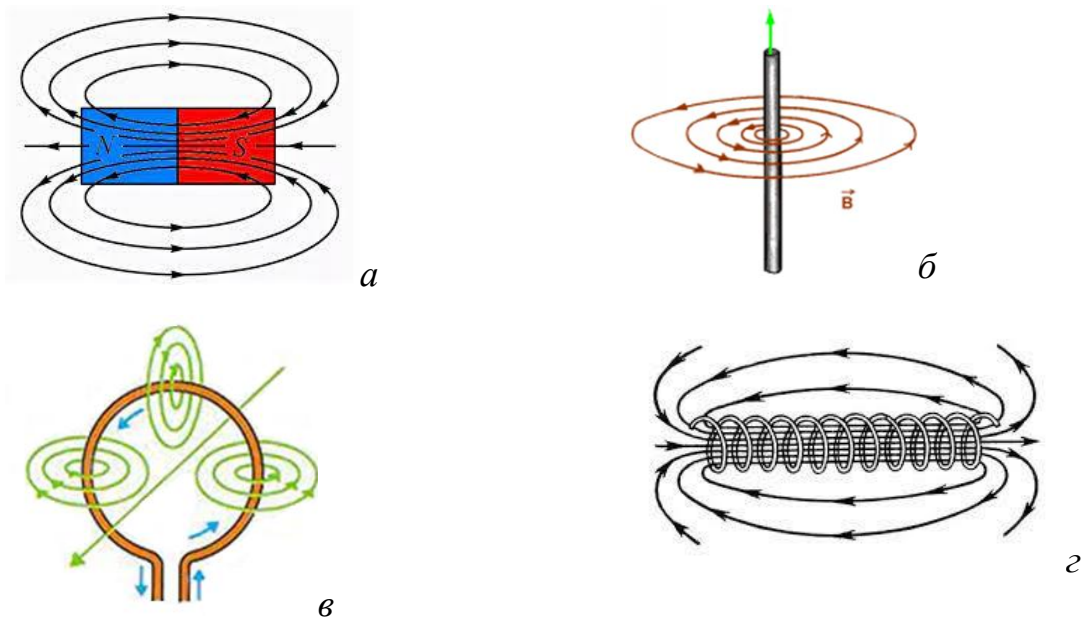


Рис. 14.4

*Напрямок ліній індукції магнітного поля струму визначається за правилом свердлика: якщо вкручувати свердлик за напрямком руху струму в провіднику, то напрямок руху його рукоятки покаже напрям ліній магнітної індукції.*

Лінії магнітної індукції можна спостерігати за допомогою дрібних металевих ошурків, які в магнітному полі поводять себе, як маленькі магнітні стрілки.

Вигляд ліній магнітної індукції простих магнітних полів показаний на рис. 14.4.

Лінії магнітної індукції охоплюють провідник зі струмом, який створює поле. Поблизу провідника лінії лежать в площині, що перпендикулярна до провідника.

Лінії індукції магнітного поля ні в яких точках не можуть обриватися, вони завжди замкнені. Лінії індукцій постійного магніту (рис. 14.4а) виходять із його північного полюса і входять у південний.

Магнітне поле соленоїда, тобто довгої котушки зі струмом (рис. 14.4г), подібне до магнітного поля штабового магніту. Північний полюс магніту збігається з тим кінцем соленоїда, з якого струм у витках тече проти годинникової стрілки. Магнітне поле колового струму (рис. 14.4в), який є одним витком соленоїда, подібне на поле дуже короткого штабового магніту, що розташований в центрі витка, так щоб його вісь була перпендикулярна до площини витка.

У 1820 р. французькі вчені Ж. Біо і Ф. Савар дослідили магнітні поля, створені в повітрі прямолінійним струмом, коловим струмом, котушкою із струмом тощо. На основі численних дослідів вони дійшли таких висновків:

- а) у всіх випадках індукція  $B$  магнітного поля електричного струму пропорційна до сили струму  $I$ ;
- б) магнітна індукція залежить від форми і розмірів провідника зі струмом;
- в) магнітна індукція  $B$  у будь-якій точці поля залежить від розташування цієї точки відносно провідника зі струмом.

Біо і Савар намагалися знайти загальний закон, який дав би змогу обчислити магнітну індукцію в кожній точці поля, створеного електричним

струмом, що протікає по провіднику будь-якої форми. Однак зробити це їм не вдалося. Розв'язав це завдання П. Лаплас.

Лаплас узагальнив результати експериментів Біо і Савара у вигляді диференціального закону, який називається законом **Біо – Савара – Лапласа**:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \vec{r}]}{r^3}, \quad (14.4)$$

де  $d\vec{l}$  – вектор, що числово дорівнює довжині  $dl$  елемента провідника і збігається за напрямком з напрямком електричного струму,  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений від елемента провідника  $dl$  до точки поля  $A$ , що розглядається (рис. 14.5),  $\mu_0$  – магнітна стала.

Отже, модуль індукції  $d\vec{B}$  магнітного поля малого елемента  $dl$  провідника зі струмом прямо пропорційний до сили струму  $I$ , довжини елемента  $dl$  провідника, обернено пропорційний до квадрата відстані  $r$  від елемента провідника до розглядуваної точки поля, а також залежить від кута  $\alpha$  між напрямками струму і радіус-вектора  $\vec{r}$  (рис. 14.5):

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (14.5)$$

Напрямок вектора  $d\vec{B}$  перпендикулярний до  $d\vec{l}$  і  $\vec{r}$ , тобто перпендикулярний до площини, в якій вони лежать, і збігається з дотичною до лінії магнітної індукції. Напрямок  $d\vec{B}$  визначається з векторного добутку  $[d\vec{l} \vec{r}]$  і може бути знайдений за правилом свердлика.

Закон Біо-Савара-Лапласа дає змогу розрахувати індукцію магнітного поля електричного струму, що проходить по провіднику скінченних розмірів і будь-якої форми.

Дослід показує, що для магнітного поля справедливий **принцип суперпозиції**: магнітна індукція поля, яке створену декількома струмами або рухомими зарядами, дорівнює векторній сумі індукцій магнітних полів, що створені кожним струмом або рухомим зарядом окремо.

Відповідно до принципу суперпозиції магнітна індукція  $\vec{B}$  у будь-якій

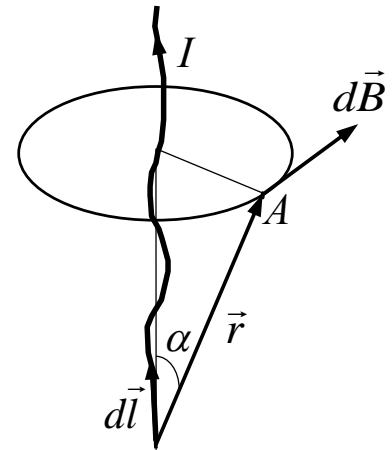


Рис. 14.5

точці магнітного поля провідника зі струмом  $I$  дорівнює векторній сумі індукцій  $\Delta\vec{B}_i$  елементарних магнітних полів, створених окремими ділянками  $\Delta l_i$  цього провідника:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \Delta\vec{B}_i. \quad (14.6)$$

Необмежено збільшуючи кількість ділянок  $n$  і переходячи до границі при  $n$ , що прямує до нескінченності, можна замінити суму інтегралом:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}, \quad (14.7)$$

Отже, магнітна індукція поля, яке створене у вакуумі струмом  $I$ , що тече по провіднику скінченної довжини і довільної форми, дорівнює

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \left[ \frac{d\vec{l} \vec{r}}{r^3} \right]. \quad (14.8)$$

Розрахунок характеристик магнітного поля за наведеними формулами в загальному випадку досить складний. Однак, якщо розподіл струму має певну симетрію, то застосування закону Біо-Савара-Лапласа разом з принципом суперпозиції дає змогу досить просто розрахувати магнітну індукцію конкретних полів.

Розглянемо **прямий провідник** довільної довжини, по якому проходить струм силою  $I$ , наприклад згори вниз (рис. 14.6). Відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа вектор магнітної індукції  $d\vec{B}$  поля у вакуумі, створеного в точці  $A$  елементом  $dl$  провідника зі струмом  $I$ , числово дорівнює

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (14.9)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{r}$ .

У точці  $A$ , яка знаходиться на відстані  $R$  від осі провідника, всі вектори  $d\vec{B}$ , які характеризують магнітні поля, створені окремими ділянками цього провідника, напрямлені перпендикулярно до площини рисунка. Вектор  $\vec{B}$  числово дорівнює алгебраїчній сумі модулів векторів  $d\vec{B}$ :

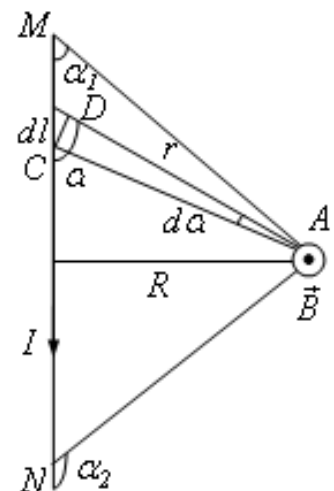


Рис. 14.6

$$B = \int_l dB = \int_l \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (14.10)$$

Замінімо  $dl$  і  $r$  через одну незалежну змінну  $\alpha$ :

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{CD}{\sin \alpha}, \quad CD = r d\alpha. \quad (14.11)$$

Тоді:

$$dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}. \quad (14.12)$$

У результаті індукція магнітного поля прямолінійного провідника  $MN$  у точці  $A$  дорівнює:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R d\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \frac{R^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha d\alpha}{R} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R} I (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \end{aligned} \quad (14.13)$$

Якщо провідник  $MN$  нескінченно довгий, то  $\alpha_1 = 0$ , а  $\alpha_2 = \pi$ .

Отже, магнітна індукція нескінченно довгого провідника зі струмом дорівнює ( $\cos 0 = 1, \cos \pi = -1$ ),

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} I. \quad (14.14)$$

Знайдемо індукцію магнітного поля в центрі  $O$ , **колового струму** радіусом  $R$ , по якому протікає струм  $I$  (рис. 14.7):

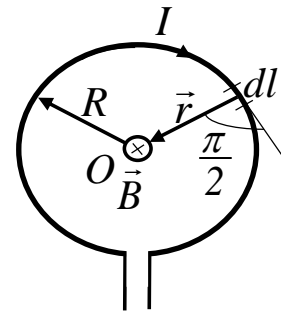


Рис. 14.7

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(\widehat{dl \vec{r}})}{r^2}, \quad (14.15)$$

$$\sin(\widehat{dl \vec{r}}) = 1, \quad r = R.$$

Тоді

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} I dl. \quad (14.16)$$

Усі вектори  $d\vec{B}$  магнітних полів, які створені в точці  $O$  різними ділянками  $d\vec{l}$  колового струму, напрямлені перпендикулярно до площини рисунка „від

нас”. Тоді:

$$B = \int_0^l dB = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R. \quad (14.17)$$

Отже, магнітна індукція поля колового струму дорівнює:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R}. \quad (14.18)$$

На провідники зі струмом, що знаходяться в магнітному полі, діють **сили Ампера**.

Узагальнюючи результати дослідження дії магнітного поля на різні провідники зі струмом, Ампер встановив, що сила  $d\vec{F}$ , з якою магнітне поле діє на елемент довжини  $dl$  провідника зі струмом, що знаходиться в магнітному полі, прямо пропорційна до сили струму  $I$  в провіднику і до векторного добутку елемента довжини  $d\vec{l}$  на магнітну індукцію  $\vec{B}$ :

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (14.19)$$

Це співвідношення називається **законом Ампера**.

Напрямок сили  $d\vec{F}$  можна знайти за правилом векторного добутку і за правилом лівої руки: якщо долоню лівої руки поставити так, щоб у неї входили лінії магнітної індукції, а чотири витягнуті пальці спрямувати в напрямку електричного струму в провіднику, то відставлений на  $90^\circ$  великий палець покаже напрямок сили, що діє на провідник з боку поля. Це правило зручне, коли елемент провідника зі струмом перпендикулярний до напрямку магнітного поля.

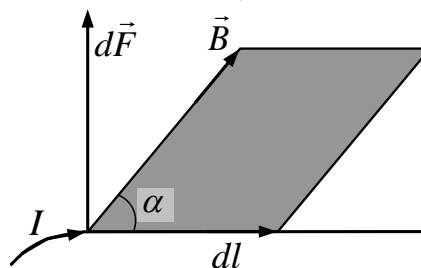


Рис. 14.8

В загальному випадку для визначення напрямку сили Ампера  $d\vec{F}$  слід скористатись правилом векторного добутку: вектор  $d\vec{F}$  напрямлений перпендикулярно до площини, утвореної векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{B}$  так, щоб з кінця вектора  $d\vec{F}$  обертання від вектора  $d\vec{l}$  до вектора  $\vec{B}$  найкоротшим шляхом відбувалося проти годинникової стрілки (рис. 14.8).

Також напрямок сили Ампера може бути визначено за загальним правилом векторного добутку, або за **правилом лівої руки**: якщо долоню лівої

руки розмістити так, щоб в неї входив вектор  $\vec{B}$ , а чотири витягнутих пальці вказували на напрямок струму в провіднику, то відігнутий великий палець вкаже на напрямок сили Ампера, що діє на струм (рис. 14.9).

Модуль сили Ампера розраховується за формулою

$$dF = IBdl\sin\alpha, \quad (14.20)$$

де  $\alpha$  - кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{B}$ .

Закон Ампера дає змогу визначити іншим способом, ніж раніше, фізичний зміст магнітної індукції  $\vec{B}$ .

Припустимо, що елемент провідника  $dl$  із струмом  $I$  перпендикулярний до напрямку магнітного поля ( $\sin\alpha = 1$ ), тоді закон Ампера можна записати у вигляді:

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF_{max}}{dl}. \quad (14.21)$$

Звідси, **магнітна індукція**  $\vec{B}$  чисельно дорівнює силі, що діє з боку поля на одиницю довжини провідника, по якому протікає електричний струм одиничної сили і який розташовано перпендикулярно до напрямку магнітного поля.

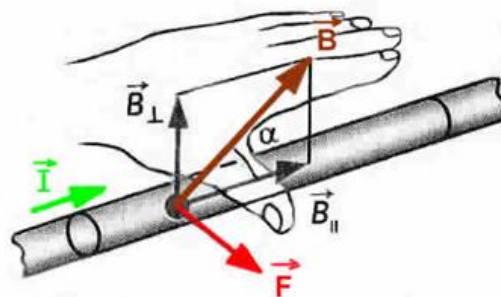


Рис. 14.9

Отже, **магнітна індукція**  $\epsilon$  **силовою характеристикою магнітного поля.**

Використовуючи закон Ампера, розраховуємо силу взаємодії між двома прямими нескінченно довгими провідниками зі струмами  $I_1$  і  $I_2$ , які розміщені паралельно один до одного

на відстані  $R$ . Кожен із провідників створює магнітне поле, яке діє згідно закону Ампера на другий провідник. Якщо електричні струми  $I_1$  і  $I_2$  однакового напрямку, то

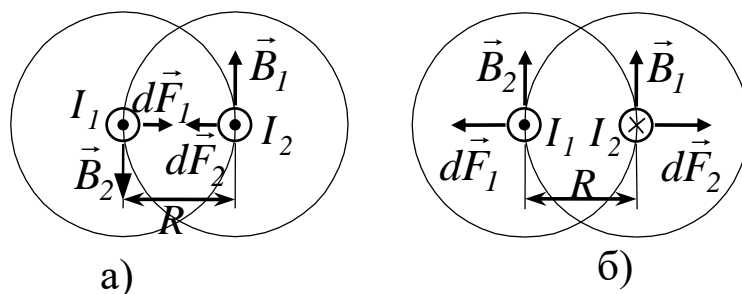


Рис. 14.10

провідники притягуються один до одного (рис. 14.10 a), а якщо напрямки

струмів взаємно протилежні, то провідники відштовхуються один від одного (рис. 14.10 б).

За законом Ампера на елемент  $d\vec{l}$  провідника зі струмом  $I_2$  діє сила  $d\vec{F}_2$ , яка числово дорівнює:

$$dF_2 = I_2 B_1 dl \sin \alpha, \quad (14.22)$$

де  $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{R}$  - магнітна індукція поля, створеного струмом  $I_1$ , враховуючи,

що кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{B}_1$  - прямий, отримуємо:

$$dF_2 = |d\vec{F}_2| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (14.23)$$

Відповідно на ділянку  $dl$  провідника зі струмом  $I_1$  діє сила  $d\vec{F}_1$ , модуль якої:

$$d\vec{F}_1 = |d\vec{F}_1| = I_1 B_2 dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (14.24)$$

Отже, для сил  $d\vec{F}_1$  і  $d\vec{F}_2$  можна написати загальну формулу:

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (14.25)$$

## 1.2 Закон повного струму для магнітного поля у вакуумі. Магнітне поле тороїда і довгого соленоїда. Сила Лоренца. Ефект Холла.

Введемо циркуляцію вектора магнітної індукції. Циркуляцією вектора  $\vec{B}$  по замкненому контуру називається інтеграл

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl, \quad (14.26)$$

де  $d\vec{l}$  - вектор елемента довжини контуру, напрямлений вздовж обходу контуру,  $B_l = B \cos \alpha$  - проекція вектора  $\vec{B}$  на дотичну до контуру,  $\alpha$  - кут між векторами  $\vec{B}$  і  $d\vec{l}$ .

Розглянемо магнітне поле нескінченного прямолінійного провідника зі струмом  $I$ , що знаходиться у вакуумі (рис. 14.11). Лінії магнітної індукції цього поля є кола, площини яких перпендикулярні до провідника, а центри лежать на осі провідника. Знайдемо циркуляцію вектора  $\vec{B}$  вздовж кола радіуса  $r$ . У всіх точках кола вектор

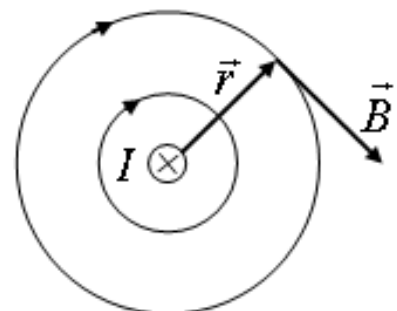


Рис. 14.11

$\vec{B}$  числово дорівнює  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$  і напрямлений по дотичній до кола, тому  $\cos\alpha = 1$ .

Тоді

$$\oint_L B dl \cos\alpha = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 I. \quad (14.27)$$

Звідси можна зробити два висновки:

Магнітне поле прямолінійного струму – **вихрове поле**, бо циркуляція вектора  $\vec{B}$  вздовж ліній індукції не дорівнює 0;

Циркуляція вектора  $\vec{B}$  магнітної індукції поля прямолінійного струму однакова вздовж будь-якої лінії індукції і дорівнює  $\mu_0 I$ .

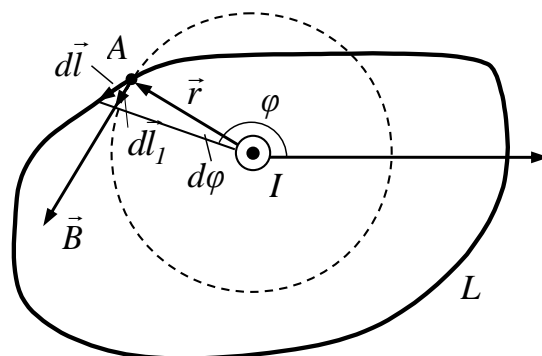


Рис. 14.12

Цю формулу можна використати до замкненого контуру  $L$  довільної форми, який охоплює нескінченно довгий прямолінійний провідник зі струмом  $I$  (рис. 14.12).

У точці  $A$  контуру  $L$  вектор індукції  $\vec{B}$  перпендикулярний до радіус-вектора  $\vec{r}$ . Проекція  $d\vec{l}$  на напрямок вектора  $\vec{B}$  дорівнює  $dl_1 = dl \cos(\widehat{\vec{B} d\vec{l}})$  і збігається з малою дугою кола радіуса  $r$ :

$$dl_1 = r d\varphi, \quad (14.28)$$

де  $d\varphi$  – центральний кут, під яким видно  $dl$  елемент контуру  $L$  з центром кола.

Тоді

$$B dl \cos(\widehat{\vec{B} d\vec{l}}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi. \quad (14.29)$$

Інтегруючи вздовж всього замкненого контуру  $L$  і враховуючи, що при цьому кут  $\varphi$  змінюється від  $0$  до  $2\pi$ , знаходимо

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \oint_L B dl \cos(\widehat{\vec{B} d\vec{l}}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I. \quad (14.30)$$

Якщо контур  $L_1$  не охоплює провідник зі струмом (рис. 14.13), то

$$\oint_{L_1} B dl \cos \alpha = \int_{1a}^2 B dl \cos \alpha + \int_{2b}^1 B dl \cos \alpha =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = 0. \quad (14.31)$$

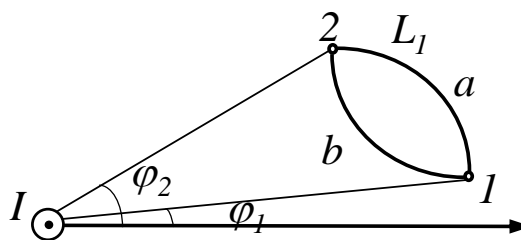


Рис. 14.13

У всіх випадках, які розглядалися вище, кут  $\alpha$  гострий, тобто з кінця вектора густини струму  $\vec{j}$ , напрямленого по осі провідника в бік струму, обхід по контуру  $L$  відбувається проти годинникової стрілки. При протилежному напрямку обходу контуру  $L$  або при протилежному напрямку струму в провіднику отримуємо

$$\oint_L B dl \cos \alpha = -\mu_0 I. \quad (14.32)$$

Надалі використовуватимемо таке правило знаків струмів: **позитивним** вважається струм, напрямок якого зв'язаний з напрямком обходу по контуру правилом свердлика; струм протилежного напрямку вважається **негативним**.

На практиці магнітне поле, переважно, створюється кількома провідниками, по яких проходять струми  $I_1, I_2, I_3$  тощо. На основі принципу суперпозиції магнітна індукція  $\vec{B}$  результуючого поля дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (14.33)$$

Тоді

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \oint_L \sum_{i=1}^n B_i dl \cos \alpha = \sum_{i=1}^n \oint_L B_i dl \cos \alpha. \quad (14.34)$$

Кожен з інтегралів, що стоїть під знаком суми, дорівнює або  $\mu_0 I$ , якщо струм охоплюється контуром, або 0, якщо струм не охоплюється контуром. Отже,

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i, \quad (14.35)$$

де  $n$  – кількість провідників зі струмами, що охоплюються контуром  $L$  довільної форми. Кожний струм враховується стільки разів, скільки разів він охоплюється контуром.

Наприклад, для системи струмів, зображених на рис. 14.14, алгебраїчна сума струмів

$$\sum_{i=1}^n I_i = -I_1 + I_2 + 2 \cdot I_3 - 0 \cdot I_4. \quad (14.36)$$

Рівняння  $\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$  є математичним виразом **закону повного струму** для струмів провідності: *циркуляція вектора  $\vec{B}$  по довільному замкненому контуру дорівнює добутку магнітної сталої  $\mu_0$  на алгебраїчну суму струмів, що охоплюються цим контуром.*

Отриманий вираз закону повного струму справедливий лише для **магнітного поля у вакуумі**, оскільки для поля у речовині слід враховувати молекулярні струми.

Закон повного струму

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

можна використати для розрахунку магнітних полів тороїда і довгого соленоїда.

**Тороїдом** називають кільцеву котушку, витки якої намотано на осердя, що має форму тора (рис. 14.15 а). Лінії магнітної індукції поля тороїда повинні мати форму кіл, центри яких лежать на прямій, що проходить через центр тороїда і перпендикулярна до площини рисунка.

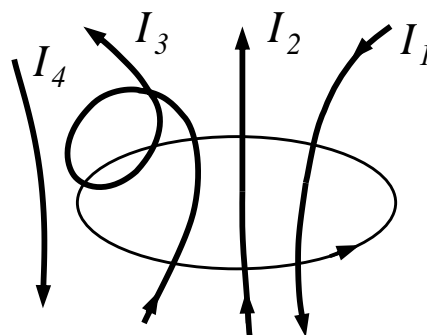


Рис. 14.14

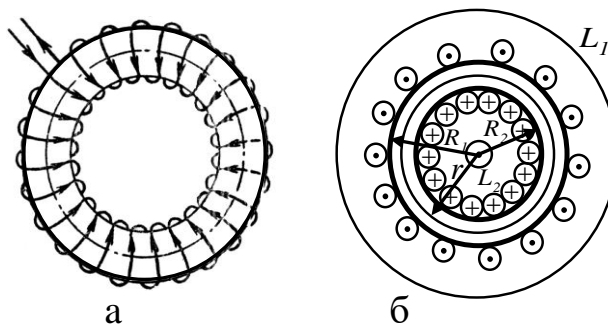


Рис. 14.15

Циркуляція вектора  $\vec{B}$  вздовж кола радіусом  $r$  дорівнює (рис. 14.15 б):

$$\oint_L B dl \cos \alpha = B \int_0^{2\pi r} dl = 2\pi r B. \quad (14.37)$$

Позначимо кількість витків обмотки тороїда  $N$ , а струм у ній -  $I$ . Якщо  $r < R_2$ , то коло радіусом  $r(L_2)$  не охоплює провідник зі струмом, тому  $\sum_{i=1}^n I_i = 0$  і за законом повного струму  $\oint_L B dl \cos \alpha = 2\pi r B = 0$ , тобто  $B = 0$ .

Якщо  $r > R_1$ , то коло радіусом  $r(L_1)$  охоплює  $2N$  провідників зі струмом  $I$ . В  $N$  з них струм іде в одному напрямку, а в інших  $N$  провідниках – у зворотному. Тому алгебраїчна сума струмів у всіх провідниках дорівнює нулю. Й із закону повного струму  $2\pi r B = 0$  і  $B = 0$ .

Отже, поза тороїдом магнітного поля нема. Воно цілком локалізується всередині об'єму тороїда ( $R_2 < r < R_1$ ). Коло радіусом  $r$ , яке лежить всередині тороїда, охоплює  $N$  провідників, струми в яких дорівнюють  $I$  і однаково напрямлені. Тому

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i = \mu_0 N I. \quad (14.38)$$

Отже,

$$2\pi r B = \mu_0 N I \quad \text{і} \quad B = \mu_0 \frac{N I}{2\pi r}. \quad (14.39)$$

Магнітна індукція поля всередині тороїда зменшується зі збільшенням відстані від його центра:

$$B_{max} = \mu_0 \frac{N I}{2\pi R_2}, \quad (14.40)$$

$$B_{min} = \mu_0 \frac{N I}{2\pi R_1} = \mu_0 \frac{N I}{2\pi(R_2 + d)}, \quad (14.41)$$

де  $d$  – діаметр тора.

Індукція на основній лінії тороїда

$$r = R_{cp} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \quad (14.42)$$

дорівнює

$$B_{cp} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R_{cp}} = \mu_0 nI, \quad (14.43)$$

де  $n$  – кількість витків на одиницю довжини середньої лінії тороїда.

Розглянемо магнітну індукцію поля всередині **соленоїда** (рис. 14.16) – циліндричної котушки, яка складається з великої кількості витків, рівномірно намотаних на загальне осердя. Розглянемо соленоїд завдовжки  $l$ , що має  $N$  витків, по якому тече струм.

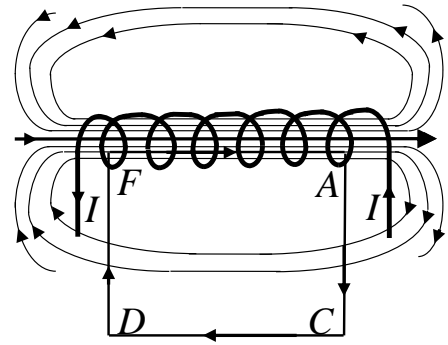


Рис. 14.16

Циркуляція вектора  $\vec{B}$  вздовж контуру у вигляді прямокутника  $ACDF$ , в якому сторона  $CD$  дуже віддалена від соленоїда і який охоплює всі  $N$  витків соленоїда, дорівнює

$$\oint_{ACDFA} Bdl \cos \alpha = \mu_0 NI. \quad (14.44)$$

Інтеграл вздовж контуру  $ACDA$  можна подати у вигляді чотирьох інтегралів:

$$\begin{aligned} \oint Bdl \cos \alpha &= \int_L Bdl \cos \alpha + \int_{DF} Bdl \cos \alpha + \\ &+ \int_{AC} Bdl \cos \alpha + \int_{CD} Bdl \cos \alpha. \end{aligned} \quad (14.45)$$

Магнітне поле соленоїда практично локалізовано в його об'ємі і на великій відстані від соленоїда магнітна індукція поля дорівнюватиме нулю:

$$\int_{CD} Bdl \cos \alpha = 0, \quad (14.46)$$

А також

$$\int_{DF} Bdl \cos \alpha = \int_{AC} Bdl \cos \alpha = 0, \quad (14.47)$$

тому що  $\cos \alpha = 0$ . Тоді

$$\oint_L Bdl \cos \alpha \approx \int_{FA} Bdl \cos \alpha. \quad (14.48)$$

Вектори магнітної індукції в усіх точках всередині довгого соленоїда однакові, тобто числово рівні і мають однакові напрямки. Таке магнітне поле

називається **однорідним**. Крім того, напрямок вектора індукції та переміщення збігаються, тому  $\cos\alpha = 1$ . Отже,

$$\oint_{FA} B dl = B \int_0^l dl = Bl = \mu_0 IN. \quad (14.49)$$

В результаті магнітна індукція поля всередині соленоїда у вакуумі дорівнює:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I, \quad (14.50)$$

де  $n$  – число витків на одиницю довжини соленоїда.

Виникнення макроскопічної сили Ампера, що діє на провідник із струмом у магнітному полі, можна пояснити так. При проходженні струму носії заряду в провіднику рухаються напрямлено. Тому магнітне поле відхиляє їх в один бік. При цьому вони стикаються з кристалічною ґраткою металу і передають їй певний імпульс, якого набули під дією магнітного поля. Макроскопічним результатом елементарних процесів зіткнення окремих носіїв заряду з кристалічною ґраткою провідника є виникнення сили Ампера.

Магнітне поле діє на вільні електрони в металі і без електричного струму в провіднику. Оскільки електрони в цьому випадку рухаються тільки хаотично, то сумарний імпульс, який вони надають кристалічній ґратці провідника, дорівнює нулю і провідник залишається нерухомим.

Для обчислення сили, що діє на рухомий заряд в магнітному полі, розглянемо елемент провідника  $dl$  зі струмом  $I$  у магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$ . На цей елемент діє сила Ампера  $dF = B I dl \sin\alpha$ . Якщо елемент  $dl$  містить  $dN$  вільних носіїв заряду, то сила  $F_L$ , що припадає на один електрон, дорівнює:

$$F_L = \frac{dF}{dN}, \quad (14.51)$$

де  $F_L$  – сила Лоренца.

Кількість носіїв заряду  $dN$  в елементі провідника  $dl$  запишемо через їх концентрацію  $n$  та об'єм  $dV$  елемента:  $dN = n dV = n S dl$ ,  $S$  – площа поперечного перерізу провідника. Тоді

$$F_L = \frac{B I dl \sin\alpha}{n S dl} = \frac{B I}{n S} \sin\alpha = \frac{B j \sin\alpha}{n}. \quad (14.52)$$

Оскільки за електронною теорією  $j = neu$ , то  $F_L = Beu \sin\alpha$ , або  $\vec{F}_L = e[\vec{u} \vec{B}]$ ,

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{u}$  і  $\vec{B}$ .

В загальному випадку

$$\vec{F}_L = q[\vec{u} \vec{B}]. \quad (14.53)$$

Напрямок сили Лоренца визначається за правилом векторного добутку або **правилом**

**лівої руки:**

якщо долоню

лівої руки

розмістити

так, щоб в неї

входив вектор

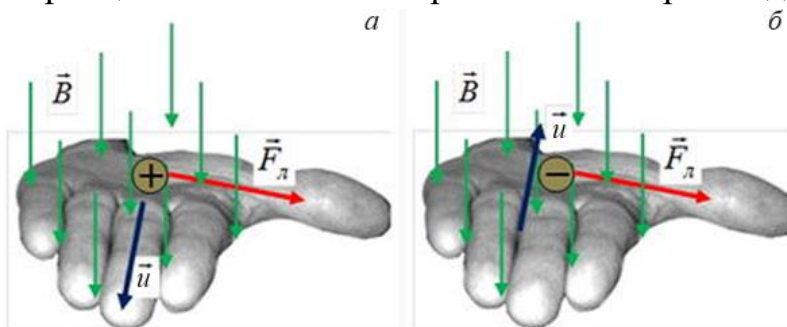


Рис. 14.17

$\vec{B}$ , а чотири витягнуті пальці спрямовувати вздовж вектора швидкості  $\vec{u}$  руху позитивних зарядів, то відігнутий на  $90^\circ$  великий палець покаже напрямок сили, що діє на позитивний заряд (рис. 14.17 а). Якщо необхідно знайти напрямок сили Лоренца, що діє на негативний заряд, то чотири пальці необхідно спрямувати проти напрямку руху заряду (рис. 14.17 б).

Отже, магнітне поле не діє на електричні заряди, що не рухаються.

Сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості руху зарядженої частинки, тому вона змінює лише напрямок цієї швидкості, не змінюючи її модуля. Отже, сила Лоренца роботи не виконує і кінетична енергія частинки при русі в магнітному полі не змінюється.

Якщо на рухомий електричний заряд, крім магнітного поля з індукцією  $\vec{B}$ , діє і електричне поле з напруженістю  $\vec{E}$ , то результуюча сила  $\vec{F}$ , яка прикладена до заряду:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u} \vec{B}]. \quad (14.54)$$

Це формула Лоренца.

Якщо заряджена частинка рухається в магнітному полі зі швидкістю  $\vec{u}$  вздовж ліній магнітної індукції або в протилежний бік до напрямку магнітної індукції, то  $\alpha = 0$ , або  $\alpha = \pi$ . У такому разі  $F_L = 0$ , магнітне поле на частинку не діє і вона рухається рівномірно і прямолінійно.

Якщо заряджена частинка рухається в магнітному полі з швидкістю  $\vec{u}$  перпендикулярно до вектора  $\vec{B}$ , то сила Лоренца є стала за модулем і нормальна до траєкторії частинки. Частинка рухатиметься по колу, бо сила

Лоренца за другим законом Ньютона буде створювати доцентрове прискорення. Отже,

$$quB = \frac{mu^2}{r}. \quad \text{Звідси} \quad r = \frac{m u}{q B}, \quad (14.55)$$

де  $r$  - радіус кола.

Використавши зв'язок  $u = \omega r$ , знайдемо циклічну частоту  $\omega$  та період  $T$  обертання частинки навколо ліній індукції в магнітному полі:

$$\omega = \frac{u}{r} = \frac{q}{m} B, \quad T = \frac{2\pi r}{u} = \frac{2\pi m}{B q}. \quad (14.56)$$

Період обертання частинки в однорідному магнітному полі не залежить від її швидкості (при  $u \ll c$ ). На цьому ґрунтується дія циклічних прискорювачів заряджених частинок.

Якщо швидкість  $\vec{u}$  зарядженої частинки напрямлена під кутом  $\alpha$  до вектора  $\vec{B}$  (рис. 14.18), то її рух можна подати у вигляді суперпозиції:

1) рівномірного прямолінійного руху вздовж поля з швидкістю  $u_{\parallel} = u \cos \alpha$ ;

2) рівномірного руху з швидкістю

$u_{\perp} = u \sin \alpha$  вздовж кола, яке перпендикулярне до поля. Радіус кола

$$r = \frac{m u \sin \alpha}{q B}. \quad (14.57)$$

В результаті складання обох рухів виникає рух вздовж спіралі, вісь якої паралельна до магнітного поля. Крок гвинтової лінії

$$h = u_{\parallel} T = u T \cos \alpha = \frac{2\pi m u \cos \alpha}{q B}. \quad (14.58)$$

Напрямок, в якому закручується спіраль, залежить від знака заряду частинки.

В 1879 р. Е. Холл здійснив наступний експеримент. Він пропускав електричний струм  $I$  через золоту пластинку у вигляді паралелепіпеда і вимірював різницю потенціалів  $\Delta\phi$  між точками  $C$  і  $D$  на верхній і нижній гранях (рис. 14.19).

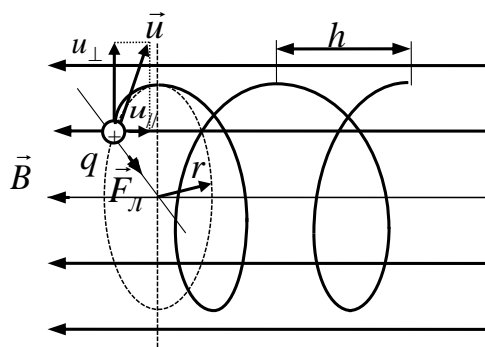


Рис. 14.18

Ці точки лежать у одному і тому поперечному перерізі пластинки. Тому виявилось, що  $\Delta\varphi=0$ . Коли пластинку зі струмом Холл помістив в однорідне

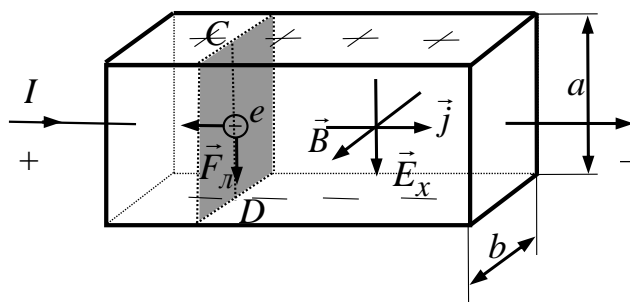


Рис. 14.19

магнітне поле, лінії магнітної індукції якого перпендикулярні до бічних граней пластинки, то було встановлено, що різниця потенціалів  $\Delta\varphi = \varphi_C - \varphi_D \neq 0$  і вона прямопропорційна силі струму  $I$ , магнітній індукції поля  $B$  і обернено пропорційна ширині  $b$  пластинки, тобто

$$\Delta\varphi = \varphi_C - \varphi_D = R_X \frac{IB}{b}, \quad (14.59)$$

де  $R_X$  - коефіцієнт пропорційності і названий *сталю Холла*. А явище, яке експериментально виявив Холл, дістало назву *ефект Холла*.

Наступні дослідження показали, що ефект Холла спостерігається в усіх провідниках і напівпровідниках. Зміна напрямку струму або напрямку магнітного поля на протилежний викликає зміну різниці потенціалів  $\Delta\varphi$ .

Розглянемо, як можна пояснити ефект Холла. Помістимо металеву пластинку зі струмом густиною  $\vec{j}$  в магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$ , лінії індукції якого перпендикулярні до  $\vec{j}$ . На електрони діє сила Лоренца, яка напрямлена вниз і дорівнює:  $F_L = Bev$ . Тому на нижній границі пластинки збиратиметься некомпенсований негативний заряд і вона заряджатиметься негативно, а на верхній границі пластинки виникатиме нестача негативних зарядів і вона заряджатиметься позитивно. Внаслідок цього між краями пластинки виникає додаткове поперечне електричне поле, напрямлене зверху вниз. Розглянемо момент динамічної рівноваги, коли сили  $F_L$  і  $F_X$ , з якими діють на електрони магнітне поле та холлівське електричне поле, стануть рівними (ця рівність настає вже через  $10^{-12}$  с після замикання кола):

$$F_{\perp} = F_X, \quad euB = eE_X, \quad (14.60)$$

звідси

$$E_X = uB. \quad (14.61)$$

Невідому швидкість  $\vec{u}$  напрямленого руху виразимо через густину струму  $j$ :

$$j = neu, \quad u = \frac{j}{en}. \quad (14.62)$$

Тоді

$$E_X = \frac{Bj}{ne}. \quad (14.63)$$

Помножимо ліву частину виразу на  $ab$ , а праву на  $S$ :

$$E_X ab = \frac{Bj}{ne} S. \quad (14.64)$$

Оскільки  $E_X a = \Delta\varphi_X$ , а  $jS = I$ , то

$$\Delta\varphi_X = \frac{I}{ne} \frac{BI}{b}. \quad (1.65)$$

Порівнюючи цей вираз для  $\Delta\varphi$  з виразом, який отриманий на основі експерименту, отримуємо що стала Холла обернено пропорційна до добутку заряду електрона  $e$  на їх концентрацію  $n$ :

$$R_X = \frac{1}{ne}. \quad (14.66)$$

За вимірними значеннями сталої Холла можна:

1) **визначити концентрацію носіїв струму**, якщо характер провідності і заряд носіїв струму відомі, а саме

$$n = \frac{1}{qR_X}. \quad (14.67)$$

Так, для одновалентних металів виявилось, що концентрація електронів провідності збігається з концентрацією атомів.

Оскільки за електронною теорією питомою електропровідність речовини обчислюють за формулою

$$\sigma = neu_q, \quad (14.68)$$

де  $u_q$  - рухливість носіїв заряду, то

$$\sigma = \frac{I}{R_X} u_q, \text{ і } u_q = R_X \sigma, \quad (14.69)$$

тобто добуток  $R_X \sigma$  визначає рухливість носіїв заряду.

2) **зробити висновок про природу провідності напівпровідників**, оскільки знак сталої Холла збігається із знаком заряду  $q$  носіїв струму. При електронній провідності  $R_X < 0$ , а при дірковій  $R_X > 0$ . Якщо в напівпровіднику водночас існують обидва типи провідності, то за знаком  $R_X$  можна судити про те, який з них переважає.

3) **оцінити величину  $\langle \lambda \rangle$  середньої довжини вільного пробігу електронів:**

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\sigma 2m \langle v \rangle}{ne^2} = \frac{2m \langle v \rangle \sigma R_X}{e}, \quad (14.70)$$

де  $\sigma$  - питома електропровідність провідника,  $\langle v \rangle$  - середня швидкість теплового руху електронів у провіднику. Виявилось, що середня довжина вільного пробігу електронів  $\langle \lambda \rangle \sim 10^{-8}$  м, що на два порядки перевищує міжвузлові відстані в металі.

### 1.3 Магнітний потік. Теорема Остроградського – Гаусса. Робота при переміщенні провідника і контуру зі струмом у магнітному полі.

**Потоком вектора магнітної індукції (магнітним потоком)** через площадку  $dS$  називається скалярна фізична величина, яка дорівнює добутку проекції  $B_n$  вектора  $\vec{B}$  на напрямок нормалі  $\vec{n}$  до площадки  $dS$  і величини цієї площадки:

$$d\Phi_B = B_n dS = (\vec{B} d\vec{S}), \quad (14.71)$$

де  $B_n = B \cos \alpha$  - проекція вектора  $\vec{B}$  на напрямок нормалі до площадки  $dS$  ( $\alpha$  - кут між векторами  $\vec{n}$  і  $\vec{B}$ ) (рис. 180),  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  -

вектор, модуль якого дорівнює  $dS$ , а напрямок збігається з нормаллю  $\vec{n}$  до

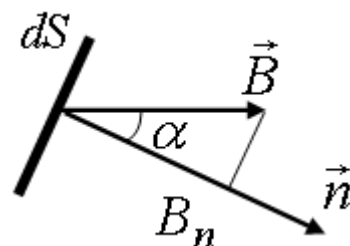


Рис. 14.20

площинки  $dS$ .

Потік вектора  $\vec{B}$  може бути як позитивним, так і негативним залежно від знаку  $\cos\alpha$  (визначається вибором позитивного напрямку нормалі  $\vec{n}$ ).

Потік вектора магнітної індукції  $\vec{\Phi}_B$  через довільну поверхню  $S$  дорівнює

$$\Phi_B = \int_S B_n dS = \int_S (\vec{B} d\vec{S}). \quad (14.72)$$

Для однорідного поля і плоскої поверхні, розміщеної перпендикулярно до вектора  $\vec{B}$ ,  $B_n = B = \text{const}$  і  $\Phi_B = BS$ .

Розрахуємо потік вектора  $\vec{B}$  через переріз соленоїда. Всередині соленоїда індукція однорідного поля у вакуумі дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}. \quad (14.73)$$

Магнітний потік через один виток соленоїда площею  $S$ :

$$\Phi_1 = BS. \quad (14.74)$$

Повний магнітний потік через соленоїд, який називається потокозчепленням  $\psi$ , дорівнює:

$$\psi = \Phi_1 N = NBS = \mu_0 \frac{N^2 I}{l} S. \quad (14.75)$$

В електродинаміці доводиться **теорема Остроградського – Гаусса для магнітного поля**: магнітний потік крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = \oint_S B_n dS = 0. \quad (14.76)$$

Ця теорема є наслідком того, що в природі нема магнітних „зарядів” і лінії індукції будь-якого магнітного поля є замкненими кривими.

Покажемо справедливість теореми Остроградського-Гауса на простому прикладі. Розглянемо магнітне поле нескінченно довгого прямолінійного провідника зі струмом  $I$ . За замкнену поверхню  $S$  візьмемо поверхню прямого колового циліндра, вісь якого збігається з віссю провідника.

Лінії індукції магнітного поля прямолінійного струму є концентричними колами, центри яких лежать на осі провідника, а площини перпендикулярні до нього. Тому лінії індукції не перетинають ні бічної поверхні циліндра, ні його

основ. Отже, в будь-якій точці поверхні циліндра проекція вектора  $\vec{B}$  на напрямок нормалі  $\vec{n}$  до поверхні  $D_n = 0$  і  $\oint_S B_n dS = 0$ .

На провідник зі струмом у магнітному полі діє сила Ампера. Якщо провідник не закріплено, то під впливом сили Ампера він переміщуватиметься у магнітному полі.

Обчислимо роботу  $dA$ , виконану силою Ампера при переміщенні елемента  $dl$  провідника зі струмом  $I$  у магнітному полі (рис. 14.21).

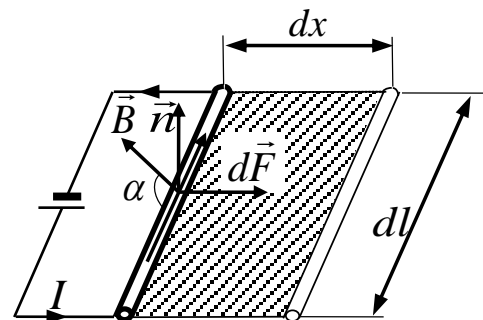


Рис. 14.21

Елемент провідника переміщується в напрямку сили  $d\vec{F}$ , яка діє на нього на відстані  $dx$ . Робота  $dA$  дорівнює

$$dA = dF dx. \quad (14.77)$$

За законом Ампера

$$dF = IB dl \sin \alpha. \quad (14.78)$$

Тоді

$$dA = IB \sin \alpha dl dx. \quad (14.79)$$

Сила  $d\vec{F}$  і переміщення  $d\vec{x}$  напрямлені перпендикулярно до елемента провідника  $d\vec{l}$ . Добуток  $dl dx = dS$  – площа поверхні, яка описана елементом провідника  $dl$  при його переміщенні на  $dx$ .

З рис. 14.21 видно, що  $B \sin \alpha = B_n$  – проекція вектора  $\vec{B}$  на напрямок нормалі  $\vec{n}$  до площини  $dS$ .

Добуток  $B_n dS = d\Phi_B$  – магнітний потік крізь поверхню  $dS$ . Тоді

$$dA = IB_n dS = Id\Phi_B. \quad (14.80)$$

Вважаючи силу струму сталою і, інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$A = I\Phi_B. \quad (14.81)$$

*Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні в магнітному полі провідника, струм в якому постійний, дорівнює добутку сили струму на величину магнітного потоку крізь поверхню, яку описує провідник під час свого руху.*

Знайдемо вираз для роботи, яку виконують сили Ампера при переміщенні в магнітному полі замкнутого контуру, по якому проходить постійний струм  $I$ .

Нехай внаслідок нескінченно малого переміщення контур  $C$  зайняв положення  $C'$  (рис. 14.22).

Контур  $C$  уявно розіб'ємо на два провідники  $LNK$  і  $KML$ , які з'єднані своїми кінцями. Повна робота  $dA$ , виконана силами Ампера при переміщенні контуру, дорівнює алгебраїчній сумі робіт переміщення провідників  $LNK(dA_1)$  і  $KML(dA_2)$ , тобто  $dA = dA_1 + dA_2$ .

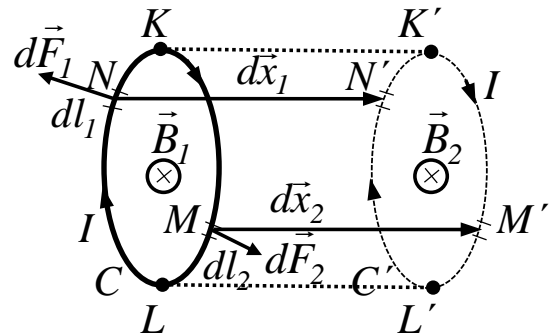


Рис. 14.22

Припустимо, що вектор  $\vec{B}$  магнітної індукції напрямлений перпендикулярно до площини рисунка і в початковому положенні контуру дорівнює  $B_1$ , а в кінцевому -  $B_2$ , причому  $B_2 > B_1$ .

Сила Ампера  $d\vec{F}_2$ , що діє на довільний елемент  $dl_2$ , провідника  $KML$  утворює гострий кут з напрямком його переміщення  $d\vec{x}_2$  і виконує позитивну роботу.

Сила  $d\vec{F}_1$ , що діє на елемент  $dl_1$  провідника  $LNK$ , утворює з напрямком його переміщення  $d\vec{x}_1$  тупий кут і виконує негативну роботу, тому роботи  $dA_1$  і  $dA_2$  переміщення провідників  $LNK$  і  $KML$  мають різні знаки. Щоб отримати абсолютні значення роботи  $dA_1$  і  $dA_2$ , треба продиференціювати вираз  $A = I\Phi_B$ . Тому

$$\begin{aligned} dA &= dA_1 + dA_2 = -Id\Phi_{B_1} + Id\Phi_{B_2} = \\ &= I(d\Phi_{B_2} - d\Phi_{B_1}), \end{aligned} \quad (14.82)$$

де  $d\Phi_{B_1}$  – магнітний потік крізь поверхню  $LNK K'N'L'$ ;  $d\Phi_{B_2}$  – крізь поверхню  $LMK K'M'L'$ ;  $d\Phi_{B_2} - d\Phi_{B_1} = d\Phi_B$  – зміна магнітного потоку, що пронизує поверхню, обмежену контуром, при переміщенні контуру з положення  $C$  в положення  $C'$ .

Остаточний вираз для елементарної роботи  $dA$  буде

$$A = Id\Phi_B. \quad (14.83)$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо роботу  $A$ , яку виконує сила Ампера при будь-якому переміщенні контуру в магнітному полі

$$A = I\Delta\Phi_B. \quad (14.84)$$

*Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні в магнітному полі замкнутого контура, по якому проходить постійний струм, дорівнює добутку сили струму на зміну магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.*

Розглянемо кілька прикладів.

1. *Замкнений жорсткий ( $S = \text{const}$ ) провідник поступально переміщується в магнітному полі так, що його площина залишається перпендикулярно до вектора  $\vec{B}$ . При цьому робота  $A$ , яка виконана при переміщенні провідника з деякого початкового в кінцеве положення, дорівнює*

$$A = I(\Phi_{B_2} - \Phi_{B_1}). \quad (14.85)$$

Оскільки вектор  $\vec{B}$  перпендикулярний до площини замкнутого провідника, то

$$\Phi_{B_2} = B_2 S, \quad \Phi_{B_1} = B_1 S, \quad (14.86)$$

де  $S$  – площа поверхні, яка охоплена провідником. Тоді

$$A = IS(B_2 - B_1) = p_m(B_2 - B_1), \quad (14.87)$$

де  $p_m$  – магнітний момент струму

Якщо поле однорідне, тобто

$$B_2 = B_1, \quad \text{то} \quad A = 0.$$

2. *Виймання замкнутого провідника з струмом з магнітного поля. Якщо через контур, що охоплений замкненим струмом  $I$ , проходив магнітний потік  $\Phi_{B_1}$ , то при вийманні провідника зміна магнітного потоку дорівнюватиме*

$$\Delta\Phi_B = \Phi_{B_2} - \Phi_{B_1} = -\Phi_{B_1}. \quad (14.88)$$

Тоді

$$A = -I\Phi_{B_1} = -p_m B. \quad (14.89)$$

3. *Повертання замкнутого провідника зі струмом в однорідному магнітному полі. Розглянемо провідник у вигляді кільця площею  $S$ . Припустимо, що спочатку площина контуру провідника перпендикулярна до вектора магнітної*

індукції і через контур проходить максимальний магнітний потік  $\Phi_B$ . Якщо повернути провідник навколо діаметра кільця на кут  $90^\circ$ , то площа контуру розміститься паралельно вектору  $\vec{B}$  і жодна з них не пронизуватиме його. Отже,

$$\Phi_{B_1} = \Phi_B, \quad \Phi_{B_2} = 0.$$

Тоді

$$A = -I\Phi_B = -p_m B. \quad (14.90)$$

При повертанні рамки на кут  $180^\circ$  її кінцеве і початкове положення відрізнятимуться лише напрямком вектора  $\vec{B}$  відносно вектора магнітного моменту контуру  $\vec{p}_m$  і  $\Phi_{B_1} = \Phi_B$ ,  $\Phi_{B_2} = -\Phi_B$ . Тоді

$$A = -2p_m B = -2I\Phi_B. \quad (14.91)$$

## Тема 15 Магнітне поле в магнетиках.

### 15.1 Намагніченість середовища. Магнітне поле у магнетикові.

Розглянемо процеси, що відбуваються в речовині під впливом зовнішнього магнітного поля на атоми і молекули речовини. В будь-якій речовині, вміщеній у зовнішнє магнітне поле, виникає особливий стан намагніченості і створюється внутрішнє магнітне поле.

Розглянемо причини цього явища з погляду будови атомів і молекул, поклавши в основу гіпотезу Ампера, згідно з якою в будь-якому тілі існують мікроскопічні струми, обумовлені рухом електронів в атомах і молекулах.

Електрони в атомах рухаються по деяких замкнених орбітах. Електрон, що рухається по одній з таких орбіт (рис. 15.1), еквівалентний коловому струму, тому він має **орбітальний магнітний момент**  $\vec{p}_{ml} = IS\vec{n}$ , модуль якого  $p_{ml} = IS$ , де  $S$  – площа орбіти електрона:  $S = \pi r^2$ .

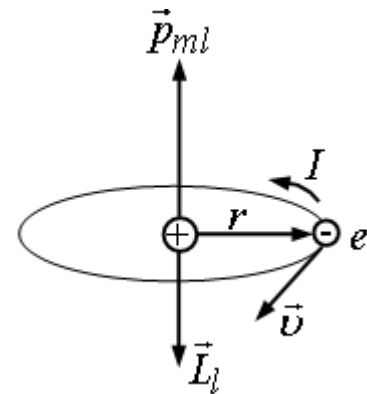


Рис. 15.1

Вектор  $\vec{p}_m$  напрямлений в той самий бік, що й індукція магнітного поля в центрі колового струму  $I$ . Кількість обертів електронів в секунду

$\nu = \frac{v}{2\pi r}$ . Тоді сила струму

$$I = e\nu = \frac{ev}{2\pi r} \quad \text{і} \quad p_{ml} = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (15.1)$$

З іншого боку, кожний електрон, що рівномірно рухається по орбіті, має **орбітальний механічний момент імпульсу**, який числово дорівнює  $L_l = mvr$ . Тоді

$$\frac{p_{ml}}{L_l} = \frac{e}{2m}. \quad (15.2)$$

Вектори  $p_{ml}$  і  $\vec{L}_l$  напрямлені у взаємно протилежні сторони. Тому

$$\vec{p}_{ml} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_l, \quad \vec{p}_{ml} = -g\vec{L}_l, \quad (15.3)$$

де  $g_l = \frac{e}{2m}$  – гіромагнітне відношення орбітальних моментів.

Гіромагнітне відношення, яке експериментально визначили Ейнштейн і

де Гааз, виявилось в два рази більшим від гіромагнітного відношення орбітальних моментів.

Щоб пояснити результат експерименту, припустили, що електрон, крім орбітальних моментів  $\vec{p}_{ml}$  і  $\vec{L}_l$ , має *власний механічний момент імпульсу*  $\vec{L}_s$ , що називається *спіном електрона*. Спін є невід'ємною властивістю електрона, подібно до того, як заряд  $e$  і маса  $m$ . Спін електрона виявляється в багатьох експериментальних фактах. Спіну електрона  $\vec{L}_s$  відповідає власний (спіновий) магнітний момент  $\vec{p}_{ms}$ , який дорівнює:

$$\vec{p}_{ms} = -g_s \vec{L}_s = -\frac{e}{m} \vec{L}_s, \quad (15.4)$$

де  $g_s$  – гіромагнітне відношення спінових моментів.

Магнітний момент електрона складається з його орбітального і спінового магнітних моментів. Відповідно магнітний момент атома дорівнює сумі магнітних моментів електронів, що входять до складу атома, і магнітного моменту ядра, який значно менший від моментів електрона. Тому магнітним моментом ядра, як правило, нехтують. Отже,

$$\vec{P}_{ma} = \sum_{i=1}^Z \vec{p}_{mli} + \sum_{i=1}^Z \vec{p}_{msi}, \quad (15.5)$$

де  $Z$  – атомний номер хімічного елемента.

За відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти орієнтовані хаотично, внаслідок чого сумарний магнітний момент речовини дорівнює нулю і результуюча магнітна індукція поля, яке створене мікроскопічними струмами, дорівнює нулю. Під дією зовнішнього магнітного поля магнітні моменти орієнтуються в певному напрямку і виникає внутрішнє магнітне поле, сумарний магнітний момент відмінний від нуля і речовина намагнічується.

Для кількісного опису намагнічування магнетиків введемо векторну величину – *намагніченість*  $\vec{J}$ , яка числово дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{P}_{mai}, \quad (15.6)$$

де  $N$  – кількість атомів (молекул), що знаходяться в об'ємі  $V$ ,  $\vec{P}_{mai}$  -

магнітний момент і-го атома (молекули). Об'єм  $V$  повинен бути настільки малим, щоб в його межах магнітне поле можна вважати однорідним.

## 15.2 Діамагнетики. Парамагнетики. Феромагнетики.

Досліди і теорія показують, що всі речовини, які поміщені в магнітне поле, набувають магнітних властивостей, тобто намагнічуються і тому деякою мірою змінюють зовнішнє поле.

При цьому виявляється, що одні речовини послаблюють зовнішнє поле, а інші – підсилюють його; перші називаються *діамагнетиками*, другі – *парамагнетиками*. Більшість речовин належить до діамагнетиків

*Діамагнетиками* називають речовини, магнітні моменти атомів або молекул яких дорівнюють нулю, коли немає зовнішнього магнітного поля.

В цих речовинах спінові та орбітальні магнітні моменти електронів взаємно скомпенсовані.

До діамагнетиків належать інертні гази  $He, Ne, Ar, Kr, Xe$ , а також такі речовини, як  $H_2O, C, Cu, Zn, Ag, Sb, Hg, Pb, Bi$ , багато органічних сполук тощо.

Для пояснення природи діамагнетизму розглянемо вплив магнітного поля на рух електронів в атомах речовини.

Коли внести діамагнетик у зовнішнє магнітне поле, у кожному його атомі індукується магнітний момент  $\vec{P}'_{ma}$ , який напрямлений протилежно до вектора  $\vec{B}$  магнітної індукції поля. В межах малого об'єму  $V$  ізотропного діамагнетика вектори  $\vec{P}'_{ma}$  всіх  $N$  атомів (молекул) однакові. Вони пропорційні до вектора  $\vec{B}$  і протилежні йому за напрямком. Тому вектор намагнічування дорівнює:

$$\vec{J} = \frac{N\vec{P}'_{ma}}{V} = n\vec{P}'_{ma} = -\frac{ne^2 \sum_{i=1}^Z \langle r_i^2 \rangle}{6m} \vec{B} = \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (15.7)$$

де  $n$  – концентрація атомів (молекул),  $\chi$  – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи речовини:

$$\chi = -\frac{ne^2 \sum_{i=1}^Z \langle r_i^2 \rangle}{6m \mu_0}. \quad (15.8)$$

Коефіцієнт  $\chi$  називається *магнітною сприйнятливістю* речовини. Як

видно, для всіх діамагнетиків  $\chi < 0$  і за величиною  $|\chi| \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$ , тобто  $|\chi| \ll 1$ . Тому діамагнітний ефект малопомітний, цей ефект виникає у всіх речовинах, які внесені у магнітне поле.

Стрижень з діамагнітного матеріалу намагнічується в напрямку, протилежному до напрямку зовнішнього магнітного поля. Тому в неоднорідному магнітному полі діамагнетик виштовхується в область слабшого поля і встановлюється так, щоб його вісь була перпендикулярна до вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  поля.

*Якщо векторна сума орбітальних магнітних моментів усіх електронів атома або молекули не дорівнює нулю, то атом загалом має деякий магнітний момент  $\vec{P}_{ma}$ . Такі атоми (молекули) називаються парамагнітними, а речовини, що складаються з них - парамагнетиками.*

До парамагнетиків належать речовини, атоми яких мають незабудовану до кінця зовнішню електронну підоболонку: *Mg, Al, Ca, Cr, Mn, Pt*, кисень атомарний і молекулярний, солі заліза, кобальту, нікелю, рідкісноземельних елементів тощо.

За відсутності зовнішнього магнітного поля парамагнетик ненамагнічений, оскільки внаслідок теплового руху власні магнітні моменти атомів орієнтовані хаотично ( $J = 0$ ).

Розглянемо, що станеться при внесенні парамагнетика в однорідне магнітне поле, магнітна індукція якого дорівнює  $\vec{B}$ .

Кожен електрон атома парамагнітного тіла бере участь у двох рухах: орбітальному і прецесійному. Згідно з теоремою Лармора, всі магнітні моменти електронів атома і результуючий магнітний момент атома прецесують навколо напрямку  $\vec{B}$  з однаковою кутовою швидкістю  $\omega_L$ .

Тепловий рух атомів парамагнетика і їх зіткнення спричинюють поступове згасання прецесії магнітних моментів атомів, а також зменшення кутів між напрямками  $\vec{P}'_{ma}$  і  $\vec{B}$ . Отже, незважаючи на утворюване тепловим рухом „розкидання” атомів, цей рух водночас сприяє переважній орієнтації магнітних атомів у напрямку зовнішнього магнітного поля, оскільки саме по собі магнітне поле може спричинювати лише процесію  $\vec{P}'_{ma}$  навколо напрямку  $\vec{B}$ .

Магнітний момент  $\vec{P}_{ma}$  окремого атома має величину  $\sim 10^{-23} \frac{Дж}{Тл}$ , але сукупна дія магнітних моментів усіх атомів, що містяться в одиниці об'єму речовини приводить до ефекту намагнічування, що значно перевищує діаманітний ефект. Тому парамагнетик намагнічується „за полем”, тобто в напрямку магнітної індукції  $\vec{B}$  зовнішнього магнітного поля.

Класичну теорію парамагнетизму розвинув П. Ланжевен, який розглянув задачу про поведінку молекулярних струмів в однорідному магнітному полі.

**Орієнтуюча** дія магнітного поля на атом залежить від магнітного моменту атома і від магнітної індукції  $\vec{B}$  поля. „**Розкидаюча**” дія теплового руху визначається величиною  $kT$ , пропорційною до середньої теплової енергії однієї частинки. Виявилось, що результуюча дія двох протилежних факторів залежить від відношення  $\alpha = \frac{P_{ma}B}{kT}$ .

Ланжевен знайшов залежність намагніченості  $J$  парамагнетика від параметра  $a$ :

$$J = nP_{ma}L(\alpha), \quad (15.9)$$

де  $L(\alpha)$  - класична функція Ланжавена, яка має вигляд:

$$L(\alpha) = \left\{ \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right\}. \quad (15.10)$$

Якщо  $\alpha \ll 1$ , то  $L(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3}$ ; якщо  $\alpha \gg 1$ , тоді  $L(\alpha) \rightarrow 1$ .

При  $T \approx 300K$  умова  $\alpha = 1$  може справджуватися лише в дуже сильних магнітних полях.

У дуже сильних магнітних полях або при дуже низьких температурах, коли більша частина векторів  $\vec{P}_m$  „орієнтована” вздовж напрямку індукції магнітного поля, спостерігається **явище насиченості**: намагніченість не залежить від  $\vec{B}$ .

Далеко від області насиченості  $L(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3}$ , тоді

$$\vec{J} = \frac{nP_{ma}^2\mu_0}{3kT} \vec{B} = \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (15.11)$$

Магнітна сприйнятливість парамагнітних речовин  $\chi = \frac{nP_{ma}^2\mu_0}{3kT}$ . Отже  $\chi > 0$  і значення  $\chi \sim 10^{-3} - 10^{-5}$ .

Макроскопічно парамагнетизм виявляється в тому, що парамагнетики втягуються в неоднорідне магнітне поле, а в однорідному полі парамагнітний стрижень орієнтується паралельно до ліній індукції магнітного поля.

При нагріванні парамагнетика, який внесений у зовнішнє магнітне поле, тепловий рух атомів зростатиме і руйнуватиме ту орієнтацію елементарних магнітних моментів частини атомів, яка встановилася під дією зовнішнього поля. Отже, магнітна сприйнятливість парамагнетиків  $\chi$  як величина, що характеризує з макроскопічного погляду магнітні властивості речовини, повинна залежати від  $T$ :

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (15.12)$$

де  $C = \frac{n\mu_0 P_{ma}^2}{3k}$  - стала Кюрі.

Це співвідношення виражає закон Кюрі: магнітна сприйнятливість парамагнетика обернено пропорційна до його термодинамічної температури.

У дев'яти чистих хімічних елементів, а саме залізі ( $Fe$ ), нікелі ( $Ni$ ), кобальті ( $Co$ ) і ланоганидах - гадолінію, тербію, диспрозію, гольмію, ербію ( $Er$ ) і тулію ( $Tu$ ) та їх численних сплавах виявлено властивість миттю намагнічуватися навіть у слабких магнітних полях. Усі вони утворюють групу сильномагнітних речовин - **феромагнетиків**. Феромагнетики підсилюють зовнішнє поле в сотні і тисячі разів.

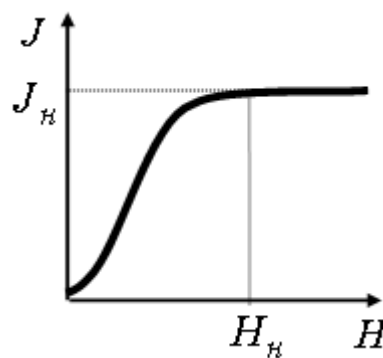


Рис. 15.2

Експериментальне вивчення феромагнетиків було розпочате О.Г. Столетовим. Він дослідив залежність намагніченості заліза від напруженості магнітного поля.

На рис. 15.2 показано залежність намагніченості  $J$  заліза від напруженості  $H$  магнітного поля. Починаючи з деякого числового значення намагніченість залишається сталою і дорівнює  $J_n$ . Це явище Столетов назвав **магнітним насиченням**.

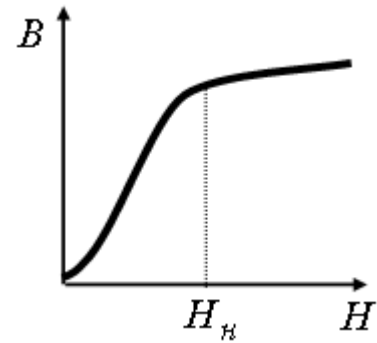


Рис. 15.3

На рис. 15.3 зображено криву залежності магнітної індукції  $B$  від  $H$ . При  $H > H_n$  магнітна індукція  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$  зростає за лінійним законом залежно від напруженості поля  $\vec{H}$ . Це пояснюється тим, що намагніченість  $\vec{J}$  при цій напруженості поля вже не змінюється і вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  залежить лише від напруженості  $\vec{H}$ .

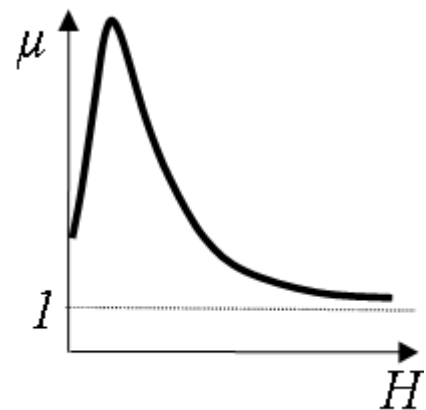


Рис. 2.4

Відносна магнітна проникність  $\mu$  ферромагнетика спочатку швидко зростає із збільшенням  $H$ , досягає максимуму і потім спадає, прямуючи до одиниці при сильних намагнічуючих полях (рис. 15.4). Це пов'язано з тим, що

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{\mu_0 H + J}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{\mu_0 H}. \quad (15.13)$$

Тому при  $J = J_n = const$  із зростанням  $H$  відношення  $\frac{J}{H} \rightarrow 0$ , а  $\mu \rightarrow 1$ .

О. Столетов вивчив явище намагнічування ферромагнетика у змінному за величиною і напрямком зовнішньому магнітному полі.

Залежність намагніченості  $J$  від напруженості поля  $H$  визначається передісторією намагнічення ферромагнетика (рис. 15.5).

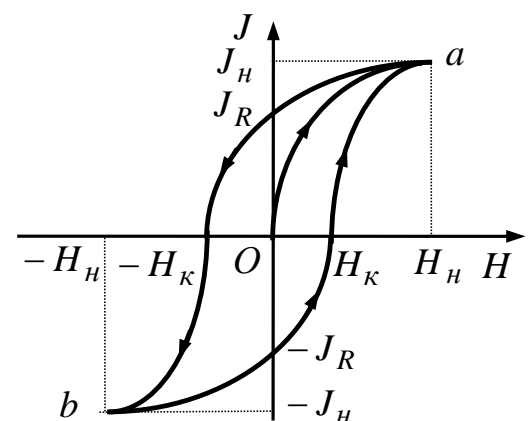


Рис. 15.5

Це явище називається **магнітним гістерезисом**.

Помістимо стрижень з феромагнетика, який після виготовлення ні разу не був у зовнішньому магнітному полі, у соленоїд і монотонно збільшуватимемо струм у його обмотці. При цьому зростатиме напруженість  $H$  поля та намагнічення  $J$  стрижня (крива  $Oa$ ), при напруженості поля  $H_H$  намагнічення досягає насичення  $J_H$ .

Якщо поступово зменшувати струм в обмотці соленоїда, то зменшується напруженість  $H$  поля соленоїда і намагнічення  $J$  стрижня. Але крива  $J(H)$  вже не збігається з первинною кривою намагнічення  $Oa$ . В той момент, коли намагнічуюче поле  $H=0$ , у феромагнітного стрижня спостерігатиметься залишкове намагнічення  $J_R$ .

Після зміни на клеммах соленоїда полярності джерела і монотонного збільшення струму виникає магнітне поле, яке напрямлене протилежно до залишкового намагнічення, і стрижень розмагнічуватиметься. Та напруженість  $H_K$  поля, яка потрібна, щоб повністю розмагнітити попередньо намагнічений стрижень, називається **коерцитивною напруженістю** (коерцитивною силою).

При подальшому збільшенні магнітного поля, протилежного початковому, намагнічення стрижня знову досягає намагнічення насичення -  $J_H$  при  $H = -H_H$ . Повертаючись поступово до напруженості магнітного поля  $H_H$ , дістанемо замкнену криву, яка називається **петлею гістерезису**.

Коерцитивна сила характеризує властивість феромагнетика зберігати намагніченість. Матеріали з великою коерцитивною напруженістю дають широку петлю гістерезису і називаються „твердими” магнітними матеріалами. З них виготовляють постійні магніти.

„М’які” магнітні матеріали мають малу коерцитивну силу і дають вузьку петлю гістерезису. Ці матеріали використовують для виготовлення осердь трансформаторів. Перемагнічення феромагнетика пов’язане з повертанням областей спонтанного намагнічення. Робота, необхідна для цього, здійснюється за рахунок енергії зовнішнього магнітного поля. Кількість тепла, яке виділяється під час перемагнічування, пропорційна до площі петлі гістерезису.

В експериментах із залізом П. Кюрі встановив, що при певній

температурі воно втрачає властивість феромагнетика і переходить в парамагнітний стан. Цю температуру називають точкою Кюрі.

Залежність магнітної сприйнятливості феромагнетиків від абсолютної температури  $T$  речовини у феромагнітному стані наближено описується законом Кюрі:

$$\chi = C(T_c - T)^{\gamma}, \quad (15.14)$$

де  $\gamma \neq 1$  і набуває різних значень у різних температурних інтервалах. Наприклад, при температурах  $T$ , близьких до точки фазового переходу  $T_c$ ,

$$\gamma = \frac{4}{3}.$$

Магнітна сприйнятливість феромагнетика в парамагнітній фазі змінюється за законом Кюрі-Вейса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}. \quad (15.15)$$

Перехід речовини з феромагнітного стану в парамагнітний не супроводжується виділенням або поглинанням тепла.

Класична теорія феромагнетизму була розроблена П. Вейсом. В основу цієї теорії покладено дві гіпотези. **Перша гіпотеза** полягає в тому, що в певній області температур (від  $T = 0$  до  $T = T_c$ ) феромагнетикам властива спонтанна намагніченість, яка не залежить від наявності зовнішнього магнітного поля. Проте досліди показали, що у разі відсутності зовнішнього магнітного поля, якщо не брати до уваги явище магнітного гістерезису, будь-яке феромагнітне тіло буде в цілому розмагнічене. Це примусило ввести **другу гіпотезу** про те, що при  $T < T_c$  будь-яке феромагнітне тіло розділяється на малі області, яким властива однорідна спонтанна намагніченість. Такі області називаються **доменами**. Лінійні розміри доменів досягають  $10^{-2} - 10^{-3}$  см. Межі доменів (доменні стінки) не слід уявляти у вигляді геометричних площин. Фактично це області, що охоплюють сотні атомних шарів, в яких напрямок намагнічення змінюється монотонно.

Коли зовнішнього магнітного поля немає, вектори магнітних моментів окремих доменів орієнтуються в просторі хаотично, так що результуючий магнітний момент усього тіла дорівнює нулю. Зовнішнє магнітне поле, яке діє на феромагнетики, орієнтує магнітні моменти не окремих частинок як у парамагнетиках, а цілих областей спонтанної намагніченості, домени починають збільшуватись в об'ємі за рахунок сусідніх доменів, що мають інші орієнтації намагніченості (рис. 15.6).

При досить сильному полі  $H_n$  всі домени повертаються в напрямку поля і феромагнетик намагнічується до насичення.

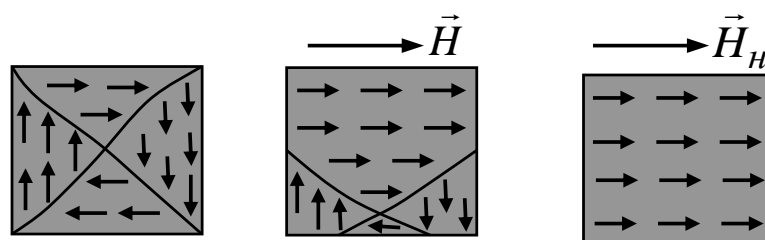


Рис. 15.6

Класична теорія феромагнетизму дала змогу пояснити існування магнітного насичення, яке полягає в тому, що вектори магнітних моментів в усіх областях спонтанної намагніченості встановлюються паралельно до зовнішнього магнітного поля. Подальший розвиток теорії феромагнетизму Гейзенбергом і Френкелем, а також ряд експериментальних фактів дозволили з'ясувати природу елементарних носіїв феромагнетизму. Магнітні властивості феромагнетиків визначаються **спіновими магнітними моментами електронів**.

Феромагнітні властивості можуть мати лише кристалічні речовини, в атомах яких недобудовані внутрішні електронні оболонки з некомпенсованими спінами. У цих кристалах можуть виникати сили, які примушують спінові магнітні моменти електронів орієнтуватися паралельно один до одного, що і призводить до виникнення областей спонтанного намагнічення. Ці сили, що називаються **обмінними силами**, мають квантову природу - вони зумовлені хвильовими властивостями електронів.

## Тема 16 Явище електромагнітної індукції.

### 16.1 Закон Ленца. Закон електромагнітної індукції.

Після відкриття Ерстеда, в якому було доведено, що навколо провідників із струмом існує магнітне поле, природно було поставити питання про можливість утворення електричного струму у провідниках за допомогою магнітного поля. Це питання розв'язав М. Фарадей, який в 1831 р. показав, що в замкненому провіднику виникає електричний струм при будь-яких змінах магнітного потоку через поверхню, охоплену цим провідником.

*Явище виникнення електрорушійної сили при зміні магнітного потоку, що пронизує поверхню, яка охоплена провідним, контуром, називається електромагнітною індукцією.*

*Струм, що виникає у провідниках при електромагнітній індукції, називається індукційним.*

Виникнення індукційного струму завжди пов'язане із зміною магнітного потоку через поверхню, яку охоплює провідник. Ці зміни можуть відбуватися з різних причин, зокрема через:

- переміщення постійного магніту відносно нерухомого провідника;
- переміщення контуру відносно нерухомого магніту;
- замикання та розмикання струму в обмотці нерухомого електромагніту, розміщеного поблизу провідника;
- відносне переміщення контуру і електромагніту;
- зміну магнітної індукції поля електромагніту (виймання осердя при сталому струмі в обмотці або зміну струму реостатом);
- зміну комутатором напрямку струму в обмотці електромагніту;
- постійний рух контуру в неоднорідному магнітному полі;
- обертальний рух контуру в однорідному магнітному полі.

Отже, індукційний струм в замкненому провідному контурі виникає тільки тоді, коли змінюється магнітний потік, який проходить через площу, охоплену контуром.

Фарадей встановив, що напрямок індукційного струму в провіднику залежить від характеру зміни (збільшення чи зменшення) магнітного потоку ( $\Delta\Phi > 0$  чи  $\Delta\Phi < 0$ ) через його контур. Якщо при внесенні постійного магніту в котушку стрілка гальванометра відхиляється в один бік, то при вийманні

магніту вона відхиляється в протилежний бік.

Загальне правило, за допомогою якого можна визначити напрямок індукційного струму в замкненому провіднику, сформулював Е.Х. Ленц:  
*індукційний струм у замкненому провіднику завжди має такий напрямок, що створений цим струмом власний магнітний потік протидіє тим змінам зовнішнього магнітного потоку, які збуджують індукційний струм.*

Використовуючи закон Ленца для **визначення напрямку індукційного струму**, треба:

- 1) знайти причину, яка створює індукційний струм;
- 2) вважаючи, що індукційний струм протидіє цій причині, знайти напрямок його магнітного поля;
- 3) визначити напрямок індукційного струму за напрямком його магнітного поля.

Із закону Ленца можна встановити, що енергія індукційного струму у провіднику утворюється за рахунок тієї енергії, яка витрачається на подолання протидії магнітного поля індукційного струму.

Завдяки явищу електромагнітної індукції можна перетворити механічну енергію в електричну, а також передавати електричну енергію з одного кола в інше.

Якщо індукційний струм виникає у прямому провіднику, який є ділянкою замкненого кола і рухається в зовнішньому магнітному полі перпендикулярно до ліній індукції, напрямок струму можна визначити **за правилом правої руки**: праву руку треба помістити в магнітному полі так, щоб лінії напруженості входили в долоню, а відставлений під прямим кутом великий палець збігався з напрямом переміщення провідника, тоді чотири витягнуті пальці вкажуть напрямок індукційного струму в цьому провіднику.

Індукційний струм  $I_i$  у замкненому провіднику з опором  $R$  виникає під дією  $\mathcal{E}_i$ , яку можна виразити за законом Ома

$$\mathcal{E}_i = I_i R. \quad (16.1)$$

Оскільки та сама  $\mathcal{E}_i$  у провідниках з різним опором створює неоднакові струми, то для кількісної характеристики явища електромагнітної індукції зручніше користуватися величиною  $\mathcal{E}_i$ , а не силою індукційного

струму  $I_i$ .

Дослідження Фарадея індукційного струму в контурах різної форми і розмірів показали, що  $EPC$  електромагнітної індукції  $\mathcal{E}_i$  в контурі пропорційна до швидкості зміни магнітного потоку  $\Phi_B$  через поверхню, обмежену цим контуром (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_i = k \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (16.2)$$

$EPC$  електромагнітної індукції в контурі вважають позитивною, якщо магнітний момент  $\vec{p}_m$  відповідного їй індукційного струму утворює гострий кут з лініями магнітної індукції того поля, яке наводить цей струм (рис. 16.1).

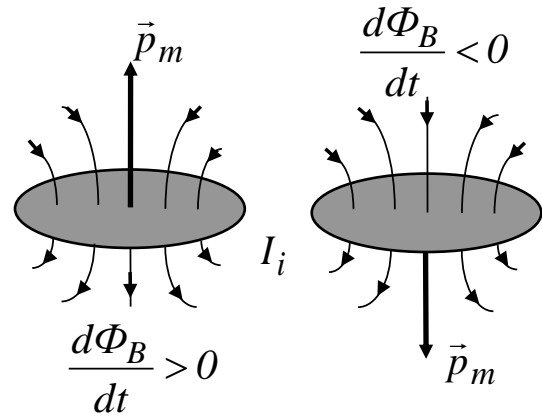


Рис. 16.1

Тоді для випадку, зображеного на рисунку ліворуч,  $\mathcal{E}_i < 0$ , а для зображеного праворуч –  $\mathcal{E}_i > 0$ . В системі СІ  $k = -1$  і

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (16.3)$$

Знак „-” є математичним виразом правила Ленца.

Ця формула, яка об’єднує закони Фарадея і Ленца, є математичним виразом основного закону електромагнітної індукції:

*електрорушійна сила електромагнітної індукції в замкненому контурі чисельно дорівнює і протилежна за знаком швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.*

Якщо  $EPC$  індукції виникає при зміні магнітного потоку, який пронизує котушку з  $N$  витків, то її величина буде відповідно в  $N$  разів більшою, ніж для одного витка, тобто

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (16.4)$$

На основі закону електромагнітної індукції можна означити одиницю магнітного потоку вебер:  $1 \text{ Вб}$  – це такий магнітний потік, при зменшенні якого до нуля протягом  $1 \text{ с}$  в колі, яке він пронизував, виникає  $EPC$  індукції в  $1 \text{ В}$ .

## 16.2 Явище самоіндукції. Індуктивність. Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність.

Згідно із закону Фарадея, електрорушійна сила індукції  $\mathcal{E}_i$  виникає при будь-яких змінах магнітного потоку  $\Phi_B$  через поверхню, охоплену провідним контуром, незалежно від природи цього потоку і рівна

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (16.5)$$

Під час проходження по контуру непостійного струму власний магнітний потік змінюється і в контурі теж наводиться ЕРС індукції.

*Явище виникнення в контурі ЕРС індукції при змінах власного магнітного потоку, пов'язаних із зміною струму в цьому контурі, називається самоіндукцією. Електрорушійна сила в цьому випадку називається ЕРС самоіндукції  $\mathcal{E}_c$ .*

Отже, самоіндукція – це окремий випадок загального явища електрорушійної індукції.

Розглянемо соленоїд, що має  $N$  витків, по яких проходить струм  $I$  від зовнішнього джерела. Цей струм створює в соленоїді магнітне поле, яке зосереджене в його об'ємі і це поле можна вважати однорідним. Нехай весь об'єм магнітного поля соленоїда заповнений однорідною речовиною з відносною магнітною проникністю  $\mu$ . Якщо змінювати струм в соленоїді, то власний магнітний потік  $\Phi_B$ , який пронизує його поперечний переріз, теж змінюватиметься. Магнітний потік  $\Phi_{B_l}$  крізь площу  $S$ , що обмежена одним витком, дорівнює

$$\Phi_{B_l} = BS = \mu\mu_0 nSI = \mu\mu_0 \frac{NS}{l} I, \quad (16.6)$$

де  $l$  – довжина соленоїда.

За законом Фарадея

$$\mathcal{E}_c = -N \frac{d\Phi_{B_l}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} I \right). \quad (16.7)$$

Допустимо, що сили, які деформують соленоїд, дуже малі і тому  $l$  і  $S$  залишаються сталими. Якщо всередині соленоїда знаходиться феромагнітне осердя, то магнітний потік  $\Phi_B$  змінюється не лише внаслідок зміни сили

струму  $I$ , але і від зміни  $\mu$ . Позначимо

$$\mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = L. \quad (16.8)$$

Тоді

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d}{dt}(LI) = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}. \quad (16.9)$$

Якщо магнітна проникність середовища  $\mu$  не змінюється, то

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

*ЕРС самоіндукції прямо пропорційна швидкості зміни сили струму в контурі.*

Параметр  $L$  характеризує індивідуальні властивості контуру. Його називають **коефіцієнтом індуктивності**, або просто **індуктивністю** контуру.

Індуктивність контуру залежить від форми контуру, його розмірів та відносної магнітної проникності середовища, в якому він знаходиться.

З виразів для *ЕРС* самоіндукції, а саме

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{та} \quad \mathcal{E}_c = -N \frac{d\Phi_{B_l}}{dt} = -\frac{d\psi_c}{dt}, \quad (16.10)$$

де  $\psi_c$  - поточозчеплення самоіндукції, отримуємо, що

$$LdI = d\psi_c. \quad (16.11)$$

Після інтегрування ця рівність має вигляд:

$$LI = \psi_c. \quad (16.12)$$

*Отже, індуктивністю замкнутого контуру називається скалярна величина  $L$ , яка дорівнює відношенню поточозчеплення самоіндукції контуру  $\psi_c$  до сили струму  $I$  в цьому контурі:*

$$L = \frac{\psi_c}{I}. \quad (16.13)$$

Одиниця індуктивності – генрі ( $\Gamma_n$ ):  $1 \Gamma_n$  – індуктивність такого контуру, поточозчеплення самоіндукції якого при струмі  $1 \text{ А}$  дорівнює  $1 \text{ Вб}$ .

Формулу  $\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}$  можна використати для провідників довільної форми, якщо знайти поточозчеплення  $\psi_c = LI$ , яке зв'язане з цим провідником при силі струму  $I$ .

У виразі для *ЕРС* самоіндукції знак „-“, зумовлений правилом Ленца,

показує, що наявність індуктивності контура приводить до сповільнення зміни струму в ньому. Тобто індуктивність контуру є мірою його інертності відносно зміни струму.

Якщо струм з часом збільшується, то  $\frac{dI}{dt} > 0$  і,  $\mathcal{E}_c < 0$ , тобто струм самоіндукції напрямлений назустріч струму, який зумовлений зовнішнім джерелом і гальмує його зростання. Якщо струм з часом зменшується, то  $\frac{dI}{dt} < 0$ , і  $\mathcal{E}_c > 0$ , тобто індукційний струм має такий напрямок, як і спадний струм в контурі, і сповільнює його зменшення.

Явище самоіндукції найбільш яскраво проявляється у виникненні так званих **екстраструмів замикання та екстраструмів розмикання** в колах, що містять котушки з великою індуктивністю.

Знайдемо закон зміни струму в колі, індуктивність якого  $L$ , а електричний опір -  $R$ , під час вмикання в це коло і вимикання з нього джерела ЕРС  $\mathcal{E}$ . Сила струму  $I$  дорівнює

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R}, \quad (16.14)$$

де  $\mathcal{E}$  - алгебраїчна сума ЕРС джерел струму, ввімкнених в коло, а  $\mathcal{E}_i$  - ЕРС індукції. Якщо зовнішнє магнітне поле постійне, то індукційні явища в нерухомому колі зумовлені лише явищем самоіндукції, тому

$$I = \frac{\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}}{R}. \quad (16.15)$$

Розділимо змінні в цьому рівнянні:

$$IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E} - IR}{L}. \quad (16.16)$$

Звідси

$$\frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \frac{dt}{L}. \quad (16.17)$$

Вважаючи  $\mathcal{E}$ ,  $R$  та  $L$  сталими та інтегруючи, дістанемо

$$-\ln(\mathcal{E} - IR) = \frac{R}{L}t + \ln C, \quad (16.18)$$

де  $C$  - довільна стала інтегрування.

Потенціюючи дане рівняння, маємо

$$\mathcal{E} - IR = Ce^{-\frac{R}{L}t}. \quad (16.19)$$

В початковий момент часу  $t=0$  сила струму дорівнює  $I_0$ . Тоді

$$\mathcal{E} - I_0R = C. \quad (16.20)$$

В результаті

$$\mathcal{E} - IR = (\mathcal{E} - I_0R)e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (16.21)$$

Звідси знайдемо вираз для сили струму:

$$IR = I_0 R e^{-\frac{R}{L}t} + \mathcal{E} - \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (16.22)$$

і

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (16.23)$$

Для випадку вмикання джерела ЕРС початковий струм  $I_0 = 0$  і отримуємо вираз для екстраструму замикання

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (16.24)$$

Струм у колі поступово збільшується від нуля при  $t=0$  до значення  $\frac{\mathcal{E}}{R}$ , яке відповідає величині постійного струму (рис. 16.2). Зростання струму відбувається тим швидше, чим більше відношення  $\frac{R}{L}$ .

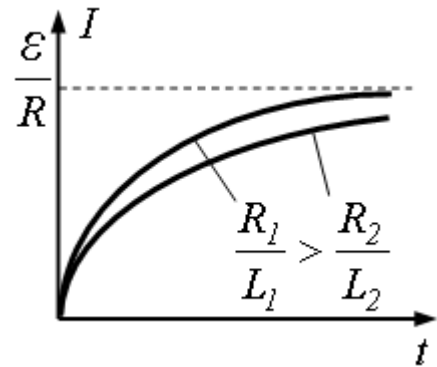


Рис. 16.2

Для випадку вимикання джерела ЕРС  $\mathcal{E} = 0$ , і екстраструм розмикання змінюється за законом

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (3.25)$$

Струм у колі поступово зменшується від початкового значення  $I_0$  до нуля за експоненціальним законом (рис. 16.3). Струм

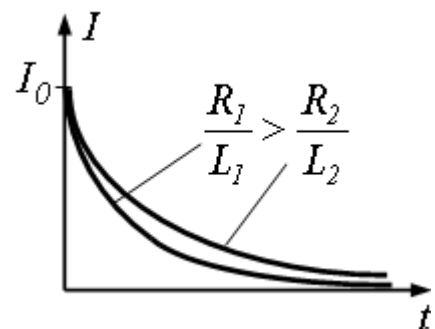


Рис. 16.3

зменшується тим швидше, чим більше значення  $\frac{R}{L}$ , тобто чим більший опір кола і чим менша його індуктивність.

Якщо два контури розміщені так, що магнітний потік, який створюється

струмом в одному з них, хоч частково пронизує другий контур, то такі контури індуктивно пов'язані між собою і між ними виникає

**взаємодукція.**

Розглянемо два нерухомі контури, індуктивності яких  $L_1$  і  $L_2$ , що розміщені досить близько один від одного (рис. 16.4). Якщо в контурі 1 тече струм  $I_1$ , то магнітний потік, що створюється цим струмом, пропорційний до  $I_1$ .

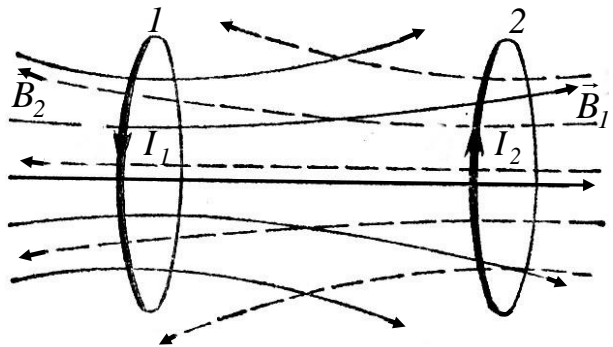


Рис. 16.4

Позначимо  $\Phi_{B_{12}}$  ту частину потоку, яка пронизує контур 2. Тоді

$$\Phi_{12} = L_{12}I_1, \quad (16.26)$$

де  $L_{12}$  - коефіцієнт пропорційності.

Якщо струм  $I_1$  змінюється, то в контурі 1 індукція ЕРС  $\mathcal{E}_{i_2}$ , яка за законом Фарадея дорівнює швидкості зміни магнітного потоку  $\Phi_{B_{12}}$ :

$$\mathcal{E}_{i_2} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}. \quad (16.27)$$

Аналогічно, при протіканні в контурі 2 струму  $I_2$  магнітний потік пронизує перший контур. Якщо  $\Phi_{B_{21}}$  - частина потоку, що пронизує контур 1, то

$$\Phi_{B_{12}} = L_{21}I_2. \quad (16.28)$$

Якщо струм  $I_2$  змінюється, то в контурі 1 індукується ЕРС  $\mathcal{E}_{i_1}$ :

$$\mathcal{E}_{i_1} = -\frac{d\Phi_{B_{21}}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt}. \quad (16.29)$$

Контури 1 і 2 називаються зв'язаними. Коефіцієнти  $L_{12}$  і  $L_{21}$  називаються взаємною індуктивністю контурів.

Вони є мірою магнітного індуктивно зв'язку між двома контурами і характеризують їх здатність збуджувати ЕРС індукції в одному з них при зміні струму в другому.

Розрахунки показують, що

$$L_{12} = L_{21}. \quad (16.30)$$

Коефіцієнти  $L_{12}$  і  $L_{21}$  залежать від геометричної форми, розмірів, взаємного розміщення контурів і від магнітної проникності середовища, яке оточує контури.

Розрахуємо взаємну індуктивність двох котушок, які намотані на спільне тороїдальне осердя (рис. 16.5). Магнітна індукція поля, що створюється в осерді з магнітною проникністю  $\mu$ , струмом силою  $I_1$  в першій котушці з кількістю витків  $N_1$ , дорівнює:

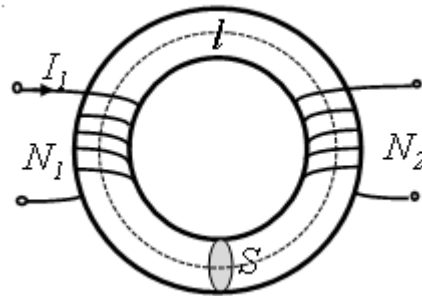


Рис. 16.5

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}, \quad (16.31)$$

де  $l$  - довжина осердя по середній лінії.

Магнітний потік через один виток другої котушки

$$\Phi_{B_2} = B_1 S = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l} S. \quad (16.32)$$

Тоді потокозчеплення через вторинну обмотку, що має  $N_2$  витків,

$$\psi_2 = \Phi_{B_2} N_2 = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1. \quad (16.33)$$

Потокозчеплення  $\psi_2$  створюється струмом  $I_1$ , тому отримуємо

$$L_{12} = \frac{\psi_2}{I_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (16.34)$$

Якщо обчислити потокозчеплення, що створюється котушкою 2 через котушку 1, коли по котушці 2 проходить струм  $I_2$ , то отримуємо

$$L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (16.35)$$

Отже,

$$L_{12} = L_{21}.$$

Оскільки індуктивність контурів

$$L_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1^2}{l} S \quad \text{і} \quad L_2 = \mu\mu_0 \frac{N_2^2}{l} S, \quad (16.36)$$

то коефіцієнти взаємодукації

$$L_{12} = L_{21} = L_1 \frac{N_2}{N_1} = L_2 \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (16.37)$$

Провідник, по якому протікає електричний струм, завжди оточений магнітним полем, причому магнітне поле появляється і зникає разом з появою і зникненням струму. Отже, частина енергії струму йде на створення магнітного поля.

*Енергія магнітного поля дорівнює роботі, яка затрачається струмом на створення цього поля.*

Обчислимо енергію магнітного поля струму у випадку ізотропного середовища, в якому зв'язок індукції з напруженістю поля в ньому лінійний. Для цього розглянемо соленоїд з  $N$  витків, який має індуктивність  $L$ . Якщо за час  $dt$  струм у соленоїді зростає на величину  $dI$ , то при цьому змінюється і його власний магнітний потік відповідно на величину  $d\Phi_B$ . Якщо в момент часу  $t$  сила струму в соленоїді була  $I$ , то при зміні магнітного потоку на величину  $d\Phi_B$ , джерелом струму виконується додаткова робота  $dA$ :

$$dA = Id\Phi_B. \quad (16.38)$$

Оскільки соленоїд залишається нерухомим, то ця елементарна робота  $dA$  пов'язана із зміною енергії соленоїда, яка зумовлена наявністю в ньому магнітного поля, на величину  $dW_M$ :

$$dW_M = dA \quad \text{і} \quad dW_M = Id\Phi_B. \quad (16.39)$$

Оскільки  $d\Phi_B = LdI$ , то  $dW_M = LIdI$ .

Інтегруючи цей вираз, знаходимо

$$\int_0^{W_M} dW_M = \int_0^I LIdI; \quad W_M = \frac{LI^2}{2}. \quad (16.40)$$

Це та енергія, яку було затрачено джерелом струму на утворення в соленоїді магнітного поля. За законом збереження енергії ця енергія дорівнює енергії магнітного поля  $W_M$ , яке пов'язане зі струмом  $I$ , що проходить по провіднику з індуктивністю  $L$ .

Оскільки  $LI = \psi_c$ , то вираз для енергії магнітного поля контуру зі струмом можна записати в такому вигляді:

$$W_M = \frac{\psi_c I}{2}. \quad (16.41)$$

Дослідження властивостей змінних магнітних полів було доказом того, що енергія магнітного поля локалізована у просторі.

Енергію магнітного поля струму можна визначити через характеристики цього поля - значення його напруженості  $H$  та індукції  $B$ . Для цього розглянемо частковий випадок – однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда, індуктивність якого  $L = \mu\mu_0 n^2 V$ . Тоді

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2 V. \quad (16.42)$$

Магнітна індукція поля в середині довгого соленоїда  $B = \mu\mu_0 In$ . Звідси

$$In = \frac{B}{\mu\mu_0}. \quad (16.43)$$

Тоді

$$W_M = \frac{1}{2} \mu\mu_0 \frac{B^2}{(\mu\mu_0)^2} V = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} V. \quad (16.44)$$

Оскільки  $B = \mu\mu_0 H$ , то

$$W_M = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 V = \frac{1}{2} B H V. \quad (16.45)$$

Магнітне поле соленоїда однорідне і зосереджене всередині соленоїда, а енергія поля розподілена в ньому з об'ємною густиною  $w_M$ , яка дорівнює

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (16.46)$$

У випадку неоднорідного магнітного поля його енергію в деякому об'ємі  $V$  можна визначити так. Поділимо об'єм  $V$  на нескінченно малі елементи  $dV$  так, щоб поле в кожному з них можна було вважати однорідним. Тоді енергія елемента об'єму з локальною густиною  $w_M$  в ньому дорівнює:  $dW_M = w_M dV$ .

Інтегруючи цей вираз по всьому об'єму поля  $V$ , отримаємо формулу для обчислення енергії неоднорідного поля:

$$W_M = \int_V w_M dV = \int_V \frac{BH}{2} dV. \quad (16.47)$$

#### Контрольні питання до розділу 4

1. Навести визначення магнітного поля та закон Біо-Савара-Лапласа у вакуумі.
2. Навести вираз для магнітного поля зарядженої частинки.
3. Вивести вираз для поля прямого провідника, сформулювати та обґрунтувати правило правої руки.
4. Навести вираз для поля кругового струму вздовж центральної осі. Дати визначення магнітного моменту. Сформулювати та обґрунтувати правило правої руки для кругового струму.
5. Навести закон Ампера. Вивести силу Ампера, що діє на прямолінійний в однорідному магнітному полі.
6. Вивести силу взаємодії двох нескінченних паралельних провідників зі струмом. Вивести вираз для сили Лоренца.
7. Сформулювати правило лівої руки для сили Ампера та для сили Лоренца.
8. По двом паралельним прямим провідникам в одному напрямі проходять однакові струми. Чому дорівнює індукція магнітного поля в точці, розміщеній точно посередині відстані між провідниками? Яким буде поле, якщо струми мають протилежний напрям?
9. По двом паралельним прямим провідникам проходять постійні струми. За рахунок чого виконується робота, якщо провідники переміщуються відносно один одного під час взаємодії?
10. Вивести рівняння траєкторії зарядженої частинки у однорідному магнітному полі.
11. Відомо, що існують два види електричних зарядів – позитивні і негативні, які можна розділити просторово. Чи можна розділити магніт на два різнойменних полюси – північний і південний?

12. Дати поняття ефекту Холла. Вивести вираз для поперечної («холлівської») різниці потенціалів.

13. Дати визначення циркуляції магнітного поля. Сформулювати теорему про циркуляцію магнітного поля. Вивести наближений вираз для індукції магнітного поля всередині соленоїда.

14. Дати визначення магнітного потоку. Вивести вираз для роботи сили Ампера, що діє на провідник та на замкнений контур.

15. Дати поняття явища електромагнітної індукції. Вивести закон Фарадея. Сформулювати і обґрунтувати правило Ленца.

16. Дати поняття і детально описати на прикладі явище магнітного гальмування.

17. Дати поняття явища намагнічування. Дати визначення вектору намагнічування.

18. Дати визначення напруженості магнітного поля в речовині та розкрити фізичний зміст цього поняття.

19. Дати визначення магнітної сприйнятливості та магнітної проникності речовини.

20. Вивести зв'язок між магнітною індукцією і напруженістю магнітного поля. Навести закон Біо-Савара-Лапласа в речовині.

21. Дати поняття діамагнетика, парамагнетика, феромагнетика, антиферомагнетика та фериту. Навести їх властивості.

22. Детально описати криву гістерезису для феромагнетиків. Дати визначення температури Кюрі та температури Нееля.

23. Чим пояснюється межа намагнічення – магнітне насичення – феромагнетиків?

24. Чим пояснюються сильномагнітні властивості феромагнетиків?

25. Чим пояснюється виникнення внутрішнього додаткового магнітного поля під час поміщення речовини у зовнішнє магнітне поле?

26. Навести поняття самоіндукції.
27. Дати визначення індуктивності соленоїда, вивести формулу для індуктивності соленоїда.
28. Вивести формулу для ЕРС самоіндукції соленоїда (катушки) та формулу для напруги на катушці.
29. Вивести вираз для енергії магнітного поля в катушці. Навести поняття взаємної індукції.
30. Описати будову найпростішого трансформатора та вивести зв'язок між напругами на його катушках.

## Розділ 5 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ. ПРУЖНІ ХВИЛІ.

### Тема 17 Вільні незгасаючі гармонічні коливання.

#### 17.1 Рівняння вільних незгасаючих гармонічних коливань. Швидкість і прискорення гармонічних коливань.

**Коливання** – це рухи (тобто будь-які зміни стану), для яких є характерним той чи інший ступінь повторюваності. Так, при коливаннях математичного маятника (куля, підвішена на умовно невагомій і нерозтяжній нитці) повторюються відхилення його то в один, то в інший протилежний йому бік від вертикалі (положення рівноваги). При коливаннях в електричному контурі повторюється зміна заряду на кожній обкладинці конденсатора.

Фізика і техніка мають справу з коливаннями, дуже різноманітними за фізичною природою, характером і ступенем повторюваності, швидкістю зміни станів, за механізмом виникнення.

За фізичною природою можуть бути, зокрема, виділені коливання:

- а) механічні, наприклад, коливання маятника, моста, корабля на хвилях, струни, коливання густини повітря при поширенні в ньому хвиль;
- б) електромагнітні – коливання напруженостей електричного і магнітного полів у електромагнітних хвилях;
- в) електромеханічні, наприклад, коливання мембрани телефону;
- г) хімічні, наприклад, коливання концентрації речовин під час перебігу так званих періодичних хімічних реакцій.

За механізмом виникнення і перебігу коливання поділяють на вільні (власні), вимушені та автоколивання.

**Вільні (власні) коливання** виконує система, виведена з положення рівноваги зовнішніми силами і надана самій собі.

**Вимушені коливання** – це коливання, що відбуваються в коливальній системі під дією зовнішньої змінної сили.

**Автоколивання** – незатухаючі коливання, що можуть існувати в будь-якій системі (її називають автоколивальною системою) при відсутності

зовнішнього впливу. При цьому амплітуда і період коливань регулюються властивостями самої системи (наприклад, коливання маятника годинника, коливання струни в смичкових інструментах).

За формою і характером перебігу коливання можуть бути простими і складними. Найпростішими є *гармонічні коливання* – це такі коливання, при яких фізична характеристика коливальної системи змінюється з часом за законом косинуса чи синуса. Гармонічні коливання займають серед усіх різноманітних форм коливань важливе місце, що визначається двома обставинами. По-перше, в природі і в техніці дуже часто зустрічаються коливання, за формою близькі до гармонічного. По-друге, періодичні процеси іншої форми можуть бути представлені як накладення кількох гармонічних коливань.

Багато коливань, незалежно від їх фізичної природи, швидкості перебігу, механізму виникнення мають ряд спільних закономірностей, котрі можуть бути розглянуті на прикладі гармонічних коливань механічних систем.

Розглянемо систему, що складається з кульки маси  $m$ , підвешеної на умовно невагомій пружині довжини  $l_0$  (рис. 17.1). Таку систему називають пружинним маятником. У стані рівноваги

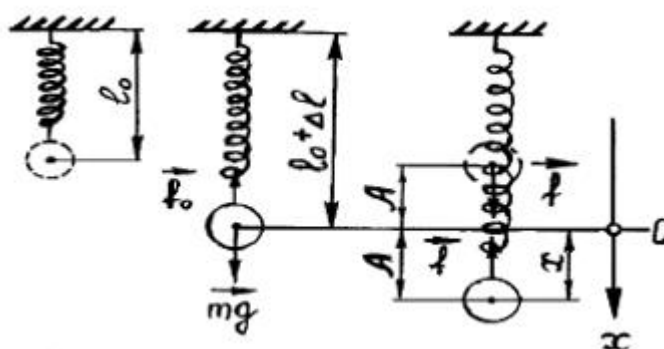


Рис. 17.1

системи ( $x=0$ ) під дією сили тяжіння  $m\bar{g}$  пружина видовжиться на величину  $\Delta l$ , а сама сила  $m\bar{g}$  буде урівноважена пружною силою  $f_0 = -k\Delta l$ . Якщо змістити кульку від положення рівноваги на деяку відстань  $x$ , то видовження пружини стане рівним  $\Delta l+x$ , а проекція сили (котра діє на кульку) на вісь  $x$  буде дорівнювати:

$$f = mg - k(\Delta l + x) \quad (17.1)$$

Оскільки в стані рівноваги  $mg=k\Delta l$ , то

$$f=-kx, \quad (17.2)$$

де  $f$  – пружна сила, яка виникає внаслідок деформації пружини;  $k$  – коефіцієнт пружності (жорсткості) пружини. Знак "–" указує на те, що сила  $f$  спрямована в бік, протилежний відхиленню кульки від положення рівноваги, тобто вона прагне повернути кульку в положення рівноваги.

Силу іншого походження, котра має такі ж властивості, як і пружна, називають квазіпружною. Пружна і квазіпружна сили мають такі властивості:

- 1) сила пропорційна зміщенню (відхиленню) системи відносно положення рівноваги;
- 2) вона завжди спрямована до положення рівноваги, тобто прагне повернути систему в стан рівноваги.

Розтягнемо пружину так, щоб зміщення кульки від положення рівноваги дорівнювало в даному випадку деякому максимальному значенню  $A$  (тобто  $x=A$ , де  $A$  – амплітуда коливань). Виконана над системою робота перетвориться в потенціальну енергію розтягнутої пружини. Відпустимо кульку. Під дією сили  $f = -kx$  кулька буде рухатись з прискоренням до положення рівноваги. При цьому потенціальна енергія деформації пружини буде перетворюватися на кінетичну енергію руху кульки. У стані рівноваги сила на кульку не діє, пружина повернулася в початковий стан з довжиною  $l=l_0+\Delta l$ , потенціальна енергія додатково розтягнутої пружини повністю перейшла в кінетичну енергію кульки, отже, швидкість руху кульки стала максимальною. З положення рівноваги кулька по інерції буде рухатись угору, стискаючи пружину. Внаслідок цього стискання на кульку буде діяти сила  $f = -kx$ , спрямована до положення рівноваги, швидкість кульки буде зменшуватися, а її кінетична енергія буде перетворюватися на потенціальну енергію стискання пружини. В крайньому верхньому положенні кулька зупиниться, і вся її кінетична енергія перетвориться на потенціальну енергію стиснутої пружини. Якщо на систему не діятимуть будь-які інші сили,

наприклад, сили тертя (таку систему називають ідеальною), то під дією сили  $x$  кулька буде виконувати коливання відносно положення рівноваги в межах відхилень від  $-A$  до  $A$ .

Рівняння другого закону Ньютона в будь-яку мить часу має вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (17.3)$$

де  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$  – прискорення кульки.

Розділивши рівняння (17.3) на величину маси  $m$  і прийнявши  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,

отримаємо рівняння:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (17.4)$$

Таким чином рух кульки під дією пружної сили описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку.

Будь-яку систему, рух якої описується рівнянням вигляду (17.4), називають гармонічним осцилятором.

Згідно з правилами рішення диференціальних рівнянь вирішимо рівняння (17.4) за допомогою підстановки:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad (17.5)$$

де  $\lambda$  - деяка постійна величина.

Продиференціювавши двічі за часом рівняння (4.5) і скоротивши на співмножник  $e^{\lambda t}$  (який за будь-яких фізично припустимих умов коливань кульки не дорівнює нулю), знаходимо:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (17.6)$$

Рівняння (17.6) є характеристичним і має уявні корені  $\lambda_1 = +i\omega_0$ ;  $\lambda_2 = -i\omega_0$ .

Отже, загальним рішенням рівняння (17.4) повинно бути рівняння:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (17.7)$$

де  $c_1$  і  $c_2$  – комплексні постійні. Функція  $x(t)$ , що описує коливання, повинна бути не уявною, а дійсною. Це означає, що постійні  $c_1$  і  $c_2$  потрібно вибрати

так, щоб функція  $x(t)$  могла дорівнювати її комплексно-спряженій  $x^*(t)$ , тобто щоб виконувалась умова:

$$c_2^* e^{i\omega_0 t} + c_1^* e^{-i\omega_0 t} = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (17.8)$$

Ця рівність буде виконуватися лише за умови, що  $c_1 = c_2^*$ . А це означає, що і  $c_2 = c_1^*$ . Такій умові відповідають коефіцієнти  $c_1$  і  $c_2$  в показовій формі

$$c_1 = \frac{A}{2} e^{i\alpha}; \quad c_2 = \frac{A}{2} e^{-i\alpha}, \quad (17.9)$$

де  $\frac{A}{2}$  – модуль, а  $\alpha$  – аргумент цих чисел. На підставі рівнянь (17.7) та (17.9)

отримаємо:

$$x(t) = \frac{A}{2} \left[ e^{i(\omega_0 t + \alpha)} e^{-i(\omega_0 t + \alpha)} \right] = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Таким чином, розв'язком рівняння (1.4) є рівняння

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (17.10)$$

яке й описує вільні незатухаючі гармонічні коливання. В цьому рівнянні:  $x(t)$  – відхилення системи від положення рівноваги в довільну мить часу  $t$ ;  $A$  – амплітуда коливань;  $\omega_0$  – кутова (циклічна) частота власних коливань (її часто називають власною частотою);  $(\omega_0 t + \alpha)$  – фаза коливань;  $\alpha$  – початкова фаза коливань.

Час  $T$ , протягом якого система виконує одне повне коливання, називають періодом коливань.

Число коливань, учинених системою за одиницю часу, називають частотою  $\left( \nu = \frac{1}{T} \right)$ . Кутова частота  $\omega_0$  пов'язана з періодом коливань  $T$  і частотою  $\nu$  співвідношенням:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (17.11)$$

Одиницями виміру періоду  $T$ , частоти  $\nu$  і кутової частоти  $\omega_0$  в міжнародній системі одиниць (СІ) відповідно є секунда (с), герц (Гц) і величина, зворотна секундi ( $\text{с}^{-1}$ ). 1 герц – це частота такого коливання, період  $T$  якого дорівнює 1с.

Продиференціювавши рівняння (17.10) за часом один раз, знайдемо швидкість  $\nu$  відхилення системи від положення рівноваги; при диференціюванні двічі – знайдемо прискорення  $a$  того ж процесу:

$$\nu(t) = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (17.12)$$

$$a(t) = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi) \quad (17.13)$$

Позначивши  $A\omega_0 = \nu_0$  –

амплітуда швидкості,  $A\omega_0^2 = a_0$

– амплітуда прискорення,

врахувавши рівняння (17.10),

запишемо рівняння кінематики

колиального руху у вигляді

об'єднаної системи:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

$$\nu(t) = \nu_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi) \quad (17.14)$$

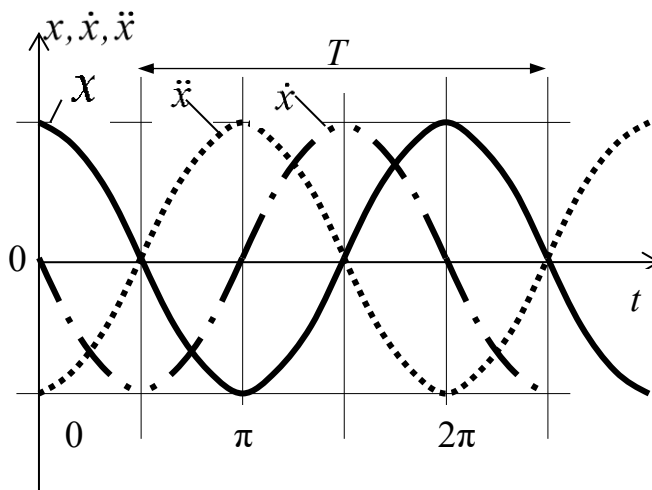


Рис. 17.2

Співставивши всі три рівняння системи (17.14), бачимо, що швидкість і прискорення змінюються також за гармонічним законом; швидкість  $\nu(t)$  випереджає відхилення  $x(t)$  по фазі на  $\frac{\pi}{2}$ , а прискорення  $a(t)$  і зміщення  $x(t)$

коливаються в протифазі. Наочніше це представлено на рис. 4.2, де амплітуди зміщення  $A$ , швидкості  $v_0$  і прискорення  $a_0$  взяті в різних масштабах, а початкова фаза  $\alpha = 0$ .

Враховуючи співвідношення (17.11), систему рівнянь (17.14) можна записати у такому вигляді:

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) = A \cos(2\pi vt + \alpha) \quad (17.15)$$

$$v(t) = v_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = v_0 \cos\left(2\pi vt + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (17.16)$$

$$a(t) = a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha + \pi\right) = a_0 \cos(2\pi vt + \alpha + \pi). \quad (17.17)$$

## 17.2 Енергія системи, яка здійснює гармонічні коливання

На прикладі коливань пружинного маятника (кулька на пружині, рис. 17.1) неважко показати, що робота пружної чи квазіпружної сили за повний цикл гармонічного коливання дорівнює нулю. Це означає, що пружна та квазіпружна сили є консервативними, а поля цих сил – потенціальними. Тобто, для коливальної системи виконується закон збереження енергії:

$$W = W_p + W_k = \text{const}, \quad (17.18)$$

де  $W$  – повна,  $W_p$  – потенціальна і  $W_k$  – кінетична енергії системи. Виразимо значення енергії через її параметри.

Для того, щоб змістити систему від положення рівноваги, необхідно виконати роботу проти сил поля:

$$A = \int \delta A = -\int_0^x f(x) dx = -\int_0^x -kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Ця робота витрачається на надання системі потенціальної енергії:

$$W_p = \frac{kx^2}{2}. \quad (17.19)$$

Враховуючи рівняння (4.10), а також те, що  $k = m\omega_0^2$ , отримаємо:

$$W_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (17.18)$$

Кінетична енергія – це енергія руху.

Враховуючи рівняння швидкості (17.12), отримаємо:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (17.19)$$

На підставі рівнянь (17.16), (17.18) та (17.19) знаходимо, що повна енергія коливальної системи в будь-яку мить часу дорівнює

$$W = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 \quad (17.20)$$

і не залежить від часу, що відповідає закону збереження енергії замкненої системи тіл.

Очевидно, що для коливальної системи потенціальну і кінетичну енергії можна виразити через повну:

$$W_p = W \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = W \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\alpha) \right), \quad (17.21)$$

$$W_k = W \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = W \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\alpha) \right). \quad (17.22)$$

Як бачимо, потенціальна і кінетична енергії змінюються в протифазі, а частота їх зміни вдвічі перевищує частоту гармонічних коливань (рис. 17.3). Середні значення квадрата косинуса і квадрата синуса за період дорівнюють половині. Отже, середнє значення потенціальної енергії дорівнює середньому значенню кінетичної енергії і дорівнює половині повної енергії.

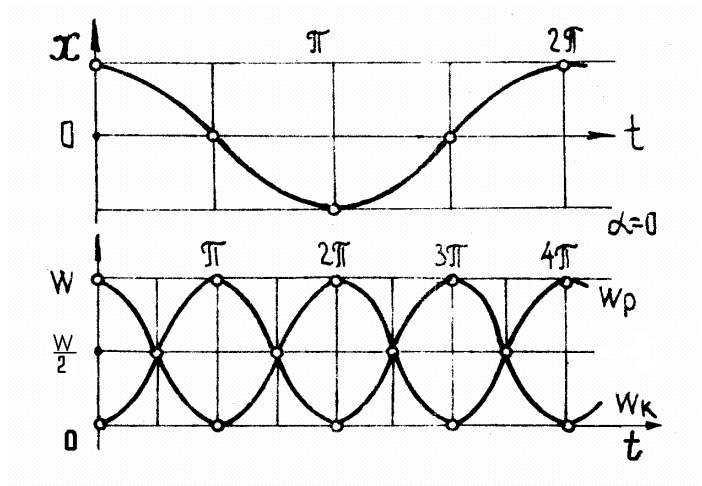


Рис. 17.3

У фізиці під маятником розуміють тверде тіло, котре під дією сили тяжіння виконує коливальний рух або навколо закріпленої точки, або ж навколо закріпленої осі, при цьому вісь не повинна проходити через центр інерції тіла. При малих значеннях кута  $\varphi$  відхилення від положення рівноваги коливання будуть гармонічними, при великих – ангармонічними, котрі не описуються законом синуса чи косинуса. Найчастіше зустрічаються пружинний (розглянутий вище), математичний та фізичний маятник.

## Тема 18 Маятники.

### 18.1 Математичний маятник.

Найпростіший маятник складається з невеликого за розміром тягарця маси  $m$ , підвішеного на нитці (чи легенькому стержні) довжиною  $l$ . Якщо вважати нитку (чи стержень) нерозтяжними і знехтувати розмірами тягарця в порівнянні з розмірами нитки (стержня), а масою нитки (стержня) в порівнянні з масою тягарця, то тягарець на нитці (стержні) можна розглядати як матеріальну точку маси  $m$ , котра розташована на незмінній відстані  $l$  від точки підвісу  $O$  (рис. 18.1). Такий маятник називають математичним. Подобою математичного маятника є куля, підвішена на довгій умовно нерозтяжній нитці.

Якщо маятник, відхилений від положення рівноваги, відпустити без початкової швидкості або надати матеріальній точці  $m$  швидкість, яка спрямована перпендикулярно до нитки  $l$  і яка лежить у площині початкового відхилення (у цій площині лежать вісь  $Z$  і нитка  $l$ ), то маятник буде коливатись в одній вертикальній площині по дузі кола радіуса  $l$  (плоский або коловий маятник). При відхиленні маятника від положення рівноваги на малий кут  $\varphi$  на нього діє обертальний момент сили тяжіння:

$$M = -mgl \sin\varphi, \quad (18.1)$$

який прагне повернути маятник в положення рівноваги, на що вказує знак "—" в рівнянні (18.1).

Згідно з основним рівнянням динаміки обертального руху цей момент

$$M = I\varepsilon = ml^2\ddot{\varphi}, \quad (18.2)$$

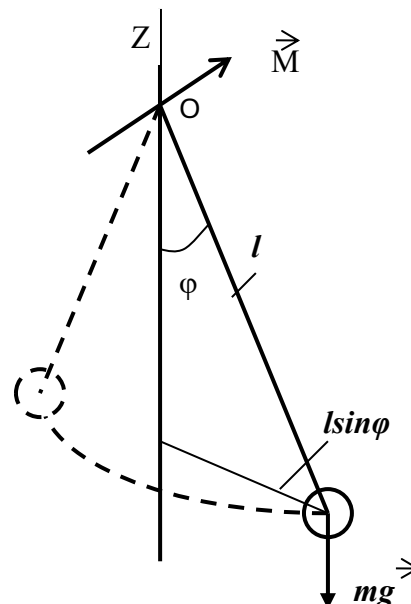


Рис. 18.1

де  $I = ml^2$  – момент інерції маятника, а  $\ddot{\varphi} = \varepsilon$  – його кутове прискорення. На підставі рівнянь (18.1) та (18.2) отримаємо:

$$l\ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0. \quad (18.3)$$

Оскільки при малих значеннях кута  $\varphi$   $\sin\varphi = \varphi$  (в радіанах), то рівняння (18.3) можна записати у вигляді:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (18.4)$$

де  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  – власна частота коливань плоского маятника. Рівняння (18.4) за формою подібне до рівняння (17.4). Тому рішенням рівняння (18.4), за аналогією з рівнянням (17.10), буде рівняння:

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (18.5)$$

де  $A = \varphi_{max}$  – амплітуда коливань маятника.

Період коливань математичного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (18.6)$$

Як випливає із співвідношень  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  і (18.6), власна частота і період

коливань математичного маятника не залежать від його маси, а залежать лише від його довжини та прискорення вільного падіння.

Якщо відхиленому математичному маятнику надати початкову швидкість, напрямок якої не лежить у площині початкового відхилення, то матеріальна точка  $m$  буде описувати на сфері радіуса  $l$  криві, обмежені двома паралелями. Це буде так званий сферичний маятник, окремим випадком якого є конічний маятник (коли обидві паралелі зливаються в одну). І розрахунки і досліди показують, що для всіх цих маятників період коливань визначається рівнянням (18.6).

## 18.2 Пружинний маятник.

Розглянемо тіло, яке закріплене на пружині на ідеально гладкому столі. Стан стійкої рівноваги відповідає положенню, в якому пружина є недеформованою. Відхилимо тіло від положення стійкої рівноваги, див. рис. 18.2. Сила, яка повертає тіло в положення рівноваги, є силою пружності. На основі другого закону Ньютона матимемо



Рис. 18.2

$$ma = -kx \Rightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (18.7)$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (18.8)$$

тут враховано, що прискорення є другою похідною координати та той факт, що сила пружності спрямована до положення рівноваги, який спричиняє знак « $\rightarrow$ » перед  $kx$ .

Рівняння (18.7) є математично ідентичним до рівняння. Розв'язком рівняння (18.7) є гармонічні коливання

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (18.9)$$

константи  $A$ ,  $\varphi$  можуть бути знайдені з початкових умов; константа  $A$  є амплітудою коливань. Величина  $\omega$  є **кутовою частотою** коливань пружинного маятника. Відповідно, **період коливань** пружинного маятника задається виразом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (18.10)$$

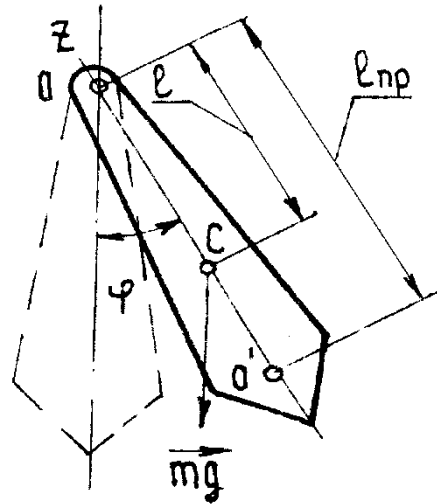
Покажемо, що виконується закон збереження енергії:

$$E(t) = E_k(t) + E_n(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} =$$

$$= \frac{mA^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2} + \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2} = \frac{kA^2}{2} = \text{const} \quad (18.11)$$

### 18.3 Фізичний маятник.

Якщо коливне тіло не можна розглядати як матеріальну точку, то маятник називають фізичним. Фізичним маятником зазвичай називають тверде тіло, котре під дією сили тяжіння виконує коливання навколо горизонтальної осі підвісу, котра не проходить через центр інерції  $C$  тіла (рис. 18.3). Як і у випадку математичного маятника, на фізичний маятник діє обертальний момент



$$M = -mgl \sin \varphi \quad \text{і} \quad M = I\ddot{\varphi} = I\varepsilon.$$

При малих значеннях кута  $\varphi$  диференціальне рівняння

Рис. 18.3

коливань фізичного маятника і його розв'язок будуть мати вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (18.12)$$

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (18.13)$$

де частота власних коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \quad (18.14)$$

Тут  $I$  – момент інерції маятника відносно осі коливань, котра проходить через точку  $O$ .

Період коливань фізичного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{np}}{g}}, \quad (18.15)$$

де  $l_{np} = \frac{I}{ml}$  – приведена довжина фізичного маятника. Аналіз рівнянь (18.6)

та (18.15) показує, що приведена довжина фізичного маятника відповідає довжині такого математичного маятника, період коливань якого співпадає би з періодом коливань даного фізичного маятника. Точку  $O'$ , котра лежить на прямій, що з'єднує точку підвісу  $O$  з центром інерції  $C$ , і віддалену на відстань приведеної довжини від осі обертання, називають центром коливання фізичного маятника.

Згідно з теоремою Штейнера момент інерції маятника  $I = I_0 + ml^2$ , де  $I_0$  – момент інерції маятника відносно головної осі інерції, паралельної до осі обертання. Приведена довжина маятника

$$l_{np} = \frac{I_0}{ml} + l \quad (18.16)$$

завжди більша від  $l$ , а точка підвісу  $O$  і центр коливання  $O'$  завжди лежать на одній прямій і по різні сторони від центра інерції  $C$ .

#### 18.4 Крутильний маятник

**Крутильний маятник** — макроскопічне тіло, наприклад диск з моментом інерції  $J$ , закріплене нерухомо на пружному стержні (рис. 18.4). Коливання визначаються кутом відхилення  $\varphi$  тіла від положення рівноваги, вектором

кутової швидкості  $\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$  та вектором кутового прискорення  $\vec{\beta} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ . Тіло

здійснює малі періодичні коливання під дією моменту  $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$  зовнішньої сили  $\vec{F}$ , моменту  $\vec{M}_{оп}$  сили опору  $\vec{F}_{оп}$  та моменту  $\vec{M}_k$  пружної сили деформації

кручення  $\vec{F}_k$ . За величиною момент сили опору  $M_{оп} = \zeta \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ , а сили кручення -

$M_k = f\varphi$ . Коefіцієнт  $f$  називається модулем кручення. Лінійна залежність

моменту сил кручення від кута повороту виконується лише для малих коливань.

За другим законом Ньютона для обертового руху, рівняння коливань маятника можна записати так:

$$J \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2} = \vec{M} + \vec{M}_k + \vec{M}_{оп}. \quad (18.17)$$

Вектори  $\vec{\beta} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{M}_k$ ,  $\vec{M}_{оп}$  лежать на одній прямій, а тому, взявши напрямок кутового прискорення  $\vec{\beta}$  за додатній, векторне рівняння (18.17) можна записати в алгебраїчній формі

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M - M_k - M_{оп},$$

і привести до канонічного виду

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = M/J, \quad (18.18)$$

де  $\gamma = \frac{\zeta}{2J}$  — коефіцієнт згасання коливань,  $\omega_0^2 = \frac{f}{J}$ ,  $\omega_0$  — частота вільних

незгасаючих коливань. Період малих власних коливань маятника

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{f}}.$$

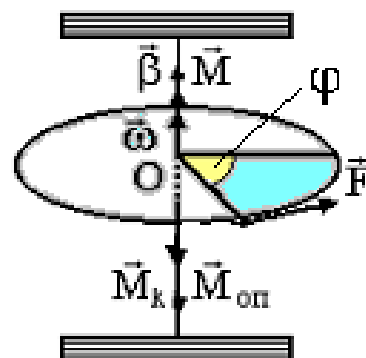


Рис. 18.4

## Тема 19 Додавання коливань.

### 19.1 Додавання коливань однакового напрямку.

Гармонічне коливання може бути заданим з допомогою вектора  $\vec{A}$ , довжина якого дорівнює амплітуді коливань, а напрямок вектора утворює з віссю  $x$  кут  $\alpha$ , котрий дорівнює початковій фазі коливань. Покажемо це на прикладі коливання  $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ .

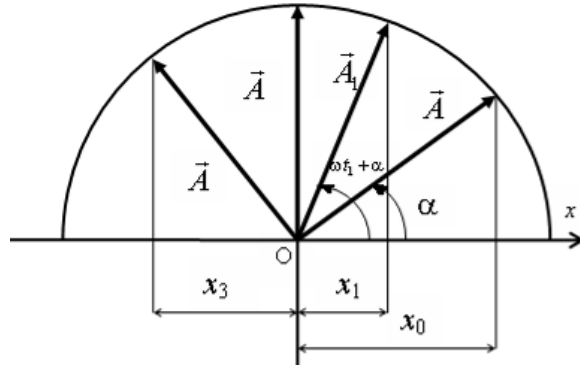


Рис. 19.1

Якщо вектор  $\vec{A}$  обертати навколо точки  $O$  (рис. 19.1) з кутовою швидкістю  $\omega$ , то проекція цього вектора на вісь  $x$  буде змінюватися в межах від  $A$  до  $-A$ , а проекція кінця вектора  $\vec{A}$  на вісь  $x$  буде здійснювати гармонічні коливання відносно точки  $O$  з амплітудою, котра дорівнює довжині вектора  $\vec{A}$ , з кутовою частотою  $\omega$  і початковою фазою  $\alpha$ . Векторні схеми, з допомогою яких можна представити коливання та операції над ними, називають векторними діаграмами.

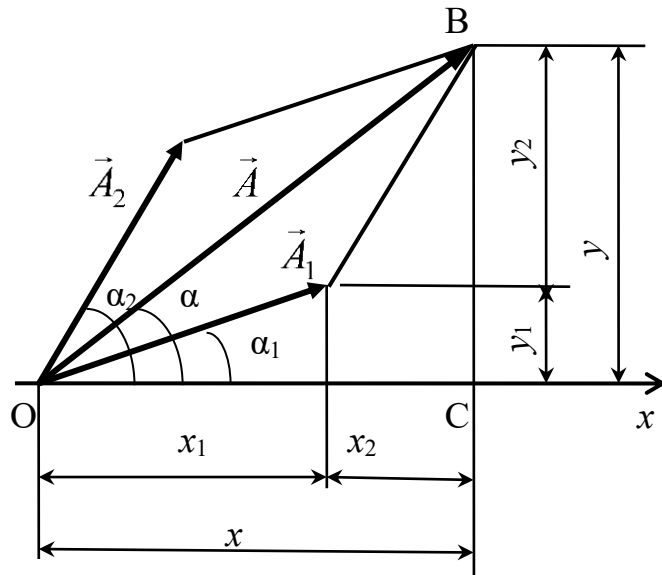


Рис. 19.2

Нехай матеріальна точка бере участь у двох гармонічних коливаннях  $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$  і  $x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$  з однаковою частотою та

уздовж одного й того самого напрямку. Досвід показує, що в цьому випадку матеріальна точка буде виконувати гармонічне коливання, котре описується рівнянням  $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ .

Знайдемо рівняння для амплітуди  $A$  та початкової фази  $\alpha$  цього коливання, скориставшись векторною діаграмою (рис. 19.2).

Вектор  $\vec{A}$ , модуль якого повинен дорівнювати амплітуді  $A$ , знайдемо як векторну суму  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ , а саму амплітуду  $A$  і початкову фазу  $\varphi$  – на основі прямокутного трикутника  $OBC$ :

$$A^2 = (x^2 + y^2) = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

тобто

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (19.1)$$

$$\alpha = \arctg \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (19.2)$$

На підставі рівняння (19.1) знаходимо, що при різниці фаз  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$

(коливання  
синфазні)

$A = A_1 + A_2$ ; якщо

$\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi$

(коливання  
проти фази),

то  $A = |A_1 - A_2|$ .

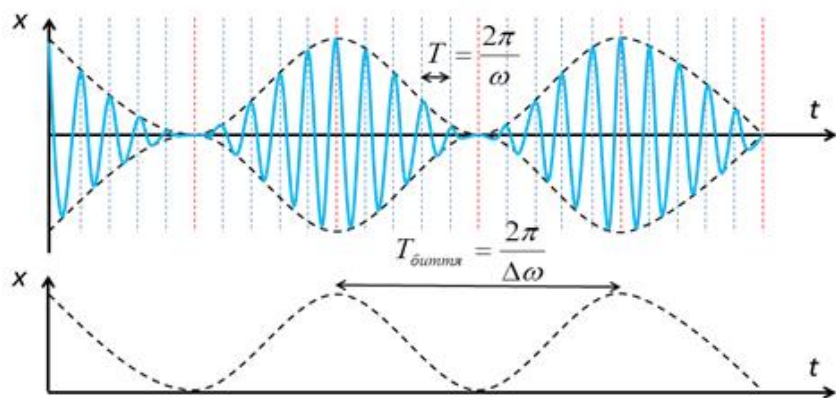


Рис. 19.3

Якщо частоти двох коливань неоднакові ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ), то вектори  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$  будуть обертатись з різними швидкостями, а сумарний вектор  $\vec{A}$  буде пульсувати за величиною і обертатиметься з непостійною швидкістю. Отже, сумарне коливання в цьому випадку буде негармонічним.

Якщо частоти двох гармонічних коливань відрізняються на незначну величину ( $\Delta\omega \ll \omega$ ), то сумарне коливання можна розглядати як гармонічне з пульсуючою амплітудою.

Такі коливання називають биттями (рис. 19.3). Складемо два коливання:

$$x_1(t) = A \cos \omega t \text{ та } x_2(t) = A \cos(\omega + \Delta\omega)t,$$

скориставшись тригонометричною формулою для суми косинусів

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = x(t) &= A(\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t) = \\ &= 2A \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\omega t}{2}\right) \cos \frac{\Delta\omega t}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) \ll \omega t$ , то цією складовою в дужках можна знехтувати.

Тоді

$$x(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \omega t = B \cos \omega t, \quad (19.3)$$

де  $B = 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2}$  – пульсуюча амплітуда биттів. (19.4)

Графіки функцій (19.3) та (19.4) представлені на рис 19.3а і 19.3б відповідно.

Період биттів  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  набагато менший від періоду зміни амплітуди  $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$

. Оскільки амплітуда  $B$  набагато повільніше змінюється з часом, ніж амплітуда биттів, то коливання виду (19.3) можна розглядати як гармонічні з частотою  $\omega$ , тобто вони зумовлені співмножником  $\cos \omega t$ . Співмножник

$2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2}$  не тільки визначає амплітуду, але також впливає на фазу

коливань, на що вказують, наприклад, протилежні знаки двох сусідніх максимумів  $M_1$  та  $M_2$  амплітуди (рис. 19.3).

## 19.2 Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай матеріальна точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях

$$x = A_1 \cos \omega t, \quad (19.5)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \alpha) \quad (19.6)$$

з однаковою частотою  $\omega$  і різницею фаз  $\alpha$ , наприклад, коливання матеріальної точки відносно положення рівноваги в одному напрямку і коливання положення рівноваги в напрямку, перпендикулярному до першого. У цьому випадку матеріальна точка буде рухатися по деякій криволінійній траєкторії, рівняння якої в параметричній формі виражається рівняннями (19.5) та (19.6). Виключивши з цих рівнянь параметр  $t$ , отримаємо рівняння траєкторії, виражене через різницю фаз  $\alpha$ . Для цього виконаємо такі операції. На підставі рівняння (19.6) знаємо, що

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha = \left( \frac{x}{A_1} \right) \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \alpha,$$

де  $\frac{x}{A_1} = \cos \omega t$  (із 19.5)). Перенесемо доданок  $\frac{x}{A_1} \cos \alpha$  у ліву частину

останнього рівняння і, звівши в квадрат ліву та праву частини цього рівняння, отримаємо рівняння сумарного коливання:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (19.7)$$

Рівняння (19.7) – це рівняння еліпса, півосі  $A_1$  і  $A_2$  якого не співпадають з координатами  $x$  та  $y$ .

Проаналізуємо форму траєкторії в деяких окремих випадках.

1) Різниця фаз  $\alpha = 0$ . Тоді рівняння (19.7) набирає вигляду:

$$2) \left( \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{y^2}{A_2^2} \right)^2 = 0, \text{ звідки}$$

$$y = x \frac{A_1}{A_2}. \quad (19.8)$$

Матеріальна точка рухається уздовж прямої; відстань її від початку координат  $x$  і  $y$  дорівнює:  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos \omega t$ , тобто результативний рух являє собою гармонічне коливання уздовж прямої (19.8) з частотою  $\omega$  і амплітудою, рівною  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  (рис. 19.4 а).

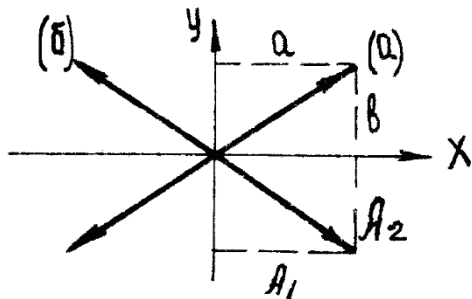


Рис. 19.4

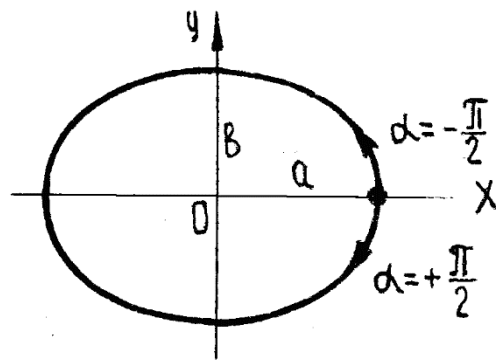


Рис. 19.5

2) Різниця фаз  $\alpha = \pm\pi$ . Тоді рівняння (19.7) набуває вигляду  $\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$ ,

а рух матеріальної точки (рис 19.4б) з такими ж параметрами, як і для (19.8):

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (19.9)$$

3) Різниця фаз  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ . Рівняння (19.7) переходить у рівняння

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1, \quad (19.10)$$

тобто в рівняння еліпса, приведеного до координатних осей  $x$  і  $y$ , а півосі еліпса  $a$  і  $b$  дорівнюють відповідним амплітудам коливань  $A_1$  і  $A_2$ .

При рівності амплітуд ( $A_1 = A_2$ ) еліпс вироджується в коло.

Аналіз рівнянь (19.5) та (19.6) показує, що при  $\alpha = +\frac{\pi}{2}$  матеріальна точка рухається в напрямку обертання годинникової стрілки, а при  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  – проти неї (рис. 19.5).

Якщо частоти двох взаємно перпендикулярних коливань відрізняються на дуже малу величину  $\Delta\omega$ , то їх можна розглядати як коливання однакової частоти, різниця фаз яких  $(\Delta\omega t + \alpha)$  дуже повільно змінюється:

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + (\Delta\omega t + \alpha))$$

У цьому випадку рух матеріальної точки буде відбуватися по криволінійній траєкторії, форма якої буде визначатися значеннями різниці фаз в межах від  $-\pi$  до  $+\pi$ .

За значної різниці частот двох взаємно перпендикулярних коливань матеріальна точка буде виконувати коливання уздовж траєкторій складної форми, які називають фігурами Ліссажу (рис. 19.6).

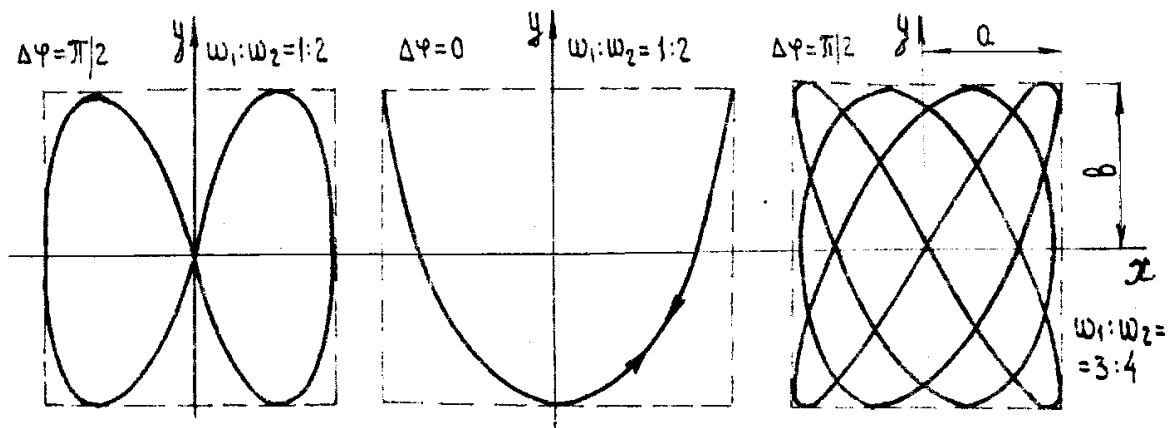


Рис. 19.6

Форма фігур Ліссажу залежить від співвідношення частот і різниці фаз двох взаємно перпендикулярних коливань, у яких бере участь розглянута коливальна система.

## Тема 20 Згасаючі і змушені гармонічні коливання.

### 20.1 Згасаючі гармонічні коливання.

У будь-якій реальній коливальній системі завжди наявні сили, що перешкоджають коливальному руху, наприклад, сили тертя в точці підвісу маятника, сили опору навколишнього середовища тощо. Суму всіх таких сил називають гальмівною силою. Дія цієї сили викликає монотонне затухання коливань.

При малих швидкостях руху матеріальної точки гальмівна сила (сила затримки)  $f_3$  пропорційна швидкості руху  $\vec{f}_3 = -r\vec{v} = -r\dot{x}$ , де  $r$  – стала для конкретної коливальної системи величина, яку називають коефіцієнтом опору. Оскільки на коливальну систему діють квазіпружна (або пружна) сила та сила опору, то рівняння другого закону Ньютона для цієї системи матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx. \quad (20.1)$$

Перетворимо це рівняння, замінивши

$$\frac{r}{m} = 2\beta; \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2,$$

де  $\omega_0$  – власна частота незатухаючих вільних коливань тієї ж системи;  $\beta$  – коефіцієнт затухання, отримаємо рівняння затухаючих коливань у диференціальній формі:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (20.2)$$

Оскільки гальмівна сила викликає поступове зменшення амплітуди коливань ( $A = A(t)$ ), то рішення рівняння (20.2) будемо шукати у вигляді

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \alpha), \quad (20.3)$$

де  $\omega$  – частота затухаючих коливань ( $\omega \neq \omega_0$ ).

Продиференціювавши за часом  $t$  рівняння (20.3) і підставивши значення  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  і  $x$  у рівняння (20.2), після незначних математичних перетворень отримаємо:

$$(\ddot{A} + 2\beta\dot{A} + A(\omega_0^2 - \omega^2))\cos(\omega t + \alpha) - 2\omega(\dot{A} + \beta A)\sin(\omega t + \alpha) = 0$$

Остання рівність виконується за будь-яких значень  $t$ , якщо кожен із коефіцієнтів при тригонометричних функціях дорівнює нулю, тобто

$$\dot{A} + \beta A = 0 \quad (20.4)$$

(оскільки співмножник  $2\omega \neq 0$  для коливальної системи, то на нього скорочено весь коефіцієнт).

$$\ddot{A} + 2\beta\dot{A} + A(\omega_0^2 - \omega^2) = 0. \quad (20.5)$$

На підставі рівняння (7.4) знаходимо:

$$\frac{dA}{dt} = -\beta A; \quad \frac{dA}{A} = -\beta t; \quad \int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = -\beta \int_0^t dt; \quad \ln \frac{A}{A_0} = -\beta t \quad \text{і}$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (20.6)$$

Рівняння (20.6) дає залежність амплітуди затухаючих коливань від часу.

Знайдемо рівняння для частоти  $\omega$ . З рівняння (20.4) знаходимо, що  $\dot{A} = -\beta A$ ;  $\ddot{A} = -\beta\dot{A} = \beta^2 A$ . Підставивши значення  $\dot{A}$  та  $\ddot{A}$  в рівняння (20.5), отримаємо:  $\beta^2 A - 2\beta^2 A = -A(\omega_0^2 - \omega^2)$ ;  $\beta^2 = \omega_0^2 - \omega^2$  і

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (20.7)$$

Формула (20.7) застосована до реальної коливальної системи за умови, що  $\beta < \omega_0$ , тобто, що

$$\frac{r}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad \text{За}$$

таких умов, тобто при незначному затуханні,

коливання

описуються рівнянням:

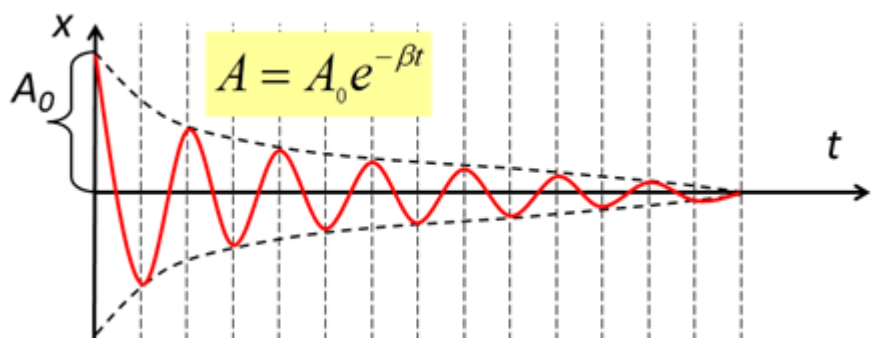


Рис. 20.1

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (20.8)$$

Графік цієї функції представлений на рис. 20.1, де при  $t = 0$  початкове зміщення  $x_0 = A_0 \cos \alpha$ .

Період затухаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}. \quad (20.9)$$

Відношення значень амплітуд двох коливань, котрі відрізняються за часом на період  $T$ :

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T},$$

називають декрементом затухання, а його натуральний логарифм – логарифмічним декрементом затухання:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (20.10)$$

Знайдемо час  $\tau$ , після закінчення якого амплітуда  $A$  зменшиться в  $e$  разів ( $e = 2,71828$  – основа натурального логарифма), скориставшись

$$\text{рівнянням (20.6): } \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta \tau} = e; \quad \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Враховуючи (7.10), знаходимо, що  $\tau = \frac{T}{\lambda}$ .

Число коливань, по завершенні яких амплітуда  $A$  зменшиться в  $e$  разів,

буде:  $N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\lambda}$ . Величину

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi \cdot N_e \quad (20.11)$$

називають добротністю коливальної системи. Вона пропорційна числу коливань, чинених системою за проміжок часу, після закінчення якого амплітуда коливань зменшиться в  $e$  разів.

## 20.2 Змушені гармонічні коливання.

Будь-яка реальна система, будучи виведеною зі стану рівноваги і наданою самій собі, виконує затухаючі коливання, котрі залежать лише від параметрів самої системи і опору середовища. Для підтримки коливань такої системи необхідно зкомпенсувати в ній витрати енергії за рахунок роботи зовнішніх сил. Коливання системи, які відбуваються за рахунок роботи періодично змінної зовнішньої сили, називають вимушеними, а цю зовнішню силу – змушувальною. Характер вимушених коливань визначається як характером змушувальної сили, так і властивостями самої системи. На початку дії періодичної змушувальної сили характер вимушених коливань змінюється поступово, і лише після закінчення деякого проміжку часу в системі встановлюються періодичні вимушені коливання з періодом, що дорівнює періоду змушувальної сили (усталені вимушені коливання).

Нехай змушувальна сила змінюється з часом за гармонічним законом:

$$F_3 = F_0 \cos \omega t. \quad (20.12)$$

Тоді рівняння другого закону Ньютона для даної коливальної системи має вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Розділивши це рівняння на величину маси  $m$ , отримаємо:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (20.13)$$

де  $2\beta = \frac{r}{m}$ ;  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ ;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – власна частота системи. Рівняння (20.13) є

диференціальним неоднорідним рівнянням другого порядку. Рішення такого рівняння дорівнює сумі загального рішення відповідного однорідного рівняння (20.13) і часткового рішення неоднорідного рівняння. Загальним рішенням однорідного рівняння є рівняння

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' + \alpha), \quad (20.14)$$

де  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  ;  $A_0$  і  $\alpha$  – деякі сталі.

Часткове рішення рівняння (7.14) будемо шукати в вигляді рівняння

$$x_2 = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (20.15)$$

оскільки усталені вимушені коливання повинні підкорятися гармонічному закону зміни змушувальної сили і загальним закономірностям коливального руху. Знайдемо аналітичні рівняння для амплітуди  $A$  і початкової фази  $\varphi$  в рівнянні (20.15).

Продиференціювавши за часом рівняння (20.15), вважаючи амплітуду  $A$  незалежною від часу, підставивши значення  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  у вигляді функцій косинуса та  $x_2$  (праву частину рівняння (20.15)) у рівняння (20.13), отримаємо рівняння:

$$A\omega^2 \cos\left(\omega t - \varphi + \pi\right) + 2\beta A\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A\omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) = f_0 \cos \omega t \quad (20.16)$$

Як видно із рівняння (20.16), коливання  $f_0 \cos \omega t$  є сумою трьох

гармонічних коливань однієї і тієї ж частоти  $\omega$ . Побудуємо для цих коливань векторну діаграму, повернувши всю її на кут  $\varphi$  проти напрямку руху годинникової стрілки, прийнявши, що  $A\omega_0^2 > A\omega^2$  (рис. 20.2). Згідно з правилами побудови векторних діаграм очевидно, що сума

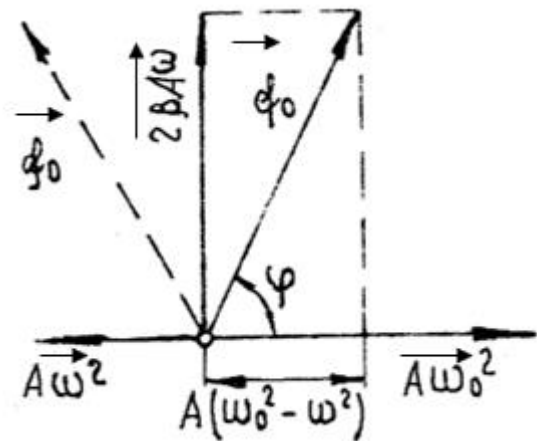


Рис. 20.2

векторів  $\overrightarrow{A\omega_0^2}$ ,  $\overrightarrow{A\omega^2}$ ,  $\overrightarrow{2\beta A\omega}$  є

вектор, котрий повинен співпадати з вектором  $\vec{f}_0$ .

При цьому амплітуда  $A$  буде визначатись умовою:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2 + 4\beta^2 \omega^2 A^2 = f_0^2,$$

звідки

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (20.17)$$

Якщо  $A\omega^2 > A\omega_0^2$ , то вектор  $\vec{f}_0$  буде розташований у другій чверті (рис. 20.2), а амплітуда  $A$  залишиться незмінною.

На підставі векторної діаграми кут  $\varphi$  визначається за рівнянням:

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (20.18)$$

Враховуючи рівняння (20.15), (20.17) і (20.18), знаходимо, що часткове рішення неоднорідного рівняння (20.13) має вигляд:

$$x_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (20.19)$$

Повним розв'язком ( $x = x_1 + x_2$ ) рівняння (20.13) є сума рівнянь (20.14) та (1.62). Як показує досвід, перша складова відіграє помітну роль тільки на початковій стадії процесу при встановленні коливань (рис 20.3).

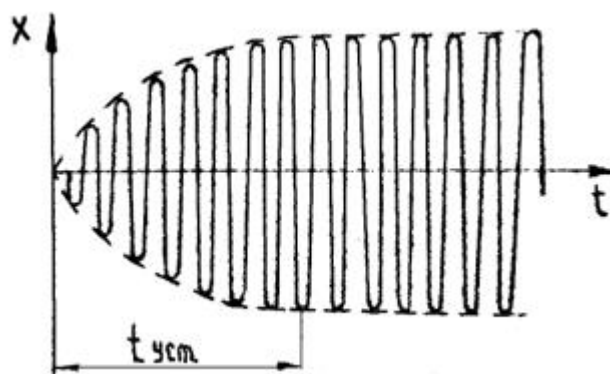


Рис. 20.3

З часом роль першої складової зменшується, і після того, як мине час  $t_{уст.}$ , першою складовою можна знехтувати і вважати, що сталі вимушені гармонічні коливання описуються рівнянням (20.19).

Досвід свідчить, що при монотонній зміні частоти  $\omega$  змущувальної сили за певної частоти амплітуда коливань досягає максимального значення. За цієї

частоти система є особливо чутливою до впливу зовнішньої сили. Це явище називають резонансом, а відповідну йому частоту – резонансною частотою. Знайдемо аналітичні рівняння для резонансної частоти та амплітуди. Відповідно до рівняння (20.17) амплітуда  $A$  досягає максимального значення при мінімальному значенні підкорінної функції. Дослідимо її на мінімум:

$$\frac{d}{d\omega} \left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right) = -4(\omega_0^2 - \omega_p^2) \omega_p + 8\beta^2 \omega_p = 0$$

З трьох можливих коренів цього рівняння фізичний зміст для частоти резонансу має лише один:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (20.20)$$

Підставивши це значення частоти в рівняння (20.17), знайдемо формулу для амплітуди резонансу:

$$A_p = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (20.21)$$

Криволінійні залежності  $A = f(\omega)$  при різних значеннях  $\beta$  (рис. 20.4)

називають резонансними кривими. При  $\omega = 0$   $A = x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ , що від-

повідає зміщенню системи від положення рівноваги за постійно діючої сили  $F_0$ . При прагненні  $\omega \rightarrow \infty$  амплітуда  $A$  прямує до нуля, оскільки внаслідок інерційних властивостей система не встигає відхилитися від положення рівноваги.

При незначних затуваннях ( $\beta \ll \omega_0$ ) величиною  $\beta^2$  у формулі (20.21) можна

знехтувати, і амплітуда резонансу  $A_p = \frac{f_0}{2\beta \omega_0}$ . Знайдемо відношення цієї

величини до початкового відхилення  $x_0$ :

$$\frac{A_p}{x_0} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{f_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{T \cdot 2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q. \quad (20.22)$$

Формула (20.22) узгоджується з формулою (20.11), котра описує добротність коливальної системи.

Отже, формула (20.22) розкриває фізичний зміст поняття добротності: добротність коливальної системи показує, у скільки разів амплітуда коливань в момент резонансу перевищує зміщення системи від положення рівноваги при постійно діючій силі, рівній за величиною амплітуді змушувальної сили.

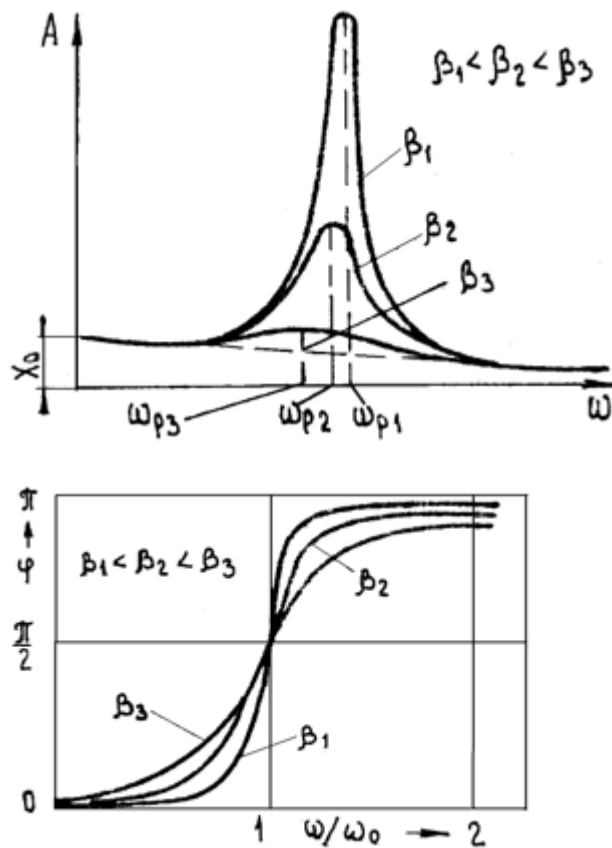


Рис. 20.4

Як видно з векторної діаграми (рис. 20.2), вимушені коливання відстають по фазі від змушувальної сили, причому кут відставання  $\varphi$  лежить в межах від 0 до  $\pi$  (рис. 20.2). При  $\omega = \omega_0$  кут відставання  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Оскільки резонансна частота менша від власної (див. (20.20)), то в момент резонансу  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ .

Якщо зовнішня дія викликає зміну певного параметра системи і ця зміна відбувається в такт з коливаннями системи, то може настати так званий параметричний резонанс.

## Тема 21 Пружні хвилі.

### 21.1 Пружна хвиля та її характеристики. Рівняння плоскої та сферичної хвилі.

Хвилями прийнято називати зміни стану середовища (збурювання), котрі поширюються в цьому середовищі і сприяють переносу енергії або перетворенню одних видів енергії на інші. Найважливішими і такими, що найчастіше зустрічаються є пружні хвилі, хвилі на поверхні рідини та електромагнітні хвилі.

Усі хвилі, незалежно від їх природи, мають багато однакових властивостей, до них застосовні багато спільних положень хвильової теорії. Основна властивість усіх хвиль, незалежно від їх природи, полягає в тому, що у вигляді хвиль здійснюється перенесення енергії без перенесення речовини.

Є різні види хвиль. Хвилею, чи імпульсом, також називають порівняно коротке збурювання, котре не має регулярного характеру. Обмежений ряд повторюваних збурювань називають цугом хвиль. Зазвичай поняття цугу застосовують до відрізка синусоїди чи косинусоїди. Особливу важливість у хвильовій теорії відіграє уявлення про гармонічну хвилю, тобто про нескінченну і синусоїдальну хвилю, у якій усі зміни стану середовища відбуваються за законом синуса чи косинуса. Під такою хвилею звичайно розуміють поширення гармонічних коливань у просторі. Поняття нескінченності синусоїдальної хвилі є науковою абстракцією, застосовуваною до досить довгого цугу синусоїдальних хвиль, на прикладі якого і розробляються основні положення теорії хвильових процесів.

Зв'язок між частинками (атомами чи молекулами) пружного середовища (твердого тіла, рідини, газу) є пружним. Тому, якщо в будь-якій точці пружного середовища збудити коливання його частинок, то це коливання буде передаватися від частинки до частинки, тобто в середовищі буде поширюватися пружна хвиля. При цьому частинки середовища, в якому

поширюється хвиля, не виконують поступального руху разом із хвилею, вони лише коливаються відносно своїх положень рівноваги.

Якщо частинки коливаються уздовж напрямку поширення хвилі, то хвилю називають подовжньою. Якщо коливання відбуваються в напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі, то хвилю називають поперечною. Пружні поперечні хвилі можуть виникати лише в твердому середовищі, тобто в середовищі з наявним опором зсуву. У рідинах та газах можуть виникати лише подовжні пружні хвилі, у твердих тілах – як подовжні, так і поперечні. На рис. 21.1 показаний рух частинок при поширенні в ідеальному середовищі поперечної хвилі, на рис. 21.2 – подовжньої. В обох випадках у напрямку коливань відбувається то ущільнення, то розрідження середовища зі строгим чергуванням за косинусоїдальним законом.

Увесь час, поки існує в середовищі хвиля, частинки середовища виконують коливання відносно своїх положень рівноваги, причому різні частинки коливаються зі зрушенням по фазі. Частинки, відстань між положеннями яких дорівнює  $\lambda$ , коливаються в однаковій фазі. Відстань між найближчими частинками, які коливаються в однаковій фазі, називають довжиною хвилі. Довжина хвилі дорівнює тій відстані, на яку поширюється хвиля за час, що дорівнює одному періоду коливань  $T$ :

$$\lambda = v \cdot T, \quad (21.1)$$

де  $v$  – так звана фазова швидкість хвилі. Оскільки  $T = 1/\nu$ , де  $\nu$  – частота коливань, то:

$$\lambda \cdot \nu = v, \quad (21.2)$$

тобто на довжині, чисельно рівній  $v$ , повинні укладатися  $\nu$  „гребенів” і „впадин” хвилі.

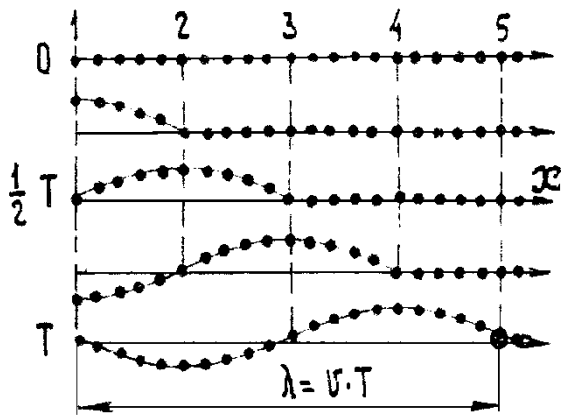


Рис. 21.1

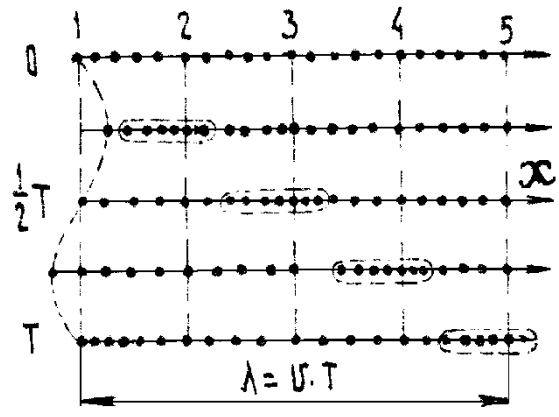


Рис. 21.2

Таким чином, хвиля має часовий та просторовий періоди, тобто є подвійно періодичним процесом.

Якщо в пружному середовищі змусити коливатися хоча б одну частинку, то коливатись будуть не тільки ті частинки, що розташовані уздовж осі  $x$ , а вся сукупність частинок у деякому навколишньому об'ємі. Геометричне місце точок середовища, для котрих у вибраний момент часу має одне і те ж значення називають хвильовою поверхнею. Найпростішими хвильовими поверхнями є площини, поверхні сфери та циліндра. Такі хвилі називають відповідно плоскими, сферичними та циліндричними. В середовищі, де поширюється хвиля, в будь-який момент часу хвильових поверхонь може бути як завгодно багато.

Попередня (за напрямком поширення) хвильова поверхня відокремлює ту частину простору, в якій уже відбувається хвильовий процес, від тієї області, до якої коливання ще не поширилися.

Положення рівноваги коливань точки середовища, втягнутої в коливальний процес, відносно вибраної системи відліку в будь-який момент часу  $t$  може бути заданим за допомогою радіуса-вектора  $\vec{r}$  або ж з допомогою координат  $x, y, z$ . Зміщення  $\xi$  коливальної точки відносно положення рівноваги у відповідний момент часу також можна виразити

за допомогою тих же параметрів. Рівняння, яке описує зміщення  $\xi$  коливальної точки як функцію координат  $x, y, z$  і часу  $t$ :

$$\xi = \xi(x, y, z, t), \quad (21.3)$$

називають рівнянням хвилі.

а) Рівняння плоскої хвилі, що поширюється у вибраному напрямку.

Знайдемо вид функції  $\xi$  в декартовій системі координат у випадку плоскої поперечної гармонічної хвилі, що поширюється в напрямку  $x$ . У цьому випадку хвильові поверхні будуть перпендикулярними до осі  $x$ , і зміщення  $\xi$  буде залежним лише від  $x$  і  $t$ :  $\xi = \xi(x, t)$ .

Нехай коливання точок, що лежать в площині з координатою  $x = 0$  (рис. 21.3), описуються гармонічним законом:

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (21.4)$$

Виразимо закон коливань частинок у площині, що відповідає довільному значенню  $x$ , через рівняння (21.4). Для цього необхідно врахувати час  $\tau = x/v$ , на який коливання частинок, що лежать в площині з координатою  $x$ , відстають від коливань частинок в площині з координатою  $x = 0$ . Враховуючи  $\tau$ , знайдемо:

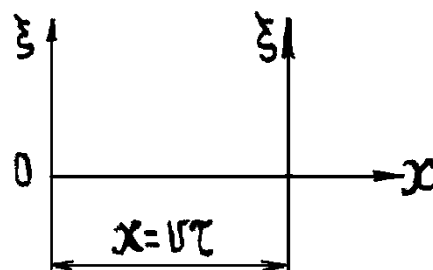


Рис. 21.3

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega(t - \tau) + \alpha) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right) \quad (21.5)$$

У випадку подовжньої хвилі положення рівноваги коливальної точки в будь-який момент часу буде у площині, що відповідає тим же значенням координати  $x$ . Це означає, що функція

$$\xi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right) \quad (21.6)$$

є рівнянням як подовжньої, так і поперечної плоских хвиль, котрі поширюються в напрямку осі  $x$ .

Зафіксуємо будь-яке значення фази, прийнявши, що:

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha = \text{const} \quad (21.7)$$

Продиференціювавши (21.7) за часом при умові, що для конкретної хвилі величини  $\omega$ ,  $v$  і  $\alpha$  не залежать від часу, знаходимо:

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (21.8)$$

тобто швидкість поширення хвилі  $v$  в рівнянні (21.7) є швидкістю переміщення будь-якої зафіксованої фази. Тому її називають фазовою швидкістю.

Перетворимо рівняння (21.6), використавши поняття хвильового числа

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (21.9)$$

яке показує, скільки разів довжина хвилі  $\lambda$  укладається на відріжку, довжиною  $2\pi$ :

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \omega t - \frac{\omega x}{v} = \omega t - \frac{2\pi x}{Tv} = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x = \omega t - kx.$$

Таким чином, рівняння плоскої хвилі, що поширюється в напрямку  $x$ , набирає вигляду:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (21.10)$$

Рівняння (21.10) описує плоску незатухаючу хвилю, що поширюється в ідеальному середовищі, яке не поглинає енергію. Як показує досвід, в однорідному реальному середовищі відбувається затухання коливань за експоненціальним законом:  $A = A_0 e^{-\gamma x}$ , де  $\gamma$  – коефіцієнт затухання,  $A_0$  – амплітуда коливань у точці їх зародження ( $x = 0$ ). Рівняння плоскої затухаючої хвилі набирає вигляду:

$$\xi = A_0 e^{-\gamma x} \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (21.11)$$

б) Рівняння сферичної хвилі.

Будь-яке реальне джерело хвиль має певну протяжність. Однак якщо розглядати хвилі на відстанях  $r_0$  від джерела, значно більших від його розмірів, то джерело можна вважати точковим. Якщо модуль швидкості поширення хвилі, породжуваної джерелом, у всіх напрямках однаковий, то на відстанях  $r > r_0$  хвиля буде сферичною.

При поширенні сферичної хвилі на відстань  $r$  від джерела час запізнювання  $\tau = r / v$ , а амплітуда коливань зменшуватиметься з відстанню від джерела за законом  $1/r$ . Враховуючи це, отримаємо рівняння незатухаючої та затухаючої сферичних хвиль:

$$\xi = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (21.12)$$

$$\xi = \frac{A_0 e^{-\gamma r}}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (21.13)$$

У рівняннях (21.12) та (21.13)  $A_0$  – амплітуда на одиничній (в обраній системі одиниць) відстані від джерела коливань.

в) Рівняння плоскої хвилі, що поширюється в довільному напрямку.

Нехай коливання в площині, що проходить через початок координат, описуються законом:

$$\xi_0 = A \cos(\omega t + \alpha),$$

а хвиля поширюється в довільному напрямку  $\vec{l}$ , перпендикулярному до цієї площини (рис. 21.4). У відповідності з рівнянням (21.10) коливання в площині на відстані  $l$  від початку координат будуть описуватись законом:

$$\xi = A \cos(\omega t - kl + \alpha). \quad (21.14)$$

З рис. 21.4 видно, що  $l = r \cos \varphi = (\vec{n}, \vec{r})$ , де  $\vec{n}$  – одиничний вектор. Величину  $k\vec{n} = \vec{k}$  називають хвильовим вектором. Кількісно він дорівнює хвильовому числу  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , а

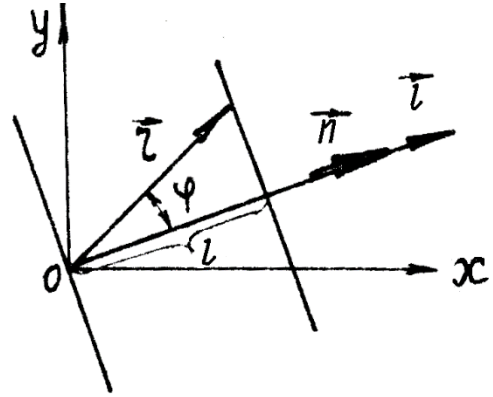


Рис. 21.4

напрямок його співпадає з напрямком поширення хвилі ( $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{v}$ ). Таким чином,  $kl = (\vec{k}, \vec{r})$ , і рівняння плоскої хвилі, що поширюється в довільному напрямку, набирає вигляду:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \alpha). \quad (21.15)$$

Скалярний добуток  $(\vec{k}, \vec{r})$  виразимо через проекції векторів  $\vec{k}$  і  $\vec{r}$  на координатні осі:  $(\vec{k}, \vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z$ . Тоді на підставі рівняння (21.15) отримаємо рівняння незатухаючої плоскої хвилі:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha), \quad (21.16)$$

де:  $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha$ ;  $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta$ ;  $k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma$ ;

$\alpha, \beta, \gamma$  – кути, утворені напрямком поширення хвилі з координатними осями відповідно  $x, y, z$ .

Рівняння незатухаючої плоскої хвилі іноді записують у вигляді:

$$\xi = R_e A e^{i(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \alpha)} \quad (21.17)$$

або 
$$\xi = A e^{i(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \alpha)}, \quad (21.18)$$

враховуючи лише реальну частину цього рівняння.

При поширенні хвилі в середовищі, яке поглинає енергію, необхідно враховувати закон затухання амплітуди:  $A = A_0 e^{-\gamma l}$ .

## 21.2 Стоячі хвилі.

При падінні плоскої хвилі на плоску відбиваючу перешкоду виникає відбита плоска хвиля. Якщо при поширенні хвиль у середовищі і при відбиванні їх від перешкоди не відбувається втрат енергії (чи ці втрати вкрай незначні), то амплітуди прямої та відбитої хвиль практично однакові. Відбита і падаюча хвилі, будучи когерентними (різниця фаз з часом не змінюється), при зустрічному накладанні інтерферують, внаслідок чого в тих точках простору, куди падаюча і відбита хвилі приходять у протифазі, сумарна амплітуда

зменшується до нуля, тобто ці точки середовища залишаються в спокої, утворюючи нерухомі вузли коливань. У тих точках простору, де фази хвиль співпадають, хвилі підсилюють одна одну, утворюючи пучності коливань. В результаті виникає так звана стояча

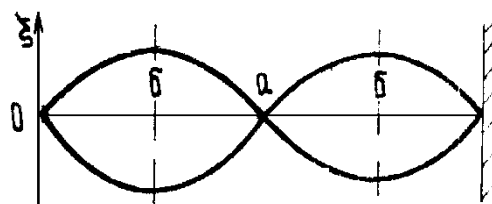


Рис. 21.4

хвиля (рис. 21.5). На рис. 21.5 представлені два результуючі коливання, що відрізняються одне від одного на півперіоду. Точка *a* – вузол коливань, точки *б* – пучності. Аналогічні явища будуть спостерігатися при зустрічі двох когерентних хвиль (хвиль з однаковою частотою коливань і незмінною з часом різницею фаз у довільно обраній точці їх зустрічі) з однаковими амплітудами.

Знайдемо вигляд рівняння стоячої хвилі, котра утвориться при накладанні двох зустрічних когерентних хвиль, рівняння яких мають вигляд:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \alpha_1); \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Склавши ці рівняння, отримаємо рівняння стоячої хвилі:

$$\xi = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \quad (21.24)$$

Виберемо початок відліку координати  $x$  так, щоб різниця  $\alpha_2 - \alpha_1$  дорівнювала нулю, а початок відліку часу  $t$  так, щоб сума  $\alpha_1 + \alpha_2$  також дорівнювала нулю. За цих умов рівняння стоячої хвилі набирає вигляду:

$$\xi = \left(2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos \omega t, \quad (21.25)$$

де  $\frac{2\pi}{\lambda} = k$  – хвильове число.

З рівняння (21.25) видно, що амплітуда  $2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$  коливань частинок середовища відносно положення рівноваги за наявності в середовищі стоячої хвилі залежить від координати самого положення рівноваги частинки. В точках, координати котрих задовольняють умову

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm n\pi, \quad (21.26)$$

де  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , амплітуда досягає максимального значення, рівного  $|2A|$ . Ці точки відповідають пучностям стоячої хвилі. У точках, координати яких задовольняють умову

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (21.27)$$

де  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , амплітуда коливань дорівнює нулю. Ці точки є вузлами стоячої хвилі. На підставі рівнянь (21.26) та (21.27) знайдемо координати пучностей та вузлів

$$x_{\text{пучн.}} = \pm n \frac{\lambda}{2}; \quad x_{\text{вузл.}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}. \quad (21.28)$$

Досвід свідчить: якщо хвиля, що падає на межу поділу двох середовищ, відбивається від менш щільного середовища на більш щільне, то фаза амплітуди коливань не змінюється. Система рівнянь (21.28) відповідає саме такому випадку. Якщо ж відбивання відбувається від більш щільного середовища на менш щільне, то фаза амплітуди змінюється на протилежну. Це означає, що координати пучностей і вузлів, визначені за системою рівнянь (21.28), поміняються місцями.

Продиференціювавши рівняння (21.25) один раз за  $t$ , а другий раз за  $x$ , отримаємо рівняння швидкості  $v$  поступального руху частинок середовища відносно положень рівноваги та деформацію  $\varepsilon$  середовища:

$$\dot{\xi} = v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2A\omega \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \omega t, \quad (21.29)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t. \quad (21.30)$$

Графіки функцій (21.25), (21.29) та (21.30) в момент часу  $t = 0$  (початок коливань) і  $t = T/4$  представлені відповідно на рис. 21.6 а) та 21.6 б).

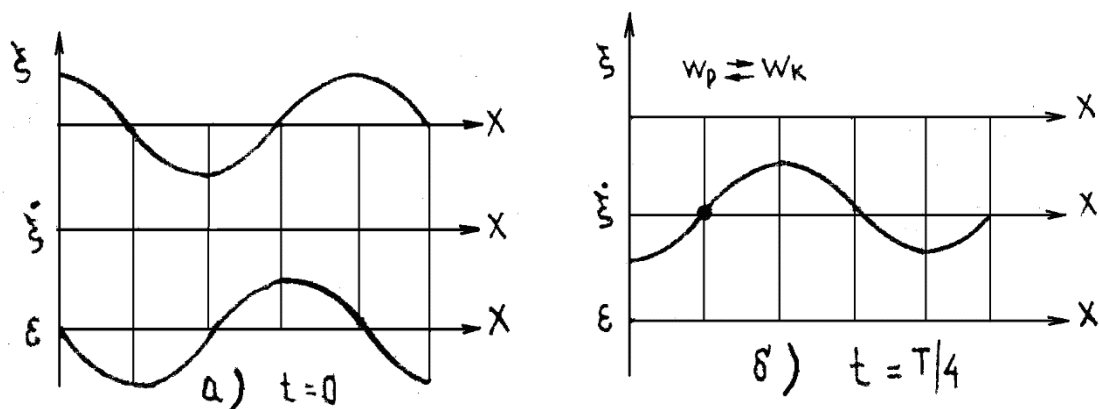


Рис. 21.6

Як видно із рис. 21.6 б, при поширенні стоячої хвилі в пружному середовищі двічі за період відбувається перетворення кінетичної енергії на потенціальну і потенціальної на кінетичну.

## Контрольні питання до розділу 2

1. Дайте визначення коливального руху. Який рух називається періодичним?
2. Дайте визначення гармонічного коливання. Дайте визначення пружної й квазіпружної сили.
3. Запишіть рівняння гармонічних коливань у комплексній формі.
4. Дайте визначення пружинного маятника. Запишіть рівняння другого закону Ньютона для пружинного маятника. Запишіть диференціальне рівняння коливань для пружинного маятника у канонічній формі.
5. Дайте визначення математичного маятника. Запишіть рівняння другого закону Ньютона для математичного маятника. Який фізичний зміст малих коливань математичного маятника? Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань математичного маятника в канонічному вигляді.
6. Дайте визначення фізичного маятника. Запишіть рівняння другого закону Ньютона для фізичного маятника. Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань фізичного маятника в канонічному вигляді.
7. Дайте визначення крутильного маятника. Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань крутильного маятника в канонічному вигляді.
8. Дайте визначення вільних незгасаючих коливань. Розв'язати диференціальне рівняння вільних незгасаючих коливань
9. Дайте визначення амплітуди, фази та початкової фази коливання.
10. Дайте визначення власної частоти та визначіть період гармонічного коливання.
11. Знайдіть швидкість та прискорення гармонічного коливання.
12. Знайдіть кінетичну, потенціальну та повну механічну енергію гармонічного коливання.
13. Дайте визначення вільних згасаючих коливань. Розв'яжіть диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань
14. Визначте аперіодичний рух.

15. Визначте частоту вільних згасаючих коливань. Визначте час релаксації. Визначте декремент та логарифмічний декремент згасання. Визначте добротність коливальної системи.
16. Визначте вимушені коливання маятника. Визначте механічний резонанс та резонансну частоту.
17. Визначте когерентні коливання. Визначте результат додавання двох когерентних гармонічних коливань.
18. Знайдіть траєкторію руху точки, що здійснює взаємно перпендикулярні гармонічного коливання.
19. Визначте биття та виведіть рівняння і період биття.
20. Дайте визначення хвилі. Дайте визначення поперечної і поздовжньої хвилі.
21. Виведіть рівняння плоскої хвилі. Запишіть рівняння зворотної хвилі.
22. Визначте фазову швидкість та знайдіть вираз для неї. Визначіть: хвильове число, довжину хвилі.
23. Які хвилі називаються когерентними? Визначіть явище інтерференції хвиль.
24. Знайдіть положення максимумів інтерференції. Знайдіть положення мінімумів інтерференції .
25. Що являє собою стояча хвиля? Виведіть рівняння стоячої хвилі.
26. Знайдіть положення вузлів та пучностей стоячої хвилі.
27. Визначіть довжину стоячої хвилі.
28. Як можна знайти спектр власних частот тіла?
29. Вивести рівняння для спектра власних частот стовпа повітря в закритій та Напівзакритій трубці.
30. Складіть диференціальне рівняння хвилі.

## Розділ 6 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ. ЗМІННИЙ СТРУМ.

### Тема 22. Електромагнітні коливання.

#### 22.1. Коливальний контур. Формула Томсона.

Серед різних електричних явищ особливе місце займають електромагнітні коливання, при яких електричні величини (заряди, струми) періодично змінюються і супроводжуються взаємними перетвореннями електричного і магнітного полів. Для збудження і підтримання електромагнітних коливань використовують **коливальний контур** – коло, що складається із увімкнених послідовно котушки індуктивністю  $L$ ,

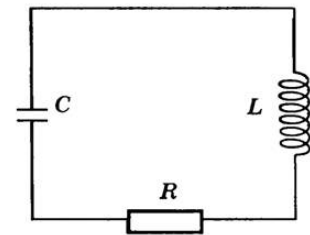


Рис. 22.1

конденсатора ємністю  $C$  і резистора опором  $R$  (рис. 22.1).

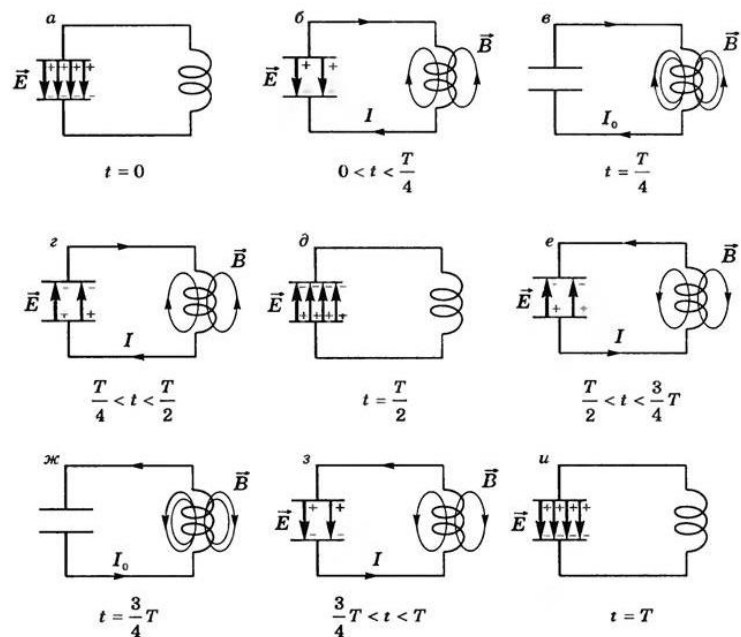


Рис. 22.2

Розглянемо послідовні стадії коливального процесу в ідеалізованому контурі, опір якого нескінченно малий ( $R \approx 0$ ) (рис. 22.2). Для збудження у контурі коливань конденсатор попередньо заряджають, надаючи його

обкладинкам заряди  $\pm q_0$ . Тоді в початковий момент часу  $t=0$  між обкладинками виникає електричне поле напруженістю  $\vec{E}$  (рис. 22.2, a),

$$\text{енергія якого } W_{e \max} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Якщо замкнути конденсатор на котушку, то він почне розряджатися і по контуру піде зростаючий у часі струм  $I$  (рис. 22.2,б). В результаті цього енергія електричного поля буде зменшуватися, а енергія магнітного поля котушки  $W_m = \frac{LI^2}{2}$  - зростати. Так як  $R \approx 0$ , то, згідно закону збереження енергії, повна енергія  $W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const$ , так як вона не використовується на нагрівання. В момент часу  $t = \frac{1}{4}T$  ( $T$  - період коливань в даному контурі), конденсатор повністю розрядиться (рис. 22.2, в), енергія електричного поля обернеться у нуль, а енергія магнітного поля (а відповідно і струм), досягне максимального значення  $W_{m\max} = \frac{LI_0^2}{2}$ . Починаючи з цього моменту, струм у контурі почне зменшуватися; відповідно, почне зменшуватися і магнітне поле котушки, і в ній буде індукватися струм, який спрямований (згідно правилу Ленца) в тому ж напрямку, що і струм розрядки конденсатора. Конденсатор почне перезаряджатися, виникне електричне поле, яке намагатиметься послабити струм (рис. 22.2, г). В момент часу  $t = \frac{1}{2}T$ , конденсатор повністю перезарядиться, струм зникне; енергія магнітного поля перейде повністю в енергію електричного поля. Далі ті ж процеси почнуть протікати у зворотному напрямку (рис. 22.2, е,ж,з) і в момент часу  $t = T$  система повернеться у початковий стан (рис. 22.2, и).

Таким чином у контурі виникають електромагнітні коливання, які супроводжуються послідовними перетвореннями енергії електричного поля в енергію магнітного поля. Треба зауважити, що коливання будуть протікати без втрати енергії, якщо контур близький до ідеального, тобто такий, опір якого нескінченно малий.

У розглянутому колі електрорушійною силою є ЕРС самоіндукції  $\mathcal{E}_{si}$ ,

яка виникає у котушці. Електричний струм з'являється за рахунок різниці потенціалів  $U_C$  між обкладинками конденсатора, отже:  $U_C = \varepsilon_{si}$ .

Враховуючи, що  $U_C = \frac{q}{C}$ ,  $\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}$ ,  $I = \frac{dq}{dt}$ , отримаємо

диференціальне рівняння електромагнітних коливань:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (22.1)$$

Це рівняння представляє собою рівняння вільних гармонійних коливань, що здійснюються з циклічною частотою

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (22.2)$$

або періодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (22.3)$$

Формула (22.3) вперше була отримана У. Томсоном і носить назву **формула Томсона**. Розв'язком диференціального рівняння (22.1) є рівняння, яке описує гармонійні коливання заряду на обкладинках конденсатора:

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (22.4)$$

Оскільки сила струму  $I = \frac{dq}{dt}$ , то зміна сили струму з часом у коливальному контурі буде описуватися рівнянням:

$$I = -q_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) = I_0 \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \quad (22.5)$$

Отже коливання струму опережає коливання заряду на  $\frac{\pi}{2}$ , відбувається з такою ж частотою і має амплітуду  $I_0 = q_0 \omega$ .

Оскільки  $U_C = \frac{q}{C}$ , то враховуючи (22.4), отримаємо рівняння коливань напруги на обкладинках конденсатора:

$$U_C = U_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (22.6)$$

де  $U_0 = \frac{q_0}{C}$  - амплітуда напруги.

## 22.2. Згасаючі та змушені електромагнітні коливання в коливальному контурі. Резонанс.

Розглянутий у попередньому розділі електромагнітний коливальний контур є ідеалізованою системою, оскільки опір такої системи ми вважали рівним нулю. У дійсності, для будь-якої реальної системи, опір з'єднувальних провідників і омичний опір котушки не рівні нулю. Тому в реальному електромагнітному контурі насправді будуть відбуватися не вільні гармонічні коливання, а затухаючі коливання, тобто такі, амплітуда яких із-за втрати енергії буде зменшуватися з часом.

Закон затухаючих коливань визначається властивостями коливальних систем. Зазвичай розглядають лінійні системи – ідеалізовані реальні системи, в яких параметри, що визначають фізичні властивості системи, в ході процесу не змінюються. Прикладом лінійних систем є коливальний контур, індуктивність, ємність і опір якого не залежить ні від струму в контурі, ні від напруги. Диференціальне рівняння вільних затухаючих коливань в такому коливальному контурі має вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (22.7)$$

Порівнюючи це рівняння з загальним рівнянням вільних затухаючих коливань ( $\frac{d^2S}{dt^2} + 2\beta \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0$ , де  $S$  - величина, що коливається,  $\beta$  - коефіцієнт затухання,  $\omega_0$  - власна циклічна частота коливань), можна визначити відповідно коефіцієнт затухання і власну частоту коливань у коливальному контурі:  $\beta = \frac{R}{2L}$  і  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Розв'язком рівняння (22.7) є рівняння:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (22.8)$$

Рівняння (22.8) теж представляє собою рівняння вільних затухаючих коливань в коливальному електромагнітному контурі. Заряд на обкладинках конденсатора змінюється з часом за законом  $q(t) = q_0 e^{-\beta t}$ , а коливання відбуваються з циклічною частотою

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (22.9)$$

яка менша за власну частоту коливань  $\omega_0$ .

У техніці більш важливим є можливість підтримувати коливання незатухаючими. Для цього необхідно в реальній коливальній системі компенсувати втрати енергії, що можливо за допомогою будь-якого періодично діючого зовнішнього фактору, який змінюється за гармонічним законом. Для електромагнітного коливального контуру таким фактором може виступати зовнішня періодично діюча за гармонічним законом ЕРС або змінна напруга  $U = U_0 \cos(\omega t)$ . Коливання, що відбуваються за рахунок дії зовнішнього періодичного фактору називають **вимушеними електромагнітними коливаннями**. Диференціальне рівняння таких коливань має вигляд:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos(\omega t). \quad (22.10)$$

Розв'язком диференціального рівняння (22.10) є сума загального розв'язку однорідного рівняння

$$q_1 = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (22.11)$$

і часткового розв'язку

$$q = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (22.12)$$

де

$$A = \frac{U_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (22.13)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (22.14)$$

Складова розв'язку (22.11) грає суттєву роль тільки на початковій стадії процесу (при встановленні коливань) до тих пір, поки амплітуда вимушених коливань не досягне значення, що виражається рівнянням (22.13). Графічно вимушені коливання показано на рис. 22.3.

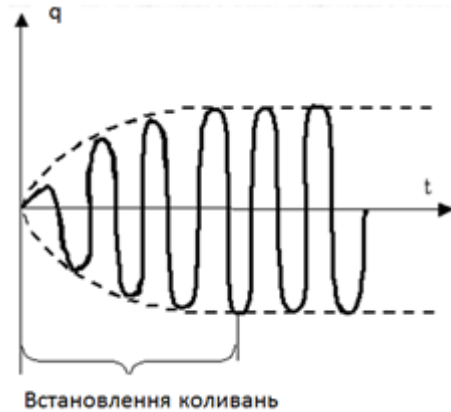


Рис. 22.3

Отже, у режимі, що встановився, вимушені коливання відбуваються з частотою  $\omega$  (частота коливань зовнішнього фактору) і являються гармонічними; амплітуда і зсув фаз таких коливань визначаються відповідно за формулами (22.13) і (22.14), які також залежать від  $\omega$ .

Запишемо формули (22.12), (22.13) і (22.14) для електромагнітних коливань у коливальному контурі, враховуючи, що  $\beta = \frac{R}{2L}$  і  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ :

$$q = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (22.15)$$

$$q_0 = \frac{U_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, \quad (22.16)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (22.17)$$

Знайдемо силу струму у контурі, шляхом диференціювання рівняння (22.15) за часом:

$$I = -\omega q_0 \sin(\omega t - \alpha) = I_0 \cos(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}), \quad (22.18)$$

де

$$I_0 = \omega q_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (22.19)$$

Вираз (22.18) може бути записаний у вигляді:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (22.20)$$

де  $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$  - зсув за фазою між струмом і прикладеною напругою. У відповідності до рівняння (22.17)

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (22.21)$$

З формули (22.21) витікає, що струм відстає за фазою від напруги якщо  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , і опереждає напругу, якщо  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ .

З рівняння (22.13) слідує, що амплітуда вимушених коливань має максимум при певній частоті коливань зовнішнього фактору. Згадаємо, що **резонансом** називають явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при певній частоті коливань зовнішнього фактору - резонансній частоті ( $\omega_{рез}$ ), яка визначається за формулою

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (22.22)$$

Підставивши формулу (22.22) у формулу (22.13), отримаємо вираз для резонансної амплітуди:

$$A_{рез} = \frac{U_0 / L}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (22.23)$$

Резонанс дозволяє виявити навіть дуже слабкі коливання, якщо їх частота співпадає з частотою власних коливань приладу, що використовується в акустиці, електротехніці.

## Тема 23. Змінний електричний струм.

### 23.1. Змінний електричний струм. Коло змінного струму, яке становить послідовно увімкнені резистор, котушку індуктивності й конденсатор

Розглянуті вимушені коливання можна розглядати як протікання у колі, яке містить конденсатор, котушку індуктивності і резистор, змінного струму.

**Змінний струм** можна вважати **квазістаціонарним**, тобто таким, для якого миттєві значення сили струму у всіх поперечних перетинах кола практично однакові, оскільки їх зміна відбувається достатньо повільно, а електромагнітні збудження розповсюджуються у колі зі швидкістю світла. Для миттєвих значень квазістаціонарних струмів виконуються закон Ома і правила Кірхгофа.

Розглянемо послідовно процеси, які проходять у колі, що містить резистор, котушку індуктивності і конденсатор, при прикладанні до цього кола змінної напруги

$$U = U_0 \cos \omega t \quad (23.1)$$

1. **Змінний струм, що протікає через резистор опором  $R$  ( $L \rightarrow 0, C \rightarrow 0$ )**

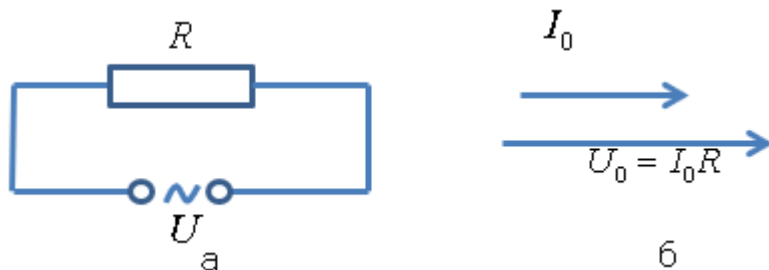


Рис. 23.1

(рис. 23.1, а).

При виконанні умови квазістаціонарності струм через резистор визначається за законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R} \cos \omega t = I_0 \cos \omega t, \quad (23.2)$$

де амплітуда струму -  $I_0 = \frac{U_0}{R}$ .

Для наглядного зображення відношень між змінними струмами і напругами використаємо метод векторних діаграм, на яких струми і напруги зображуються у вигляді векторів, орієнтованих під певними кутами один до одного, що відповідають зсуву фаз між цими величинами. На рис. 23.1, б наведено векторну діаграму амплітудних значень струму і напруги на резисторі (з рівнянь (23.1) і (23.2) видно, що зсув фаз рівний нулю).

**2. Змінний струм, що протікає через котушку індуктивності  $L$  ( $R \rightarrow 0$ ,  $C \rightarrow 0$ ) (рис. 23.2, а).**

Якщо в колі, яке містить котушку індуктивності, прикладена змінна напруга (23.1), то по ній буде протікати змінний струм, в результаті чого виникне ЕРС самоіндукції  $\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}$ . Тоді закон Ома для розглянутого кола буде мати вигляд:



Рис. 23.2

закон Ома для розглянутого кола буде мати вигляд:

$$U_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0, \text{ звідки}$$

$$L \frac{dI}{dt} = U_0 \cos \omega t. \quad (23.3)$$

Оскільки зовнішня напруга прикладена до котушки індуктивності, то падіння напруги на ній:

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (23.4)$$

З рівняння (23.3) слідує, що  $dI = \frac{U_0}{L} \cos \omega t dt$ , або після інтегрування, враховуючи, що постійна інтегрування рівна нулю (так як відсутня постійна складова струму), отримаємо

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}), \quad (23.5)$$

де  $I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$  - амплітуда струму.

Величина

$$R_L = \omega L \quad (23.6)$$

називається **реактивним індуктивним опором** (або **індуктивним опором**).

Підстановка значення  $U_0 = \omega L I_0$  у вираз (23.3), з урахуванням (23.4) призводить до наступного значення падіння напруги на котушці індуктивності:

$$U_L = \omega L I_0 \cos \omega t \quad (23.7)$$

З порівняння виразів (23.5) і (23.7) витікає, що падіння напруги  $U_L$  на котушці індуктивності опережає по фазі струм  $I$ , який йде через неї, на  $\frac{\pi}{2}$ , що показано на діаграмі (23.2, б).

### 3. Змінний струм, що протікає через конденсатор ємністю $C$ ( $R \rightarrow 0$

,  $L \rightarrow 0$ )

(рис. 23.3, а).

Якщо змінна напруга (23.1)

прикладена до конденсатора, то він буде весь час перезаряджатися, в

результаті чого в колі буде протікати змінний струм. Оскільки зовнішня напруга прикладена до конденсатора, і опором з'єднуючих провідників можна знехтувати, то падіння напруги на конденсаторі



Рис. 23.3

$$U_c = \frac{q}{C} = U_0 \cos \omega t .$$

Сила струму

$$I = dt = -\omega C U_0 \sin \omega t = I_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) , \quad (23.8)$$

де  $I_0 = \omega C U_0 = \frac{U_0}{1/\omega C}$  - амплітудне значення струму.

Величина

$$R_c = \frac{1}{\omega C} \quad (23.9)$$

називається **реактивним ємнісним опором** (або **ємнісним опором**). Для постійного струму ( $\omega=0$ )  $R_c = \infty$ , тобто постійний струм через конденсатор протікати не може.

Падіння напруги на конденсаторі

$$U_c = \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t . \quad (23.10)$$

З порівняння виразів (23.10) і (23.8) слідує, що падіння напруги  $U_c$  на конденсаторі відстає по фазі від струму  $I$ , який йде через конденсатор на  $\frac{\pi}{2}$ . Це показано на векторній діаграмі (23.3, б).

**4. Коло змінного струму, яке складає послідовно увімкнені резистор,**

**катушку**

**індуктивності і**

**конденсатор**

(рис. 23.4, а).

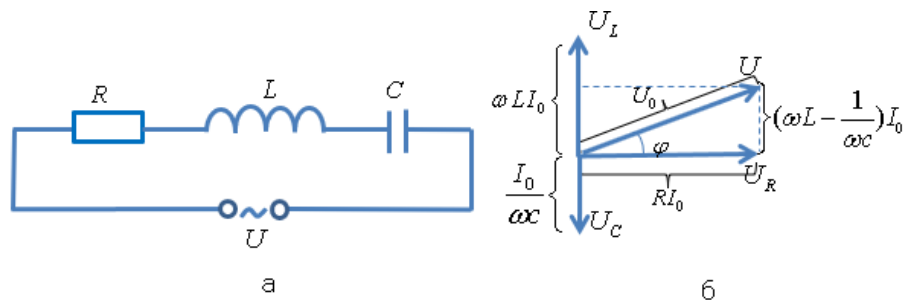


Рис. 23.4

Якщо до кінців кола змінного струму, наведеного на рис. 23.4, а, прикласти змінну напругу (23.1), то у колі виникне змінний струм, який викликає на всіх

елементах цього кола відповідне падіння напруги  $U_R, U_L$  і  $U_C$ . На рис. 23.4, б представлена векторна діаграма амплітуд падіння напруг на резисторі ( $U_R$ ), котушці індуктивності ( $U_L$ ) і конденсаторі ( $U_C$ ).

Амплітуда  $U_0$  прикладеної напруги повинна бути рівна векторній сумі амплітуд цих падінь напруг. Як видно з діаграми кут  $\varphi$  визначає різницю фаз між напругою і силою струму і визначається за формулою:

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (23.11)$$

З прямокутного трикутника на векторній діаграмі слідує, що  $(RI_0)^2 + \left[ (\omega L - \frac{1}{\omega C})I_0 \right]^2 = U_0^2$ , звідки можна виразити амплітуду сили струму:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, \quad (23.12)$$

що співпадає зі значенням амплітудного значення струму (22.19) у коливальному контурі при вимушених коливаннях.

Отже, якщо напруга у колі змінюється по закону  $U = U_0 \cos \omega t$ , то струм у цьому колі

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (23.13)$$

де  $\varphi$  і  $I_0$  визначаються відповідно формулами (23.11) і (23.12).

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (23.14)$$

називається **повним опором** електричного кола, а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad - \quad \text{реактивним опором.}$$

Миттєве значення потужності змінного струму рівне добутку миттєвих значень напруги і сили струму:  $P(t) = U(t)I(t)$ , де  $U(t) = U_0 \cos \omega t$ ,  $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ . Після тригонометричних перетворень отримаємо:  $P(t) = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = U_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)$ .

Практичний інтерес представляє не миттєве значення потужності, а її середнє значення за період коливання. Враховуючи, що  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ ,  $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$ , отримаємо вираз для **середнього значення потужності** змінного струму:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi. \quad (23.15)$$

З векторної діаграми слідує, що  $U_0 \cos \varphi = R I_0$ , тому  $\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2$ . Таку потужність розвиває постійний струм  $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ .

Величини  $I_\delta = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  і  $U_\delta = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$  - називають **діючими** (або **ефективними**) **значеннями струму і напруги**. Усі амперметри і вольтметри градууються по діючим значенням.

Враховуючи діючі значення струму і напруги, середню потужність можна розрахувати за формулою

$$\langle P \rangle = I_\delta U_\delta \cos \varphi, \quad (23.16)$$

де множник  $\cos \varphi$  називають **коефіцієнтом потужності**.

Формула (23.16) показує, що потужність, яка виділяється у колі змінного струму, у загальному випадку залежить не тільки від струму і напруги, а й від зсуву фаз між ними. Якщо в колі відсутній реактивний опір, то  $\cos \varphi = 1$  і  $P = IU$ . Якщо коле має лише реактивний опір, то  $\cos \varphi = 0$  і середня потужність рівна нулю, якими б великими не були струм і напруга. Якщо  $\cos \varphi$

має значення, суттєво менші за одиницю, то для передачі заданої потужності при даній напрузі генератора необхідно збільшувати силу струму, що призведе до виділення джоулевої теплоти, або потребує збільшення поперечного перерізу провідників, що збільшує вартість електропередач. Тому на практиці завжди намагаються збільшити коефіцієнт потужності, найменш допустиме значення якого для промислових приладів складає  $\cos \varphi \approx 0,85$ .

### Контрольні питання до розділу 6

1. Як спрямовані вектори  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{H}$  відносно швидкості поширення  $\mathbf{v}$  електромагнітної хвилі? У яких фазах відбуваються коливання векторів  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{H}$  біжучої електромагнітної хвилі?
2. Скільки повних коливань здійснює за секунду вектор напруженості електричного поля електромагнітної хвилі довжиною  $\lambda = 0,55$  мкм?
3. Чи можна виявити випромінювання електромагнітних хвиль, яке створюється провідником з промисловим змінним струмом частотою 50 Гц? Якою є довжина хвилі при цьому?
4. На що витрачається енергія джерела: а) постійного струму; б) змінного струму?
5. Яку роль відіграє котушка індуктивності у коливальному контурі?
6. Як можна збудити електромагнітні коливання в коливальному контурі?
7. Вивести диференціальне рівняння на заряд конденсатора в коливальному LC-контурі.
8. Вивести вирази для зсуву фаз між напругою та струмом на конденсаторі та на котушці.
9. Вивести вирази для реактивного опору котушки та конденсатора.
10. Дати визначення ефективного значення змінного синусоїдального струму, вивести зв'язок ефективного та амплітудного значень.
11. Вивести диференціальне рівняння на заряд конденсатора в послідовному коливальному RLC-контурі.

12. При якій умові можна казати про наявність згасаючого коливального процесу? Для відповідних згасаючих коливань вивести вирази для кутової частоти та періоду, а також вивести залежність амплітуди від часу.

13. Дати визначення часу релаксації коливань, логарифмічного декременту згасання та добротності коливань. Вивести вираз для логарифмічного декременту згасання.

14. Вивести диференційне рівняння на заряд конденсатора в послідовному коливальному RLC-контурі, що підключено до джерела змінної синусоїдальної ЕРС.

15. Вивести вирази для загального опору контуру, а також для зсуву фаз між загальними напругою та струмом на контурі.

16. Детально описати явище резонансу напруг.

17. В усталеному режимі роботи кола вивести часові залежності струмів на елементах паралельного коливальному RLC-контурі, підключеному до джерела змінної синусоїдальної ЕРС. Яку роль при описі контуру грає резистивний опір котушки?

18. Вивести вирази для загальної провідності контуру, а також для зсуву фаз між загальними напругою та струмом на контурі. Детально описати явище резонансу струмів.

19. Дати визначення фазового фронту та плоскої хвилі. Вказати розв'язки хвильових рівнянь для плоскої електромагнітної хвилі, що шириться у відкритому просторі, та довести правильність відповідних розв'язків.

20. Вивести вираз для фазової швидкості електромагнітної хвилі.

## Розділ 7 ОПТИКА.

### Тема 24. Геометрична оптика.

#### 24.1 Закони геометричної оптики.

Розділ оптики, в якому закони поширення світла розглядаються на основі уявлень про світлові промені, називається геометричною оптикою. Під світловими променями розуміють нормальні (перпендикулярні) до хвильових поверхонь лінії, вздовж яких поширюється потік світлової енергії. Світловий промінь – це абстрактне математичне поняття, а не фізичний образ. Геометрична оптика є лише граничним випадком хвильової оптики.

Основу геометричної оптики складають такі закони:

**1. Закон прямолінійного поширення світла:** світло в оптично однорідному середовищі поширюється прямолінійно.

**2. Закон незалежності світлових пучків:** світлові пучки від різних джерел при накладанні діють незалежно один від іншого і не впливають один на одного.

**3. Закон відбивання світла:** падаючий на межу розділу двох оптично неоднорідних середовищ промінь, відбитий промінь і перпендикуляр, поставлений до межі розділу в точці падіння, лежать в одній площині; кут відбивання променя від межі розділу двох середовищ дорівнює куту падіння променя (рис. 24.1).

**4. Закон заломлення світла:** падаючий на межу розділу двох оптично неоднорідних середовищ промінь, заломлений в друге середовище промінь і перпендикуляр, проведений до межі розділу в точці падіння, лежать в одній площині (рис. 24.2); відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення променя є величиною сталою для двох даних середовищ,

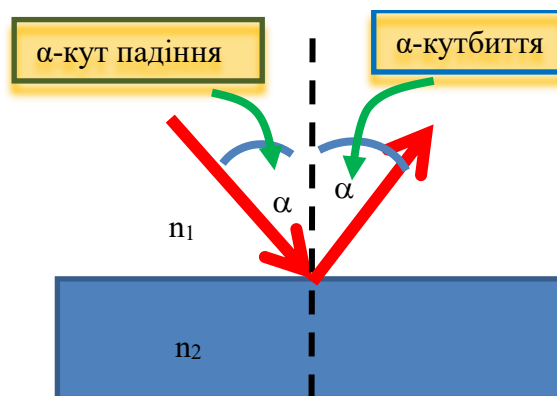


Рис. 24.1

визначається відношенням швидкості поширення світла в першому середовищі до швидкості поширення світла в другому середовищі і називається відносним показником заломлення другого середовища відносно першого:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (24.1)$$

Числове значення **відносного показника заломлення**  $n_{21}$  може бути як більшим, так і меншим за одиницю в залежності від того, з якими швидкостями поширюється світло в межуючих середовищах, тобто в залежності від значення їх абсолютних показників заломлення  $n_1$  і  $n_2$ , оскільки

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (24.2)$$

З (24.1) випливає, якщо друге середовище оптично густіше за перше ( $n_2 > n_1$ ), то відносний показник заломлення  $n_{21} > 1$  і кут заломлення променя менший за кут його падіння.

При збільшенні кута падіння променя реалізується ситуація, коли заломлений промінь буде поширюватися вздовж межі розділу середовищ, тобто коли кут заломлення  $90^\circ$  (рис. 24.3). Тоді кут падіння називається граничним кутом. Якщо світловий промінь падатиме на межу

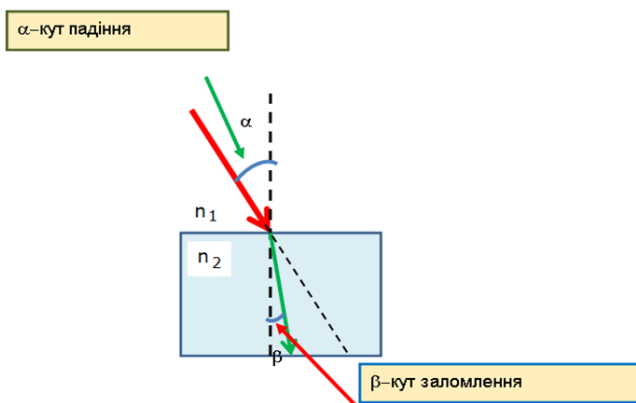


Рис. 24.2

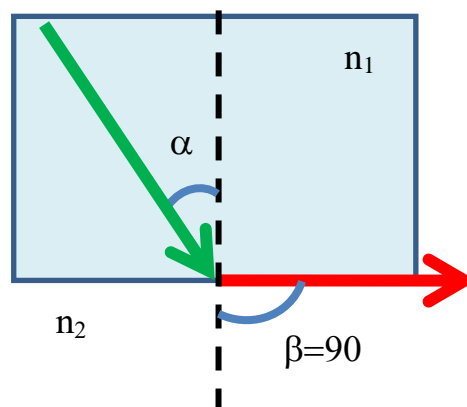


Рис. 24.3

розділу двох середовищ під кутом, більшим за граничний кут, то спостерігатиметься явище повного внутрішнього відбивання: падаючий промінь повністю відіб'ється від межі розділу середовищ, залишаючись при цьому всередині оптично густішого середовища.

Із закону заломлення (24.1) можна отримати формулу для розрахунку граничного кута повного внутрішнього відбиття:

$$\alpha_{cp} = \arcsin n_{21}. \quad (24.3)$$

Явище повного внутрішнього відбиття може спостерігатися лише при умові, що промінь йде з більш оптично щільного середовища у менш щільне, тобто

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} < 1. \quad (24.4)$$

Розглянуте явище використовують у світловодах – це тонкі нитки (волокна) з оптично прозорого матеріалу. В волоконних деталях світловодів використовують скловолокно, світловедуча жила (серцевина) якого оточена іншим склом (оболонкою) з меншим показником заломлення. Світло, яке попадає в світловод під кутами падіння, що перевищують граничний кут  $\alpha_{cp}$ , зазнає на межі розділу серцевина–оболонка повне внутрішнє відбивання і поширюються лише по світловедучій жилі. Питання передачі світлових зображень вивчаються в спеціальному розділі оптики – волоконна оптика.

## 24.2 Лінзи та зображення в лінзах

*Оптичною системою* називають сукупність відбивних і заломлених поверхонь, розміщених на шляху слідування світлового променя. Оптична система може давати дійсне або уявне зображення. Якщо промені, які йдуть від точкового джерела, після проходження оптичної системи збігаються в деякій точці, то така точка є *дійсним зображенням* джерела. Якщо промені, які пройшли оптичну систему, утворюють розбіжний пучок, тобто не перетинаються, а щоб знайти зображення джерела, доводиться продовжувати

розбіжний пучок у напрямі, протилежному напрямку поширення світла, то утворене зображення називають *уявним*.

Для отримання різного роду зображень в оптичних приладах широко використовують лінзи. *Лінзою* називають оптично прозоре тіло, що обмежене двома гладкими випуклими або вгнутими поверхнями (одна з них може бути плоскою).

Найчастіше поверхні лінз роблять сферичними, а саму лінзу виготовляють із спеціальних сортів скла, наприклад, флінтгласу, або інших речовин з відповідними показниками заломлення. Якщо відстань між обмежувачими поверхнями в центрі лінзи значно менша за радіуси їх кривизни, то така лінза називається тонкою.

За геометричною формою лінзи бувають двоопуклими, двоввігнутими, опукло-ввігнутими, плоско-опуклими і т.д. За оптичними властивостями лінзи поділяють на розсіювальні і збиральні. Для тонких лінз справедливе співвідношення:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \left( \frac{n_l}{n_c} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (24.5)$$

де  $d$  – відстань від оптичного центра  $O$  лінзи до предмета  $S$ ;  $f$  – відстань від оптичного центра лінзи

до зображення  $S_1$  предмета;  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси кривизни обмежувачих лінзу поверхонь (рис. 24.4);  $n_l$  – показник заломлення прозорого для світла матеріалу, з якого виготовлена лінза;  $n_c$  –

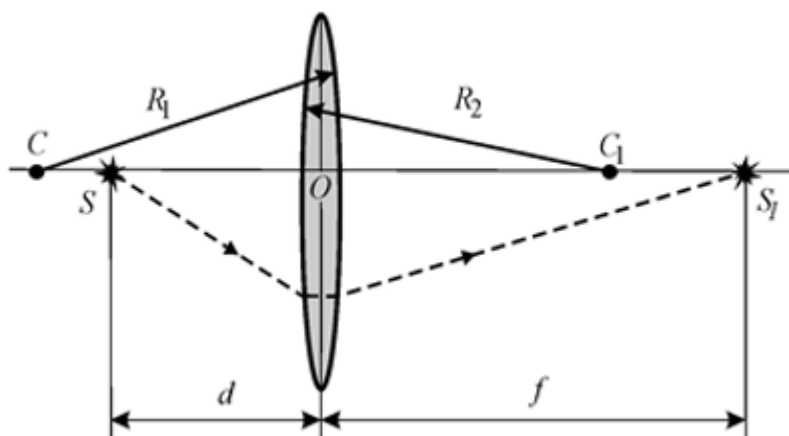


Рис. 24.4

показник заломлення середовища, що оточує лінзу. Пряму, яка проходить через

центри  $C$  і  $C_1$  сферичних поверхонь, називають головною оптичною віссю лінзи. Радіуси кривизни поверхонь лінзи  $R_1$  і  $R_2$  беруть, відповідно, зі знаком «+», якщо

поверхня опукла, і зі знаком «-», якщо поверхня ввігнута;  $f$  вважають від'ємним, якщо зображення предмета уявне.

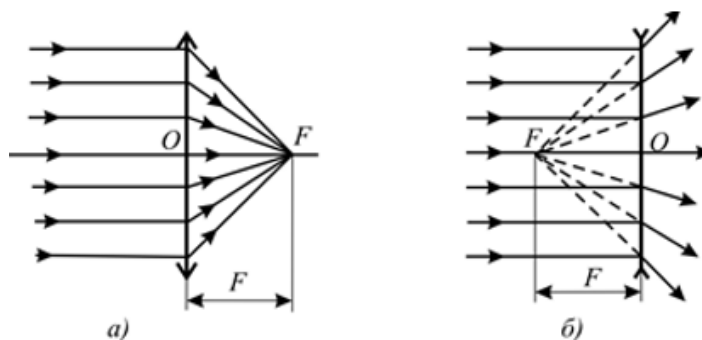


Рис. 24.5

Якщо на збиральну лінзу направити пучок променів, паралельних до її головної оптичної осі, то після заломлення в лінзі вони зберуться в точці, яка розташована на головній оптичній осі з другого боку лінзи (рис. 24.5, а). Точку називають головним фокусом лінзи. У розсіювальній лінзі промені після проходження лінзи поширюються розбіжним пучком, але таким чином, що їх продовження сходяться в точці, зі сторони падаючого пучка (рис. 24.5, б).

В збиральній лінзі головний фокус  $F$  є дійсним, а в розсіювальній - уявним. Кожна лінза має два головні фокуси, які розташовані симетрично відносно її оптичного центра  $O$ . Відстань між головним фокусом лінзи та її оптичним центром називають фокусною відстанню  $F$  лінзи. Величина, яка обернена до фокусної відстані  $F$  лінзи називається **оптичною силою**  $D$  лінзи. Одиницею вимірювання оптичної сили в системі СІ є діоптрія (дптр) - оптична сила такої лінзи, головна фокусна відстань якої  $F$  дорівнює 1 м. Для тонких лінзах фокусна відстань  $F$ , оптична сила  $D$ , відстані від лінзи до предмета  $d$  і до зображення  $f$  пов'язані співвідношенням, яке називають формулою тонкої лінзи:

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F} = \pm D. \quad (24.6)$$

Оптична сила збиральної лінзи є додатною, а розсіювальної – від'ємною.

## Зображення

предмета в лінзі є сукупністю зображень окремих його точок.

Тому для побудови зображення предмета досить знайти зображення його крайніх точок.

Основними правилами побудови зображення, що формується лінзою, є:

- 1) промінь, паралельний головній оптичній вісі, після заломлення проходить через головний фокус лінзи;
- 2) промінь, що проходить через головний фокус після заломлення, йде паралельно головній оптичній вісі лінзи;
- 3) промінь, що проходить через центр лінзи, не змінює свого напрямку.

Типові випадки побудови зображень  $A_1B_1$  предмета  $AB$  в збиральній лінзі, наведені на рис. 24.6.

Відстань  $d$  від предмета до лінзи є більшою ніж  $2F$  (рис. 24.6, а). У цьому випадку предмет і його зображення знаходяться по різні боки лінзи, а відстань  $f$  від лінзи до зображення є більшою від фокусної відстані  $F$  і меншою ніж  $2F$ . Зображення предмета буде дійсним, оберненим і зменшеним. В частковому випадку, якщо предмет знаходиться на нескінченно великій відстані від лінзи ( $d=\infty$ ), то його зображення буде у вигляді точки в головному фокусі  $F$  лінзи (рис. 24.6, б).

Відстань  $d$  від предмета до лінзи дорівнює  $2F$  (рис. 24.6, в).

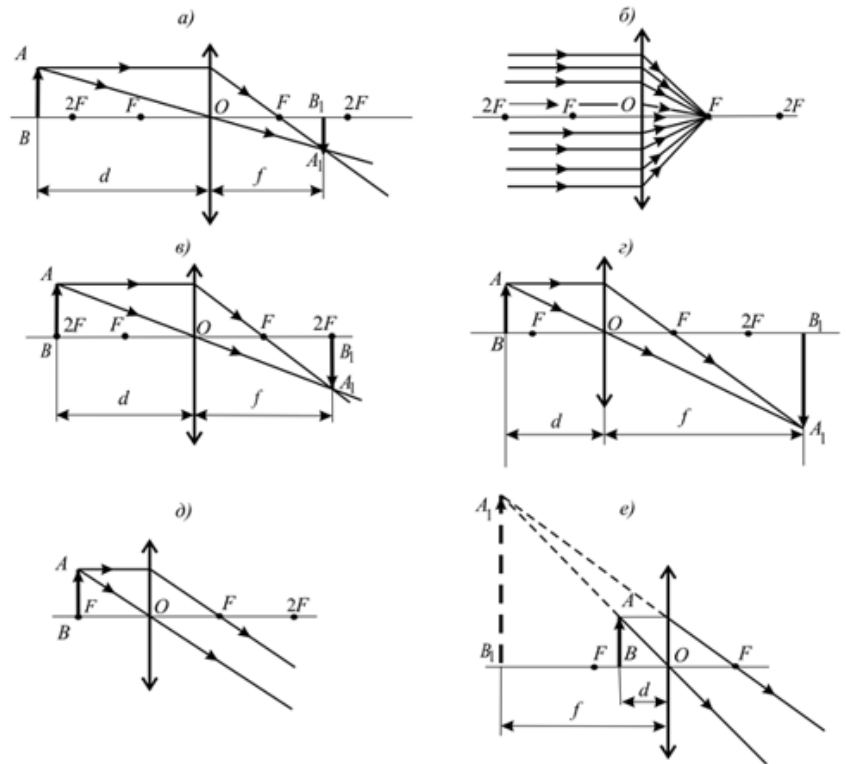


Рис. 24.6

Предмет і його зображення знаходяться по різні боки лінзи, а відстань  $f=2F$ . Тоді зображення предмета буде дійсним, оберненим і в натуральну величину.

Відстань  $d$  від предмета до лінзи є більшою від  $F$ , але меншою від  $2F$  (рис. 24.6,  $\varepsilon$ ).

Таке розташування предмета перед лінзою приводить до того, що предмет і його зображення знаходяться по різні боки лінзи, а відстань  $f$  буде більшою від  $2F$ . У цьому випадку зображення предмета буде дійсним, оберненим і збільшеним. Предмет знаходиться в головному фокусі лінзи, тобто  $d=f$  (рис. 24.6,  $\delta$ ). Такий випадок приводить до того, що промені від кожної точки предмета після заломлення поширюються паралельними пучками. Це значить, що зображення предмета повинно бути нескінченно великим і на великій відстані від лінзи, що практично рівносильне відсутності зображення.

Відстань від предмета до лінзи є меншою головної фокусної відстані  $F$  (рис. 24.6,  $e$ ). Зображення предмета буде уявним, прямим і збільшеним.

Побудова зображення предмета в розсіювальній лінзі, наведена на рис. 24.7. Розсіювальна лінза завжди дає уявне, зменшене і пряме зображення предмета.

Відстань  $f$  від зображення предмета до лінзи є завжди меншою, ніж відстань  $d$  від предмета до лінзи.

Лінійним збільшенням лінзи  $k$  називають відношення висоти (ширини) зображення  $A_1B_1$  предмета  $AB$  до висоти (ширини) самого предмета  $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ .

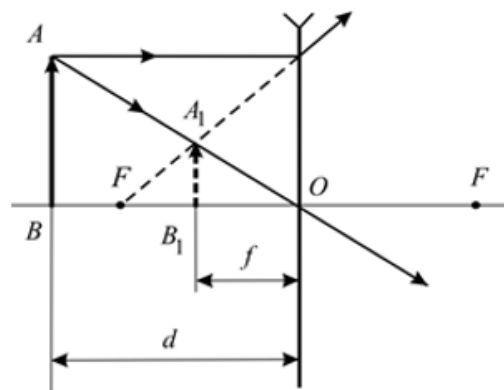


Рис. 24.7

## Тема 25. Хвильова оптика.

### 25.1 Інтерференція світла.

Для пояснення теплових явищ у фізиці використовується теорії світла - хвильова і корпускулярна. Згідно хвильової (електромагнітної) теорії світлове випромінювання – це електромагнітні хвилі, довжина яких лежить в межах від 0,38 до 0,77 мкм. Згідно з корпускулярної (фотонної) теорії світлове випромінювання – це потік особливих частинок – фотонів, які мають енергію, масу і імпульс.

Інтерференцією світла називається перерозподіл інтенсивності світла в просторі внаслідок накладання двох або кількох когерентних хвиль, в результаті чого в одних місцях виникають максимуми, а в інших мінімуми інтенсивності.

Хвилі називаються когерентними, якщо вони мають однакову частоту і в точках накладання – сталу різницю фаз.

Отже, якщо хвилі когерентні, то спостерігається самоузгоджений перебіг в часі і просторі декількох хвильових процесів. Цю умову задовольняють хвилі однієї строго визначеної частоти – монохроматичні хвилі.

З повсякденного досліду відомо, що при накладанні світла від двох незалежних джерел не вдається спостерігати явища інтерференції. Таким чином, хвилі, які випромінюються незалежними джерелами світла, некогерентні. Цей результат є наслідком того, що жодне джерело не випромінює точно монохроматичного світла.

Випромінювання світла відбувається в процесі переходу атомів із збудженого стану в нормальний. Процес випромінювання скінченний і триває дуже короткий час ( $\tau \approx 10^{-8} c$ ). Через деякий час атом знову може збудитися і почати випромінювати світлові хвилі, але уже з іншою початковою фазою. Оскільки різниця фаз між випромінюванням двох таких незалежних атомів змінюється при кожному новому акті випромінювання, то хвилі, що спонтанно

випромінюються атомами будь-якого джерела світла, некогерентні. Отже, хвилі, що випромінюються атомами, лише протягом інтервалу часу  $\tau \approx 10^{-8} \text{ с}$  мають приблизно сталу амплітуду і фазу коливань, тоді як за великий проміжок часу і амплітуда, і фази змінюються.

Переривчасте випромінювання світла атомами у вигляді окремих короткочасних імпульсів називається хвильовим цугом.

Кожний хвильовий цуг має обмежену довжину в просторі. Наприклад, довжина цугу хвиль, які поширюються у вакуумі вздовж осі ОХ, дорівнює  $\Delta x = c\tau = 3\text{ м}$ . Залежно від довжини світлової хвилі цуг вміщає від  $10^6$  до  $10^8$  довжин хвиль.

Хвильовий цуг не є строго монохроматичною хвилею і його можна представити у вигляді неперервної послідовності монохроматичних хвиль з

частотами від  $\omega - \frac{1}{2}\Delta\omega$  до  $\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega$ , де  $\omega$  – циклічна частота коливань джерела хвильового цугу. Величина  $\Delta\omega$  залежить від довжини  $\Delta x$  цугу і характеру зміни амплітуди хвилі на довжині цугу. Можна показати, що

$$\Delta\omega \geq \frac{1}{\tau} \quad \text{або} \quad \Delta x \Delta\omega \geq c.$$

Оскільки хвильове число  $k = \frac{\omega}{c}$ , то  $\Delta\omega = c\Delta k$  і має місце співвідношення  $\Delta x \Delta k \geq 1$ .

Отже, чим більший час  $\tau$  випромінювання цугу, тим він ближчий за своїми властивостями монохроматичної хвилі з циклічною частотою  $\omega$  і хвильовим числом  $k$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Delta\omega = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \Delta\omega = 0.$$

Для характеристики когерентних властивостей хвиль введемо поняття часу когерентності.

Часом когерентності немонахроматичної хвилі називається інтервал часу

$\tau_{\text{ког}}$ , протягом якого різниця фаз коливань, що відповідають хвилям з циклічними частотами  $\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega$  і  $\omega - \frac{1}{2}\Delta\omega$ , змінюється на  $2\pi$ :

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (25.1)$$

Циклічна частота  $\omega$  зв'язана з довжиною хвилі у вакуумі  $\lambda_0$  співвідношенням  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ . Звідси  $\Delta\omega = \frac{2\pi c \Delta\lambda_0}{\lambda_0^2}$  (знак мінус ми опускаємо). Тоді

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{\lambda_0^2}{c \Delta\lambda_0}. \quad (25.2)$$

Відстань  $l_{\text{ког}}$ , на яку поширюється хвиля з циклічною частотою  $\omega$  за час когерентності, називається довжиною когерентності або довжиною цугу, що відповідає некогерентній хвилі, яка розглядається:

$$l_{\text{ког}} = c \tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}. \quad (25.3)$$

Для видимого сонячного спектру  $\tau_{\text{ког}} \approx 10^{-14} \text{ с}$ ,  $l_{\text{ког}} \approx 10^{-6} \text{ м}$ .

Дві світлові хвилі при накладанні здатні інтерферувати, якщо коливання, які вони збуджують в певній точці, відповідають одному і тому хвильовому цугу випромінювання джерела, тобто якщо  $dn = \frac{\lambda_0}{4}$  або  $|r_2 - r_1| < l_{\text{ког}}$ ,

де  $r_2 - r_1$  – різниця ходу хвиль, що накладаються.

Для спостереження інтерференції світла при великих різницях ходу  $r_2 - r_1$  необхідно, щоб світло мало великий час когерентності, тобто щоб воно мало високий ступінь монохроматичності.

Когерентність коливань, які здійснюються в одній і тій самій точці простору, що визначається ступенем монохроматичності хвиль, називається часовою когерентністю.

Поряд з часовою когерентністю, що визначається часом когерентності, для

опису когерентних властивостей хвиль у площині, перпендикулярній до напрямку їх поширення, вводиться поняття просторової когерентності.

Когерентність коливань, що відбуваються в один і той же момент часу в різних точках площини, яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі, називається просторовою когерентністю.

Для отримання інтерференційних смуг від двох джерел світла недостатньо, щоб ці джерела склалися з попарно когерентних точкових джерел. Навіть у випадку строго монохроматичного світла необхідно, щоб розміри джерел не перевищували певної межі, що залежить від взаємного розміщення та відстані між ними, а також від положення екрана, який призначений для спостереження інтерференційних смуг.

Просторово-когерентними називаються два джерела, розміри і взаємне розміщення яких при необхідному ступені монохроматичності світла дозволяють спостерігати інтерференційні смуги.

Довжиною просторової когерентності або радіусом когерентності називається відстань між двома точками перпендикулярної до напрямку поширення хвилі поверхні, між якими випадкова зміна різниці фаз досягає значення рівного  $\pi$ . На відстані  $r_{\text{ког}}$  можна спостерігати явище інтерференції. Отже, просторова когерентність визначається радіусом когерентності.

Радіус когерентності

$$r_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda}{\varphi}, \quad (25.4)$$

де  $\lambda$  - довжина світлових хвиль,  $\varphi$  - кутовий розмір джерела.

Коливання в двох точках, які знаходяться на відстані, меншій від  $r_{\text{ког}}$ , будуть приблизно когерентними.

Розглянемо тепер інтерференцію світла.

Для отримання когерентних світлових хвиль застосовують метод розділення хвилі, що випромінюється одним джерелом, на дві частини, які після

проходження різних оптичних шляхів накладаються одна на одну і в результаті спостерігається інтерференційна картина.

Нехай розділення на дві когерентні хвилі відбувається в певній точці  $O$  (рис. 25.1). До точки  $M$ , в якій спостерігається

інтерференційна картина, одна хвиля в середовищі з показником заломлення  $n_1$ , пройшла шлях  $d_1$ , друга – в середовищі з показником заломлення  $n_2$  – шлях  $d_2$ .

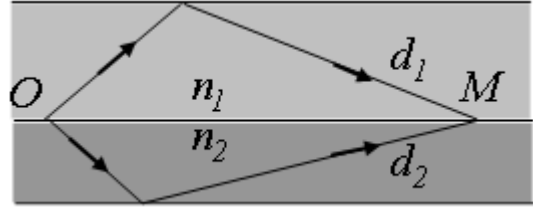


Рис. 25.1

Перша хвиля викличе в точці  $M$  гармонічні коливання

$$E_1 = E_{01} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{d_1}{v_1} \right) + \varphi_{01} \right], \quad (25.5)$$

а друга

$$E_2 = E_{02} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{d_2}{v_2} \right) + \varphi_{02} \right], \quad (25.6)$$

де  $v_1 = \frac{c}{n_1}$ ,  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  – фазова швидкість першої та другої хвиль.

Оскільки в точці  $M$  додаються два гармонічні коливання однакового періоду, що відбуваються в однаковому напрямку, то результуюче коливання буде також гармонічним з тим самим періодом і в тому самому напрямку, тобто

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (25.7)$$

Амплітуда  $E_0$  цього коливання дорівнює:

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \left[ \omega \left( \frac{d_2}{v_2} - \frac{d_1}{v_1} \right) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) \right], \quad (25.8)$$

а початкова фаза  $\varphi_0$  визначається виразом:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2}, \quad (25.9)$$

де  $\alpha_1 = -\omega \frac{d_1}{v_1} + \varphi_{01}$ ,  $\alpha_2 = -\omega \frac{d_2}{v_2} + \varphi_{02}$ .

Різниця фаз  $\delta$  двох когерентних хвиль від одного джерела:

$$\delta = \omega \left( \frac{d_2}{v_2} - \frac{d_1}{v_1} \right) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \frac{\omega}{c} (d_2 n_2 - d_1 n_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (25.10)$$

Оскільки  $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ , де  $\lambda_0$  – довжина хвилі у вакуумі, то

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta + (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (25.11)$$

Добуток геометричної довжини  $d$  шляху світлової хвилі на показник  $n$  заломлення цього середовища називається оптичною довжиною шляху  $L$ , а різниця оптичних довжин шляхів, що пройшли хвилі  $\Delta = L_2 - L_1$  – називається оптичною різницею ходу.

Оскільки інтенсивність хвилі пропорційна до квадрату її амплітуди, то результуюча інтенсивність в точці  $M$  визначається співвідношенням

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) \right]. \quad (25.12)$$

У випадку когерентних хвиль  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = const$  і для зручності припустимо, що  $\varphi_{02} = \varphi_{01}$ . В результаті

$$I = I_1 + I_2 + 2I_1 I_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta. \quad (25.13)$$

Якщо оптична різниця ходу дорівнює парному числу півхвиль у вакуумі:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots), \quad (25.14)$$

то  $\delta = 2m\pi$ , і коливання, що збуджуються в точці  $M$  обома хвилями,

відбуваються в однакових фазах. Отже,  $\cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = 1$  і результуюча інтенсивність – максимальна:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (E_{01} \neq E_{02}); \quad (25.15)$$

$$I = 4I_1 \quad (E_{01} = E_{02}). \quad (25.16)$$

Таким чином, максимум інтенсивності при накладанні двох когерентних хвиль буде у точках, для яких у різниці ходу променів укладається парне число півхвиль. Сукупність таких точок утворює інтерференційні лінії, порядок яких визначається числом  $m$ .

Якщо оптична різниця ходу:

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots), \quad (25.17)$$

то  $\delta = (2m+1)\pi$  і коливання, що збуджуються в точці  $M$  обома хвилями,

знаходяться у протифазі і  $\cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = -1$ . Результуюча інтенсивність при цьому буде мінімальна:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (E_{01} \neq E_{02}); \quad (25.18)$$

$$I = 4I_1 \quad (E_{01} = E_{02}). \quad (25.19)$$

Мінімум інтенсивності отримуємо в точках, для яких різниця ходу променів вміщає непарне число півхвиль.

Таким чином,

$$\Delta = 2m\frac{\lambda_0}{2} \quad (25.20)$$

– умова інтерференційного максимуму, а

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (25.21)$$

– умова інтерференційного мінімуму.

Визначимо геометричне місце точок максимальної (мінімальної) інтенсивності. Як для точок максимальної інтенсивності  $L_2 - L_1 = m\lambda_0$ , так і для точок мінімальної інтенсивності

$$L_2 - L_1 = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (25.22)$$

має місце  $L_2 - L_1 = const$ , що визначає рівняння гіпербол з фокусами  $S_1$  і  $S_2$ .

Кожному значенню інтенсивності відповідає поверхня гіперболоїда обертання.

Переріз таких поверхонь наведено на рис. 25.2, де суцільними лініями показано розміщення максимумів інтенсивності, штриховими – мінімумів інтенсивності.

Контрастність інтерференційної картини характеризують за допомогою параметра  $V$ , який виражається формулою

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (25.23)$$

де  $I_{max}$  і  $I_{min}$  – інтенсивність світлих і темних смуг. Якщо інтенсивність темної смуги дорівнює нулю, то  $V=1$ , тобто когерентність максимальна. Для рівномірно освітленого екрана ( $I_{max} = I_{min}$ ) контрастність дорівнює нулю.

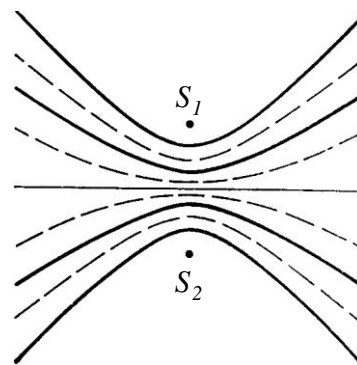


Рис. 25.2

Розглянемо дві когерентні світлові хвилі, що йдуть від джерел  $S_1$  і  $S_2$ , які мають вигляд паралельних тонких світних ниток або вузьких щілин (рис. 25.3), які розміщені на віддалі  $d$  одна від одної.

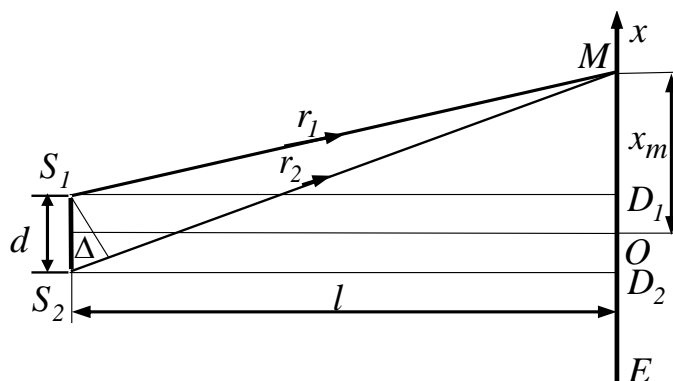


Рис. 25.3

Область, в якій ці хвилі перекриваються, називається полем інтерференції. У всій цій області спостерігається чергування місць з максимальною і мінімальною інтенсивністю світла.

Якщо в поле інтерференції помістити паралельно до площини, яка проходить через джерела  $S_1$  і  $S_2$ , екран, то на ньому буде видно інтерференційну картину, яка має вигляд світлих і темних смуг, які чергуються. Розрахуємо ширину цих смуг і відстань між ними. Позначимо координату інтерференційного максимуму чи мінімуму  $x_m$ . З трикутника  $S_2MD_2$  маємо:

$$r_2^2 = l^2 + \left(x_m + \frac{d}{2}\right)^2, \quad (25.24)$$

а з трикутника  $S_1MD_1$  –

$$r_1^2 = l^2 + \left(x_m - \frac{d}{2}\right)^2. \quad (25.25)$$

Звідси

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 2x_m d, \quad (25.26)$$

або 
$$\Delta = r_2 - r_1 = \frac{2x_m d}{r_1 + r_2}.$$

З умови  $l \gg d$  випливає, що  $r_1 + r_2 \approx 2l$ . Тому  $\Delta = \frac{x_m d}{l}$ , і  $x_m = \frac{l}{d} \Delta$ .

Положення  $m$ -го інтерференційного максимуму на екрані задовольняє умову  $\Delta = m\lambda_0$ . Тоді, максимуми інтенсивності будуть спостерігатися при

$$x_m^{max} = \frac{ml\lambda_0}{d} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (25.27)$$

Умова для  $m$ -го мінімуму має вигляд

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (25.28)$$

і координати мінімумів інтенсивності

$$x_m^{min} = \frac{(2m+1)l\lambda_0}{2d} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (25.29)$$

Шириною інтерференційної смуги називається відстань між двома сусідніми мінімумами інтенсивності, тобто

$$\Delta x = x_{m+1}^{min} - x_m^{min} = \frac{[2(m+1)+1]l\lambda_0}{2d} - \frac{(2m+1)l\lambda_0}{2d} = \frac{l\lambda_0}{d}. \quad (25.30)$$

Відстань між сусідніми інтерференційними максимумами називається відстанню між інтерференційними смугами, яка теж дорівнює  $\Delta x = \frac{l\lambda_0}{d}$ . З цієї формули випливає, що відстань  $\Delta x$  зростає при зменшенні  $d$  між джерелами  $S_1$

і  $S_2$ . Якщо відстань  $d$  досягає величини порядку  $l$ , то відстань між інтерференційними смугами буде порядку довжини світлової хвилі. При цьому спостерігати окремі смуги неможливо. Щоб інтерференційна картина була чіткою, необхідно додержання умови  $d \ll l$ . Ширина інтерференційних смуг залежить і від довжини хвилі  $\lambda_0$ .

За вимірними значеннями  $l$ ,  $d$  і  $\Delta x$  можна експериментально визначити довжину світлової хвилі.

Отже, інтерференційна картина, яка створюється на екрані двома когерентними джерелами світла, представляє собою чергування світлих та темних смуг, паралельних одна до одної. Головний максимум, що відповідає  $m=0$ , проходить через точку  $O$ , вниз і вгору від нього на рівних відстанях один від одного розміщуються максимуми першого ( $m = \pm 1$ ), другого ( $m = \pm 2$ ) порядків тощо.

Якщо використати біле світло, то інтерференційні максимуми для кожної довжини хвилі будуть зміщені один відносно одного і матимуть вигляд райдужних смуг, які будуть починатись фіолетовим і закінчуватись червоним кольором, якщо рахувати від точки  $O$  (рис. 25.3). Тільки для  $m=0$  максимуми для всіх довжин хвиль збігаються і в середині екрану буде спостерігатися біла смуга, по обидві сторони якої розмістяться спектрально забарвлені смуги максимумів першого, другого порядків і т. д.

Розглянемо умови, за яких у немонохроматичному світлі інтерференційна картина сприймається чітко. Для цього необхідно, щоб різноманітність довжин хвиль була обмежена і не перевищувала деякого інтервалу між  $\lambda_0$  і  $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ .

Умовою нерозрізнимості інтерференційної картини є збіг максимуму  $(m+1)$ -го порядку для довжини хвилі  $\lambda_0$  з максимумом  $m$ -го порядку для довжини хвилі  $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ , тобто  $x_{m+1}^{max}(\lambda_0) = x_m^{max}(\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$ .

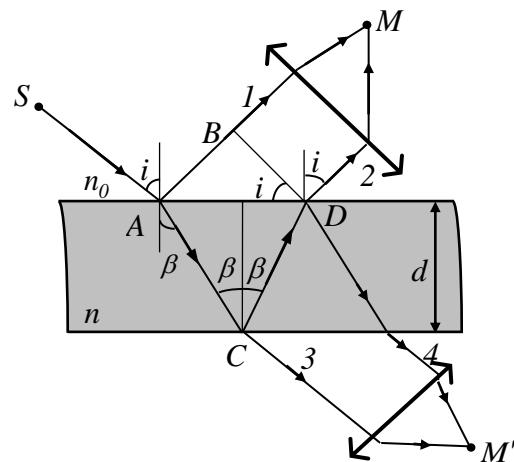
Використовуючи вираз  $x_m^{max} = m \frac{l}{d} \lambda_0$ , отримуємо  $(m+1) \frac{l}{d} \lambda_0 = m \frac{l}{d} (\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$ .

Звідси граничне значення інтервалу  $\Delta\lambda_{zp} = \frac{\lambda_0}{m}$ , тобто інтерференційну картину для немонохроматичного світла можна спостерігати, коли ширина

інтервалу довжин хвиль не перевищує граничного:  $\Delta\lambda_0 < \Delta\lambda_{zp} = \frac{\lambda_0}{m}$ .

Прикладом інтерференції світла, що спостерігається в природних умовах, може бути райдужне забарвлення мильних плівок, тонких плівок нафти або мінерального масла, які плавають на поверхні води, кольори мінливості на поверхні загартованих сталевих деталей, покритих найтоншим шаром оксидів. Усі ці явища зумовлені інтерференцією світла в тонких прозорих плівках, яка виникає внаслідок накладання когерентних хвиль, що відбиваються від верхньої та нижньої поверхонь плівки.

Нехай плоска монохроматична хвиля, поширюється у середовищі з показником заломлення  $n_0$ , (рис. 25.4), падає під кутом  $i$  на плоскопаралельну прозору плівку з показником заломлення  $n$  і товщиною  $d$ .



Падаюча хвиля частково відбивається від верхньої поверхні плівки та частково заломлюється. Напрямок

Рис. 25.4

поширення відбитої хвилі зображено променем  $AB$ , а заломленої – променем  $AC$ . Заломлена хвиля, досягнувши нижньої поверхні плівки, частково відбивається (промінь  $CD$ ), і частково заломлюється. Хвиля, що поширюється вздовж променя  $CD$ , на верхній поверхні плівки частково відбивається, і частково заломлюється, причому заломлена хвиля (промінь 2) накладається на

хвилю, що безпосередньо відбита від верхньої поверхні.

Промені 1 і 2 когерентні між собою, оскільки вони утворені поділом хвилі SA. Якщо на їх шляху поставити збірну лінзу, то вони зберуться в одній з точок M фокальної площини лінзи і дадуть інтерференційну картину, яка визначається оптичною різницею ходу  $\Delta$  між променями 1 і 2:

$$\Delta = (AC + CD)n - AB \pm \frac{\lambda_0}{2} = \bar{\Delta} \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (25.31)$$

Тут прийнято, що показник заломлення  $n_0 = 1$ . Доданок  $\pm \frac{\lambda_0}{2}$  зумовлений втратою півхвилі при відбиванні світла на межі поділу середовищ. Якщо  $n > n_0$ , то в точці A фаза коливань змінюється на протилежну, відбувається втрата півхвилі і доданок матиме знак „-“. У випадку  $n < n_0$  втрата півхвилі відбудеться в точці C і  $\frac{\lambda_0}{2}$  матиме знак „+”.

З рис. 25.4 видно, що  $AC = CD = \frac{d}{\cos \beta}$ ,  $AB = AD \sin i = 2d \operatorname{tg} \beta \sin i$ .

Оскільки  $n = \frac{\sin i}{\sin \beta}$  або  $\sin i = n \sin \beta$ , то  $AB = 2dn \operatorname{tg} \beta \sin \beta = 2dn \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}$ . Тоді:

$$\bar{\Delta} = \frac{2dn}{\cos \beta} - \frac{2dn}{\cos \beta} (1 - \cos^2 \beta) = 2dn \cos \beta = 2dn \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 2dn \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta}{n^2}} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

З урахуванням втрати півхвилі для оптичної різниці ходу отримаємо:

$$\Delta = \bar{\Delta} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (25.32)$$

В точці M буде максимум, якщо:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (25.33)$$

і мінімум, якщо:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2}; \quad (m=0, 1, 2 \dots) \quad (25.34)$$

Інтерференція спостерігається не лише у відбитому світлі, а й у світлі, що

проходить через плівку (рис. 25.4, промені 3 і 4). Оптична різниця ходу для прохідного світла відрізняється від  $\Delta$  для відбитого світла на  $\frac{\lambda_0}{2}$ , бо світло не відбивається від оптично густішого середовища. Отже, максимумам інтерференції у відбитому світлі відповідають мінімуми інтерференції в прохідному світлі і навпаки.

Інтерференція світла в плоскопаралельних пластинках визначається товщиною пластинки  $d$ , показником заломлення  $n$  середовища, довжиною  $\lambda_0$  падаючої світлової хвилі та кутом падіння  $i$ . Для даних  $\lambda_0$ ,  $d$  і  $n$  кожному куту  $i$  падіння променів відповідає своя інтерференційна смуга.

Інтерференційні смуги, які виникають внаслідок накладання хвиль, що падають на плоскопаралельну пластинку під однаковими кутами, називаються **смугами однакового нахилу**.

Промені  $I'$  і  $I''$ , відбившись від верхньої та нижньої граней пластинки, паралельні один до одного, оскільки пластинка плоскопаралельна (рис. 25.5).

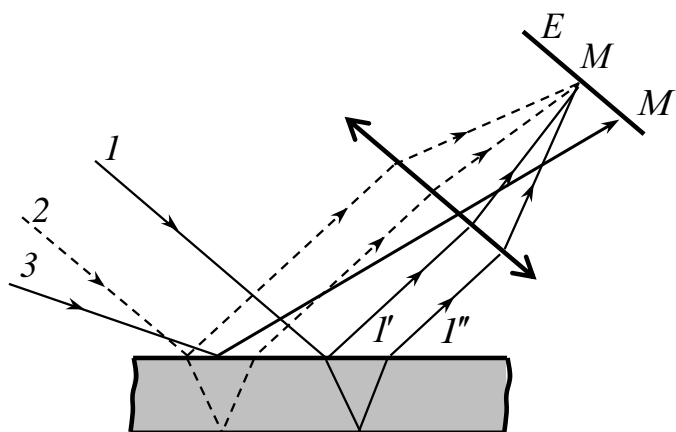


Рис. 25.5

Отже, інтерферуючі промені  $I'$  і  $I''$  перетинаються лише в нескінченності, тому кажуть, що смуги однакового нахилу локалізовані в нескінченності.

Для їх спостереження використовують збірну лінзу й екран, розміщений у фокальній площині лінзи. Паралельні промені  $I'$  і  $I''$  зберуться у фокусі лінзи. В ту саму точку прийдуть й інші промені, паралельні до променя  $I$ , (на рис. 25.5 – промінь 2) внаслідок чого збільшиться загальна інтенсивність.

Хвилі 3, які падають на пластину під іншим кутом, зберуться в іншій точці

$M'$  фокальної площини лінзи.

Оцінімо допустиму товщину пластинки, при освітленні якої природним світлом, можна спостерігати інтерференційну картину. Щоб світлові хвилі інтерферували, необхідно щоб виконувалась часова когерентність, а саме різниця ходу променів  $\Delta$  повинна бути меншою за довжину когерентності  $l_{\text{ког}}$ :

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda_0}{2} < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0} \quad \text{або} \quad d < \frac{\lambda_0 \left( \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} + \frac{1}{2} \right)}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Нехай довжина падаючого світла  $\lambda_0 \approx 0,5 \text{ мкм}$  і  $\Delta\lambda_0 \approx 0,01 \text{ мкм}$ . Саме з такою різницею хвиль людське око здатне розрізнити дві спектральні лінії. Тоді

$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} = 50$ . Нехтуючи величиною  $\frac{1}{2}$  в порівнянні з  $\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}$ , отримуємо

$$d < \frac{l}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}.$$

Для  $n=1,5$  та кута падіння  $i=0^\circ$  дістаємо  $d < \frac{\lambda_0^2}{3\Delta\lambda_0}$ . В результаті

$$d < \frac{0,5^2}{3 \cdot 0,01} \text{ мкм} \approx 8 \text{ мкм}.$$

Якщо ступінь монохроматичності світла збільшується ( $\Delta\lambda$  – досить мале), то допустима товщина пластинки буде зростати.

Нехай на клин, кут  $\alpha$  між боковими гранями якого малий, падає плоска хвиля, напрямок поширення якої збігається з променями 1 і 2 (рис. 25.6).

Напрямок поширення інтерферуючих хвиль, які виникають внаслідок відбивання світла від верхньої і нижньої поверхонь клина зображено відповідно променями  $1'$  і  $1''$  та  $2'$  і  $2''$ .

Якщо джерело хвиль розміщене далеко від поверхні і кут  $\alpha$  досить малий, то різниця ходу променів  $1'$  і  $1''$  визначається формулою

$$\Delta = 2d_m \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (25.35)$$

де  $d_m$  – середня товщина клина на ділянці АС. Нехай умова часової когерентності  $\Delta < l_{\text{ког}}$  виконується для всього клина. Оскільки значення  $i$ ,  $n$  та  $\lambda_0$  сталі, то однаковим значенням  $d$  відповідають однакові оптичні різниці ходу.

При певному положенні лінзи і клина промені  $I'$  і  $I''$ , оптична різниця ходу яких визначається  $d_m$ , перетинаються в деякій точці М на екрані. А всі промені, які падають на поверхню клина товщиною  $d_m$ , будуть в результаті інтерференції, утворювати інтерференційну смугу.

Інтерференційні смуги, що виникають внаслідок відбивання від ділянок клина з однаковою товщиною, називаються **смугами однакової товщини**.

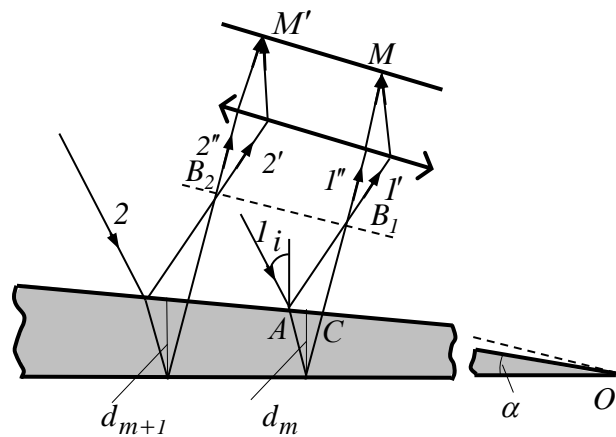


Рис. 25.6

Оскільки верхня та нижня грані клина не паралельні між собою, то промені  $I'$  і  $I''$  та  $2'$  і  $2''$  перетинаються поблизу поверхні клина. Лінія перетину всіх променів  $B_1B_2$  проходить через вершину клина О. Отже, смуги однакової товщини локалізовані поблизу поверхні клина.

Якщо світло падає на пластину нормально, то смуги однакової товщини локалізуються на верхній поверхні клина паралельно до ребра клина. Щоб визначити відстань  $\Delta l$  між двома сусідніми максимумами інтерференційних смуг у випадку монохроматичного світла з довжиною хвилі  $\lambda_0$ , запишемо умову двох сусідніх максимумів інтерференції, враховуючи, що кут падіння  $i = 0^\circ$  та оскільки кут  $\alpha$  дуже малий, то і кут заломлення  $\beta = 0^\circ$ :

$$2d_m n - \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2}, \quad 2d_{m+1} n - \frac{\lambda_0}{2} = 2(m+1) \frac{\lambda_0}{2}. \quad (25.36)$$

Віднімаючи від другого виразу перший, отримуємо  $2(d_{m+1} - d_m)n = \lambda_0$ .

Якщо відстані від ребра клина до інтерференційних смуг дорівнюють  $l_m$  і  $l_{m+1} = l_m + \Delta l$ , то  $d_m = l_m \sin \alpha$ , і  $d_{m+1} = (l_m + \Delta l) \sin \alpha$ .

Тому  $d_{m+1} - d_m = \Delta l \sin \alpha \approx \Delta l \alpha$ , де  $\alpha$  – малий кут між гранями клина. Тоді  $\Delta l = \frac{\lambda_0}{2\alpha n}$ .

Окремим випадком смуг однакої товщини є *кільця Ньютона*, що виникають у повітряному шарі між плоскоопуклою лінзою з великим радіусом кривини  $R$  і плоскою скляною пластинкою, які дотикаються в точці  $M$  (рис. 25.7). При цьому товщина повітряного шару поступово зростає від точки  $M$  до краю пластини.

Паралельний пучок світла падає на плоску поверхню  $BC$  лінзи. Після відбивання від опуклої поверхні лінзи і дотичної до неї поверхні пластини світло поширюється у зворотному напрямку паралельним пучком.

При накладанні відбитих хвиль виникають інтерференційні смуги однакої товщини, що мають при нормальному падінні світла вигляд концентричних кілець (рис. 25.7). В центрі міститься темний круг, тому що в місці дотику лінзи з поверхнею пластинки залишається

дуже тонкий повітряний шар товщиною набагато меншою від довжини хвилі. Різниця ходу між променями, що виникають в цій точці, визначається лише

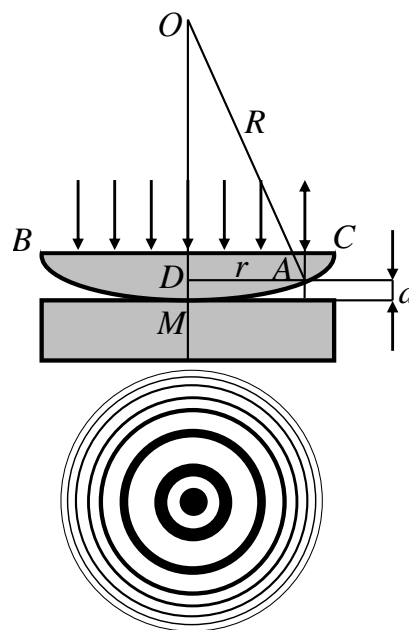


Рис. 25.7

втратою півхвилі при відбиванні від поверхні пластини, тобто  $\Delta = \frac{\lambda_0}{2}$  і тут спостерігається інтерференційний мінімум нульового порядку.

Оскільки результат накладання двох відбитих хвиль залежить від товщини повітряного шару, то для всіх точок цього шару, що знаходяться на однаковій відстані  $r$  від точки  $M$ , тобто тих, що утворюють коло, буде однакова умова або для інтерференційного максимуму або мінімуму. Тому виникає інтерференційна картина у вигляді концентричних кілець.

Отже, темний круг буде оточений системою світлих кілець, що чергуються, ширина й інтенсивність яких поступово зменшуються з віддаленням від центрального темного круга. У прохідному світлі буде доповняльна картина – центральне світле коло, наступне кільце темне і т. д.

Нехай  $d$  – товщина повітряного шару на відстані  $r$  від точки  $M$ . Оптична різниця ходу  $\Delta$  між променем, який відбився від межі поділу повітряний шар – скляна пластинка, і променем, який зазнав часткового відбивання на межі поділу опукла поверхня лінзи – повітряний шар, дорівнює

$$\Delta = 2dn \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (25.37)$$

де доданок  $\pm \frac{\lambda_0}{2}$  враховує втрату півхвилі при відбиванні світла. Якщо лінза і пластинка виготовлені зі скла, показник заломлення якого  $n$ , а шар між ними повітряний ( $n_0 = 1$ ), то  $\frac{\lambda_0}{2}$  буде зі знаком „+”.

З трикутника  $OAD$  маємо

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2, \quad R^2 = R^2 - 2Rd + d^2 + r^2. \quad (25.38)$$

При  $d \ll R$  отримуємо

$$r^2 = 2Rd \quad \text{і} \quad d = \frac{r^2}{2R}. \quad (25.39)$$

Тут знехтувано членами другого порядку відносно  $d$ . Тоді оптична різниця ходу променів

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} \quad (25.40)$$

Використавши умову максимуму, знайдемо радіус  $m$ -го кільця:

$$\frac{(r_m^{max})^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2},$$

$$r_m^{max} = \sqrt{(2m-1) \frac{R\lambda_0}{2}}; \quad (m=1, 2, 3, \dots). \quad (25.41)$$

Радіус  $m$ -го темного кільця визначається з умови:

$$\frac{(r_m^{min})^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2},$$

$$r_m^{min} = \sqrt{m\lambda_0 R}; \quad (m=0, 1, 2, \dots). \quad (25.42)$$

Очевидно, що в прохідному світлі

$$r_m^{max} = \sqrt{m\lambda_0 R}; \quad (m=1, 2, 3, \dots), \quad (25.43)$$

$$r_m^{min} = \sqrt{(2m-1) \frac{\lambda_0 R}{2}}; \quad (m=1, 2, 3, \dots). \quad (25.44)$$

За формулами для радіусів кілець Ньютона можна розрахувати радіус плоскоопуклої лінзи.

При розрахунках радіусів кілець Ньютона знехтувано впливом світлових хвиль, що відбиваються від верхньої поверхні лінзи ( $BC$ ) і нижньої поверхні пластини. Але оскільки товщина центральної частини лінзи і пластини на багато порядків більші за товщину повітряного шару поблизу точки  $M$ , то різниця ходу між хвилями, які відбиваються від верхньої і нижньої поверхонь лінзи і пластини, такі великі, що інтерференція цих хвиль практично не спостерігається, тому що максимуми будуть розміщені настільки близько, що розділити їх неможливо.

Як для смуг однакового нахилу, так і для смуг однакової товщини положення максимумів залежить від довжини хвилі  $\lambda_0$ . Тому систему світлих і темних смуг отримують лише при освітленні монохроматичним світлом. При спостереженні

в білому світлі отримують сукупність зміщених одна відносно одної смуг, утворених променями різних довжин хвиль, й інтерференційна картина набуває райдужного забарвлення.

Явище інтерференції світла використовують для створення різних оптичних приладів, за допомогою яких можна виконувати такі операції:

- вимірювати довжини світлової хвилі з великою точністю;
- вимірювати лінійні розміри тіл і коефіцієнти лінійного розширення тіл;
- визначити якість і точність шліфування різних поверхонь;
- вимірювати показники заломлення газоподібних, рідких і твердих тіл;
- вимірювати кутові розміри небесних тіл;
- вивчати і контролювати однорідність речовин;
- вивчати структури спектрів різних речовин;
- досліджувати ударні хвилі у газах.

За допомогою явища інтерференції можна виготовляти інтерференційні світлофільтри і вдається значно зменшити відбивання світла від оптичних систем.

Розглянемо більш детально деякі практичні застосування явища інтерференції.

О. Смакула розробив спосіб просвітлення оптики для зменшення втрат світла, зумовлених його відбиванням на межі поділу двох середовищ, оскільки проходження світла через кожну заломну поверхню лінзи супроводжується відбиттям  $\approx 4\%$  падаючого потоку світла. У складних об'єктивах число відбивань велике і сумарна втрата світлового потоку досить значна, що приводить до зменшення світлосили оптичних приладів. Крім того, відбивання від поверхні лінз приводить до виникнення бліків.

Щоб елементи оптичних систем зробити просвітленими, їх поверхні покривають прозорими плівками речовин, показник заломлення яких менший, ніж скла.

При відбиванні світла від межі поділу повітря – плівка і плівка-скло виникає інтерференція когерентних хвиль  $1'$  і  $2'$  (рис. 25.8). Товщину плівки  $d$  і показники заломлення скла  $n_c$  і плівки  $n$  можна підібрати так, щоб хвилі, які інтерферують, гасили одна одну.

Для цього їх амплітуди повинні бути рівні, а оптична різниця ходу  $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$ .

Розрахунки показують, що амплітуди відбитих хвиль рівні, якщо  $n = \sqrt{n_c}$ .

Речовину плівки підбирають так, щоб виконувалась умова  $n_c > n > n_0$ ,

де  $n_0$  - показник заломлення

повітря. Втрата півхвилі в цьому випадку відбувається на обох поверхнях.

Умова мінімуму при куті падіння  $i=0$  має такий вигляд

$$2dn = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (25.45)$$

Для мінімальної товщини плівки  $m=0$ , і тоді

$$dn = \frac{\lambda_0}{4} \quad (25.46)$$

Ця формула показує, що неможливо добитися одночасного гасіння для всіх довжин хвиль видимого спектра. Тому ця умова повинна виконуватись для довжини хвиль  $\lambda_0 = 0,555 \text{ мкм}$ , яка найбільше сприймається людським оком.

Отже, якщо  $n = \sqrt{n_c}$  і оптична товщина плівки дорівнює  $\frac{\lambda_0}{4}$ , то в результаті інтерференції спостерігається гасіння відбитих хвиль.

Явище інтерференції використовують у ряді дуже точних вимірювальних приладів, які називають інтерферометрами.

Розглянемо схему інтерферометра Жамена, який застосовують для точних

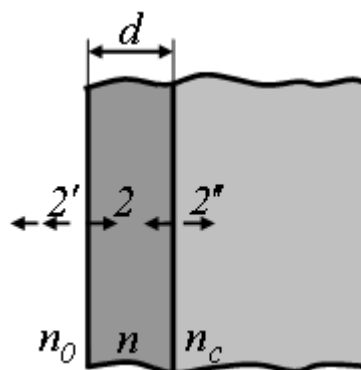


Рис. 25.8

вимірювань показників заломлення газів і їх залежності від температури, тиску і вологості (рис. 25.9).

Дві зовсім однакові скляні товсті плоскопаралельні пластини  $P_1$  та  $P_2$  установлені майже паралельно одна до одної. Поверхні  $AB$  і  $CD$  – дзеркальні. Промені світла довжиною  $\lambda_0$  від монохроматичного джерела  $S$  падають на поверхню пластини

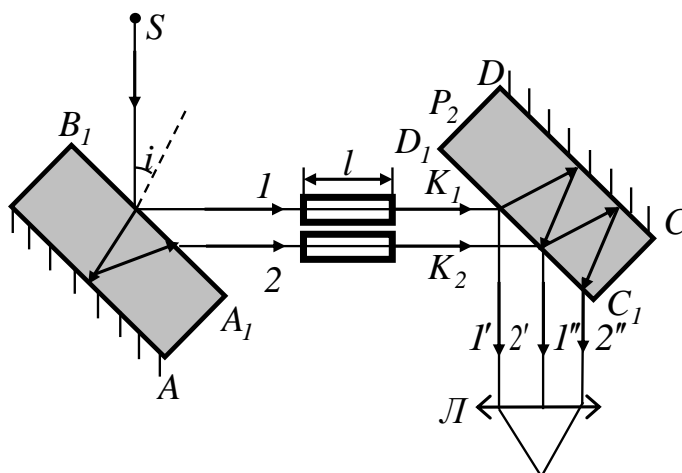


Рис. 25.9

$A$  під різними кутами  $i$ , близькими до  $45^\circ$ . На рисунку показано лише один падаючий промінь. Внаслідок його відбивання від поверхонь  $AB$  і  $A_1B_1$  пластини  $P_2$  з неї виходять дві когерентні паралельні хвилі  $1$  і  $2$ . Пройшовши крізь дві цілком однакові закриті скляні кювети  $K_1$  і  $K_2$  довжиною  $l$ , ці хвилі відбиваються поверхнями  $CD$  і  $C_1D_1$  пластини  $P_2$ . В результаті виникають чотири промені  $1'$  і  $1''$ ,  $2'$  і  $2''$  з яких промені  $1''$  і  $2'$  накладаються один на одного і інтерферують.

Інтерференційні смуги однакового нахилу розглядають за допомогою окуляра.

Якщо одну з кювет  $K_1$  заповнено газом з відомим показником заломлення  $n$ , а другу – газом з показником заломлення  $n_x$ , який треба виміряти, то оптична різниця ходу між інтерферуючими хвилями  $\Delta = (n_x - n)l$ . Якщо ця різниця ходу

$\Delta = 2m \frac{\lambda_0}{2}$  то вся інтерференційна картина зміститься на  $m$  смуг. Визначивши  $m$ ,

можна знайти показник заломлення  $n_x$ :  $n_x = n + \frac{m\lambda_0}{l}$ .

Внаслідок великої чутливості інтерферометра, його використовують для вимірювання показників заломлення газів, що мало відрізняються від одиниці.

Розглянемо спрощену схему інтерферометра Майкельсона (рис. 25.10).

Монохроматичне світло від джерела  $S$  падає під кутом  $45^\circ$  на плоскопаралельну пластинку  $P_1$ . Сторона пластинки  $AB$ , яка посріблена і напівпрозора, розділяє промінь на дві частини: промінь  $1$ , який відбивається від посрібленого шару і промінь  $2$ , що проходить крізь нього. Промінь  $1$  відбивається від дзеркала  $M_1$  і повертається

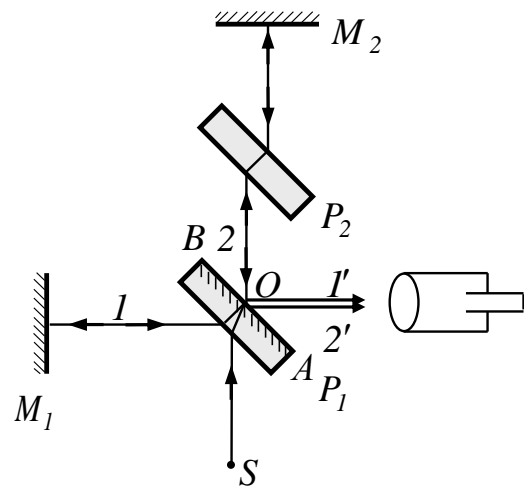


Рис. 25.10

назад, знову проходить через пластинку  $P_1$  ( $1'$ ). Промінь  $2$  поширюється до дзеркала  $M_2$ , відбивається від нього, повертається назад і відбивається від пластинки  $P_1$  ( $2'$ ). Оскільки промінь  $1$  проходить пластину  $P_1$  двічі, то для компенсації різниці ходу, яка виникає на шляху другого променя, ставиться пластинка  $P_2$ , яку називають компенсатором.

Дзеркала  $M_1$  і  $M_2$  розміщують перпендикулярно одне до одного. Одне з них може переміщатися за допомогою мікрометричних гвинтів паралельно само до себе.

Хвилі  $1'$  і  $2'$  - когерентні; отже, за допомогою зорової труби буде спостерігатися інтерференційна картина. Оптична різниця хвиль  $1'$  і  $2'$   $\Delta = 2n_0(l_1 - l_2)$ , де  $n_0$  - абсолютний показник заломлення повітря, а  $l_1$  і  $l_2$  - відстані від точки  $O$  до дзеркал  $M_1$  і  $M_2$ .

Якщо  $l_1 = l_2$ , то буде інтерференційний максимум. Переміщення одного з

дзеркал на відстань  $\frac{\lambda_0}{4}$  приводить до виникнення інтерференційного мінімуму. Отже, за зміною інтерференційної картини можна зробити висновки про малі переміщення одного з дзеркал і тим самим використати інтерферометр Майкельсона для точних вимірювань довжини світлової хвилі, довжини тіла, зміни довжини тіла при зміні температури Похибки при вимірюванні довжини  $\approx 10^{-8}$  мм.

Інтерферометр Майкельсона можна використати для знаходження незначних змін показника заломлення прозорих тіл залежно від тиску, температури, домішок. Такий інтерферометр називається інтерференційним рефрактометром.

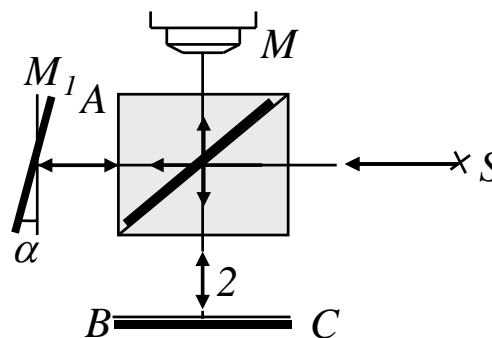


Рис. 25.11

В.П. Лінник використав принцип дії інтерферометра Майкельсона для створення мікроінтерферометра – високочутливого приладу, який використовується для контролю чистоти обробки поверхонь металевих виробів. Світло від джерела S падає на скляний кубик A (рис. 25.11), який складається з двох половин, склеєних по діагональній площині.

Одну із спостережуваних поверхонь напівпосріблено так, що вона частково пропускає, а частково відбиває промені, які падають на неї. Промінь 1, який пройшов через кубик, попадає на дзеркало  $M_1$ , відбивається і, пройшовши знову через кубик, йде в мікроскоп M. Промінь 2 відбивається від напівпрозорої площини, падає на поверхню BC, яка досліджується, відбивається від неї і проходить через кубик в мікроскоп. Дзеркало  $M_1$  нахилено під невеликим кутом  $\alpha$ . Завдяки цьому при ідеальній гладкій поверхні BC в полі зору

мікроскопа видно інтерференційні смуги однакової товщини повітряного проміжку між кубиком і дзеркалом. У тих місцях поверхні ВС, де є виступи або заглибини, інтерференційні смуги викривлятимуться. За допомогою цього приладу можна виявити штрихи на поверхні деталі, глибина яких дорівнює  $(2 \div 3)10^{-7}$  мм.

## 25.2 Дифракція світла.

**Дифракцією** називається сукупність явищ, що спостерігаються при поширенні світла в середовищі з різними неоднорідностями (поблизу границь непрозорих або прозорих тіл, через малі отвори) і які пов'язані із зміною напрямку поширення світлових хвиль (порівняно з напрямком, передбаченим геометричною оптикою).

Дифракція, зокрема, приводить до огинання світловими хвилями перешкод і проникнення світла в область геометричної тіні.

Між інтерференцією і дифракцією немає суттєвої фізичної відмінності. **Інтерференція хвиль** – це перерозподіл інтенсивності, який виникає в результаті суперпозиції хвиль, що збуджуються скінченим джерелом когерентних джерел. Перерозподіл інтенсивності, який виникає внаслідок суперпозиції хвиль, що збуджуються когерентними джерелами, які розміщені неперервно, називається **дифракцією хвиль**.

Явище дифракції пояснюється за допомогою **принципу Гюйгенса**: *кожна точка, до якої доходить хвиля, служить центром вторинних хвиль, а обвідна*

*цих хвиль дає положення хвильового фронту в наступний момент часу.*

Як приклад застосування принципу Гюйгенса розглянемо падіння плоскої хвилі на перешкоду з

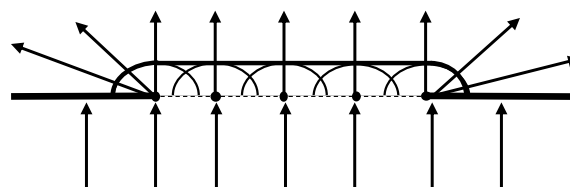


Рис. 25.12

отвором (рис. 25.12).

Коли хвильовий фронт доходить до перешкоди, то кожна точка отвору стає джерелом вторинних хвиль, а обвідна цих хвиль задає фронт хвилі, що пройшла через отвір. Цей фронт плоский лише в середній частині, а біля границі отвору відбувається загинання хвильового фронту, тобто хвиля проникає в область геометричної тіні, огинаючи краї перешкоди.

Принцип Гюйгенса – суто геометричний спосіб побудови хвильових поверхонь – розв’язує лише задачу про напрямок поширення хвильового фронту, але не зачіпає, по суті, питання про амплітуду, а отже, і про інтенсивність хвиль, що поширюються в різних напрямках. Френель вклав у принцип Гюйгенса фізичний зміст, доповнивши його ідеєю інтерференції вторинних хвиль.

За допомогою принципу Гюйгенса-Френеля можна обґрунтувати з хвильових властивостей світла **закон прямолінійного поширення світла в однорідному середовищі**. Френель розв’язав цю задачу, розглянувши взаємну інтерференцію вторинних хвиль, і застосував прийом, який отримав назву **методу зон Френеля**.

Знайдемо в довільній точці  $M$  амплітуду світлової хвилі, що поширюється в однорідному середовищі від точкового джерела  $S_0$ .

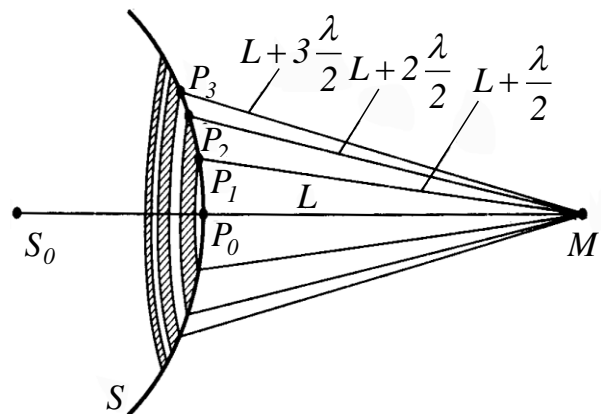


Рис. 25.13

Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля замінимо дію джерела  $S_0$  дією уявних джерел, які розміщені на допоміжній поверхні  $S$ , що є однією з хвильових поверхонь хвилі, яка поширюється від джерела  $S_0$  (рис. 25.13).

Ця допоміжна поверхня є поверхнею сфери з центром в  $S_0$ . Френель розбив хвильову поверхню  $S$  на кільцеві зони такого розміру, щоб відстані від

країв зони до  $M$  відрізнялись на  $\frac{\lambda}{2}$ , тобто

$$P_1M - P_0M = P_2M - P_1M = P_3M - P_2M = \dots = \frac{\lambda}{2}. \quad (25.47)$$

Подібне розбивання хвильової поверхні  $S$  на зони можна виконати, провівши з точки  $M$  концентричні сфери радіусами

$$L + \frac{\lambda}{2}; \quad L + 2\frac{\lambda}{2}; \quad L + 3\frac{\lambda}{2}; \quad \dots \quad L + m\frac{\lambda}{2}. \quad (25.48)$$

Точки сфери  $S$ , що лежать від точки  $M$  на відстанях  $L + \frac{\lambda}{2}$ ;  $L + 2\frac{\lambda}{2}$ ;  $L + 3\frac{\lambda}{2}$  і т.д. утворюють межі 1-ї, 2-ї, 3-ї і т.д. зон Френеля.

Оскільки коливання від сусідніх зон проходять до точки  $M$  відстані, які відрізняються на  $\frac{\lambda}{2}$ , то в точку  $M$  вони надходять з протилежними фазами і при накладанні ці коливання будуть взаємно ослаблюватися. Тому амплітуда результуючого коливання в точці  $M$

$$E_{0M} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots, \pm E_{0m}, \quad (25.49)$$

де  $E_{01}, E_{02}, \dots, E_{0m}$  - амплітуди коливань, що збуджуються 1-ю, 2-ю, ...,  $m$ -ю зонами. В цей вираз всі амплітуди коливань від непарних зон входять зі знаком „+”, а від парних зон - зі знаком „-”.

Величина  $E_{0m}$  залежить

від площі  $\sigma_m$   $m$ -ї зони і кута  $\varphi_m$  між зовнішньою нормаллю до поверхні зони в якій-небудь її точці і прямою, яка напрямлена з цієї точки в точку  $M$ . На рис. 25.14 точки  $B$  і  $B_1$  відповідають зовнішній границі  $m$ -ї зони;  $BC = r_m$  - радіус зовнішньої границі  $m$ -ї зони,  $CO = h_m$  - висота кульового сегмента  $BOB_1$ .

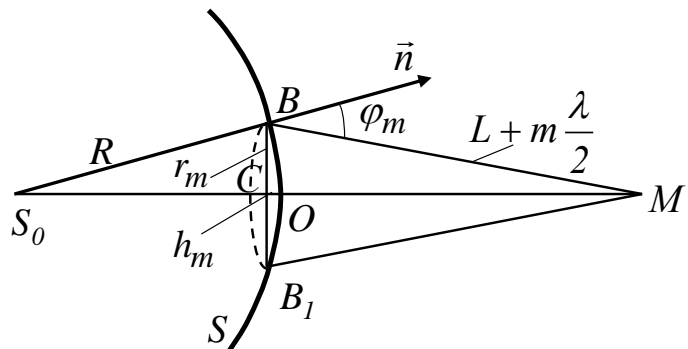


Рис. 25.14

З трикутників  $S_0BC$  і  $MBC$  видно, що  $r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2 = \left(L + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 - (L + h_m)^2$ .

Звідси

$$R^2 - R^2 + 2Rh_m - h_m^2 = L^2 + 2L\frac{m\lambda}{2} + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2 - L^2 - 2Lh_m - h_m^2. \quad (25.50)$$

Тоді

$$2(R + L)h_m = m\lambda L + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2. \quad (25.51)$$

Оскільки  $\lambda \ll L$ , то при не дуже великих  $m$  доданком  $\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2$  можна знехтувати

і

$$h_m = \frac{m\lambda L}{2(R + L)}. \quad (25.52)$$

Бічна поверхня кульового сегмента  $BOB_1$ , яка є сумою площ усіх  $m$  зон, починаючи з першої, дорівнює

$$S_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m = 2\pi R h_m = \frac{\pi RL\lambda}{R + L} m, \quad (25.53)$$

а площа  $m$ -ї зони Френеля

$$\sigma_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi RL\lambda}{R + L} m - \frac{\pi RL\lambda}{R + L} (m-1) = \frac{\pi RL\lambda}{R + L}. \quad (25.54)$$

Цей вираз не залежить від  $m$ , отже, при не дуже великих  $m$  площі зон Френеля однакові. У такий спосіб побудова зон Френеля розбиває поверхню сферичної хвилі на рівні за площею зони.

Із збільшенням номера зони  $m$  зростають кут  $\varphi_m$  і відстань від зони до точки  $M$ . Згідно із принципом Гюйгенса-Френеля це приводить до монотонного зменшення інтенсивності випромінювання в напрямку точки  $M$ . Тому  $E_{01} > E_{02} > E_{03} > E_{04} > \dots$ .

Загальне число  $N$  зон Френеля, які вміщуються на частині сфери, яка повернена до точки  $M$ , тому можна вважати, що в межах не дуже великих змін  $m$  залежність  $E_{0m}$  від  $m$  є лінійною, і амплітуда коливань, яка викликана якою-

небудь  $m$ -ю зоною, дорівнює півсумі амплітуд коливань, що викликані  $m-1$ -ю і  $m+1$ -ю зонами. Тобто  $E_{0m} = \frac{1}{2}(E_{0m-1} + E_{0m+1})$ .

Тоді амплітуда результуючого коливання в точці  $M$  матиме такий вигляд:

$$E_{0M} = \frac{E_{01}}{2} + \left( \frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \left( \frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots = \frac{E_{01}}{2}, \quad (25.55)$$

оскільки усі вирази, що стоять у дужках, дорівнюють нулю. Отже, амплітуда коливань, що створюється в довільній точці  $M$  сферичною хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди коливань, що створюється однією центральною зоною. Дія всієї хвильової поверхні на точку  $M$  зводиться до дії її малої ділянки, меншої, ніж центральна зона.

Якщо у виразі  $r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2$  покладемо, що висота сегмента  $h_m \ll R$  (при не дуже великих  $m$ ), тоді  $r_m^2 = 2Rh_m$ . Радіус зовнішньої границі  $m$ -ї зони Френеля

$$r_m = \sqrt{2Rh_m} = \sqrt{\frac{m\lambda RL}{R+L}}. \quad (25.56)$$

При  $R=L=0,1\text{ м}$  і  $\lambda=0,5\text{ мкм}$   $r_1=0,16\text{ мм}$ . Отже, поширення світла від  $S_0$  до  $M$  відбувається так, немовби світловий потік поширюється всередині дуже вузького каналу вздовж  $S_0M$ , тобто **прямолінійно**. У такий спосіб хвильовий принцип Гюйгенса-Френеля дозволяє пояснити прямолінійне поширення світла в однорідному середовищі.

Виразимо кількість зон Френеля  $m$  через радіус зовнішньої границі:

$$m = \frac{r_m}{\lambda} \frac{r_m(R+L)}{RL} = \frac{r_m^2}{\lambda} \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{R} \right). \quad (25.57)$$

Кількість зон  $m$  симетричне відносно  $L$  і  $R$ . Це означає, що точкове джерело викликає в точці  $M$  таку дію, яку викликало б у точці  $S_0$ , якщо його розмістити у точці  $M$ .

Інтенсивність світла в точці  $M$  можна значно збільшити, якщо закрити

всі парні або непарні зони Френеля. Тоді результуюча амплітуда коливань відповідно дорівнюватиме:  $E_{0M} = E_{01} + E_{03} + E_{05} + \dots$  або  $E_{0M} = E_{02} + E_{04} + E_{06} + \dots$ .

Екран, який перекриває всі парні або непарні зони Френеля, називається **зонною пластинкою**. Пластинка має складатися з прозорих або непрозорих кілець, радіуси яких дорівнюють  $r_m$ . Радіуси прозорих кілець підраховують для  $m=0, 2, 4, \dots$ , непрозорих – для  $m=1, 3, 5, \dots$ .

**Дифракція Френеля** – це дифракція сферичних світлових хвиль, а дифракційна картина спостерігається на скінченій віддалі від перешкоди, що викликала дифракцію.

Нехай сферична хвиля, що поширюється з точкового джерела  $S_0$ , зустрічає на своєму шляху екран з круглим отвором (рис. 25.15).

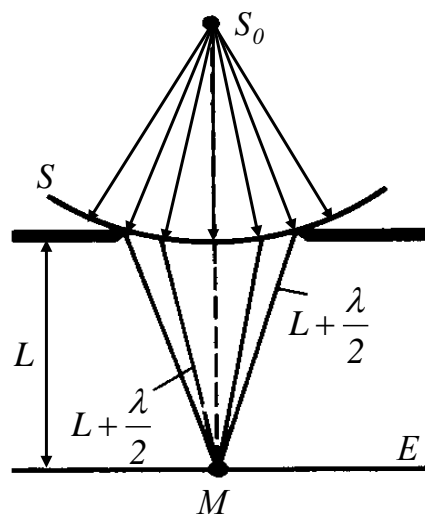


Рис. 25.15

Дифракційну картину спостерігаємо на екрані  $E$  в

точці  $M$ , що лежить на лінії, яка з'єднує  $S_0$  з центром отвору. Екран  $E$  паралельний до площини отвору і знаходиться від нього на відстані  $L$ . Побудуємо на відкритій частині фронту хвилі зони Френеля, що відповідають точці  $M$ . Вигляд дифракційної картини залежить від кількості зон Френеля, які укладаються в отворі.

Якщо в отворі укладається  $t$  зон Френеля, то згідно з формулами

$$E_{0M} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots, \pm E_{0t}, \text{ і } E_{0t} = \frac{1}{2}(E_{0t-1} + E_{0t+1}) \quad (25.58)$$

амплітуда  $E_{0M}$  результуючих коливань у точці  $M$  залежатиме від парності або непарності  $t$ .

Якщо кількість  $t$  зон Френеля непарна, то

$$E_{0M} = \frac{1}{2}E_{01} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2}\right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2}\right) + \dots + \left(\frac{E_{0m-2}}{2} - E_{0m-1} + \frac{E_{0m}}{2}\right) + \frac{1}{2}E_{0m} = \frac{E_{01}}{2} + \frac{E_{0m}}{2}. \quad (25.59)$$

Якщо в отворі укладається парна кількість  $m$  зон, то

$$E_{0M} = \frac{1}{2}E_{01} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2}\right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2}\right) + \dots + \left(\frac{E_{0m-2}}{2} - E_{0m-1} + \frac{E_{0m}}{2}\right) + \frac{1}{2}E_{0m-1} - E_{0m} = \frac{E_{01}}{2} + \frac{E_{0m-1}}{2} - E_{0m}. \quad (25.60)$$

Отже, коли отвір відкриває непарну кількість зон Френеля, то амплітуда в точці  $M$  буде більша, ніж при вільному поширенні хвилі і у точці  $M$  буде інтерференційний максимум. Якщо  $m$  – парне, то у точці  $M$  – інтерференційний мінімум. Амплітуди коливань від двох сусідніх зон практично однакові. Тому  $\frac{1}{2}E_{0m-1} - E_{0m} = -\frac{1}{2}E_{0m}$ . В результаті  $E_{0M} = \frac{E_{0m}}{2} \pm \frac{E_{0m}}{2}$ , де знак „+” стосується непарної, а знак „-” парної кількості зон Френеля.

Якщо в отворі укладається одна зона Френеля, то в точці  $M$  амплітуда  $E_{0M} = E_{01}$ , тобто вдвоє більша, ніж за відсутності непрозорого екрану з отвором. Якщо в отворі укладається дві зони Френеля, то їх дія в точці  $M$  практично компенсована через інтерференцію.

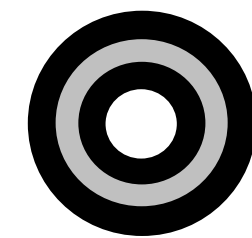
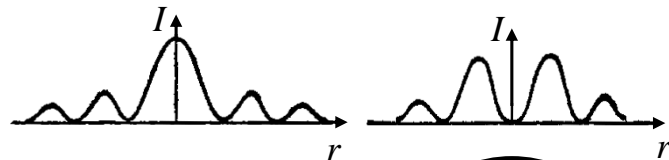


Рис. 25.16

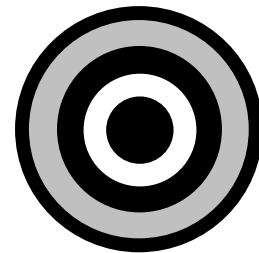


Рис. 25.17

Таким чином, дифракційна

картина від круглого отвору поблизу точки  $M$  матиме вигляд темних і світлих кілець з центрами в точці  $M$  (якщо  $m$  – непарне, то в центрі буде світлий круг (рис. 25.16), коли  $m$  – парне – темний (рис. 25.17), причому інтенсивність  $I = A^2$

максимумів зменшується з відстанню від центра картини.

При незмінному положенні джерела світла кількість зон  $m$  залежить від діаметра отвору і відстані  $L$ . При зміні діаметра отвору в отворі змінюватиметься і кількість зон Френеля, що вміщуються на відкритій ділянці хвильового фронту. Їх кількість буде змінюватись з парної на непарну і навпаки. Внаслідок цього інтенсивність світла в точці  $M$  періодично то зменшуватиметься, то збільшуватиметься. Така зміна інтенсивності також спостерігається, якщо екран  $E$  переміщати вздовж лінії  $S_0M$ .

У випадку, коли діаметр отвору великий, так що  $E_{0m} \ll E_{01}$ , то ніякої дифракційної картини на екрані не буде спостерігатись – світло в цьому випадку поширюється прямолінійно.

Якщо отвір освітлюється не монохроматичним, а білим світлом, то кільця будуть мати кольорове забарвлення, бо кількість зон Френеля, які вкладаються в отворі, залежить від довжини хвилі світла.

Нехай сферична хвиля, яка поширюється від точкового джерела  $S_0$ , зустрічає на своєму шляху непрозорий диск. У такому разі закриті ділянку фронту хвилі треба виключити з розгляду і будувати зони Френеля потрібно, починаючи з країв диска. На рис. 25.18 показано побудову цих зон для точки  $M$  екрана  $E$ , яка лежить навпроти центра диску. Амплітуда  $E_{0m}$  в точці  $M$  визначається спільною дією всіх відкритих зон, починаючи з першої:

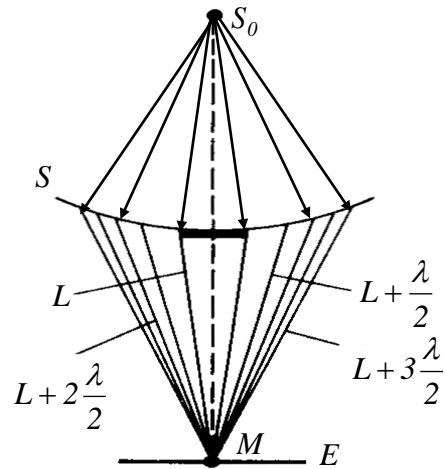


Рис. 25.18

$$E_{0M} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots = \frac{E_{01}}{2} + \left( \frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \left( \frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots = \frac{E_{01}}{2}. \quad (25.61)$$

Отже, в точці  $M$  завжди буде інтерференційний максимум, який відповідає половині дії першої відкритої зони Френеля. Центральний максимум оточений концентричними темними і світлими інтерференційними кільцями, що чергуються. Зміна інтенсивності світла  $I$  із відстанню  $r$  від точки  $M$  наведена на рис. 25.18. Зі збільшенням радіуса диска перша відкрита зона віддаляється від  $M$  і збільшується кут  $\varphi$ , між нормаллю до поверхні цієї зони в якій-небудь її точці і напрямком випромінювання в бік точки  $M$ . Тому інтенсивність центрального максимуму послаблюється при збільшенні розмірів диска. Якщо радіус диска набагато більший за радіус закритої ним центральної зони Френеля, то за диском буде звичайна тінь з дуже слабкою інтерференційною картиною в її межах.

**Дифракція Фраунгофера** – це дифракція плоских світлових хвиль, коли джерело світла і точка спостереження нескінченно віддалені від перешкоди, яка викликала дифракцію. Для здійснення дифракції Фраунгофера потрібно джерело світла  $S_0$  помістити у фокусі збірної лінзи  $L_1$ , а дифракційну картину досліджувати у фокальній площині другої збірної лінзи  $L_2$ , встановленої за перешкодою (рис. 25.19).

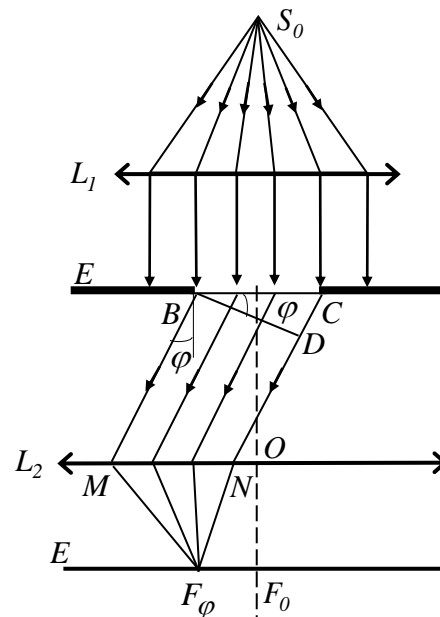


Рис. 25.19

Нехай паралельний пучок монохроматичного світла падає нормально на непрозору плоску поверхню, в якій прорізано вузьку щілину  $BC$ , що має сталу

ширину  $a=BC$  і довжину  $l \gg a$  (рис. 25.19). За принципом Гюйгенса-Френеля точки щілини є вторинними джерелами хвиль, які коливаються в одній фазі, бо площина щілини збігається з фронтом падаючої хвилі.

У побічному фокусі  $F_\varphi$  лінзи  $L_2$  збираються всі паралельні промені, які падають на лінзу під кутом  $\varphi$  до її оптичної осі  $OF_0$ , яка перпендикулярна до фронту падаючої хвилі. Оптична різниця ходу  $\Delta$  між крайніми променями  $CN$  і  $BM$ , які поширюються від щілини в цьому напрямку, дорівнює  $\Delta = CD = a \sin \varphi$ , де  $BD$  – перпендикуляр, який опущений з точки  $B$  на промінь  $CN$ .

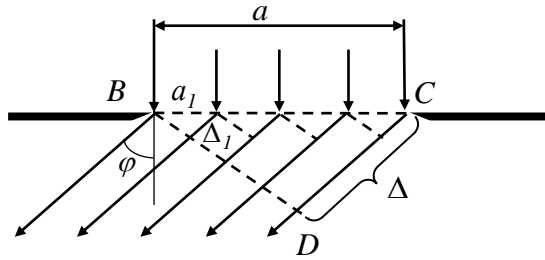


Рис. 25.20

Щілину  $BC$  можна розбити на зони Френеля, які мають вигляд смуг, паралельних до ребра  $B$  щілини (рис. 25.20).

Ширина кожної зони вибирається так, щоб різниця ходу від країв цих зон дорівнювала  $\Delta_1 = \lambda/2$ , тобто разом на ширині щілини поміститься

$$n = \frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{\Delta}{\lambda/2} \text{ зон.}$$

Ширина кожної зони дорівнює  $a_1 = \frac{\Delta_1}{\sin \varphi} = \frac{\lambda}{2 \sin \varphi}$ , тобто їх площі однакові. Всі зони в заданому напрямку випромінюють світло однакової інтенсивності. При інтерференції світла від кожної пари сусідніх зон амплітуда результуючих коливань дорівнює нулю, бо ці зони спричиняють коливання з однаковими амплітудами, але протилежними фазами. Отже, результат інтерференції світла в точці  $F_\varphi$  визначиться тим, скільки зон Френеля вкладається в щілині. Якщо кількість зон парна, то  $n = 2k$  і

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (25.62)$$

В точці  $F_\varphi$  отримується **дифракційний мінімум**. Знак „-” у правій частині відповідає променям світла, які поширюються від щілини під кутом  $-\varphi$  і збираються в побічному фокусі  $F_{-\varphi}$  лінзи, який симетричний  $F_\varphi$  відносно головного фокусу  $F_0$ . Якщо кількість зон непарна, то

$$a \sin \varphi = \pm(2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (25.63)$$

і в точці  $F_\varphi$  буде **дифракційний максимум**, інтенсивність якого  $I_\varphi$  і який відповідає дії однієї зони Френеля. Величина  $k$  називається порядком дифракційного максимуму.

У напрямку  $\varphi=0$  спостерігатиметься найінтенсивніший центральний максимум нульового порядку інтенсивністю  $I_0$ ; тому що коливання, які спричинюються

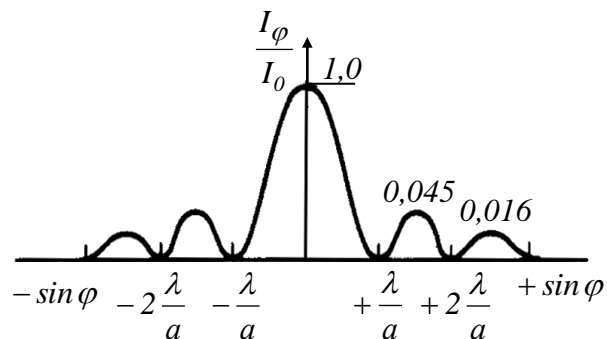


Рис. 25.21

в точці  $F_0$  всіма ділянками щілини, відбувається в одній фазі.

Залежність відношення  $\frac{I_\varphi}{I_0}$  від  $\sin \varphi$  зображено на рис. 25.21.

Розрахунок показує, що інтенсивності центрального і наступних максимумів співвідносяться як  $I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,0083 : \dots$ , тобто основна частина світлової енергії зосереджена в центральному максимумі.

**Шириною дифракційного максимуму** на екрані  $E$  називають відстань між двома найближчими до нього дифракційними мінімумами.

Ширина максимуму нульового порядку дорівнює відстані між двома мінімумами першого порядку, тобто  $l = 2\frac{\lambda}{a}$ . Отже, центральна світла смуга тим ширша, чим більша довжина хвилі  $\lambda$  і чим менша ширина щілини  $a$ . В

межах самої центральної смуги інтенсивність досить швидко зменшується від її середини до країв. При  $\varphi = \pm \frac{\lambda}{2a}$  інтенсивність дорівнює 0,4 від максимальної.

Для  $a = \lambda \left( \sin \varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} \right)$  головний максимум охоплює всю область екрана, тобто екран освітлений рівномірно. При збільшенні ширини щілини ( $a > \lambda$ ) дифракційні смуги стають вузькими, а число мінімумів  $k = \frac{a}{\lambda} \sin \varphi$  зростає. Дифракційна картина стає яскравіша, оскільки через ширшу щілину проходить більший світловий потік. Коли щілина досить широка ( $a \gg \lambda$ ), то в центрі дифракційної картини буде чітке зображення джерела світла, що відповідає прямолінійному поширенню світла.

У випадку білого світла буде спостерігатися сукупність відповідних картин для різних кольорів. Центральний максимум має райдужне забарвлення по краях. Повного гасіння світла не буде в жодній точці екрана, бо максимуми і мінімуми світла з різними  $\lambda$  перекриваються.

Розглянемо дифракцію світла, зумовлену дією **дифракційної ґратки**.

**Дифракційна ґратка** – це система з великої кількості однакових за шириною і паралельних одна до одної щілин, що лежать в одній площині і відокремлені непрозорими проміжками, однаковими за шириною.  $BC=DP=a$ ;  $CD=b$ ;  $d=a+b$  – період дифракційної ґратки (рис. 25.22).

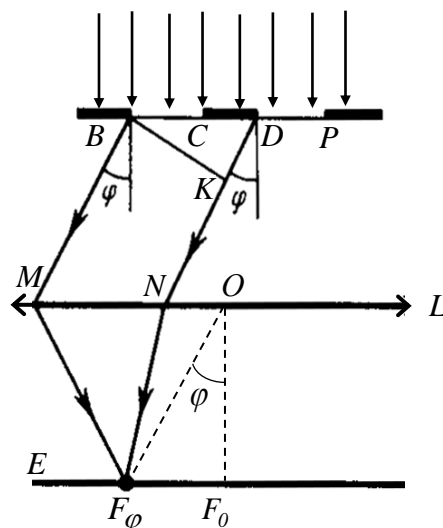


Рис. 25.22

Розглянемо спочатку дифракцію плоскої монохроматичної хвилі, яка падає нормально на поверхню ґратки, що містить дві щілини. Коливання в усіх

точках щілин відбуваються в одній фазі, оскільки ці точки лежать на тій самій хвильовій поверхні. Знайдемо результуючу амплітуду коливань у точці  $F_\varphi$  екрана  $E$ , в якій збираються промені від усіх щілин ґратки, що падають на лінзу  $L$  під кутом  $\varphi$  до її оптичної осі  $OF_0$ .

Очевидно, що в тих напрямках, в яких одна із щілин не поширює світла, воно не буде поширюватися і при двох щілинах, тобто **головні мінімуми інтенсивності** будуть спостерігатися в напрямках, що визначаються умовою:

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (25.64)$$

Оскільки щілини знаходяться одна від одної на однакових відстанях, то різниця ходу променів, що йдуть від двох сусідніх щілин, будуть для даного напрямку  $\varphi$  однакові в межах всієї дифракційної ґратки:

$$\Delta = KD = (a + b) \sin \varphi = d \sin \varphi. \quad (25.65)$$

Внаслідок взаємної інтерференції світлових променів, які посиляються двома щілинами, в деяких напрямках вони будуть гасити один одного, тобто виникнуть додаткові мінімуми. Ці додаткові мінімуми будуть спостерігатися для променів, які поширюються від точок  $B$  і  $D$  двох щілин, якщо різниця ходу променів  $\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots$ .

Отже, з урахуванням  $d \sin \varphi = \Delta$  **умова додаткових мінімумів:**

$$d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (25.66)$$

Якщо ж в різниці ходу променів, які випромінюються з точок  $B$  і  $C$ , вміщується ціле число довжин хвиль, а саме  $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ , то дія одної щілини буде підсилюватися дією іншої. Отже, умова головних максимумів

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m \lambda, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (25.67)$$

Якщо дифракційна ґратка складається з  $N$  щілин, то умовою головних максимумів є вираз

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (25.68)$$

умовою головних мінімумів –

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (25.69)$$

умовою додаткових мінімумів –

$$d \sin \varphi = \pm \frac{m'}{N} \lambda, \quad (m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots) \quad (25.70)$$

або

$$d \sin \varphi = \pm \left( m + \frac{m'}{N} \right) \lambda, \quad \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \\ m' = 1, 2, 3, \dots, N-1 \end{cases}. \quad (25.71)$$

Між двома сусідніми додатковими мінімумами утворюються максимуми, які називаються **вторинними**. При великому  $N$  найближчий до головного максимуму вторинний максимум має інтенсивність в 22 рази меншу, ніж інтенсивність головного максимуму.

Отже, між двома сусідніми головними максимумами знаходиться  $N-1$  додаткових мінімумів і  $N-2$  вторинних максимумів. На них накладатимуться мінімуми, що виникають при дифракції від однієї щілини.

Із формул

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda \quad \text{і} \quad d \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (25.72)$$

видно, що головний максимум  $m$ -го порядку збігається з  $k$ -им мінімумом від одної щілини, якщо виконується рівність

$$\frac{k}{a} = \frac{m}{d}, \quad \text{або} \quad \frac{m}{k} = \frac{d}{a}. \quad (25.73)$$

На рис. 25.23 наведено розподіл інтенсивності  $I_\varphi$  від  $\sin \varphi$  для  $N=4$  і  $\frac{d}{a} = 3$ .

Пунктирна крива, що проходить через вершини головних максимумів, зображує інтенсивність, яка

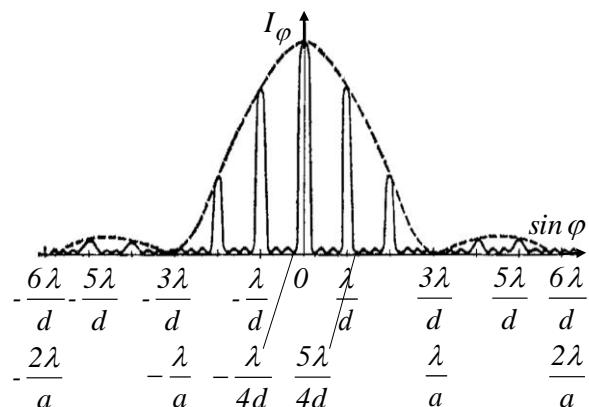


Рис. 25.23

зумовлена дифракцією на одній щілині. Як видно з рис. 25.23, при відношенні  $\frac{d}{a} = 3$  головні максимуми 3-го, 6-го тощо порядків збігаються з мінімумами інтенсивності від однієї щілини, тому ці максимуми зникають.

Чим більше щілин  $N$ , тим більша кількість світлової енергії пройде через ґратку, тим більше мінімумів утворюється між сусідніми головними максимумами, тим інтенсивнішими і гострішими будуть максимуми.

Оскільки  $\sin\varphi$  не може бути більше від одиниці, то кількість головних максимумів  $m \leq \frac{d}{\lambda}$ .

Якщо дифракційну ґратку освітлюють білим світлом, то для різних значень  $\lambda$  положення всіх головних максимумів, крім центрального, не збігаються один з одним. Тому центральний максимум має вигляд білої смужки, а всі інші – райдужних смужок, які називають дифракційними спектрами першого, другого і тощо порядків. У межах кожної смужки забарвлення змінюється від фіолетового біля внутрішнього краю, який найближчий до максимуму нульового порядку до червоного – біля зовнішнього краю.

Для спостереження дифракції на ґратці необхідно, щоб її період  $d$  був того самого порядку, що і довжина хвилі падаючого випромінювання. Для рентгенівських променів ідеальними природними дифракційними ґратками є монокристали, в яких атоми та іони розміщені на відстані порядку  $10^{-10}$  м. Кристалографічні дослідження показали, що у будь-якому кристалі можна виявити певні площини, де атоми або іони, які утворюють його кристалічну ґратку, розміщені найбільш густо. Такі площини відбиватимуть монохроматичне рентгенівське випромінювання, яке може інтерферувати від різних площин.

На рис. 25.24 зображено сусідні площини кристала  $AA_1$  і  $BB_1$ . Абсолютний показник заломлення всіх середовищ для рентгенівських

променів близький до одиниці. Тому оптична різниця ходу  $\Delta$  між двома променями  $I'$  і  $2'$ , які відбиваються від площин  $AA_1$  і  $BB_1$ , дорівнює

$$\Delta = MO + ON = 2d \sin \varphi, \quad (25.74)$$

де  $d$  – відстань між площинами, а кут  $\varphi$  – кут між площиною  $AA_1$  та падаючими та відбитими променями або кут повзання.

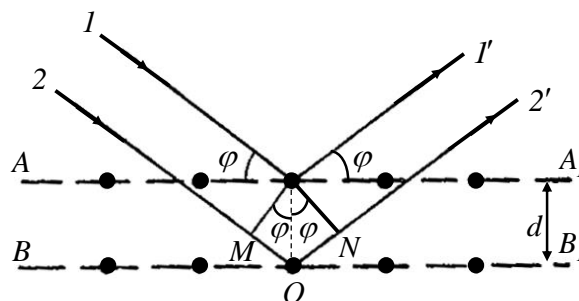


Рис. 25.24

Якщо довжина хвилі рентгенівських променів  $\lambda$ , то

інтерференційні максимуми у відбитих променях спостерігатимуться, коли

$$2d \sin \varphi = m\lambda, \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (25.75)$$

Співвідношення  $2d \sin \varphi = m\lambda$  є **формулою Вульфа-Брегга**. Дифракція виникає не в довільному напрямку падіння монохроматичного випромінювання, тому для її спостереження треба повертати кристал так, щоб кут ковзання задовольняв умову  $2d \sin \varphi = m\lambda$ . Якщо обертати кристал або проводити експеримент з полікристалічною системою, в якій окремі кристалики орієнтовані довільно, то можна отримати певну систему інтерференційних картин від усіх можливих типів атомних площин певного кристала.

Дифракція рентгенівських променів є основою *рентгеноструктурного аналізу*, який дає можливість вивчати структуру кристалів, амфотерних твердих тіл, рідин, а також *рентгеноспектрального аналізу*, що використовується для вивчення рентгенівських спектрів, а також для визначення хімічного складу речовин.

## Тема 26. Взаємодія світла з речовиною.

### 26.1 Поглинання світла.

**Поглинанням світла** називається явище втрати енергії світловою хвилею, яка проходить через речовину, внаслідок перетворення енергії хвилі у інші форми енергії.

При проходженні паралельного пучка світла крізь шар прозорого середовища його інтенсивність зменшується. Поглинання світла може приводити до нагрівання, іонізації або збудження атомів і молекул речовини, до деформації, поглинання може супроводжуватись розсіянням світла та індуктивним випромінюванням.

Щоб отримати співвідношення, яке виражає закон поглинання світла, розглянемо шар прозорого середовища завтовшки  $l$ , на який падає паралельний пучок променів інтенсивністю  $I_0$ . Виділимо в середовищі нескінченно тонкий шар  $dl$ , який обмежений паралельними поверхнями, що перпендикулярні до напрямку поширення світла (рис.

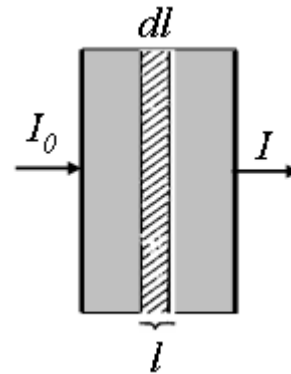


Рис. 26.1

26.1). Дослід показує, що зменшення інтенсивності світла шаром середовища  $dl$  пропорційне до величини інтенсивності, що входить у цей шар, і товщини шару, тобто

$$dI = -\alpha I dl, \quad (26.1)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт пропорційності, який не залежить від інтенсивності світла і називається коефіцієнтом поглинання. Знак мінус вказує на те, що із збільшенням товщини шару поглинаючого середовища інтенсивність світла, що проходить крізь нього, зменшується.

Після розділення змінних у рівнянні дістаємо

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dl. \quad (26.2)$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^l dl; \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\alpha l. \quad (26.3)$$

В результаті маємо

$$I = I_0 e^{-\alpha l}, \quad (26.4)$$

де  $I$  – інтенсивність світла, що виходить із шару поглинаючого середовища завтовшки  $l$ ;  $I_0$  – інтенсивність світла, що входить у поглинаюче середовище.

При  $l = \frac{1}{\alpha}$  інтенсивність  $I = \frac{I_0}{e}$ . Отже, шар, товщина якого дорівнює  $\frac{1}{\alpha}$ ,

зменшує інтенсивність світла в  $e$  разів. Отримане співвідношення було встановлене у 1729 р. П. Бугером і називається законом Бугера, або **законом Бугера-Ламберта**. А. Бер встановив, що поглинання світла розчинами пропорційне молекулярній концентрації  $C_0$  розчиненої речовини, тобто

$$\alpha = \alpha_0 C_0, \quad (26.5)$$

де  $\alpha_0$  – коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи розчиненої речовини і не залежить від її концентрації.

Тоді **закону Бугера-Ламберта-Бера**, який справедливий для газів і розчинів малих концентрацій, можна надати вигляду

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 C_0 l}. \quad (26.6)$$

Коефіцієнт поглинання залежить від довжини хвилі  $\lambda_0$  (або частоти  $\omega$ ) і від хімічної природи речовини.

В одноатомних газах і парах металів, у яких атоми розміщені на значних

відстанях один від одного і їх можна вважати ізольованими, коефіцієнт поглинання для більшості довжин хвиль близький до нуля і лише для дуже вузьких спектральних областей спостерігаються різні

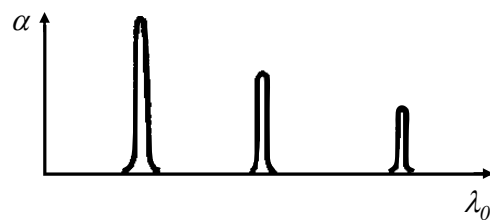


Рис. 26.2

максимуми. Такий спектр поглинання називається **лінійчастим**. (рис. 26.2). Ці лінії відповідають частотам власних коливань електронів в атомах.

У газів з багатоатомними молекулами спостерігаються системи тісно розміщених ліній, які утворюють **смуги поглинання**. Структура цих смуг визначається складом і будовою молекул.

Рідкі і тверді діелектрики мають *суцільні спектри поглинання*, що складаються з порівняно широких смуг поглинання, в межах яких коефіцієнт поглинання змінюється плавно. За межами цих смуг  $\alpha \approx 0$ , тобто діелектрики прозорі.

Метали практично непрозорі для світла. Коефіцієнт  $\alpha$  для них має значення порядку  $10^2 \text{ м}^{-1}$ , в той час як для скла  $\alpha \approx 1 \text{ м}^{-1}$ . Це обумовлено наявністю в металах вільних електронів. Під дією електричного поля світлової хвилі вільні електрони починають рухатись і в металі виникають швидкозмінні струми, що супроводжуються виділенням теплоти. В результаті енергія світлової хвилі швидко зменшується і перетворюється у внутрішню енергію металу.

Структура спектрів поглинання визначається складом і будовою молекул, тому вивчення спектрів поглинання є одним з основних методів кількісного і якісного дослідження речовин.

## 26.2 Дисперсія світла.

*Дисперсією світла* називається залежність показника заломлення  $n$  речовини від частоти  $\nu$  (довжини хвилі  $\lambda$ ) світла або залежність фазової швидкості  $v$  світла в середовищі від його частоти  $\nu$ .

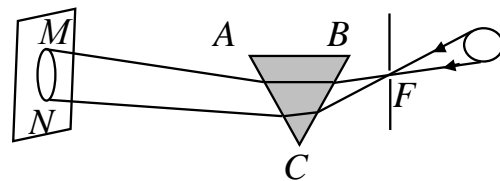


Рис. 26.3

Дисперсію світла представляють у вигляді залежності  $n = f(\lambda)$ .

Наслідком дисперсії є розклад у спектр пучка білого світла при проходженні його через призму. Такий дослід вперше виконав в 1672 р. Ньютон. Схема дослідів наведена на рис. 26.3.

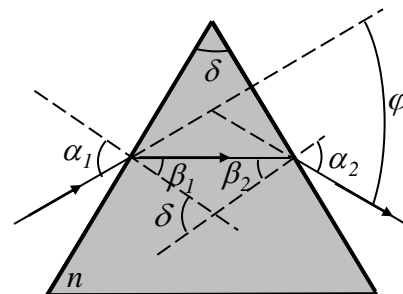


Рис. 26.4

Промінь світла від Сонця проходить через малий круглий отвір  $F$  у ставні вікна, потім заломлюється в скляній призмі  $ABC$  і падає на аркуш білого паперу. При цьому

кругле зображення отвору  $F$  розтягується в кольорову смугу  $MN$ , яку Ньютон назвав спектром.

Розглянемо дисперсію світла у призмі. Нехай монохроматичний пучок світла падає на призму з показником заломлення  $n$  під кутом  $\alpha_1$  (рис. 26.4).

Кут  $\delta$  – заломлюючий кут призми. Із рис. 26.4 видно, що кут відхилення  $\varphi$  дорівнює:

$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta. \quad (26.7)$$

Нехай кути  $\delta$  і  $\alpha_1$  малі, тоді кути  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  і  $\beta_2$  також будуть малі і синуси цих кутів дорівнюватимуть кутам. Тому

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = n, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{1}{n}. \quad (26.8)$$

Оскільки  $\beta_1 + \beta_2 = \delta$ , то

$$\alpha_2 = \beta_2 n = (\delta - \beta_1) n = n \left( \delta - \frac{\alpha_1}{n} \right) = n\delta - \alpha_1, \quad (26.9)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = n\delta \quad \text{і} \quad \varphi = n\delta - \delta. \quad (26.10)$$

В результаті

$$\varphi = \delta(n - 1), \quad (26.11)$$

тобто кут відхилення променів призмою тим більший, чим більший заломлюючий кут призми. Оскільки кут відхилення  $\varphi$  залежить від величини  $n-1$ , а  $n$  є функцією довжини хвилі, то промені різних довжин хвиль після проходження призми виявляються відхиленими на різні кути.

За допомогою призми, як і за допомогою дифракційної ґратки можна визначити спектральний склад світла.

Розглянемо відмінності в дифракційному і призматичному спектрах:

а) дифракційна ґратка розкладає падаюче світло безпосередньо по довжинах хвиль, тому за вимірними кутами можна обчислити довжину хвилі.

Розклад білого світла в призмі відбувається за значеннями показника заломлення, тому для визначення довжини світла треба знати залежність

$$n = f(\lambda).$$

У дифракційному спектрі кольори розміщуються за порядком зростання довжини хвилі, а в дисперсійному – навпаки. Дифракційною ґраткою червоні промені, що мають більшу довжину хвилі, ніж фіолетові, відхиляються сильніше.

На рис. 26.5 наведені залежності показника заломлення  $n$  від довжини хвилі  $\lambda$  для скла (1), кварцу (2) і флюоріта (3).

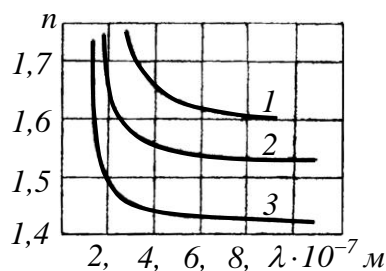


Рис. 26.5

Як видно із рис. 26.5, показник заломлення  $n$  монотонно зростає зі зменшенням довжини хвилі  $\lambda$ . Отже, призмою червоні промені, що мають менший показник заломлення, ніж фіолетові промені, відхилюються на менший кут  $\varphi$ , ніж фіолетові.

б) дифракційний спектр рівномірно розтягнутий на всіх своїх ділянках. Дисперсійний же спектр білого світла стиснутий у червоній області і розтягнутий у фіолетовій, тому що показник заломлення скла в області коротких хвиль при зміні довжини хвилі випромінювання змінюється швидко, а в області довгих хвиль – повільно.

Величина, яка показує, як швидко змінюється показник заломлення  $n$  речовини з довжиною хвилі  $\lambda$  називається **дисперсією речовини  $D$** :

$$D = \frac{dn}{d\lambda}. \quad (26.12)$$

*Дисперсію світла в середовищі називають нормальною, якщо із зростанням частоти  $\nu$  світла абсолютний показник заломлення  $n$  середовища також зростає:*

$$\frac{dn}{d\nu} > 0, \quad \left( \frac{dn}{d\lambda} < 0 \right). \quad (26.13)$$

Така залежність показника заломлення  $n$  від  $\nu$  буде в тих областях

частот, для яких середовище прозоре. Наприклад, звичайне скло прозоре для видимого світла і в цьому інтервалі частот має нормальну дисперсію.

Дисперсію світла в середовищі називають **аномальною**, якщо із зростанням частоти  $\nu$  світла абсолютний показник заломлення середовища  $n$  зменшується:

$$\frac{dn}{d\nu} < 0, \quad \left( \frac{dn}{d\lambda} > 0 \right). \quad (26.14)$$

Аномальна дисперсія буде в області частот, які відповідають смугам інтенсивного поглинання світла речовиною. Для скла ці смуги лежать в ультрафіолетовій й інфрачервоній частині спектра. Аномальній дисперсії відповідає інтервал частот від  $\nu_1$  до  $\nu_2$  (рис. 26.6).

В різних ділянках спектра дисперсія характеризується тією зміною показника заломлення, яка припадає на одиничний інтервал довжин хвиль. Ця величина  $\frac{\Delta n}{\Delta \lambda}$

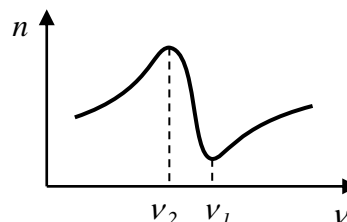


Рис. 26.6

називається **середньою дисперсією** для ділянки спектра  $\lambda, \lambda + \Delta \lambda$ .

У довідникових таблицях показники заломлення різних речовин даються для жовтої лінії натрію  $\lambda_D = 0,5893 \text{ мкм}$  і позначаються  $n_D$ . Середня дисперсія визначається за синьою  $\lambda_F = 0,4861 \text{ мкм}$  і червоною  $\lambda_C = 0,6563 \text{ мкм}$  лініях водню і позначається  $n_F - n_C$ . Величина  $\frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$  називається **відносною**

**дисперсією**, обернена її величина – **коефіцієнтом дисперсії**.

### 26.3 Поляризація світла.

Наслідком теорії Максвелла є поперечність світлових хвиль: вектори напруженості електричного  $\vec{E}$  і магнітного  $\vec{H}$  полів електромагнітної хвилі взаємно перпендикулярні і коливаються перпендикулярно до вектора швидкості  $\vec{v}$  поширення хвилі. Оскільки основне значення при дії світла на

речовину має вектор напруженості  $\vec{E}$  електричного поля – **світловий вектор**, - що діє на електрони в атомах речовини, тому в наступному будемо розглядати напрямок коливання лише цього вектора.

Світло є сумарним електромагнітним випромінюванням множини атомів. Атоми ж випромінюють світлові хвилі незалежно один від одного, тому світлова хвиля, що

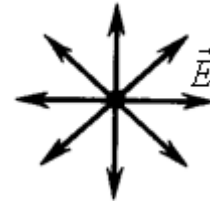


Рис. 26.7

випромінюється тілом, характеризується різноманітними рівномірними коливаннями світлового вектора (рис. 26.7). В даному випадку рівномірний розподіл векторів  $\vec{E}$  пояснюється великим числом атомарних випромінювачів, а рівність амплітудних значень векторів  $\vec{E}$  – однаковою в середньому інтенсивністю випромінювання кожного з атомів.

**Природним** називається світло з усіма можливими рівномірними орієнтаціями вектора  $\vec{E}$  (і, отже,  $\vec{H}$ ).

**Поляризованим** називається світло, в якому напрямки коливань вектора  $\vec{E}$  якимось чином упорядковані.

Розглянемо дві монохроматичні взаємно перпендикулярні хвилі, що поширюються вздовж додатного напрямку осі  $Ox$ ,

$$E_y = E_{01} \cos(\omega t - kx), \quad E_z = E_{02} \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (26.15)$$

де  $\omega = 2\pi\nu$  – циклічна частота,  $k = \frac{\omega}{v}$  – хвильове число,  $E_{01}$ ,  $E_{02}$  – амплітуди  $E_y$  і  $E_z$ ,  $\varphi$  – різниця фаз коливань  $E_y$  і  $E_z$ .

Щоб знайти траєкторію результуючого коливання світлового вектора при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань, визначимо

$$\cos(\omega t - kx) \text{ з рівняння для } E_y: \cos(\omega t - kx) = \frac{E_y}{E_{01}}, \text{ тоді } \sin(\omega t - kx) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2}.$$

Оскільки  $\cos(\omega t - kx + \varphi) = \cos(\omega t - kx)\cos\varphi - \sin(\omega t - kx)\sin\varphi$ , то

$$\frac{E_z}{E_{02}} - \frac{E_y}{E_{01}} \cos\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2} \sin\varphi.$$

Піднесемо до квадрата це рівняння, в результаті:

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} - 2 \frac{E_y E_z}{E_{01} E_{02}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (26.16)$$

Отримане співвідношення (26.16) є рівнянням еліпса, довільно орієнтованого відносно осей  $OY$  і  $OZ$ . Отже, кінець вектора  $\vec{E}$  в кожній точці поля описує еліпс, який лежить у площині, що перпендикулярна до осі  $OX$ . Така хвиля називається **еліптично поляризованою**.

Якщо  $\varphi = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$ , ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), то отримуємо рівняння еліпса, орієнтованого відносно осей  $OX$  і  $OY$ :

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} = 1. \quad (26.17)$$

При  $E_{01} = E_{02} = E_0$  еліпс перетворюється в коло. Така хвиля називається **циркулярно поляризованою (поляризованою по колу)**.

Схематично на рис. 26.8 зображено циркулярно поляризовану хвилю.

Якщо відносно напрямку променя вектор  $\vec{E}$  обертається проти годинникової стрілки, поляризація називається **правою**, в протилежному випадку – **лівою**.

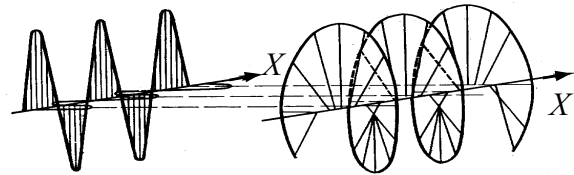


Рис. 26.8

Якщо  $\varphi = \pm m\pi$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), то еліпс вироджується в пряму

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} \pm \frac{E_z^2}{E_{02}^2} = 0. \quad (26.18)$$

Така хвиля називається **лінійно поляризованою (плоскополяризованою)** (рис. 26.9).

Якщо внаслідок яких-небудь зовнішніх впливів появляється переважаючий напрямок коливань вектора  $\vec{E}$ , то **світло частково поляризоване**.

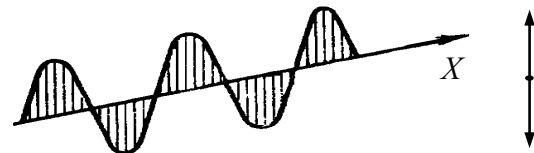


Рис. 26.9

Площина, в якій відбувається коливання вектора  $\vec{E}$ , називається **площиною поляризації**, а перпендикулярна до неї площина – **площиною коливань**.

За міру ступеня поляризації приймають вираз

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (26.19)$$

де  $I_{max}$  і  $I_{min}$  – відповідно, максимальна і мінімальна інтенсивність світла, що відповідають двом перпендикулярним компонентам вектора  $\vec{E}$ . Для природного світла  $I_{max} = I_{min}$  і  $P = 0$ . Для плоскополяризованого –  $I_{min} = 0$  і  $P = 1$ . Для еліптично поляризованого світла поняття ступеня поляризації не застосовується (у такого світла коливання повністю впорядковані).

**Поляризацією світла** називається виділення лінійно поляризованого світла із природного або частково поляризованого.

Плоскополяризоване світло можна отримати з природного за допомогою приладів, які називаються **поляризаторами**. Ці прилади вільно пропускають коливання, паралельні до площини поляризації, яка називається **головною площиною**, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні цій площині. В ролі поляризаторів можуть бути середовища, які анізотропні відносно коливань вектора  $\vec{E}$ , наприклад, кристали. Одним із природних кристалів, які використовуються як поляризатори, може бути турмалін.

Прилади, за допомогою яких аналізують ступінь поляризації світла, називають **аналізаторами**.

Нехай на поляризатор падає природне світло (рис. 26.10).

Виберемо хвилю, вектор напруженості електричного поля якої  $\vec{E}_{np}$ , коливається у площині, що утворює з головною площиною поляризатора  $p-p$  кут  $\varphi$ . При вході в поляризатор падаючу хвилю можна зобразити у вигляді двох коливань у взаємно перпендикулярних площинах:

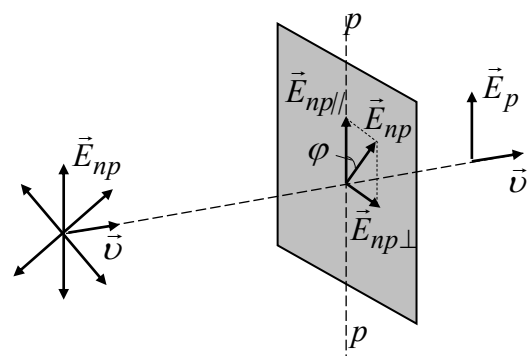


Рис. 26.10

$$E_{np||} = E_{np} \cos \varphi, \quad E_{np\perp} = E_{np} \sin \varphi. \quad (26.20)$$

Перше коливання пройде через поляризатор, друге буде затримане.

Інтенсивність хвилі, що пройшла, пропорційна до  $E_{np||}^2 = E_{np}^2 \cos^2 \varphi$ , тобто дорівнює

$$I_p = I_{np} \cos^2 \varphi, \quad (26.21)$$

де  $I_{np}$  – інтенсивність коливань з амплітудою  $E_{np}$ .

В природному світлі всі значення  $\varphi$  рівноймовірні. Тому частка світла, що пройшло через поляризатор, буде дорівнювати середньому значенню  $\cos^2 \varphi$ , тобто  $\frac{1}{2}$  і

$$I_p = \frac{1}{2} I_{np}. \quad (26.22)$$

Під час обертання поляризатора навколо напрямку природного світла інтенсивність світла, що пройшло, залишається однією і тією самою, змінюється лише орієнтація площини поляризації світла, що вийшло з поляризатора.

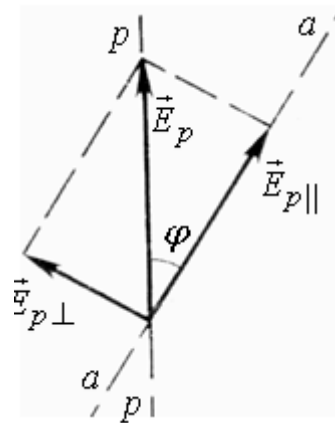


Рис. 26.11

Нехай на аналізатор падає лінійно поляризоване світло, отримане за допомогою поляризатора, головна площина якого  $p$ - $p$  утворює кут  $\varphi$  з головною

площиною аналізатора  $a$ - $a$  (рис. 26.11). При вході в аналізатор лінійно поляризований промінь, амплітуда електричного вектора якого  $E_p$ , поділиться на два лінійно поляризовані промені, площини поляризації яких взаємно перпендикулярні. Амплітуди вектора напруженості електричного поля цих променів будуть

$$E_{p\perp} = E_p \sin \varphi, \quad E_{p||} = E_p \cos \varphi. \quad (26.23)$$

Оскільки аналізатор пропускає коливання електричного вектора, що відбуваються в площині  $a$ - $a$ , а інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди  $E_p$ , то

$$I_a = I_p \cos^2 \varphi. \quad (26.24)$$

Якщо аналізатор не абсолютно прозорий, то

$$I_a = k_a I_p \cos^2 \varphi, \quad (26.25)$$

де  $k_a$  - коефіцієнт прозорості аналізатора.

Отримані співвідношення виражають **закон Малюса**.

Отже, інтенсивність світла, що пройшла через аналізатор, змінюється від мінімуму (повне погашення світла) при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  до максимуму при  $\varphi = 0$ .

Якщо пропустити природне світло через поляризатор і аналізатор, площини яких утворюють кут  $\varphi$ , то з першого вийде плоскополяризоване світло, інтенсивність якого  $I_p = \frac{1}{2} k_p I_{np}$ , а з другого вийде світло інтенсивністю  $I_a = k_a I_p \cos^2 \varphi$ . Отже, інтенсивність світла, що пройшла через два поляризатори,  $I_a = \frac{1}{2} k_p k_a I_{np} \cos^2 \varphi$ . Звідси  $I_{max} = \frac{1}{2} I_{np} k_p k_a$  (поляризатори паралельні) і  $I_{min} = 0$  ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$  – поляризатори схрещені).

Якщо природне світло падає на межу поділу двох діелектриків наприклад, повітря і скла, то частина його відбивається, а частина заломлюється і поширюється у другому середовищі. Якщо встановити на шляху відбитого і заломленого променів аналізатор, то видно, що відбитий і заломлений промені частково поляризовані: при повертанні аналізатора навколо променів інтенсивність світла періодично посилюється і ослаблюється, але повного гасіння не спостерігається.

Подальші дослідження показали, що у відбитому промені переважають коливання, перпендикулярні до площини падіння ( $\bullet$ ), в заломленому –

коливання, паралельні площині падіння ( $\uparrow$ ) (рис. 26.12).

Ступінь поляризації – ступінь виділення світлових хвиль з певною орієнтацією електричного вектора – залежить від кута падіння променів і показника заломлення.

*Відбитий промінь є лінійно поляризованим в площині, яка*

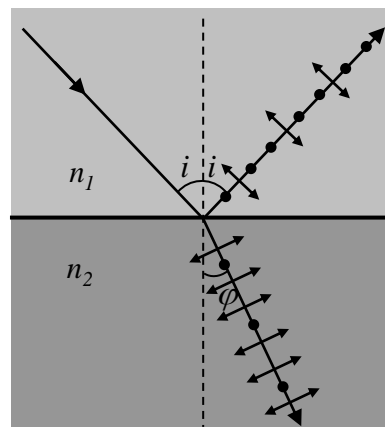


Рис. 26.12

перпендикулярна площині падіння променя, якщо кут падіння  $i_{Br}$  задовольняє умову

$$\operatorname{tg} i_{Br} = n_{21}, \quad (26.26)$$

де  $n_{21}$  - показник заломлення другого середовища відносно першого.

Цей закон називається **законом Брюстера**, а кут  $i_{Br}$  - кутом Брюстера. Ступінь поляризації заломленого променя при куті падіння  $i_{Br}$  досягає найбільшого значення, проте цей промінь залишається поляризованим лише частково.

Якщо світло падає на границю поділу під кутом Брюстера, то відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні:

$$\operatorname{tg} i_{Br} = \frac{\sin i_{Br}}{\cos i_{Br}} = n_{21} = \frac{\sin i_{Br}}{\sin \beta}. \quad (26.27)$$

Звідси  $\cos i_{Br} = \sin \beta$ . Отже,  $i_{Br} + \beta = \frac{\pi}{2}$ , але  $i_{Br} = i$ , тому  $i' + \beta = \frac{\pi}{2}$ .

Відбивання під кутом Брюстера дає змогу отримати лінійно поляризоване світло, однак його інтенсивність невелика і для скла ( $n=1,5$ ) дорівнює близько 15%, тобто основна його частина поширюється у напрямку

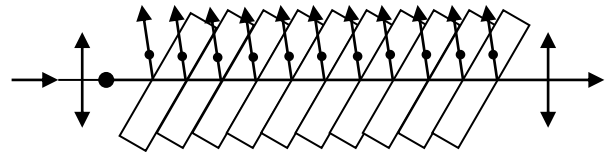


Рис. 26.13

заломленої хвилі, яка поляризована не повністю. Для збільшення ступеня поляризації заломлених хвиль їх треба пропустити крізь стопу скляних пластинок (рис. 26.13).

Так, для  $i = i_{Br}$  стопа з десяти скляних пластинок дає змогу отримати майже стопроцентну поляризацію заломлених хвиль.

Усі прозорі кристали, крім кристалів кубічної системи, які оптично ізотропні, є оптично анізотропні. Їх відносна діелектрична проникність і показник заломлення залежать від напрямку електричного вектора  $\vec{E}$  світлової хвилі.

В оптично анізотропних кристалах спостерігається явище **подвійного променезаломлення**, яке полягає в тому, що промінь світла, який падає на поверхню кристала, роздвоюється в ньому на два заломлені промені, що

поширюються з різними швидкостями.

Кристали, що мають подвійне променезаломлення, діляться на **одновісні** і **двовісні**. В одновісних кристалів для одного із заломлених променів виконується закон заломлення, зокрема заломлений промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до заломлючої поверхні. Цей промінь називається **звичайним** ( $o$ ). Для другого променя, який називається **незвичайним** ( $e$ ), відношення синусів кута падіння і кута заломлення не залишається сталим при зміні кута падіння. Незвичайний промінь не лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до кристала поверхні.

На рис. 26.14 показано явище подвійного променезаломлення в одновісному кристалі, коли пучок світла падає на кристал нормально. Один з променів ( $o$ ) є продовженням падаючого, а інший ( $e$ ) при проникненні в кристал відхиляється на якийсь кут.

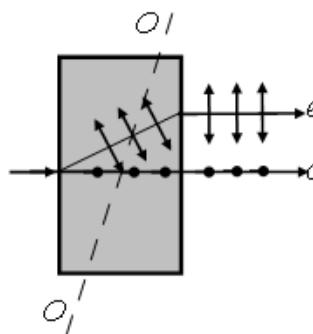


Рис. 26.14

Одновісними кристалами є ісландський шпат, кварц, турмалін, а двовісними – слюда, гіпс. У двовісних кристалах обидва промені незвичайні.

В одновісних кристалах існує один напрямок, вздовж якого подвійне променезаломлення не спостерігається.

*Напрямок в кристалі, по якому поширюються звичайні і незвичайні промені не розділяючись і з однаковою швидкістю, називається **оптичною віссю кристала**.*

Оптична вісь – це не пряма лінія, що проходить через якусь точку кристала, а певний напрямок в кристалі. Довільна пряма, паралельна до цього напрямку, є оптичною віссю кристала.

Площина, яка проходить через промінь і оптичну вісь кристала, що перетинає промінь, називається **головною площиною**, або головним перерізом кристала, що відповідає цьому променю. Через кристал можна провести нескінченну множину паралельних оптичних осей і нескінченну множину паралельних головних перерізів. Лінія перетину двох довільних головних перерізів завжди є оптичною віссю. На рис. 26.14 оптична вісь  $OO'$ : промінь,

що падає на кристал і поширюється в цьому напрямку, не роздвоюється.

Дослідження звичайного і незвичайного променів показує, що обидва промені повністю поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках. Електричний вектор у звичайному промені перпендикулярний до площини головного перерізу ( $\bullet$ ), а в незвичайному промені лежить у площині головного перерізу ( $\uparrow$ ) (рис. 26.14), тобто площина поляризації звичайного променя перпендикулярна до площини головного перерізу, а незвичайного збігається з площиною головного перерізу.

Після виходу з кристала, якщо не брати до уваги поляризацію у двох взаємно перпендикулярних напрямках (площинах), ці два промені нічим один від одного не відрізняються.

Подвійне променезаломлення пояснюється анізотропією кристалів. У кристалах некубічної системи діелектрична проникність  $\varepsilon$  виявляється залежною від напрямку дії електричного поля  $\vec{E}$ . В одновісних кристалах  $\varepsilon$  в напрямку оптичної осі і в напрямку, який перпендикулярний до неї, має різні значення  $\varepsilon_{\parallel}$  і  $\varepsilon_{\perp}$ , які називаються повздовжньою і поперечною діелектричними проникностями кристала. В інших напрямках  $\varepsilon$  має проміжне значення. А оскільки  $n = \sqrt{\varepsilon}$  і  $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ , то з анізотропії  $\varepsilon$  випливає, що світловим хвилям з різними напрямками коливання вектора  $\vec{E}$  відповідають різні значення показника заломлення і швидкості світлових хвиль.

Явище подвійного променезаломлення лежить в основі роботи поляризаційних пристроїв, які служать для отримання поляризованого світла. Найчастіше для цього застосовуються *призми і поляроїди*.

Типовий представник поляризаційних призм – *призма Ніколя* (ніколь) – подвійна призма з ісландського шпату, які склеєні вздовж лінії  $AB$  канадським бальзамом з  $n=1,55$  (рис. 26.15).

Оптична вісь  $OO$  спрямована під кутом  $48^\circ$  до вхідної грані  $AC$ . Промінь при падінні на грань  $AC$  внаслідок подвійного заломлення поділяється на звичайний  $o$  і незвичайний промінь  $e$ . При певному виборі кутів призми звичайний промінь падає на шар бальзаму під кутом  $76^\circ$ , який більший за граничний, зазнає повного внутрішнього відбивання, падає на зачорнену грань  $CB$  і нею поглинається. Незвичайний промінь виходить з призми паралельно до грані  $CB$ . Площина його поляризації збігається з площиною головного перерізу.

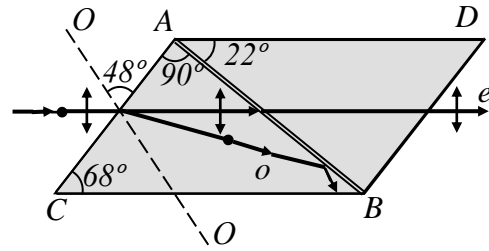


Рис. 26.15

Всі двозаломлені кристали тією чи іншою мірою поглинають світло. Коефіцієнт поглинання неоднаковий для звичайного і незвичайного променів і залежить від напрямку поширення світла в кристалі. Ця явище називається дихроїзмом. Значний дихроїзм у видимій області спектра мають кристали турмаліну, в якому коефіцієнт поглинання для звичайних променів в багато разів більший, ніж для незвичайних. Пластина турмаліну завтовшки  $1\text{ мм}$  практично повністю поглинає звичайні промені, і світло, що проходить крізь неї, буде лінійно поляризованим.

Плівка завтовшки  $0,1\text{ мм}$ , на яку нанесено кристалики гепатиту, повністю поглинає звичайний промінь видимої області спектра.

Поляризатори, для створення яких використане явище дихроїзму, називаються *поляроїдами*.

## Тема 27. Квантова оптика.

### 27.1 Теплове випромінювання. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа.

Тіла, нагріті до досить високої температури, набувають здатності світитися. Наприклад, розпечені тверді тіла випромінюють біле світло, яке має суцільний спектр частот. Із зниженням температури тіла зменшується інтенсивність його випромінювання, а у спектрі переважають довгі хвилі (червоні та інфрачервоні). При подальшому охолодженні тіло випромінює невидимі оком інфрачервоні промені.

*Свічення тіл, зумовлене нагріванням, називається тепловим (температурним) випромінюванням.*

Теплове випромінювання є найпоширенішим у природі. Воно здійснюється за рахунок енергії теплового руху атомів і молекул речовини, тобто за рахунок внутрішньої енергії і тому залежить від температури речовини.

Оточимо випромінююче тіло оболонкою з ідеально відбивальною поверхнею. Повітря з оболонки відкачаємо. Відбите оболонкою випромінювання, потрапляючи на тіло, поглинається ним (частково або повністю). Буде відбуватися неперервний обмін енергією між тілом і випромінюванням, яке заповнює оболонку.

*Якщо обмін енергії між тілом і випромінюванням залишається незмінним при кожній довжині хвилі, стан системи тіло – випромінювання буде рівноважним.*

Дослід показує, що єдиним видом випромінювання, яке може знаходитися в рівновазі з випромінюючими тілами, є теплове випромінювання.

Здатність теплового випромінювання знаходитись в рівновазі з випромінюючими тілами зумовлена тим, що його інтенсивність зростає при підвищенні температури. Порушення рівноваги в системі тіло – випромінювання викликає виникнення процесів, що відновлюють рівновагу.

Рівноважне випромінювання однорідне і неполяризоване, напрямки його поширення у порожнині рівноймовірні. Будь-яке випромінювання характеризується об'ємною густиною та спектральною густиною енергії випромінювання.

Об'ємна густина  $w$  енергії випромінювання дорівнює сумарній енергії одиниці об'єму електромагнітних хвиль усіх можливих частот ( $0 \leq \nu \leq \infty$ ). А спектральна густина енергії випромінювання дорівнює енергії одиниці об'єму електромагнітних хвиль вузького інтервалу частот  $\nu, \nu + d\nu$  або інтервалу довжин хвиль  $\lambda, \lambda + d\lambda$ .

Для рівноважного випромінювання спектральна густина енергії є функцією частоти і температури -  $\rho_{\nu, T}$  або функцією довжини хвилі і температури -  $\rho_{\lambda, T}$ .

Об'ємна густина енергії рівноважного випромінювання є універсальною функцією тільки температури і визначається інтегруванням функції  $\rho_{\nu, T}$  або  $\rho_{\lambda, T}$  в усьому інтервалі частот або довжин хвиль:

$$w = \int_0^{\infty} \rho_{\nu, T} d\nu = \int_0^{\infty} \rho_{\lambda, T} d\lambda \quad (27.1)$$

Введемо поняття, які характеризують теплове випромінювання і поглинання тіл.

Кількість  $R_T$  енергії, що випромінюється з  $1\text{ м}^2$  поверхні тіла за  $1\text{ с}$  на всіх довжинах хвиль, називається інтегральною випромінювальною здатністю, або енергетичною світністю тіла.

Дослідження показують, що енергія випромінювання розподіляється між всіма частотами хвиль, які випромінюються нагрітим тілом.

Кількісною характеристикою теплового випромінювання служить випромінювальна здатність тіла, яка числово дорівнює потужності випромінювання з одиниці площі поверхні цього тіла в одиничному інтервалі

частот:

$$r_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^6}{d\nu}, \quad (27.2)$$

де  $dW_{\nu,\nu+d\nu}^6$  - енергія електромагнітного випромінювання, що випромінюється за одиницю часу з одиниці площі поверхні тіла в інтервалі частот від  $\nu$  до  $\nu+d\nu$ .

Випромінювальна здатність може бути представлена і як функція довжини хвилі. Ділянці спектра  $d\nu$  буде відповідати інтервал довжин хвиль  $d\lambda$ .

Диференціюючи вираз  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ , отримуємо

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu. \quad (27.3)$$

Знак „-” вказує на те, що зі зростанням однієї з величин,  $\nu$  або  $\lambda$ , друга величина зменшується. Тому далі знак „-” опускають.

Якщо інтервали  $d\nu$  і  $d\lambda$  стосуються однієї і тієї самої ділянки спектра, то  $r_{\nu,T}d\nu = r_{\lambda,T}d\lambda$ . Звідси  $r_{\lambda,T} = r_{\nu,T} \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T}$ .

Інтегральна випромінювальна здатність  $R_T$  тіла зв'язана з випромінювальною здатністю  $r_{\nu,T}$  співвідношенням:

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu. \quad (27.4)$$

Усі тіла тією чи іншою мірою поглинають енергію електромагнітних хвиль, які падають на них.

Поглинальна здатність тіла  $A_T$  дорівнює відношенню енергії, що поглинається тілом за одиницю часу одиницею площі, до енергії, що падає на тіло при даній температурі.

Спектральна поглинальна здатність тіла  $a_{\nu,T}$  показує, яка частина

енергії  $dW_{\nu, \nu+d\nu}$ , що попадає за одиницю часу на одиницю поверхні тіла електромагнітними хвилями з частотами від  $\nu$  до  $\nu+d\nu$ , які падають на неї, поглинається тілом:

$$a_{\nu, T} = \frac{dW_{\nu, \nu+d\nu}^n}{dW_{\nu, \nu+d\nu}} \quad (27.5)$$

Поглиняльна здатність  $a_{\nu, T}$  - величина безрозмірна.

Досліди показують, що випромінювальна здатність  $r_{\nu, T}$  і поглиняльна  $a_{\nu, T}$  тіла залежать від частоти  $\nu$  хвиль, які відповідно випромінюються або поглинаються, температури тіла, його хімічного складу і стану поверхні.

Тіло, яке здатне поглинати повністю при будь-якій температурі всю енергію електромагнітних хвиль, які падають на нього, незалежно від їх частоти, називається абсолютно чорним.

Отже, поглиняльна здатність абсолютно чорного тіла дорівнює одиниці:  $a_{\nu, T} = 1$  для всіх частот і температур.

Випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла позначимо  $r_{\nu, T}^*$ . Вона залежить тільки від частоти  $\nu$  і абсолютної температури тіла  $T$ .

Між спектральною густиною енергії рівноважного випромінювання і випромінювальною здатністю абсолютно чорного тіла існує такий зв'язок:

$$\rho_{\nu, T} = \frac{4}{c} r_{\nu, T}^*$$

Найдосконалішою моделлю абсолютно чорного тіла може бути невеликий отвір  $O$  в непрозорій стінці замкненої порожнини, внутрішня поверхня якої зачорнена (рис. 14.1). Світло, яке потрапляє всередину порожнини через отвір  $O$ , багаторазово відбивається від стінок порожнини, перш ніж вийти з порожнини назад. При кожному відбиванні енергія світла частково погли-

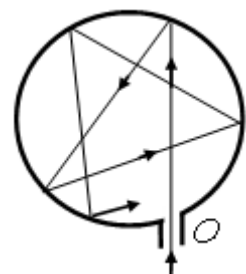


Рис. 27.1

нається стінками. Тому незалежно від матеріалу стінок інтенсивність світла, яке виходить з порожнини через отвір  $O$ , у багато разів менша за інтенсивність первинного світла, яке падає ззовні.

Поряд з поняттям абсолютно чорного тіла використовують поняття сірого тіла - тіла, поглинальна здатність якого менша від одиниці, але однакова для всіх частот і залежить лише від температури, матеріалу і стану поверхні тіла:  $a_{\nu,T}^c = \text{const} < 1$ .

Кірхгоф, спираючись на закони термодинаміки й аналізуючи умови рівноважного випромінювання в ізольованій системі тіл, встановив кількісний зв'язок між випромінювальною здатністю тіла і його поглинальною здатністю.

*Закон Кірхгофа: відношення випромінювальної здатності тіла до його поглинальної здатності не залежить від матеріалу тіла; воно є для всіх тіл універсальною функцією частоти  $\nu$  і температури  $T$ :*

$$r_{\nu,T} d\nu = a_{\nu,T} r_{\nu,T}^* d\nu, \quad \text{або} \quad \frac{r_{\nu,T}}{a_{\nu,T}} = r_{\nu,T}^* . \quad (27.6)$$

Для абсолютно чорного тіла  $a_{\nu,T}^c = 1$ , тому  $r_{\nu,T}^* = r_{\nu,T}$ , тобто універсальна функція Кірхгофа  $r_{\nu,T}^*$ , є не що інше, як випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла.

Для довільного тіла  $a_{\nu,T} < 1$  і тому в довільній області спектра  $r_{\nu,T}^* < r_{\nu,T}$ .

Якщо тіло не поглинає електромагнітні хвилі якоїсь частоти, то воно їх і не випромінює, оскільки при  $a_{\nu,T} = 0$ ,  $r_{\nu,T} = 0$ .

Використовуючи закон Кірхгофа, виразу для інтегральної випромінювальної здатності можна надати вигляду:

$$R_T = \int_0^{\infty} a_{\nu,T} r_{\nu,T}^* d\nu . \quad (27.7)$$

Для сірого тіла

$$R_T^c = a_{v,T}^c \int_0^\infty r_{v,T}^* dv = a_{v,T}^c R_T^* , \quad (27.8)$$

де  $R_T^* = \int_0^\infty r_{v,T}^* dv$  - інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла, яке залежить лише від абсолютної температури  $T$ .

## 27.2 Закон Стефана – Больцмана. Закон Віна. Формула Релея – Джинса.

Після встановлення закону Кірхгофа стало очевидним, що першочергове завдання теорії теплового випромінювання полягає у визначенні вигляду функції Кірхгофа  $r_{v,T}^*$ . Однак спочатку було знайдено залежність інтегральної випромінювальної здатності  $R_T^*$  абсолютно чорного тіла від його температури.

У 1884 р. Л. Больцман, застосувавши термодинамічний метод для дослідження рівноважного теплового випромінювання всередині замкненої порожнини, теоретично показав, що:

*інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла пропорційна до четвертого степеня його абсолютної температури.*

$$R_T^* = \sigma T^4 . \quad (27.9)$$

Цей закон називають *законом Стефана – Больцмана*, бо Д. Стефан на основі експериментальних даних дійшов аналогічного висновку. Але Д. Стефан помилково вважав, що інтегральна випромінювальна здатність будь-якого тіла пропорційна до четвертого степеня його абсолютної температури.

Коефіцієнт пропорційності  $\sigma$  називають сталою Стефана – Больцмана.

Внаслідок численних експериментів знайдено, що  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 К^4}$ .

Енергія, яка випромінюється за час  $t$  абсолютно чорним тілом з поверхні  $S$  при температурі  $T$ , дорівнює:

$$W = \sigma T^4 S t . \quad (27.10)$$

Якщо ж температура тіла змінюється з часом, тобто  $T = T(t)$ , то

$$W = \int_0^t \sigma T^4(t) S dt \quad (27.11)$$

Якщо абсолютно чорне тіло оточене середовищем з температурою  $T_0$ , то воно буде поглинати енергію, що випромінюється самим середовищем. В цьому випадку різниця між випускаючим і поглинаючим випромінюванням приблизно виражається формулою:

$$U = \sigma(T^4 - T_0^4) \quad (27.12)$$

До реальних тіл закон Стефана – Больцмана не застосовний, оскільки спостереження показують більш складну залежність  $R_T$  від температури, а також від форми тіла і стану його поверхні.

Розподіл енергії у спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла вивчив експериментально В. Ленглей у 1866 р. В ролі абсолютно чорного тіла було використано порожнину з малим отвором, а також чорну сажу.

Експерименти показали, що залежність  $r_{\nu, T}^*$  від частоти  $\nu$  при різних температурах  $T$  абсолютно чорного тіла має вигляд, зображений на рис. 27.2.

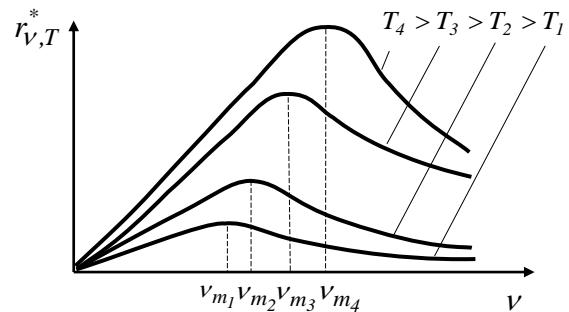


Рис. 27.2

*Закон зміщення Віна: довжина хвилі  $\lambda_m$ , яка відповідає максимальному значенню*

*випромінювальної здатності  $r_{\lambda, T}^*$  абсолютно чорного тіла, обернено пропорційна до його температури:*

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (27.13)$$

де  $b$  - стала Віна,  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ К} \cdot \text{м}$ .

Із закону Віна видно, що при зниженні температури абсолютно чорного тіла максимум енергії його випромінювання зміщується в область великих довжин хвиль. Отже, стає зрозуміло, чому при зниженні температури світних тіл в їх спектрі все більше переважає довгохвильове випромінювання.

Слід відзначити, що випромінювальні здатності  $r_{\nu,T}^*$  і  $r_{\lambda,T}^*$  не пропорційні одна до одної. Тому їх максимуми лежать у різних частинах спектра, так що

$$\lambda_m \text{ і } \nu_m \text{ не зв'язані співвідношенням } \lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Значення максимуму випромінювальної здатності  $r_{\lambda,T}^*$  абсолютно чорного тіла пропорційне до п'ятого степеня його абсолютної температури:

$$(r_{\lambda,T}^*)_{max} = \frac{c^4}{\lambda_m^5} f\left(\frac{c}{\lambda_m T}\right) = \frac{c^4}{b^5} f\left(\frac{c}{b}\right) T^5 = b_2 T^5, \quad (27.14)$$

де  $b_2 = 1,29 \cdot 10^{-5} \frac{Вт}{м^3 К^5}$ .

Наступна спроба теоретичного виведення залежності  $r_{\nu,T}^*$  належить англійським вченим Д. Релею і Д. Джінсу, які застосували до теплового випромінювання методи статистичної фізики, використавши класичний закон розподілу енергії за ступенями вільності.

Формула Релея – Джінса для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла має вигляд:

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT, \quad (27.15)$$

де  $k$  - стала Больцмана.

Цей вираз узгоджується з експериментальними даними лише в області малих частот і великих температур. Для великих частот формула виявилась явно неправильною. Розбіжність між експериментальною кривою (суцільна лінія) і кривою,

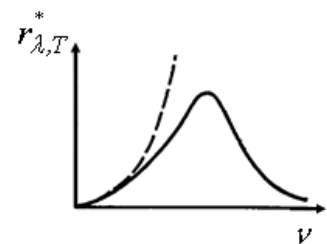


Рис. 27.3

одержаною за допомогою формули Релея – Джінса (штрихова лінія), видно з рис. 27.3. Спроба отримати закон Стефана – Больцмана з

формули Релея – Джінса не дає позитивного результату. Інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла при будь-якій температурі перетворюється в нескінченність:

$$R_T^* = \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^* d\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty \quad (27.16)$$

Водночас за законом Стефана-Больцмана  $R_T^* \sim T^4$ . Цей результат отримав назву „ультрафіолетової катастрофи”.

Отже, в рамках класичної фізики не вдалося пояснити закони розподілу енергії в спектрі абсолютно чорного тіла.

В 1900 р. М. Планк вперше знайшов правильний вираз для функції Кірхгофа і обґрунтував спектральні закономірності випромінювання абсолютно чорного тіла.

В своїх розрахунках Планк, враховуючи, що об’ємна густина енергії рівноважного випромінювання в замкненій порожнині залежить від температури стінок порожнини, а матеріал стінок значення не має, вибрав найпростішу модель випромінювальної системи у вигляді сукупності лінійних гармонічних осциляторів (електричних диполів) з найрізноманітнішими частотами  $\nu$ . Кожний з таких осциляторів відповідає монохроматичній компоненті чорного випромінювання.

Нехай  $\langle \varepsilon_\nu \rangle$  - середнє значення енергії осцилятора з власною частотою  $\nu$ . Тоді випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \varepsilon_\nu \rangle \quad (27.17)$$

Правильний вираз для середньої енергії осцилятора  $\langle \varepsilon_\nu \rangle$  і функції Кірхгофа вдалось знайти Планку введенням *квантової гіпотези*, яка зовсім не притаманна класичній фізиці. У класичній фізиці припускається, що енергія

будь-якої системи може змінюватись неперервно, набираючи будь-яких, як завгодно близьких значень.

За квантовою гіпотезою Планка енергія  $\varepsilon_\nu$  осцилятора може набувати тільки певних дискретних значень, які дорівнюють цілому числу елементарних порцій - квантів енергії  $\varepsilon_{\nu_0}$ :

$$\varepsilon_\nu = n\varepsilon_{\nu_0} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (27.18)$$

Вираз для  $\langle \varepsilon_\nu \rangle$  Планк отримав в такому вигляді:

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{\varepsilon_{\nu_0}}{e^{\frac{\varepsilon_{\nu_0}}{kT}} - 1} \quad (27.19)$$

Величину  $\varepsilon_{\nu_0}$  Планк визначив з вимоги, щоб вираз  $r_{\nu, T}^*$  задовольняв загальну термодинамічну формулу Віна

$$r_{\nu, T}^* = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (27.20)$$

Ця вимога зводиться до виконання співвідношення

$$\frac{2\pi}{c^2} \frac{\frac{\varepsilon_{\nu_0}}{\nu}}{e^{\frac{\varepsilon_{\nu_0}}{kT}} - 1} = f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (27.21)$$

Але  $\varepsilon_{\nu_0}$  є характеристикою лише самого осцилятора, а тому не може залежати від температури  $T$  - макроскопічного параметра, що визначає стан речовини і випромінювання. Величина  $\varepsilon_{\nu_0}$  може залежати лише від власної частоти  $\nu$  осцилятора. В такому випадку, щоб ліва частина даного співвідношення була функцією лише аргументу  $\frac{\nu}{T}$ , необхідно і достатньо, щоб  $\varepsilon_{\nu_0} = h\nu$ , де  $h$  - стала величина, яку називають сталою Планка.

Тобто, згідно з гіпотезою Планка атоми і молекули випромінюють енергію окремими порціями, або квантами, величина яких  $\varepsilon_{\nu_0} = h\nu$ .

Отже, формула Планка для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла має вигляд:

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}, \quad r_{\lambda,T}^* = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \quad (27.22)$$

В області малих частот ( $h\nu \ll kT$ ) формула Планка збігається з формулою Релея – Джінса, а у випадку високих частот ( $h\nu \gg kT$ ) - з виразом, який отримав В. Він.

З формули Планка можна отримати закон Стефана – Больцмана і закон зміщення Віна.

Інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла

$$R_T = \int_0^\infty r_{\nu,T}^* d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1} d\nu. \quad (27.23)$$

Для отримання виразу закону зміщення Віна знайдемо  $\frac{\partial r_{\lambda,T}^*}{\partial \lambda}$ :

$$\frac{\partial r_{\lambda,T}^*}{\partial \lambda} = -\frac{2\pi c^2 h}{\left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right) \lambda^6} + \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{\frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{\left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right)^2} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^6 \left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right)} \left[ \frac{\frac{hc}{kT\lambda} e^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} - 5 \right]. \quad (27.24)$$

Довжину хвилі  $\lambda_m$ , яка відповідає максимальному значенню  $r_{\lambda,T}^*$ ,

знайдемо, прирівнявши до нуля  $\frac{\partial r_{\lambda,T}^*}{\partial \lambda}$ . Введемо змінну  $y = \frac{hc}{kT\lambda_m}$  і отримаємо

$$ye^y - 5e^y + 5 = 0.$$

Розв'язання цього трансцендентного рівняння методом послідовних

наближень дає  $y = 4.965$ . Отже,  $\frac{hc}{kT\lambda_m} = 4.965$ .

Звідси

$$\lambda_m = \frac{hc}{4.965kT} = \frac{b}{T}. \quad (27.25)$$

Таким чином, формула Планка є повним розв'язком основної задачі теплового випромінювання, сформульованої Кірхгофом.

### **27.3 Зовнішній фотоефект і його закони. Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту.**

Поглинання світлового випромінювання в речовині часто супроводжується електричними явищами, які називають фотоелектричним ефектом.

*Фотоелектричним ефектом називаються електричні явища, які супроводжують поглинання світлового випромінювання в речовині.*

Розрізняють:

1) *зовнішній фотоефект* – виривання електронів з речовини під дією світла;

2) *внутрішній фотоефект*, при якому відбувається лише збільшення кількості вільних електронів всередині речовини, але вони не виходять назовні;

3) *фотогальванічний ефект*, при якому на границі поділу напівпровідника і металу або на границі поділу двох напівпровідників під впливом опромінювання виникає електрорушійна сила (за відсутності зовнішнього електричного поля);

4) *фотоефект в газоподібному середовищі*, який полягає у фотоіонізації окремих молекул або атомів.

Розглянемо закономірності зовнішнього фотоефекту. Зовнішній фотоефект спостерігається у твердих тілах, а також у газах. Фотоефект відкрив у 1887 р. Г. Герц, який виявив, що при освітленні негативного електрода іскрового розрядника ультрафіолетовими променями розряд відбувається при меншій напрузі між електродами, ніж без такого освітлення.

Перші фундаментальні дослідження фотоелектричного ефекту виконані в 1888 – 1889 рр. О.Г. Столетовим за допомогою установки, що показана на рис. 27.4. Конденсатор, утворений дротяною сіткою з міді *C* і суцільною цинковою пластинкою *D*, був послідовно ввімкнений з гальванометром *G* в коло акумуляторної батареї *B*. При освітленні негативно зарядженої пластини світлом від джерела у колі виникав електричний струм, який називається фотострумом. На основі своїх дослідів Столетов дійшов таких висновків:

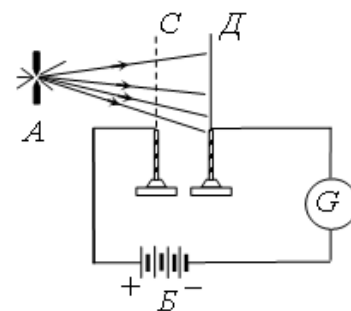


Рис. 27.4

- 1) найбільшу дію чинять ультрафіолетові хвилі;
- 2) сила струму зростає із збільшенням освітленості пластини;
- 3) заряди, які випускаються під дією світла, мають від’ємний знак.

У 1898 р. Леонард і Томсон методом відхилення зарядів у електричному

і магнітному полях визначили питомий заряд  $\frac{e}{m}$  частинок, що вириваються світлом з катода, довівши, що ці частинки є електронами.

Леонард й інші дослідники удосконалили прилад Столетова, помістивши електроди у вакуумну трубку (рис. 27.5).

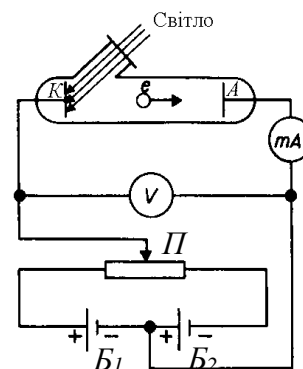


Рис. 27.5

Катод *K*, який покритий досліджуваним металом, освітлювався монохроматичним світлом, що проходить у трубку через кварцове вікно.

Напругу між катодом і анодом можна регулювати за допомогою потенціометра *П* і вимірюють вольтметром *V*. Дві акумуляторні батареї *B<sub>1</sub>* і *B<sub>2</sub>*, увімкнуті „назустріч одна одній”, дають можливість за допомогою потенціометра змінювати не лише абсолютну величину, а й знак напруги *U*.

Цей пристрій дав можливість дослідити вольт-амперну характеристику фотоефекту – залежність фотоструму  $I$  від напруги між електродами (рис. 27.6).

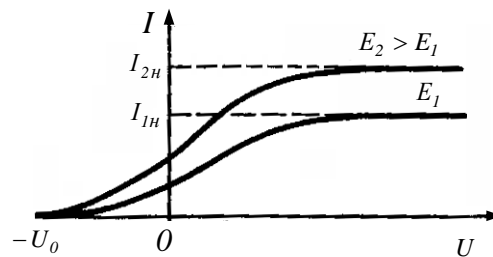


Рис. 27.6

Така залежність відповідає двом різним освітленостям  $E$  катода. У міру збільшення напруги  $U$  фотострум  $I$  поступово зростає, тобто все більша кількість фотоелектронів досягає анода. Максимальне значення фотоструму  $I_n$ , яке називається фотострумом насичення, відповідає таким значенням  $U$ , при яких усі електрони, що вибиваються з катода, досягають анода:  $I_n = en$ , де  $n$  – кількість електронів, які вилітають з катода за  $1c$ .

З вольт-амперної характеристики виходить, що при  $U=0$  фотострум не зникає. Електрони, вибиті з катода світлом, мають деяку початкову швидкість  $v$ , а отже, і відмінну від нуля кінетичну енергію і можуть досягати анода без зовнішнього поля. Для того, щоб фотострум став нульовим, необхідно прикласти *затримуючу напругу*  $U_0$ . При  $U = U_0$  жоден з електронів не може подолати затримуючого поля і досягнути анода. Отже,

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = eU_0, \quad (27.26)$$

тобто, вимірявши  $U_0$ , можна знайти максимальне значення швидкості і кінетичної енергії фотоелектронів.

Дослідами встановлено такі основні закони *зовнішнього фотоефекту*:

I. Закон Столетова: при фіксованій частоті падаючого світла кількість фотоелектронів, що вириваються з катода за одиницю часу, пропорційне до інтенсивності світла (сила фотоструму насичення пропорційна до енергетичної освітленості  $E$  катода –  $I_n = \gamma E$ ,  $\gamma$  – спектральна густина фотокатода).

II. Максимальна початкова швидкість фотоелектронів визначається лише частотою  $\nu$  світла і не залежить від його інтенсивності. Величина  $v_{max}$  зростає із збільшенням частоти  $\nu$ .

III. Для кожної речовини існує „червона межа” фотоефекту, тобто максимальна довжина хвилі  $\lambda_{max}$ , при якій спостерігається фотоефект. Величина  $\lambda_{max}$  залежить від хімічної природи речовини і стану його поверхні.

Фотоефект не можна пояснити з погляду хвильової теорії світла.

А. Ейнштейн в 1905 р. показав, що явище фотоефекту і його закономірності можуть бути пояснені на основі запропонованої ним квантової теорії фотоефекту.

Згідно з Ейнштейном світло частотою  $\nu$  не лише випромінюється, але і поширюється в просторі і поглинається речовиною окремими порціями, енергія яких  $\varepsilon = h\nu$ . Поширення світла треба розглядати не як неперервний хвильовий процес, а як потік локалізованих у просторі дискретних світлових квантів, що рухаються зі швидкістю поширення світла у вакуумі. Ці кванти електромагнітного випромінювання отримали назву *фотонів*.

За Ейнштейном кожний фотон поглинається лише одним електроном. Тому кількість вирваних фотоелектронів повинна бути пропорційна до кількості поглинутих фотонів, тобто пропорційна до інтенсивності світла (I закон фотоефекту). Безінерційність фотоефекту пояснюється тим, що передача енергії при зіткненні фотона з електроном відбувається майже миттєво.

*Енергія падаючого фотона витрачається на виконання електроном роботи виходу  $A$  з металу і на надання електрону, який вилетів, кінетичної*

*енергії  $\frac{mv_{max}^2}{2}$ .*

За законом збереження енергії

$$h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2} . \quad (27.27)$$

Це рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту.

Перевірку формули Ейнштейна з достатньою точністю здійснив в 1916 р. Міллікен, який створив прилад, в якому поверхні, які досліджувались, очищались у вакуумі і після чого вимірювалась робота виходу  $A$  і досліджувалась залежність максимальної кінетичної енергії фотоелектронів від частоти  $\nu$  світла. Результати вимірювань повністю підтвердили справедливість формули Ейнштейна.

Рівняння Ейнштейна дає змогу пояснити II і III закони фотоефекту. Максимальна кінетична енергія фотоелектрона лінійно зростає із збільшенням частоти падаючого випромінювання і не залежить від його інтенсивності, оскільки ні робота виходу  $A$ , ні частота  $\nu$  від інтенсивності світла не залежать (II закон). Оскільки із зменшенням частоти світла кінетична енергія фотоелектронів зменшується, то при деякій досить малій частоті  $\nu = \nu_{min}$  кінетична енергія фотоелектронів буде дорівнювати нулю. Енергії кванта вистачає тільки, щоб вирвати електрон з металу. Отже,

$$h\nu_{min} = h \frac{c}{\lambda_{max}} = A \quad (27.28)$$

Величина  $\lambda_{max}$  залежить лише від роботи виходу електрона, тобто від хімічної природи речовини і стану її поверхні.

Якщо створити поле, яке затримуватиме рух електронів, тобто на катод подати „+”, а на анод „-”, то фотострум буде зменшуватись і при напрузі  $U_0$  струм дорівнюватиме нулю. Ця напруга називається затримуючим потенціалом. Робота поля

$$eU_0 = \frac{mU_{max}^2}{2} \quad (27.29)$$

Тоді формула Ейнштейна матиме вигляд:

$$h\nu = A + eU_0 \quad (27.30)$$

Якщо замість роботи виходу підставити значення енергії фотона, що

відповідає червоній межі фотоэффекту, то

$$h\nu = h\nu_{min} + eU_0 \quad ; \quad eU_0 = h(\nu - \nu_{min}). \quad (27.31)$$

#### 27.4 Маса та імпульс фотона. Ефект Комптона.

Згідно з гіпотезою світлових квантів Ейнштейна світло випромінюється, поглинається і поширюється дискретними порціями, які названі *фотонами*.

Енергія фотона  $\varepsilon_\phi = h\nu$ .

Формулу для маси фотона можна безпосередньо вивести з формули, яка виражає взаємозв'язок маси і енергії в теорії відносності:

$$m_\phi = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (27.32)$$

Маса фотона відрізняється від маси макроскопічних тіл і мас інших „елементарних” частинок. Ця відмінність полягає в тому, що фотон не має маси спокою  $m_0$ .

Якщо вважати, що фотон має відмінну від нуля масу спокою, то

застосування формули  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  до фотона, який рухається у вакуумі з швидкістю  $v = c$ , приводить до абсурду, бо тоді ( $m = \infty$ ). Отже, фотонів, які перебувають у спокої, не існує і для фотона  $m_0 = 0$ . Фотон завжди рухається зі швидкістю  $v = c$ , бо при  $v \neq c$  маса і енергія фотона дорівнювали б нулю, що

суперечить формулі  $m = \frac{h\nu}{c^2}$ .

Зв'язок імпульсу фотона  $P_\phi$  з його енергією  $\varepsilon_\phi$  можна вивести з формули, яка отримана в теорії відносності:

$$\varepsilon_\phi = c\sqrt{P_\phi^2 + m_0^2 c^2}. \quad (27.33)$$

Для фотона  $m_0 = 0$  і

$$P_{\phi} = \frac{\varepsilon_{\phi}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{m_{\phi}c^2}{c} = m_{\phi}c, \quad (27.34)$$

де  $m_{\phi}$  – маса фотона. Введемо хвильове число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , тоді імпульс фотона

$$P_{\phi} = h\frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}k = \hbar k, \quad (27.35)$$

де  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

Імпульс фотона є векторною величиною. Напрямок імпульсу  $\vec{P}_{\phi}$  збігається з напрямком поширення світла, що характеризується хвильовим вектором  $\vec{k}$ , який числово дорівнює хвильовому числу.

Фотон, подібно до будь-якої рухомої частинки або тіла, має енергію, масу та імпульс. Усі ці корпускулярні характеристики пов'язані з хвильовою характеристикою світла – його частотою  $\nu$ .

Одним з підтверджень наявності у фотонів маси та імпульсу є світловий тиск.

Необхідність існування тиску світла вперше показав Д. Максвелл, виходячи із розробленої ним електродинамічної теорії. У 1901 р П.М. Лебедєв вперше експериментально виявив і виміряв тиск світла на тверді тіла і гази

Прилад Лебедєва – це досить чутливі крутильні терези, рухома система яких складалась з легкого каркаса із закріпленими на ньому тонкими кружками, які розміщені симетрично відносно осі підвісу (рис. 27.7). Деякі крильця були дзеркальними, а поверхня інших була зачорнена. Усю цю систему підвішували на тонкій пружній нитці всередині закритого скляного балона, в якому був створений високий вакуум.

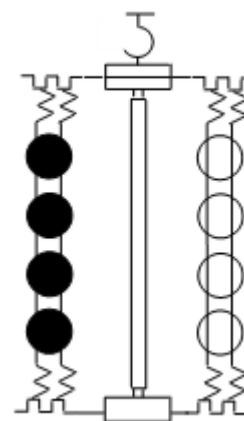


Рис. 27.7

Крильця освітлювали вольтовою дугою, напрямленою на них за допомогою системи лінз і дзеркал. Величину світлового тиску на крильця визначали за кутом закручування нитки підвісу.

Тиск світла настільки малий, що для його надійного вимірювання треба було усунути вплив на крильця всіх інших факторів. Вплив конвекційних струмин повітря Лебедев усунув, саме створивши в балоні досить високий вакуум. Однак і в такому разі не було усунуто так званий радіометричний ефект. Причина його в тому, що зачорнене крильце нагрівається внаслідок поглинання світла, яке падає на нього, причому температури освітленої і неосвітленої (задньої) поверхонь крильця неоднакові. Молекули розрідженого повітря в балоні відбиваються від нагрітої поверхні крильця з більшою швидкістю, передаючи їм відповідно більший імпульс. Тиск, зумовлений такою дією значно більший за світловий. Радіометричний ефект може призвести до того, що в досліді тиск на зачорнене крильце буде більший за тиск на дзеркальне крильце тих самих розмірів. Лебедев усунув вплив радіометричного ефекту, використавши у своїх дослідах дуже тонкі крильця різної товщини від  $0,01$  до  $0,1$  мм.

Тиск світла на дзеркальне крильце з коефіцієнтом відбиття  $\rho = 1$  виявився у два рази більший, ніж тиск на зачорнене крильце ( $\rho = 0$ ).

З погляду квантової теорії тиск світла на поверхню якого-небудь тіла зумовлений тим, що при ударі з цією поверхнею кожний фотон передає їй свій імпульс. При відбиванні світла від поверхні тіла падаючий фотон поглинається поверхнею, а потім знову випромінюється нею з імпульсом протилежного напрямку.

Нехай за одиницю часу на поверхню падає  $N$  фотонів. Якщо  $\rho$  - коефіцієнт відбивання світла від поверхні, то з  $N$  фотонів  $\rho N$  дзеркально відбиваються, а  $(1-\rho)N$  поглинаються.

Фотони, що відбиваються, передають тілу сумарний за одиницю часу

імпульс, який напрямлений перпендикулярно до поверхні і чисельно дорівнює

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta t} = \rho N \frac{2h\nu}{c}. \quad (27.36)$$

Поглинуті фотони передають тілу сумарний імпульс за одиницю часу, нормальна складова до поверхні якого чисельно становить

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta t} = (1 - \rho) N \frac{h\nu}{c}. \quad (27.37)$$

Отже, тиск світла на поверхню визначається формулою

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\Delta P}{S \Delta t} = \frac{\Delta P_1 + \Delta P_2}{S \Delta t} = \rho N \frac{2h\nu}{Sc} + (1 - \rho) N \frac{h\nu}{Sc} = (1 + \rho) \frac{N}{S} \frac{h\nu}{c} = \frac{I}{c} (1 + \rho), \quad (27.38)$$

де  $I = \frac{N h \nu}{S}$  – енергія всіх фотонів, що падають на одиницю площі поверхні за

одиницю часу, тобто інтенсивність світла. Величина  $w = \frac{I}{c}$  – об'ємна густина енергії падаючого випромінювання. Отже,

$$p = w(1 + \rho). \quad (27.39)$$

Для абсолютно відбивної поверхні  $\rho = 1$  тиск випромінювання вдвічі більший, ніж для абсолютно поглинаючої поверхні  $\rho = 0$ .

Тиск сонячного випромінювання (в ясний день) на поглинаючу поверхню, що орієнтована перпендикулярно до променів, приблизно становить  $4 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ .

Отже, світло одночасно має властивості безперервних електромагнітних хвиль і властивості дискретних фотонів. Воно являє собою діалектичну єдність цих протилежних властивостей. Корпускулярні і хвильові властивості світла не виключають, а навпаки, взаємно доповнюють одне одного.

Особливо чітко проявляються корпускулярні властивості світла в явищі розсіяння рентгенівських променів. А. Комптон, досліджуючи у 1923 р. розсіяння монохроматичних рентгенівських променів речовинами з легкими атомами (парафін, бор), виявив, що у складі розсіяного випромінювання, поряд з випромінюванням початкової довжини хвилі  $\lambda$ , спостерігається також

випромінювання більшої довжини хвилі  $\lambda'$ .

Схема досліду Комптона зображена на рис. 27.8. Пучок монохроматичних рентгенівських променів, пройшовши систему діафрагм  $D$  падає на розсіюючу речовину  $P$  і після розсіювання на кут

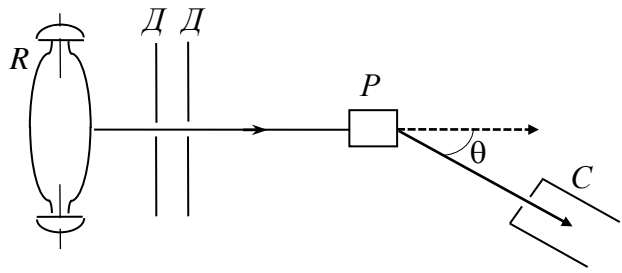


Рис. 27.8

$\theta$  попадає в рентгенівський спектрограф  $C$ , де вимірюється довжина хвилі розсіюваного випромінювання.

Досліди Комптона показали, що довжина хвилі  $\lambda'$  розсіяного випромінювання більша за довжину хвилі  $\lambda$  падаючого випромінювання, причому різниця  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  не залежить від довжини хвилі  $\lambda$  падаючого випромінювання і природи розсіювальної речовини, а визначається лише величиною кута розсіювання  $\theta$ :

Пояснити ефект Комптона можна на основі квантових уявлень про природу світла. Якщо вважати, що випромінювання є потоком фотонів, то ефект Комптона це результат пружного зіткнення рентгенівських фотонів з вільними електронами речовини (для легких атомів електрони слабо зв'язані з ядрами атомів, тому їх можна вважати вільними). У процесі цього зіткнення фотон передає електрону частину своїх енергії й імпульсу відповідно до законів їх збереження.

Розглянемо пружне зіткнення двох частинок - налітаючого фотона, що має імпульс  $p_\phi = \frac{h\nu}{c}$  і енергію  $\varepsilon_\phi = h\nu$  з вільним електроном, що знаходиться у спокої. Енергія спокою електрона

$$W_0 = m_0 c^2, \quad (27.40)$$

де  $m_0$  - маса спокою електрона (рис. 27.9). Фотон, зіткнувшись з електроном, передає йому частину своєї енергії й імпульсу та змінює напрямок руху

(розсіюється). Зменшення енергії фотона і означає збільшення довжини хвилі.

Нехай імпульс і енергія розсіяного фотона дорівнюють

$P'_\phi = \frac{h\nu'}{c}$  і  $\varepsilon'_\phi = h\nu'$ . Електрон, який

раніше знаходився у стані спокою, отримує імпульс  $P_e = m_0v$  і енергію

$$W = mc^2 = c\sqrt{P_e^2 + m_0^2c^2} \quad (27.41)$$

При кожному такому зіткненні виконуються закони збереження енергії та імпульсу.

Згідно із законом збереження енергії

$$m_0c^2 + h\nu = c\sqrt{P_e^2 + m_0^2c^2} + h\nu' \quad (27.42)$$

а згідно із законом збереження імпульсу

$$\frac{h\nu}{c} = P_e + \frac{h\nu'}{c}, \quad \text{або} \quad \vec{P}_\phi = \vec{P}_e + \vec{P}'_\phi \quad (27.43)$$

Розділимо перший вираз на  $c$  і запишемо його у вигляді:

$$\sqrt{P_e^2 + m_0^2c^2} = \frac{h}{c}(\nu - \nu') + m_0c \quad (27.44)$$

Піднесемо обидві частини до квадрату:

$$P_e^2 + m_0^2c^2 = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + 2\frac{h}{c}(\nu - \nu')m_0c + m_0^2c^2 \quad (27.45)$$

Звідси

$$P_e^2 = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + 2\frac{h}{c}(\nu - \nu')m_0c \quad (27.46)$$

Відповідно до теореми косинусів для трикутника імпульсів рівняння  $\vec{P}_\phi = \vec{P}_e + \vec{P}'_\phi$  перепишемо так:

$$P_e^2 = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\theta) \quad (27.47)$$

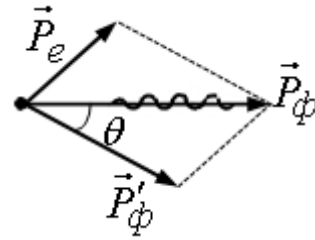


Рис. 27.9

Прирівнюючи вирази для  $\vec{P}_e^2$ , отримуємо

$$\frac{h^2}{c^2}(v^2 + v'^2) - \frac{h^2}{c^2} 2vv' + 2\frac{h}{c}(v - v')m_0c = \frac{h^2}{c^2}(v^2 + v'^2) - 2\frac{h^2}{c^2}vv' \cos \theta, \quad (27.48)$$

Звідси  $m_0c(v - v') = hvv'(1 - \cos \theta)$ . Оскільки  $v = \frac{c}{\lambda}$ ,  $v' = \frac{c}{\lambda'}$ , то,

$$\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} = \frac{h}{m_0c^2} \frac{c}{\lambda} \frac{c}{\lambda'} (1 - \cos \theta); \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta),$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (27.49)$$

де  $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$  - КОМПТОНІВСЬКА ДОВЖИНА ХВИЛІ, яка є сталою для всіх речовин.

Розрахуємо тепер кінетичну енергію електрона віддачі:

$$E_k = (m - m_0)c^2. \quad (27.50)$$

Із закону збереження енергії  $h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2$  маємо:

$$E_k = (m - m_0)c^2 = h(\nu - \nu') = h\nu\nu' \left( \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right) =$$

$$= h \frac{c}{\lambda} \frac{c}{\lambda'} \left( \frac{\lambda'}{c} - \frac{\lambda}{c} \right) = \frac{hc}{\lambda\lambda'} (\lambda' - \lambda) = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = h\nu \frac{2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Енергія  $E_k$  максимальна при  $\theta = \pi$ :

$$E_k^{max} = h\nu \frac{2\lambda_c}{\lambda + 2\lambda_c}. \quad (27.51)$$

Якщо електрон сильно зв'язаний з атомом, то при розсіянні на ньому фотона останній передає енергію й імпульс не електрону, а атому загалом. Маса атома в багато разів більша від маси електрона. Тому атому передається лише незначна частина енергії фотона, так що довжина хвилі  $\lambda'$  розсіяного випромінювання практично не відрізняється від довжини хвилі  $\lambda$  падаючого випромінювання. Частка електронів, сильно зв'язаних в атомах, збільшується

із зростанням порядкового номера елемента і відповідно із зростанням маси атомів. Тому, чим важчі атоми розсіювальної речовини, тим більша інтенсивність незміщеної компоненти ( $\lambda' = \lambda$ ) в розсіяному випромінюванні.

Ефект Комптона спостерігається не лише на електронах, але і на інших заряджених частинках, наприклад, протонах, але внаслідок великої маси протона його віддача відчувається лише при розсіянні електронів дуже великих енергій.

### Контрольні питання до розділу 7

1. Сформулювати закони геометричної оптики. Вивести закони відбивання та заломлення світла.
2. Дати визначення лінзи та тонкої лінзи. Чому максимального поширення набули саме тонкі лінзи?
3. Дати визначення оптичного центру, фокусної відстані та оптичної сили тонкої лінзи.
4. Навести основні властивості ходу променів та класифікацію зображень в тонких лінзах.
5. Дати визначення уявного предмету. Вивести (на одному конкретно взятому прикладі) формулу тонкої лінзи. Описати принцип побудови зображень в системі тонких лінз.
6. Сформулюйте умови часової та просторової когерентності електромагнітних хвиль.
7. Одержіть умови *max* та *min* інтерференції у досліді Юнга.
8. Розрахувати багато променеву інтерференцію  $N$  когерентних електромагнітних хвиль при послідовному зсуві по фазі  $\Delta\phi$  у них.
9. Розрахуйте дифракційну картину Френеля на круглому отворі.
10. Розрахуйте дифракційну картину Френеля на дискові.
11. Розрахуйте дифракційну картину Фраунгофера на щілині: умови *max* та *min*.

12. Розрахуйте дифракційну картину Фраунгофера на дифракційній решітці; умови *max* та *min*.
13. Розрахуйте дисперсію дифракційної решітки.
14. Розрахуйте розрізнявальну здатність дифракційної решітки.
15. Розрахуйте дифракцію рентгенівського випромінювання на кристалічній решітці.
16. Розрахуйте вираз для показника заломлення в дисперсному середовищі на основі класичної електронної теорії дисперсії.
17. Розрахуйте групова швидкість на прикладі розповсюдження двох близьких за частотами електромагнітних хвиль.
18. Одержіть вираз для інтенсивності світла в поглинаючому середовищі.
19. Дати визначення поляризованого та неполяризованого світла. Сформулюйте поняття лінійної, еліптичної та природної поляризації світла.
20. Сформулюйте поняття поляризатора та аналізатора світла та одержіть вираз для закону Малюса.
21. Дайте визначення кута Брюстера та вказати вираз для нього.
22. Знайти кут між заломленим та відбитим променями, якщо кут падіння дорівнює куту Брюстера.
23. У чому полягає явище оптичної анізотропії одновісних кристалів?
24. Опишіть індикатриси швидкості та показника заломлення додатнього та від'ємного одновісного кристала.
25. Опишіть явище природного та штучного дихроїзму.
26. Опишіть та намалюйте принципову схему призми Ніколя.
27. Що являє собою природна та штучна оптична активність речовини? Наведіть приклади.

## Розділ 8 ФІЗИКА АТОМА ТА АТОМНОГО ЯДРА.

### Тема 28. Фізика атома.

#### 28.1 Досліди Резерфорда. Ядерна модель атома.

Перша спроба створення моделі атома на основі нагромаджених експериментальних даних належить Дж. Томсону (1903р.). Згідно з цією моделлю атом є рівномірно зарядженою кулею радіусом  $\sim 10^{-10} \text{ м}$ , всередині якої біля своїх положень рівноваги коливаються електрони; сумарний від'ємний заряд електронів дорівнює додатному заряду кулі. Модель Томсона виявилась неправильною.

Велику роль у розвитку уявлень про будову атома відіграли досліди Е. Резерфорда із вивчення розсіяння  $\alpha$ -частинок в речовині.  $\alpha$ -частинки утворюються під час природного радіоактивного розпаду деяких важких елементів і є позитивно зарядженими частинками з зарядом  $2e$  і масою, яка приблизно в чотири рази більша за масу атома водню.

Спрощена схема досліду Резерфорда зображена на рис. 28.1.

Джерело  $\alpha$ -частинок поміщене всередині свинцевої порожнини з вузьким каналом. Усі  $\alpha$ -частинки, крім тих, що рухаються всередині вузького каналу, поглинаються свинцем. Потік  $\alpha$ -частинок, пройшовши через вузьку діафрагму  $D$ , потрапляє на тонку золоту фольгу  $\Phi$  завтовшки  $10^{-6} - 10^{-7} \text{ м}$ , що

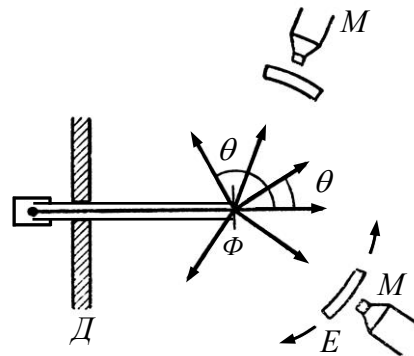


Рис. 28.1

складається з декількох атомних шарів. При проходженні через фольгу  $\alpha$ -частинки відхиляються на різні кути  $\theta$  і потрапляють на екран  $E$ , який можна поміщати в різних положеннях відносно фольги. Екран покритий

флюоресцентною речовиною. За допомогою мікроскопа  $M$  можна спостерігати місця потрапляння  $\alpha$ -частинок за свіченням екрану. Поведінку  $\alpha$ -частинок після проходження через фольгу вивчали в камері Вільсона.

Резерфорд з'ясував, що потік  $\alpha$ -частинок, пройшовши крізь фольгу, майже не відхиляється від прямолінійного напрямку і лише деякі частинки змінюють напрямок руху, відхиляючись на дуже великі кути, близько  $135 - 150^\circ$  (рис. 28.2).

На підставі досліду Резерфорд зробив такі висновки.

1. Оскільки переважна більшість  $\alpha$ -частинок проходить через атоми, не змінюючи свого напрямку, то атом прозорий і частинки, на яких відбувається розсіювання, займають об'єм значно менший за об'єм атома.

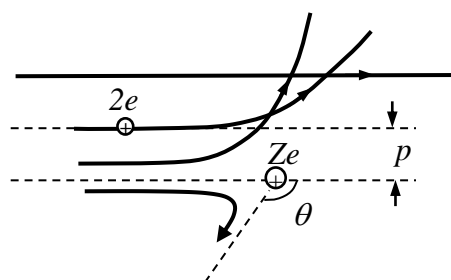


Рис. 28.2

2. Тому що при розсіюванні спостерігаються кути відхилення  $\alpha$ -частинок близько  $150^\circ$ , то взаємодіють одноіменно заряджені частинки, тобто розсіювання відбувається на позитивно заряджених частинках.
3. Після проходження  $\alpha$ -частинкою фольги в камері Вільсона спостерігалися треки однакової довжини, які належать лише  $\alpha$ -частинці. Отже, маса частинки, на якій відбувається розсіювання, значно більша від маси  $\alpha$ -частинки і через це вона не отримує прискорення.
4. Резерфорд приблизно розрахував розмір частинки, на якій відбувається розсіювання. Розглянемо центральний удар  $\alpha$ -частинки, який відповідає куту розсіяння  $\theta = 180^\circ$ . Із закону збереження енергії випливає, що в момент найбільшого зближення  $\alpha$ -частинки з невідомою частинкою її кінетична енергія  $E_{k\alpha}$  цілком перейде в потенціальну енергію їх взаємодії:

$$\frac{m_{\alpha}v_{\alpha}^2}{2} = \frac{2e \cdot Ze}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (28.1)$$

Оцінимо величину  $R$  для золота ( $Z=79$ ). Якщо припустити, що швидкість  $\alpha$ -частинки  $v_{\alpha} \approx 10^7$  м/с, її маса  $m_{\alpha} = 6,6 \cdot 10^{-27}$  кг, заряд електрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, то

$$R = \frac{2eZe}{2\pi\epsilon_0 m_{\alpha}v_{\alpha}^2} \approx 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ м}$$

. В той же час, радіус атома  $r \approx 10^{-10}$  м. Таким чином, частинка на якій відбувається розсіювання  $\alpha$ -частинок займає в атомі об'єм, який значно менший від об'єму атома.

Резерфорд теоретично розглянув задачу про розсіювання  $\alpha$ -частинок у кулонівському електричному полі частинки, що має заряд  $Q$ . Кут відхилення  $\alpha$ -частинок  $\theta$  тим більший, чим менша віддаль  $p$  від ядра до початкового напрямку руху  $\alpha$ -частинки (рис. 28.2). Віддаль  $p$  називається „параметром удару”.

На підставі результатів дослідів з розсіювання  $\alpha$ -частинок тонкими фольгами Резерфорд запропонував *ядерну модель атома*.

Згідно з цією моделлю в центрі атома знаходиться ядро, в якому зосереджено позитивний заряд  $Ze$  і практично вся маса атома. Лінійні розміри ядра  $\sim 10^{-14} - 10^{-15}$  м.

Навколо ядра в області з лінійними розмірами  $\sim 10^{-10}$  м по замкнених орбітах рухаються  $Z$  електронів, утворюючи електронну оболонку атома.

Ядерна модель Резерфорда зовні дуже нагадує Сонячну систему: у центрі – ядро, навколо нього по орбітах рухаються електрони. Тому цю модель називають планетарною. Орбіти електронів в атомі стаціонарні, атому властива виняткова стійкість.

Стійкість атома не можна погодити з класичним поясненням ядерної моделі.

Електрон по коловій орбіті рухається з доцентровим прискоренням  $a = \frac{v^2}{r}$ , а згідно із законами електродинаміки він повинен випромінювати

електромагнітні хвилі і внаслідок цього неперервно втрачати енергію. За класичними уявленнями це випромінювання повинно відбуватися безперервно. Тому електрон не зможе триматись на коловій орбіті – він повинен по спіралі наближатись до ядра, і частота його обертання навколо ядра повинна безперервно змінюватись. Електромагнітне випромінювання атома тому повинно мати неперервний, а не лінійчастий спектр.

Отже, застосування класичної електродинаміки до ядерної моделі атома привело до суперечності з експериментальними фактами.

## 28.2 Атом водню і його спектр за теорією Бора. Формула де Бройля.

Дослідження спектрів випромінювання розріджених газів, показали, що кожному газу властивий певний лінійчастий спектр, який складається з окремих спектральних ліній. Найбільш вивченим є спектр атома водню.

Швейцарський вчений І. Бальмер у 1885 р. встановив, що довжини хвиль відомих на той час дев'яти ліній спектра атома водню можна обчислити за формулою:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{k^2}{k^2 - 4}, \quad (28.2)$$

де  $\lambda_0 = 3,65 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ,  $k = 3, 4, 5, \dots, 9$ .

Цю формулу можна записати в іншому вигляді:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad k = 3, 4, 5, \dots, \quad (28.3)$$

де  $R' = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $R'$  – стала Рідберга.

Оскільки  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , то

$$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (15.4)$$

де  $R = R'c = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ , яку також називають сталою Рідберга.

Спектральні лінії, що відрізняються різними значеннями  $k$ , утворюють серію

ліній, яка називається *серією Бальмера*. Тепер в спектрі випромінювання водню виявлено 37 ліній серії Бальмера. Із збільшенням  $k$  лінії серії зближуються; значення  $k = \infty$  визначає границю серії, до якої з боку більших частот прилягає суцільний спектр:  $\lambda_{гран} = 3,65 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Крім того, виявляється, що зі збільшенням номера лінії її інтенсивність зменшується.

На початку XX ст. у спектрі водню було виявлено ще декілька серій спектра випромінювання, які знаходяться у невидимій області.

В ультрафіолетовій області – серія *Лаймана*:

$$\nu = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 2, 3, 4, \dots); \quad (28.5)$$

в інфрачервоній області – серія *Пашена*:

$$\nu = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 4, 5, 6, \dots); \quad (28.6)$$

серія *Брекета*:

$$\nu = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 5, 6, 7, \dots); \quad (28.7)$$

серія *Пфунда*:

$$\nu = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 6, 7, 8, \dots); \quad (15.8)$$

серія *Хемфрі*:

$$\nu = R \left( \frac{1}{6^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 7, 8, 9, \dots). \quad (15.9)$$

Всі серії у спектрі водню можуть бути описані однією формулою, яка називається *узагальненою формулою Бальмера*:

$$\nu = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (15.10)$$

де  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , і визначає серію, а  $k = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$  і визначає окремі лінії серії.

Спектральні серії водню наведені на рис. 28.3. Наведені серіальні формули

підібрані емпірично і довгий час не мали теоретичного обґрунтування.

Перша спроба побудови якісно нової теорії атома була зроблена в 1913 р. Н.Бором. Він поставив перед собою мету зв'язати в єдине ціле емпіричні закономірності лінійчастих спектрів, ядерну модель атома Резерфорда і квантовий характер випромінювання та поглинання світла.

Теорія Бора застосовна до атома водню і воднеподібної системи, яка складається з ядра з зарядом  $Ze$  і

одного електрона, що обертається навколо ядра:  $He^+$ ,  $Li^{++}$ , ...

В основу своєї теорії Бор поклав три постулати.

*Перший постулат Бора (постулат стаціонарних станів): існують деякі стаціонарні стани атома з відповідними значеннями енергії  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ , перебуваючи в яких, він не випромінює енергії.*

Цим стаціонарним станам відповідають цілком визначені (стаціонарні) орбіти, по яких рухаються електрони, які, незважаючи на наявність у них прискорення, електромагнітних хвиль не випромінюють.

*Другий постулат Бора (правило квантування орбіт): в стаціонарному стані атома електрон, рухаючись по коловій орбіті, повинен мати квантові значення моменту імпульсу, які задовольняють умову*

$$L_n = m v_n r_n = n \hbar, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad (28.9)$$

де  $m$  – маса електрона,  $v_n$  – його швидкість,  $r_n$  – радіус орбіти електрона.

*Третій постулат Бора (правило частот): при переході атома з одного*

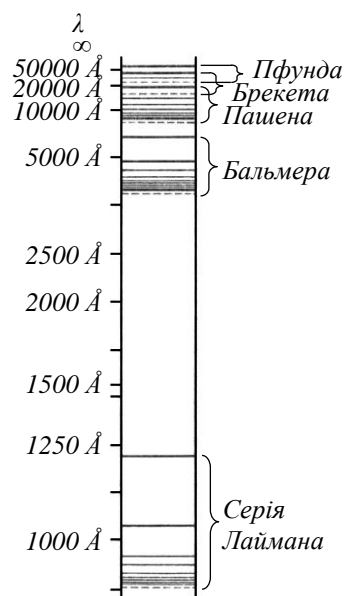


Рис. 28.3

стаціонарного стану в інший випромінюється або поглинається один фотон з енергією  $h\nu_{kn} = E_k - E_n$ , яка дорівнює різниці енергій відповідних стаціонарних станів.

Випромінювання фотона відбувається при переході атома зі стану з більшою енергією  $E_k$  у стан з меншою енергією  $E_n$ , тобто при переході електрона з орбіти більш віддаленої від ядра на ближчу до ядра орбіту. Поглинання енергії супроводжується переходом атома у стан з більшою енергією, і електрон переходить на віддаленішу від ядра орбіту. Набір можливих частот  $\nu_{kn} = \frac{E_k - E_n}{h}$  квантових переходів і визначає лінійчастий спектр атома.

Постулати, висунуті Бором, дозволили розрахувати спектр атома водню і воднеподібних систем, а також теоретично розрахувати сталу Рідберга.

Враховуючи припущення Резерфорда, що електрон у воднеподібній системі рухається по коловій орбіті радіусом  $r$  під дією кулонівської сили притягання електрона до ядра, яка створює доцентрове прискорення, запишемо:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m\nu_n^2}{r_n} \quad (28.10)$$

Звідси

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m\nu_n^2} \quad (28.11)$$

Підставивши сюди величину  $\nu_n$  з виразу  $m\nu_n r_n = n\hbar$ , отримаємо:

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{m^2 r_n^2}{n^2 \hbar^2} \quad ; \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Zme^2} n^2 \quad (28.12)$$

де  $n=1, 2, 3, \dots$

Радіуси орбіт зростають пропорційно квадратам цілих чисел.

Для атома водню ( $Z=1$ ) радіус першої орбіти електрона при  $n=1$  називається першим борівським радіусом ( $a_0$ ) і дорівнює

$$r_1 = a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ м} \quad (28.12)$$

Тоді

$$r_n = a_0 n^2 \frac{1}{Z} \quad (28.13)$$

Оскільки експериментально виміряти радіуси орбіт неможливо, то для перевірки правильності теорії потрібно знайти такі величини, які можна виміряти експериментально. Такою величиною може бути, зокрема, енергія, яку випромінюють або поглинають атоми.

Енергія електрона у воднеподібній системі дорівнює сумі його кінетичної і потенціальної енергій в електростатичному полі ядра:

$$E_n = \frac{m v_n^2}{2} - \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \quad (28.14)$$

Враховавши, що  $\frac{m v_n^2}{r_n} = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$ , отримаємо:

$$\frac{m v_n^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \quad (28.15)$$

Тоді

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \quad (28.16)$$

Підставимо в цей вираз значення  $r_n$ . Тоді

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m Z e^2}{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0} = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m e^4}{8 \hbar^2 \epsilon_0^2} \quad (28.17)$$

Знак „-“ означає, що електрон знаходиться у зв'язаному стані.

Енергетичні стани атома утворюють сукупність енергетичних рівнів, що змінюються залежно від значення  $n$ , яке виражає номер енергетичного рівня атома і називається *головним квантовим числом*. Енергетичний стан з  $n=1$  є *основним станом*, а стани з  $n>1$  – збуджені.

Надаючи  $n$  різні цілочислові значення, отримаємо для атома водню ( $Z=1$ ) можливі рівні енергії (рис. 28.4). Енергія атома водню із збільшенням  $n$  зростає (зменшується її від'ємна величина), і енергетичні рівні наближаються до границі, що відповідає значенню  $n = \infty$ . Атом водню має мінімальну енергію  $E_1 = -13,55\text{eV}$  при  $n=1$  і максимальну

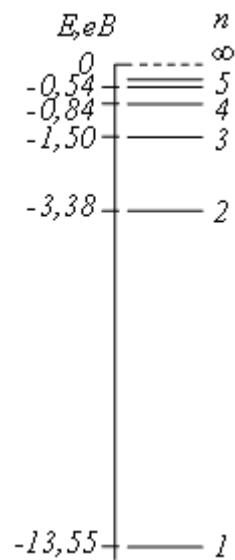


Рис. 28.4

при  $n = \infty$ . Отже, значення  $E_{\infty} = 0$  відповідає енергії іонізації атома (відриву від нього електрона). Енергія іонізації з певного стану дорівнює за абсолютною величиною енергії зв'язку електрона в атомі в цьому стані  $E_n$ .

Згідно з третім постулатом Бора при переході електрона з  $k$ -ї орбіти на  $n$ -у випромінюється фотон з енергією

$$h\nu_{kn} = E_k - E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (28.18)$$

звідки частота випромінювання

$$\nu_{kn} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (28.19)$$

де  $R = \frac{Z^2 m e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2}$  - стала Рідберга. Числове значення  $R_{теор}$  добре узгоджується з

експериментально отриманим  $R_{експ}$  в емпіричних формулах для атома водню. Це підтверджує правильність отриманої Бором формули для енергетичних рівнів водневоподібної системи.

Теорія Бора була значним кроком у розвитку атомної фізики, однак мала ряд внутрішніх протиріч. Тому необхідно було переглянути уявлення про природу елементарних частинок (електронів, протонів і т.д.). Оскільки було переконливо

доведено, що світло проявляє корпускулярно-хвильовий дуалізм, французький вчений Луї де Бройль у 1924 р. висунув гіпотезу про те, що частинки речовини поряд з корпускулярними властивостями мають також і хвильові.

Як відомо, фотон має квант енергії  $\varepsilon_{\phi} = h\nu$ , імпульс  $P_{\phi} = \frac{h}{\lambda}$ , масу  $m_{\phi} = \frac{h\nu}{c^2}$ .

За де Бройлем, між корпускулярними і хвильовими характеристиками електрона існує такий самий зв'язок, як і між відповідними характеристиками фотона.

Інакше кажучи, рух електрона з швидкістю  $v$  пов'язаний з деяким хвильовим процесом, довжина хвилі якого визначається рівнянням  $\lambda = \frac{h}{P}$ , де імпульс  $P = mv$ . Це формула де Бройля.

Якщо частинка має кінетичну енергію  $E_k$ , то замінюючи її імпульс  $P$  енергією  $E_k$  за формулою  $P = \sqrt{2mE_k}$ , можна записати

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}. \quad (28.20)$$

Зокрема, для електрона, що прискорюється в електричному полі з різницею потенціалів  $U$ , маємо

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = eU. \quad (28.21)$$

Тоді  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{12,25}{\sqrt{U}} \cdot 10^{-10} \text{ м}$ . Для електричних полів з напругою 1-10 В довжини хвиль де Бройля належать інтервалу  $(10 \div 0,1) \cdot 10^{-10} \text{ м}$ , тобто мають довжини хвиль звичайних рентгенівських променів.

## Тема 29. Ядерна фізика.

### 29.1 Розмір, склад і заряд ядра. Масове і зарядове число. Дефект маси і енергія зв'язку ядра.

Досліджуючи проходження  $\alpha$  - частинок з енергією декілька  $MeV$  крізь тонкі пластинки золота, Е. Резерфорд зробив висновок про те, що атом складається з позитивно зарядженого ядра і електронів, які його оточують. Розмір ядра  $\square 10^{-14} - 10^{-15} \text{ м}$ , а розмір атома  $\approx 10^{-10} \text{ м}$ .

Атомне ядро складається з елементарних частинок протонів і нейтронів. Протон ( $p$ ) має позитивний заряд, що дорівнює заряду електрона, масу спокою

$m_p = 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1836 m_e$ , спіні  $s = \frac{1}{2}$  і власний магнітний момент  $p_{mp} = +2,79 \mu_{\text{я}}$

, де  $\mu_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$  – ядерний магнетон. Нейтрон ( $n$ )- нейтральна

частинка з масою спокою  $m_n = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1839 m_e$ , спіном  $s = \frac{1}{2}$  і власним магнітним моментом  $p_{mp} = -1,91 \mu_{\text{я}}$ . Протони і нейтрони називають нуклонами

(від латинського *nucleus* – ядро). Загальна кількість нуклонів в ядрі називається масовим числом  $A$ . До складу ядра входять  $Z$  протонів та  $N$  нейтронів, тому  $A=Z+N$ .

Атом з певним числом протонів і нейтронів в складі ядра називається нуклідом. Нуклід з ядром в основному стані позначають  ${}^A_Z X$ , де  $X$  – символ хімічного елемента з порядковим номером  $Z$ .

Атомне ядро характеризується зарядом  $Ze$ , де  $e$  – заряд протона,  $Z$  – зарядове число ядра.

Зарядове число  $Z$  характеризує одночасно:

- число протонів в ядрі,
- число електронів в електрично нейтральному атомі,
- порядковий номер елемента в періодичній системі Менделєєва.

Нині відомі і вивчені близько 1800 ядер природних і штучних елементів, які відрізняються або  $Z$ , або  $A$ , або  $Z$  і  $A$ .

Ядра  ${}^{A_1}_{Z_1} X_1$ ,  ${}^{A_2}_{Z_2} X_2$ ,  ${}^{A_3}_{Z_3} X_3$ , ... при певних значеннях  $Z$ ,  $A$  і  $N$  утворюють деякі

групи:

*ізотопи:*  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots; A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq \dots; N_1 \neq N_2 \neq N_3 \neq \dots; | {}^1_1\text{H}, {}^2_1\text{H}, {}^3_1\text{H} | {}^{16}_8\text{O}$   
 $, {}^{17}_8\text{O}, {}^{18}_8\text{O} | | {}^{28}_{14}\text{Si}, {}^{29}_{14}\text{Si}, {}^{30}_{14}\text{Si}, {}^{32}_{14}\text{Si} |$

*ізобари:*  $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3 \neq \dots; A_1 = A_2 = A_3 = \dots; N_1 \neq N_2 \neq N_3 \neq \dots; | {}^{10}_4\text{Be}, {}^{10}_5\text{Be}, {}^{10}_6\text{Be} |$   
 ${}^{16}_8\text{O}, {}^{16}_7\text{N} | {}^{40}_{18}\text{Ar}, {}^{40}_{20}\text{Ca} |$

*ізотони:*  $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3 \neq \dots; A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq \dots; N_1 = N_2 = N_3 = \dots; | {}^{14}_6\text{C}, {}^{15}_7\text{N}, {}^{16}_8\text{O} |$   
 ${}^{44}_{20}\text{Ca}, {}^{46}_{22}\text{Ti} |$

*дзеркальні ряди:*  $Z_1 = N_2; Z_2 = N_1; A_1 = A_2; | {}^3_1\text{H}, {}^3_2\text{He} | {}^{11}_5\text{B}, {}^{11}_6\text{C} | {}^{13}_6\text{C}, {}^{13}_7\text{N} |$

*ізомери:*  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots; A_1 = A_2 = A_3 = \dots; N_1 = N_2 = N_3 = \dots; \text{різні періоди}$   
 піврозпаду  $T_{1/2}({}^{80}_{35}\text{Br}) = 18\text{хв}, T_{1/2}({}^{80}_{35}\text{Br}) = 4,1\text{год}$ .

Атомні ядра є стійкими утвореннями. Це означає, що в ядрі між нуклонами існують сили притягання, які забезпечують зв'язки між нуклонами. Мас-спектрометричні дослідження показали, що маса ядра менша, ніж сума мас нуклонів, з яких воно складається.

Зменшення маси нуклонів викликане переходом їх із вільного стану у зв'язаний стан в атомному ядрі. Виникнення зв'язаного стану нуклонів відбувається під дією ядерних сил притягання. Як тільки нуклони виявляються в області дії ядерних сил, вони швидко починають зближатися і набувають великої кінетичної енергії. При переході нуклонів у зв'язаний стан (утворення ядра) вони потрапляють в потенціальну яму з мінімальними для даного ядра значеннями енергії спокою  $E_0$ . Отримана раніше нуклонами кінетична енергія виділяється у вигляді  $\gamma^-$  квантів або переходить до інших частинок.

*Енергію  $E_{зв}$ , яка виділяється при утворенні ядра, називають енергією зв'язку ядра.*

Із закону збереження енергії випливає і зворотний висновок: для розділення ядра необхідно затратити таку саму кількість енергії, яка виділяється при його утворенні.

Зменшення енергії спокою нуклонів при переході їх у зв'язаний стан (утворення ядра) і виділення її у вигляді енергії зв'язку  $E_{зв}$  супроводжується відповідно до закону Ейнштейна  $\Delta E = \Delta m c^2$  зменшенням сумарної маси спокою нуклонів.

Це приводить до *дефекту маси ядра, що дорівнює різниці між масою нуклонів, що утворюють ядро, і масою ядра:*

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{я}, \quad (29.1)$$

де  $m_p, m_n, m_{я}$  – маси протона, нейтрона, ядра, відповідно.

Оскільки в таблицях наводять масу атомів, а не ядер, то  $\Delta m$  виражають через масу атома:

$$\Delta m = Zm_{1H} + (A - Z)m_n - m_{ам}, \quad (29.2)$$

де  $m_{1H} = m_p + m_e$ ,  $m_{ам} = m_{я} + Zm_e$ ,  $m_{1H}$  – маса атома водню,  $m_e$  – маса електрона.

Отже, стійкість ядра як сукупність нуклонів у зв'язаному стані, підтримується відносним зменшенням енергії системи на

$$E_{зв} = \Delta m c^2. \quad (29.3)$$

Дефект маси служить мірою енергії зв'язку ядра.

Переважно розглядають і використовують *питому енергію зв'язку – енергію зв'язку  $\delta E_{зв}$ , що припадає на один нуклон.*

Питома енергія зв'язку залежить від масового числа і характеризує стійкість атомних ядер. Чим більша питома енергія зв'язку, тим

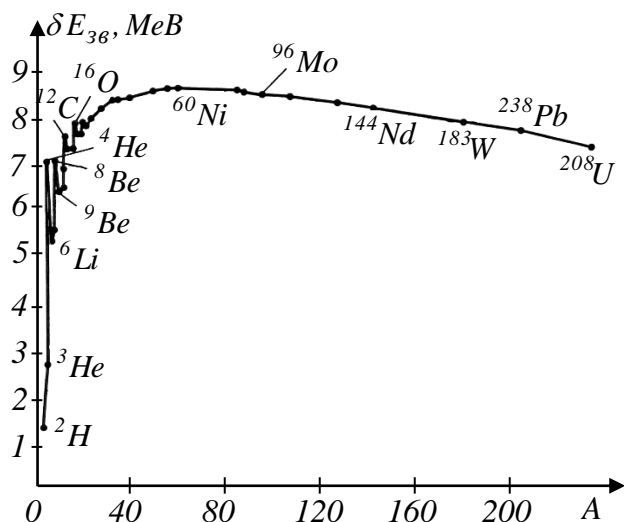


Рис. 29.1

стійкіше атомне ядро. Залежність питомої енергії зв'язку від масового числа наведена на рис. 29.1.

В області невеликих масових чисел питома енергія зв'язку виявляє характерні гострі „піки” – максимуми і мінімуми. Мінімуми для енергії зв'язку на один нуклон спостерігаються в області ядер з непарними кількостями протонів і нейтронів –  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ . Максимуми питомої енергії зв'язку відповідають ядрам з парними числами протонів і нейтронів –  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{12}_8\text{C}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ . Найбільші значення питомої енергії зв'язку мають парно-парні ядра, тобто ядра з парною кількістю протонів  $Z$  і парною кількістю нейтронів  $N=A-Z$ . Найменшу енергію зв'язку на один нуклон мають непарно-непарні ядра. Проміжні значення питомої енергії зв'язку мають парно-непарні і непарно-парні ядра.

Питома енергія зв'язку  $\delta E_{zв}$  різко зростає для легких елементів від  $1\text{MeV}$  до  $\sim 6-7\text{MeV}$  (з різкими стрибками для деяких елементів), потім повільно збільшується до  $8,7\text{MeV}$  (елементи з  $A=50-60$ ) і повільно зменшується (до  $7,6\text{MeV}$  у  ${}^{238}_{92}\text{U}$ ) для важких елементів.

Ядра елементів в середній частині таблиці Менделєєва ( $28 < A < 138$ ) від  ${}^{28}_{14}\text{Si}$  до  ${}^{138}_{56}\text{Ba}$  найбільш стійкі, в цих ядрах  $\delta E_{zв} \sim 8,7 \frac{\text{MeV}}{\text{нуклон}}$ . Найстійкішими виявились так звані „магічні ядра”, у яких кількість протонів або нейтронів дорівнює одному з „магічних чисел”: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Особливо стійкі двічі „магічні” ядра, в яких „магічним” є і кількість протонів і кількість нейтронів. Таких ядер лише п'ять –  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ .

Зменшення питомої енергії зв'язку у важких атомних ядер пояснюється тим, що при зростанні числа протонів у ядрі збільшується й енергія їх кулонівського відштовхування. Тому зв'язок між нуклонами стає слабшим, а

ядра менш міцними.

*Відповідно фізичний сенс енергії зв'язку (енергії відокремлення) нейтрона такий: це енергія, яку треба надати ядру, щоб відокремити від нього нейтрон.*

## **29.2 Радіоактивність. Основний закон радіоактивного перетворення атомних ядер.**

**Радіоактивністю** називають самовільне (спонтанне) перетворення ядер нестійких ізотопів одних елементів у ядра ізотопів інших елементів, що зумовлено внутрішніми причинами та супроводжується  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -випромінюванням, а також інших частинок (нейтронів, протонів).

До радіоактивних процесів належать:

1.  $\alpha$  - розпад;
2.  $\beta$  - розпад;
3.  $\gamma$  - випромінювання;
4. спонтанний поділ тяжких ядер;
5. протонна радіоактивність.

Радіоактивність, яка спостерігається в ядрах, що існують у природних умовах, називається *природною*. Радіоактивність ядер, які отримані за допомогою ядерних реакцій, називається *штучною*. Між природною та штучною радіоактивністю немає принципової різниці.

Природні радіоактивні перетворення ядер, які відбуваються самочинно, називаються *радіоактивним розпадом*. Ядро, що виникло внаслідок розпаду, називають *дочірним* ядром, а ядро, яке розпалось, – *материнським*.

Теорія, яка пояснює це явище, ґрунтується на припущенні, що радіоактивний розпад є спонтанним процесом.

Численні дослідження показали, що на швидкість радіоактивного розпаду не впливають ніякі зовнішні зміни температури, тиску, наявності електричних і магнітних полів, вид хімічної сполуки, її агрегатний стан. З цього випливає,

що радіоактивний процес відбувається в глибинних частинах атома, тобто в його ядрі. Радіоактивний розпад – це властивість самого атомного ядра, і залежить вона тільки від його внутрішнього стану.

Внаслідок самочинності цього процесу природно припустити, що число ядер  $|dN|$ , які розпадаються за інтервал часу від  $t$  до  $t+dt$ , пропорційне до проміжку часу  $dt$  і кількості  $N$  наявних ядер, які ще не розпались на момент часу  $t$ :

$$-dN = \lambda N dt \quad (29.4)$$

Тут  $\lambda$  – стала величина, яку називають *сталою розпаду*, або *радіоактивною сталою*. Знак „-“ вказує на те, що загальна кількість радіоактивних ядер під час розпаду зменшується ( $dN < 0$ ):

Стала розпаду  $\lambda = -\frac{dN}{N dt}$  дорівнює відносному зменшенню кількості ядер, які зазнають розпаду, за одиницю часу. Стала  $\lambda$  визначає швидкість радіоактивного розпаду.

Розділивши в рівнянні  $dN = -\lambda N dt$  змінні, та проінтегрувавши, отримуємо:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt \quad ; \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \quad (29.5)$$

Звідси:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (29.6)$$

Цей вираз виражає *закон радіоактивного розпаду*, згідно з яким кількість атомів, які не розпались, зменшується за експонентою. У цій формулі  $N_0$  – початкова кількість ядер, які не розпались в момент часу  $t=0$ ,  $N$  – кількість ядер, які не розпались в момент часу  $t$ .

Кількість ядер, які розпались за час  $t$ , визначається виразом  $N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$ .

На рис. 16.2 зображено залежність  $\ln \frac{N}{N_0}$  від часу  $t$ . Вона дає змогу експериментально за нахилом прямої визначити сталу розпаду  $\lambda$ , тому що  $\operatorname{tg} \alpha = \lambda$ .

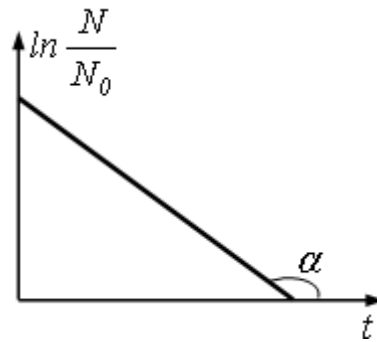


Рис. 29.2

Знайдемо середній час життя радіоактивного ядра. Кількість ядер

$|dN(t)|$ , що розпалися за проміжок часу від  $t$  до  $t+dt$ , визначається модулем виразу

$$|dN(t)| = \lambda N(t) dt \quad (29.7)$$

Час життя кожного з цих ядер дорівнює  $t$ . Отже, суму життів всіх  $N_0$  ядер, що були спочатку, одержують інтегруванням виразу  $t dN(t)$ . Поділивши цю суму на число ядер  $N_0$ , одержимо середній час життя  $\tau$  радіоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t |dN(t)| = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N(t) dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (29.8)$$

Стала розпаду  $\lambda$  є оберненою величиною середнього часу життя  $\tau$  певного радіоактивного елементу. Тому

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (29.9)$$

де  $\tau$  – це час, за який кількість ядер при радіоактивному розпаді зменшиться в  $e$  разів.

Для характеристики стійкості ядер відносно розпаду, для оцінки тривалості життя певного радіоактивного ізотопу вводять поняття про період піврозпаду  $T_{1/2}$ .

*Періодом піврозпаду називається час, протягом якого початкова кількість ядер певної речовини розпадається наполовину.*

З визначення  $T_{1/2}$  випливає, що  $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$ ,  $e^{-\lambda T_{1/2}} = 2$ .

Звідси отримуємо:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693 \tau \quad (29.10)$$

Періоди піврозпаду різних природних ізотопів досить відрізняються один від одного. Так,  $T = 4,51 \cdot 10^9$  років для  ${}^{238}_{92}\text{U}$  і  $T_{1/2} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ c}$  для  ${}^{212}_{84}\text{Po}$ .

*Кількість атомів, що розпадається за одну секунду, називається активністю елементу.*

Активність  $A$  визначається такими формулами:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \frac{N \ln 2}{T} \quad (29.11)$$

Отже, активність обернено пропорційна до періоду піврозпаду і зменшується з часом за експоненціальним законом.

За одиницю активності препарату беруть один розпад за секунду – беккерель ( $Bk$ ). Часто користуються позасистемною одиницею, яку називають кюрі ( $Ki$ ):  $1Ki = 3,7 \cdot 10^{10} Bk$ .

Радіоактивний розпад записують у вигляді рівняння



де  ${}_{Z_1}^{A_1}X$  – материнське радіоактивне ядро,  ${}_{Z_2}^{A_2}Y$  – дочірнє ядро (продукт розпаду),

$a$  – частинка, яка випускається.

При радіоактивному розпаді справджується закон збереження енергії, згідно з яким повна енергія материнського ядра дорівнює повній енергії продуктів розпаду:

$$m_X c^2 = (m_Y + m_a) c^2 + E_p, \quad (29.13)$$

де  $E_p$  – повна енергія розпаду, яка дорівнює зміні енергії спокою

материнського ядра, що перетворюється в кінетичну енергію дочірнього ядра, вилітаючої частинки і  $\gamma$ -квантів.

При радіоактивному розпаді ядер виконується *закон збереження зарядових чисел*:

$$Z_{\text{я}} = \sum_i Z_i, \quad (29.14)$$

де  $Z_{\text{я}}$  – зарядове число ядра, яке зазнало розпаду,  $Z_i$  – зарядові числа ядер і частинок, що виникли внаслідок розпаду.

Крім того, виконується *правило збереження масових чисел*:

$$A_{\text{я}} = \sum_i A_i. \quad (29.15)$$

Ці співвідношення при радіоактивному розпаді формулюють у вигляді правил зміщення, які дають змогу встановити, яке ядро виникає внаслідок розпаду певного материнського ядра. При цьому розрізняють правила зміщення для випадків можливого  $\alpha$ - або  $\beta$ -розпаду:

$$\text{при } \alpha \text{-розпаді: } {}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}, \quad (29.16)$$

$$\text{при } \beta \text{-розпаді: } {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e. \quad (29.17)$$

Ядро, яке зазнало  $\alpha$ -розпаду, зміщується на два місця лівіше в періодичній системі елементів, а його масове число зменшується на 4 одиниці. При  $\beta$ -розпаді позитивний заряд ядра збільшується на одну одиницю і ядро зміщується на одне місце правіше в періодичній системі. При цьому масове число ядра не змінюється.

Ядра, які виникають внаслідок радіоактивного розпаду, також можуть бути радіоактивними. Послідовність такого процесу приводить до виникнення ланцюжка радіоактивних перетворень, який закінчується стабільним елементом. Сукупність елементів, яка утворює такий ланцюжок, називається радіоактивним сімейством.

### 16.3 Закономірності радіоактивного випромінювання атомних ядер. Гамма – випромінювання і його властивості.

$\alpha$  - розпадом називається випускання ядрами деяких хімічних елементів  $\alpha$  - частинок.

Альфа-випромінювання відхиляється електричними і магнітними полями, має високу іонізуючу здатність і малу проникну здатність (поглинається шаром алюмінію завтовшки  $\sim 0,05$  мм).  $\alpha$  - випромінювання – це потік іонізованих атомів гелію. Заряд  $\alpha$  - частинки дорівнює  $+2e$ , а маса рівна масі ядра ізотопу гелію  ${}^4_2\text{He}$ .

Відомо більше ніж дві сотні  $\alpha$  - активних ядер, в основному важких елементів  $A > 200, Z > 82$ . Лише невелика група  $\alpha$  - активних ядер знаходиться в області з масовими числами  $A=140-160$  (рідкісноземельні).

Всередині важких ядер утворюються  $\alpha$  - частинки, кожна з яких складається з двох протонів і двох нейтронів. Відокремленню цих чотирьох нуклонів сприяє властивість насичення ядерних сил. Можливість  $\alpha$  - розпаду викликана тим, що маса материнського ядра  $m_M$  більша від суми мас дочірнього ядра  $m_D$  і  $\alpha$  - частинки:  $\Delta m = m_M - (m_D + m_\alpha)$ .

Отже, при  $\alpha$  - розпаді виділяється енергія  $E_\alpha = \Delta mc^2$ . Енергія  $\alpha$  - розпаду ( $4-9$  MeV) виділяється у вигляді кінетичної енергії продуктів розпаду:  $\alpha$  - частинки і дочірнього ядра. Кінетична енергія між ними розподіляється обернено пропорційно до їх маси, тому практично всю енергію розпаду отримує  $\alpha$  - частинка. В ядрі  $\alpha$  - частинок немає, вони утворюються з чотирьох нуклонів лише в момент  $\alpha$  - розпаду.

$\beta$  - розпадом називається процес самочинного перетворення нестабільного ядра в ядро-ізобар із зарядом, який відмінний на  $\Delta Z = \pm 1$ , за рахунок випускання електрона (позитрона) або захоплення електрона.

Період піврозпаду  $\beta$  - радіоактивних ядер змінюється від  $\approx 10^{-2}c$  до  $2 \cdot 10^{15}$  років. Енергія  $\beta$  - розпаду знаходиться в межах від  $18 \text{ KeV}$  (для  ${}^3_1\text{H}$ ) до  $16,6 \text{ MeV}$  (для  ${}^{14}_7\text{N}$ ).

$\beta$  - випромінювання відхиляється електричними і магнітними полями; його іонізуюча здатність значно менша (приблизно на два порядки), а проникна здатність значно більша (поглинається шаром алюмінію  $2 \text{ мм}$ ), ніж у  $\alpha$  - частинок.  $\beta$  - випромінювання – це потік швидких електронів.

Терміном  $\beta$ - розпад називають три типи ядерних перетворень: електронний  $\beta^-$  - розпад, позитронний  $\beta^+$  - розпад, а також електронне захоплення ( $e^-$  або  $K$  - захоплення).

Явище електронного  $\beta^-$  - розпаду відбувається за правилом зміщення  ${}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{Z+1}\text{Y} + {}^0_{-1}e$  і супроводжується випромінюванням електрона.

При  $\beta^-$  розпаді кількість нуклонів в ядрі не змінюється. Однак, якщо з ядра випромінюється електрон, який має спіні  $\frac{1}{2}$ , то спіні ядра повинен змінитися на  $\frac{1}{2}$ . Таке неузгодження спіну ядра до і після розпаду, а також наявність суцільного енергетичного спектра випромінюваних електронів привели В. Паулі до гіпотези (1931 р.) про те, що при  $\beta^-$  - розпаді разом з електроном випускається ще одна нейтральна частинка – нейтрино. Нейтрино має нульовий заряд, спіні  $\frac{1}{2}$  і нульову масу спокою. Нейтрино позначають  ${}^0_0\nu_e$ .

Проте виявилось, що при  $\beta^-$  - розпаді випускається не нейтрино, а антинейтрино, (античастинка за відношенням до нейтрино, яка позначається  ${}^0_0\tilde{\nu}_e$ ).

Гіпотеза про існування нейтрино дала змогу Е. Фермі створити теорію  $\beta^-$ -розпаду (1934), а через 20 років (1956 р.) нейтрино було виявлено експериментально. Такі довгі пошуки нейтрино пов'язані з відсутністю у цієї частинки заряду та маси спокою, а також тим, що іонізуюча здатність нейтрино надзвичайно мала (один акт іонізації припадає на пробіг 500 км в повітрі), а проникна здатність – дуже висока (пробіг нейтрино з енергією 1 MeV в свинцю порядку  $10^{18}$  м).

Для експериментального виявлення нейтрино використовували метод, який ґрунтується на тому, що в ядерних реакціях виконується закон збереження імпульсу.

Введення нейтрино дозволило пояснити не лише збереження спіна ядра, а й неперервність енергетичного спектра випромінюваних електронів. Суцільний спектр  $\beta^-$ -частинок зумовлений розподілом енергії між електронами і антинейтрино, причому сума енергій обох частинок становить  $E_{max}$ .

Оскільки при  $\beta^-$ -розпаді кількість нуклонів в ядрі не змінюється, а  $Z$  збільшується на одиницю, то єдиний шлях, яким може відбуватись цей процес, це перетворення одного з нейтронів ядра в протон з одночасним утворенням електрона і антинейтрино:



Цей процес супроводжується виконанням законів збереження електричних зарядів, імпульсу і масових чисел.

Прикладом  $\beta^-$ -розпаду може бути така реакція:  ${}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + {}^0_{-1}e + \tilde{\nu}$ .

Явище  $\beta^+$ -розпаду характерне лише для штучно радіоактивних ядер і було вперше виявлено Фредериком та Ірен Жоліо-Кюрі при бомбардуванні різних ядер  $\alpha$ -частинками. Цей вид радіоактивного розпаду відбувається за таким правилом зміщення:

$${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e. \quad (29.19)$$

Прикладом  $\beta^+$  - розпаду може бути така реакція перетворення азоту  ${}^{13}_7N$  у вуглець  ${}^{13}_6C$ :  ${}^{13}_7N \rightarrow {}^{13}_6C + {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e$ .

Процес  $\beta^+$  - розпаду проходить за такою схемою: один з протонів ядра перетворюється у нейтрон, випромінюючи при цьому позитрон і нейтрино:

$${}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e. \quad (29.20)$$

Оскільки маса спокою протона менша, ніж маса спокою нейтрона, то для вільного протона реакція відбуватися не може. Однак для протона, який знаходиться в ядрі, внаслідок ядерної взаємодії частинок, ця реакція є енергетично можливою.

Позитрон -  ${}^0_{+1}e$  – частинка з масою спокою, яка точно дорівнює масі спокою електрона, спіном  $\frac{1}{2}$ , і яка має додатний електричний заряд  $+e$ .

Позитрони можуть народжуватись при взаємодії  $\gamma$  - квантів великих енергій ( $E_\gamma > 1,02MeV = 2m_e c^2$ ) з речовиною. Цей процес відбувається за схемою

$$\gamma \rightarrow {}^0_{-1}e + {}^0_{+1}e. \quad (29.21)$$

Для багатьох ядер перетворення протона в нейтрон, крім описаного вище процесу, може відбуватись через електронне захоплення, або  $e^-$  захоплення, при якому ядро спонтанно захоплює електрон з однієї із внутрішніх оболонок атома, випускаючи нейтрино:

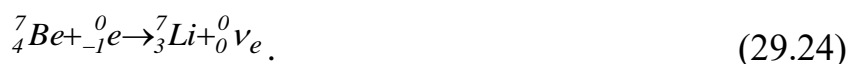
$${}^1_1p + {}^0_{-1}e \rightarrow {}^1_0n + {}^0_0\nu_e. \quad (29.22)$$

Необхідність появи нейтрино впливає із закону збереження спіна. Схема  $e^-$  захоплення:

$${}^A_ZX + {}^0_{-1}e \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + {}^0_0\nu_e, \quad (29.23)$$

тобто один з протонів ядра перетворюється у нейтрон, заряд ядра зменшується на одиницю і воно зміщується вліво, так само, як і при позитронному розпаді.

Електронне захоплення супроводжується характеристичним рентгенівським випромінюванням, що виникає при заповненні вакансій, які утворюються в електронній оболонці атома. При  $e$ -захопленні, крім нейтрино, ніякі інші частинки не випромінюються. Прикладом електронного захоплення може служити перетворення радіоактивного ядра берилію у стабільне ядро літію:



$\gamma$ - випромінювання не відхиляється електричними і магнітними полями, володіє відносно слабкою іонізуючою і надзвичайно великою проникною здатністю (проходить крізь шар свинцю завтовшки 5 см), дифрагує на кристалах.  $\gamma$ - випромінювання – це короткохвильове електромагнітне випромінювання з дуже малою довжиною хвилі  $\lambda < 10^{-10} \text{ м}$  і внаслідок цього – яскраво вираженими корпускулярними властивостями.

Експериментально встановлено, що  $\gamma$ - випромінювання не є самостійним видом радіоактивності, а лише супроводжує  $\alpha$ - та  $\beta$ - розпади; виникає також під час ядерних реакцій, гальмування заряджених частинок, їх розпаду та ін. Встановлено, що  $\gamma$ - випромінювання не викликає зміни заряду і масового числа ядер, воно випускається дочірнім ядром, яке в момент свого утворення перебуває у збудженому стані.

Повертаючись в основний стан, збуджене ядро може пройти через ряд проміжних станів, тому  $\gamma$ - випромінювання одного і того самого радіоактивного ізотопу може містити кілька груп  $\gamma$ -квантів, що відрізняються одна від одної своєю енергією. Отже, спектр  $\gamma$ - випромінювання дискретний.

$\gamma$ - кванти мають нульову масу спокою, тому під час проходження крізь речовину вони або поглинаються, або розсіюються речовиною, але їх енергія не змінюється. Внаслідок поглинання інтенсивність  $\gamma$ - випромінювання зменшується за експоненціальним законом:  $I = I_0 e^{-\mu x}$ , де  $I_0$  та  $I$  - інтенсивність  $\gamma$ - випромінювання на вході і виході речовини завтовшки  $x$ ,  $\mu$  -

лінійний коефіцієнт поглинання, який залежить від властивостей речовини та енергії  $\gamma$  - квантів.

$\gamma$  - кванти, проходячи через речовину, можуть взаємодіяти як з електронами атомів речовини, так із їх ядрами.

Основними процесами, які супроводжують проходження  $\gamma$  - квантів крізь речовину, є фотоэффект, комптонівське розсіювання і утворення електрон-позитронних пар.

Дія  $\gamma$  - випромінювання (а також інших видів іонізуючого випромінювання) на речовину характеризується дозою іонізуючого випромінювання. Розрізняють такі одиниці випромінювання:

*Поглинута доза випромінювання* – фізична величина, що дорівнює відношенню енергії поглинутого випромінювання до маси опромінюваної речовини. Одиниця поглинутої дози випромінювання – грей (Гр):  $1 \text{ Гр} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$  – доза випромінювання, при якій опромінюваній речовині масою 1 кг передається енергія довільного іонізуючого випромінювання 1 Дж.

*Експозиційна доза випромінювання* – фізична величина, що дорівнює відношенню суми електричних зарядів всіх іонів одного знака, створених електронами, звільненими в опромінюваному повітрі (при повному використанні іонізуючої здатності електронів), до маси цього повітря.

Одиниця експозиційної дози випромінювання – кулон, поділений на кілограм  $\left( \frac{\text{Кл}}{\text{Кг}} \right)$ , часто користуються позасистемною одиницею – рентген (Р):  $1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Кл}}{\text{Кг}}$ .

При експозиційній дозі, яка дорівнює одному рентгену, в  $1 \text{ м}^3$  сухого повітря при нормальному атмосферному тиску виникає сумарний заряд іонів одного знака величиною  $0,33 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$ .

*Біологічна доза* – величина, яка вказує вплив випромінювання на організм.

Одиниця біологічної дози – біологічний еквівалент рентгена (*бер*): *1бер* – доза довільного виду іонізуючого випромінювання, яка здійснює таку саму біологічну дію, яку здійснює доза рентгенівського або  $\gamma$ -випромінювання в *IP*

$$\left(1\text{бер} = 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\right).$$

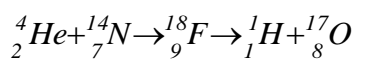
*Потужність дози випромінювання* – величина, яка дорівнює відношенню дози випромінювання до часу опромінювання.

## 16.4 Ядерні реакції. Реакція ядерного поділу. Ланцюгова реакція поділу. Ядерний реактор.

*Ядерні реакції* – це перетворення атомних ядер при взаємодії з елементарними частинками, з  $\gamma$ -квантами або між собою.

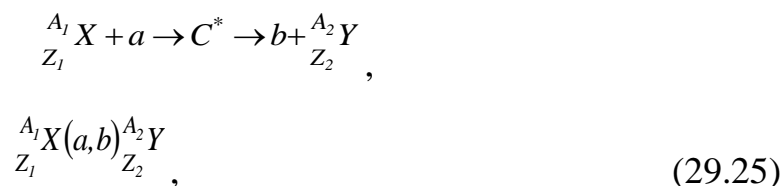
Характер ядерної реакції визначається видом частинки, її енергією, властивостями речовини і умовами взаємодії. Зокрема, зіткнення частинок з ядром викликає різні ядерні реакції, в результаті яких відбувається зміна заряду чи маси частинки або випускаються  $\gamma$ -кванти.

Типовим прикладом ядерної реакції є процес взаємодії швидких  $\alpha$ -частинок з ядрами азоту, при якому спостерігається виліт протонів:



Вперше ядерну реакцію такого типу здійснив Резерфорд в 1919 р. Кількість відомих нині ядерних реакцій сягає уже тисяч.

Ядерні реакції записують у вигляді рівняння



де  $C^*$  - проміжне ядро у збудженому стані.

Тип ядерної реакції визначається видом взаємодіючої і виділеної частинок ( $a, b$ ). Якщо вони збігаються ( $a, a$ ), реакцію називають *розсіянням*

частинки  $a$ . У такому разі склад ядер не змінюється. Якщо в ядерній реакції частинка  $a$  зникає (поглинається ядром), а замість неї появляється нова частинка  $b$ , склад ядра змінюється: відбувається *ядерне перетворення*.

За механізмом взаємодії ядерні реакції можна поділити на два види:

- прямі ядерні реакції;
- реакції з утворенням проміжного ядра.

Прямі ядерні реакції відбуваються при дуже високих енергіях частинок і за дуже короткий час, необхідний для того, щоб частинка пролетіла через ядро ( $10^{-23} - 10^{-21} c$ ). Наприклад, швидкий протон може вибити з поверхні ядра один з нуклонів і полетіти разом з ним.

Більшість же ядерних реакцій з кінетичною енергією частинок  $< 10 MeV$  проходить з утворенням проміжного ядра. Така ядерна взаємодія відбувається у два етапи.

На першому етапі відбувається захоплення частинки ядром і виникнення проміжного ядра, яке знаходиться у збудженому стані. Енергія збудження  $E^*$  складається з кінетичної енергії частинки  $E_k$  і енергії зв'язку нуклона  $E_{зв}$ , який приєднався:  $E^* = E_k + E_{зв}$ . Енергія зв'язку нуклона в середньому дорівнює  $8 MeV$ . Тому складове ядро отримує досить велику енергію збудження.

В ядерній взаємодії беруть участь лише ближні до частинки нуклони, тому до них переходить основна частина енергії збудження. Енергія, отримана такими нуклонами, передається потім за участю ядерних сил сусіднім і поступово статистично розподіляється між всіма нуклонами ядра. При цьому відбувається значний розігрів ядра. Енергія збудження, розподілена рівномірно між всіма нуклонами, недостатня для подолання енергії зв'язку нуклона. Однак з часом флуктуації збудженого ядра приводять до того, що в одному нуклоні зосереджується енергія, достатня для відриву його від ядра ( $E_{нук} > E_{зв}$ ). Тоді настає другий етап ядерної реакції – викидання нуклона з

ядра.

При захопленні нейтрона з утворенням складового ядра швидкість нейтрона, який вилетів, звичайно менша, ніж швидкість захопленого первинного нейтрона. Оскільки первинні і вторинні нейтрони не можна розрізнити, таке явище сприймається як дещо сповільнене розсіяння нейтрона з втратою частини його енергії. Такий процес має назву *непружного (резонансного) розсіяння частинок*:  $E_b \neq E_a$ .

У деяких випадках розпад проміжного ядра з випусканням нейтрона може затриматися настільки, що починає переважати конкуруючий процес – розпад з випромінюванням  $\gamma$ -квантів під дією більш слабких електромагнітних сил. Після випускання  $\gamma$ -квантів збуджене ядро переходить в основний енергетичний стан. Такий процес взаємодії частинки з ядром називають *радіаційним захопленням частинки*.

Під час ядерної реакції зберігається загальна кількість нуклонів і сумарний заряд, а відбувається лише перерозподіл нуклонів і заряду між ядрами та частинками. Збереження заряду і кількості нуклонів дає змогу якісно визначити можливі напрямки перебігу ядерної реакції.

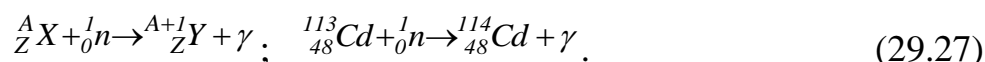
Ядерні реакції супроводжуються зміною кінетичної енергії взаємодіючих частинок. *Для ядерних реакцій виконуються закони збереження енергії і імпульсу.*

Найбільше значення мають реакції, які викликаються нейтронами. Нейтрони не відчують кулонівського відштовхування, внаслідок чого вони можуть проникати в ядра, маючи доволі малу енергію. Нейтрони були виявлені в такій ядерній реакції (1930):

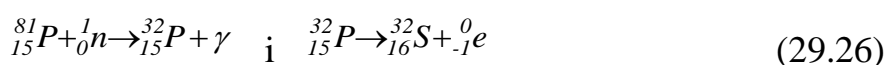


Характер ядерних реакцій під дією нейтронів істотно залежить від їх швидкості. Залежно від енергії нейтрони умовно діляться на повільні з енергією  $10^{-7} - 10^4 \text{ eV}$ , і швидкі, енергія яких  $10^4 - 10^{10} \text{ eV}$ .

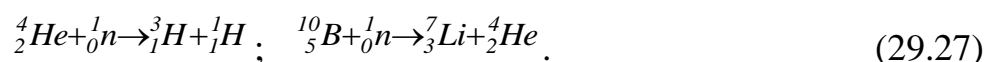
Повільні нейтрони ефективні для збудження ядерних реакцій, оскільки вони відносно довго знаходяться поблизу атомного ядра. Завдяки цьому імовірність захоплення нейтрона ядром стає доволі великою, для повільних нейтронів характерне пружне розсіяння на ядрах (реакції типу  $(n, n)$ ). Реакція  $(n, \gamma)$  приводить до утворення нового ізотопу вихідної речовини:



Часто в результаті  $(n, \gamma)$ - реакції утворюються штучно - радіоактивні ізотопи, які дають  $\beta^-$  розпад:



Під дією повільних нейтронів на деяких легких ядрах спостерігаються такі реакції захоплення нейтронів з випусканням заряджених частинок -  ${}^1_1\text{H}$ ,  ${}^4_2\text{He}$ :



Реакції типу  $(n, p)$  і  $(n, \alpha)$ , тобто реакції з утворенням заряджених частинок відбуваються в основному під дією швидких  $n$ , оскільки у випадку повільних нейтронів енергії атомного ядра недостатньо для подолання потенціального бар'єра, що перешкоджає вильоту протонів і  $\alpha$  - частинок.

Для швидких нейтронів спостерігається непружне їх розсіяння, що здійснюється за схемою



де нейтрон, який вилітає з ядра, позначений як  ${}^1_0n$ , оскільки це не той нейтрон, який проник в ядро.  ${}^1_0n$  має енергію, меншу енергії  ${}^1_0n$ , а ядро, що залишається після вильоту нейтрона, знаходиться у збудженому стані, тому його перехід в нормальний стан супроводжується випусканням  $\gamma$  - кванта.

Коли енергія нейтронів досягає значень  $10 \text{ MeV}$ , стає можливою реакція типу  $(n, 2n)$ .

Наприклад, в реакції



утворюється штучно  $\beta$  - активний ізотоп  ${}_{92}^{237}\text{U}$ , що розпадається за схемою



Ядерні реакції класифікуються за такими ознаками:

1) за родом частинок, що беруть в них участь:

- реакції під дією нейтронів;
- реакції під дією заряджених частинок;
- реакції під дією  $\gamma^-$  квантів;

2) за енергією частинок, що їх викликають:

- реакції при малих енергіях ( $\approx 1\text{eV}$ ), що проходять за участю нейтронів;
- реакції при середніх енергіях (до  $10\text{ MeV}$ ), що проходять за участю  $\gamma^-$  квантів і заряджених частинок ( ${}^1_1\text{H}$ ,  ${}^4_2\text{He}$ );
- реакції при високих енергіях ( $10\text{--}100\text{ MeV}$ ), які приводять до народження елементарних частинок, що відсутні у вільному стані.

3) за родом ядер, що беруть участь в реакції:

- реакції на легких ядрах ( $A < 50$ );
- реакції на середніх ядрах ( $50 < A < 100$ );
- реакції на важких ядрах ( $A > 100$ ).

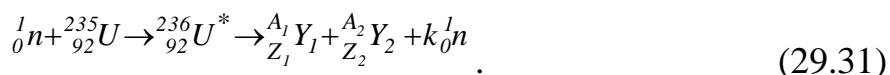
4) за характером ядерних перетворень, що відбуваються:

- реакції з випусканням нейтронів;
- реакції з випусканням заряджених частинок;
- реакції захоплення (під час цих реакцій складове ядро переходить в основний стан, випромінюючи один або кілька  $\gamma^-$  квантів.

До початку 40-х років ХХ ст. роботами багатьох учених було доведено, що під час опромінення урану нейтронами утворюються елементи із середини періодичної системи – лантан і барій. Цей результат поклав початок

дослідженню ядерних реакцій нового типу – реакцій поділу ядра, суть яких в тому, що важке ядро під дією нейтронів, а також інших частинок ділиться на декілька більш легких ядер, найчастіше на два близькі за масою ядра.

Поділ атомних ядер може відбуватися різними шляхами. Спостерігається більше, ніж 30 різних варіантів реалізації процесу поділу, зокрема



Серед осколків поділу є нукліди з масовими числами від 72 до 161 і значеннями  $Z$  від 30 до 65. Криві виходу продуктів на один поділ наведені на рис. 29.3, де крива 1 відповідає дії теплових нейтронів, а крива 2 – швидких. При поділі на теплових нейтронах утворюються переважно осколки зі співвідношенням мас 2:3. Найімовірнішими продуктами поділу з виходом  $\approx 6,5\%$  є осколки з масовими числами 195 і 139.

Поділ на два рівні осколки є малоімовірним ( $\approx 0,01\%$ ). Особливістю поділу ядра є те, що він супроводжується випусканням двох – трьох вторинних нейтронів, які називаються нейтронами поділу. Продукти поділу є радіоактивними. Це зв'язано з тим, що в ядрах – осколках, які утворилися, є надлишок нейтронів в порівнянні з протон-нейтронним співвідношенням, при якому ядра стабільні. Так, у стійких середніх ядер  $N \approx 1,3Z$ , а у тяжких ядрах  $N \approx 1,6Z$ .

Осколки поділу зазнають тому ряд  $\beta^-$  – розпадів, які супроводжуються

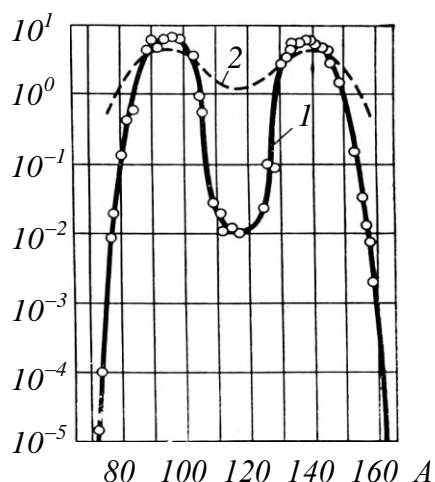
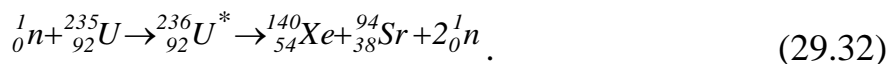


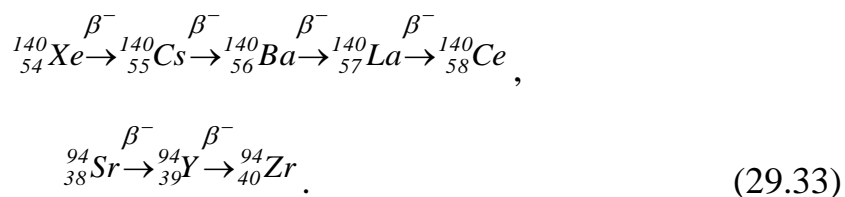
Рис. 29.3

випромінюванням  $\gamma^-$  квантів і перетворенням нейтрона в протон. В результаті співвідношення між нейтронами і протонами в осколку досягає величини, що відповідає стабільному ізотопу.

Наприклад, одна з типових реакцій ядерного поділу є реакція

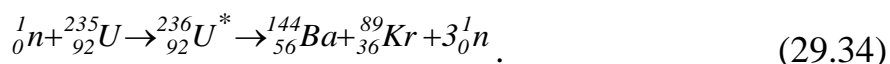


Осколки поділу – ксенон і стронцій – зазнають  $\beta^-$  – розпадів:



Кінцеві продукти – цезій і цирконій – є стабільними.

Іншою типовою реакцією є така:



Більшість нейтронів при поділі випускаються практично миттєво ( $t \leq 10^{-14} \text{c}$ ), а частина (близько 0,7%) випускаються осколками поділу через деякий час після поділу ( $0,05 \text{c} \leq t \leq 60 \text{c}$ ). Перші з них називаються миттєвими, другі – такими, що запізнюються. Загалом на кожний акт поділу припадає 2.5 випущеного нейтрона, а на один нейтрон в середньому припадає енергія близько 2 MeV.

Якщо розглянути реакцію поділу, в результаті якої ядро  ${}_{92}^{236}\text{U}^*$  розщеплюється на ядра  ${}_{58}^{148}\text{Ce}$ ,  ${}_{40}^{94}\text{Zr}$ , 6  $\beta^-$  частинок і 2 нейтрона, то цей поділ супроводжується виділенням великої кількості енергії, а саме:  $E = 208 \text{ MeV}$ .

Ймовірність поділу ядер визначається енергією нейтронів. Наприклад, якщо високоенергетичні нейтрони викликають поділ практично всіх ядер, то нейтрони з енергією в декілька MeV - лише важких ядер ( $A > 210$ ).

Нейтрони, що мають енергію активації (мінімальну енергію, необхідну для здійснення реакції поділу ядра) порядку 1 MeV, викликають поділ ядра

урану  ${}_{92}^{238}\text{U}$ , торію  ${}_{90}^{232}\text{Th}$ , протактинію  ${}_{91}^{231}\text{Pa}$  і плутонію  ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ .

Тепловими нейтронами діляться ядра  ${}_{92}^{235}\text{U}$ ,  ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ ,  ${}_{92}^{233}\text{U}$ ,  ${}_{90}^{230}\text{Th}$ . Два останні ізотопи в природі не зустрічаються, їх отримують штучно.

Теорію поділу важких ядер запропонували Н. Бор і Я. Френкель, в основу її покладено краплинну модель ядра.

Нейтрон, що проникнув у ядро, вносить туди енергію, яка за дуже короткий час поширюється між всіма нуклонами і в результаті утворюється нове ядро у збудженому стані. Якщо енергія збудження невелика, то поділ ядра не відбувається. Таке ядро, втративши надлишок енергії через

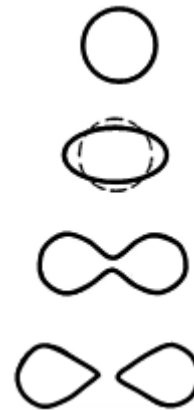


Рис. 29.4

випускання  $\gamma$ -кванта, протона або нейтрона, повернеться в рівноважний стан. Якщо ж енергія, яку вносить нейтрон, велика, то збуджене ядро – крапля починає деформуватися, в результаті відбувається поділ на два осколки, що розлітаються з великими швидкостями внаслідок дії між ними сил електростатичного відштовхування (рис. 29.4).

Для практичного застосування поділу важких ядер найважливіше значення має виділення великої енергії при кожному акті поділу і поява при цьому 2-3 нейтронів. Кожен з цих нейтронів взаємодіє з сусідніми ядрами речовини, що, у свою чергу спричиняє в них реакцію поділу, тобто відбувається лавиноподібне зростання кількості актів поділу. Така реакція поділу називається ланцюговою.

Схематично ланцюгова реакція поділу ядер зображена на рис. 29.5.

Ланцюгова реакція поділу характеризується коефіцієнтом розмноження  $k$  нейтронів, який дорівнює відношенню кількості нейтронів у

даному поколінні до їх кількості в попередньому поколінні.

Виявляється, що не всі вторинні нейтрони, які утворюються, викликають наступний поділ ядер, що приводить до зменшення  $k$ . По-перше, внаслідок скінчених розмірів активної зони (простір, де відбувається ланцюгова реакція)

і великої проникної здатності нейтронів, частина з них покине активну зону раніше, ніж буде захоплена яким-небудь ядром. По-друге, частина нейтронів захоплюється ядрами домішок, що не діляться, і які завжди присутні в активній зоні.

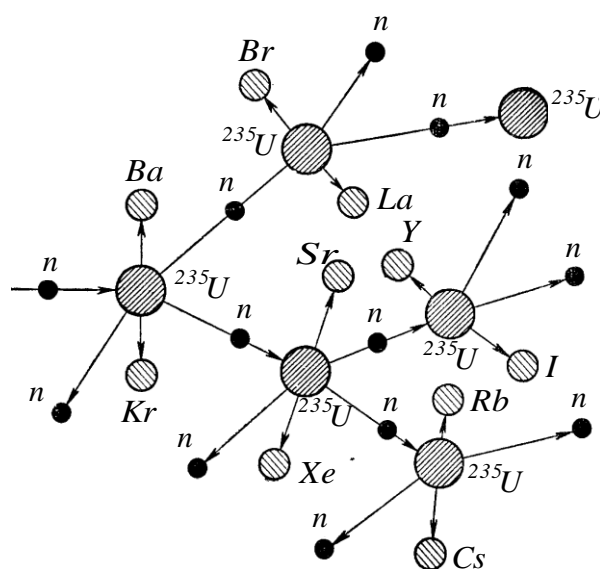


Рис. 29.5

Коефіцієнт розмноження залежить від природи речовини, що ділиться, а для даного ізотопу – від його кількості, а також від розмірів і форми активної зони.

Мінімальні розміри активної зони, при яких можливе здійснення ланцюгової реакції, називають *критичними розмірами*. Мінімальна маса речовини, що ділиться, яка необхідна для здійснення ланцюгової реакції, називається *критичною масою*. Для зменшення втрат нейтронів і критичних параметрів речовини її оточують відбивачем - шаром неподільної речовини, яка має малий ефективний поперечний переріз для захоплення нейтронів і великий переріз для їх розсіяння.

Обчислимо швидкість розвитку ланцюгової реакції. Нехай  $\tau$  – середній час життя одного покоління, а  $N$  - число нейтронів у попередньому поколінні. В даному поколінні їх кількість дорівнює  $kN$ , тобто приріст кількості нейтронів за одне покоління  $dN = kN - N = N(k - 1)$ . Приріст кількості нейтронів за одиницю часу, тобто швидкість наростання ланцюгової реакції

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{\tau}, \quad \frac{dN}{N} = \frac{k-1}{\tau} dt. \quad (29.35)$$

Інтегруючи цей вираз, отримуємо

$$N = N_0 e^{\frac{(k-1)t}{\tau}}, \quad (29.36)$$

де  $N_0$  - кількість нейтронів в початковий момент часу, а  $N$  - їх кількість в момент часу  $t$ . При  $k > 1$  йде наростаюча реакція, кількість поділів безперервно росте, і реакція може стати вибуховою.

При  $k = 1$  йде самопідтримуюча реакція, при якій кількість нейтронів з часом не змінюється. При  $k < 1$  йде загасаюча реакція.

Ланцюгові реакції діляться на *керовані* і *некеровані*. Вибух атомної бомби є некерованою реакцією. Керовані ланцюгові реакції здійснюються в ядерних реакторах.

Як сировинні і подільні речовини в реакторах використовуються  ${}^{235}_{92}\text{U}$ ,  ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ ,  ${}^{238}_{92}\text{U}$ , а також  ${}^{232}_{90}\text{Th}$ . У природній суміші ізотопів урану ізотопу  ${}^{238}_{92}\text{U}$  у 140 разів більше, ніж ізотопу  ${}^{235}_{92}\text{U}$ .

Велике значення в ядерній енергетиці має не лише здійснення ланцюгової реакції поділу, але і керування нею.

Пристрій, в якому здійснюється і підтримується керована ланцюгова реакція поділу, називається *ядерним реактором*.

Розглянемо типову схему реактора на теплових нейтронах (рис. 29.6).

В активній зоні реактора розміщені тепловиділяючі елементи 1 і сповільнювачі 2, в яких нейтрони сповільнюються до теплових швидкостей. Тепловиділяючі елементи (твели) – це блоки з радіоактивного матеріалу, що знаходиться в герметичній оболонці, яка слабо поглинає нейтрони. За рахунок енергії, що виділяється при поділі ядер, твели розігріваються, і їх поміщають в потік теплоносія (3 – канал для протікання теплоносія). Проходячи через активну зону, теплоносій у вигляді газу, води або розплавленого металу

нагрівається і передає теплоту через спеціальний пристрій робочому тілу, наприклад, воді в паротурбогенераторі, а потім знову поступає в активну зону реактора. Активна зона оточується тепловідбивачем 4, що зменшує витік нейтронів.

Керування ланцюговою реакцією здійснюється спеціальними керуючими стрижнями 5 з матеріалів, що сильно поглинають нейтрони. При повністю вставлених стрижнях реакція не йде. При поступовому вийманні стрижнів  $k$  росте і при

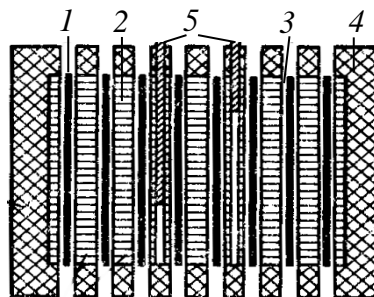


Рис. 29.6

певному положенні доходить до одиниці. В цей момент реактор починає працювати. В міру його роботи кількість матеріалу, який ділиться в активній зоні, зменшується і відбувається її забруднення осколками поділу. Щоб реакція не припинилась, з активної зони за допомогою автоматичного пристрою поступово виймаються керуючі стрижні. В реакторі є аварійні стрижні, введення яких при збільшенні інтенсивності реакції зразу її припиняє. Кожний реактор має біологічний захист - систему екранів із захисних матеріалів.

Ядерні реактори розрізняють:

1) за характером основних матеріалів, що знаходяться в активній зоні (ядерне паливо, сповільнювач, теплоносій); в ролі подільних і сировинних речовин використовують  ${}_{92}^{235}\text{U}$ ,  ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ ,  ${}_{92}^{233}\text{U}$ ,  ${}_{92}^{238}\text{U}$ ,  ${}_{90}^{232}\text{Th}$ , в ролі сповільнювачів - воду (звичайну і важку), графіт, берилій, кадмій; в ролі теплоносіїв – повітря, воду, водяну пару,  $\text{He}$ ,  $\text{Co}$  тощо.

2) за енергією нейтронів (реактори на теплових і швидких нейтронах);

- 3) за характером розміщення ядерного палива і сповільнювача в активній зоні: гомогенні (обидві речовини рівномірно змішані одна з одною) і гетерогенні (обидві речовини розміщуються окремо у вигляді блоків);
- 4) за типом режиму (неперервний й імпульсний);
- 5) за призначенням (енергетичні, дослідні реактори виробництва нових подільних матеріалів, радіоактивних ізотопів і та ін.).

### **Контрольні питання до розділу 8**

1. Які основні характеристики атомного ядра?
2. Опишіть, що являють собою ізотопи, ізобари, ізотони.
3. Розкажіть про склад та будова ядра.
4. Які положення містять феноменологічні моделі ядра: крапельна, змішана, оболонкова?
5. Опишіть дефект маси та енергія зв'язку ядра. Подайте графічну залежність енергії зв'язку ядра від масового числа.
6. Що являє собою спин та магнітний момент ядра?
7. Про що йдеться у законі радіоактивного розпаду ядра.
8. Які властивості та закони альфа-розпаду ядра?
9. Які властивості та закони бета-розпаду ядра?
10. Як було відкрито нейтрино?
11. Іонізаційні методи у лічильниках частинок.
12. Сцинтиляційні лічильники.
13. Метод фотоемульсій.
14. Напівпровідникові лічильники.
15. Які існують види ядерних реакції та закони збереження.
16. Класифікація ядерних реакцій.
17. Позитронний розпад та е-захват.
18. Відкриття нейтрона та реакції викликані ним.
19. Реакції поділу урану та ядерна енергетика.
20. Реакції синтезу ядер та термоядерна енергетика.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гаркуша І. П. Фізика : навч. посіб. у 7 ч. Ч. 3. Електрика і магнетизм / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ “ДП”, 2018. – 163 с.
2. Дідух Л. Д. Електрика та магнетизм : підручник / Л. Д. Дідух. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2020. – 464 с.
3. Січкач Т. Г. Електрика і магнетизм. Курс лекцій : навч. посіб. / Т. Г. Січкач; М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. – Київ : МПУ ім. М.П. Драгоманова, 2021. – 181 с.
4. Гаркуша І. П. Фізика : навч. посіб. у 7 ч. Ч. 4. Коливання і хвилі / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ “ДП”, 2018. – 87 с.
5. Гаркуша І. П. Фізика : навч. посіб. у 7 ч. Ч. 5. Хвильова оптика / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ “ДП”, 2020. – 56 с.
6. Гаркуша І. П. Фізика : навч. посіб. у 7 ч. Ч. 6. Квантова фізика / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ “ДП”, 2020. – 90 с.
7. Гаркуша І. П. Фізика : навч. посіб. у 7 ч. Ч. 7. Фізика атомного ядра і елементарних частинок / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ “ДП”, 2018. – 64 с.
8. Янг Г. Фізика для університетів : підручник / Г. Янг, Р. Фрідман. – Львів : Наутілус, 2018. – 1516 с.

Навчальне видання

**Титаренко** Валентина Василівна  
**Горєв** В'ячеслав Миколайович  
**Подляцька** Анна Валеріївна  
**Журавльов** Михайло Олександрович

## **ФІЗИКА**

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина 2

Видано авторській редакції.

Електронний ресурс.

Підписано до видання 25.04.2025. Авт. арк. 18,0.

Підготовлено до видання  
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.  
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.